ies el SUI
penyafort s/n
cardedeu
938444322

Successions

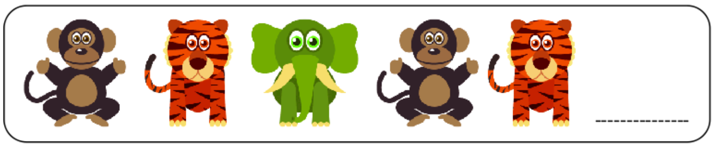
Títol: *Successió d'el·lipses polifòniques* Autor: Eduart Teruel

Matemàtiques, 3r ESO

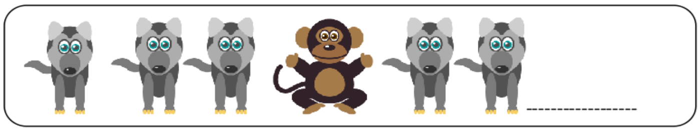
Sèries lògiques

A.1. Observa els següents dibuixos, Per a cada sèrie cal que diguis quin dibuix anirà a continuació i que **expliquis per escrit** per què

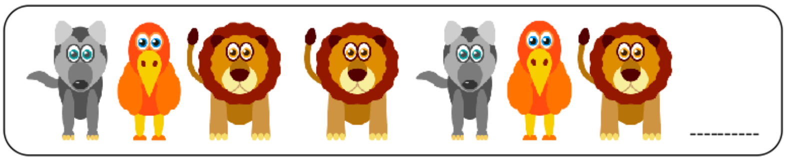
a)



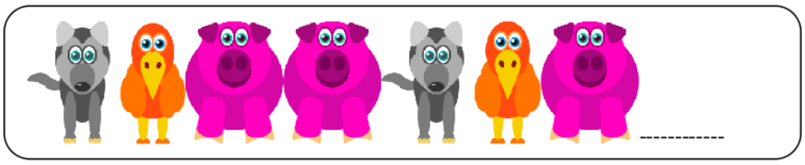
b)



c)

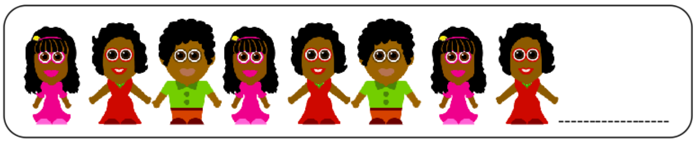


d)

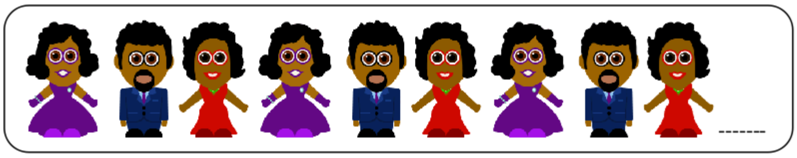


e)

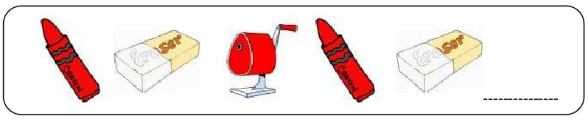
f)



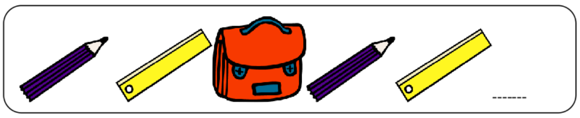
g)



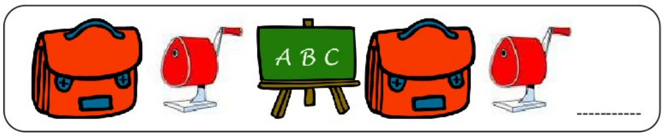
h)



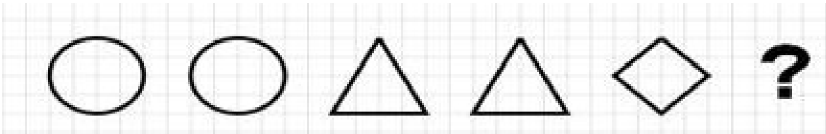
i)



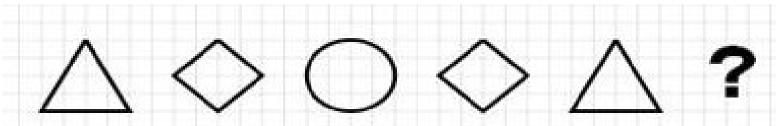
j)



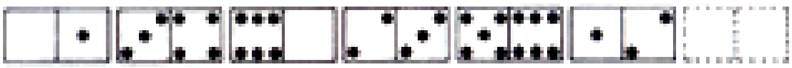
k)



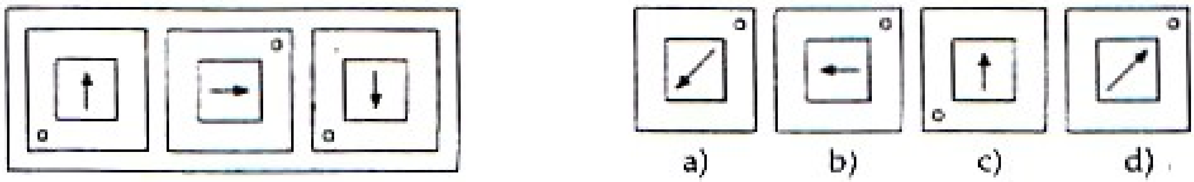
l)

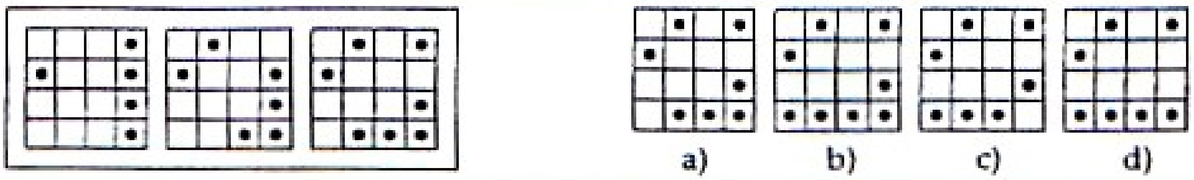


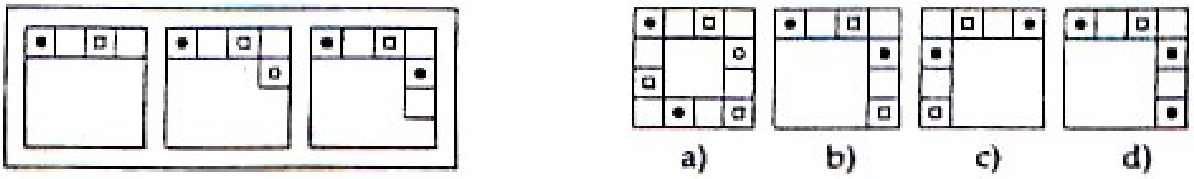
A.2. Quina fitxa de dominó creus que vindria a continuació, per què?

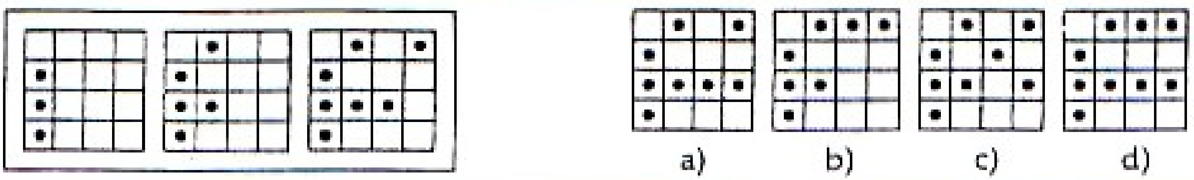


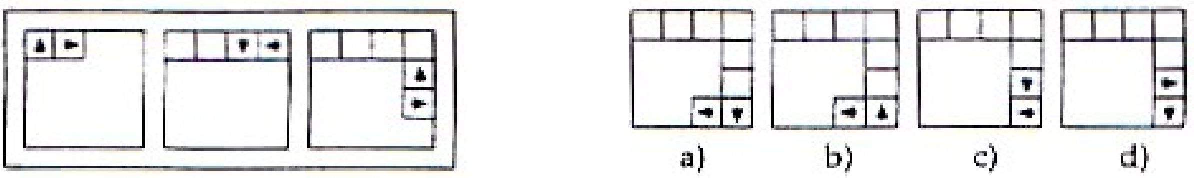
A.3. Observa les sèries de la pàgina següent. Cal que diguis quina és la sèrie que continua. És molt important que **expliquis per escrit** a la teva llibreta per què .

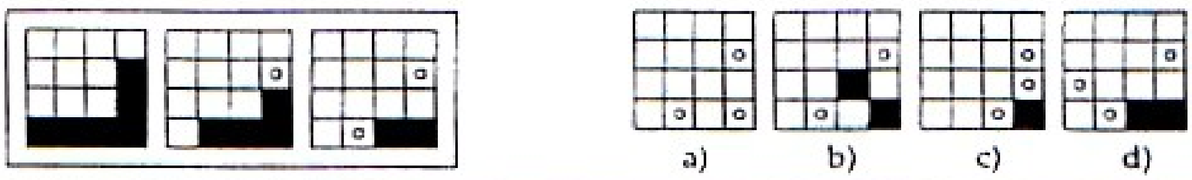

a)
b)
c)
d)

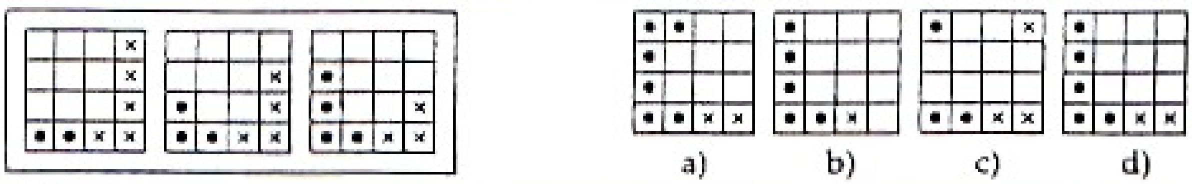

a)
b)
c)
d)

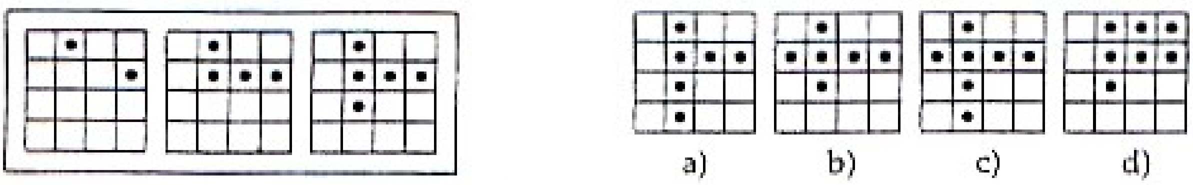

a)
b)
c)
d)


a)
b)
c)
d)


a)
b)
c)
d)


a)
b)
c)
d)


a)
b)
c)
d)


a)
b)
c)
d)

A.4. Ves a la pàgina web http://www.bequiz.net/ i fes el test de sèries lògiques corresponent a **matrius 2.** Escriu a la teva llibreta la puntuació que has tret.

A.5. A la pel·lícula *Los crímenes de Osford* de Àlex de la Iglesia hi ha un assassí que fa assassinats deixant endevinalles. Una de les que deixa és la sèrie següent. Quin dibuix creus que ha d'anar a continuació, Explica per què:

B. Sèries numèriques: Successions.

B.1. Observa les següents sèries numèriques. Cal que escriguis quin nombre és el que continua i quina és la regla que la genera.

a) 1, 2, 3, 4, 5, ...

b) 1, 2, 4, 8, ...

c) 2, 4, 6, 8, ...

d) 5, 10, 15, 20, ...

e) 6, 11, 16, 21,

f) 2, 4, 8, 16, 32

g) 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, ...

h) 1, – 1, 1, – 1, 1, – 1, ...

i) 1,2,4,7,11,16,.....

j) Escriu, de cada una de les sèries anteriors quin és el nombre que estaria a la dècima posició. Explica per què.

NOTACIÓ

- En matemàtiques a les sèries numèriques les anomenem **successions**
- Als nombres de les successions els anomenem **terme** de la successió, així per exemple a la successió 5, 10, 15, 20 diem que *5 és el primer terme* i per resumir encara més podem dir que és el terme a_1. D'aquesta manera escriurem

  $a_1 = 5$, $a_2 = 10$, $a_3 = 15$, $a_4 = 20$, ... $a_{10} = 50$
- moltes vegades una successió es pot escriure amb una fórmula. Per exemple la successió anterior es pot escriure de dos maneres:
  - $a_n = 5 \cdot n$, efectivament cada terme surt multiplicant per 5 el lloc que ocupa, per exemple el 3r terme surt multiplicant 5 x 3 = 15. Aquest tipus de fórmula s'anomena **terme general.**
  - o també amb la **fórmula de recurrència** $a_n = a_{n-1} + 5$, en aquest cas a_{n-1} vol dir el terme anterior,es a dir qualsevol terme d'aquesta successió surt sumant 5 al terme anterior.

B.2. Escriu els 5 primers termes i el terme a_{10} de cada una de les successions següents.

a) $a_n = n + 2$

b) $a_n = n\cdot(n+1)$

c) $a_n = 3n - 10$

d) $a_n = 2\cdot 3^n$

e) $a_n = 5 - 2n$

f) $a_n = -3n^2$

g) $a_n = 5\cdot 2^n$

C. Com trobar el terme general d'algunes successions

Estudi de les diferències

Anomenem **diferència** al resultat de restar a un terme el terme anterior. Observa l'exemple:

Successió:	4	9	14	19...	
Diferència:		5	5	5	5...

En aquest exemple podem veure com l'estudi de les diferències ens ajuda a endevinar el terme següent que haurà de ser 19 + 5 =24.

Si les diferències són constants la successió s'anomena **progressió aritmètica**, en aquest cas el terme general sempre tindrà la forma $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$ on d és la diferència.

Observa l'exemple:

Successió:	4	9	14	19...	
Diferència:		5	5	5	5...

En aquest cas d = 5, per tant $a_n = 4 + (n-1)\cdot 5 = 4 + 5n - 5 = 5n - 1$

C.1. Digues quines de les següents successions són progressions aritmètiques i, per les que ho siguin dóna la diferència **d**, i l'expressió algèbrica del terme general a_n

a) 3, 8, 13, 18, ...

b)2, 6, 18, 54, 162, ...

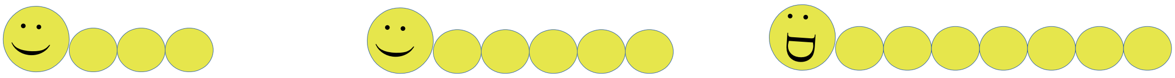
c) 7, 6, 5, 4, 3, ...

d) -6, -1, 4, 9, 14, ...

e) 1, -1, 1, -1, 1, ...

f) 2, 4, 8, 16, 32, ...

C.2. A l'eruga Flip li surten 3 anelles el primer any de vida i 2 anelles més cada any:



1r any 2n any 3r any

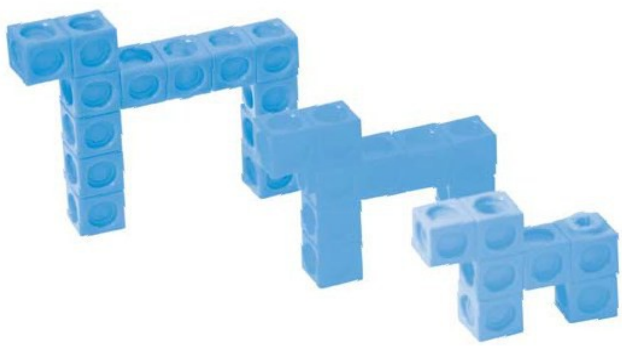
a) Escriu la quantitat d'anelles que Flip tindrà els 5 primers anys i les anelles que tindrà l'any que fa 10.

b) Escriu el terme general de la successió de les anelles d'en Flip

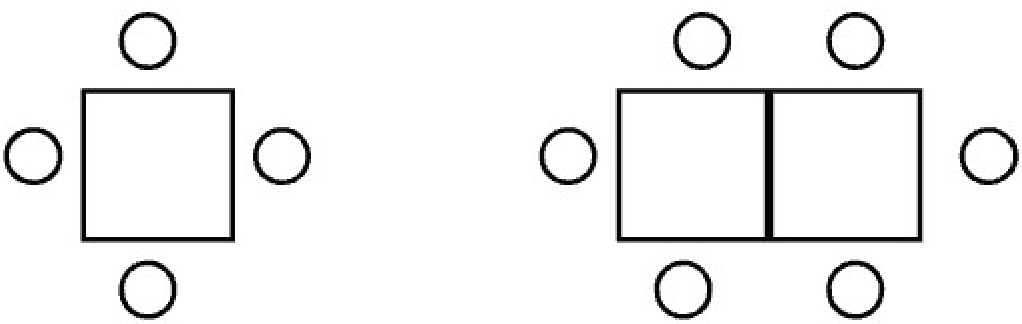
C.3. Investiga quants cubs fan falta per a fer les successió de la figura.

a) Comencem amb potes d'un cub d'altura, després dos cubs,etc Troba els 5 primers termes.

b) Troba el terme $\mathbf{a_{10}}$ i intenta trobar el terme general.



C.4. En un restaurant tenen unes taules per a 4 comensals. Si en venen més han d'ajuntar taules tal com indica el dibuix. Investiga quants comensals hi caben amb 1, 2, 3, 4, 5 i 10 taules alineades. Intenta trobar el terme general de la successió.



Estudi de les Raons (divisions)

Ara en comptes de restar a un terme l'anterior, el dividirem. Aquestes divisions s'anomenen **raons** entre els dos termes.

Si la raó entre els termes sempre és la mateixa direm que la successió és una **progressió geomètrica**, en aquest cas per trobar un nou terme només cal multiplicar per la raó. Observa l'exemple.

Successió:	3	6	12	24...	
Raó:		2	2	2	2...

El terme general d'una progressió geomètrica serà $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ on r és la raó.

El terme general de l'exemple anterior és $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

C.5. Digues quines de les següents successions són progressions geomètriques i, per les que ho siguin dóna el primer terme a_1, la raó **r** i l'expressió algèbrica del terme general a_n

a) 2, 4, 6, 8, 10, ..

b) 2, 4, 8. 16, 32, ...

c) 625, 375, 225, 175, 105, ...

d) 1, 4, 9, 16, 25, ...

e) 0,3, 0,03, 0,003, 0,0003, ...

C.6. Observant les successions anteriors, escriu quina és la diferència entre una progressió geomètrica de raó més gran que 1 i una de raó més petita que 1. (suggeriment: troba amb la calculadora molts termes de la progressió i ves observant els resultats)

C.7. Escriu a la teva llibreta 2 exemples de progressions aritmètiques i 2 de progressions geomètriques. Explica per què ho són i escriu el terme general.

C.8. Una de les situacions de la vida real on es poden aplicar progressions geomètriques és al creixement de població. Imagina que un poble té actualment una població de 15000 habitants. (a_1 = 15000) suposem que creix amb una raó de r = 1,1 cada any (augmenta un 10%).

a) Quants habitants tindrà al cap d'un any?

b) Calcula els habitants que tindrà els 5 primers anys.

c) Quants habitants tindrà al cap de 10 anys?

d) Escriu la fórmula del terme general.

C.9. En Joan té 20000€ a la caixa i els ha posat en un fons que produeix un interès del 3% anual, és a dir que cada any que passa multiplica el seu capital per 1,03.

a) Quants euros tindrà al cap d'un any?

b) I al cap de 5 anys?

c) Troba el terme general i calcula quan diners tindrà al cap de 20 anys

C.10. Analitzarem com va augmentant el gruix d'un full a mesura que l'anem doblegant.

a) En primer lloc, investiga com es pot mesurar el gruix d'un full. Explica la teva estratègia i digues quin és el resultat.

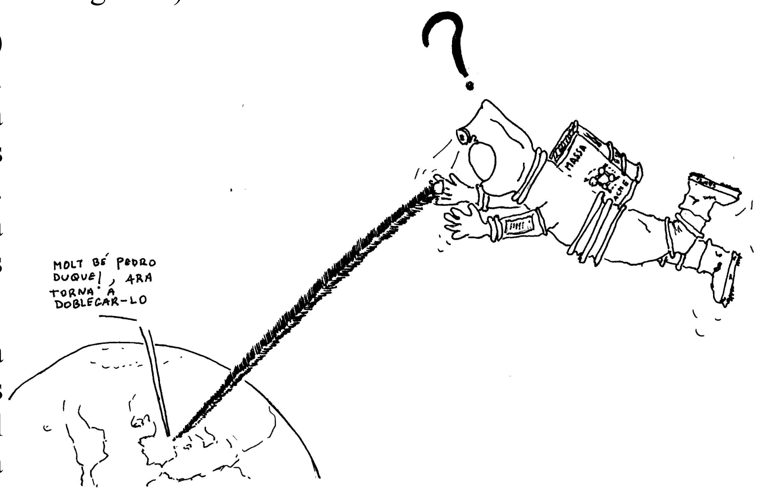
b) Pren un full de paper i doblega'l pel mig Quin és ara el gruix del paper doblegat?

c) Torna a doblegar-lo i calcula el gruix del plec.

d) Calcula com va augmentant el gruix del plec mentre l'anem doblegant fins cinc vegades (escriu aquests nombres en forma de successió)

e) Quin serà el gruix del plec després de doblegar-lo 10 vegades?

f) Sense calcular-ho, fes una conjectura (una suposició a ull) de quantes vegades creus que s'hauria de doblegar el paper perquè el gruix superés 1 km (considera que el full és prou gran com per poder doblegar moltes vegades!).



g) Calcula els gruixos (en metres) fins que se superi el km. Organitza les dades en una taula que relacioni nombre de doblecs amb gruix del plec en metres. Fes els càlculs que facin falta fins trobar el nombre de plecs per tal d'arribar a 1 Km.

h) Sense calcular-ho, fes una conjectura de quantes vegades creus que s'hauria de doblegar el paper perquè el gruix superés la distància entre la Terra i la Lluna (imagina't que el full és prou gran com per poder doblegar-lo moltíssimes vegades!) Nota: La distància entre la terra i la lluna és de 384 400 km)

i) Escriu la fórmula del gruix del plec en funció del nombre de doblecs. Què observes?

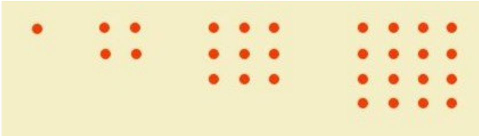
j) Utilitza la tecla x^y de la calculadora per investigar quants doblecs caldria fer per superar la distància Terra-Lluna.

k) A la pràctica, quantes vegades pots arribar a doblegar un full DIN A4 ?

Algunes successions curioses

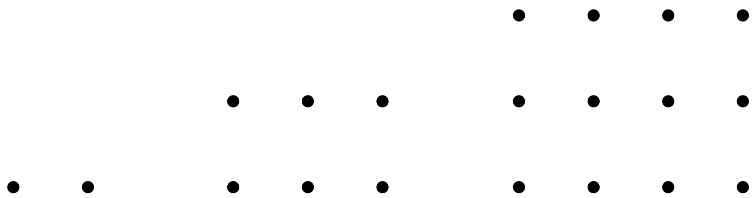
En tots els exemples següents cal que trobis fins el terme 10 i, si pots, el terme general. Cal estudiar les diferències o les raons.

C.11. Podem crear la successió dels **nombres quadrats** si anem omplint quadrats amb fitxes (podeu experimentar amb pedres o llenties) tal i com es veu al dibuix. Calcula els 5 primers termes, el terme $\boldsymbol{a_{10}}$ i el terme general.

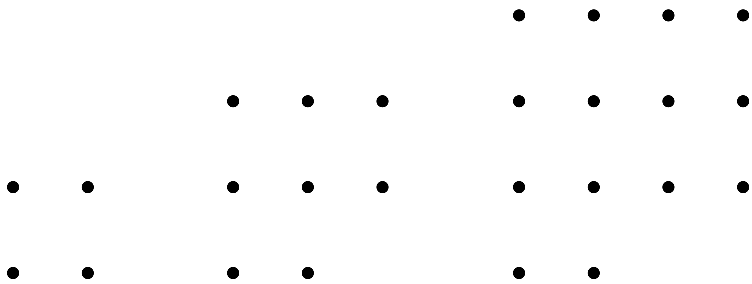


C.12. Troba els 5 primers termes, el terme a_{10} i el terme general de la successió feta amb fitxes en els següents cassos:

a)

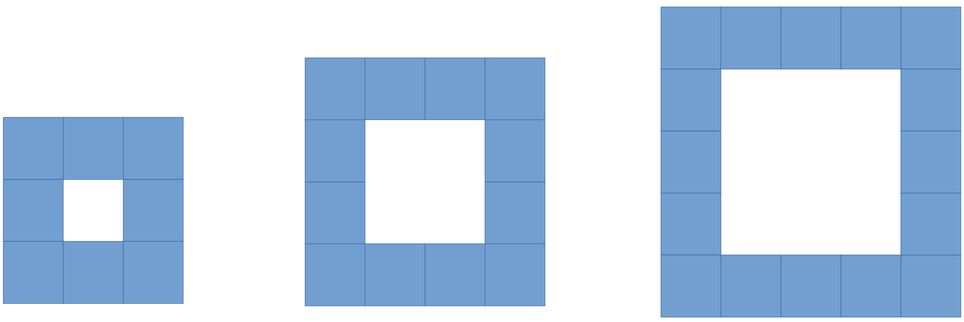


b)

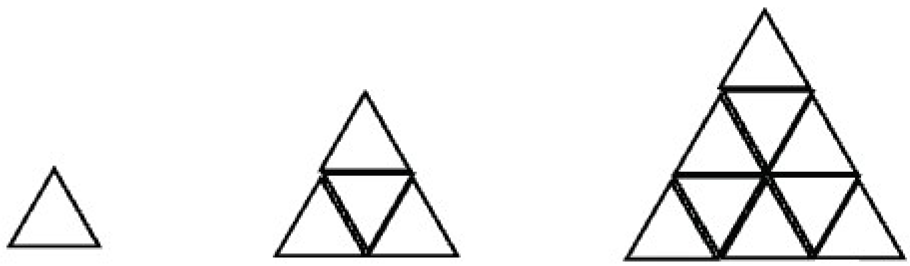


C.13. Investiga quantes rajoles quadrades o triangulars fan falta per a cada figura, troba els 5 primers termes, el terme a_{10} i intenta trobar el terme general.

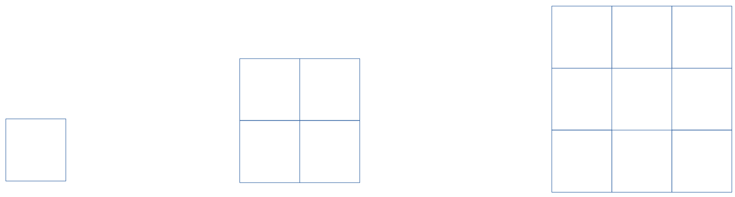
a)



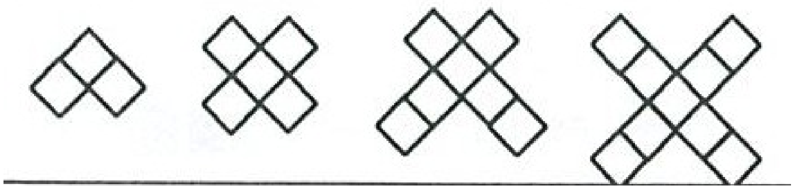
b)



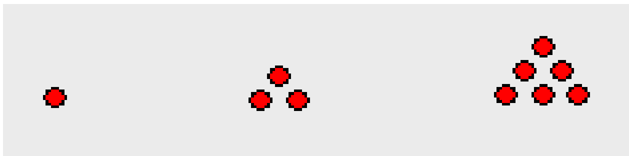
c)



d)



C.14. Si anem omplint triangles amb fitxes tal com es veu en el dibuix, surt una successió anomenada dels nombres triangulars. Calcula els 5 primers termes, el terme a_{10} i el terme general



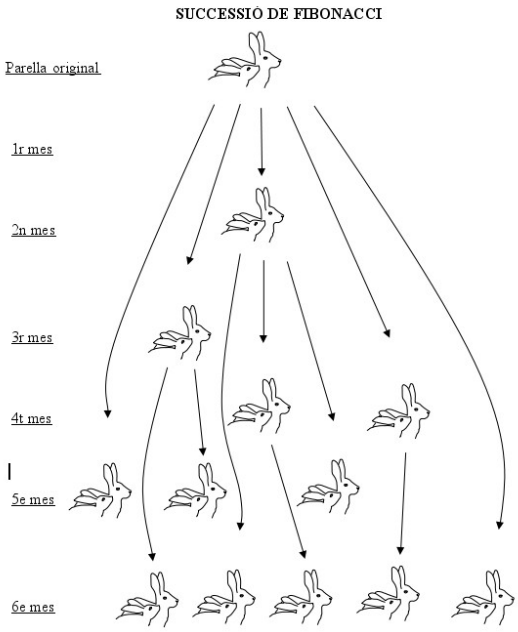
C.15. Si plantem un gra de blat surt una planta amb 10 grans de blat, si els tornem a plantar surten 10 grans de cada gra i així successivament. Escriu la successió. Quin tipus de successió és? Quin és el terme general?

C.16. Cadascú de vosaltres ha d'inventar-se una activitat similar a les anteriors, pot ser amb escuradents, rajoles, pedres, cubs o qualsevol altre cosa. Cal que trobeu els 5 primers termes i el terme 10. El professor en triarà alguna que fareu tots els de la classe.

C.17. Escriu un resum explicant clarament què és una progressió aritmètica i què és una progressió geomètrica. Posa un exemple de cada.

D. La successió més famosa, la successió de Fibonacci

Quantes ***parelles*** *de conills obtindríem al final d'un any, si, començant amb una parella, cada parella produeix cada mes una nova parella que pot reproduir-se al segon mes d'existència suposant que no mor cap conil*l?

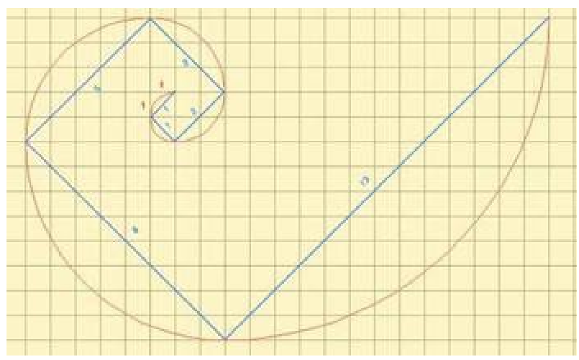


A l'Edat Medieval un matemàtic anomenat **Leonardo de Pissa** (1180-1256) més conegut amb el nom de **Fibonacci** fou qui va introduir la numeració indoaràbica a Europa. Li agradaven molt els jocs numèrics i va plantejar el problema anterior. La successió formada pel nombre total de parelles de conills que hi ha cada mes s'anomena **successió de Fibonacci.**

D.1. Buscar què són els nombre indoaràbics i per què va ser tan important la seva introducció a Europa.

D.2. a) Escriu els termes de la successió corresponent al nombre de parelles que hi ha cada mes.

b)Troba una fórmula de recurrència.



D.3. Observa detingudament el dibuix de la dreta.

a) Començant des de el centre i prenen com a unitat la diagonal d'un quadrat de la quadricula escriu la successió que representa els costats de la recta poligonal dibuixada.

b) Que observes?

c) Quina llargada tindria el costat següent?

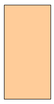
D.4. Observa ara la figura anterior i esbrina com s'ha dibuixat l'espiral. Intenta dibuixar-la a la teva llibreta.

D.5. A Internet pots trobar molts llocs de la natura o l'art on és present la successió de Fibonacci. Fes una presentació amb ordinador incloent, almenys 5 diapositives amb imatges diferents.

E. *Altres recerques*

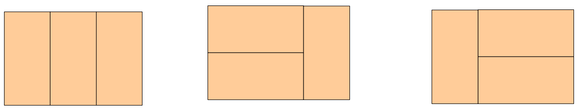
E.1. Els totxos:

a) Només hi ha una manera de disposar un totxo per fer una paret d'un totxo i alçada la part gran del totxo:



b) Si volem fer parets de dos totxos tenim dues possibilitats

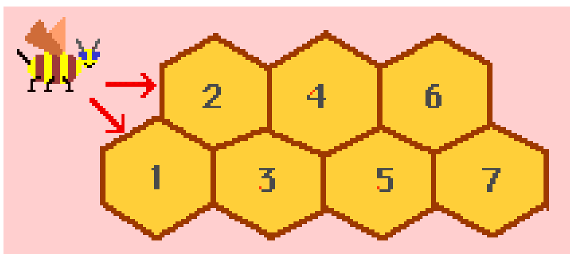
c) Si les parets són de tres totxos tenim tres possibilitats:



d) Quantes possibilitats hi ha, de fer parets de 4, 5, 6 i més totxos?

E.2. Les abelles

Tenim dues files d'hexàgons en les que les abelles volen entrar al rusc. Les abelles només poden fer moviments cap a la dreta, cap amunt o cap avall, però mai poden retrocedir.



a) Per entrar dins l'hexàgon **1** l'abella sols pot fer-ho d'una manera.

b) Per entrar a la cel·la **2** l'abella pot anar directament a la **2** o passar primer per la cel·la **1** (dues formes)

c) Per anar a la cel·la **3** pot fer **1-3**; **1-2-3** o bé **2-3** (tres maneres diferents)

d) Quantes maneres diferents té l'abella per anar a la cel·la **4**? I a la **5**? I la **6**?...

F. Suma de progressions

Suma de progressions aritmètiques

Volem calcular el nombre de campanades que toca durant un dia un rellotge que només toca a les hores.

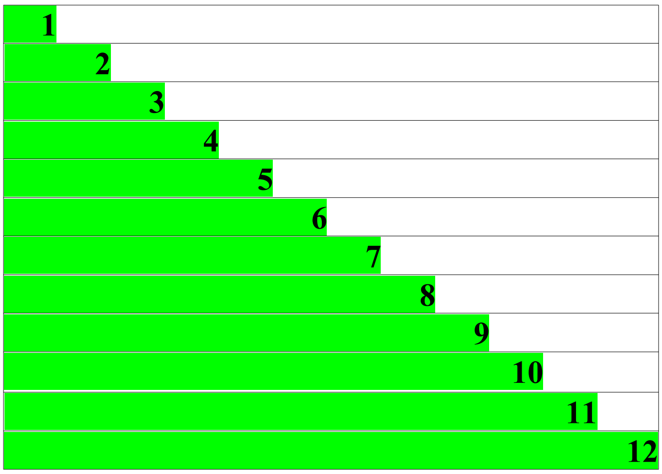
Per això n'hi ha prou amb sumar les campanades de mig dia i multiplicar per dos, es a dir calcular

S_{12} = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12 i després multiplicar per 2.

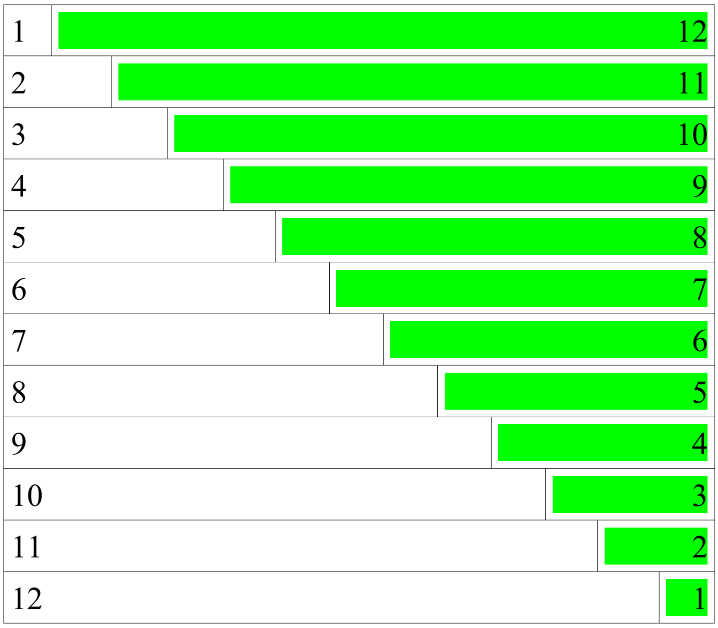
Aquest càlcul és molt fàcil de fer, però veurem un procediment que després ens permetrà fer càlculs molt complicats.

Observem primer que el nombre de campanades formen una progressió aritmètica de diferència 1.

Representarem cada terme com un rectangle de base el seu valor i altura 1



Afegim ara a la dreta els rectangles corresponents a la progressió agafada a l'inrevés.



Observem que S_{12} coincideix amb la meitat de l'àrea del rectangle de base (el primer + l'últim) i d'altura el nombre de termes que volem sumar, en aquest cas 12, per tant:

$S_{12} = \dfrac{(12+1)\cdot 12}{2} = 78$ Es a dir el nombre de campanades en mig dia és 78.

Generalitzem ara aquest procediment per qualsevol progressió aritmètica. Suposem que tenim una progressió aritmètica de primer terme $\mathbf{a_1}$ i diferència $\mathbf{d}$ i volem sumar els $\mathbf{n}$ primers termes:

a_1	a_n
$a_2=a_1+d$	a_{n-1}
$a_3=a_1+2d$	a_{n-2}
...	...
...	...
$a_{n-1}=a_1+(n-2)\cdot d$	a_2
$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$	a_1

Observem que l'altura del rectangle és n i la base ($a_1 + a_n$) , per tant:

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}}$$

F.1. Calcula la suma dels 30 primers nombres de les progressions aritmètiques següents

a) $a_1 = 10 \quad d= 5$

b) $a_1 = -3 \quad d= 4$

c) $a_1 = 0.5 \quad d= 9$

d) $a_1 = 12 \quad d= -3$

F.2. Calcula la suma dels 10 primers termes d'una progressió aritmètica de primer terme 3 i diferència 5. Calcula també la suma dels 100 primers termes.

F.3. Sabem que una progressió aritmètica té el primer terme 5 i el segon terme és 9. Calcula la diferència. Troba la suma dels 15 primers termes.

F.4. En una progressió aritmètica el primer terme és 15 i els segon terme és 11. Calcula la diferència de la progressió i la suma dels 20 primers termes.

F.5. La Marta decideix fer tots els exercicis de Matemàtiques en deu dies. El primer dia fa 3 exercicis, i després en fa cada dia dos més que el dia anterior. Esbrina el nombre total d'exercicis que ha de fer.

F.6. Calcula la suma de tots els múltiples de tres entre 0 i 100.

F.7. Un professor decideix col·locar els 36 alumnes en files, de manera que a la primera fila n'hi ha un, a la segona dos, tres a la tercera, i així successivament. Quantes files podrà formar?

Suma de progressions geomètriques

Hem vist que una progressió geomètrica de primer terme a_1 i raó r té com a terme general $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ .Volem calcular ara la suma dels n primers termes S_n

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = a_1 + (a_1\cdot r) + (a_1 \cdot r^2) + \ldots\ldots + (a_1\cdot r^{n-1})$$

Calculem ara $\quad r \cdot S_n = (a_1\cdot r) + (a_1 \cdot r^2) + \ldots\ldots + (a_1\cdot r^{n-1}) + (a_1\cdot r^n)$

Restem ara $r \cdot S_n - S_n$ observem que els termes són iguals i per tant al fer la resta desapareixen:

$r \cdot S_n - S_n = a_1 \cdot r^n - a_1$ i per tant resolent l'equació:

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 \cdot r^n - a_1}{r-1}}$$

Es a dir només necessitem el primer terme i la raó per poder calcular qualsevol suma.

F.8. Calcula la suma dels 20 primers termes de les progressions geomètriques següents:

a) $a_1 = 10 \quad r = 0.5$

b) $a_1 = 4 \quad r = 2$

c) $a_1 = 45 \quad r = -1$

d) $a_1 = 3 \quad r = 0.01$

F.9. D'una progressió geomètrica sabem que el primer terme és 5 i la seva raó és 2. Calcula la suma dels 15 primers termes.

F.10. El primer terme d'una progressió geomètrica és 4 i els segon és 8. troba la raó de la progressió i la suma dels 10 primers termes.

F.11. En una progressió geomètrica el primer terme és 3 i el segon és 1. Troba la raó de la progressió. Troba també la suma dels 10 primers termes.

F.12. Resol els problemes següents, sabent que són progressions geomètriques

a) $a_1 = 3 \quad r = 4$ i $n = 5$, troba a_n i S_5

b) $a_1 = 12 \quad r = 1{,}2$ i $n = 8$, a_n i S_8

G. Suma d'una progressió geomètrica indefinida. La noció d'infinit.

Quan la **raó** d'una progressió geomètrica és **més petit que 1**, els termes de la progressió són decreixents i cada cop s'acosten més a un nombre. Diem aleshores que la progressió és **convergent** i que el **límit** de la successió és aquest nombre.

G.1 Donada la progressió geomètrica de primer terme 1 i raó 1/2 .

a)Troba el terme general, busca amb la calculadora a_{100} , a_{200}, a_{300} . Què observes?

b)Podries calcular amb la calculadora a_{10000}?

c)Quin és el límit d'aquesta successió?

Paradoxa de Zenó (489 a.C). Aquil·les i la tortuga.

Aquil·les i una tortuga han de competir en una cursa. Aquil·les com a bon esportista i donat que és molt més ràpid que la tortuga, li dóna un tros d'avantatge. Un cop començada la cursa quan Aquil·les arribi al punt on estava la tortuga aquesta ja haurà avançat un tros. Així Aquil·les s'acostarà cada cop més a la tortuga però mai arribarà a atrapar-la.

Aquesta paradoxa ha estat molt estudiada al llarg de la història.

G.2 Estudiarem aquesta paradoxa suposant que la velocitat d'Aquil·les és el doble que la de la tortuga i a més que l'avantatge inicial és d'un kilòmetre.

a) Fer en un mateix eix de coordenades dos gràfics (un per Aquil·les i l'altre per la tortuga) que representin l'espai recorregut segons el temps transcorregut. Atraparà a la tortuga?

Per calcular el camí d' Aquil·les abans d'atrapar la tortuga caldrà sumar:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+.....$$

a) Identifica aquesta successió. Existeix el seu límit?

c) Escriu la fórmula per calcular S_n substituint a_1 i r per els seus valors.

d) Per calcular aquesta suma infinita substitueix ara $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ per el seu límit.

e) Quant val S_n quan la n tendeix a infinit? Reflexiona que vol dir això.

H. Annex : Exercicis d'ampliació

La llegenda de l'inventor dels escacs

Fa molt temps regnava a l'Índia un rei anomenat Iadava. Els seus amics estaven molt preocupats per ell, doncs últimament estava sempre trist i pensatiu. Al llogaret de Lahur Sessa, un jove brahman, va arribar la notícia de la tristesa del monarca i aquest va inventar un joc ("els escacs") que pogués distreure al príncep i alegrar el seu cor.

Sessa va explicar al rei Iadava, als visirs i cortesans les regles del joc. Era un gran tauler quadrat dividit en 64 caselles. Sobre ell es col·locaven dues sèries de peces, unes blanques i altres negres. Les formes de les figures es repetien simètricament i hi havia regles curioses per a moure-les.

Iadava va quedar impressionat per l'enginy de Sessa i li va oferir que tries el que volgués: or, joies, palaus o terres... però Sessa "només" li va demanar grans de blat:

Un gra per la primera casella del tauler, 2 per la segona, 4 per la tercera, 8 per la quarta, i així doblant successivament fins a l'última casella.

Al sentir la petició de Sessa tots van riure, Iadava encara que estranyat, va cridar als algebristes de la seva cort perquè fessin el càlcul del nombre de grans que havia de lliurar al brahman.

a) Quants grans de blat es necessiten per cada casella de la primera fila?

b) Si sabem els grans que hi ha en una casella com podem saber els de la casella següent?

c) Quants grans de blat es necessiten per omplir la primera fila?

d) Quants grans es necessitaran per omplir tot el taulell?

Anem a reflexionar que significa aquest nombre. Busca les dades necessàries per poder contestar:

e)Quants kg de blat són necessaris?

f) Quantes vegades el pes de la Terra representen aquests grans de blat?

g) Quina és la producció mundial anual de blat?

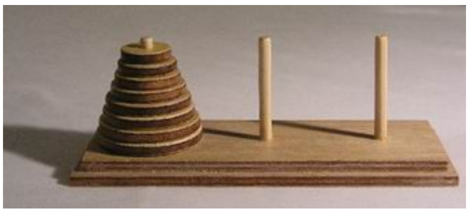
h) Quantes collites serien necessàries?

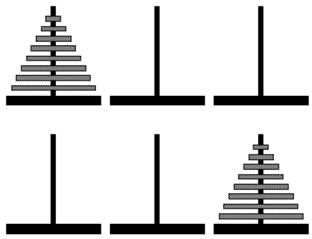
i) Va poder complir el rei? Com creus que continua la història?

Les Torres de Hanoi

Una antiga llegenda explica que en el gran temple de Benarés, sota la cúpula que assenyala el centre del món, reposa una safata de coure a la que estan plantades tres agulles de diamant, més fines que el cos d'una abella. En el moment de la creació, Déu va col·locar en una de les agulles 64 discos d'or pur, ordenades per grandàries, des del més gran que reposa sobre la safata, fins el més petit, a dalt de tot del munt. És la torre de Brahma. Incansablement dia rere dia, els sacerdots del temple mouen els discos fent-los passar d'una de les agulles a un altra, d'acord amb les lleis fixes i immutables de Brahma, que dicten que el sacerdot en exercici no mogui més d'un disc a la vegada, ni el posi sobre d'un disc de menor grandària. El dia en que els seixanta i quatre discos hagin estat traslladats de l'agulla a la que Déu els va posar al crear el món a una altra agulla, el temple i tots els brahmans s'ensorraran, quedant reduïts a cendres i, amb gran estrèpit, el món desapareixerà.

Si avui comencen a moure els discos. Quan creus que serà la fi del món?





Si volem calcular quants moviments calen per canviar els 64 discos és millor que comencem a estudiar la solució amb una quantitat més reduïda.

a) Començar, comptant el número mínim de moviments necessaris per canviar 3 discos.

b) Intentar ara estudiar els moviments necessaris per transferir 4 discos.

c)Estudiar ara quants moviments s'han de fer amb 5 discos.

d) En una taula podem resumir els resultats obtinguts (intentar endevinar els resultats següents a partir dels anteriors)

Discos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Moviments	1	3								

e) Trobar una manera de calcular quants moviments caldran amb qualsevol quantitat de discos?

f) Imaginar que els sacerdots mouen una peça cada segon, sense descansar cap moment. Calcular quants anys trigaran en canviar totes les peces.