INSTITUT EL SUI

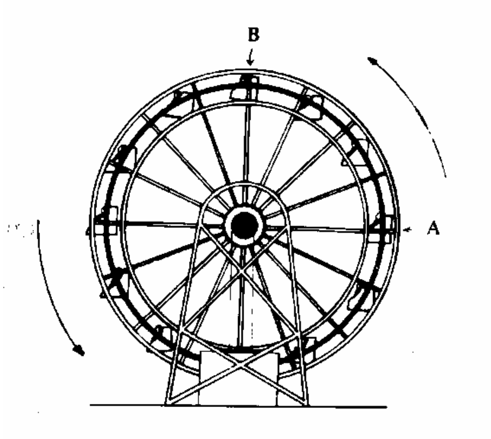
FUNCIONS

Matemàtiques. 4t ESO

A. Funcions: introducció

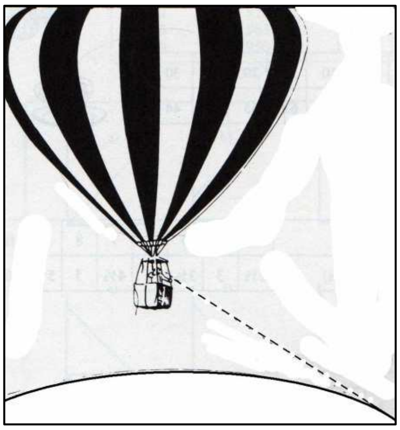
A.1. La sínia

La sínia del dibuix dóna una volta cada 16 segons. Utilitzant el mateix parell d'eixos, fes dos gràfics que mostrin com varia l'altura de la cistella A i la de la B durant un minut. Descriu com canviarien els gràfics si la sínia girés més apressa.



A.2. Fins a quina distància es pot veure?

Altura del globus (m)	Distància fins l'horitzó (km)
5	8
10	11
20	16
30	20
40	23
50	25
100	36
500	80
1.000	112



Fixa't amb molta atenció en la taula anterior.

Sense marcar els punts exactament, intenta dibuixar el gràfic aproximat que descrigui la relació entre l'altura del globus i la distància a l'horitzó.

Explica el mètode que has utilitzat

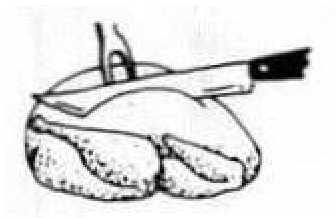
A.3. Taules i gràfics

Sense dibuixar els punts, escull entre els gràfics que hi ha a la pàgina següent aquell que s'ajusti millor a cadascuna de les taules. Copia en cada cas el gràfic més convenient, posa-hi el nom de la variable als eixos i explica perquè l'has triat. Si no pots trobar el gràfic que desitges, dibuixa'n un que hi vagi bé.

1. El cafès'està refredant.

Temps (minuts)	0	5	10	15	20	25	30
Temperatura (ºC)	90	79	70	62	55	49	44

2.Temps de cocció d'un gall dindi.

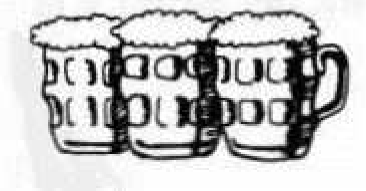


Pes (kg)	3	4	5	6	7	8	9	10
Temps (hores)	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6

3. Com creix un bebè abans de néixer.

Edat(mesos)	2	3	4	5	6	7	8	9
Llargada (cm)	4	9	16	24	30	34	38	42

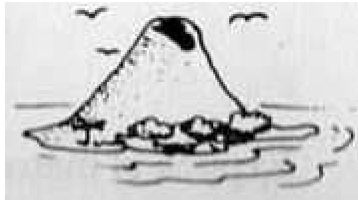
4. Després de veure cervesa.



Temps (hores)	1	2	3	4	5	6	7
Alcohol a la sang (mg/100 ml)	90	75	60	45	30	15	0

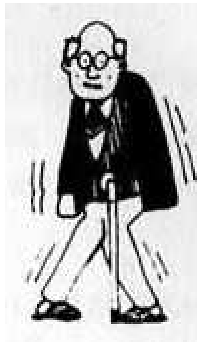
5. Nombre d’espèciesd’ocells en una illa volcànica.

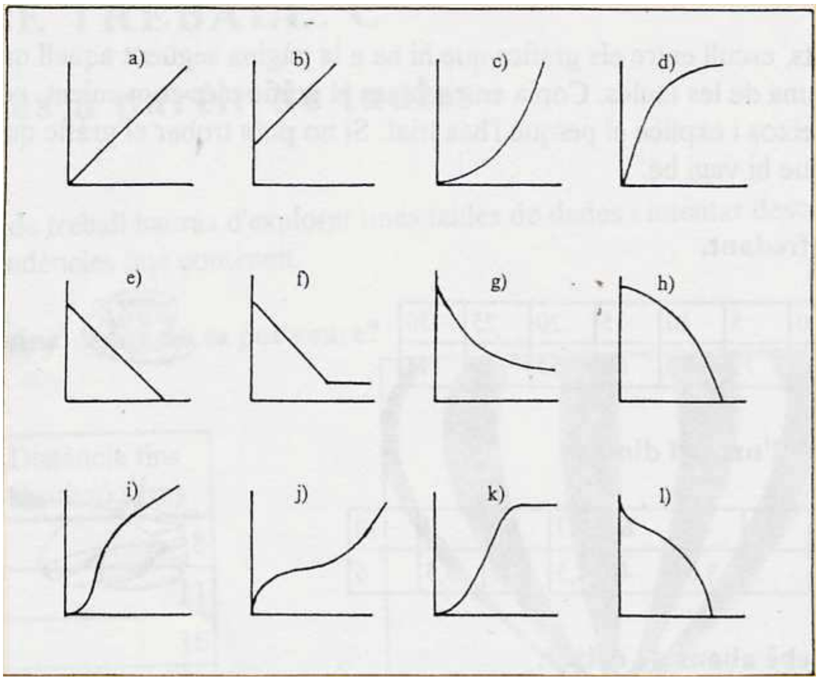
Any	1.880	1.890	1.900	1.910	1.920	1.930	1.940
Nombre d’espècies	0	1	5	17	30	30	30



6. Esperança de vida.

(anys)	Nombre de supervivents	Edat (anys)	Nombre de supervivents
0	1.000	50	913
5	979	60	808
10	978	70	579
20	972	80	248
30	963	90	32
40	950	100	1





A.4. Una polsada correspon a 2,54 cm. Indiquem per la lletra x un valor en polsades i per y el seu equivalent en centímetres:

a) Escriu la fórmula per passar depolsades a cm utilitzant les variables x i y.

b) Omple la taula següent:

x (polsades)	**0**	**0.1**	**0,5**	**1**	**1.5**	**2**	**3**	**5**	**6**	**10**
y (cm)										

c) Fes un gràfic de la funció. De quin tipus és aquesta funció?

DEPENDÈNCIA ENTRE LA VARIABLE INDEPENDENT I LA DEPENDENT

Les situacions anteriors expressaven "dependència" entre dues quantitats variables. Aquesta "dependència" pot venir donada de diverses formes :

- per un gràfic,
- per una taula,
- per una regla, fórmula, ...

Sigui quina sigui la manera d'expressar-la, les característiques comunes d'aquestes situacions són:

- que hi ha dues variables,
- que una depèn de l'altra: els valors que pren una d'elles venen donats pels que agafa l'altra.

Considerem per exemple la funció de la taula de l'exercici A.3 "el Cafè s'està refredant.

t (min)	T (ºC)
0	90
5	79
10	70
15	62
20	55
25	49
30	44

Hi ha dues variables: el temps i la temperatura. El temps en minuts pot agafar **qualsevol** valor dins del conjunt dels nombres reals positius entre 0 i 30, per això l'anomenem **variable independent.** La temperatura de la substància **depèn** o **és funció** del temps; disposem d'una taula que ens permet, donat el temps, determinar la temperatura. La taula assigna a **cada** valor del temps **un i només un** valor de la temperatura. Direm que la temperatura és la **variable dependent**; aquesta variable pren valors en el conjunt dels nombres reals entre 44 i 90.

(Els **nombres reals** són els nombres que obtenim com a resultat d'una mesura, per tant són els nombres decimals tant positius com negatius, enters o no).

CORRESPONDÈNCIA I FUNCIÓ

Tal com hem vist a l'exemple anterior una funció està formada per:

a) Un conjunt A de valors que pot agafar la variable independent, anomenat **domini** de la funció.

b) Un conjunt B de valors que pot agafar la variable dependent, anomenat **conjunt d'arribada.**

c) Una regla que assigna a **cada** element del domini **un i només un** element del conjunt d'arribada.

En el cas que la regla no compleixi la condició que a cada element li correspongui **un i només un** element del conjunt d'arribada, direm que la relació entre els dos conjunts no és una funció. En aquest cas direm que només és una **correspondència**.

A.5. La taula següent indica el cost d'enviar una carta segons el seu pes. És la taula que fan servir els estanquers per saber el segell que cal posar a la carta.

Pes de la carta (g)	Preu del segell (€)
fins a 20	0.28
de 20 a 50	0.40
de 50 a 100	0.63
de 100 a 250	1.05
de 250 a 500	2.00
de 500 a 1000	2.85

a) Digues quina és la variable independent i quina la variable dependent.

b) La regla que determina la relació entre les dues variables fa que aquesta relació sigui una funció? Per què?

c) En el cas que sigui funció digues quin és el domini de la funció, suposant que una carta pot pesar com a màxim 1000 g, i quin és el conjunt d'arribada.

d) Fes el gràfic d'aquesta funció posant la variable independent a l'eixd'abscissesi la dependent al d'ordenades.

A.6. Considera l'exercici anterior sobre el franqueig de les cartes.

a) Fes la representació gràfica de la relació entre les dues variables si intercanviem el domini pel conjunt d'arribada, o sigui si posem la variable pes a l'eixd'ordenades i la variable preu a l'eix d'abscisses.

b) Aquesta relació que has representat, és una funció?

A.7. Per a cadascuna de les funcions del'exercici **A.3** contesta:

a) Quina és la variable independent i quina la dependent.

b) Es tracta d'una funció?

c) Quin és el domini i quin el conjunt d'arribada.

d) Si intercanviem el domini pel conjunt d'arribada, seria una funció?

A.8. Prenent com a conjunt inicial i conjunt d'arribada els nombres reals, i com a regla la que assigna a cada nombre real la seva arrel quadrada:

a) La correspondència així definida és una funció? Raoneu la resposta.

b) I si el domini fos el conjunt dels nombres reals positius?

c) I si a més la regla assigna a cada nombre la determinació positiva de l'arrel quadrada?

SIMBOLITZACIÓ D'UNA FUNCIÓ

Considerem una altra vegada la funció de l'exercici **A.5**, del franqueig de les cartes.

És còmode posar un nom a la funció : l'anomenarem funció **f**. (Hauríem pogut posar-li un altre nom d'una o més lletres).

f està formada per dos conjunts:

A = Nombres reals de 0 i 1000. Aquest és el conjunt de sortida o **domini**de la funció

B = Nombres reals de 0.28 a 2.85. És el **conjunt d'arribada** i

una regla (la taula de l'estanquer).

Per indicar que **f** és una funció d'A en B escriurem:

$f : A \longrightarrow B$ ho llegirem "f és una funció d'A en B "

La variable independent és el pes i la variable dependent el preu. Direm que el **preu és funció del pes.**

Esquemàticament ho escriurem:

Preu = f (pes) que ho llegirem "el preu és funció del pes"

o bé ho escriurem:

pes $\longrightarrow$ preu = f (pes)

i anomenant **x** al pes i **y** al preu

x $\longrightarrow$ y = f (x) que es llegeix "a **x** li correspon **y** ; **y** és igual a **f** de **x**"

Continuant amb l'exemple de les cartes, per indicar que el franqueig d'una carta de 24 g és de 0.40 € s'utilitza el simbolisme:

24 $\longrightarrow$ 0.40 o bé f(24) = 0.40 24 $\longrightarrow$ f(24) = 0.40

També hi ha altres maneres d'expressar-ho amb una frase:

- dir que 0.40 és la **imatge** de 24, o bé
- que a 24 li correspon 0.40,o bé
- que 24 és la **antiimatge** de 0.40.

Observa que les imatges són sempre elements del conjunt d'arribada, i les antiimatges són elements del domini.

A.9. Si **f** és la funció del franqueig de les cartes:

a) Quina és la imatge de 110? Escriu-ho amb llenguatge simbòlic.

b) Indica una antiimatge de 0.63. Expressa-ho amb llenguatge simbòlic.

c) Quins nombres del conjunt d'arribada tenen antiimatges?

A.10. Si **h** és una funció, expressa en forma simbòlica:

a) 3 és la imatge de 2 per la funció **h**.

b) -5 és antiimatge d' 1 per la funció **h**.

c) a 1/2 li correspon 1/4 per la funció **h**.

d) La funció **h** és una funció d'A en B.

e) **y** és la imatge de **x** per la funció **h**.

A.11. Considera la funció de l'exercici A.4 del canvi de polsades a centímetres. Recorda que la fórmula de la funció era **y=2'54x** on "**x**" són les polsadesi **"y"** els

centímetres. Si anomenen **f** aquesta funció, completa els requadres i parèntesis següents i fes en cada cas **dues frases** que signifiquin el mateix que el llenguatge simbòlic:
una frase utilitzant les paraules específiques del llenguatge de funcions,
i una altra frase que la pugui entendre una persona que no conegui aquest llenguatge.

a) $f(10)=\boxed{}$ **b)** $f(6)=\boxed{}$ **c)** $2 \rightarrow f(\quad) = \boxed{}$

d) $f(x) = \boxed{}$ **e)** $f(\quad) = 322$

A.12. Considerem ara la funció que assigna a cada nombre el seu quadrat. Anomenant **g** aquesta funció, completa els requadres i parèntesis de les expressions següents i fes una frase en cada cas:

a) $g: \boxed{} \rightarrow \boxed{}$ **b)** $1 \rightarrow g\ (\ )$ **c)** $g(-3) = \boxed{}$

d) $g(0) = \boxed{}$ **e)** $5 \rightarrow \boxed{}$ **f)** $1'5 \rightarrow g(\ )$

g) $\sqrt{3} \rightarrow g(\quad) = \boxed{}$ **h)** $2 \rightarrow g(\quad) = \boxed{}$

i) $x \rightarrow g(\quad) = \boxed{}$ **j)** $\boxed{} \rightarrow g(\ ) = 81$

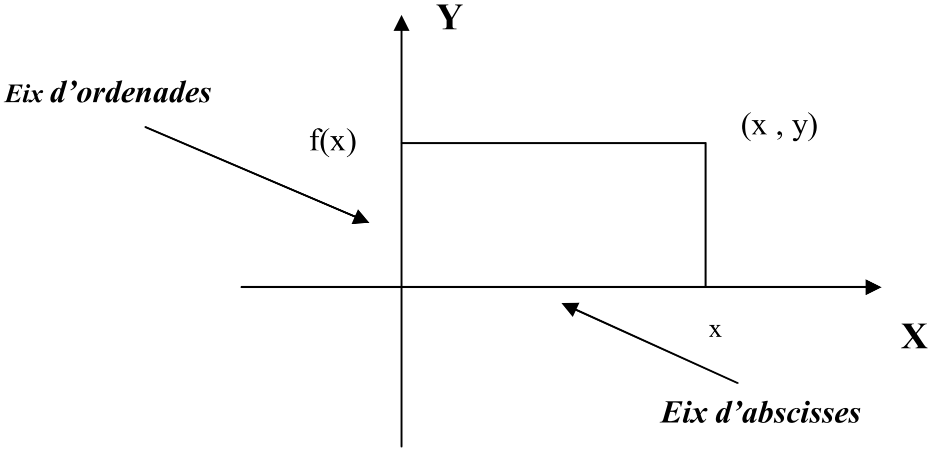
GRÀFICS CARTESIANS

Un gràfic cartesià està representat en un **sistema de referència de coordenades cartesianes**, que ve determinat per dos **eixos de coordenades,** que són dues rectes perpendiculars graduades que s'anomenen eix d'**abscisses** i eix d'**ordenades**.

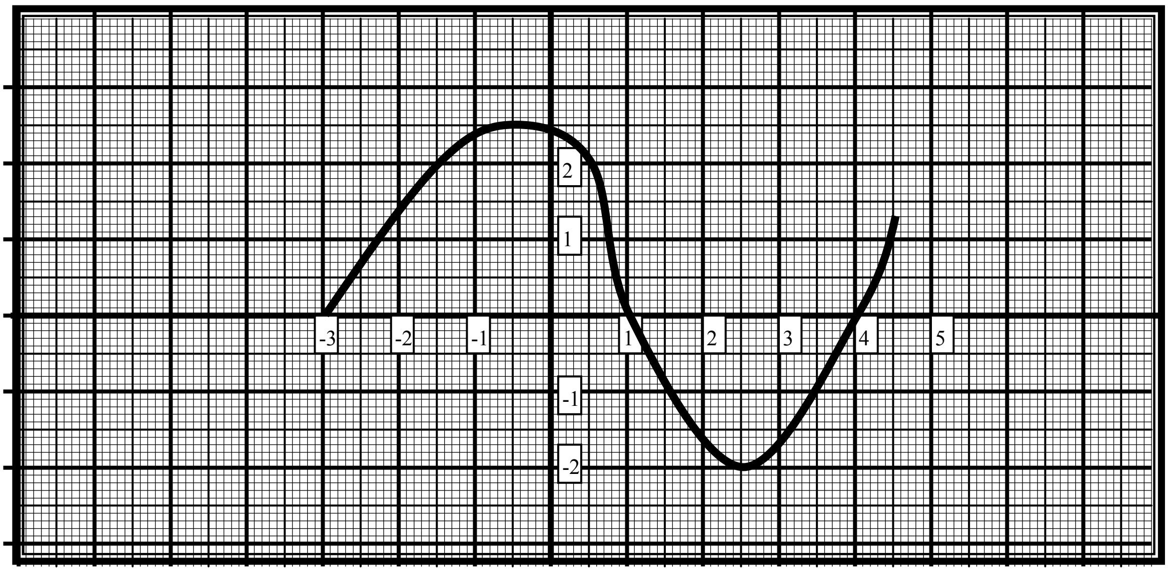
Per representar gràficament una funció situem la variable independent a l'eix d'**abscisses**, i la variable dependent al d'**ordenades.** La variable independent moltes vegades s'expressa amb la lletra **x** i aleshores a l'eix d'abscisses se'l pot anomenar **eix x** o **eix de les x**. La variable dependent s'acostuma a expressar amb la lletra **y** i aleshores a l'eix d'ordenades se'l pot anomenar **eix y** o **eix de les y.**

Cada punt del gràfic de la funció es caracteritza per un parell de nombres, el primer del domini i el segon del conjunt d'arribada, de manera que el segon és la imatge del primer per la funció.

El que fem doncs en dibuixar un gràfic d'una funció **f** és representar en un sistema de referència cartesià els punts representatius de tots els parells ordenats de nombres reals **(x , y)** de manera que **y = f(x).**



A.13. Observa el gràfic següent de la funció **h** , completa les línies de punts i expressa cada frase en llenguatge simbòlic**:**



a) La imatge de -1 és ....

b) La imatge de ...... és 2’5.

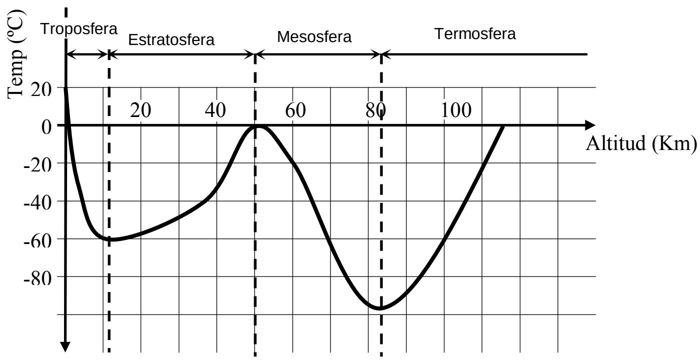
c) Les tres antiimatges de 0 són ....., ... i ....

d) Les......................... de -1 són 2 i ......

e) 1 és la .... de......., de .... i de ....

B. Comportament global d’una funció

B1. La temperatura de les diferents capes atmosfèriques no decreix regularment en funció de l’altitud, com podríem pensar basant-nos en la nostra limitada experiència. Els estudis fets ens diuen que la temperatura varia segons l’altitud i ho fa de la manera que ens indica el gràfic següent:



Si en diem **f** a la funció , **x** a l’altitud i **T** a la temperatura:

a) Digues quina és la variable independent, la dependent, el domini i el conjunt d’arribada.

b) Quina és la temperatura a 10 km d’altitud? Expressa-ho en forma simbòlica. Quina és la temperaturamés baixa de la mesosfera?

c) Dins quines capes atmosfèriques la temperatura augmenta contínuament en funció de l’altitud?

d) A quina capa atmosfèrica fa més fred? A quina altitud?

e) Resumeix les observacions fetes a partir del gràfic tot completant la següent taula de comportament de la funció:

Altitud	de 0 a 12 km	12 km	de 12 a 50 km	50 km	de 50 a 85 km	85 km	de 85 a 112 km
Temperatura	disminueix	-60º					
		Mínim relatiu					

f) La taula de l’apartat anterior la podem fer de forma més simbòlica. Completa la taula:

x (km)	(0 , 12)	12	(12 , 50)				
T (ºC)	↘	-60	↗				
		MIN		MAX			

INTERVALS I SEMIRECTES

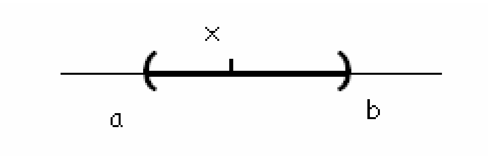
A l'última taula de l'exercici anterior per indicar les altituds de l'estratosfera, és a dir valors entre 12 i 50 km, ho hem fet amb la notació (12 , 50). De manera que si una altitud x pertany a l'interval vol dir que està entre 12 i 50:

$x \in (12,50) \iff 12 < x < 50$

Aquest tipus d'intervals en direm **intervals oberts** perquè no inclouen els extrems, és a dir ni 12 ni 50 pertanyen a l'interval. Si volem que hi siguin els extrems haurem d'expressar-ho com [12 , 50], que és **un interval tancat**:

$x \in [12,50] \iff 12 \le x \le 50$

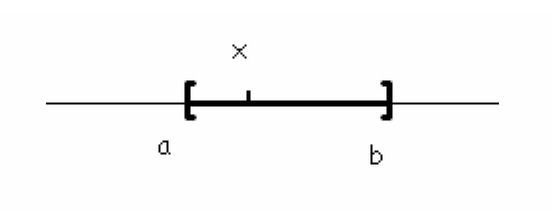
Interval obert d'extrems a i b, essent a<b, és el conjunt de tots els punts que estan entre a i b, **exclosos** els extrems. És a dir , l'interval obert (a , b) és el conjunt de tots els punts x tals que a < x < b. Gràficament:



x pertany a l'interval : $x \in (a,b)$
però $a \notin (a,b)$ i $b \notin (a,b)$

ATENCIÓ: Observa que es fa servir una mateixa notació per a dues coses ben diferents: (1, 2) pot significar, segons el context, **les coordenades d'un punt del pla** o bé **un interval obert**, o sigui un conjunt de nombres. Si a més considerem que podria ser el nombre decimal 1,2 entre parèntesi, caldrà fixar-se, segons la situació, quin significat cal donar-li.

Interval tancat d'extrems a i b, essent $a < b$, és el conjunt de tots els punts que estan entre a i b, **inclosos** els extrems.



És a dir , l'interval tancat [a , b] és el conjunt de tots els punts x tals que $a \le x \le b$ Gràficament:
x pertany a l'interval : $x \in (a,b)$
però $a \in (a,b)$ i $b \in (a,b)$

B2.

a) Dibuixa els intervals següents: (1 , 5) , (-2 , 3) , [0 , 3.5].

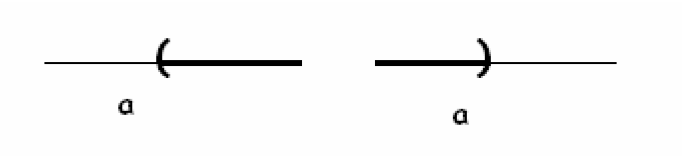
b) Indica, utilitzant la notació simbòlica, si cadascun dels nombres, -2.5; -2; -1/2; 0; 1; 1.2; 3.49; 3.5 i 3.501 pertanyen o no als intervals de l'apartat a).

A vegades podem considerar conjunts de nombres reals com ara els valors que podria prendre la variable POLSADES a l'exercici A.4 si pensem que qualsevol valor podria tenir sentit **per gran que sigui.** Aleshores el conjunt que tindríem el representaríem com una semirecta. Això ens porta a definir un altre tipus d'intervals que són les semirectes obertes i les semirectes tancades :

La **semirecta oberta** $(a, +\infty)$és el conjunt de punts que estan a la dreta d' a exclòs l'extrem a. És a dir és el conjunt de punts x tals que $a < x$. El símbol $+\infty$ es llegeix "més infinit" i no és cap nombre; indica justament que qualsevol nombre més gran que a, per gran que sigui, pertany a l'interval.

La **semirecta oberta** $(-\infty, a)$és el conjunt de punts que estan a l'esquerra d' a exclòs l'extrem a. És a dir és el conjunt de punts x tals que $x < a$. El símbol $-\infty$es llegeix "menys infinit" i no és cap nombre; indica justament que qualsevol nombre més petit que a, per petit que sigui, pertany a l'interval.

Gràficament:



$(a,+\infty)$ $(-\infty, a)$

De manera semblant podem definir les **semirectes tancades** pel seu extrem:

$[a,+\infty), (-\infty, a]$que són com les obertes però incloent-hi l'extrem a.

Observa que pel costat de l'infinit sempre posem un parèntesi perquè l'infinit no és cap nombre, no pertany a la semirecta.

B3.

a) Dibuixa les semirectes següents: $(0,+\infty),[-2.3,+\infty)\quad i\quad(-\infty,3.5]$

b) Indica, utilitzant la notació simbòlica, si cadascun dels nombres, -2.5 ; -2 ; -1/2; 0 ; 1 ; 1.2 ; $\sqrt{2}$; 3.49 ; 3.5 i 3.501 pertanyen o no a les semirectes de l'apartat a)

B4.

Coneixent certes característiques d'una funció , és possible reconèixer el seu gràfic i fins i tot construir-lo.

D'entre els gràfics indicats, **identifica** aquells que puguin ser gràfics de les funcions, les característiques de les quals donem a continuació. Feu per cada gràfic **una taula** del comportament de la funció utilitzant els intervals i semirectes (com a l'apartat f de l'exercici B.1): creixement, decreixement, màxims i mínims.

a) La funció ***a*** té un màxim en el punt d'abscissa -2, un mínim en el punt d'abscissa 2 i passa per l'origen de coordenades.

b) La funció ***b*** és sempre decreixent i passa pel punt (-2,0).

c) La funció ***c*** té dos mínims i un màxim i passa pel punt (0,4).

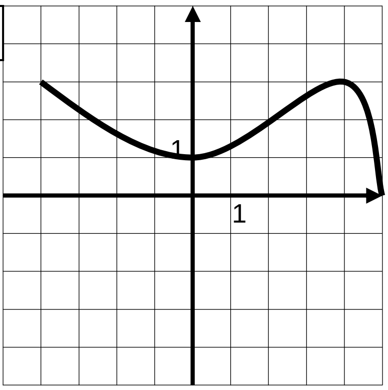
d) La funció ***d*** és sempre decreixent excepte en l'interval (0,4) on és creixent, i $d(0)=1$ i $d(4)=3$.

e) La funció ***e*** és creixent en l'interval $(-\infty,+1]$ i constant en l'interval $[1,+\infty)$

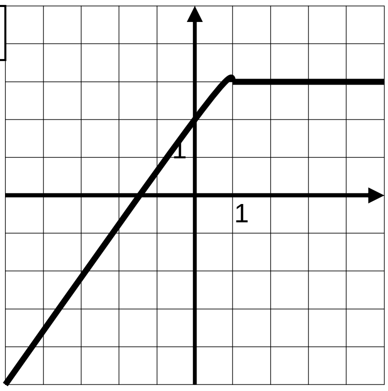
f) La funció ***f*** té un sol màxim i talla l'eix d'abscisses en els punts -3 i 1.

g) La funció ***g*** no té cap màxim ni cap mínim.

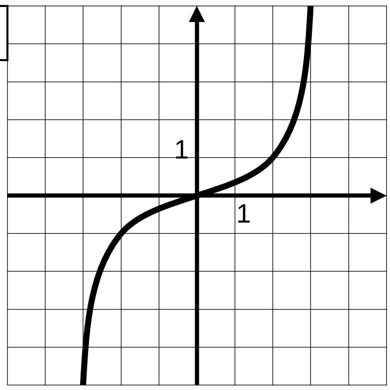
1



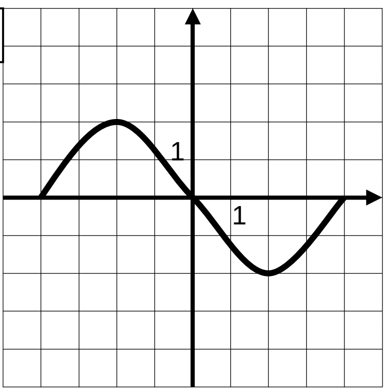
2



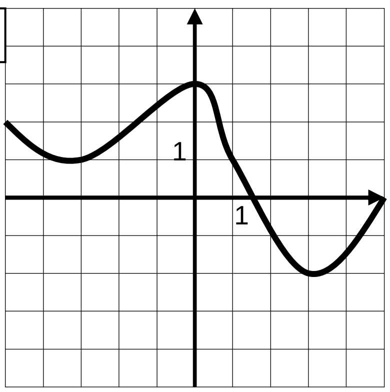
3



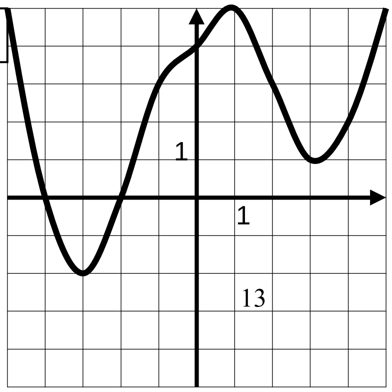
4



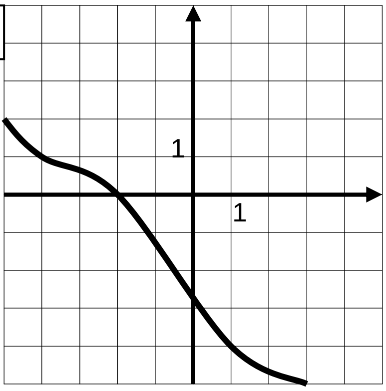
5



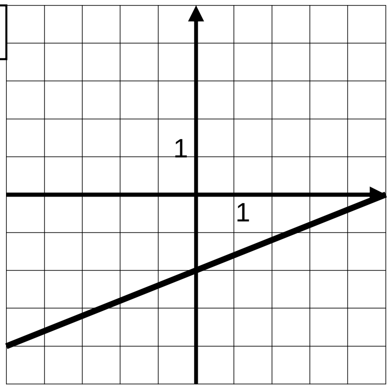
6



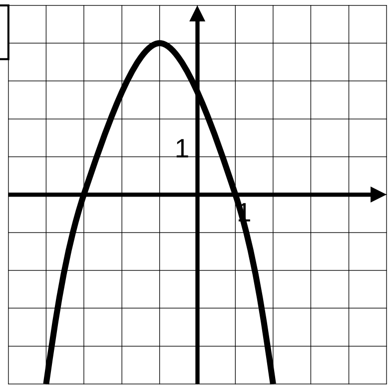
7



8



9



B5. Dibuixa el gràfic de la funció *f* que té la següent taula de comportament: i de la qual també sabem que talla l'eix d'abscisses en els punts (-5,0), (1.5,0) i (3,0)

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1\ ,\ 2)$	2	$(2\ ,\ 4)$	4	$(4\ ,\ 5)$	5	$(5,+\infty)$
f (x)	↘	-6	↗	3	↘	-2	↗	-1	↘
		mín		max		mín		màx	

B6. REINVENTEM LA LLAUNA DE REFRESC

QÜESTIÓ PRÈVIA

Imagina que tens dues llaunes amb formes diferents però que en les dues hi ha la mateixa quantitat de líquid. Han de tenir, per força, la mateixa quantitat d'alumini?. Raona la resposta i si cal posa exemples concrets amb dades inventades i càlculs.

INTRODUCCIÓ

L'any 1914 AsaCandler, president de Coca Cola, va encarregar aun artesà del vidre anomenat Earl Dean que inventés una ampolla pel seu producte. Earl Dean va confondre el producte i pensant que era una espècie de *cacaolat* va fer l'ampolla amb la forma del fruit del cacau, però la casualitat va fer que aquesta ampolla tingués una forma sinuosa que recorda el cos d'una noia i aquest va ser una de les claus del seu èxit. L'artesà va patentar l'ampolla i es va fer multimilionari ja que per cada ampolla venuda ell cobrava una petita quantitat.

Actualment, a més de l'ampolla, s'utilitza una llauna d'alumini, l'any 1996 es va intentar fabricar una llauna amb la mateixa forma que l'ampolla però el cost de l'alumini ho va desaconsellar. En el seu disseny actual influeixen, per tant, més els factors econòmics i pràctics que no pas estètics.

En una llauna de Coca Cola hi caben, exactament, 333 cm^3 de refresc (un terç de litre), però, com ja hem vist, es podrien fabricar molts tipus de llaunes diferents amb la mateixa capacitat, i, si bé la seva forma obeeix a factors econòmics, no obeeix a factors ecològics perquè la forma triada no és la que utilitza la mínima quantitat de material.

Quina és la llauna cilíndrica més ecològica?

Les matemàtiques són molt útils per gran quantitat de coses. Una de les aplicacions que s'ha posat *de moda* a partir de la segona guerra mundial són els problemes d'optimització. Es a dir, els problemes en que es calculen tots els paràmetres industrials que fan mínims els costos. Actualment no hi ha cap factor industrial que obeeixi a l'atzar, tot té unes raons matemàtiques de fons.

El problema de la llauna de Coca Cola és un clar exemple. La seva forma no és fruit de l'atzar i obeeix a raons purament econòmiques, però , quina forma tindria si es volgués prioritzar l'ecologia?

Estudiem a fons aquesta qüestió.

Volem fer una llauna cilíndrica de 333 cm^3 volem conèixer quin ha de ser el radi i quina ha de ser l'altura per a que la quantitat d'alumini sigui mínima.

Com que el volum sempre ha de ser el mateix, si la fem més ampla haurà de ser més baixa i si la fem més prima haurà de ser més alta.

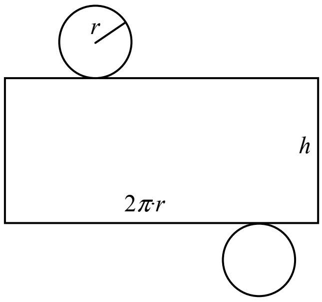
Això vol dir que no podem triar l'altura per què depèn del radi que sí el podem triar:

$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 333$

Aïllant l'altura

tenim que $h = \dfrac{333}{\pi \cdot r^2}$

Ara ens podem inventar diferents valors pel radi i calcular, en primer lloc, quina altura ha de tenir i en segon lloc quina quantitat d'alumini es gasta, es a dir la superfície $S = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$



Tots aquests càlculs es poden fer a la taula següent. En acabar-los, la llauna millor serà la que tingui menys superfície.

a) Omple la taula següent

RADI	$h = \frac{333}{\pi \cdot r^2}$	$S = 2\pi \cdot r \cdot h + 2\pi \cdot r^2$
1		
1,5		
2		
2,5		
3		
3,5		
4		
4,5		
5		
5,5		
6		
6,5		
7		
7,5		
8		
8,5		
9		
9,5		
10		

b) Fes un gràfic en que la superfície depengui del radi

c) Entre quins valors del radi es troba la llauna d'inferior superfície?

d) Amb la calculadora tempteja valors en l'anterior interval per tal de trobar el radi que minimitzi més la superfície.

e) Quin és el radi que fa que la llauna utilitzi menys alumini?

f) Calcula ara l'altura que hauria de tenir la llauna. Recorda que $h = \dfrac{333}{\pi \cdot r^2}$.

g) Construeix amb cartolina la llauna més ecològica i explica detalladament quins poden ser els motius per què la Coca Cola no utilitzi aquesta llauna.

B7. REINVENTEM EL TETRA BRIK

El nom **TetraBrik** és per què originàriament aquest envasos tenien forma de tetràedre (una piràmide formada amb 4 triangles equilàteres). El TetraBrik va néixer al 1963, encara que Rausing i Wallenberg van fundar TetraPak al 1951 per fabricar envasos de cartró recoberts de plàstic i alumini. Al 2008 es van produir 21 envasos per habitant i des de 1980 es reciclen.

Actualment al mercat es poden trobar 3 TetraBrik diferents per posar 1 litre de llet. A part del de sempre n'hi ha un una mica més estret i més alt i un altre amb base quadrada. La qüestió és ,en quin dels tres hi ha menys cartró? I ,es pot construir un quart model que encara utilitzi menys cartró?. En aquesta activitat intentarem esbrinar aquesta qüestió

Abans de començar, experimenta.

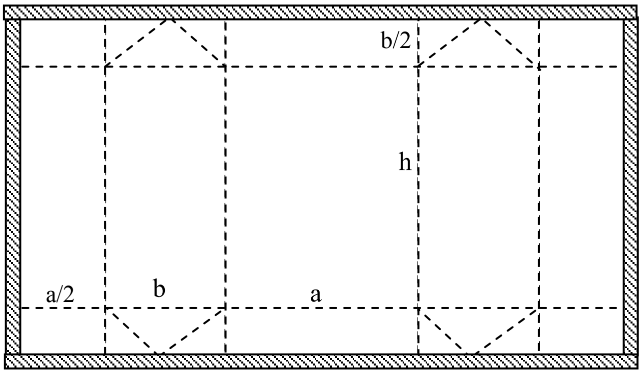
Busca al mercat els tres Briksd'1 litre que hi ha. Desplega el cartró i observa'ls. Calcula la superfície de cartó que empra cada un dels dissenys i el volum.

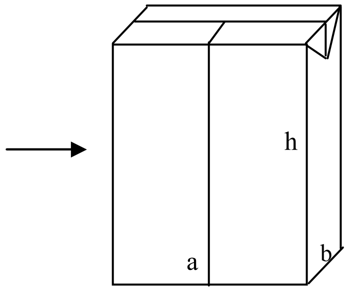
1. És el volum dels tres envasos iguals? Quin és aquest volum?
2. És la superfície dels tres envasos igual? Quina és la superfície de cada un d'ells?
3. Quin és l'envàs més ecològic? Es a dir, quin utilitza la mínima quantitat de cartró?

A l'experimentació anterior hem comprovat que és possible fabricar Briks amb el mateix volum i diferent superfície. Aquest fet ens mou a pensar en la possibilitat de dissenyar el Brik més ecològic del món. Es a dir, el que utilitzi la mínima quantitat possible de material, és això possible?

Analitzem el problema

- Endesplegar un TetraBrik observem que queda un cartró rectangular:

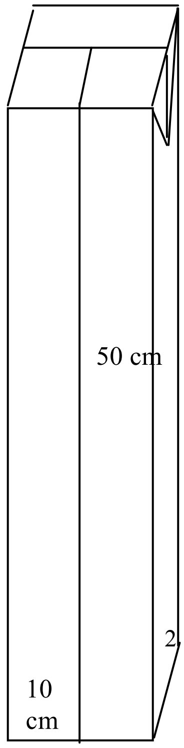




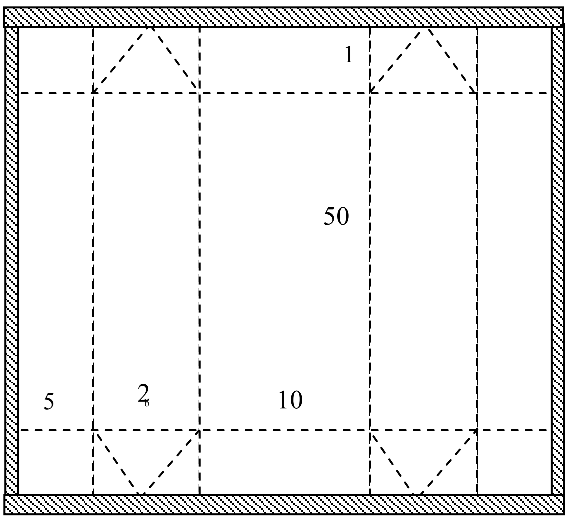
Sabem que el volum és $V = a{\cdot}b{\cdot}h = 1000$ cm^3

Si volem inventar-nos un Brik nou, podem inventar-nos un nou valor per *a,* també podem inventar-nos el valor que vulguem per *b* però si també ens inventem un valor per *h* no podem garantir que el volum sigui, efectivament 1000 cm^3 Així, doncs, haurem de renunciar a triar al menys un dels tres valors, per exemple *h*, d'aquesta manera el valor d'*h* queda obligat pel fet que $a{\cdot}b{\cdot}c = 1000$ cm^3 i dependrà directament d'*a* i de *b*:

$$h = \frac{1000}{ab}$$



Per exemple, imaginem que volem fabricar un Brik que faci $a = 10$ cm i que $b = 2$ cm aleshores forçosament $h = \frac{1000}{10 \cdot 2} = 50$ i així tindríem un Brik de mig metre d'altura que continuaria tenint un litre de volum.
Aquest Brik pot ser seria divertit però de cap manera seria ecològic ja que el cartró emprat seria excessiu:



S = (5+2+10+2+5)(50+2) = 1248 cm^2
Resumint: si el volum és $V = a{\cdot}b{\cdot}h = 1000$ cm^3 i triem *a* i *b*, aleshores $h = \frac{1000}{ab}$
I la superfície (sense tenir en compte les petites solapes que permeten pegar el Brik) és $S = B{\cdot}H = (2a+2b){\cdot}(h+b)$, aïllant la h pel seu valor, podem calcular directament la superfície fent:

$$\boxed{S = (2a + 2b)(\frac{1000}{ab} + b)}$$

Ataquem el problema

Per trobar el millor tetrabrik sembla que no ens queda més remei que anar provant diferents valors per *a* i per *b* i anar calculant la superfície anterior amb la fórmula. Suposem que provem tots els valors des d'1 fins a 20 cm per *a* i també per *b*, això en obligaria a provar la fórmula amb 20 x 20 = 400 valors diferents.
Una possibilitat seria treballar en equip.

- Assignem un valor d'*a* diferent per cadascú de vosaltres.
- I utilitzant només aquest valor d'*a* aneu provant amb diferents valors de *b*.
- L'alumne que trobi la superfície més petita serà el que ha trobat el Brik més ecològic.

ANEM PER FEINA:

Nom : ______________________________________ Valor d'*a* assignat

a) Omple taula de valors: recorda que $S = (2a + 2b)(\frac{1000}{ab} + b)$

b =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
S =															

b) Fes un gràfic a la pàgina següent:

c) Observant el gràfic, quin valor de *b* fa que la superfície sigui mínima pel teu valor d'*a*?

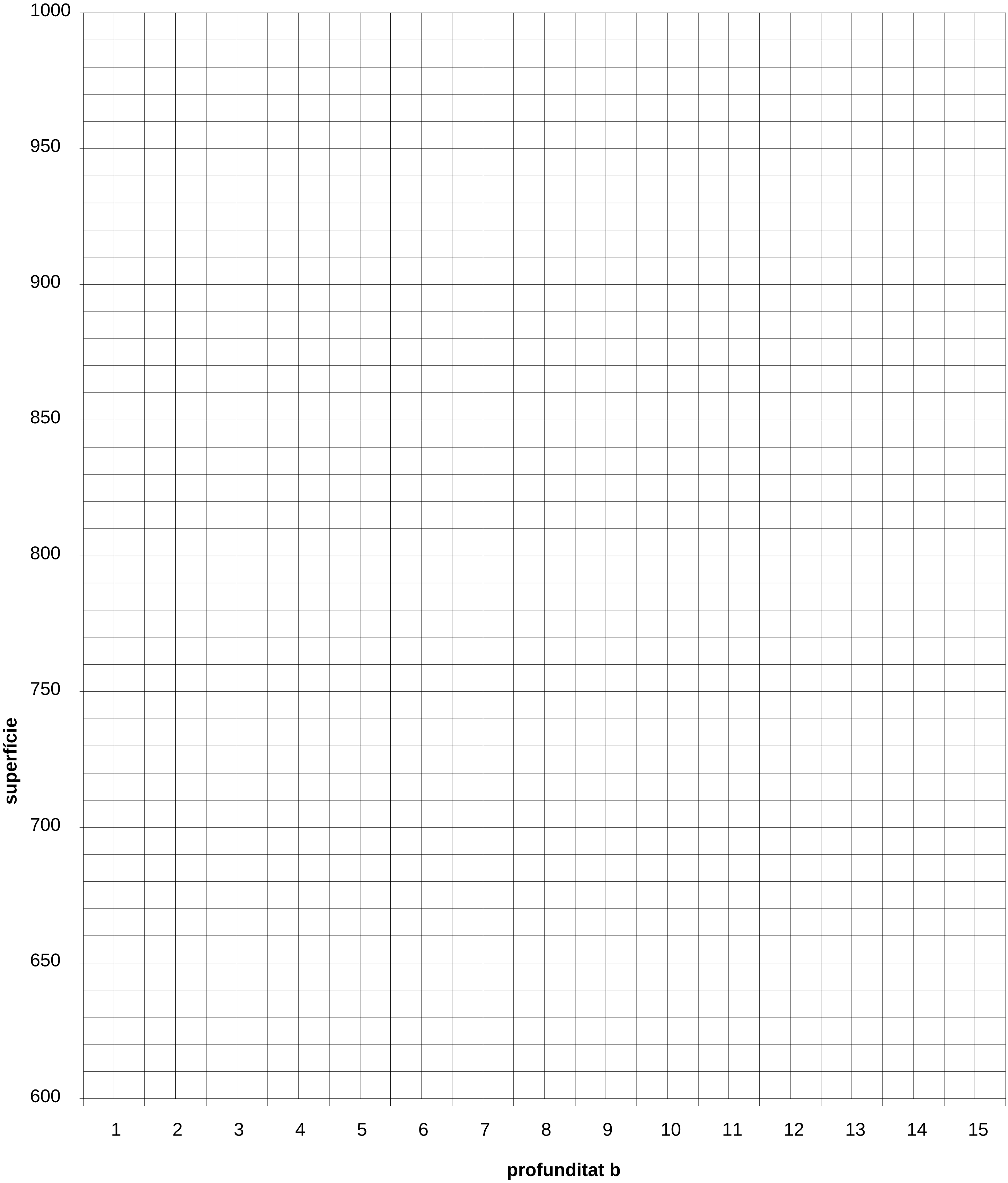
d) Hi ha algun company que tingui un valor de la superfície més petita que tu?, per quins valors d'*a* i*b* ha obtingut aquesta superfície mínima. Quina és aquesta superfície?

Construeix amb cartró un Brik amb aquestes dimensions.A quin model de la fotografia correspon?

e) Coincideix amb algun dels tres Briks que hi ha al mercat?

f) Quins creus que poden ser els motius que mouen a triar un model determinat en una fàbrica d'envasos?

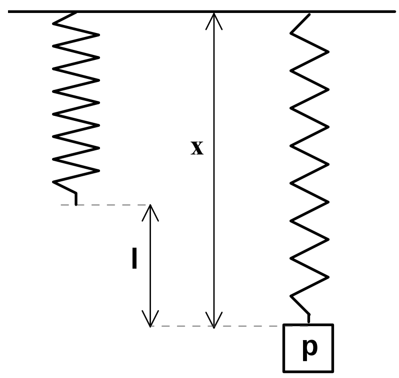
superfíciesegonselsdiferentsvalors de b amb valor fix a =



C. Funció polinòmica de primer grau

C1. Llei de Hooke.

Si pengem un pes a una molla, aquesta s'allarga. Si disposeu d'una molla podeu fer l'experiment: anar penjant cada vegada un pes més gran i mesurar la llargada de la molla per cada pes. Si ho feu aneu amb compte de penjar-hi pesos no massa grans que podrien deformar la molla.



a) Disposeu les dades obtingudes en una taula. Si no heu pogut fer l'experiment podeu utilitzar les dades següents:

p : PES (KG)	**0**	**0,5**	**1**	**1,5**	**2**	**2,5**
L : longitud de la molla (cm)	6	10	14	18	22	26

b) Representeu la funció que ens dóna la longitud de la molla segons el pes. Quin és el domini d'aquesta funció? Té sentit unir els punts del gràfic?

c) Intenteu trobar la fórmula de la funció.

C2. Representa en un mateix sistema de coordenades els gràfics de les funcions següents:

a) $f(x) = 2x$ ***b)*** $h(x) = 2x + 5'5$ ***c)*** $l(x) = 2x + 1$

d) $g(x) = 2x - 4'75$ ***e)*** $k(x) = 2x - 3$ ***m)*** $t(x) = 2x + 3'2$

C3. Representa en un mateix sistema de referència els gràfics de les següents funcions:

a) $f(x) = x + 3$ b) $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ c) $y = 2x + 3$

d) $f(x) = -x + 3$ e) $y = -\frac{1}{2}x + 3$ f) $f(x) = -2x + 3$

C4.

a) Observa els gràfics de les funcions de l'exercici **C.3** i contesta:

Què tenen en comú i en què es diferencien aquests 6 gràfics? A quin punt les rectes tallen l'eix d'ordenades? Classifica les rectes en creixents i decreixents.

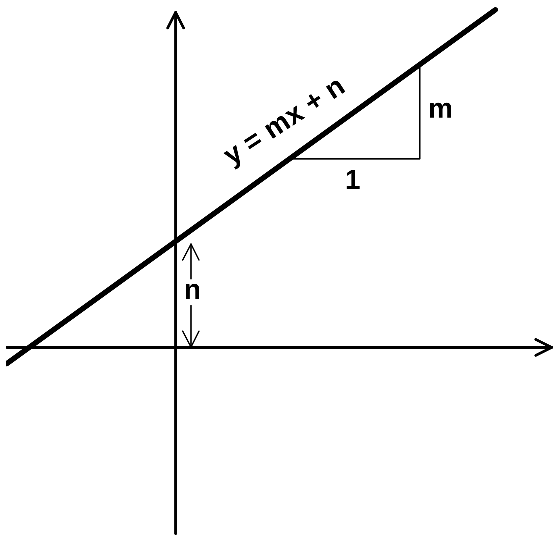
b) Observa els gràfics de les funcions de l'exercici **C.2** i contesta:

Què tenen en comú i en què es diferencien aquests 6 gràfics? De quin paràmetre dependrà la inclinació de les rectes. Quin paràmetre ens indica el punt de tall de la recta amb l'eix d'ordenades?

c) Intenta donar un model de funció, una fórmula tipus per les funcions dels problemes C2 i C3.

d) Com és el gràfic de la funció tipus **y = mx + n**? , on **m** és un nombre real que s'anomena pendent de la recta i **n** és un nombre real que s'anomena ordenada a l'origen. En quin punt tallen aquests gràfics l'eix d'ordenades? Si una recta és creixent, quin signe té el seu pendent? I si és decreixent?

FUNCIONS QUE TENEN PER GRÀFIC UNA RECTA:FUNCIONS AFINS



Les funcions dels apartats **C.1**, **C.2** i **C.3** que tenen una fórmula del tipus:

$$\mathbf{y = mx + n} \qquad \mathbf{amb\ m \neq 0}$$

direm que són **funcions polinòmiques de primer grau** perquè l'expressió mx+n és un polinomi de primer grau. Així les funcions com y

= 7x+3 , y = $-\frac{3}{4}x-5$ o y = 0,4 x són funcions polinòmiques de primer grau, i en canvi la funció $y=3x^2-7$ seria de segon grau.

Una funció polinòmica de primer grau **té per gràfic una recta**.
El coeficient de la x, paràmetre m, és el **pendent** i indica la inclinació de la recta.
El terme independent, paràmetre n, és l'**ordenada a l'origen**, és a dir indica el punt en el qual la recta talla l'eix d'ordenades.

- Les funcions de primer grau en què la **n és zero**, tenen per gràfic una recta que passa per l'origen de coordenades: són les **funcions de proporcionalitat**. Tenen per fórmula:**y = mx**

Les funcions de proporcionalitat són funcions polinòmiques de primer grau.

- Si el pendent m és zero, aleshores la recta és paral·lela a l'eix d'abscisses, la fórmula general és **y = n**són les **funcions constants**.

Les funcions constants no són polinòmiques de primer grau.

- Les funcions que tenen per gràfic una recta són les **funcions afins.**

C5. Digues només observant la fórmula i sense fer el gràfic ni donar cap valor, quines de les funcions següents tenen per gràfic una recta. En aquest cas indica quin és el pendent i l'ordenada a l'origen i si són funcions constants , de proporcionalitat o afins.

$y=4x+7$ $y=x^2-4$ $y=\frac{4x-7}{2}$ $y=-x$

$y=\frac{2}{2x-5}$ $y=\frac{3}{2}x+6$ $y=\sqrt{3x-5}$ $y=2x^3-x+5$

REPRESENTACIÓ DE RECTES

Per dibuixar el gràfic de les funcions afins **només cal representar dos punts** del gràfic i unir-los amb una línia recta, és a dir donarem només dos valors a la x. En tot cas si en donem un altre ens servirà només per comprovar que no ens haguem equivocat, perquè si els tres punts no estan alineats és ben segur que haurem fet algun error!

Encara que els dos punts poden ser qualssevol, per tal de fer-ho de forma ràpida és aconsellable seguir un d'aquests 3 mètodes. En tots tres mètodes es comença buscant l'ordenada a l'origen, o sigui es dóna a la x el valor zero i s'obté la intersecció de la recta amb l'eix d'ordenades.

MÈTODE MÉS RÀPID:

Donar a la x els valors:●**zero.** (Així obtindrem el punt de tall amb l'eix d'ordenades)
●**el denominador del pendent o un múltiple d'aquest.**

MÈTODE DE LA INTERSECCIÓ AMB ELS EIXOS:

Punt de tall amb l'eix d'ordenades: **donarem a la x el valor 0**
Punt de tall amb l'eix d'abscisses: **resoldrem l'equació de primer grau 0 = mx + n**

MÈTODE DEL PENDENT I L'ORDENADA A L'ORIGEN:

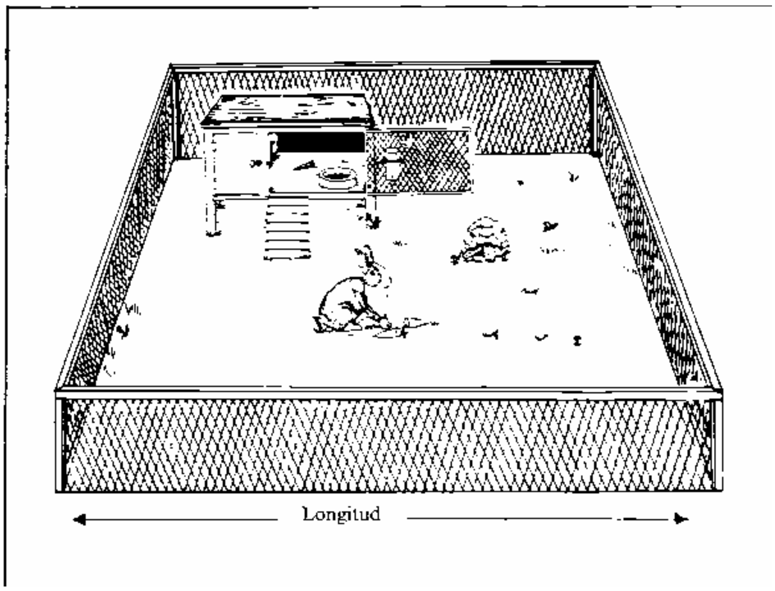
Ordenada a l'origen: **donarem a la x el valor 0**
El pendent és **el coeficient de la x** , i ens indica la inclinació de la recta, és a dir el que puja o baixa la recta per cada unitat de més de la variable independent.

C6. Representa les funcions següents de la forma més ràpida que puguis

$a)\quad y = 2x - 3 \qquad b)\quad \frac{2}{3}x + 5 \qquad c)\quad f(x) = -x + 3 \qquad d)\quad y = -5 \qquad e)\quad y = -\frac{5}{4}x - 1$

$f)\quad y = \frac{1}{2}x \qquad g)\quad y = 0 \qquad i)\quad y = 6x \qquad j)\quad y = -\frac{2}{5}x + 4 \qquad k)\quad y = -0{,}5x - 4$

D. Funció polinòmica de segon grau



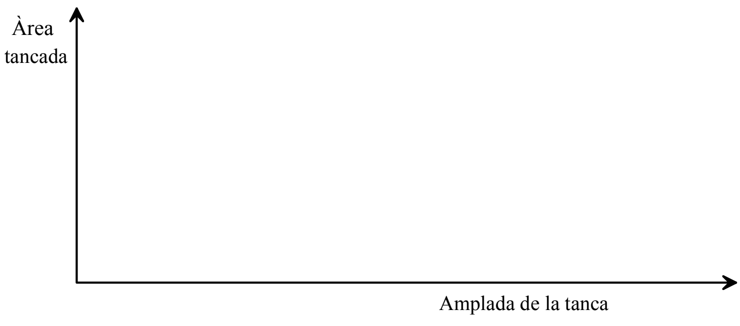
D1. Un tancat per als conills

S'ha de construir un tancat per conills de forma rectangular amb 22 m de tanca metàl·lica. L'amo està interessat a saber com depèn l'**àrea encerclada** de l'**amplada del tancat**.

a) Pensa detingudament la situació i parla'n amb els teus companys. Podeu discutir quina de les frases següents s'ajusta més a la situació plantejada:

- Com més ample és el tancat més gran és l'àrea.
- La quantitat de tanca metàl·lica és fixa, per tant quan el tancat es fa més ample, es fa a la vegada més curt en la mateixa quantitat...per això l'àrea sempre és igual.
- Si no hi ha amplada no hi ha àrea...i si l'amplada és d'11 m tampoc hi ha àrea, per tant el gràfic ha de pujar i tornar a baixar
- Els tancats més amples són més curts i per tant l'àrea disminueix.

b) Il·lustra la conclusió a la què has arribat amb un gràfic aproximat (un croquis ràpid sense indicar escales als eixos):



c) Per veure si el teu croquis és correcte, omple la taula de valors calculant l'àrea per a diferents amplades, i fes el gràfic precís en paper mil·limetrat.

Amplada del tancat (m)	0											11
Àrea (m^2)												

Era correcte el teu croquis?

d) A partir de la taula i el gràfic, busca les dimensions que ha de tenir el tancat per tal de tenir el màxim espai possible per als conills.

e) Fixa't amb el que has fet en omplir la taula i, si en diem **x** a l'amplada i **y** a l'àrea, intenta trobar la fórmula algèbrica de la funció.

f) Quin és el domini d'aquesta funció? I el conjunt d'arribada?

D2. L'àrea del quadrat en funció del costat.

Fes un estudi de com varia l'àrea del quadrat segons la longitud del costat. Per això:

a) Fes una taula considerant com a domini el conjunt [0 , 3] i no oblidis donar valors no enters com ara 0,5.

b) Escriu la fórmula de la funció.

c) Fes el gràfic.

D3. En un full din A4 sencer de paper mil·limetrat dibuixa uns eixos de coordenades que es tallin al centre del full. Agafa com unitat als dos eixos 1cm i després de fer una taula de valors representa amb molta cura el gràfic de la funció $y = x^2$ tenint en compte les indicacions següents:

- Dóna a la x valors positius i negatius.
- Dóna a la x alguns valors no enters.
- Dóna a la x valors tan grans o petits (negatius) com puguis fins que no puguis representar els punts del gràfic.
- Dóna a la x algun valor molt gran o molt petit (negatiu) encara que en resulti un punt que no el puguis representar al gràfic.

D4. Descriu les característiques del gràfic de la funció $y = x^2$ que has representat a l'apartat anterior. Per això:

- Fes-ne una taula del seu comportament (creixement).
- Explica com és el seu creixement o decreixement. És un creixement proporcional?
- Digues si hi ha algun tipus de simetria.

Deformació de la paràbola

D5. Amb ajut d'un programa informàtic (Geogebra), dibuixa les següents paràboles (intenta marcar bé al menys 3 punts exactes, pots utilitzar un únic eix de coordenades). Dibuixa també en vermell la paràbola de l'exercici anterior:

$y = 2x^2$ $y = 4x^2$ $y = \frac{1}{2}x^2$ $y = \frac{1}{4}x^2$

$y = -2x^2$ $y = -4x^2$ $y = \frac{-1}{2}x^2$ $y = \frac{-1}{4}x^2$

D6. Completa l'esquema de la següent explicació de com és el gràfic d'una funció del tipus $y = ax^2$. Compara'ls amb el gràfic de $y = x^2$. (si vols pots ajudar-te de petits dibuixos):

EL GRÀFIC DE LES FUNCIONS $y = a x^2$: LA PARÀBOLA

El gràfic de les funcions polinòmiques de segon grau $y = ax^2$ és una figura geomètrica que té el nom de **paràbola.**
El punt més característic d'una paràbola és el seu **vèrtex**, que correspon al mínim o màxim de les funcions $y = ax^2$. En el cas d'aquestes funcions el vèrtex té per coordenades (0,0).
Una paràbola té una recta que és **eix de simetria** del gràfic . L'eix de simetria passa pel vèrtex. En el cas de les funcions $y = ax^2$ l'eix de simetria coincideix amb l'eix d'ordenades.

- Si $a > 0$ aleshores ____
  - Si $a > 1$, en comparació amb $y = x^2$ el gràfic és ________________
  - Si $0 < a < 1$ aleshores el gràfic és ____________________________
- Si $a < 0$ aleshores ____
  - Si $a < -1$, en comparació amb $y = x^2$ el gràfic és ________________
  - Si $0 > a > -1$ aleshores el gràfic és ____________________________

El moviment vertical

D7. Dibuixa, primer en vermell la paràbola $y = x^2$. Dibuixa, a continuació, en diversos colors, les paràboles següents utilitzant Geogebra (intenta marcar clarament al menys 3 punts de cada gràfic)

$y = x^2 +2$ $y = x^2+5$ $y = x^2-1$ $y = x^2-4$

D8. Per cadascuna de les funcions de l'exercici anterior digues quines són les coordenades del vèrtex de la paràbola.

D9. Explica com és el gràfic d'una funció del tipus $y = x^2 +q$ segons els valors del paràmetre **q** i en comparació al gràfic de $y = x^2$. Digues quin és el vèrtex i l'eix de simetria.

El moviment horitzontal

D10. Dibuixa, primer en vermell la paràbola $y = x^2$. Dibuixa, a continuació, en diversos colors, les paràboles següents utilitzant un programa d'ordinador (Geogebra)(intenta marcar clarament al menys 3 punts de cada gràfic)

$y = (x-1)^2$ $y = (x-3)^2$ $y = (x+2)^2$ $y = (x+4)^2$

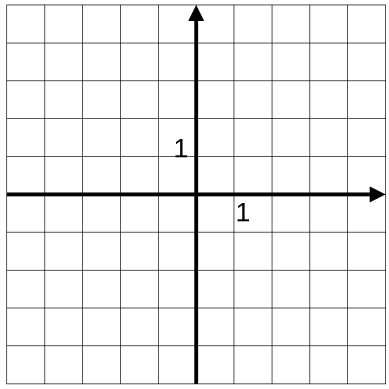
D11. Per cadascuna de les funcions de l'exercici anterior digues quines són les coordenades del vèrtex de la paràbola.

D12. Explica com és el gràfic d'una funció del tipus $y = (x-p)^2$ segons els valors del paràmetre **p** i en comparació amb el gràfic de $y = x^2$. Digues quin és el vèrtex i l'eix de simetria.

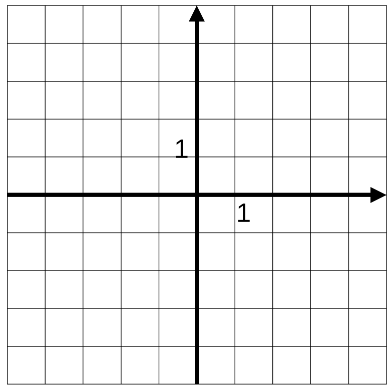
El moviment en totes dues direccions

D13. Ara ja saps què determina el desplaçament horitzontal i què determina el desplaçament vertical d'una paràbola. Escriu el vèrtex i dibuixa, primer intuïtivament, i comprova després amb l'ordinador si ho has encertat o no.

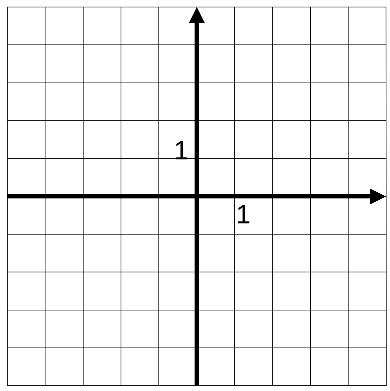
$y = (x-1)^2 + 3$ Vèrtex = (,)



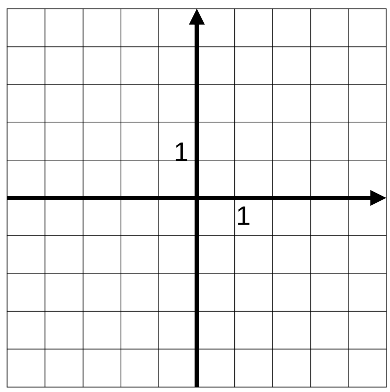
$y = (x-3)^2 - 4$ Vèrtex = (,)



$y = (x+2)^2 - 1$ Vèrtex = (,)



$y = (x+4)^2 + 2$ Vèrtex = (,)

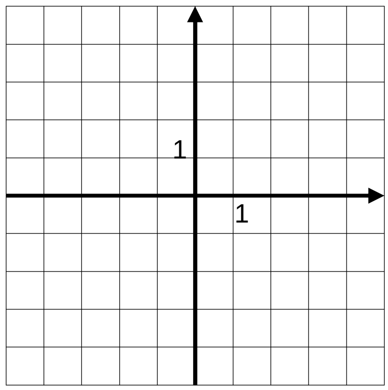


D14. Explica com és el gràfic d'una funció del tipus **$y = (x-p)^2 + q$** segons els valors dels paràmetres **p** i **q** i en comparació amb el gràfic de $y = x^2$. Digues quin és el vèrtex i l'eix de simetria.

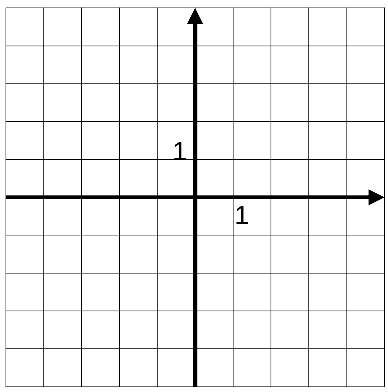
Recordem com es deformava una paràbola

D15. Llegeix l'esquema que explicava com es deformava una paràbola $y = ax^2$ en variar el paràmetre *a*. Seguint aquest esquema, dibuixa **sense utilitzar l'ordinador** les següents paràboles. Comprova després amb l'ordinador si ho has fet bé. (observa que es tracta de les *mateixes* paràboles de l'exercici anterior però deformades)

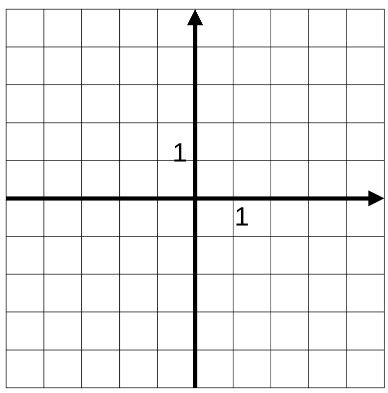
- $y = 2(x-1)^2 +3$
  - Vèrtex = (,)
  - Còncava o convexa?.......................
  - És oberta o tancada?.......................



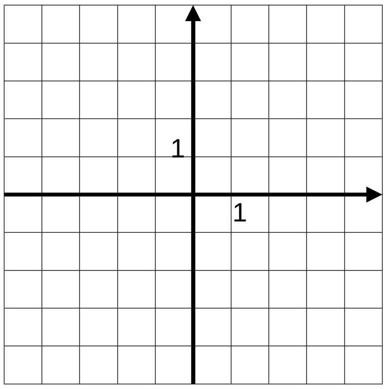
- $y = - ½ (x-3)^2-4$
  - Vèrtex = (,)
  - Còncava o convexa?.......................
  - És oberta o tancada?.......................



- $y = \frac{1}{3}(x+2)^2-1$
  - Vèrtex = (,)
  - Còncava o convexa?.......................
  - És oberta o tancada?.......................



- $y = -4(x+4)^2 + 2$
  - Vèrtex = (,)
  - Còncava o convexa?......................
  - És oberta o tancada?......................



D16. Fes un esquema complert que expliqui com és el gràfic d'una funció del tipus **$y = a(x-p)^2 + q$** segons els valors dels paràmetres **a, p** i **q .**

D17. Desenvolupa les expressions de les fórmules de les funcions següents fins a obtenir una expressió de la forma $y=ax^2+bx+c$. Digues en cada cas quin valor tindrien els paràmetres **a, b** i **c.**

$y = 2(x-3)^2$ $y = (x-3)^2-4$ $y = -(x+3)^2$ $y = -4(x+1)^2 + 2$

EL GRÀFIC D'UNA FUNCIÓ POLINÒMICA DE SEGON GRAU $y=ax^2+bx+c$ ÉS UNA PARÀBOLA

Hem vist que les funcions que tenen per fórmula $y = a(x-p)^2 + q$ tenen per gràfic una paràbola amb el vèrtex en el punt de coordenades (p , q) i com a eix de simetria la recta que passa pel vèrtex i és paral·lela a l'eix d'ordenades. El signe del paràmetre **a** ens indica si la paràbola és còncava o convexa i el seu valor si és més o menys oberta.
Si desenvolupem l'expressió de la fórmula obtindrem:

$$a(x-p)^2 + q = a(x^2 - 2px + p^2) + q = ax^2 - 2apx + ap^2 + q$$

Si comparem aquesta expressió amb la general de la funció polinòmica de segon grau, $y=ax^2+bx+c$:

$$y = ax^2 - 2apx + ap^2 + q$$
$$y = ax^2 + bx + c$$

i suposem que els dos polinomis són iguals, els coeficients dels termes de primer grau han de ser iguals:

$$-2ap = b \Rightarrow p = \frac{-b}{2a}$$

i també igualant els termes independents:

$$ap^2 + q = c \Rightarrow q = c - ap^2$$

D'aquí es pot deduir que qualsevol funció de segon grau de fórmula $y=ax^2+bx+c$ es del tipus $y = a(x-p)^2 + q$ i per tant **és una paràbola** de vèrtex el punt d'abscissa:

$$p = \frac{-b}{2a}$$

L'ordenada del vèrtex la podem obtenir trobant la imatge de **p** per la funció, o sigui substituint el valor de **p** a la fórmula de la funció.

El paràmetre **a** de la funció $y=ax^2+bx+c$ és el mateix que el de la funció $y = a(x-p)^2 + q$, per tant ens indicarà com és l'obertura de la paràbola.

D18. Observa les fórmules següents i digues quines d'elles corresponen a una funció que té per gràfic una recta, quines tenen per gràfic una paràbola i quines no tenen per gràfic ni una recta ni una paràbola.

$y = 3x^2 - 2$	$y = 3x - 2$	$y = \frac{1}{x^2 - x + 1}$	$y = x^2 - x + 1$
$y = \sqrt{x^2 - x + 1}$	$y = \sqrt{2}x^2 + 7x$	$y = \frac{4x+7}{5}$	$y = -x^3 + 3x^2 + x - 2$
$y = 3 - 0{,}25x$	$y = 360 + 3{,}9x - 0{,}07x^2$	$y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 4$	$y = (2x+3)(x+4)$

GRÀFIC D'UNA FUNCIÓ POLINÒMICA DE SEGON GRAU

Dibuixar el gràfic d'una funció polinòmica de segon grau $y=ax^2+bx+c$ **és dibuixar una paràbola**. El punt més característic d'una paràbola és el vèrtex. Coneixent **el vèrtex i el signe del coeficient del terme de segon grau,** paràmetre **a , ja podem dibuixar un croquis del gràfic**. Si volem una representació més precisa podem trobar els talls amb els eixos de coordenades o d'altres punts del gràfic.
A vegades però, el que més interessa és **fer un croquis del gràfic només a partir dels punts de tall amb l'eix d'abscisses, si en té, i el signe del paràmetre a**.
A continuació tens un esquema que et recorda com es troben els punts més peculiars del gràfic d'una funció de segon grau i com es determina l'obertura de la paràbola.

<u>VÈRTEX DE LA PARÀBOLA</u> (p , q)

<u>Càlcul de l'abscissa p :</u>

- **amb la fórmula** $p = \frac{-b}{2a}$
- o bé, si hem trobat les solucions de l'equació de segon grau, **fent la mitjana de les dues solucions**.

<u>Càlcul de l'ordenada q :</u>
Trobarem la imatge de l'abscissa p del vèrtex, **substituint el valor p en la fórmula de la funció.**

<u>DETERMINACIÓ DE L'OBERTURA DE LA PARÀBOLA</u>
Estudiarem **el signe del coeficient del terme de segon grau,** o sigui el paràmetre **a**.
Si el signe és positiu la paràbola serà còncava en la direcció de l'eix d'ordenades positives, o sigui oberta cap a munt, i si el signe és negatiu serà convexa és a dir oberta cap avall.

<u>PUNTS D'INTERSECCIÓ AMB L'EIX D'ABSCISSES: ZEROS DEL POLINOMI</u>
Es resol l'equació $ax^2+bx+c=0$.
En general ho farem mitjançant la fórmula resolutòria $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, però cal recordar que si l'equació de segon grau és incompleta o bé ens la donen descomposta en factors de primer grau trobarem les solucions de manera ràpida sense necessitat d'aplicar la fórmula resolutòria.
Recordem que una equació de segon grau pot tenir dues solucions, una o bé cap solució, segons el signe del discriminant de la fórmula resolutòria : $\Delta = b^2 - 4ac$

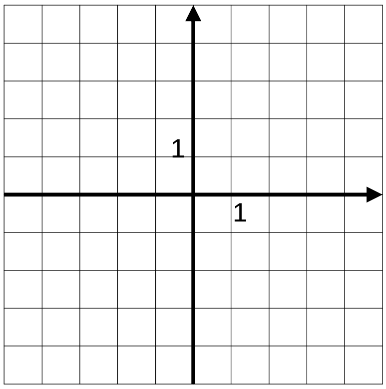
- Si $\Delta > 0$ l'equació tindrà dues solucions i la paràbola tallarà en dos punts.
- Si $\Delta = 0$ la solució és única i la paràbola serà tangent a l'eix d'abscisses en el seu vèrtex.
- Si $\Delta < 0$ no té cap solució i la paràbola no tallarà l'eix d'abscisses

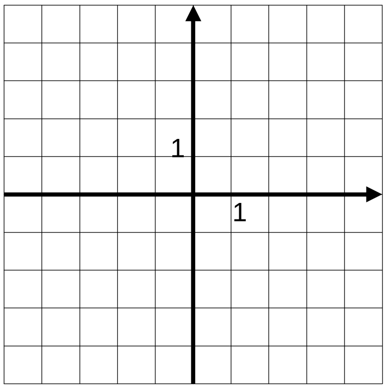
(observació: Si tenim els talls a l'eix x el vèrtex serà al punt mitjà d'aquests dos punts)

<u>PUNT D'INTERSECCIÓ AMB L'EIX D'ORDENADES</u>
Trobarem la imatge del valor 0, o sigui **donarem a la x el valor zero en la fórmula de la funció.**

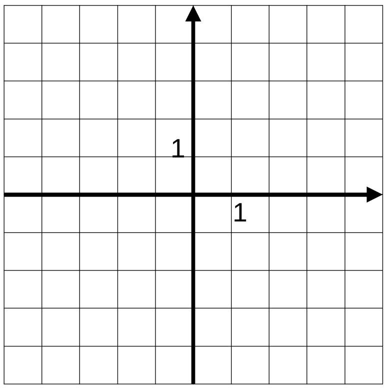
D19. Fes un croquis ràpid del gràfic de les funcions següents a partir del vèrtex i de l'estudi de l'obertura. Comprova després amb l'ordinador que ho has fet bé.

- $y = x^2 -2x+1$
  - Vèrtex = (,)
  - Còncava o convexa?......................
  - És oberta o tancada?......................

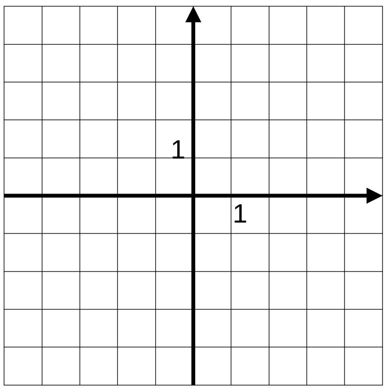




- $y = -x^2 +6x+1$
  - Vèrtex = (,)
  - Còncava o convexa?......................
  - És oberta o tancada?......................



- $y = -\frac{1}{3}x^2 - 5$
  - Vèrtex = (,)
  - Còncava o convexa?......................
  - És oberta o tancada?......................



- $y = 3x^2 +x+1$
  - Vèrtex = (,)
  - Còncava o convexa?......................
  - És oberta o tancada?......................

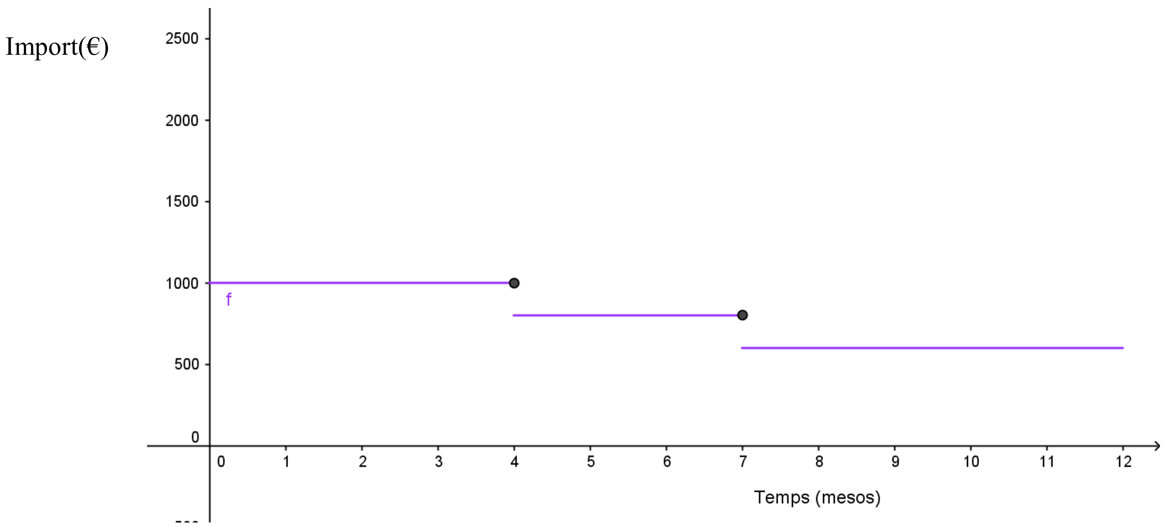
D20. Fes un croquis ràpid del gràfic de les funcions següents a partir de l'estudi dels seus talls amb els eixos i de l'obertura. En algun cas troba també el vèrtex de dues maneres diferents: amb la fórmula i a partir dels talls a l'eix d'abscisses.

- $y = x^2 - 6x+5$
- $y = x^2 + 8x + 16$
- $y = -x^2 - 5x$
- $y = 3x^2 - 12$
- $y = x^2 + 4x+5$
- $y = (x+10)(x+6)$
- $y = -(x-3)^2$
- $y = 2x(3-2x)$

E. Funcions definides a trossos

E1. Aquesta gràfica mostra l'evolució del preu d'un ordinador des del moment en què es va a posar a la venda fins transcorreguts 12 mesos:

a) Determina el preu de l'ordinador al cap de 3 mesos i al cap d'11 mesos.
b) Escriu l'expressió algèbrica de la funció que relaciona el preu amb el temps.



E2. En una botiga de venda d'articles a l'engròs, el preu d'una camisa és de 18 € si la quantitat és inferior a 50 unitats. Si la quantitat està compresa entre 50 i 100, el preu és de 14 €. I per a quantitats més grans, el preu és de 10 €. Escriu l'expressió algèbrica d'aquesta funció i fes la seva representació gràfica.

*Les funcions com aquestes, el domini de les quals està format per diversos intervals en què l'expressió de la funció és diferent, s'anomenen **funcions definides a trossos.** Per tant per fer la representació gràfica hem de representar per separat la funció en cadascun dels intervals on està definida.*

E3. La Societat General d'Aigües, a fi d'evitar un consum excessiu, ha establert que si el consum és inferior a 19 m^3 es paguin 0,32 €/m^3, des de 19 m^3 fins a un consum inferior a 37 m^3 es pagaran a 0,64 €/m^3 ; i a partir de 37m^3, 0,96 €/m^3. Escriu l'expressió algèbrica de la funció que relaciona l'import amb el consum i representa-la gràficament.

Observa que els gràfic d'aquestes funcions no es poden dibuixar d'un sol traç, ja que presenten interrupcions. Són funcions discontinues.
*Una funció **contínua** presenta un gràfic format per un sol traç. Per contra una funció **discontínua** presenta un gràfic amb alguna interrupció.*

E4. Els preus de l'estada en una casa rural són els següents: 10 € de quota fixa i 65 € per dia. Una segona casa rural cobra els tres primer dies 70 € diaris; del 4t al 7è dia, 60 €, i a partir del 7è dia, 50 €. Justifica si aquestes funcions són contínues o discontínues.(Hauràs d'escriure les expressions algèbriques i representar-les gràficament.)

E5. Representa gràficament les següents funcions i indica quines presenten discontinuïtats.

a) $f(x)=\begin{cases} x+2 & x\le 1 \\ -2x+4 & x>1 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x<4 \\ x-2 & x\ge 4 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} x^2 & x<2 \\ 4 & x\ge 2 \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} 0.25 & x<5 \\ x & x\ge 5 \end{cases}$

$f(x)=\begin{cases} 3x-1 & x<0 \\ 2x & x\ge 0 \end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases} 3 & si\ x<2 \\ x-1 & si\ 2\le x\le 4 \\ 3 & si\ x>4 \end{cases}$

f) $f(x)=\begin{cases} (x+1)^2 & si\ x\le 0 \\ x+1 & si\ 0<x<2 \\ \dfrac{x}{4} & si\ x\ge 2 \end{cases}$

g) $f(x)=\begin{cases} x^2+2x-1 & si\ x\le 1 \\ x & si\ 1<x\le 2 \\ \dfrac{x-1}{2} & si\ x>2 \end{cases}$