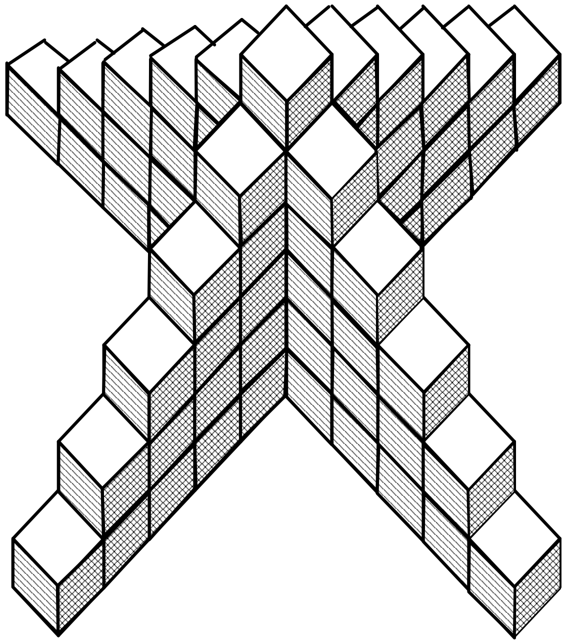
POLINOMIS

Matemàtiques. 4t ESO

INTRODUCCIÓ

A.1. Observa aquesta torre:



a) Quants cubs són necessaris per a construir aquesta torre?

b) Quants cubs són necessaris per a construir una torre de 5 cubs d'alçada?

c) Quants en necessites si fa 7 cubs d'alçada? I per a 8 cubs d'alçada?

d) Quants en necessites si fa 12 cubs d'alçada?

e) Quants en necessites si fa 10 000 cubs d'alçada?

f) Explicaraonadament l'estratègia que has utilitzat per arribar a trobar la solució de la pregunta e. Pots utilitzar dibuixos.

g) Utilitzant l'estratègia que acabes de raonar intenta trobar la fórmula general que permeti trobar la quantitat de cubs per una alçada qualsevol de n cubs.

h) Compara la fórmula amb la dels companys.

i) Simplifica al màxim la fórmula que t'ha sortit i comprova que funciona amb les torres petites de 5, 6, 7 cubs d'alçada.

j) Calcula l'alçada si la torre té 24531 cubs.

A.2. Calcula:

a) $(4x^3 + x^2 - 2) \cdot 7x^4$

b) $(-3x^3 + x^2 - 2) \cdot (-x^2)$

c) $(4x^2 + 3x - 2) \cdot x$

d) $(4t^3 - t^2 - 2) \cdot (-6t)$

A.3. Fes les següents multiplicacions:

a) $(x + 1)(x + 3) =$

b) $(x + 1)(x - 1) =$

c) $(3x - 2)(2x + 3) =$

d) $(x + 5)^2 =$

e) $(2x^3 + 4x - 2)(x^3 - 4) =$

f) $(-x^3 + 3x - 1/2)(2x^2 + 6) =$

g) $(3x^3 + 5x^2 - 3x + 1)(3x^3 - 5x) =$

h) $(5x^5 - 3x - 4)(7x^3 + 2x - 1) =$

i) $(25x^7 + 5x + 2)(-x^4 + 3x^2 - 3) =$

j) $(x^3 + 2x^2 - 2)(3x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 4) =$

k) $\left(2x^2 + 5x\right)\left(x^3 + 7x^2 - 3x + 4\right) =$

l) $\left(2x^2 + 4x - 3\right)\left(x^2 - 7x + 1\right) =$

m) $\left(x^2 + 6x + 1\right)\left(2x^2 - 4x - 5\right) =$

n) $\left(2x^3 + 5x^2 - x + 2\right)\left(x^7 - 3x^5 + 4x^2 - x + 1\right) =$

A.4. Fes les divisions següents:

a) $(x^5 + 5x^4 - 6x^2 - 4) : (x^3 + 3x^2 - 1)$

b) $(-x^5 + 12x^4 - 8x^3 + x^2) : (x^4 - 2x^2 + x)$

c) $6x^5 - x^4 - 8x^3 + 15x^2 - 8x$ per $2x^2 - 3x + 2$

d) $x^7 - x^6 + x^2 + 3$ per $x^4 - x^2$

e) $4x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ per $2x + 1$

f) $2x^3 + 2x + 1$ per $x^2 - x + 1$

A.5. Troba un polinomi tal que, en ser dividit per $x^2 + 1$ doni de quocient $2x^2 + x - 4$ i de residu $3x - 4$.

A.6. Fes la següent divisió: $(x^5 - 2x^4 - 5x^2 - 17x + 8) : (x - 3)$

Ara calcularem el quocient i el residu de la divisió anterior amb un altre procediment:

		1	-2	0	-5	-17	8	⟵ Polinomi en notació posicional
important *	3		3	3	9	12	-15	⟵ nombres que van sortint
		1	1	3	4	-5	-7	⟵ **residu**
		Quocient en notació posicional						

*: aquí posem el número que caldria posar en comptes de l'x per a que el divisor sigui zero.

En aquest cas 3-3 = 0 → x = 3

Si observes el procediment general de la divisió veuràs com van sortint els nombres d'aquest nou procediment.

Aquest procediment per trobar el quocient i el residu es diu **Regla de Ruffini** i és una forma molt més curta de fer la divisió.

Només la podem fer servir quan el divisor és de la forma x - a.

A.7. Utilitzant els dos mètodes fes la divisió següent: $(x^6 - x^5 + 3x^4 + 2x^2 + 6) : (x - 2)$. Comprova que dóna el mateix.

A.8. Calcula amb la Regla de Ruffini les següents divisions:

a) $(x^6 - 3x^5 + 9x^3 - x^2 + 1) : (x - 1)$

b) $(2x^4 - 3x^3 + x^2 - 8x + 1) : (x - 3)$

c) $(2x^4 - 3x^3 + 6x + 2) : (x + 3)$. Observa que $(-3) + 3 = 0$ per tant cal aplicar Ruffini amb $x = -3$

d) $(x^3 - 4x^2 + 3x + 5) : (x - 2)$

e) $(2x^3 + 9x^2 + 11x + 7) : (x + 3)$

f) $(x^6 + 2x^5 - 8x^4 + 7x^3 + 29x^2 + x - 5) : (x + 4)$

g) $(4x^6 - 4x^5 - 3x^4 + 4x^3 - x^2 + x + 6) : (x - 1)$

h) $(x^3 - 6x^2 + 11x - 5) : (x - 3)$

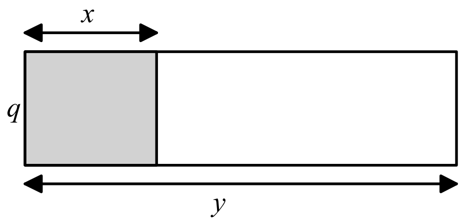
i) $(x^4 + 7x^3 + 13x^2 - x - 17) : (x + 4)$

j) $(x^7 - 9x^6 + 19x^5 + 12x^4 - 3x^3 + 19x^2 - 37x - 37) : (x - 5)$

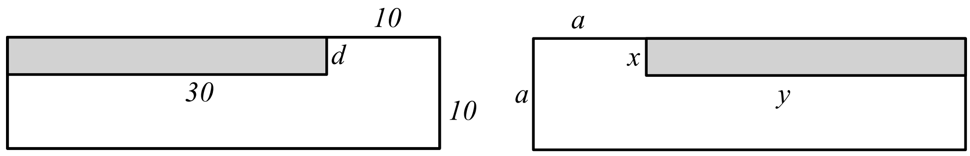
B. PRODUCTES NOTABLES

B.1. Troba l'àrea de les zones no ombrejades que apareixen a les figures següents:

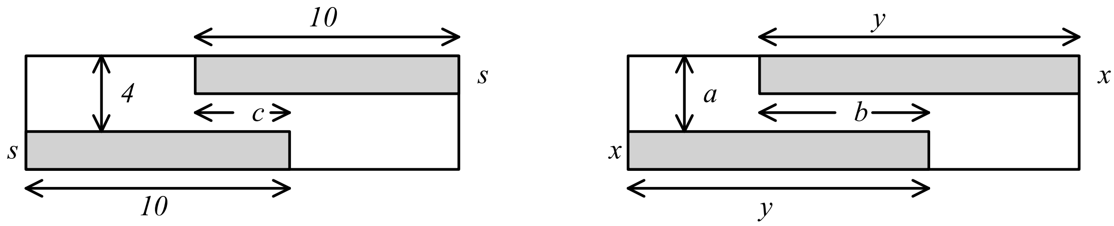
a)



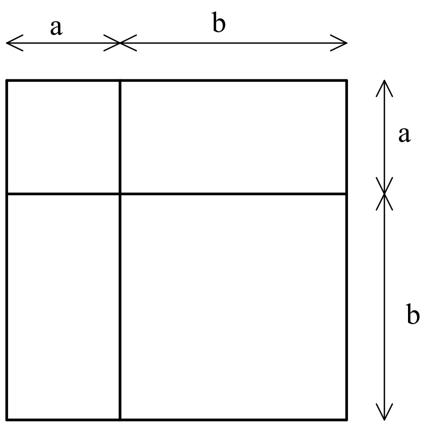
b)



c)

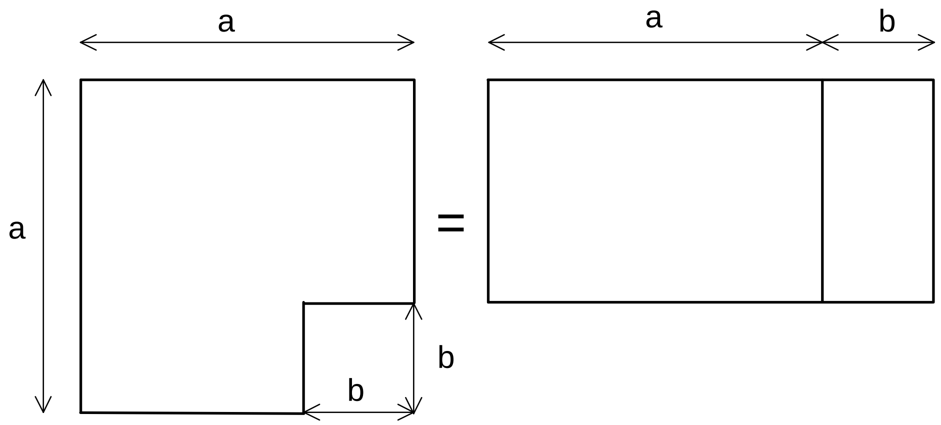


B.2. Expressa l'àrea del quadrat de costat a + b en funció de les àrees de les quatre figures que conté:

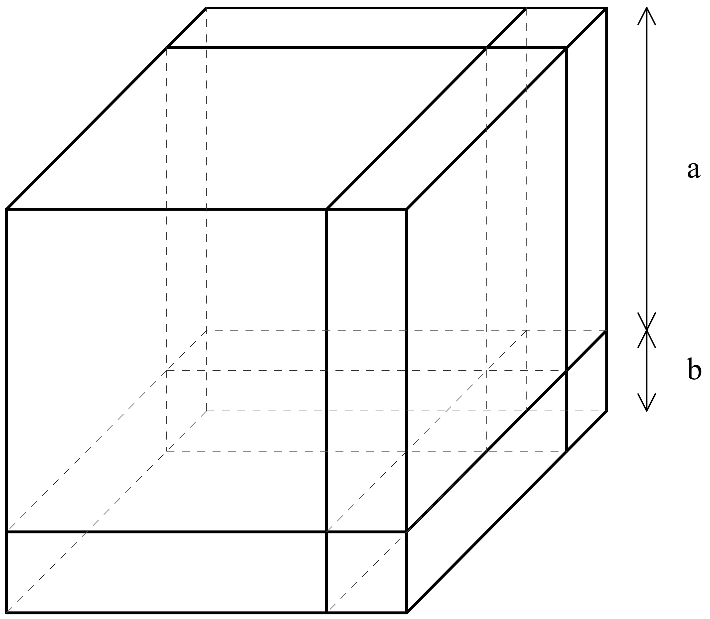


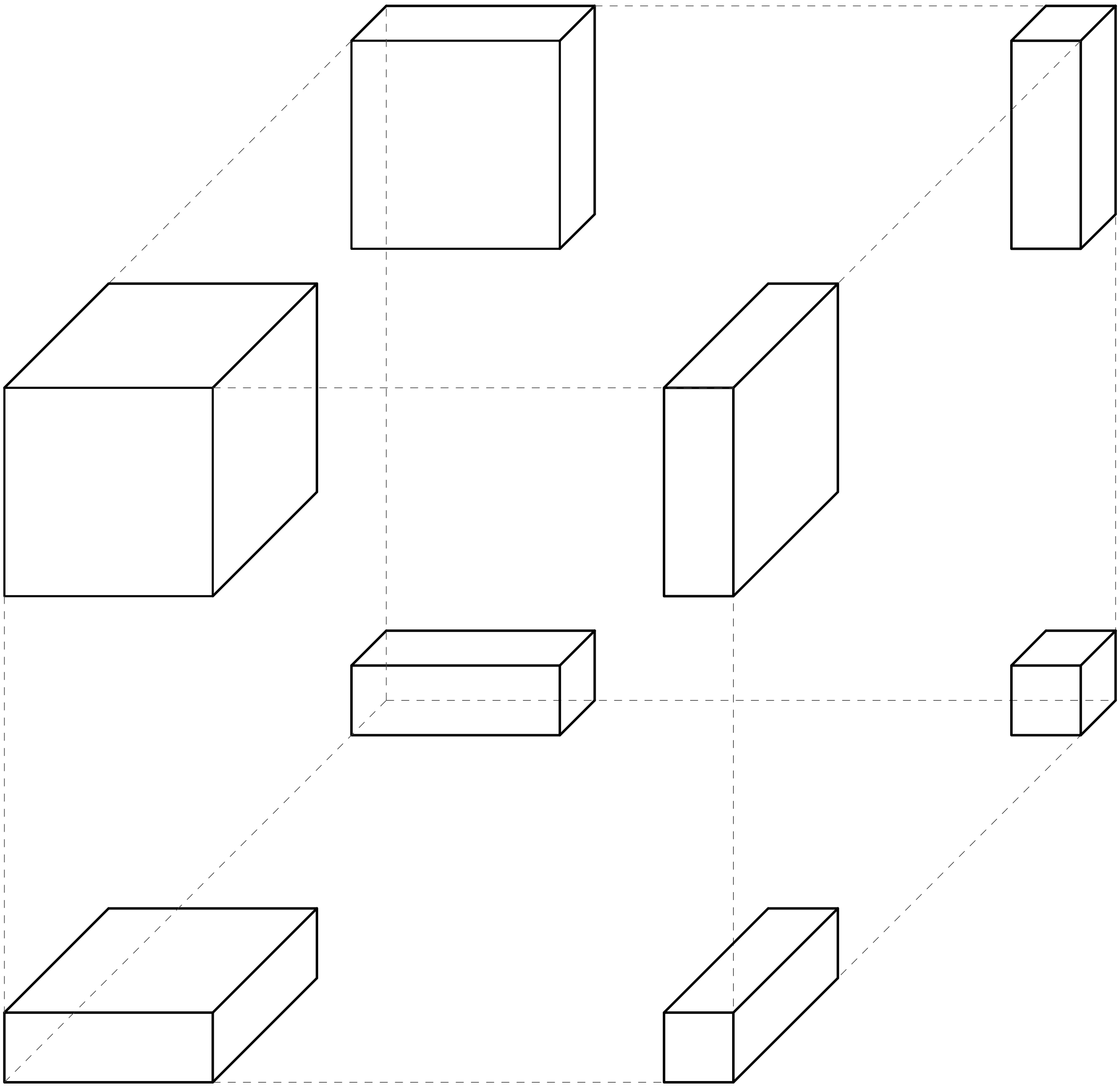
$(a + b)^2 =$

B.3. Explica i escriu les dues equivalències de les dues àrees següents:



B.4. Troba gràficament a què és igual $(a + b)^3$.





B.5. De forma semblant al producte de polinomis, multiplicarem expressions algebraiques i demostrarem **identitats notables**. Aquestes identitats són molt útils per fer càlculs. Heu de tenir en compte que les lletres a, b i c poden ser qualsevol expressió.

a) Exemple: Factor comú: $a\,(b + c) = a\,b + a\,c$

b) Quadrat d'una suma: $(a + b)^2$

c) Quadrat d'una diferència: $(a - b)^2$

d) Suma per diferència: $(a + b)\,(a - b)$

e) Cub d'una suma: $(a + b)^3$

f) Cub d'una diferència: $(a - b)^3$

B.6. Calcula:

a) $(x + 2)^2$

b) $(x - 3)^2$

c) $(x + 2)(x - 2)$

d) $(x + 3)^3$

e) $(2x - 3)^2$

f) $(4x + 5)(4x - 5)$

g) $4x^2(x^2 + 3x)$

h) $2x(x - 3)$

i) $(3x^2 + 3)^2$

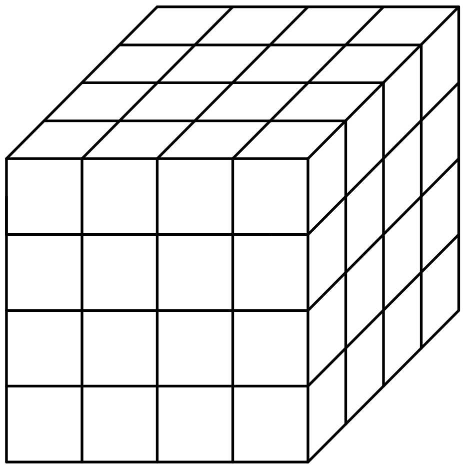
B.7.
El cub de la figura següent té 64 cubs petits. Pintem les sis cares del cub gran i volem saber quants cubs petits tenen pintades:

a) cap cara

b) una cara

c) dues cares

d) tres cares



B.8. Repeteix el problema anterior canviant els 4 cubs petits que té cada aresta per un nombre n qualsevol.

B.9. Desenvolupa els següents productes notables:

a) $(x + 4)^2 =$

b) $(2 - z)^2 =$

c) $(2a + b)^2 =$

d) $(3-m)(3+m) =$

e) $(x + y)^2 =$

f) $(2x-3)(2x+3) =$

g) $(2x^2 + b)^2 =$

h) $(3x - 2)^2 =$

i) $(4x^3 + 2x)^2 =$

j) $(x+4)(x+4) =$

k) $(5x^4 + 3x^3)^2 =$

l) $(6x + 5y)^2 =$

m) $(4x + 8)^2 =$

n) $(2a^3 + 3a^2)^2 =$

o) $(x + 9)^2 =$

p) $(2-z)(z+2) =$

q) $(2a+b)(2a-b) =$

r) $(3x^3 - 2x^2)(3x^3 + 2x^2) =$

s) $(x^2 - 4x)(x^2 + 4x) =$

t) $(3 + x)^2 =$

B.10. Quin nombre cal afegir a cadascun dels polinomis següents per formar un quadrat perfecte:

a) $x^2 + 2x + \dots$

b) $x^2 - 2x + \dots$

c) $x^2 - 6x + \dots$

d) $x^2 + 5x + \dots$

e) $x^2 + 10x + 9 + \dots$

B.11. Troba si són identitats notables i en cas afirmatiu, escriu-les.

a) $x^2 + 4x + 4 =$

b) $x^2 - 2x + 1 =$

c) $x^2 - 4 =$

d) x^2 - 6x+9 =

e) x^2+10x+25 =

f) x^2+12x+36 =

g) x^2+4x+25 =

h) x^2- 9 =

i) x^2 - 14x+49 =

j) x^2+20x+100 =

k) x^2- 36 =

l) 4x^2- 12x+9 =

m) 9x^2+12x+4 =

n) 25x^2+50x+25 =

o) x^2 - 25 =

p) x^2+4x+4 =

q) x^4- 4x^2 =

r) 4x^2+4x+1 =

s) x^2-12x+9 =

t) x^2- 49 =

u) x^2+4x - 4 =

v) x^2+16x+64 =

w) 4x^2 - 36x+81 =

x) x^2 - 1 =

y) 9x^2 - 4 =

z) 36x^2+48x+4 =

aa) x4 - 6x^2+9 =

bb) 25x^2 - 4 =

cc) x^4+4x^3+4x^2 =

dd) x^2 - 100 =

Generalització del binomi de Newton

B.12. Observa els binomis:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

com creus que hauria de ser el següent? per què?

$(a + b)^4 =$

Tartaglia va trobar una manera fàcil de recordar la generalització del binomi. Per aconseguir-ho va inventar l'anomenat **triangle de Tartaglia.**

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

B.13. Intenta entendre com surten els números i construeix a la llibreta el triangle fins a la setena filera com a mínim.

B.14. Quina relació observes entre el binomi de Newton per 2 i 3, i el triangle de Tartaglia?

B.15. Reconstrueix ara els binomis següents:

$(a + b)^4 =$

$(a + b)^5 =$

$(a + b)^6 =$

B.16. Utilitzant el binomi de Newton, calcula les potències dels binomis següents:

a) $(x + 3)^5$

b) $(x^2 + 2x)^6$

El binomi de Newton és l'únic en que els signes no estan dins de les lletres, es a dir, si volem calcular $(x – 3)^2$ utilitzem la fórmula $(a – b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ en que b = +3.

En general, la fórmula per $(a – b)^n$ és la mateixa que $(a + b)^n$ però el signe dels coeficients son positius i negatius alternativament.

B.17. Construeix els binomis següents:

$(a - b)^4 =$

$(a - b)^5 =$

$(a - b)^6 =$

B.18. Calcula:

$(x – 5)^4 =$

$(3x^2 – x)^5 =$

B.19. Desenvolupa

$(2x^2 – 1)^4 =$

$(5 + x^2)^3 =$

$(3x + 2)^3 =$

Propietat distributiva – Treure factor comú

Treure factor comú en un polinomi, és desfer un producte fruit de la propietat distributiva.

Exemple:

Distributiva : $3x^2(x^3 – 2x^2 + 1) = 3x^5 – 6x^4 + 3x^2$

Treure factor comú: $3x^5 – 6x^4 + 3x^2 = 3x^2(x^3 – 2x^2 + 1)$

B.20. Aplica la propietat distributiva:

a) $3x^4(2x^5 + 3x + 1) =$

b) $2x^4(x^4 - 3x^2 + 2) =$

c) $x^3(5x^3 - 4x^2 + x + 1) =$

d) $2x^{10}(3x^8 - 5x^7 - 6x^6 - 3x^5 + 4x^2 + 5) =$

e) $7x^4(x^3 - 8x^2 + 10x + 3) =$

B.21. Treu factor comú la **x** elevada al màxim exponent possible:

a) $2x^7 - 3x^6 + 2x^5 =$

b) $4x^5 + 2x^4 - 3x^2 =$

c) $x^4 + 5x^3 + x^2 + x =$

d) $x^9 + x^8 =$

e) $12x^6 - 3x^5 + 3x^4 =$

f) $x^{10} - 3x^8 + 8x^7 - 6x^6 + 3x^5 =$

g) $9x^7 - 3x^6 + 6x^5 =$

h) $2x^3 + 2x^2 + 2x =$

i) $10x^7 - 6x^5 =$

C. VALOR NUMÈRIC D'UN POLINOMI

C.1.
Si substituïm en un polinomi la variable per un nombre i calculem el resultat obtindrem un altre nombre.

Exemple. $P(x) = x^3 - 4x^2 + 7$.

Si substituïm la x per 2, ho indiquem per P(2), obtenim:

$P(2) = 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 7 = 8 - 16 + 7 = -1$

Aleshores diem que -1 és **el valor numèric del polinomi** P(x) per x = 2.

> **Si en un polinomi P(x) substituïm la x per un nombre a, el resultat obtingut és el valor numèric del polinomi quan x pren aquest valor i ho representem per P(a).**

C.2. Calcula el valor numèric dels polinomis següents :

a) $P(x) = 2x^4 - x^3 + 9$ per $x = 2$

b) $Q(x) = -3x^3$ per $x = -1$

c) $S(x) = 5$ per $x = 4$

d) $R(x) = x^2 - 4$ per $x = 2$

e) $S(x) = 5x^4 - 3x^2 + 2x - 1$ per $x = 1$

f) $T(x) = 22x^7 - 4x^5 - 3x^3 + 3$ per $x = 0$

g) $U(x) = 6x^2 - 3x + 1$ per $x = -2$

h) $V(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 8$ per $x = 2$

C.3. Escriu dos polinomis, un de grau 1 i un altre de grau dos, tales que el seu valor numèric per x = -3 sigui 1.

> Quan el valor numèric d'un polinomi P(x) per x = a és igual a 0, P(a) = 0, diem que **'a' és una arrel (o un zero)** del polinomi P(x).

Exemple:

> 3 és una arrel del polinomi $P(x) = x^2 - 5x + 6$ perquè P(3) = 0.

1 no és una arrel del polinomi $P(x) = x^2 - 5x + 6$ perquè $P(1) = 2$

C.4. La Marta diu que $x = -1$ és una arrel del polinomi $P(x) = x^4 + 3x^2 - 6x^2 + 2$. L'Eva diu que $x = -1$ no és una arrel d'aquest polinomi. L'Eva dóna com a arrel $x = 1$. Qui té raó?

C.5. Troba una arrel, provant amb nombres senzills, de cadascun dels polinomis següents:

a) $P(x) = x + 3$

b) $Q(x) = x^2 - 4$

c) $R(x) = 5x^2 - 5$

d) $S(x) = x^2 - 3x + 2$

e) $T(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$

C.6. Hi ha alguna relació entre les arrels d'un polinomi i resoldre equacions? Quina?

C.7.

a) Quin és el residu de la divisió $(x^3 - 2x + 1) : (x-2)$?

b) Quin és el valor numèric de $P(x) = x^3 - 2x + 1$ per $x = 2$?

c) Creus que la coincidència entre els resultats als dos apartats anteriors és casualitat? Per què ?

C.8. Demostra que el valor numèric d'un polinomi $P(x)$ per $x = a$ coincideix amb el residu de la divisió del polinomi $P(x)$ per $(x - a)$. (**TEOREMA DEL RESIDU**)

C.9. Utilitza el teorema del residu per trobar el valor numèric dels següents polinomis:

a) $P(x) = x^3 - 7x^2 + 18x - 15$ per $x = 3$

b) $P(x) = x^3 - 3x + 1$ per $x = -2$

c) $P(x) = x^4 - 2x^2 + 4$ per $x = 2$

d) $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ per $x = 2$

A l'hora de temptejar amb divisors nombres per trobar "de casualitat" una arrel d'un polinomi és molt més senzill fer-ho amb Ruffini que substituint.

C.10. Busca alguna arrel del polinomi $P(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$ provant amb Ruffini.

Aquesta tècnica té l'inconvenient que temptejar a cegues pot ser frustrant. Per facilitar i acotar el tempteig cal fer-ho sols amb els divisors del terme independent (amb positiu i negatiu) .

Per exemple, el polinomi anterior $x^3 - 7x^2 + 16x - 12$ provaríem sols amb 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 12, -12 (observa que tots ells divideixen al 12)

Si volem buscar més d'una arrel es pot continuar intentant buscar un residu zero amb Ruffini a partir del quocient de la divisió anterior.

Exemple: $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

	1	-6	+11	**-6**
1		1	-5	**+6**
	1	-5	+6	**0**
2		2	-6	
	1	-3	0	
3		3		
	1	**0**		

En aquest cas x = 1 , x = 2 i x = 3 són les tres arrels del polinomi.

C.11. Busca les arrels del polinomi $P(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$

En el polinomi anterior es repeteix l'arrel x = 2. En aquest cas diem que x = 2 és una <u>ARREL DOBLE</u>

C.12. Calcula, temptejant amb Ruffini o bé substituint, les arrels dels següents polinomis:

a) $P(x) = x^2 - 6x + 8$

b) $P(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

c) $P(x) = x^2 - 4$

d) $P(x) = 2x^2 + 12x + 10$

C.13. Intenta trobar les arrels en els següents polinomis temptejant per Ruffini

a) $P(x) = 6x^2 - 5x + 1$

b) $Q(x) = x^2 + x + 1$

quines dificultats trobes?

El mètode de Ruffini no sempre permet trobar les arrels dels polinomis. En aquest cas pot ser que les arrels no siguin enteres o que el polinomi no tingui arrels. Com a mètode alternatiu per trobar arrels podem intentar resoldre l'equació de 2n grau $P(x) = 0$.

En el cas anterior:

$6x^2 - 5x + 1 = 0$ es pot resoldre utilitzant la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{per} \qquad ax^2 + bx + c = 0$$

C.14. Busca les arrels dels polinomis de l'exercici anterior utilitzant la fórmula

C.15. Busca les arrels dels polinomis següents utilitzant la fórmula

a) $P(x) = x^2 - 6x + 8$

b) $Q(x) = 2x^2 + 12x + 10$

c) $R(x) = 4x^2 - 6x + 2$

D. FACTORITZACIÓ I RECERCA GENERAL D'ARRELS

D.1. Calcula mentalment les arrels dels polinomis següents:

a) $P(x) = x-1$

b) $Q(x) = x +2$

c) $R(x) = (x - 1)(x + 2)$

d) $S(x) = (x - 3)(x + 2)(x - 5)(x - 8)$

e) $T(x) = x(x - 3)(x + 5)$

f) $U(x) = x^3(x - 2)^2(x + 3)(x - 6)$

g) $V(x) = (x - 2)^2(2x + 1)(x - 6)$

D.2. Calcula les arrels dels polinomis següents:

a) $P(x) = (x + 1)(x - 2)$

b) $Q(x) = x^2 - x - 2$

c) $P(x) = Q(x)$ **?**

Raona la resposta.

En general podem dir que **dos polinomis són iguals si**:

- Tenen les mateixes arrels.
- Tenen el mateix grau.
- Coincideix el coeficient del monomi de grau superior.

D.3. D'un polinomi sabem que:

"les úniques arrels que té són x = 2 i x = 5; és de grau 2 i el coeficient del monomi de grau superior és 1."

Escriu aquest polinomi.

Esquema general de factorització i recerca d'arrels

Ha quedat clar que si tenim un polinomi factoritzat aleshores sabem quines són les seves arrels, i si sabem les arrels podem escriure fàcilment el polinomi factoritzat. Podem, ara, ajuntar totes les tècniques que hem desenvolupat tant per factoritzar com per trobar arrels i utilitzar-les indistintament per les dues tasques.

Si volem factoritzar i buscar arrels d'un polinomi cal que seguim aquest esquema d'actuació:

1r Si el polinomi no té terme independent, aleshores traurem factor comú la x elevada al màxim exponent possible.

2n Intentem descompondreel polinomi desfent algun producte notable " a ull".

3r Intentem descompondre-ho temptejant amb Ruffini.

4t Aplicar, si cal, la fórmula de l'equació de 2n grau.

5è Comprovar si el polinomi factoritzat i l'original són del mateix grau i tenen el mateix coeficient del monomi de grau superior.

D.4. Descomposaen factors i dóna les arrels dels següents polinomis:

a) $P(x) = x^5 + 3x^4 - x^3 – 3x^2$

b) $P(x) = 6x^3 – 19x^2 + 16x – 4$

c) $P(x) = x^3 + x^2 + x$

d) $P(x) = 10x^6 – 27x^5 + 25x^4 – 9x^3 + x^2$

e) $P(x) = x^3 - 13 x + 12$

f) $Q(x) = 2x^3 - 6 x^2 -8 x + 24$

g) $R(x) = x^5 - x^4 – x^3 + x^2$

h) S(x) = x4 - 3x3 - 6x2+8x

i) $T(x) = 15x^6- 49x^5+8x^4 + 12x^3$

D.5. Investiga, utilitzant el Teorema del Residu, quins dels polinomis següents tenen el factor x - 2, quines el x + 1 i quines el x.

a) $P(x) = x^3 - 7 x + 6$

b) $Q(x) = x^3 - 4 x^2 - 5 x$

c) $R(x) = x^3 - 3x - 2$

d) $S(x) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$

e) $T(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$

f) $Q(x) = 4x^3 - 6x^2 + 5x + 3$

D.6. Troba l'altre factor de segon grau dels polinomis de l'exercici anterior i descompon els polinomis com a producte d'un factor de primer grau per un de segon grau.

D.7. Descompon els factors de segon grau de l'exercici anterior en producte de dos factors de primer grau i expressa cadascun dels polinomis de l'exercici **F.5** com a producte de polinomis de primer grau.

D.8. Utilitzant el Geogebra dibuixa els següents polinomis i fes el regionament del pla. Escriu clarament quines són les arrels i digues si son arrels simples, dobles,...

a) $f(x) = x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$
Les arrels són: (recorda especificarsi és simple o doble):
x =
x =

b) $g(x) = 2x^3 - 2x = 2x(x-1)(x+1)$
Les arrels són :
x =
x = (recorda especificar si és simple o doble):
x =

c) $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1 = (x-1)(x+1)^2$

Les arrels són: (recorda especificar si és simple o doble)
x =
x =

d) $f(x) = 3x^4 - 3x = 3x^3(x-1)$

Les arrels són: (recorda especificarsi és simple o doble):
x =
x =

D.9. **Explica raonadament** quin tipus d'arrels són les que provoquen canvi de signe i quins no el generen

D.10. Els següents polinomis tenen exactament les mateixes arrels que els polinomis de l'exercici anterior però en canvi no tenen el mateix gràfic. Fes el gràfics amb ajut de Geogebrai observa les diferències.

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4 = -\frac{1}{2}(x-2)(x-4)$

Les arrels són: (recorda especificarsi és simple o doble):

b) $g(x) = -x^3 + x = -x(x-1)(x+1)$

Les arrels són :

c) $f(x) = -x^3 - x^2 + x + 1 = -(x-1)(x+1)^2$

Les arrels són :

d) $f(x) = -2x^4 + 2x = -2x^3(x-1)$

Les arrels són:

D.11. **Observa** com en els anteriors exercicis es compleix la següent particularitat:

- En tots els polinomis en que el coeficient a de la x elevada a l'exponent més alt és positiu, en la regió que està a la dreta de l'arrel més gran la funció és positiva.

- En tots els polinomis en que el coeficient a de la x elevada a l'exponent més alt és negatiu, en la regió que està a la dreta de l'arrel més gran la funció és negativa.

Intenta explicar raonadament el per què d'aquest fet

Conclusions:

Per estudiar el signe d'una funció polinòmica

- Busquem totes les arrels dels polinomis
- Si l'arrel és simple o és repetida una quantitat senar de vegades aleshores genera un canvi de signe
- Si l'arrel és doble o és repetida una quantitat parell de vegades, aleshores no genera canvi de signe
- Si el coeficient a de la x elevada a l'exponent més alt és positiu, en la regió que està a la dreta de l'arrel més gran la funció és positiva

- Si el coeficient *a* de la *x* elevada a l'exponent més alt és negatiu, en la regió que està a la dreta de l'arrel més gran la funció és negativa.
- Si conec el signe de la primera regió a la dreta de la funció i conec totes els arrels puc determinar ràpidament tot el signe de la funció polinómica
- Com a control d'errors farem una taula de valors de, al menys, 1 punt. Comprovarem que aquest punt és a la regió que li correspon.

D.12. Dels següents polinomis :

- Busca les arrels.
- Escriu la descomposició factorial.
- Fes el regionament del pla i un esbós del gràfic.

a) $x^2 - 3x - 4$

b) $-x^2+5x$

c) $-4x+10$

d) x^2+4

e) $(x+6)^2$

f) $x^2 - 2x+1$

g) $-x^2 +2$

h) $x^2 - 7x+10$

i) $x^3 - 5x^2 + 6x$

j) $3x^3 + 6x^2 + 3x$

k) $x^3 - x^2 - 4x + 4$

l) $2x^3 + 6x^2 + 5x + 2$

m) $6x^3 + 13x^2 - 4$

n) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

o) $x^3 + 3x^2 - 4$

p) $x^3 - 8x^2 + 17x - 10$

q) $2x^3 - 7x^2 - 10x + 24$

r) $2x^4 + 9x^3 + x^2 + 30x$

s) $x^5 + 6x^4 + x + 6$

t) $4x^5 - 4x^4 + x^3$

u) $x^4 + 11x^3 - 13x^2 - 11x + 12$

v) $27x^3 + 54x^2 + 36x + 8$

w) $x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$

x) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

y) $x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$

z) $2x^4 - 2x^2$

aa) $4x^2 + 196 - 56x$

bb) $x^4 - x^2 + x^3 - x$

cc) $-16x^2 + 4 - 16x$

dd) $2x^3 - 2x^2 + 2x - 2$

ee) $x^3 - x^2 - 4x + 4$

D.13. Utilitzant les factoritzacions o descomposicions de l'exercici anterior resol les equacions:

a) $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

b) $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$

c) $6x^3 + 13x^2 - 4 = 0$

d) $2x^3 - 7x^2 - 10x + 24 = 0$

e) $2x^4 + 9x^3 + x^2 + 30x = 0$

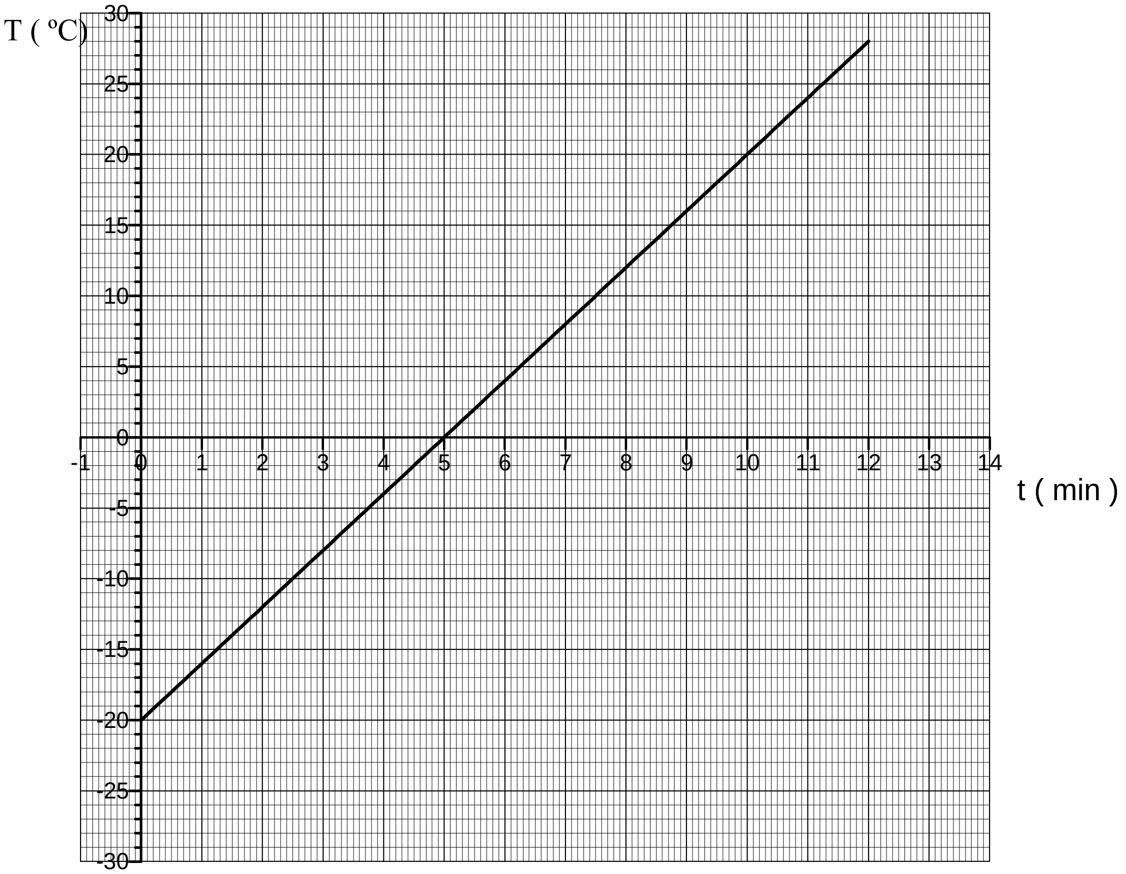
f) $x^5 + 6x^4 + x + 6 = 0$

g) $4x^5 - 4x^4 + x^3 = 0$

h) $x^4 + 11x^3 - 13x^2 - 11x + 12 = 0$

E. ESTUDI DEL SIGNE D'UNA FUNCIÓ. INEQUACIONS

E.1. Observa el gràfic següent que representa la temperatura d'una substància, aigua amb anticongelant, que s'està escalfant.



GRÀFIC DE LA TEMPERATURA D'UN LÍQUID EN FUNCIÓ DEL TEMPS

a) Per quins valors del temps la temperatura del líquid és més petita o igual que 0ºC? Expressa la resposta en forma d'interval.

b) Per quins valors del temps la temperatura del líquid és més gran que 0ºC? Expressa la resposta en forma d'interval.

c) Troba la fórmula de la funció.

d) Expressa en notació simbòlica utilitzant la fórmula i amb els signes de desigualtat $(<, \leq, >, \geq)$, la condició que ha de complir la variable **t** per complir el que es demana a l'apartat a). Fes el mateix amb la condició de l'apartat b).

E.2. La fórmula següent expressa la temperatura d'una substància (T º C) en funció del temps (t min) per a $t \in [0 , 60]$:

$$T = 6t - 22$$

a) Troba i expressa en forma d'interval els valors de t que compleixen la desigualtat:

$$6t - 22 < 0$$

(Pots resoldre aquest apartat a partir del gràfic de la funció o intentar de fer-ho directament sense fer el gràfic)

b) Troba i expressa en forma d'interval els valors de t que compleixen la desigualtat:

$$6t - 22 > 100$$

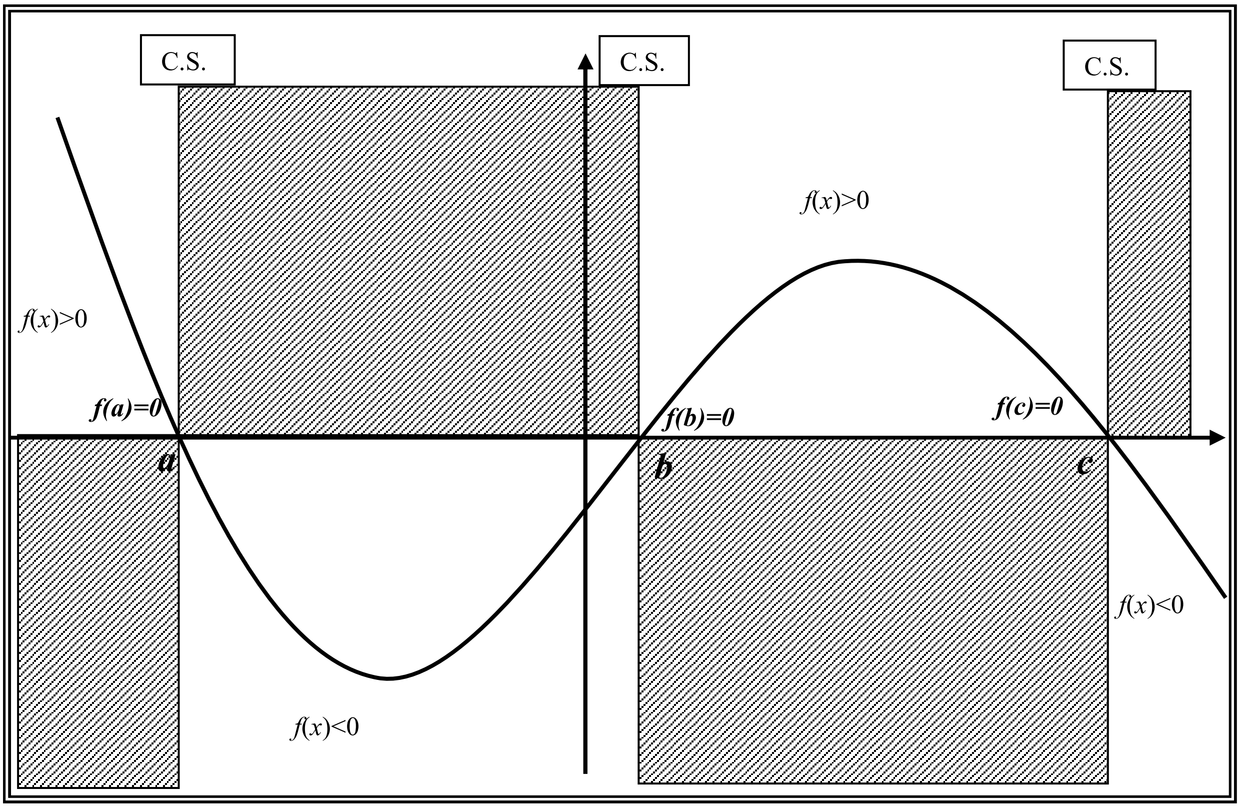
LES INEQUACIONS I L'ESTUDI DEL SIGNE D'UNA FUNCIÓ A PARTIR DEL GRÀFIC

Als exercicis anteriors has manegat expressions algebraiques amb els signes de desigualtat com ara $6t - 22 < 0$. Una expressió com aquesta es diu que és una **inequació** amb una incògnita. En aquest cas la incògnita seria la variable **t** . **Resoldre una inequació és trobar el conjunt de tots els valors de la incògnita que fan que la desigualtat sigui certa.** Aquests valors són les solucions de la inequació. Així podem dir que un nombre és una solució de la inequació si en substituir-lo en la incògnita obtenim una desigualtat numèrica que és certa.

Per tant l'enunciat de l'apartat a) de l'exercici E2 es podria expressar dient: resol la inequació $6t - 22 < 0$. Les solucions són els valors de l'interval $\left(0, \frac{22}{6}\right)$. I per exemple podem comprovar que el nombre 2 és una solució ja que $6 \cdot 2 - 22 = -10$ i $-10 < 0$.

Un mètode per resoldre inequacions és fer-ho **gràficament**. Si la inequació és de la forma $f(x) < 0$ podem representar la funció **f** i estudiar per quins valors de la variable x les imatges són negatives o sigui per quins valors de la x el gràfic està per sota de l'eix d'abscisses. De manera semblant podríem resoldre una inequació de la forma $f(x) > 0$, observant quant el gràfic va per sobre de l'eix d'abscisses.
Per tant **resoldre una inequació** d'aquests tipus **és el mateix** que **estudiar en quins intervals la funció té les imatges positives i en quins les imatges són negatives**.
Observeu que per tal de determinar amb precisió els intervals en els quals la funció té les imatges positives o negatives caldrà saber els punts en què el gràfic talla l'eix d'abscisses. És a dir caldrà resoldre l'equació $f(x) = 0$. La solució o solucions d'aquesta equació les podrem conèixer de forma més o menys aproximada a partir

del gràfic, però a vegades caldrà calcular-les analíticament, és a dir resolent l'equació directament.



Observa la funció f del gràfic anterior. A continuació escriurem la informació que ens proporciona referent al signe de la funció. Fixa't com s'enuncia aquesta informació i com s'expressa:

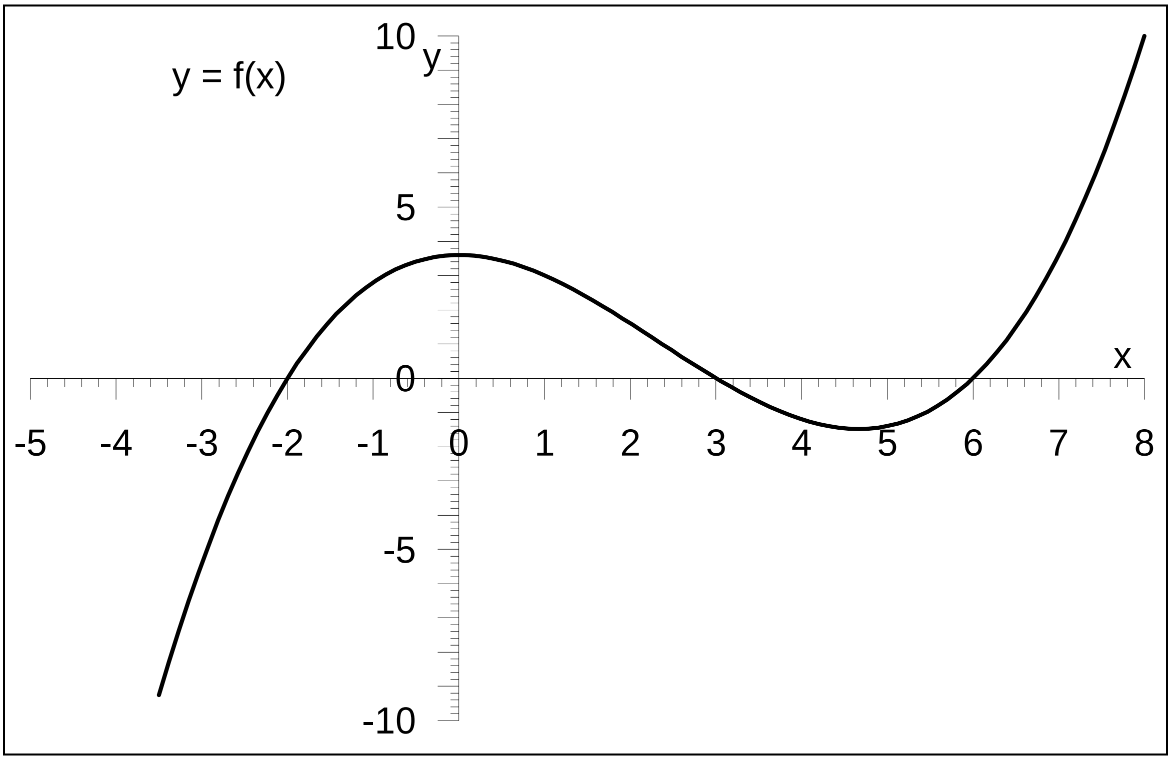
Les solucions de la inequació f(x) > 0 són els valors de la variable x pels quals el gràfic de la funció va per sobre de l'eix d'abscisses, o sigui per x< a ó b <x< c
Es a dir $x \in (-\infty, a) \cup (b, c)$
(Si la desigualtat fos ≥ els intervals serien tancats)
(El símbol $\cup$ significa la unió dels dos intervals)

Les solucions de la inequació f(x) < 0 són els valors de la variable x pels quals el gràfic de la funció va per sota de l'eix d'abscisses, o sigui els valors de les abscisses entre a i b i a partir de c, és a dir: $x \in (a, b) \cup (c. + \infty)$

Les solucions de l'equació f(x) = 0 són els valors de la variable x pels quals el gràfic talla l'eix d'abscisses, o sigui *a, b* i *c :* $x = a$, $x = b$ i $x = c$

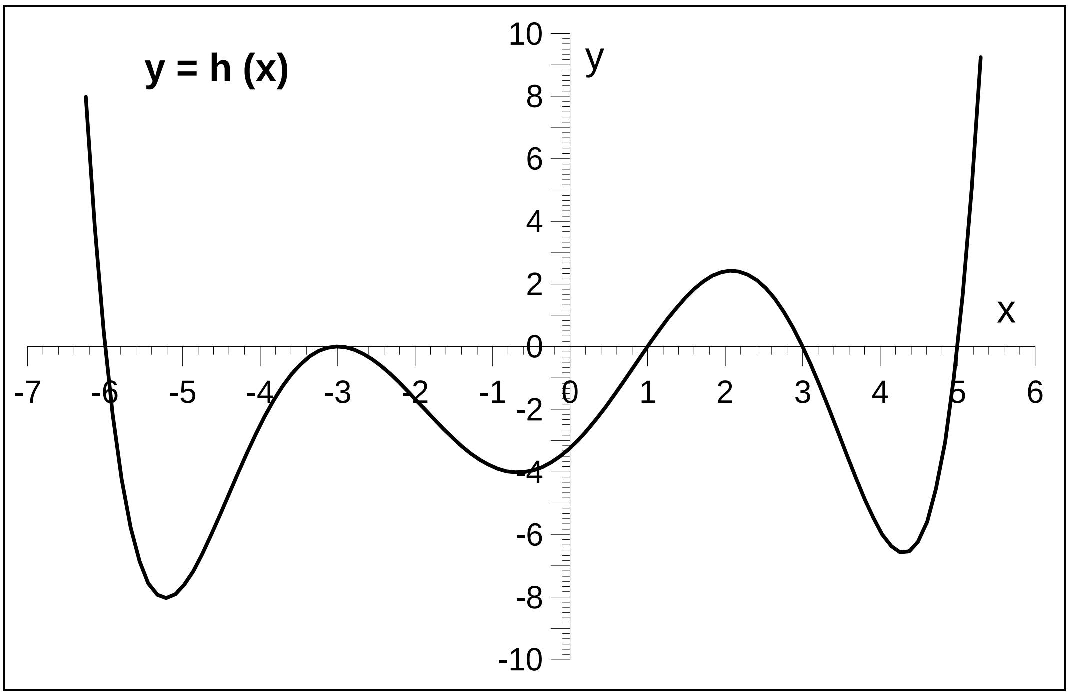
El signe de la funció es pot indicar directament sobre al gràfic, tal com podeu veure en el dibuix, amb les desigualtats pertinents o bé ratllant les zones o regions del pla on no hi trobem el gràfic de la funció: és el que en diem **regionament del pla.**

E.3. Observa la funció del gràfic $f:\Re \rightarrow \Re$ fes el regionament del pla i resol la inequació $f(x) \geq 0$



E.4. Observa la funció del gràfic: $h:\Re \rightarrow \Re$

a) Fes el regionament del pla i expressa en el gràfic el signe de la funció amb desigualtats.



E.5. Resol gràficament les següents inequacions lineals (de primer grau):

$2x-6 < 0$ $\qquad$ $20-4x \geq 0$ $\qquad$ $8x+1 > 0$ $\qquad$ $\dfrac{5-9x}{2} \leq 0$

RESOLUCIÓ ANALÍTICA D'INEQUACIONS

A l'exercici anterior heu resolt inequacions de primer grau amb una incògnita, dites també inequacions lineals. Per resoldre-les el pas inicial indispensable és trobar la solució de l'equació $mx+n = 0$.
El procés de resoldre l'equació, és a dir d'aïllar la x, ens suggereix la possibilitat de trobar analíticament les solucions de la inequació sense fer o pensar en el gràfic. En efecte podrem resoldre una inequació seguint els mateixos passos que seguim per resoldre l'equació però tenint en compte les propietats de les desigualtats quan operem amb el mateix nombre als dos membres.

PROPIETATS DE LES DESIGUALTATS I LES OPERACIONS

Si sumem o restem un mateix nombre als dos membres d'una desigualtat, la desigualtat es manté. Així per exemple:

$5 < 8$ i $5+4 < 8+4$ o sigui $9 < 12$

i en general si $r<s \longrightarrow r+a < s+a$

Això voldrà dir que: **quan passem sumant o restant termes d'un membre a un altre d'una desigualtat, tal com fem al resoldre una equació, la desigualtat no canvia**.

Amb la multiplicació i divisió cal anar molt en compte ja que si bé és cert que al multiplicar o dividir per un mateix nombre positiu els dos membres d'una desigualtat aquesta es manté, **si el nombre amb el qual multipliquem o dividim els dos membres és negatiu la desigualtat canvia de sentit !**
Per exemple:

$5<8$ i per tant $5 \cdot 3 < 8 \cdot 3$ o sigui $15 < 24$

i en general si $a > 0$ i $r< s \longrightarrow r\cdot a<s\cdot a$

En canvi:

$5<8$ però $5 (-3) > 8 (-3)$ o sigui $-15 > -24$ la desigualtat canvia de sentit!

i en general: si $a < 0$ i $r< s \longrightarrow r\cdot a>s\cdot a$

Això voldrà dir que: **quan passem multiplicant o dividint un factor d'un membre a un altre d'una desigualtat cal tenir molt en compte el signe del nombre que passem: si és positiu es manté el sentit de la**

desigualtat, però **SI EL NOMBRE QUE PASSEM MULTIPLICANT O DIVIDINT ÉS NEGATIU LA DESIGUALTAT CANVIA EL SEU SENTIT.**

MÈTODE PER A LA RESOLUCIÓ ANALÍTICA D'UNA INEQUACIÓ DE PRIMER GRAU

Per resoldre analíticament una inequació hem d'**aïllar la incògnita tenint en compte les propietats de les operacions en relació a les desigualtats** que hem vist a l'apartat anterior.
Així per exemple:

$2x-3 < 7x+1$

$2x-7x < 1+3$

$-5x < 4$

$x > \frac{4}{-5}$ la desigualtat ha canviat de sentit: hem dividit els dos membres per -5

$x > -\frac{4}{5}$ les solucions són per a $x \in \left(-\frac{4}{5}, +\infty\right)$

E.6. Resol analíticament les inequacions següents:

$7x-10 > 0$	$-x < 0$	$124x + 340 \leq 526$	$2x-3 > 5x$
$1-5x > 6$	$\frac{3}{4}x + 12 \geq 0$	$1{,}35 > 12{,}45 + 4{,}15x$	$-6x < -18$
$\frac{4+6x}{3} \geq 4x+3$	$0 < 3x + 8$	$9x - 2(3+5x) > x$	$0{,}03x > 0{,}1$

E.7. Comprova si els nombres -4 , 0, 1/2, 2 i π són o no solució de cadascuna de les següents inequacions o equacions.

$x^2 - 1 < 0$ $\quad \frac{1-2x}{7} \geq 0$ $\quad x^2 - 2x = 0$ $\quad 5x^2 - 4x < \frac{10x}{8x-1}$ $\quad x \geq \pi$

E.8. A partir de quina producció hi haurà guanys?

Una empresa que fabrica motors elèctrics ha fet un estudi dels guanys diaris (G en euros) segons la quantitat de motors fabricats (m). La relació entre G i m ve donada per la fórmula:

$$G = 20m^2 - 1600m$$

La quantitat màxima de motors que es poden fabricar en un dia és de 120.

La qüestió plantejada és: per a quines quantitats de motors diaris fabricats l'empresa tindrà pèrdues? i per quines quantitats tindrà guanys?. Per contestar la qüestió podeu fer el següent:

a) Fes un croquis del gràfic de la funció a partir dels zeros de la funció (talls a l'eix d'abscisses).
b) Contesta la qüestió plantejada
Respon també :
c) Quins són els màxims guanys diaris que es poden donar.
d) Per quina producció es donarien les màximes pèrdues diàries? Quant valdrien aquestes pèrdues?

E.9. Resol les inequacions següents:

$x^2 + 7x < 0$ $\quad$ $-x^2 + 6x + 5 \leq 0$ $\quad$ $(x-2)^2 > 0$ $\quad$ $x^2 - 2x + 6 < 0$

$(x-3)(x-5) > 0$ $\quad$ $(x+2)^2 (x-1) < 0$ $\quad$ $x^3 + 5x^2 + 2x - 8 \leq 0$

$x^3 - 9x \geq 0$ $\quad$ $(x+2)(x+6)(x-1) < 0$ $\quad$ $x(2-x)(4x+6)(x+1)^2 \leq 0$