

PROBABILITAT



Matemàtiques 4t ESO



Reconocimiento-No comercial-Compartir bajo la misma licencia 3.0 España

Usted es libre de:



copiar, distribuir y comunicar públicamente la obra



hacer obras derivadas

Bajo las condiciones siguientes:



Reconocimiento. You must attribute this work to [Departament de Matemàtiques de l'IEŠ el SUI](#) (with link).

Attribute this work:

```
<div xmlns:cc="http://creativecommons.org/ns#" about="http://www.xtec.cat/ieselsui" data-bbox="237 645 617 658">
```



No comercial. No puede utilizar esta obra para fines comerciales.



Compartir bajo la misma licencia. Si altera o transforma esta obra, o genera una obra derivada, sólo puede distribuir la obra generada bajo una licencia idéntica a ésta.

- Al reutilizar o distribuir la obra, tiene que dejar bien claro los términos de la licencia de esta obra.
- Alguna de estas condiciones puede no aplicarse si se obtiene el permiso del titular de los derechos de autor
- Nada en esta licencia menoscaba o restringe los derechos morales del autor.

Advertencia

Los derechos derivados de usos legítimos u otras limitaciones reconocidas por ley no se ven afectados por lo anterior.

Probabilitat

A. Treball d'introducció

El Pot

El professor té un pot com el de la foto per a cada alumne, dintre del pot hi ha 10 boles de dos colors diferents. Cada pot té una distribució diferent. Està totalment prohibit obrir el pot però hi ha un petit forat des del que es pot veure una sola bola. Si mous el pot podràs veure un altra bola (o pot ser la mateixa). El treball tracta de discutir si és possible o no descobrir quina és la distribució del pot. **ABANS QUE TOQUEU EL POT** heu de fer el debat següent



A. 1 Abans de provar el funcionament del pot, farem un debat a la classe. El tema del debat és el següent. Suposem que hem estat provant un pot d'aquests i hem anat apuntant el resultat. És possible saber la distribució a partir dels resultats obtinguts? En principi hauràs d'estar d'acord amb un dels dos arguments, raonant-lo i posicionar-te.

- **Raonament 1:** Si que podem saber quantes boles hi ha de cada color, tant sols cal anar provant el pot unes quantes vegades.
- **Raonament 2:** És impossible saber la distribució de boles provant el pot, el motiu és el següent: Suposem, per exemple, que hi ha una sola bola blanca. En moure el pot, pot donar-se la casualitat que surti la bola blanca ja que la bola blanca és dins el pot. En tornar a moure'l, pot tornar a sortir la blanca ja que encara és dins el pot i com que la bola surt per pur **atzar** i la propietat més important de l'atzar és: *pot sortir qualsevol cosa*. La bola blanca pot tornar a sortir. A partir d'un resultat fruit de l'atzar, i per tant arbitrari, podem pensar que el pot té, per exemple, quasi totes les boles blanques i que això no sigui cert. Per tant és impossible saber quina és la distribució del pot a partir d'uns resultats aleatoris anteriors.

A. 2 Després del debat, farem una votació a classe. Anota quants penseu que es pot saber la distribució i quants penseu que és impossible..

A. 3 Si el professor ho troba convenient, pot ser molt interessant fer una petita enquesta preguntat a alguns familiars i amics quants estan d'acord amb el raonament 1 i quants amb el raonament 2. Feu un recompte a classe.

A. 4 Ara, per fi, el professor us deixarà un pot a cadascun. Ell té el resultat apuntat en un paper. Fes el que vulguis amb el pot però ¡No obris la tapa! Explica per escrit, molt clar, què fas amb el pot i fes una predicció de quantes boles de cada color hi ha.



- A. 5** El professor anirà preguntat un a un quina és la seva predicció i dirà qui ho ha encertat i qui no. Quants alumnes ho han encertat?

Acabem de veure un fet sorprenent i fins i tot màgic: La llei més important de l'atzar no és "*pot sortir qualsevol cosa*" si no una que sembla el contrari: Si en un *experiment aleatori* fem una quantitat suficient de proves, la proporció de casos que es produeixen per a cadascun dels *esdeveniments* tendeix a estabilitzar-se.

Aquesta proporció s'acostuma a donar en percentatge o en tant per u i es denomina **probabilitat** de l'esdeveniment

Aquesta llei s'anomena **Llei dels grans nombres**

- A. 6** La definició anterior utilitza un llenguatge específic de la probabilitat que segurament no entens del tot. El professor t'explicarà el significat de les paraules i de la frase.

- Escriu el significat de les paraules que no entens (sobretot les que estan en cursiva)
- Torna a redactar la llei dels grans nombres utilitzant les teves pròpies paraules

B. La llei dels grans nombres i la Llei de Laplace

Amb l'experiment dels pots ens hem quedat una mica perplexos, i hi ha algunes coses que no acabem d'entendre gaire bé:

En primer lloc, aquesta misteriosa llei diu que hem de fer una quantitat suficient de proves, però no diu quantes. Què voldrà dir una *quantitat suficient*?

En segon lloc hi ha una qüestió de la que no puc desempallegar-me: Què se n'ha fet de la llei que tothom coneix que diu que l'atzar és impredecible?

I en tercer lloc, quines són les característiques que diferencien una seqüència d'esdeveniments fruit de l'atzar d'una que no ho és? Necessitem un nou experiment molt més potent i, sobretot, molt pausat, que ens ajudi a desvetllar tot aquest misteri.

Si llancem un dau molts cops, és a dir, una quantitat suficient de cops sabem, per la llei dels grans nombres, que la freqüència relativa o proporció de vegades que sortirà cada cara s'haurà d'anar estabilitzant, és a dir, cada cara, a més del número que mostra, té un nombre ocult, el de la seva probabilitat i ens interessa esbrinar-lo. Seria una mica estúpid per la nostra part utilitzar un dau normal perfecte perquè ja podem sospitar que cada cara tindrà la mateixa probabilitat (proporció de cops que surt) i ens podem estalviar la feina de llençar-lo molts cops.

Ens interessa més un dau imperfecte i, a més, volem ajuntar moltes dades, Per tant, heu d'utilitzar tots un dau idèntic. L'anomenarem el **dau maquineta**.

B.1 Volem analitzar de quina manera es va establint la freqüència relativa al llançar diverses vegades el dau maquina per tal de determinar què entenem per *quantitat suficient* de vegades. Per a fer-ho llançarem el dau i calcularem la freqüència relativa cada 10 tirades. Aquestes dades les posarem en un gràfic per tal de visualitzar bé l'estabilització de la freqüència i finalment ajuntarem les dades de tots els alumnes de totes les classes de l'institut



a) Abans de començar, discutiu amb el professor quins són tots i cada un dels passos que heu de fer per dur a terme l'experiment.

b) Llanceu el dau 100 cops i anoteu els resultats:

Vigila, cada columna serveix per a una única tirada:

Malament		Bé	
	10		10
1	x x x	x x x x x x x x	
2	x	x x x x x x x x x x	
3	x x x x x	x x x x x x x x x x	
4	x	x x x x x x x x x x	
5	x x	x x x x x x x x x x	
6	x	x x x x x x x x x x	

	10	20	30	40	50
1					
2					
3					
4					
5					
6					

Continua fins a 100...

	60	70	80	90	100
1					
2					
3					
4					
5					
6					

c) Feu el recompte de 10 en 10 tirades però ACUMULADES, es a dir, fins a 10, fins a 20, fins a 30 ...

	Freqüència absoluta en 10 tirades	Freqüència absoluta en 20 tirades	Freqüència absoluta en 30 tirades	Freqüència absoluta en 40 tirades	Freqüència absoluta en 50 tirades	Freqüència absoluta en 60 tirades	Freqüència absoluta en 70 tirades	Freqüència absoluta en 80 tirades	Freqüència absoluta en 90 tirades	...i en 100 tirades
1										
2										
3										
4										
5										
6										
s u m a										

d) Feu ara la freqüència relativa

	Freqüència relativa en 10 tirades	Freqüència relativa en 20 tirades	Freqüència relativa en 30 tirades	Freqüència relativa en 40 tirades	Freqüència relativa en 50 tirades	Freqüència relativa en 60 tirades	Freqüència relativa en 70 tirades	Freqüència relativa en 80 tirades	Freqüència relativa en 90 tirades	...i en 100 tirades
1										
2										
3										
4										
5										
6										
s u m a										

- e) Representeu en un paper mil·limetrat l'evolució de la freqüència relativa en acumular tirades (fins a 100 tirades). Poseu el nombre de tirades a l'eix horitzontal i la freqüència relativa en % a l'eix vertical.
- f) El professor haurà recollit totes les dades (de totes les classes de l'institut). Us donarà un full amb el recompte fet de 100 en 100. Utilitzeu, ara, un full de càlcul.
- g) Feu la representació gràfica utilitzant també el full de càlcul. Imprimiu-la i afegiu-la al dossier.

- B. 2** Observa atentament els gràfics anteriors i contesta les preguntes següents:
- a) A quina part dels gràfics s'observa la impredictibilitat de l'atzar?. Per què creus que sols s'observa en aquesta part?
 - b) A partir de quantes tirades pots considerar que la freqüència relativa ja s'ha estabilitzat?
 - c) Suposem que volem fer ara un experiment molt diferent, en el que intervenen molts més casos o molts menys. Haurem de fer la mateixa quantitat d'experiments?. Raona molt bé la resposta.
 - d) Quina és la probabilitat de cada un dels números del dau?
 - e) El proper any tornarem a fer el mateix experiment amb les mateixes maquetes. Obtindrem els mateixos resultats?. Per què?
 - f) Si tiréssim 5.000 vegades, (o 10.000 o 3.433.127 vegades) canviarien significativament els resultats de les freqüències relatives? per què?
 - g) Si apostem per la millor aposta i juguem , guanyarem?

- B. 3** Volem ara calcular la probabilitat de cada cara d'un dau perfecte.
- a) Quantes vegades creus que serà necessari tirar-lo per saber la probabilitat de cada cara?
 - b) Si creus que no cal tirar-lo cap vegada, calcula la probabilitat de cada cara i justifica molt bé la teva resposta. Si per, contra, creus que cal tirar-lo molts cops, el professor et facilitarà un dau per fer tota la feina de calcular les freqüències relatives.
 - c) Compareu els resultats entre els alumnes que han utilitzat la llei dels grans nombres (si és que hi ha algun alumne que ho hagi fet) i els que no l'han utilitzat. Dóna el mateix resultat?
 - d) Explica raonadament com ha de ser un experiment aleatori perquè no sigui necessari utilitzar la llei dels grans nombres per trobar la probabilitat de cada esdeveniment.

LLEI DE LAPLACE

En aquells experiments en què sabem a priori que cada possibilitat és igualment probable, com per exemple una moneda normal: sabem, sense provar la moneda, que tenim un 50 % de probabilitat que surti cara i un 50 % que surti creu. En aquest cas, direm que els casos possibles són **equiprobables**. En aquest tipus de problemes no cal repetir moltes vegades el joc per tal d'esbrinar qui té avantatge.

Per exemple, en el cas de la moneda, si triem cara ens és favorable un dels dos casos possibles. És a dir sabem que, si tiréssim molts cops la moneda, la proporció de vegades que sortiria cara seria una de cada dos.

És a dir la probabilitat de cara seria de $\frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$

en llenguatge matemàtic escriuríem $P(C) = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$

Aquesta manera de calcular probabilitats s'anomena **regla de Laplace**:

$\text{Probabilitat d'un esdeveniment} = \frac{\text{Nombre de casos favorables}}{\text{Nombre de casos possibles}}$
--

B. 4 Quina Llei creus que és més fiable, la dels grans nombres o la de Laplace.

- a) Raona molt bé la teva resposta
- b) Discussiu amb el professor aquesta qüestió i, si canvies d'opinió, torna a contestar la pregunta utilitzant uns arguments diferents per justificar-la.

C. Les propietats de l'atzar

Fins ara ja hem entès què vol dir que l'atzar és impredecible i també per què, de fet, A LA LLARGA l'atzar és "predicible" és a dir té una probabilitat assignada. Però ens queda una incògnita. Com podem diferenciar una seqüència que és fruit de l'atzar d'una que no ho és? Ara esbrinarem aquesta qüestió:

C. 1 Tenint en compte que la freqüència relativa tendeix a estabilitzar-se:

- a) Les últimes 5 vegades que hem llançat una moneda ens ha sortit cara, apostaràs per treure cara o creu en el següent llançament? Raona la resposta.
- b) I si ens ha sortit cara les últimes 20 vegades, què apostaràs a la següent?

És difícil pensar que El Rei Joan Carles, mentre vola dins la moneda, pugui estar intentant recordar què ha sortit a la vegada anterior per fer un bot i canviar allò que anava a sortir. La probabilitat, per tant, **no té memòria**. El fet que la probabilitat no tingui memòria fa que en una seqüència d'atzar es produeixin ratxes, per exemple, es poden produir seqüències de resultats repetits sobtadament llargs. Recorda que la freqüència relativa es recupera a llarg termini, però mai a curt termini. Aquest fet aparentment contradictori, però que no ho és, fa que l'atzar tingui una aspecte com si estigués predeterminat.

C. 2 En una seqüència de cares i creus d'atzar sembla que s'haurien d'alternar les cares i les creus en un intent de compensar la quantitat de cada una d'elles i un pensa que hauria de tenir un aspecte similar al següent: C + + C + C C + C C + C + + C + + C + C + C + C + C + + C C + C C + C C + C C + C... La realitat, en canvi, és molt diferent. Fes una seqüència de llançaments d'una moneda i compara-la amb l'anterior. Comenta el que observes.

Un **experiment** és **aleatori** si

- Es pot repetir moltes vegades en condicions iguals (o prou semblants) i donar cada observació aïllada un resultat determinat.
- El resultat d'una experiència determinada no es pot preveure a priori.

En una seqüència d'esdeveniments fruit d'un experiment aleatori podrem observar les següents característiques

- Les freqüències relatives de cada esdeveniment tendeixen a estabilitzar-se a partir d'una quantitat suficient d'experiments.
- La probabilitat no té memòria, per tant no s'observarà mai una *intenció* de compensar les freqüències.
- Una seqüència curta de resultats és totalment impredecible i mostra sempre un aspecte com si estigués predeterminat.

C. 3 Llegeix les condicions que ha de complir un esdeveniment per considerar-lo aleatori, subratlla-les i contesta si els següents esdeveniments és poden considerar aleatoris i per què.

- El sexe dels nadons que neixen en un hospital
- Un partit de futbol entre el Barça i el Madrid
- L'elecció de delegat de la classe
- El número d'una bola que ha sortit a la loteria
- Si demà plourà

C. 4 La Josefina barreja unes cartes del tarot concentrant-se amb la seva parella. Després, una pitonissa les va traient i les posa sobre la taula. Sobtósament la seqüència de cartes que va traient, en comptes de tenir una aparença caòtica, indiquen, clarament, que la Josefina tindrà problemes amb el seu xicot en els propers dies. La Josefina pensa que com que ha barrejat molt bé les cartes és impossible que, de casualitat, hagi sortit en problema amb el seu xicot d'una manera tant clara. Per tant creu que en barrejar les cartes, ella mateixa ha transmès una *energia* sobre les cartes que les ha disposat de manera que s'ha desvetllat el futur.

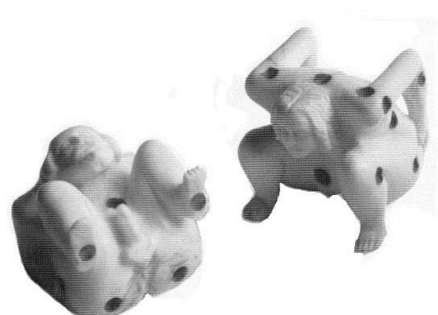
Feu un debat a classe sobre aquest fet i, entre tots, raoneu quins son els factors que fan que hi hagi molta gent que cregui cegament en les diverses tècniques endevinatòries i si aquestes poden ser, o no, certes. Escriu a la teva llibreta tota aquesta relació de factors que fan que la gent cregui en els futuròlegs i que heu anat dient entre tots.

D. HISTÒRIA DE LA PROBABILITAT

La probabilitat neix en intentar explicar el comportament dels fets en els jocs d'atzar. És raonable considerar que el propi origen dels jocs d'atzar és, de fet, l'origen de la probabilitat. Les tabes son uns ossos del canell dels rumiants que s'han utilitzat com a dau des de l'antiguitat. Aquest os és troba molt freqüentment a les excavacions arqueològiques i hi ha jocs que els utilitzen encara a l'actualitat (pregunta als teus avis).

El dau cúbic més antic té més de 5000 anys, és de ceràmica i es va trobar a l'Irak. Els curiosos daus de la imatge són d'Alemanya del segle XV

De tota manera, per ser rigorosos, caldria establir l'origen de la probabilitat en el moment en què algú intentés explicar, amb raonaments purament matemàtics, el comportament de, per exemple, un



dau. Els fenòmens aleatoris tenen la virtut de seqüenciar-se de manera que inciten a suposar que la seqüència és predeterminada. Aquest fet ha induït l'home a pensar que alguna força superior o déu determina els resultats d'un experiment purament aleatori. A Grècia i a Roma, per exemple, utilitzaven el resultat de tirar quatre daus per predir el futur i endevinar la voluntat dels déus. Aquesta suposada capacitat de predir el futur ha fet que les institucions religioses l'hagin prohibit en més d'una ocasió durant la història. L'església catòlica ha estat un clar exemple durant diversos períodes.

Potser caldria posar com a primer ideòleg de la probabilitat a l'individu que va construir el primer dau trucat, per ser capaç de confiar en què, trucant-lo, podria enganyar els deus i variar les freqüències dels resultats.

El primer text conegut que intenta donar una explicació matemàtica als jocs d'atzar és de **Cardano** (1501-1576), un matemàtic italià amb una personalitat controvertida i estranya. Cardano estava massa aficionat al joc. Durant més de la meitat del seu escrit intenta justificar el joc amb arguments tant poc convincents com que pot alleujar les penes d'un malalt. Recomana no jugar o jugar pocs diners, però reconeix haver-se quedat "en calçotets" en alguna ocasió. També té un esperit contradictori amb les capacitats adivinatòries de l'atzar: *Els astròlegs diuen que ells poden predir el futur, però jo mai no he vist que un astròleg fos afortunat en el joc ni tampoc aquells que segueixen els seus consells*. Aquest raonament tant lúcid no es correspon amb el fet que ell mateix es guanyava la vida fent cartes astrals. La seva fe en l'astrologia el va induir a fer una carta astral a Jesucrist, per la que va ser empresonat per la Inquisició. Després va fer una carta astral d'ell mateix predint el dia de la seva mort. Arribat aquest dia, es va suïcidar.

Històricament es consideren **Pascal** i **Fermat** els autèntics pares de la probabilitat. La prohibició dels jocs d'atzar va fer plantejar un problema: Ens juguem uns diners al primer que guanyi una quantitat determinada de partides. Com ens hem de repartir els diners si la presència inesperada de la policia ens impedeix acabar el joc?. La solució d'aquest problema no és gens fàcil i va estar sense solució durant molt temps. Pascal i Fermat s'escriuien cartes explicant-se les seves propostes de solució. Fermat, finalment va aconseguir la solució correcta. Tots els continguts matemàtics desenvolupats van ser millorats i redactats en el primer tractat que existeix sobre probabilitat escrit per **Christian Huygens**, un matemàtic holandès amb el que també es van cartejar.

Pascal i Fermat, amb les seves discussions van plantar la llavor del que seria una nova ciència, però es continuava considerant la probabilitat com una ciència menor, un entreteniment de ximpls que es jugaven el pa dels seus fills en una partida de daus. Els intel·lectuals seriosos no es molestaven a estudiar a fons aquesta disciplina. Però es va produir un fet que va girar la truita.

Pascal, "borratxo" per l'èxit dels seus estudis sobre probabilitat va escriure un text amb el que demostrava, utilitzant la teoria de probabilitat, que l'home havia de creure en Déu. Segons Pascal la vida ens planteja un joc en què hi ha dues possibilitats: creure o no creure en Deu. En funció de l'elecció tindrem quatre possibilitats després de morts: Si crec en Déu i ell existeix, el guany és infinit, si per contra no existeix, no guanyo ni perdo res. En mitjana, per tant guanyo



$\frac{0+\infty}{2} = \infty$. D'altra banda, si no crec en Deu i existeix, perdo la salvació eterna que és comparable a l'infinit i si per contra, no existeix, tampoc guanyo ni perdo res; en mitjana, per tant, perdo $\frac{0+\infty}{2} = \infty$. Per tant l'home ha de creure en Déu.

Tot i que el raonament sorprèn, no cal ser un geni per adonar-se que a Pascal se li va "anar una mica l'olla" amb aquest argument, però va fer que fins i tot els teòlegs més prestigiosos es capbussessin en els entrellats de la teoria de la probabilitat aplanant el terreny del seu desenvolupament.

D. 1 Comenta allò que t'hagi cridat més l'atenció del text. Explica per què.

E. El llenguatge de la probabilitat

Cada experiment porta associat un conjunt de resultats o casos possibles. El conjunt de tots aquests resultats possibles rep el nom **d'espai mostral** o **espai de proves** i s'acostuma a indicar amb la lletra **U** o bé la lletra grega Ω . Per exemple, en el cas de jugar a daus, l'espai mostral constaria de sis elements i el podríem indicar:

$$U = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Cada possible "aposta" que es fa en un experiment no és més que la tria d'alguns elements de l'espai mostral. És un subconjunt de l'espai mostral, i rep el nom de **succés o esdeveniment** i l'indiquem amb una lletra majúscula.

A l'exemple de treure una carta de la baralla, podríem pensar en l'esdeveniment "treure el 8 de copes" i indicar-lo amb la lletra A, llavors:

$$A = \{8C\}$$

Si consideréssim l'esdeveniment $B = \text{"Treure un 8"}$, llavors:

$$B = \{8C,8B,8E,8O\}$$

Observem que hi ha elements que només tenen un element de l'espai mostral, s'anomenen **esdeveniments elementals**, en oposició als esdeveniments amb més d'un element que s'anomenen **compostos**. Per exemple en l'experiment aleatori de llançar un dau, treure un 6 és un esdeveniment elemental i treure parell és un esdeveniment compost ja que està format per tres elements: $B = \{2,4,6\}$

És important respectar el llenguatge i la notació adequada:

- Per expressar conjunts, cal utilitzar la lletra majúscula, Els elements del conjunts han d'anar tancats amb les claus i separats per comes, igual que a l'exemple anterior.
- La lletra U queda reservada sols per a l'espai Universal o Mostral.
- Per escriure el valor d'una probabilitat utilitzarem sempre la P majúscula. Per exemple, per dir que la probabilitat que succeeixi un esdeveniment A és d'un 30%, escriurem:

$$P(A) = 30\%$$

Recorda, per resoldre un problema de probabilitat cal:

- Pensar primer si els cassos possibles són equiprobables (són tots igual de probables), o no.
- Si els cassos possibles són equiprobables cal fer un recompte de tots els cassos possibles que hi ha i escriure'ls (espai universal), després es fa un recompte i resollem el problema utilitzant la Llei de Laplace:

$$\text{Probabilitat d'un esdeveniment} = \frac{\text{Nombre de casos favorables}}{\text{Nombre de casos possibles}}$$

- Si els casos possibles no són equiprobables, caldrà fer l'experiment una quantitat suficient de vegades i resoldrem el problema utilitzant la llei dels grans nombres que serà:

$$\text{Probabilitat d'un esdeveniment} = \frac{\text{Nombre de resultats favorables}}{\text{Nombre total de resultats}}$$

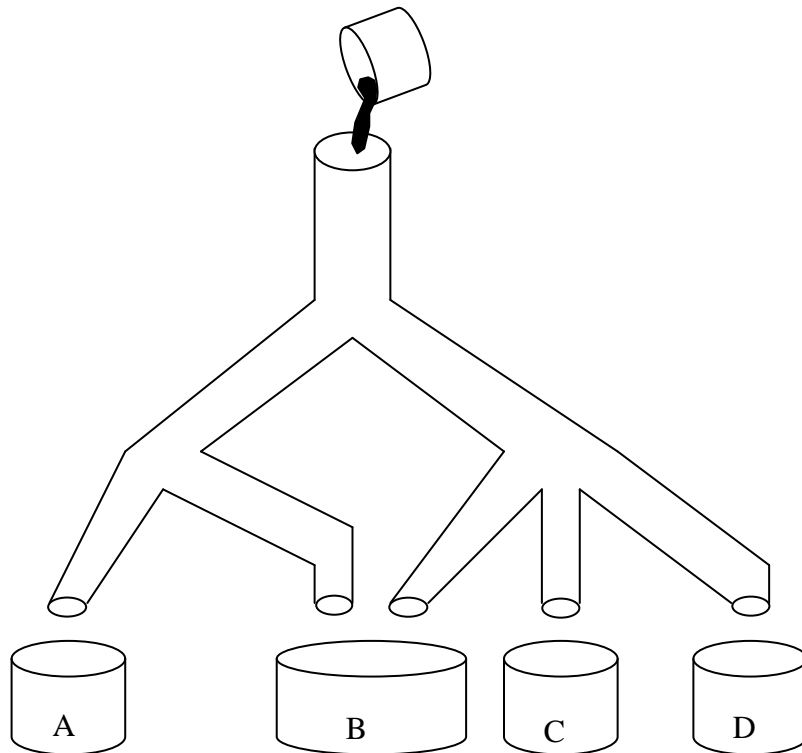
E. 1 En el joc de treure una bola a l'atzar d'una bossa amb 37 boles idèntiques numerades de l'1 al 37 tenim dos esdeveniments a estudiar: A: "múltiples de 5" i B: "múltiples de 3 que no ho siguin de 5".

- Escriu el conjunt de tots els resultats possibles; **l'espai mostral**. (recorda utilitzar la lletra U i les claus)
- Els esdeveniments elementals del espai mostral són **equiprobables**?. Es pot, per tant, utilitzar la **Llei de Laplace**?
- Escriu el conjunt de resultats d'A. (Recorda utilitzar la notació correcta amb les claus)
- Fes el mateix per B.
- Calcula la probabilitat d'A i de B utilitzant la llei de Laplace: busca la proporció de resultats favorables respecte al total de resultats possibles (recorda utilitzar la notació correcta del llenguatge de probabilitats) Expressa-ho de tres maneres: en forma de fracció, en forma decimal i en forma de percentatge.
- Segons aquestes resultats, indica quina aposta et sembla millor.
- El resultat trobat a e) vol dir que si apostem només una vegada guanyarà B? Intenta explicar, doncs, què significa.
- I si apostéssim en les mateixes condicions 1.000 vegades, què et sembla què passaria?

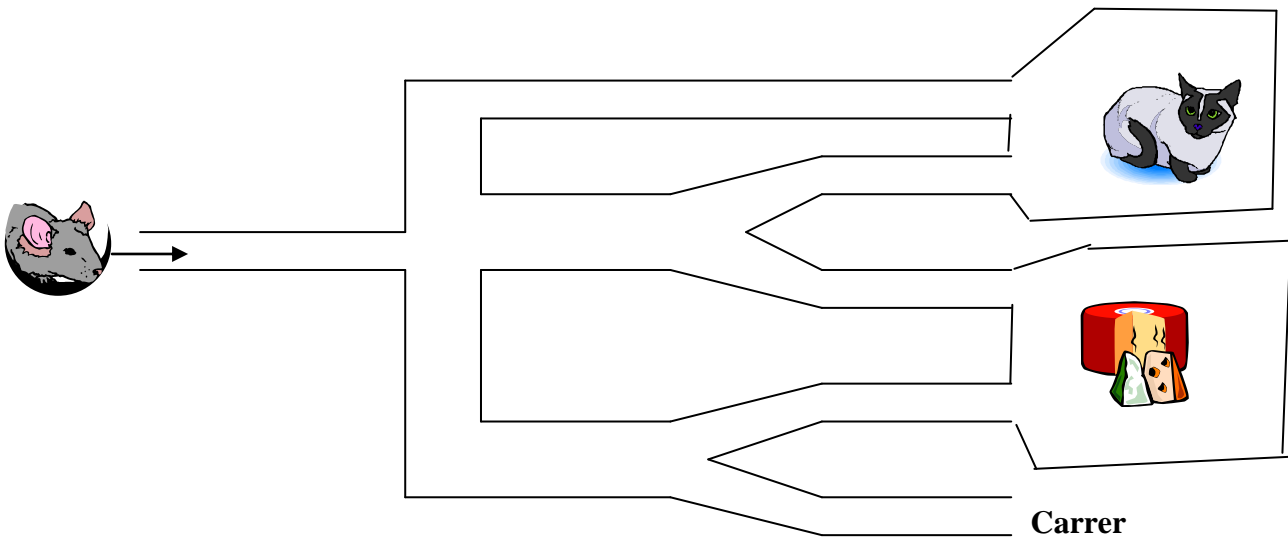
E. 2 Als següents experiments aleatoris digues quins dels esdeveniments elementals es poden considerar equiprobables i quins no. Raona la resposta.

- Les dues possibilitats cara - creu en llençar una moneda
- Les dues possibilitats *que m'atropelli un cotxe, que no m'atropelli un cotxe* quant surto de casa un dia qualsevol.
- Les sis cares d'una maquineta.
- Treure una de les 48 cartes d'una baralla.
- Que en Pau Gasol faci cistella en fer un tir lliure.

- E. 3** Considerem l'experiment aleatori d'agafar una fitxa d'un dòmino en què estan les fitxes girades del revés i barrejades
- a) Escriu l'espai universal
 - b) Podrem utilitzar la Llei de Laplace? Per què?
 - c) Escriu l'esdeveniment $A =$ "que surti doble"
 - d) Escriu l'esdeveniment $B =$ "que els números sumin 7"
 - e) Escriu l'esdeveniment $C =$ "que un número es pugui dividir entre l'altre de forma exacta"
 - f) Escriu l'esdeveniment $D =$ "que en una de les cares hi hagi un 6 o bé un blanc"
 - g) Escriu l'esdeveniment $E =$ "que en una de les cares hi hagi un 6 i també un blanc"
 - h) Calcula les probabilitats de tots els esdeveniments anteriors.
- E. 4** Anem a tirar dues monedes, considerem els tres esdeveniments: "dues cares", "dues creus", "resultats diferents a les dues monedes".
- a) Trieu quina de les tres apostes us sembla millor. Són equiprobables?
 - b) Jugueu un nombre elevat de vegades (més de 50) i calculeu les freqüències relatives dels tres esdeveniments. Coincideixen amb les vostres previsions de l'apartat a)? Quina et sembla que és la probabilitat de cada esdeveniment?
 - c) Feu una explicació justificant per què hi ha contradicció entre les dues respostes anteriors, explicant quina és la correcta. Si no hi ha contradicció, explica per què crec jo que hi hauria d'haver contradicció.
- E. 5** La teva mare ha comprat un quart de pastís i d'aquest quart tu te n'has menjat un terç.
- a) Quina porció de pastís t'has menjat?
 - b) Quina operació matemàtica (+, -, x, :) cal fer entre les fraccions $\frac{1}{4}$ i $\frac{1}{3}$ per tal d'obtenir el resultat?
 - c) Quina fracció és la meitat d'un cinquè?
 - d) Quina fracció és un sisè d'un vuitè?
 - e) Completa la frase següent: Per calcular la fracció d'una fracció cal _____ les fraccions.
- E. 6** Tirem un litre de llet condensada per la boca d'aquesta canonada. Cada vegada que hi ha una bifurcació entra la mateixa quantitat de llet a cada forat.
- a) Quina quantitat de llet condensada, en fracció d'un litre, hi haurà a cada un dels pots?
 - b) Quin percentatge de llet hi ha a cada pot?



E. 7 Un ratolí entra en una canonada de manera que cada cop que es troba amb una bifurcació tria un dels camins sense cap criteri tenint la mateixa probabilitat d'agafar qualsevol de les opcions. Segons el que faci pot acabar cruspit per un gat, pot trobar-se amb un deliciós formatge o pot anar a parar al carrer. Calcula la probabilitat de cada una d'aquestes opcions.

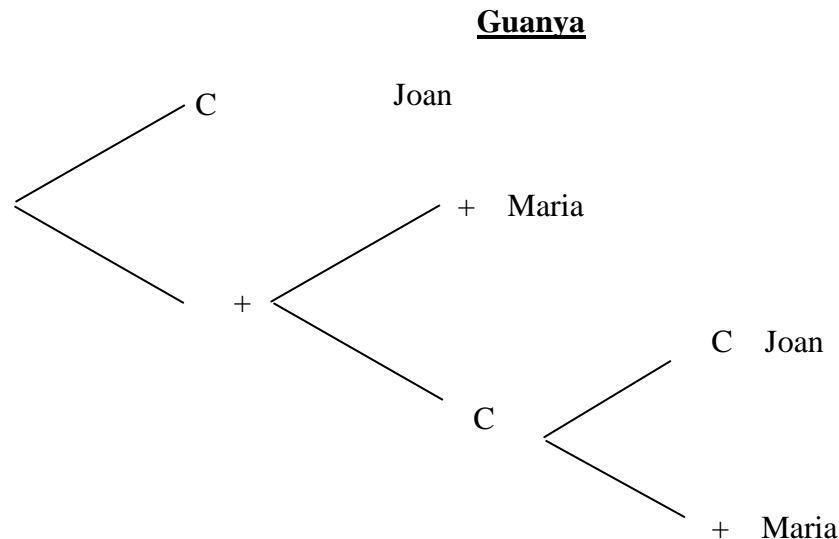


E. 8 Un joc consisteix a tirar a la vegada una moneda i un dau. Pots apostar per:

- A: treure cara amb la moneda i un 6 amb el dau
- B: treure creu amb la moneda i un nombre parell amb el dau
- C: treure cara amb la moneda
- D: treure un nombre parell amb el dau.

- Fes un diagrama d'arbre considerant totes les possibilitats.
- Quina creus que és la millor aposta? Justifica la teva resposta tot calculant la probabilitat de cada esdeveniment.

E. 9 En Joan i la Maria juguen a cara i creu amb una moneda. Si surt cara, guanya en Joan, si no, es torna a tirar, si surt creu en aquesta segona tirada guanya la Maria si no, es torna a tirar. Finalment en la tercera tirada guanyarà el Joan si surt Cara, i la Maria si surt Creu. Observa el següent diagrama del joc:



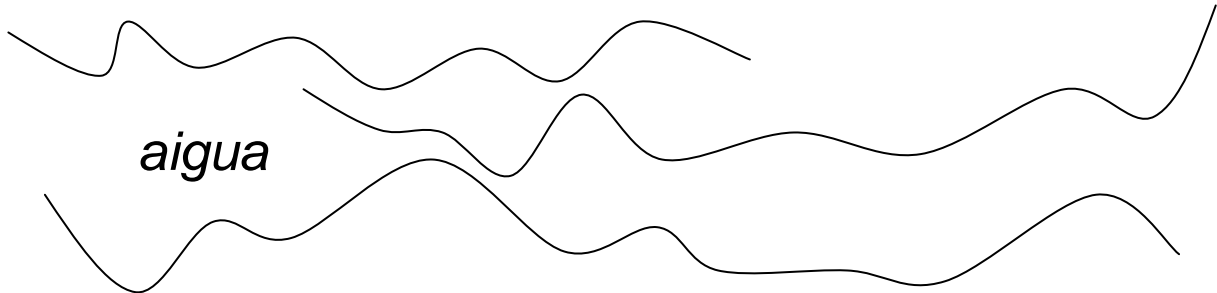
Calcula la probabilitat que té cadascun de guanyar

E. 10 Un institut té la següent distribució d'alumnes per curs i sexe:

	1eso	2eso	3eso	4eso	1batx	2batx
noia	37	37	40	35	26	18
noi	42	40	33	35	20	10

- Si entre els alumnes de l'institut en triem un a l'atzar, quina és la probabilitat que sigui un noi?
- Si entre els alumnes de l'institut en triem un a l'atzar, quina és la probabilitat que sigui una noia de batxillerat?
- Si entre els alumnes d'ESO en triem un a l'atzar, quina és la probabilitat que sigui de primer?
- Si entre les noies que fan batxillerat en triem una a l'atzar, quina és la probabilitat que sigui de primer?
- Si entre les noies de primer d'ESO, en triem una a l'atzar, quina és la probabilitat que sigui noi?
- Si entre els alumnes d'ESO en triem un a l'atzar, quina és la probabilitat que sigui alumne d'ESO?

E. 11
El joc de l'aigua
El tauler del joc

6	5	4	3	2	1	0
						
0	1	2	3	4	5	6

Instruccions del joc: Cada jugador disposa de 15 fitxes (poden ser pedretes o lleties) que ha de posar distribuïdes per les caselles de la seva banda com vulgui, Després, per torns, es tiren dos daus i al número major li han de restar el menor. Una fitxa de la casella del valor resultant anirà a parar a l'aigua. Guanyarà el primer jugador que aconseguixi tenir totes les seves fitxes a l'aigua.

- a) Abans de jugar i de fer cap càlcul contesta: Creus que hi ha alguna manera de posar les fitxes amb la que sigui més fàcil guanyar?
- b) Juga amb el teu company unes quantes vegades.
- c) Després d'observar el joc. Com creus que és millor posar les fitxes?
- d) Construeix una **taula de doble entrada** o bé un diagrama en arbre per saber quins són els possibles resultats. Quants n'hi ha?. Són equiprobables?
- e) Calcula quina és la probabilitat de cada una de les caselles
- f) Després de fer l'estudi analític contesta ara, quina és la millor manera de posar les fitxes.

E. 12 Tenim quatre cartes: l'as d'espases, l'as de copes, el rei d'oros i el cavall de bastos. Triem a l'atzar dues d'aquestes quatre cartes, i considerem els dos esdeveniments:

A: "Obtenir almenys un as"

B: l'esdeveniment contrari d'A

Ara assignarem probabilitats als dos esdeveniments però hem de pensar que hi ha tres maneres de jugar:

Traient les cartes l'una darrera de l'altra (Després de treure la primera, traiem la segona de les tres que queden).

- a) Escribeu tots els possibles resultats.
- b) Escribeu els casos favorables a la realització dels dos esdeveniments.
- c) Quina és la probabilitat de cada esdeveniment?

Traient les cartes amb reposició (Després de treure la primera i tornar-la, traiem la segona carta de les quatre que tenim).

- d) Escribeu tots els possibles resultats.
- e) Escribeu els casos favorables a la realització dels dos esdeveniments.
- f) Quina és la probabilitat de cada esdeveniment?

Traient les dues cartes simultàniament

- g) Escribeu tots els possibles resultats.
- h) Escribeu els casos favorables a la realització dels dos esdeveniments.
- i) Quina és la probabilitat de cada esdeveniment?

E. 13 L'Anna va conèixer aquest estiu un italià anomenat Giacomo Comuntreni i l'ha convidat a la festa de pijames que fa amb les seves amigues. Resulta que el Giacomo sembla un noi simpàtic i agradable però és un assassí paranoic. Ha comprat una caixa de 20 bombons i ha injectat verí a 5 d'ells. Com que els bombons són petits, per morir enverinat cal menjar-se 2 bombons. Si sols en menges 1 et cal anar a l'hospital. Però no et mors.

El Giacomo, a més d'assassí, és una mica babau, i ell ho sap, així que, per si es despista i es menja ell mateix un bombó enverinat ha injectat l'antídot a un dels bombons que no tenen verí de manera que, si el menges, no notes res encara que hagi menjat un altre bombó enverinat.

Ja hem dit que el Giacomo era una mica babau, així que abans d'anar a la festa de pijames es menja 2 bombons per berenar sense recordar on era cada bombó.

- a) Fes un diagrama d'arbre en que s'analitzin totes les possibilitats dels bombons que s'ha menjat el Giacomo
- b) Calcula la probabilitat que el Giacomo estigui mort a casa seva
- c) Calcula la probabilitat que el Giacomo hagi acabat a l'hospital
- d) Calcula la probabilitat que el Giacomo hagi anat a la pijamada sense cap símptoma d'enverinament.

F. Casino



Direcció: Martin Scorsese.

País: USA.

Año: 1995.

Duració: 178 min.

Interpretació: Robert de Niro (Sam 'Ace' Rothstein), Sharon Stone (Ginger McKenna-Rothstein), Joe Pesci (Nicholas 'Nicky' Santoro Sr.), James Woods (Lester Diamond), Don Rickles (Billy Sherbert), Alan King (Andy Stone), Kevin Pollak (Phillip Green).

Guió: Nicholas Pileggi & Martin Scorsese; basado en el libro de Nicholas Pileggi.

Producció: Barbara de Fina.

Fotografia: Robert Richardson.

Montaje: Thelma Schoonmaker.

Diseño de producción: Dante Ferretti.

Direcció artística: Jack G. Taylor Jr.

Vestuario: John A. Dunn y Rita Ryack.

Decorados: Rick Simpson.

La pel·lícula Casino de Martin Scorsese va estar assessorada per grans especialistes en probabilitat i jocs d'atzar. De fet podem considerar que si ajuntem alguns trossets de pel·lícula podem fer una espècie de documental sobre la probabilitat que dura uns 20 minuts. En aquest fragment podem observar diverses històries.

- La personalitat del director del Casino. Robert de Niro. Sempre guanya en els jocs
- Una primera explicació del funcionament d'un casino: Un primer pla del dau, sempre hi ha algú que vigila algú altre que és vigilat per un altre,...
- Els polítics (els ha de regalar fitxes perquè juguin)
- El Japonès: Juga fort, pocs cops molts diners.
- El cosí del comissari. És culpable?
- Altra vegada la personalitat del director. Obsessiu. Vol que totes les magdalenes tinguin la mateixa quantitat de gerds.
- Els tramposos.

F. 1 Mira la pel·lícula i intenta analitzar bé els apartats anteriors. Contesta després les següents preguntes.

- a) Com és el dau?. Què fa amb el dau i per què?
- b) Rober de Niro diu que sempre guanya en el jocs. Com ho pot fer si el joc és atzar i és impredecible?
- c) El japonès: Què fa per guanyar diners en un casino?.
- d) El japonès: El casino el fa tornar fent-li pensar que no hi ha cap avió i el fan jugar més. Si el consideren perillós perquè és capaç de guanyar molt per què el fan jugar?
- e) Acomiaden el cosí del comissari perquè, en un moment, tres màquines treuen el primer premi i això és impossible, però ell diu que és atzar i tot pot passar. És just l'acomiadament? Per què?
- f) L'escena del gerds, just després de la del comissari sembla que no té sentit. Per què creus que a la pel·lícula es remarca la personalitat obsessiva del Robert De Niro?
- g) Els Tramposos: Els tramposos són molt llestos i utilitzen una tècnica perfecta per fer trampes, però els enxampen. Com s'adonen que estan fent trampes?

F. 2 Sovint surten articles de premsa amb notícies de probabilitat en què es veuen situacions reals similars a les de la pel·lícula. El següent article n'és un exemple. Llegeix-lo i subratlla allò que et sembli més interessant.

La ludopatía o adicción al juego ha aumentado en los últimos años hasta afectar a más de un millón y medio de españoles. Las familias apenas encuentran recursos públicos a los que acudir para tratar esta enfermedad, que es incurable y

exige un tratamiento psiquiátrico muy lento y doloroso. Además, las cifras del juego en España se han disparado un 37% desde 1996: el año pasado nos jugamos entre bingos, casinos, máquinas de azar, loterías y cupones 26.037,4 millones

de euros (más de cuatro billones de pesetas). Un 31,5% de ese dinero fue a parar a Hacienda. El auge de los videojuegos o las apuestas por Internet son citados como causas que están despertando la adicción al juego también entre menores.

Enganchados al juego

La ludopatía es una enfermedad crónica que afecta a más de un millón y medio de españoles

PABLO X. DE SANDOVAL, Madrid
La anécdota que define la vida de J.C., de 69 años, sería fabulosa contada por cualquier persona normal. Una mañana, metió cinco duros de los antiguos en la máquina tragaperras de su bar habitual y sacó 20.000 pesetas. Cruzó al bar de enfrente, metió otra moneda, y obtuvo otras 20.000. Sin embargo, él lo cuenta conteniendo las lágrimas: "Esa misma tarde me había jugado las 40.000, y más que llevaba", relata. Hoy llama al problema por su nombre: es ludópata, jugador compulsivo, y no se puede acercar a una máquina. Cinco años de terapia en Jugadores Anónimos le han convencido, además, de que "esto no se cura nunca".

La ludopatía o adicción al juego figura desde hace años junto al alcoholismo o las drogadicción como una grave enfermedad, no un vicio. Su aumento en España es problemático, a tenor de la evolución de la cantidad jugada: un 37% más en los últimos cinco años hasta los 26.037 millones de euros. Apenas hay respuesta pública, sin embargo, a un drama que afecta ya a 1.670.000 españoles y a sus familias, a las que roban y arruinan moneda a moneda.

Este dato es una proyección del servicio de psiquiatría del hospital Ramón y Cajal, en Madrid. De ellos, 600.000 son ludópatas y más 900.000 jugadores-problema. En el argot médico, jugador-problema es "el que roza la ludopatía, pero no incurre en detalles como faltar al trabajo por jugar o pedir prestado dinero; la diferencia es mínima", explica el doctor José Antonio Ramos, de la unidad psiquiátrica especializada en juego de este hospital. En la red pública, sólo existe este servicio y otro similar en Bellvitge, Barcelona. Ni siquiera hay un estudio de prevalencia de la enfermedad a nivel nacional.

En el V Congreso Europeo de Políticas y Estudios del Juego, celebrado esta semana en Barcelona, el catedrático de Psicología vasco Enrique Echeburua presentó un perfil del ludópata: varón de 30 a 40 años, casado, con un nivel intelectual medio y económico medio-bajo y que consume alcohol a diario. La adicción se da sobre todo en las máquinas tragaperras, ya que "es más fuerte cuanto más inmediato es el premio", dice Ramos. "Es raro que alguien enferme con la Lotería, en la que pasan días entre la apuesta y el premio".

Pero además, nuevos estudios (del propio Ramón y Cajal o de la Universidad de Barcelona) han descubierto que hay un 2,4% de los adolescentes españoles (unos 170.000) con problemas de juego. También las asociaciones de jugadores en rehabilitación han advertido del aumento de la ludopatía entre los jóvenes, a raíz de su demanda de tratamiento. Según datos de la Federación Andaluza de Jugadores Rehabilitados (Fajer), el 4,5% de los niños andaluces entre 11 y 14 años reconoce que ha jugado "muchas veces" con dinero.

"Se nota mucho el problema de las videoconsolas", explica Carlos



Nuevos modelos de máquinas tragaperras expuestos en una feria del sector celebrada en 2001. / EFE

Características y números de la ludopatía

■ LAS TRES FORMAS DIFERENTES DE JUGAR

	LUDOPATA	JUGADOR SOCIAL	JUG. PROFESIONAL
Modo de jugar	Solo	Acompañado	Acompañado
Duración	Ilimitado	Limitado	Limitado
Motivación	Recuperar pérdidas	Emoción/ganancias	Su modo de vida
Control apuesta	No	Sí	Sí
Disciplina	Nula	Alta	Férrea
Pérdidas	No previstas	Previstas	Previstas
Fin del juego	Pérdida completa	Según emoción	Según pérdidas
Tipo de juego	Azar	Azar/envite	Envite
Premio	Inmediato	Inmediato/aplazado	Aplazado
Resto de su vida	Alterada	Inalterada	Inalterada

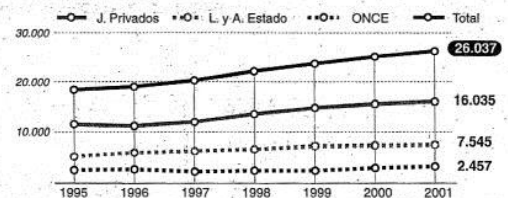
■ MEDIA DE CANTIDADES JUGADAS EN 2001 POR SECTOR

En euros por habitante

Juegos de gestión privada Casinos, Bingos y máquinas B'	389,98	MEDIA TOTAL 2001 633,25
Loterías y apuestas del Estado L. Nacional, L. Primitiva, Bono, Loto y Quiniela	183,51	
Cupón de la ONCE	59,77	

■ EVOLUCIÓN DE CANTIDADES JUGADAS EN ESPAÑA

En millones de euros



Fuente: Hospital Ramón y Cajal y Comisión Nacional del Juego

EL PAÍS

Rodríguez, presidente de Alejer (el equivalente en Leganés), donde acuden a tratamiento 200 personas a la semana. "Muchas veces el origen está en una adicción a los videojuegos, ya que en las salas de recreativos conviven estas máquinas con las de tipo B [tragaperras]".

A diferencia del control que se ha desatado sobre el alcoholismo juvenil, María José Barrero, directora general del Juego de la Comunidad de Madrid, afirma que "no es habitual que haya sanciones por

permitir jugar a menores. El control no es nada sencillo debido a que no hay restricción de acceso en muchos establecimientos".

Gracias a las asociaciones de jugadores (más de 50 en toda España), los ludópatas pueden llegar a "controlar" su adicción gracias a terapias de grupo. Pero sólo gracias a ellas. Leonardo Soriano, presidente de la federación de estas asociaciones (Fejar), señala que "ni una peseta se dedica a ludopatía. Hoy día, las administraciones no tienen respuesta para este pro-

blema". Aparte de los recursos y de su reconocimiento como problema sanitario (de orden psiquiátrico), otra reivindicación clave para los enfermos es "que las máquinas se metan en salones, y sacarlas de los bares. La persona que se quiera autoprotibir el juego debe poder hacerlo, como pasa en los bingos y en los casinos". Aun así, esto no evitaría un nuevo frente: "Tenemos jóvenes de 14 años en la asociación con gravísimos problemas, sobre todo debido a Internet", añade Soriano. "Ya no hace falta ni tener un ordenador en casa, para eso hay cibercafés, que no tienen ninguna regulación. Los menores de 18 años tienen prohibido el acceso a los juegos de azar, pero aquí han venido menores que se han gastado 700.000 pesetas por Internet sólo con los datos de la tarjeta de crédito de sus padres".

El 2,4% de los adolescentes españoles (unos 170.000) son jugadores compulsivos

El año pasado 28.747 personas tenían la entrada prohibida a los casinos y 19.455 a los bingos a petición propia, según datos de la Comisión Nacional del Juego. La cifra viene aumentando desde 1996 en más de 2.000 personas al año. Uno de ellos es J. M., de 39 años, con una historia común: "Yo miraba a las señoras gastarse el dinero en las máquinas y no me lo podía explicar. Después, yo mismo superé todos los límites". Deportista, a los 29 años tuvo una lesión que le impidió seguir entrenando. "Todo ese tiempo lo empecé a llenar con el póquer y, cuando estaba solo, con las máquinas. Pedí dinero a todo el mundo y acabé robando a mis hermanos y a mis padres". Después de cinco años de tratamiento, aún sigue recayendo.

El sentido común contra 'la falacia del jugador'

El director del departamento de Estadística e Investigación Operativa III de la Universidad Complutense, Conrado Manuel García, realiza todo su trabajo sobre la Ley de la Probabilidad y es experto en la Teoría de Juegos. Por si sirve de algo, advierte: "Yo no juego a nada". Manuel se apoya en la expresión matemática *la falacia del jugador* para desacreditar cualquier forma de juego sistemático. La *falacia* consiste en creer que hay tendencias en sucesos independientes, como las tiradas de dados o las jugadas de una ruleta.

"Si tiras un dado, la probabilidad de que salga un tres, por ejemplo, es de 1/6. Si lo tiras otra vez, la posibilidad vuelve a ser 1/6. Y puede salir el número tres 20 veces seguidas, que a la siguiente tirada la probabilidad de que vuelva a salir seguirá siendo la misma", explica. El jugador piensa que, por haber salido un número muchas veces no puede volver a repetirse, o que por no haber salido nunca está a punto de hacerlo. Esa *falacia* es lo que le mantiene atado a su bingo o a una ruleta. La expresión "la máquina está caliente" es un claro ejemplo.

En el caso de las máquinas tragaperras, la lógica es aplastante. "La recaudación de una máquina se reparte entre el dueño, el jugador, el del bar y Hacienda". Planteamiento: "Si en ese reparto el único que pone dinero es el jugador y los otros tres siempre cobran ¿quién pierde? Pues el jugador". Como en todo juego organizado, se paga un canon al operador (un 25% en las máquinas) que no reverterá en premios. "Además de que la probabilidad de ganar es minúscula, hay una pérdida directa sólo por jugar", dice Manuel. Por tanto, nuestra oportunidad de ganar tiene siempre *esperanza negativa*, en términos matemáticos: nunca vamos a recuperar el mínimo apostado. Cuanto más se juega, más se pierde. "En las máquinas", concluye, "el jugador alimenta con cada moneda una esperanza de pérdida cada vez más aguda. La probabilidad está siempre en su contra".

G. Annex 1: El Mentider amb daus de Pòquer

Hem fet molts problemes de probabilitat però no hem aplicat la probabilitat a cap situació de la vida real. Hi ha un joc força divertit al que segur us agradarà jugar quan us ajunteu uns quants amics. Aprendre a jugar i després intentarem aprofitar els coneixements de probabilitat per tenir certes avantatges en el joc

Material necessari: Un cubilet amb 5 daus de pòquer (a les botigues multipreu n'hi ha molt barats)

El dau de pòquer té les cares següents per ordre d'importància: Negre (N), Roig (R), J, Q, K i As

Si tirem els 5 daus a la vegada es poden fer les següents combinacions també per ordre de categoria:



Cares de daus	Nom	Exemple
2 iguals	parella	J, J, A, R, K
2 iguals + 2 iguals	Doble parella	A, A, J, J, R
Tres iguals	Trio	R, R, R, K, J
Tres iguals + 2 iguals	Full	N, N, N, J, J
4 iguals	Pòquer	K, K, K, K, N
5 iguals	Repòquer	Q, Q, Q, Q, Q

Una posició de daus és superior a altra sempre i quan

- Sigui la mateixa combinació però amb cares superiors o
- Sigui una combinació superior

Per exemple, Un pòquer de K a la J (K, K, K, K, J) és superior a un pòquer de K al negre (K, K, K, K, N) que és superior a un full de K a la J (KKKJJ) que, a la vegada és superior a un full de K al Roig (KKKRR) que és superior a un full de Q al As (QQQAA) etc.

Dinàmica del joc:

És un joc per 3 o més jugadors, de fet hi poden jugar tants com es vulgui. Si sols juguen 2 és avorrit però també es pot jugar. Cal apuntar en un full el nom de tots els jugadors. Caldrà anar posant punts als jugadors entenent que qui té més punts està perdent.

Comença el jugador A llançant dos daus a la vista. Els altres tres els llança dins el cubilet i els mira ell sol vigilant que ningú els vegi. Ha de dir què hi ha en els daus. El jugador B ha de decidir si el jugador A menteix o no. Si creu que menteix aixecarà el pot i en cas que A hagi mentit se sumarà un punt a A, si A no mentia, B té un punt.

Suposem que B ha cregut a A. En aquest cas B ha de superar allò que HA DIT A (encara que sigui mentida) tirant els daus de la manera següent: Pot moure els daus que vulgui. (Des de no moure cap dau fins a moure'ls tots). L'única condició és que han de quedar 2 daus a la vista. Per exemple si A ha dit trio i hi havia realment (AAJKN) El jugador B pot deixar AA a la vista i tirar els altres tres daus. En aquest cas B haurà de dir alguna cosa superior a la que li havia dit A i el jugador B ha de decidir si s'ho creu o no.

Quan s'ha apuntat un punt a un jugador es comença de nou tirant els daus la persona que ha rebut el punt.

Abans de començar cal quedar d'acord sobre quants punts ha de tenir un jugador per quedar eliminat (per exemple 5). Guanya el jugador que no ha quedat eliminat.

MOLT IMPORTANT: Cal entendre que una persona menteix si diu alguna cosa superior a la que té però si diu una cosa inferior a la que té **NO MENTEIX**.
Per exemple, A té KJ a la vista i KKK dins el pot i diu parella de K Si B no s'ho creu perd B i, si s'ho creu, pot passar trio sense moure cap dau i sense mentir.

Exemple de joc:

Jugador	S'ho creu?	A la vista	Dins el cubilet	Diu...
A	Comença	JK	KRQ	Parella de K
B	Si	KK (els deixa)	RNJ	Trio de K
C	Si	KK	KNQ	Full de K al N
D	Si	KKKQ	A	Full de K a la Q
E	Si	KKKA	K	Full de K al As
A	Si	KKKA	K (No toca res)	Pòquer a la negra
B	Si	KKKA	K Tampoc toca res	Pòquer a la J
C	NO			

Ha perdut C perquè B ha dit la veritat (ha dit alguna cosa igual o inferior al que veritablement hi havia) Posarem una marca al costat del nom C i ell mateix tornarà a començar

Un altre exemple:

Jugador	S'ho creu?	A la vista	Dins el cubilet	Diu...
A	comença	JK	ARQ	Parella de K

Ara B s'ho creu, deixa AK fora i tira els altres tres, li surt NRQ, per tant no supera el que ha dit A, però no ha mogut els daus JK que estan a la vista. Pot agafar aquest daus amb la ma i tirar-los a la vista, o pot deixar a la vista el que li ha sortit NRQ i tirar tapats els dos daus que no havia mogut.

G. 1 Juegueu una estona fins que us familiaritzeu amb el joc. Quan ja sapigüeu com va el joc feu els tres problemes següents:

Llanceu tots els daus de cop, apunteu què ha sortit. Si no surt res, torna a tirar els daus

- Calcula la probabilitat de superar el que hi hagi movent sols un dau, el que tu vulguis
- Calcula la probabilitat de superar el que hi ha movent dos dels daus
- Calcula la probabilitat de superar el que hi hagi movent els tres daus que vulguis.

H. Annex :2 Exercicis de reforç

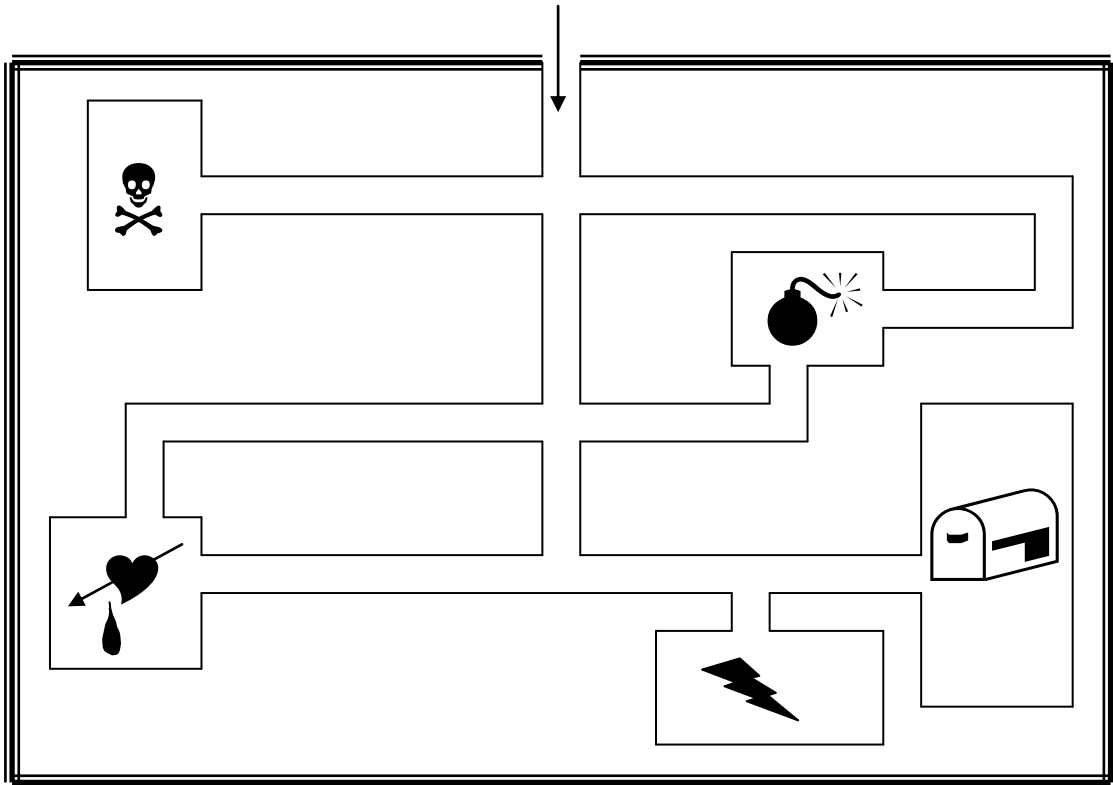
- H. 1** Es tiren un dau i una moneda. Escriu el conjunt de resultats possibles que es poden obtenir. Quants n'hi ha?
- H. 2** Què creus que és més probable que surti quan tires un dau: un nombre parell o un de senar? Explica la teva resposta.
- H. 3** Al sabater hi tens tres parells de sabates. Al matí, mig adormit, agafes dues sabates. Quina és la probabilitat que n'agafis un parell?
- H. 4** En el joc de tirar un dau, calcula les probabilitats següents:
- Que surti el 3.
 - Que surti un nombre més gran que 3.
 - Que surti un nombre parell.
 - Que no surti el 6.
- H. 5** Hi ha uns daus per fer travesses en què hi ha dues cares que porten l'1, dues la X i dues el 2. Si en tires una sola vegada, quina és la probabilitat que et surti la X?
- H. 6** Dos dies per setmana menges pasta com a primer plat. Quina és la probabilitat que avui hi hagi pasta?
- H. 7** En el joc de treure una carta, calcula la probabilitat que:
- La carta sigui de bastons.
 - La carta no sigui de bastons.
 - La carta sigui de bastons o d'espases.
 - La carta sigui una sota.
- H. 8** Si el teu professor posés les notes a l'atzar, sense tenir en compte si has estudiat molt o gens, quina seria la probabilitat que et posés un notable?
- H. 9** Fes un diagrama en arbre de l'experiència de tirar tres monedes i observar les cares i creus que surten.
- Al final de cada branca escriu-hi els tres possibles resultats que has obtingut en cada cas i la probabilitat que correspon a cada un.
 - Com són aquestes probabilitats?
 - Calcula la probabilitat que et surti alguna cara.
- H. 10** En una capsula hi ha 4 boles blaves i 5 de vermelles. En traiem una bola.
- Quina és la probabilitat que sigui negra?
 - I que sigui blava?

- c) I que sigui vermella?
- d) Si en traiem després una segona bola, quina és la probabilitat que sigui blava?
- H. 11** En una pregunta hi ha 4 respostes i només una és la correcta. No en coneixes la resposta i contestes a l'atzar. Quina és la probabilitat que l'encertis?
- H. 12** En l'estadística dels últims partits un jugador de bàsquet ha encertat 10 de cada 15 llançaments lliures. Quina és la probabilitat que falli en el proper llançament?
- H. 13** En una classe hi ha 14 nois i 16 noies, dels quals 11 noies i 11 nois juguen a futbol. Escollim una persona a l'atzar. Troba la probabilitat que:
 - a) Sigui noia.
 - b) Sigui noi.
 - c) Sigui noi i jugui a futbol.
 - d) Sigui noia i no jugui a futbol.
 - e) Sigui noi o jugui a futbol.
- H. 14** En una festa d'aniversari hi ha 30 persones de les quals 15 són noies. Sabem que 11 noies tenen els ulls marrons i 3 els tenen blaus. Si escollim una persona a l'atzar, troba la probabilitat que:
 - a) Sigui noia i tingui els ulls marrons.
 - b) Sigui noia i tingui els ulls blaus.
 - c) Sigui noi.

I. Annex :3 Exercicis de consolidació

- I. 1** A la classe farem una obra de teatre sobre els Simpson . Han de sortir 5 personatges: Homer, Marge, Bart, Lisa, Magi però sols hi ha 4 actors (entre els que hi ets tu). Per tant, hi haurà un actor que haurà de fer 2 personatges. Fem un sorteig.
 - a) Quina és la probabilitat que et toqui a tu fer 2 personatges?
Suposem que t'ha tocat fer els dos personatges.
 - b) Escribeu l'espai universal
 - c) Quina probabilitat tens que et toqui fer els dos papers de pares (Homer i Marge)?
 - d) Quina probabilitat tens que et toqui fer dos papers de fills (Bart Lisa o Magi)?
 - e) Quina probabilitat tens que et toqui fer els dos papers masculins?
 - f) I Femenins?
- I. 2** L'Indiana Jones està disposat a arriscar la seva vida a la Piràmide de Keops, la més perillosa del món. Les seves trampes mortals són tan terribles que ni el propi Indiana pot lliurar-se d'una mort segura si ensopega amb una de les trampes mortals. Per altra banda, el tresor que hi ha amagat és tant increïble que fins i tot

Bill Gates es desmaiaria si pugues veure'l. L'Indiana Jones, seguint la seva intuïció, triarà el camí a l'atzar. Calcula la probabilitat que té d'aconseguir trobar el tresor i la que té de morir en l'intent.



- 1. 3** En una urna hi ha 5 boles numerades del 1 al 5. S'agafen dues boles sense reposició.

 - a) Escriu l'espai mostral
 - b) Escriu l'esdeveniment A= la primera bola és parell
 - c) Escriu l'esdeveniment B= la primera bola és 4
 - d) Escriu l'esdeveniment C= la segona bola és 3
 - e) Calcula la probabilitat de A, B, C

- 1. 4** La probabilitat d'un jugador d'encertar gol des del punt de penal és 0,7. Si pot fer 3 llançaments, calcula la probabilitat d'encertar-ne algun i la probabilitat de fallar les tres tirades.

- 1. 5** En una urna hi ha 6 boles blanques i 3 negres. S'agafen 2 boles a l'atzar amb reposició calculeu la probabilitat que:

 - a) Les dues boles siguin del mateix color.
 - b) La primera bola sigui blanca i la segona negra.

- 1. 6** Fa temps vaig trucar un dau. Recordo que vaig fer un foradet a un dels punts i hi vaig embotir una mica de plom. Després vaig pintar el punt i no es notava res. Recordo que, en jugar, la cara que tenia el punt amb plom pesava més i es quedava a sota sortint més vegades la cara de sobre. No es notava molt però a la llarga el número afavorit sortia una mica més que els altres. Era suficient com per

tenir avantatge amb aquest dau sense que es notés descaradament. L'altre dia vaig trobar el dau però s'havia barrejat amb un altre d'idèntic i no sabia quin era el trucat i quin no. A més, tampoc recordo quin era el número que vaig trucar.

Aquest matí els he provat unes quantes vegades cada un i m'ha sortit el següent:

Dau 1:

2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 4, 6, 4, 2, 4, 4, 2, 5, 4, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 1, 2, 5, 3, 1, 3, 1, 6, 1, 4, 2, 6, 4, 3, 6, 2, 4, 5, 3, 4, 2, 1, 1, 4, 6, 4, 1, 1, 5, 1, 2, 5, 6, 6, 3, 4, 6, 1, 5, 5, 5, 6, 2, 6, 2, 4, 2, 1, 3, 5, 2, 1, 6, 1, 6, 3, 5, 1, 1, 5, 6, 1, 2, 2, 6, 5, 3, 4, 5, 6, 4, 3, 5, 3, 3, 5, 6, 4, 6, 2, 6, 4, 4, 6, 4, 5, 5, 3, 2, 1, 3, 4, 1, 5, 3, 4, 1, 6, 1, 3, 2, 6, 3, 6, 3, 2, 4, 4, 2, 5, 4, 3, 1,

Dau 2:

5, 2, 2, 6, 2, 1, 5, 4, 5, 3, 1, 6, 5, 5, 5, 5, 3, 1, 3, 5, 2, 2, 6, 3, 5, 1, 6, 5, 4, 3, 4, 6, 5, 1, 4, 2, 4, 1, 6, 4, 4, 2, 6, 5, 2, 3, 2, 5, 4, 1, 4, 5, 6, 6, 2, 1, 4, 6, 3, 4, 6, 5, 5, 4, 5, 6, 5, 5, 4, 6, 1, 6, 6, 1, 6, 6, 2, 3, 3, 6, 5, 5, 2, 5, 5, 4, 5, 3, 3, 5, 4, 5, 1, 5, 1, 6, 2, 5, 2, 5, 5, 1, 5, 4, 5, 3, 3, 1, 5, 2, 5, 1, 1, 2, 1, 1, 4, 5, 2, 5, 3, 5, 5, 5, 2, 5, 3, 6, 2, 5, 4, 1, 6, 5, 3, 3

Calcula la probabilitat aproximada de cada número a cada dau i explica justificadament quin creus que és el dau trucat i quin és el número que vaig trucar.

- I. 7** Escrivim cada una de les lletres de la paraula ORIOL en un paper i les posem en una bossa. N'extraieu una a l'atzar. Calcula la probabilitat de:
- Treure la lletra I
 - Treure la lletra O
 - Treure la lletra U
 - Treure una vocal
 - Treure la paraula ROL
- I. 8** Designa quins són successos impossibles i quins són successos segurs dels següents successos: (n'hi ha que no són ni segurs ni impossibles)
- la suma del resultat de dos daus és 1
 - llancem tres monedes i surten una cara i dues creus
 - agafem una fitxa de dòmino a l'atzar i la suma de punts és més gran d' 1
 - llancem dues monedes i el nombre de cares menys el nombre de creus és més petit o igual a dos
 - llancem dos daus i la resta de punts és 6
 - llancem un dau de 8 cares i el resultat és més petit que 10
 - llancem 10 monedes i obtenim 10 cares més que creus.
 - llancem dos daus i la multiplicació dels punts és múltiple de 7
 - en el sorteig de la primitiva surt premiat el número 65478
 - llancem dos daus i la multiplicació dels dos números és menor de 40
- I. 9** Dintre d'un sac hi ha 18 serps d'una espècie A , 32 d'una altra espècie B i 10 d'una C. Totes elles són verinoses però perquè resultin mortals és necessari ser picat per 2 de la mateixa espècie. Posem la mà al sac. Quina és la probabilitat de morir si traiem la mà després de rebre 2 picades?

- I. 10** Una alarma funciona, quan cal, amb probabilitat 0,8. Per millorar la seguretat es connecta una segona alarma amb probabilitat de funcionament 0,9.
- Quina és la probabilitat que soni alguna de les dues?
 - Hem millorat el sistema de seguretat?
- I. 11** Disposem de tres monedes: dos són normals i una té dues creus. Escollim una moneda a l'atzar i la llancem dues vegades. Si les dues vegades hem obtingut creu, quina és la probabilitat que la moneda sigui la trucada?
- I. 12** En una classe hi ha 15 noies i 10 nois que fan natació. 20 noies fan basquet i 20 nois també. Tots els alumnes de la classe fan algun d'aquests esports i 8 nois i 8 noies practicant tots dos.
- Quants alumnes hi ha a la classe?
- Triat un alumne a l'atzar, calcula la probabilitat que:
- Sigui noia i faci natació.
 - Sigui noia i només faci basquet.
 - Sigui un noi que no faci natació.
 - Sigui un noi que faci bàsquet i natació.
 - Sigui una noia que faci bàsquet i natació.
 - Sigui un noi que només faci natació.
- I. 13** Es tira una moneda 4 vegades.
- Quants resultats possibles es poden obtenir?
 - Quina és la probabilitat de cada un d'aquests resultats?
- I. 14** Es tira un dau 3 vegades. Calcula la probabilitat que:
- Surti el 5 totes tres vegades.
 - Surti almenys un 6.
- I. 15** En una caixa hi ha 100 bombetes blanques i 200 de clares. Entre les blanques n'hi ha 4 que són defectuoses i entre les clares n'hi ha 8. S'agafa una bombeta a l'atzar.
- Quina és la probabilitat que la bombeta sigui blanca?
 - I que sigui defectuosa?
- I. 16** Es tira un dau 6 vegades.
- Quina és la probabilitat que l'1 no surti en cap tirada?
 - I que surti almenys una vegada?
- I. 17** En una classe el 18% dels alumnes estudien francès, el 64% anglès i l'11% estudien francès i anglès alhora. Escollim un estudiant a l'atzar.
- Si estudia anglès, quina és la probabilitat que també estudiï francès?
 - Si estudia francès, quina és la probabilitat que també estudiï anglès?
 - Quina és la probabilitat que estudiï anglès o francès?

J. Annex 4: Trampes

J. 1 Un professor decideix rifar un apartament a la platja entre els tres millors alumnes. Agafa 3 paperetes, en deixa dos en blanc i l'altre escriu PREMI. Qui preferiries ser: el primer, el segon o el tercer a triar la papereta?

J. 2 L'empresa GARANTIA TOTAL t'ofereix el següent negoci: Per la petita quantitat de 1000 euros et dona el nom del cavall guanyador en les properes carreres del hipòdrom. L'empresa, naturalment, t'ofereix total i absoluta garantia. Tant és així, que si no ho encerta et torna els diners. Contractaries l'empresa?

J. 3 Als condemnats a mort de Hotincxungodistan els donen una última oportunitat de salvar la vida:

Amb els ulls tapats, primer trien una de les següents urnes i després agafen una bola. Si la bola és blanca viuen, i si és negra moren:



Has tingut la mala sort que t'han enxampat fent alguna malesa i t'han condemnat a mort. Demanes clemència i et concedeixen el favor especial de triar la distribució de les tres boles blanques i de les tres negres dins les dues urnes. Quina composició triaries?

J. 4 Imagina que disposes d'una raonable quantitat de diners i decideixes invertir en borsa per tal d'augmentar-los. Mentre penses en què invertir, reps una misteriosa carta en la que l'empresa FORRIS S.A. et diu: Demà les accions de la Telefònica pujaran. Tu, no te'n refies gaire i no inverteixes, però, al mirar el diari, observes que la predicció és encertada. Al dia següent reps un altra carta que diu: Vagi en compte! demà baixaran les accions de la hidroelèctrica. Al dia següent al llegir amb escepticisme el diari observes que FORRIS S.A. tona a encertar. Durant SET dies consecutius reps una carta amb prediccions i TOTES ELLES SÓN ENCERTADES!. Al vuitè dia reps una nova carta que et diu: Vostè ha pogut observar el total encert de les prediccions dels nostres professionals. Li oferim una nova predicció per una mòdica quantitat de diners. Contractaries a l'empresa FORRIS S.A. per invertir els teus estalvis?

K. Annex 5: Curiositats d'ampliació

K. 1 Quina és la probabilitat que en una classe almenys 2 persones facin anys el mateix dia?. Per contestar aquesta pregunta segueix aquesta pauta:

- Primer pensa en un grup petit, per exemple 5 persones.
- Pensa ara en una classe de 20 persones.
- Ara pensa en 25 persones.
- Generalitza ara a n persones.

Observació: Tenir present que l'esdeveniment contrari a "almenys 2 persones" és "cap persona coincideix".