

Taxa mitjana de variació



Matemàtiques



Reconocimiento- No comercial- Compartir bajo la misma licencia 3.0 España

Usted es libre de:



copiar, distribuir y comunicar públicamente la obra



hacer obras derivadas

Bajo las condiciones siguientes:



Reconocimiento. You must attribute this work to Departament de Matemàtiques de l'IES el SUI (with link).

Attribute this work:

```
<div xmlns:cc="http://creativecommons.org/ns#" about="http://www.xtec.cat/ieselsui" data-bbox="280 446 832 461"/>
```



No comercial. No puede utilizar esta obra para fines comerciales.



Compartir bajo la misma licencia. Si altera o transforma esta obra, o genera una obra derivada, sólo puede distribuir la obra generada bajo una licencia idéntica a ésta.

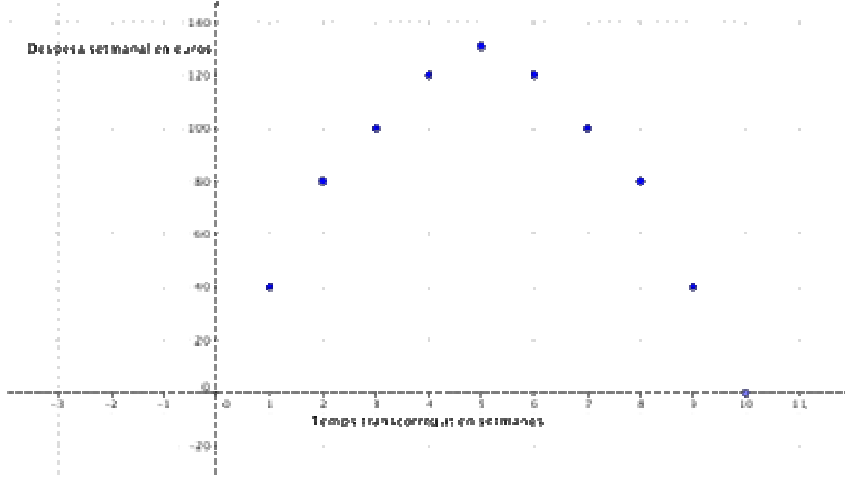
- Al reutilizar o distribuir la obra, tiene que dejar bien claro los términos de la licencia de esta obra.
- Alguna de estas condiciones puede no aplicarse si se obtiene el permiso del titular de los derechos de autor.
- Nada en esta licencia menoscaba o restringe los derechos morales del autor.

Atenció

Los derechos derivados de usos legítimos u otras limitaciones reconocidas por ley no se ven afectados por lo anterior.

A. Variació d'una funció

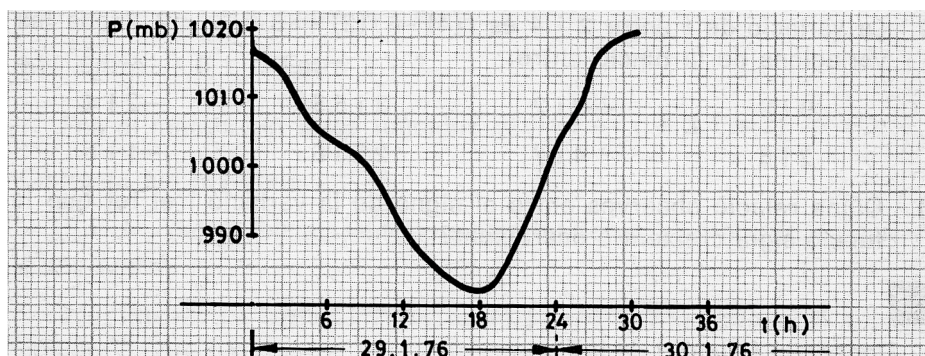
A.1 En acabar la setmana, els pares d'un bebè anoten les despeses en euros en un aliment específic que pren. Observa el gràfic associat a l'evolució de les despeses durant les 10 primeres setmanes del bebè.



- Quina va ser, aproximadament, la despesa d'aquest aliment específic durant la primera setmana?
- Quina va ser la setmana en què van tenir més despesa?
- Quina setmana van tenir la mateixa despesa que la segona setmana?
- Quina és la variació de despesa entre la primera i la segona setmana? I entre la vuitena i la novena setmana?
- Si a l'evolució d'aquesta despesa li associem una funció, construeix la seva taula de comportament.

A.2 La predicció meteorològica del temps es pot fer amb l'ajut d'un baròmetre. Aquesta predicció es basa no tant en el valor de la pressió en un moment determinat com en les variacions brusques que es produeixin.

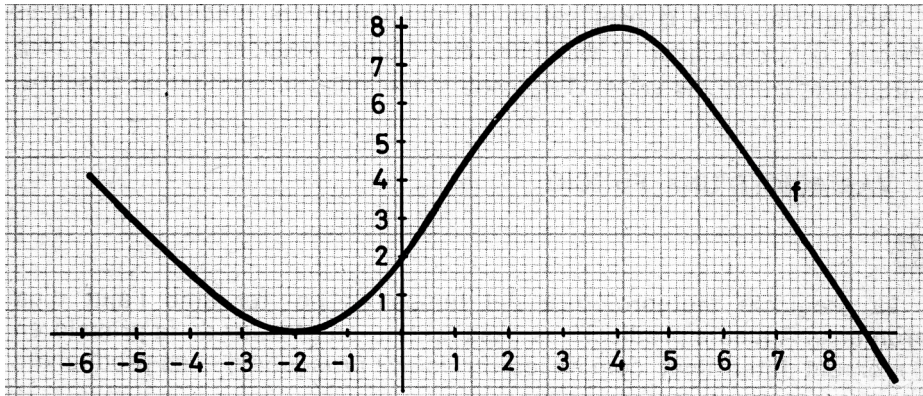
El gràfic següent representa les observacions de la pressió atmosfèrica d'una estació meteorològica:



- Digues quins aparells es fan servir per mesurar la pressió atmosfèrica i quines unitats s'utilitzen.
- Quina és la pressió atmosfèrica a les sis del matí del dia 29? I a les dotze del migdia?

- c) A quina hora ha estat mes baixa la pressió?
- d) Quina era la pressió atmosfèrica a les 18 h i a les 24 h del dia 29? Quina variació hi ha hagut entre aquestes hores? I entre les 18 h del dia 29 i les 6 h del 30? I entre les 0 h i les 12 h del dia 30?
- e) Quina ha estat la variació de la pressió atmosfèrica entre les 6 h i les 12 h del dia 29? Per què és negativa?

A.3 Considerem la funció f , de gràfic:



- a) Troba els valors $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(3)$, $f(2,5)$, $f(5)$, $f(5,5)$, $f(6)$, $f(7)$ i $f(8)$.

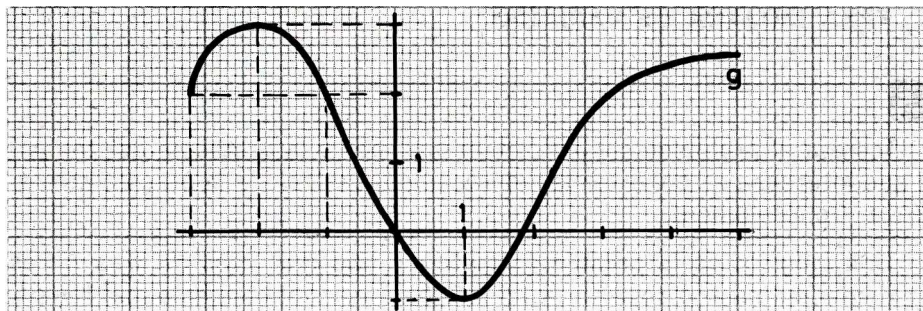
La variació de f entre 2 i 4 és $f(4) - f(2) = 8 - 6 = 2$.

- b) Troba les variacions de la funció entre:

0 i 2	-2 i 2	3 i 5,5	-2 i 4
2 i 6	4 i 7	2,5 i 6	-1 i 5

- c) Quina relació observes entre el signe de la variació i el fet que la funció sigui creixent o decreixent?

A.4 Donada la funció g de la figura:



- a) Troba la variació de g entre -1 i 1.
- b) Ara busca-la entre 1 i 3.
- c) Troba un nombre x per al qual la variació de g entre 1 i x sigui 2.
- d) Troba els nombres x_1 i x_2 per als quals la variació de g entre x_1 i x_2 sigui -3.
Busca'ls ara, de manera que la variació sigui -4.
- e) Troba dos nombres x_1 i x_2 per als quals la variació de g entre x_1 i x_2 sigui 0.

A.5 Troba la variació de la funció $f(x)=3x^2-5x+1$.

- a) Entre 0 i 2.
- b) Entre -2 i 3.
- c) Entre 5 i 15.

A.6 Troba la variació de la funció $f(x)=3x-5$.

- a) Entre -1 i 0. Entre 1 i 2.
- b) Entre 0 i 1. Entre 2 i 3.

Fes el mateix per a les funcions $g(x)=0,5x+3$ i $h(x)=-x+7$.

Comenta els resultats.

A.7 En els cinc problemes anteriors s'ha fet servir el concepte de **variació d'una funció**:

La variació d'una funció f entre x_1 i x_2 (amb $x_1 < x_2$), és el nombre $f(x_2) - f(x_1)$.

B. Taxa mitjana de variació

Tornant al problema **A.2** recordem que, per a la predicció del temps, el que interessa és conèixer les variacions brusques de la pressió atmosfèrica.

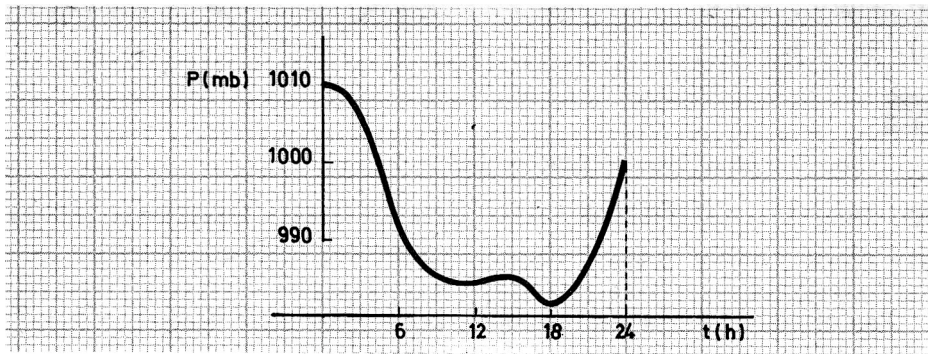
Una caiguda de la pressió atmosfèrica que duri més de tres hores i sigui en mitjana superior a 1,7 mil·libars per hora, anuncia mal temps. (Si ja en fa, el mal temps continuarà).

Un augment de la pressió atmosfèrica que duri més de tres hores i que sigui en mitjana superior a 1,7 mil·libars per hora, anuncia bon temps. (Si ja en fa, el bon temps continuarà).

Una pressió atmosfèrica estable no comporta cap canvi de temps.

És a dir, no n'hi ha prou de conèixer la variació de la pressió atmosfèrica per predir el temps; cal saber-ne la variació per hora.

B.1 Donat el gràfic següent, obtingut en un observatori meteorològic, podem veure que la variació de la pressió atmosfèrica entre les 0 h i les 6 h ha estat de -20 mb. Durant aquest interval de temps (de 6 hores) la variació per hora ha estat de $-20/6$, aproximadament -3,3 mb/h. Això vol dir que a les 6 h del matí, l'observatori podia predir que el temps empitjoraria.



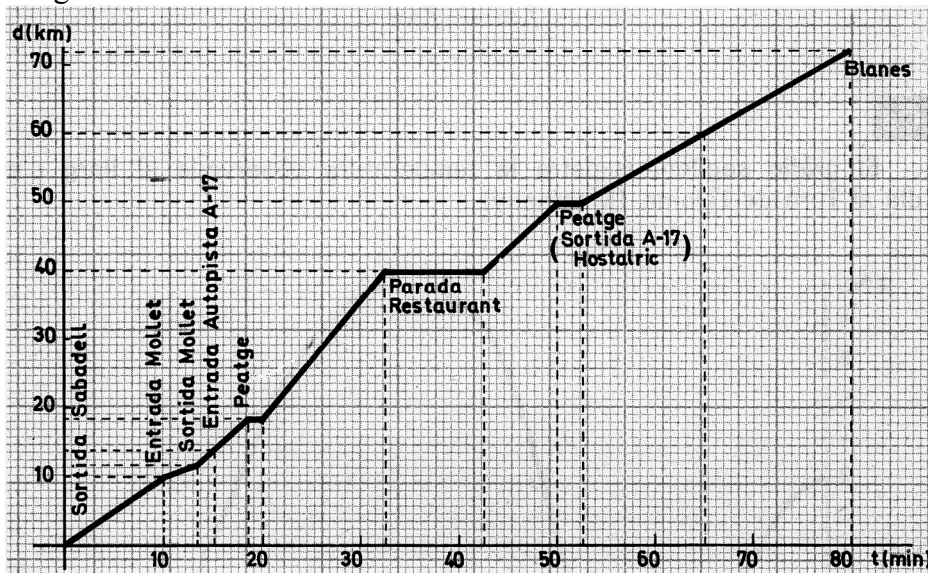
a) Troba la variació per hora de la pressió atmosfèrica entre les 6 h i les 12 h, entre les 12 i les 18, entre les 18 h i les 24 h.

b) Partint de la variació per hora de la pressió atmosfèrica entre les 18 h i les 24 h, quin pronostic podrà fer l'observatori?

La variació per hora de la pressió atmosfèrica també s'anomena **taxa mitjana de variació** de la pressió atmosfèrica.

c) Com a cada hora t li correspon una pressió atmosfèrica que podem assignar per $p(t)$, escriu l'expressió de la **taxa mitjana de variació de la funció p** entre t_1 i t_2 .

B.2 El gràfic següent representa la distància recorreguda per un automòbil en un viatge de Sabadell a Blanes.



- Quina distància total ha recorregut el cotxe?
- Quant ha durat el viatge?
- Quant val la velocitat mitjana del cotxe en tot el viatge?
- Quant val la velocitat mitjana del cotxe a l'autopista? I descomptant les parades?
- Quant val la velocitat mitjana des d'Hostalric a Blanes?
- Quant val la velocitat mitjana entre el moment 55 i el 65? Quina ha estat la velocitat mitjana entre l'instant 65 i 80.
- Què marca el velocímetre de l'auto just en el moment 25? I en el 35? I en el 45?

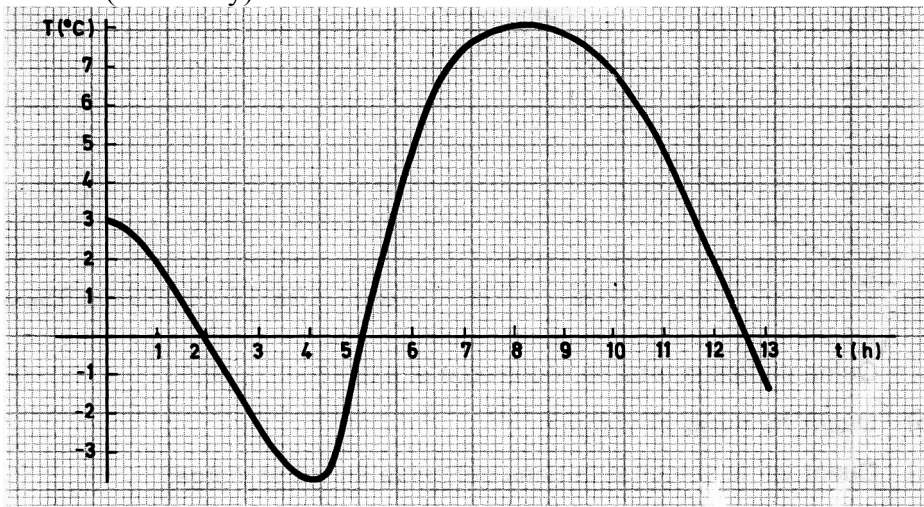
h) Si indiquem per $d(t)$ la distància recorreguda fins a l'instant t , escriu l'expressió de la velocitat mitjana entre els instants t_1 i t_2 que indicarem per $v_m(t_1, t_2)$.

L'expressió de la velocitat mitjana entre els instants t_1 i t_2 trobada en el problema anterior, és anàloga a l'expressió de la taxa mitjana de variació de la pressió atmosfèrica entre t_1 i t_2 trobada a l'exercici B.1.

La **taxa mitjana de variació d'una funció f entre x_1 i x_2 (amb $x_1 < x_2$) és el nombre:**

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

B.3 El gràfic següent registra la temperatura observada al llarg d'un dia al Turó de l'Home (Montserrat)



a) Quant val la variació de la temperatura entre les 6 h i les 12 h? I entre les 12 h i les 18 h? I entre les 18 h i les 24 h? Justifica els signes de les variacions.

b) Quant val la taxa mitjana de variació de la temperatura entre les 8 h i les 12 h? I entre les 8 h i les 16 h? Quina de les dues és més gran? Com s'explica? Si en comptes de taxes parléssim de variacions, quina seria més gran?

B.4 A intervals de 5 segons s'observa la posició d'un cotxe (respecte a un punt de referència 0) per observar si en algun moment supera la velocitat màxima permesa. Les dades obtingudes, considerant que l'instant en què passa pel punt 0 és l'instant zero, són:

temps (segons)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
distància a 0 (metres)	0	100	200	290	370	430	510	610	720

a) Calcula la velocitat mitjana del cotxe durant l'interval total de temps (40 s) i la velocitat mitjana del cotxe en cada un dels intervals de 5 segons.

b) Fes una estimació de la velocitat del cotxe en el moment en què el rellotge marca 20 s.

c) Estima durant quant temps la velocitat fou inferior a 18 m/s. Si la velocitat màxima autoritzada és de 72 km/h, hi ha hagut algun moment en què se superés?

B.5 Un paracaigudista es tira des d'un avió a gran altura. Després de 8 s obre el paracaigudes. La distància vertical recorreguda en la caiguda des del moment en què abandona l'avió, és donada en la taula següent:

temps de caiguda (s)	2	4	6	8
distància recorreguda (m)	20	80	180	320

- a) Dibuixa un gràfic que reflecteixi aquestes dades. És justificat dibuixar aquest gràfic com una línia contínua en lloc de representar únicament els punts donats per la taula?
- b) Troba la velocitat mitjana en cada un dels intervals de 2 segons. Es tracta d'un moviment uniforme? (Moviment uniforme vol dir sempre a la mateixa velocitat)
- c) Busca la fórmula de la funció que relaciona el temps de caiguda i la distància recorreguda.

(Si no saps o no recordes la fórmula que dona la distància quan un cos està en caiguda lliure, intenta trobar una fórmula a partir de t_2)

- d) Quina distància haurà recorregut al cap de 3 segons? Troba la velocitat mitjana durant el tercer segon de caiguda i durant el sisè.

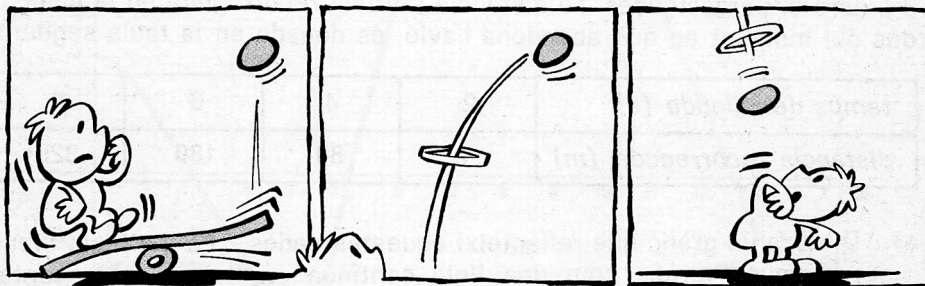
B.6 En tirar enlaire verticalment una pedra amb una velocitat de 40 m/s, la seva altura (en metres), després de t segons ve donada per :

$$d(t) = 40t - 5t^2$$

- a) Construeix una taula que mostri l'altura de la pedra a intervals d'un segon des de $t=0$ fins a $t=10$ s.
- b) Dibuixa amb molta cura el gràfic corresponent.
- c) Quina és l'altura màxima a la qual arribarà la pedra? Al cap de quants segons?
- d) Quants segons triga la pedra a tornar a caure a terra?
- e) Poden tenir algun significat els valors de $d(t)$ quant $t > 8$ o bé quan $t < 0$?
- f) Quina és la velocitat mitjana de la pedra durant els següents intervals de temps?

entre $t=0$ i $t=2$	entre $t=4$ i $t=7$
entre $t=1$ i $t=4$	entre $t=1$ i $t=7$

Comenta els resultats.



B.7 Donades les funcions:

$$f(x) = \frac{3}{4}x - 1$$

$$g(x) = x^3 - 3x^2 + x + 3$$

$$h(x) = \frac{4}{x}$$

- a) Troba'n la taxa mitjana de variació entre $x = 2$ i $x = 5$.
 b) Fes-ho també entre $x = -3$ i $x = 2$; entre $x = -25$ i $x = 0$; i entre $x = 1/2$ i $x = 3$.

C. La taxa mitjana de variació és el pendent d'una recta

C.1 Donada la funció $f(x) = 3x - 5$.

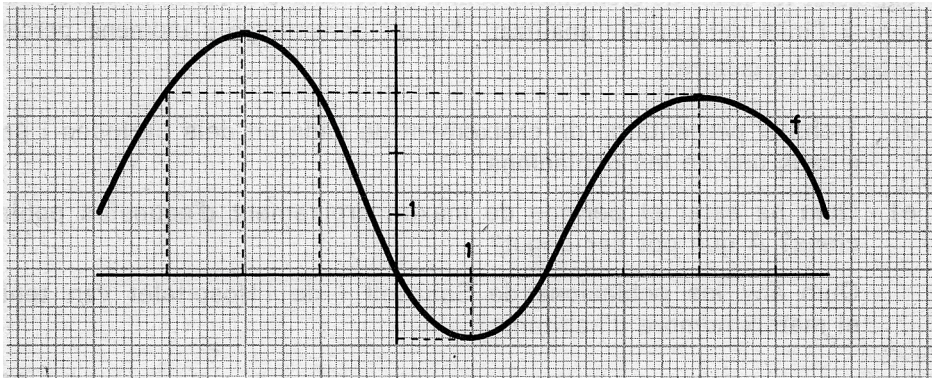
- a) Troba la taxa mitjana de variació entre -1 i 2 .
 b) Troba la taxa mitjana de variació entre 7 i 28 .
 c) Troba la taxa mitjana de variació entre $-0,5$ i $-0,1$.

Observa que a l'exercici anterior totes les **taxes mitjanes** de variació de f que has trobat són iguals i valen 3 , que és precisament el **pendent o coeficient angular** de la recta.

d) Demuestra que la taxa mitjana de variació de f entre dos punts qualssevol x_1 i x_2 és 3 , és a dir, igual que el coeficient angular o pendent de la recta.

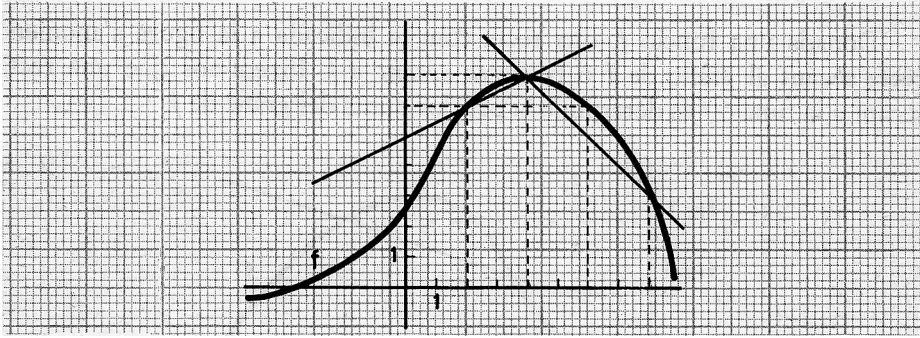
C.2 Comprova que donada una funció polinòmica de primer grau $f(x) = ax + b$, la seva taxa mitjana de variació entre dos punts qualssevol x_1 i x_2 és precisament **a**.

C.3 Donada la funció f :



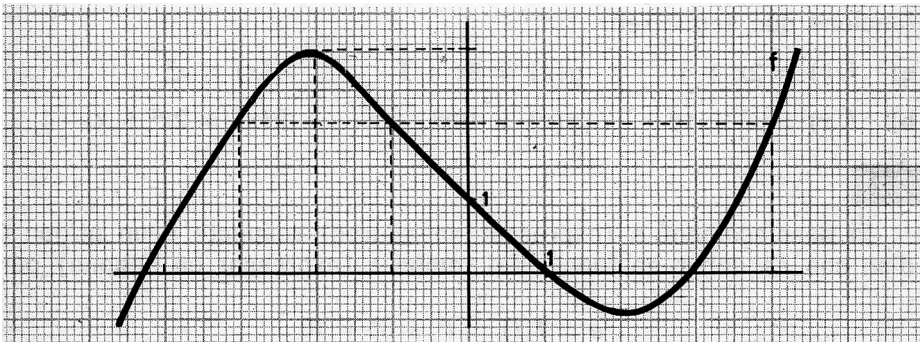
- a) Troba la taxa mitjana de variació de f entre -3 i -2 .
 b) Troba la taxa mitjana de variació de f entre $-1/2$ i 0 .
 c) Troba la taxa mitjana de variació de f entre 1 i 4 .

C.4 Donada la funció:



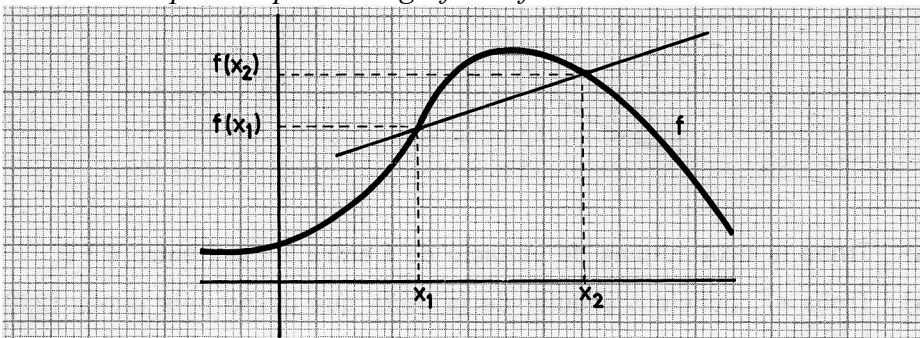
- Troba la taxa mitjana de variació de f entre 2 i 4, i entre 4 i 8.
- Troba el pendent de la recta que passa pels punts de coordenades (2, 6) i (4, 7).
- Troba el pendent de la recta que passa per (4, 7) i (8, 3).
- Per què són iguals els dos resultats de l'apartat a) i els dels apartats b) i c)?

C.5 Donada la funció f :



- Troba la taxa mitjana de variació de f entre -2 i 0.
- Troba el coeficient angular de la recta que passa pels punts (-2, $f(-2)$) i (0, $f(0)$).
- Troba la taxa mitjana de variació de f entre 1 i 4.
- Troba el pendent de la recta que passa pels punts del gràfic de f d'abscisses 1 i 4.

Donada una funció f , una recta com la indicada a la figura s'anomena **recta secant al gràfic de f** o bé **recta secant a f** . Fixem-nos que una recta secant a la funció f és determinada per dos punts del gràfic de f .



C.6 Donada una funció f , troba la relació que hi ha entre la taxa mitjana de variació de f entre x_1 i x_2 ($x_1 < x_2$) i el coeficient angular de la recta secant a f determinada pels punts d'abscisses x_1 i x_2 .

C.7 Troba la taxa mitjana de variació entre 4 i 7 per a cada una de les funcions que segueixen:

a) $f(x) = 2x + 1$ $g(x) = 3x + 7$

b) $f(x) = x^2 + 10$ $g(x) = x^3$

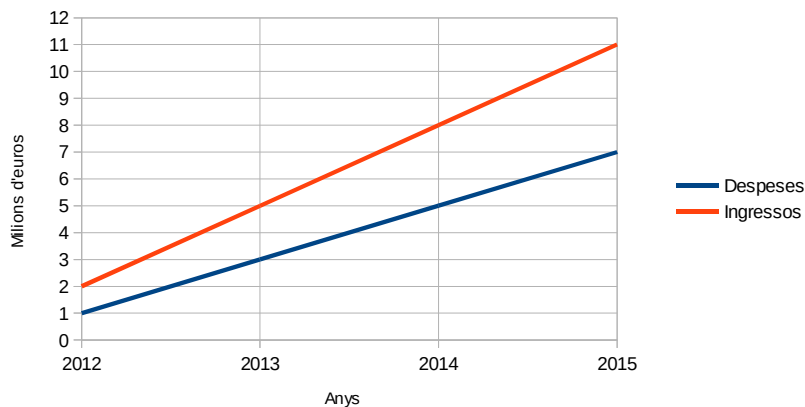
C.8 El desplaçament e (expressat en metres) respecte un origen O d'un cos és donat en funció del temps t (expressat en segons) per:

$$e = f(t) = t^2 + 6t + 10$$

- A quina distància de l'origen O es troba el cos a l'instant inicial ($t=0$)?
- A quina distància de l'origen O es troba el cos al cap de 5 segons? A mesura que passa el temps, s'allunya el cos de l'origen?
- Dibuixa el gràfic de la funció f . Analitza sobre els gràfics les respostes donades en els apartats a) i b).
- Troba la velocitat mitjana entre $t = 4$ i $t = 7$.
- Troba la velocitat mitjana entre $t = 7$ i $t = 10$. Es tracta d'un moviment uniforme?

C.9

Observa el gràfic de l'evolució d'ingressos i de despeses d'una empresa des de l'any 2012



- Quants milions d'euros va tenir de beneficis l'empresa l'any 2013?
- Quin any els beneficis han estat de 3 milions d'euros?
- Quina és la taxa mitjana de variació de les despeses entre qualsevols anys?
- Quina és la taxa mitjana de variació dels ingressos entre qualsevols anys?
- Quina és la variació dels beneficis entre dos anys consecutius?
- Justifica l'afirmació: Cada any tenim 1 milió d'euros de beneficis més que l'any anterior.

C.10 Donada la funció $f(x) = x^2$, troba la taxa mitjana de variació :

a) Entre 5 i 7 Entre 5 i 6 Entre 5 i 5,5

b) Entre 5 i 5,1 Entre 5 i 5,01 Entre 5 i 5,001

c) Què s'observa en comparar els resultats anteriors?

d) Escribeu l'expressió que ens doni la taxa mitjana de variació de la funció f entre 5 i b (b indica un nombre més gran que 5). Simplifica l'expressió obtinguda. Què pots dir de la taxa mitjana de variació de f entre 5 i b quan b s'acosta a 5?