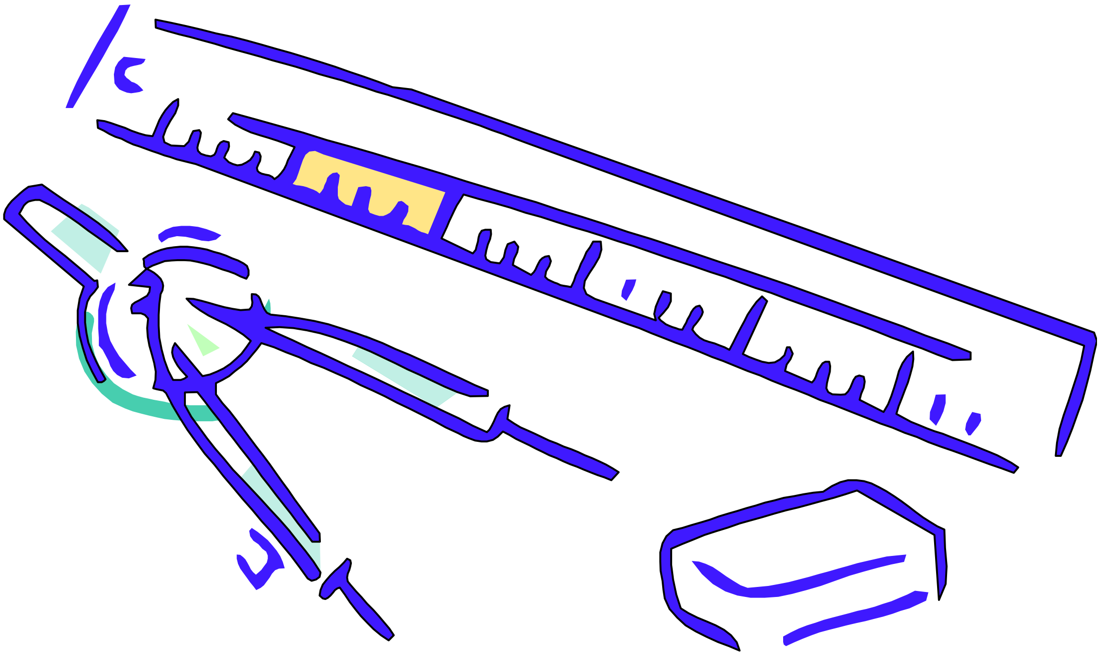
RESOLUCIÓ DE TRIANGLES
TRIGONOMETRIA



Matemàtiques 4t ESO

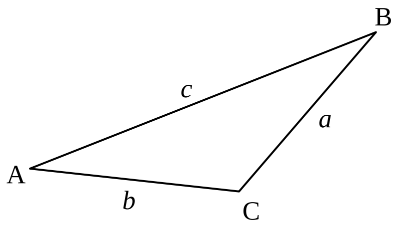
INSTITUT EL SUI

I

A. Resolució gràfica de triangles

RECORDA:

➢En un triangle els angles s'anomenen amb lletres majúscules i els costats amb minúscules de manera que el costat ***a*** ha de quedar just al davant de l'angle **A** i mai el pot tocar (igual amb el ***b*** i **B**, així com amb el ***c*** i el **C**:



➢Quan es demana **resol el triangle** cal:

▪Dibuixar el triangle (**Necessitareu un regle graduat, un compàs, un transportador i paper mil·limetrat.)**

▪Mesurar els tres costats amb el regle i els tres angles amb el portaangles.

▪Donar la resposta per escrit de manera clara i ordenada.

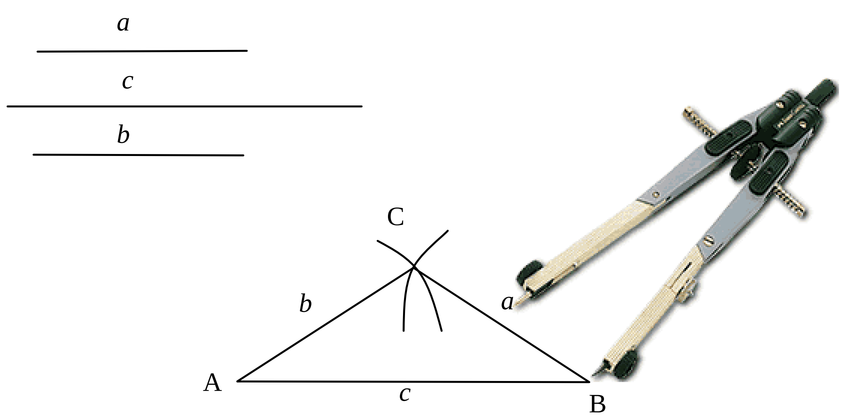
Recorda que:

Resoldre un triangle vol dir conèixer els seus tres costats i els seus tres angles.

A continuació analitzarem un per un tots els casos diferents amb els que et pots trobar per quan necessitis resoldre un triangle.

A.1 Si tinc els tres costats

a) Escriu les instruccions necessàries de manera molt clara per poder dibuixar un triangle quan coneixes els tres costats. (pots ajudar-te del dibuix)



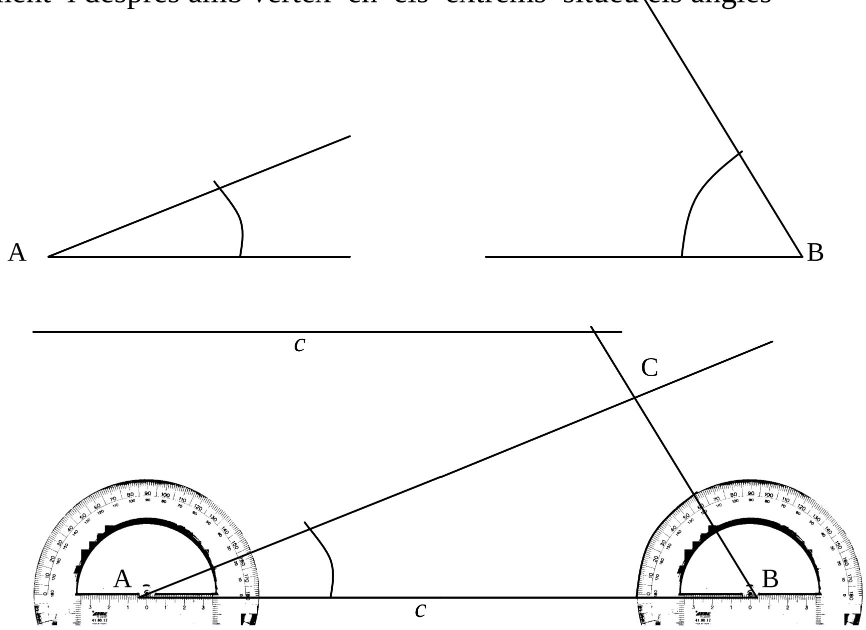
b) Resol el triangle format pels costats a = 7 cm, b = 5,3 cm i c =3 cm.

c) Creus que podríeu dibuixar més d'un triangle amb aquestes condicions, o tots serien iguals?

A.2 Si tinc dos angles i un costat

a) Instruccions:

- Primer calcula el tercer angle amb la calculadora, recorda que els tres angles d'un triangle sumen 180 º
- Dibuixa el segment i després amb vèrtex en els extrems situeu els angles

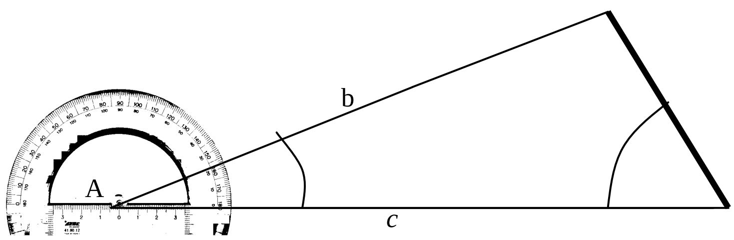


b) Resol el triangle en que coneixem dos angles A=32º i B=94º, i el costat c = 7.

c) Creus que podries dibuixar altres triangles que complissin les mateixes condicions? Per què?

A.3 Si tinc dos costats i l'angle contigu als dos costats

a) Escriu les instruccions necessàries de manera molt clara per poder dibuixar un triangle quan coneixes dos costats i l'angle contigu als dos costats. (pots ajudar-te del dibuix)

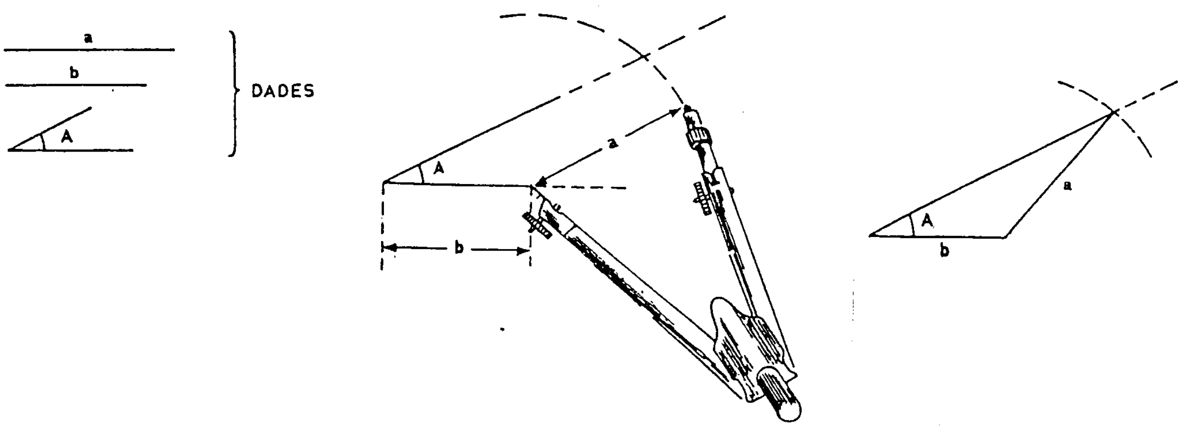


b) Resol el triangle format pels costats a = 6 cm, b = 8,3 cm i C =30º.

c) Creus que podríeu dibuixar més d'un triangle amb aquestes condicions o tots serien iguals?

A.4 Si tinc dos costats i l'angle oposat a un dels costats.

a) Escriu les instruccions necessàries de com s'ha de fer per dibuixar un triangle quan coneixes dos costats i l'angle oposat a un dels costats . (pots ajudar-te del següent dibuix)



b) Amb la construcció anterior **Resol** el triangle a=5,1 cm, b=8,3 cm, A=32º.

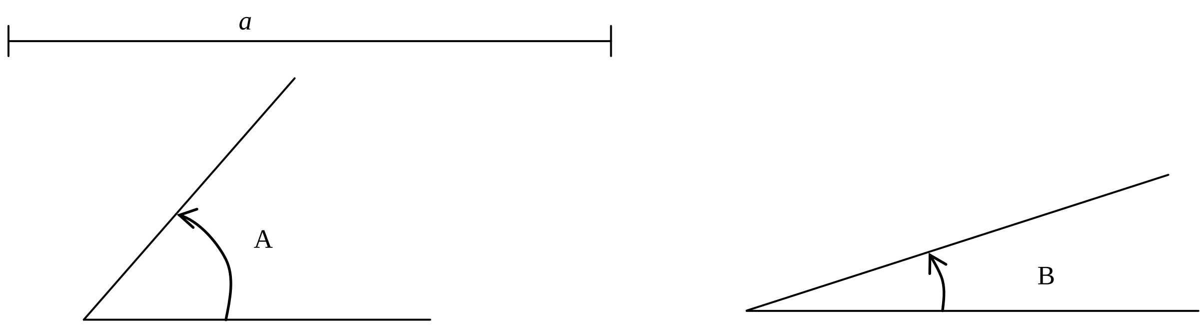
c) Amb la construcció anterior **Resol** el triangle a=2 cm, b=8,3 cm, A=53º.

d) Amb la construcció anterior **Resol** el triangle a=10 cm, b=3,6 cm, A=41º.

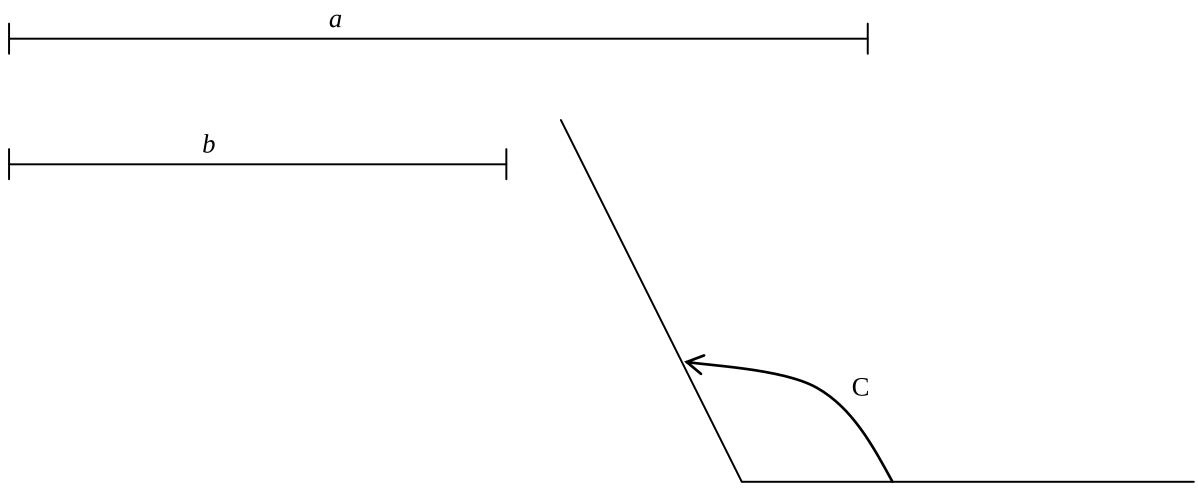
e) Hauràs observat que potser que no hi hagi cap solució, que n'hi hagi una o dues. Explica a la teva llibreta com han de ser les dades per no haver solucions, com han de ser per tenir una solució i com han de ser per tenir-ne dues solucions.

A.5 Resolem alguns triangles

a) Dibuixa el triangle del qual coneixem:



b) Dibuixa el triangle del qual coneixem:



c) Dibuixa un triangle de forma que un costat amidi 7,2 cm i els angles adjacents siguin de 70º i 40º.

B. Recordem els canvis d’escala

Recorda que per passar del dibuix a escala a la realitat cal multiplicar per l’escala, per passar de la realitat al dibuix cal dividir per l’escala i per trobar l’escala cal dividir la realitat entre el dibuix a escala.

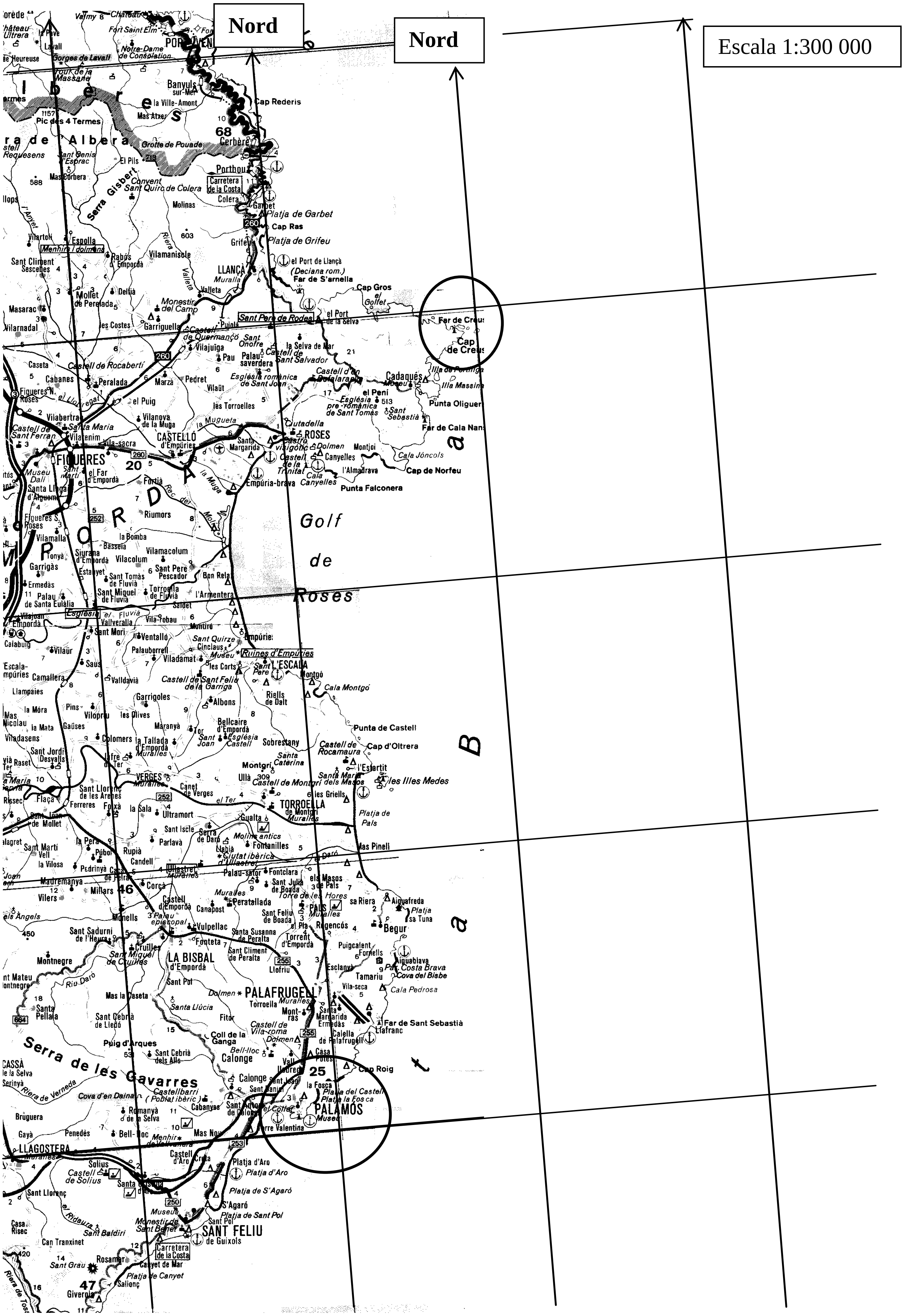
B.1 Completa la taula següent

DIBUIX	REALITAT	ESCALA
14 cm	700000 cm = 7 Km.	1:50 000
2 cm		1:100
	42 m	1:1000
7 cm		1:125
12 cm	480 m	
	14,7 m	1: 70

B.2 El vaixell

Des del cap de Creus es veu un vaixell sota un angle de 170º i des de Palamós sota un angle de 85º. Troba gràficament la distància del cap de Creus al vaixell i de Palamós al vaixell. (Com **origen d'angles s'agafa sempre la línia observador-nord i com sentit positiu de gir el de les agulles del rellotge.)**

Tingues en compte que l’escala 1:300 000 és en format DIN A4, per tant si la impressió és en un altre format hauràs de calcular l’escala corresponent.


Nord
Nord
Escala 1:300 000
Golf
de
Roses
Cap Rederis
Cerbère
Portbou
LLANÇÀ
Cadaqués
ROSES
CASTELLÓ d'Empúries
FIGUERES
L'ESCALA
TORROELLA de Montgrí
LA BISBAL d'Empordà
PALAFRUGELL
PALAMÓS
SANT FELIU de Guíxols
LLAGOSTERA
Serra de les Gavarres
Punta de Castell
Cap d'Oltrera
Punta Falconera
Cap de Norfeu
Far de Sant Sebastià
Cap Roig

B.3 El riu

Un individu vol mesurar l'amplada d'un riu i no vol mullar-se, puja a una torre que fa 40 m d'alçada i amb un aparell mesura l'angle amb que ell veu l'amplada del riu des de dalt de la torre. Aquest angle és de 21º. A més sap que la torre està a 30 metres del riu.

•Dibuixa a escala la torre i el riu.

•Mesura en el teu dibuix l'amplada del riu

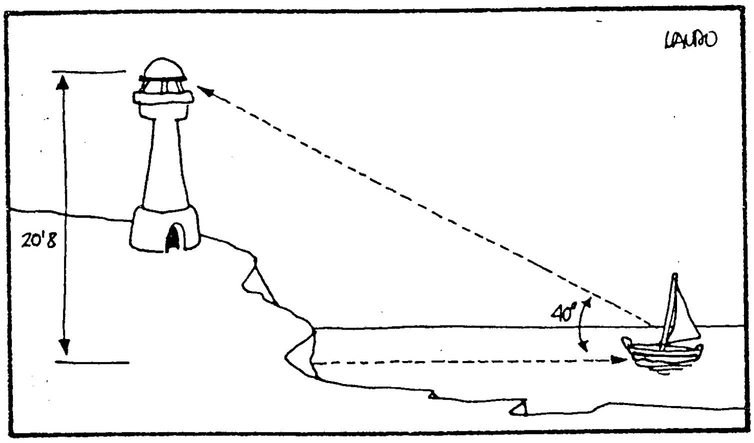
•Fes una altra vegada el canvi d'escala per calcular l'amplada del riu.

B.4 Es cotxes

Dos cotxes surten del mateix punt i en el mateix instant per carreteres que formen un angle de 55º. El primer va a 80 km/h i el segon a 60 Km/h. Calcula gràficament a quina distància estaran al cap de 1h 30 m.

B.5 Un altre vaixell

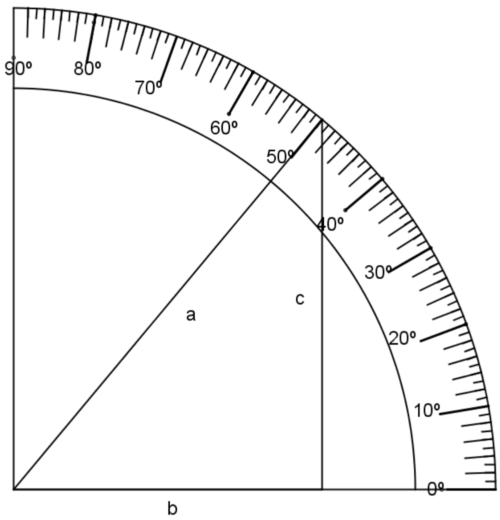
Un vaixell observa el punt més alt d'un far, situat 20,8 m sobre el nivell del mar, sota un angle de 40º respecte a l'horitzontal. A quina distància es troba del cim del far?



C. Resolució de triangles rectangles

C.1 Fem feina per estalviar feina

a) A la gran majoria de problemes en els que s'han de buscar distàncies cal resoldre triangles **rectangles** en els que busquem un dels costats. Per evitar fer un dibuix nou per cada exercici construirem en un paper mil·limetrat un quart de circumferència de 10 cm de radi. Gradua l'interior de 5º en 5º i construeix els triangles segons les indicacions del dibuix



b) Omple la taula següent

C	**A**	***b***	**B**	***c***	***a***	***c/a=***	***b/a=***	***c/b=***
10º	90º				10 cm			
20º	90º				10 cm			
30º	90º				10 cm			
40º	90º				10 cm			
50º	90º				10 cm			
60º	90º				10 cm			
70º	90º				10 cm			
80º	90º				10 cm			

c) Imagina que per fer la taula utilitzem triangles iguals pel que fa als angles (mateixa forma) però diferents en grandària (utilitza la circumferència interior). Canviaria el resultat de les columnes c/a, b/a, c/b? Per què?

C.2 Aprofitem la feina feta

Utilitzant la taula anterior i sense fer cap dibuix pots resoldre molts problemes. Fixa't en l'exemple i resol els altres:

•**Exemple:** D'un triangle rectangle coneixem C = 20º i ***b*** = 7 cm i he de calcular ***c.***
Solució:

*Sense fer el triangle sé que **c/b** ha de donar el mateix en el meu triangle que en el de la taula anterior. Així doncs:*

$$\frac{c}{b} \cong 0{,}36$$

$$\text{Per tant , com que} \quad b = 7 \ \text{ tenim que} \quad \frac{c}{7} \cong 0{,}36$$

$$i \quad \text{passant el} \ \ 7 \ \text{a l'altra banda:} \quad c = 7 \cdot 0{,}36 = 2{,}53\text{cm.}$$

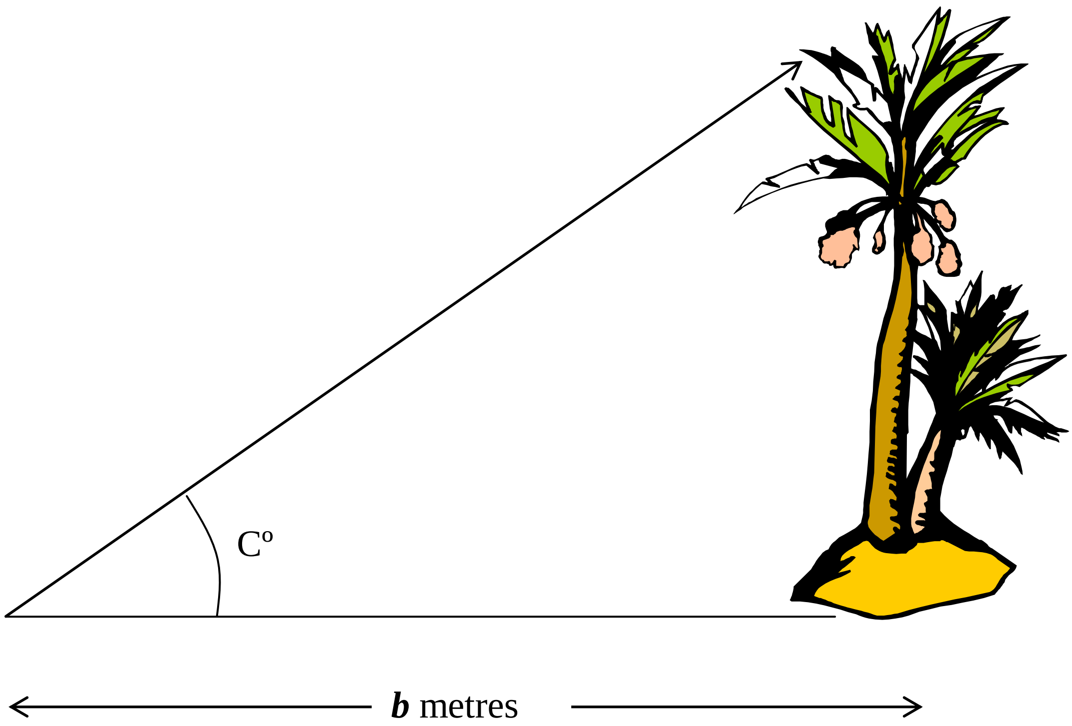
a)D'un triangle rectangle coneixem C = 70º i ***b*** = 9 cm he de calcular ***c i a***.

b)D'un triangle rectangle coneixem C = 40º i ***c*** = 12 cm he de calcular ***b i a***

c)D'un triangle rectangle coneixem C = 50º i ***a*** = 6 cm he de calcular ***c i b***.

C.3 L'arbre

Una prestigiosa biòloga fa un estudi sobre el creixement dels arbres de Cardedeu i ha de mesurar l'alçada de molts arbres. Com que seria molt incòmode tenir que pujar fins dalt de cada arbre, mesura la distància del tronc a un punt i mesura després l'angle amb què es veu el punt més alt.



Calcula l'alçada dels arbres que ha mesurat si:

a)C = 25º i b = 50 m

b)C = 45º i b = 32 m

C.4 El gran descobriment.

a) Omple ara la taula següent posant el que et surti al posar amb calculadora l'angle C i prémer les tecles **sin** , **cos** , **tan** o directament prémer les tecles **sin** , **cos** , **tan** i l'angle C. (Segons el tipus de calculadora)

C	*sin C*	*cos C*	*tan C*
10º			
20º			
30º			
40º			
50º			
60º			
70º			
80º			

b) Explica què observes comparant aquests valors amb els de la taula de l'exercici fem feina per estalviar feina.

c) Què posaries, a la taula, al costat de c/a = , b/a = c/b = ?

d) Per tant, quina conclusió podem treure?

C.5 Resolem triangles amb calculadora.

Utilitzant les tecles **sin** , **cos** **tan** de la calculadora pots saber el valor de **c/a, b/a, c/b** de qualsevol angle C d'un triangle rectangle. Amb aquesta informació, i sense dibuix:

a) Calcula ***c*** d'un triangle rectangle del que coneixem C = 74,26º i ***b*** = 4 cm.

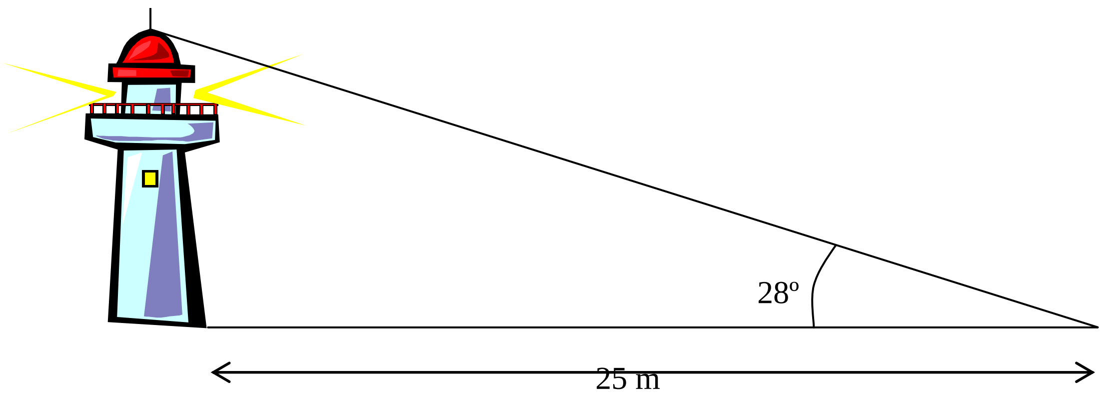
b) Calcula ***b*** d'un triangle rectangle del que coneixem C = 48,33º i ***c*** = 13,5 cm

c) Calcula ***a*** d'un triangle rectangle del que coneixem C = 11,37º i ***b*** = 7,2 cm.

d) Calcula ***b*** d'un triangle rectangle del que coneixem C = 68,2º i ***a*** = 19,12 cm

C.6 El Far

A una distància de 25 m d'un far observem la part més alta d'aquest far sota un angle de 28º. Quina alçada té el far?



Raons trigonomètriques

Donat un angle agut de mesura C anomenarem sinus de C al valor del quocient:

$$\textbf{sin C} = \frac{c}{a} = \frac{\text{longitud del catet oposat a l'angle C}}{\text{hipotenusa}}$$

Considerant que un angle agut pot ésser un dels angles d'un triangle rectangle direm:

<u>**Sinus d'un angle agut és la raó entre les longituds del catet oposat i de la hipotenusa.**</u>

Donat un angle de mesura C anomenarem cosinus de C al valor del quocient:

$$\textbf{cos C} = \frac{b}{a} = \frac{\text{longitud del catet contigu a l'angle C}}{\text{hipotenusa}}$$

De manera semblant al cas del sinus, podem dir:

<u>**Cosinus d'un angle agut és la raó entre les longituds del catet contigu i de la hipotenusa.**</u>

Donat un angle agut de mesura C anomenarem tangent de C al valor del quocient :

$$\textbf{tan C} = \frac{c}{b} = \frac{\text{longitud del catet oposat a l'angle C}}{\text{longitud del catet contigu a l'angle C}}$$

<u>**Tangent d'un angle agut és la raó entre les longituds del catet oposat i el catet contigu.**</u>

<u>**El sin C, cos C i tg C s'anomenen raons trigonomètriques de l'angle de mesura C.**</u>

C.7 La rampa del supermercat

En un supermercat de dos pisos hi ha una rampa per poder traslladar els carretons fàcilment; la rampa té una inclinació de 15º i ocupa una longitud horitzontal de 14 m. Volem saber la llargada de la rampa.

C.8 El xicot

Un xicot de 1,75 m d'alçada es mira el cim d'un edifici des d'un punt situat a 50 m de la base de l'edifici de manera que l' angle que forma la visual amb l'horitzontal és de 30º. Quina és l'alçada de l'edifici?

C.9 L'estel

Un estel subjecte a terra per un cordill de 80m de llarg, forma amb l'horitzontal un angle de 75º. A quina altura és l'estel?

C.10 Per concloure

Amb l'ajut del teu professor/a :

a) Dibuixa un triangle ABC rectangle en A i de costats a, b i c:

b) Expressa en funció dels costats les raons trigonomètriques de l'angle B.

c) Igualment per a l'angle C.

d) Quant sumen els angles B i C ? Sabies que per això s'anomenen complementaris?

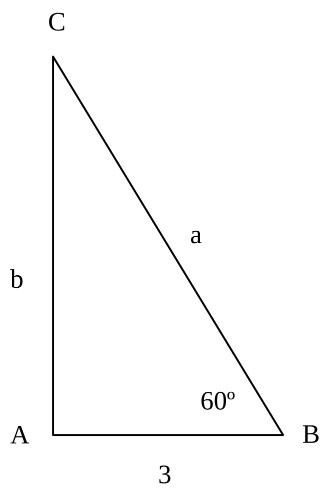
e) Dona una definició d'angles complementaris.

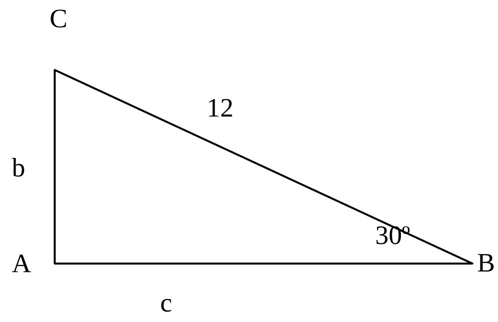
f) Quina relació hi ha entre les raons trigonomètriques dels angles B i C?.

C. Problemes d'aplicació

D.1 Determina els costats d'un triangle rectangle si la hipotenusa fa 4 cm i un dels angles aguts és 33º.

D.2 Resol els triangles rectangles següents:





D.3 Resol el triangle ABC, rectangle en A, en els casos següents:

a) a = 12 cm C = 45º

b) a = 8 cm B = 60º

c) b = 5 cm C = 40º

d) c = 8 cm C = 50º

e) b = 6 cm B = 30º

D.4 Un estel està lligat a terra amb un fil de 100 m i forma un angle de 40º amb l'horitzontal del terreny. Suposant que el fil estigui tibant, calcula l'altura de l'estel.

D.5 Un globus està lligat a una corda de 200 m. Un cop d'aire el desvia 20 m de la vertical. Calcula l'alçada a què es troba en aquest moment.

D.6 Des d'un far situat a 40 m sobre el nivell del mar es veu un vaixell amb un angle de depressió de 55º. A quina distància del peu del far es troba el vaixell?

D.7 Calcula l'àrea i el perímetre d'un triangle rectangle si un dels seus angles mesura 29,7º i la hipotenusa 11cm.

D.8 Els catets d'un triangle rectangle fan 9cm i 12 cm. Calcula la hipotenusa i l'àrea.

D.9 Calcula l'àrea d'un pentàgon regular de 40 m de costat.

D.10 Calcula l'àrea d'un octàgon regular de 50 m de costat.

D.11 Calcula el costat i l'àrea d'un octàgon regular inscrit en una circumferència de 12 cm de radi.

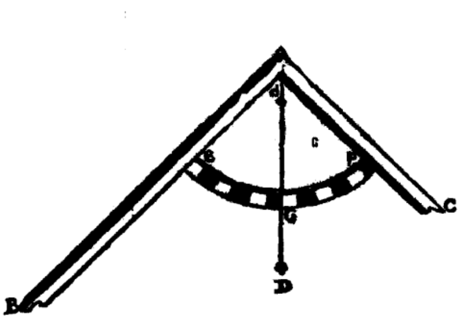
D.12 L'angle oposat a la base d'un triangle isòsceles és de 70º i la base fa 12 cm. Calcula'n l'àrea.

D.13 L'angle oposat a la base d'un triangle isòsceles és de 40º i un dels costats iguals fa 16 cm. Calcula'n l'àrea.

D.14 Una escala de 5m es recolza en una paret. L'angle que forma l'escala amb la paret és de 20º. Calcula l'altura que s'assoleix i la separació respecte a la paret.

D.15 El mesurador d’angles

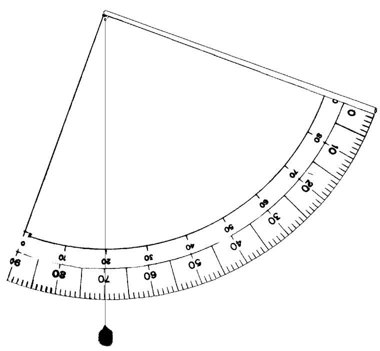
Tartàglia (1500-1557) en realitat es deia **Nicolo Fontana**. Vivia a Brèscia, al nord d'Itàlia, i quan tenia 12 anys els francesos van atacar la ciutat. Al pobre Tartàglia li van creuar la cara amb un sabre, li van fer 7 ferides a la cara, una de les quals li va afectar el coll. La seva mare el va curar a casa com va poder i com a conseqüència de la ferida del coll es va quedar tartamut, d'aquí el sobrenom de Tartàglia (el tartamut, a Itàlia). La vida d'aquest personatge no va ser gens fàcil.
Potser amb ganes de venjar-se dels francesos, el 1537 Tartàglia va publicar un llibre sobre l'aplicació de la matemàtica a l'artilleria. En aquest llibre descrivia un quadrant de la seva invenció molt semblant al que construirem, però que en aquest cas mesurava directament l’angle. Com que en aquella època no hi havia calculadores, Tartaglia va fer una taula molt semblant a la que hem fet nosaltres a l’exercici “fem feina per estalviar feina” però amb molts més angles. Fabricat en llautó, el quadrant anava enganxat a la boca dels canons i amb uns petits càlculs i la taula es podia saber a quina distància cauria la bala en funció de la lectura de l'aparell.



Amb una intenció més pacífica construirem nosaltres, ara un quadrant semblant al del nostre amic Tartàglia.

Construcció:

- Enganxar una fotocòpia ampliada de mig transportador d’angles en un cartró rígid:

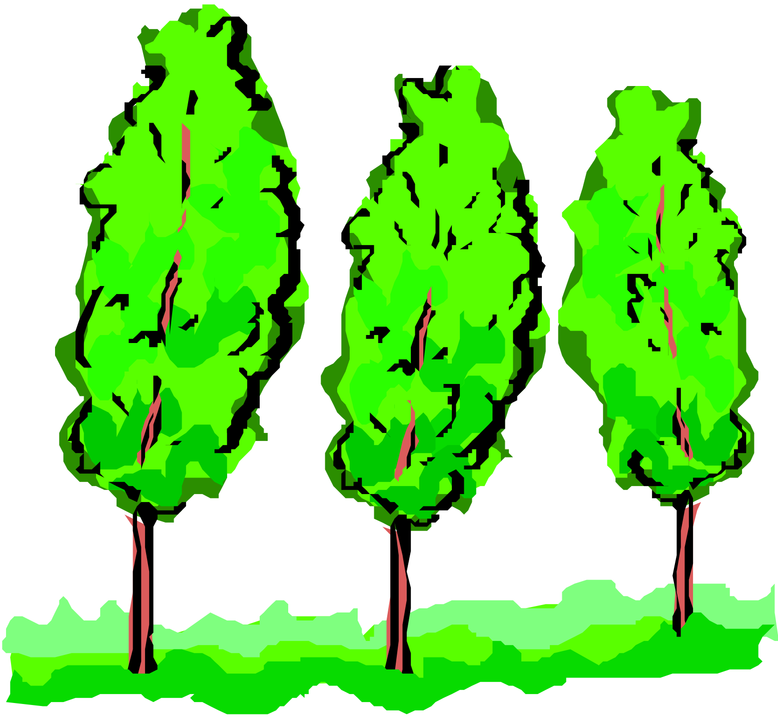


- Pega una canyeta en una de les vores.
- Lliga un filet amb una plomada a la vora.

A proposta del professorat podeu fer aquest o un altre treball de camp que haureu de lliurar.

D.16 Fem de biòlegs

Al pati del nostre institut tenim la sort de tenir diversos arbres catalogats. Això vol dir que no podem decidir tallar-los sense consultar a l'ajuntament. Una de les tasques dels biòlegs que cataloguen els arbres és mesurar-los. Mesureu, amb l'ajut del vostre mesurador d'angles, els arbres que hi ha al pati.



D.17 Com podem saber la mesura dels angles en un triangle rectangle si coneixem els costats i per tant les raons trigonomètriques?

a) Dibuixa un angle el sinus del qual sigui 0,4. Troba la mesura d'aquest angle amb el semicercle graduat.

b) Fes el mateix però que el cosinus sigui 0,25.

c) Fes el mateix però que la tangent sigui 3.

La calculadora ens permet també trobar l'angle a partir d'una de les seves raons trigonomètriques. Això ve donat normalment per la mateixa tecla que ens dona la raó trigonomètrica però prement abans la tecla INV- SHIFT- 2a FUNCIÓ...

e) Troba la mesura dels angles dels apartats a) b) i c) mitjançant la calculadora i comprova la teva habilitat a l'hora de dibuixar i mesurar.

D.18 Angle amb el que es veu el Sui des del Sui

A partir de les dades del mapa de la pàgina següent, determineu l'angle amb que es veu el Sui des del Sui. (**Escala 1:50 000 en DIN A4)**

Puig Agut
704
Can Puig-agut
el Soler
el Croells
Pla de la Calma
Pedres Blanques
Puig Drau
1344
Turó de la Ventosa
Roca Roja
1281
el Bellit
la Jaça del Bellit
1.117,4
Casanova del Molar
el Molar de Dalt
Casanova de Vallforners
1.248,9
1.300,5
el Sui
1322
GR-5
l'Agustí
el Parany
Tagamanent
1036
Bellver
la Vila
Vilardebò
el Solà
Fageda del Samont
Turó de Pi Novell
Turó del Samont
1.272,7
el Samont
1.118,9
Turó Monner
1103
La Pedralba
Tagamanent
Can Coll
Vallforners
Morro Negre
l'Estepar
el Seguer
Eugènia
Congost
el Forn
972,8
Collada de les Palomeres
1.002,9
Can Bosc
les Planes
645,5
Can Pereres del Pla
1.052,0
el Cortès
Sant Elies
1003
Turó de Sant Elies
1.065,4
el Bac
Vallcarguera
Can Dòsrius
Riera de Vallcarguera
1019
el Mojó
Can Cuc
Sant Salvador de Terrades
Can Morera
Can Torrapa
Figaró
644,2
els Plans
Roca Centella
999,7
Baga del Cortès
Can Pou
780,1
Can Vall
Sant Cristòfol de Monteugues
Gallicant
Can Mas
SERRA DELS SEMBRADORS
Can Mets
Can Balder
Can Sorell
Can Plane
Can Castell
Vallfiguera
N-152
Bosc de Can Valls
SERRA DE LES TERMES
Coll de Carpis
Turó de Santa Margarida
Turó dels Garrics
711
747,8
644,7
717,5
Can Perera de Canyes
Turó de Can Sunyer
Can Palau
343,0
Can Domènec
Pineda de Can Gras d'Amunt
Can Volard
Can Parades
Els Tremolencs
Ca l'Oliveró
Puig del Castell
el Castell
Molí de l'Antic
El Mirador del Montseny
428,0
Can Cavaller
Can Torrent
Cànoves
les Brugueres
Can Noguera
376,8
la Muntanyeta
la Garriga
Can Bori
Can Flequer
Can Bot
Can Ferrer de la Bruguera
Can Ferrer
Les Faldes del Montseny
BP-5107
Samalús
la Riera
Turó de la Ferreria
Can Julià
Can Bruguera
Sant Esteve de la Doma
Can Poi del Bosc
Can Lluc
Pla de Bruguer
Sant Pere de Vilamajor
Vallfigueres
Riera de Samalús
Can Prat
Can Centelles
Turó de Can Bertran
368
Ca l'Esmandia
Can Monells
Ca n'Oladell
Ca l'Aleix
Can Busquets
Ca n'Illa
316,4
Can Pau
Santa Maria del Camí
Can Noalard
324,6
Can Bertran
Cal Metge
Les Pungoles
303,1
Can Terrers
347,4
Can Saüquet
Ros
340,6
Sant Hilari
Can Guri
Can Miret
Corró d'Amunt
les Planes
Rosanes
209,0
250,0
Els Gorgs
Can Blanxart
323,7
288,7
Can Jaumet
Sant Jaume de Rifà
Can Pungol
Can Grau Gros
302,6
273,1
Bosc de Can Serra
248,5
BV-1433
N-152a
Can Bosc
Ca l'Eimeric
Can Carbonell
Cal Bessó
Can Pau Tram
285,4
222,6
284,3
Can Mari
Mare de Déu del Pla
Can Cutiró
244,8
Pla de les Vinyes
Can Tries
Ca n'Enrani
Can Rovira del Villar
Torrent de Can Palusora
BV-5151
287,6
Bosc de Can Nicolau
el Rieral
Can Marc
Torre Niella
Reixac
Mas Dorca
Can Baldic
Can Torrents
289,2
Sant Julià del Fou
Pla de Llerona
Can Sabater
el Foguerar
la Coma
Can Màcip
Llerona
el Congost
Turó de les Mentides
Bosc de Can Ramis
Marata
Can Martens
N-152
Can Monells Nou
240,3
Pla d'en Girbau
BV-1439
Can Perera
Ca l'Anton
el Marital
Cardedeu
Llinars del V
Can Suari
Milpins
Can Pujol
C-251
224,3
Can Girbau
Can Cuana
polígon industrial
Can Pelegrí
Bellavista
Can Paler
la Foradada

D.19 La torre de Pisa

La construcció de la famosa torre de Pisa va acabar l'any 1284. Es va comprovar aleshores que la part més alta de la torre es separava uns 90 cm de la vertical. Avui dia la separació és aproximadament de 5 m i l'altura de la torre és de 55 m . Calcula l'angle que forma la torre amb la vertical.

E.Per practicar

E.1 Dibuixa els angles aguts que tenen les raons trigonomètriques següents i després calcula el valor de l'angle.

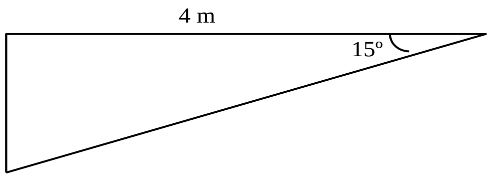
a) sin B = 3/5

b) tg C = 1

c) cos C = 4/5

d) sin B = 0,5

E.2 En el triangle rectangle de la figura, un catet amida 4m i l'angle contigu 15º. Resol el triangle.



E.3 Resol el triangle ABC, rectangle en A, en els casos següents:

a) a= 20 cm b = 16 cm

b) a= 5 cm c = 2 cm

c) c= 10 cm b = 5 cm

E.4 Resol analíticament els triangles:

a) a = 16 ; b = 3

b) a = 10 ; C = 43º

c) c = 12 ; B = 69º

E.5 Valor exacte de les raons trigonomètriques dels angles de 30º 45º i 60º

Als problemes anteriors has utilitzat les raons trigonomètriques de diversos angles. Primer les has calculat mitjançant procediments gràfics i després has fet servir els valors donats per la calculadora. Tant en un cas com en un altre eren valors aproximats. Per als angles de 30º, 45º i 60º es poden trobar les seves raons trigonomètriques d'una manera analítica i **exacta** mitjançant càlculs molt senzills, utilitzant el teorema de Pitàgores.

El vostre professor/a farà l'exercici a la pissarra i vosaltres anotareu les respostes i conclusions a la vostra llibreta:

a) En un quadrat de costat 1, dibuixa la diagonal i calcula la seva longitud. A partir d'aquest resultat troba el **valor exacte** de sin 45º, cos 45º i tg 45º.

b) En un triangle equilàter de costat la unitat, dibuixa una de les altures i calcula la longitud. Tenint en compte el resultat anterior, determina sin 60º, cos 60º i tg 60º.

c) A partir de les raons trigonomètriques de 60º troba les d'un angle de 30º.

d) Si en comptes d'un quadrat o triangle equilàter de costat 1 haguessis considerat un costat de mesura c, haurien canviat els resultats obtinguts?

Posa la teva calculadora en mode Math i calcula aquestes raons trigonomètriques. Veuràs que algunes coincideixen amb les que ha fet el professor i altres no. Qui s'equivoca?

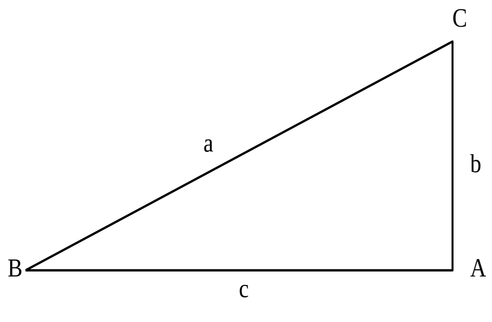
E.6 La diagonal d'un quadrat amida $5\sqrt{2}$ cm. Quant amida el costat?

E.7 Els angles aguts d'un rombe mesuren cadascun 60º i la diagonal més gran amida $7\sqrt{3}$ cm. Quant amida l'altra diagonal? I el costat?

Fórmules de trigonometria

E.8 Hi ha una fórmula molt important que s'anomena Teorema fonamental de trigonometria. El vostre professor/a us l'escriurà a la pissarra i us demostrarà la seva validesa. Copia tot el que faci a la teva llibreta. (Pensa que aquesta demostració pot sortir als exàmens)

E.9 Donat el triangle rectangle de la figura



a) Expressa sin B i cos B en funció dels costats.

b) Utilitzant les expressions de sin B i cos B trobades a l'apartat anterior, demostra que :

$$tg\ B = \frac{\sin B}{\cos B}$$

E.10 Si d'un angle B sabem que sin B = 0,6 , troba cos B i tg B.

E.11 L'exercici anterior l'has resolt, segurament, seguint un dels tres mètodes següents:

a) Plantejant un sistema d'equacions amb incògnites cos B i tg B, a partir de les relacions obtingudes als exercicis anteriors.

b) Imaginant un triangle rectangle on la relació entre el catet oposat i la hipotenusa fos de 0,6 (per exemple de mesures 6 i 10, o bé 3 i 5 etc.). A partir d'aquest triangle es pot trobar l'altre catet mitjançant el T. de Pitàgores i les raons trigonomètriques buscades.

c) Utilitzant la calculadora, primer per trobar l'angle B i després per calcular les raons que us demanen.

E.12 Digues de quina manera has resolt l'exercici E.10 i torna'l a fer pels altres dos mètodes que no has utilitzat.

E.13

a) Si cos B = $\frac{3}{5}$ troba sin B i tg B

b) Si tg B = 3 troba sin B i cos B.

c) Si tg B = $\frac{5}{12}$ troba sin B i cos B.

E.14 Punt cec i conducció temerària

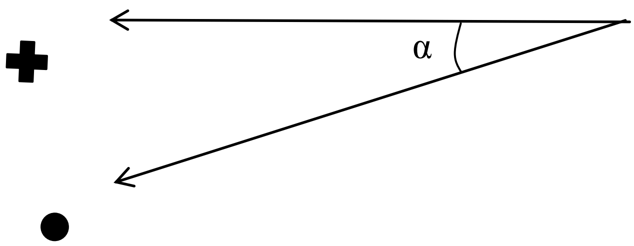
Al segle XVII el físic francès Edme Mariotte va descobrir l'existència del punt cec, avui dia molts conductors, encara desconeixen l'existència d'aquest punt i confien massa en els seus sentits. No aturar-se en un STOP i confiar d'una ràpida ullada pot produir una col·lisió d'aquelles en que es diu "no ho entenc, et juro que he mirat però no l'he vist".

a) Posa el full a uns 40 cm aproximadament de la cara i tanca l'ull dret. Mira fixament a la creu i apropa el full a la cara lentament. Què observes?

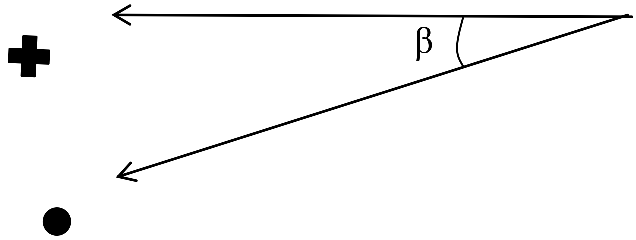
b) Repeteix l'experiment tancant l'ull esquerre i mirant el punt.

c) Anem a calcular quin és l'angle mort. Repetiu l'experiment posant el punt i la creu a la pissarra amb una separació d'un metre.

Un alumne de la classe es posarà al davant de la creu i s'apropara à la pissarra fins que deixi de veure el punt. Cal que mesureu la distància de l'ull a la pissarra just en el moment en que deixa de veure el punt. Calculeu l'angle entre l'ull i la creu i l'ull i el punt

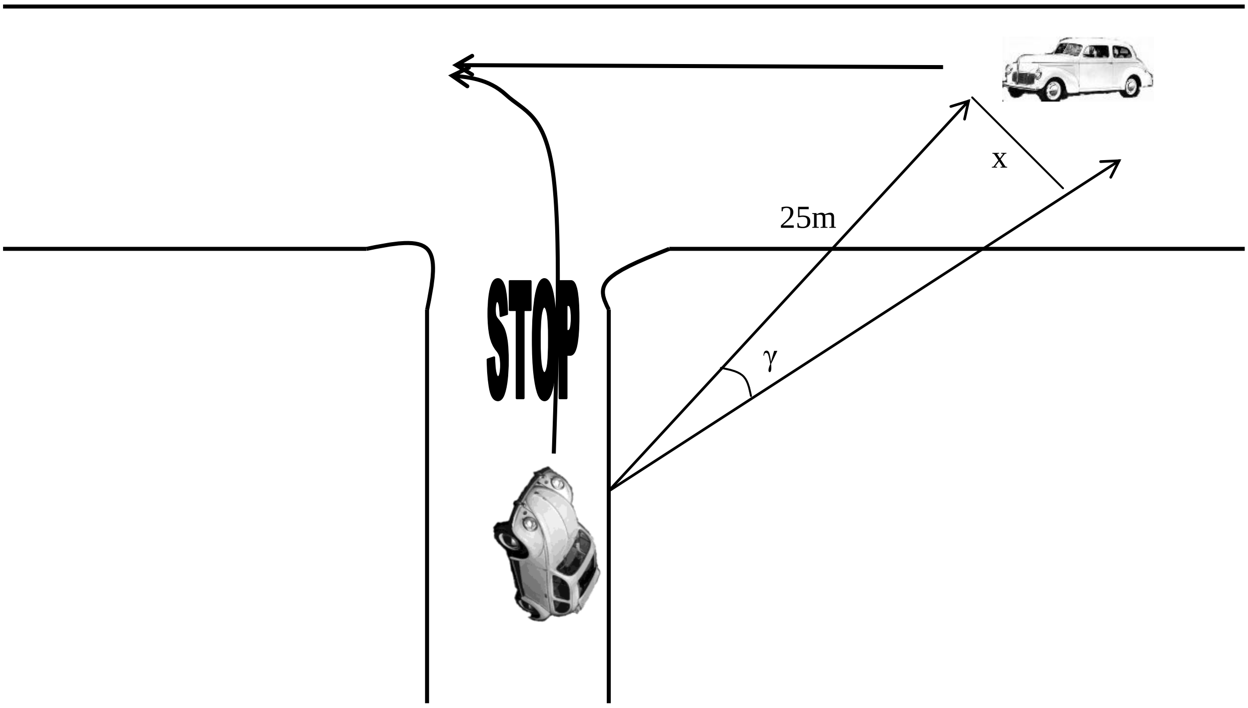


d) El mateix alumne s'ha d'avançar poc a poc fins que torni a veure el punt. Mesureu la distància de l'ull a la creu i torneu a calcular l'angle



e) Resteu els dos angles i tindreu l'angle mort: $\gamma = \beta - \alpha$

f) Imaginem que un vehicle decideix no fer un stop i amb una ràpida ullada surt a tota velocitat girant cap a l'esquerra. A 25 metres hi ha un vehicle que circula a gran velocitat. Calcula l'amplada, en perpendicular, x que queda en visió cega dins l'angle mort $\gamma = \beta - \alpha$.



g) És possible tenir el convenciment d'haver mirat i no haver vist un vehicle si ens saltem un STOP fent una incorporació ràpida?

F. Exercicis complementaris

F.1 Dues persones que caminen a tres quilòmetres per hora surten al mateix temps de la cruïlla de dos camins rectes, que formen entre sí un angle de 15º. Totes dues van en el mateix sentit. A quina distància es troben l'una de l'altra al cap de dues hores?

F.2 Les puntes dels braços d'un compàs es troben a 8 cm de distància i cada braç té 14 cm. Calcula l'angle que formen els braços del compàs.

L'angle que forma la visual al punt amb el pla horitzontal que passa per l'ull de l'observador s'anomena <u>angle d'elevació</u> si el punt està per sobre d'aquest pla i <u>angle de depressió</u> si hi està per sota.

F.3 Des d'un punt concret de terra es veu el punt més alt d'una torre formant un angle de 30º amb l'horitzontal. Si ens acostem 75 m al peu de la torre, aquest angle és de 60º. Calcula l'altura de la torre.

F.4 En un punt de la calçada s'ha fixat una escala de bombers de 10 m de longitud. Si l'escala es recolza sobre una de les façanes forma un angle amb el terra de 45º, i si es recolza sobre l'altra, l'angle és de 30º. Calcula l'amplada del carrer. Quina altura s'assoleix amb aquesta escala sobre cada una de les façanes?

F.5 El costat desigual d'un triangle isòsceles mesura 8 cm i l'angle oposat, 24º. Calcula el perímetre i l'àrea d'aquest triangle.

F.6 Calcula l'àrea d'un triangle isòsceles si els costats iguals mesuren 8 cm cadascun i formen un angle de 110,42º.

F.7 Les diagonals d'un rombe mesuren 66 cm i 8 cm. Calcula el seu perímetre i la mesura dels seus angles.

F.8 Calcula l'àrea dels polígons següents:

a) Un hexàgon regular de 5 cm de costat.

b) Un octàgon regular inscrit en una circumferència de 4 cm de radi.

F.9 Un quadrimotor sobrevola una pista d'aterratge arrossegant un planador. Si tots dos estan units per un cable que forma un angle de 30º amb la horitzontal i la força que actua sobre el planador és de 10 000 N, esbrina el valor de la component horitzontal d'aquesta força.

F.10 Un submarí de la classe Typhoon que navega en direcció Nord localitza en la direcció Oest i a la mateixa profunditat dos submergibles de la classe Alfa separats per una distància de 10 km. Mitja hora després, el seu sonar situa un dels submarins al Sud-oest(SO) i l'altre al Sud- sud- oest (SSO). Esbrina la velocitat del submarí, si sabem que els submergibles no han canviat de posició.

F.11 Un F-14 Tomcat sobrevola les costes de Califòrnia amb direcció Nord quan de sobte es veu immers en una turbulència que es desplaça cap a l'Est a una velocitat de 120 km/h. Si el reactor desenvolupa una velocitat de 1200 km/h, calcula quina és la direcció del seu vol, es a dir, l'angle que forma la seva trajectòria amb la direcció Est.

F.12 L'angle d'elevació del punt més alt d'un obelisc, observant des d'un punt del terra situat a 42 m del peu de l'obelisc és de 30º. Calcula l'altura de l'obelisc.

F.13 Dos radars, A i B, disten entre ells 15 km i detecten un avió, que és en el mateix pla vertical que ells, sota angles de 42º i 56º. Calcula l'altura a què vola l'avió i la distància de l'avió a cadascun dels radars.

F.14 Un globus està subjectat al terra per un cable de 120 m de llargada, que forma amb el terra horitzontal un angle de 37º. A quina altura es troba el globus si el cable està tens?

F.15 Des d'un far col·locat a 90 m sobre el nivell de mar, s'observa un vaixell sota un angle de depressió de 35º. Quina distància separa el vaixell del far?

F.16 Un observador situat a la vora d'un riu veu un arbre situat a la riba oposada sota un angle de 60º. Si se n'allunya 20 m, el veu sota un angle de 30º. Calcula l'alçària d'aquest arbre i l'amplària del riu.

F.17 Un observador situat a la vora d'un estany circular veu una estàtua situada a la vora oposada sota un angle de 45º. Si se n'allunya 10 m , la veu sota un angle de 30º. Esbrina l'alçària de l'estàtua i l'àrea que ocupa l'estany.

F.18 Des de la torre d'un far es veu un vaixell sota un angle de depressió de 25º. Si el vaixell s'apropa 300 m al far, l'angle passa a ser de 39º. Calcula la distància x que separa el vaixell del far en el moment de la segona observació i l'alçària del punt més alt del far.

F.19 Des del punt més alt d'un far de 100 metres d'alçària, s'observa un vaixell que s'acosta al far sota un angle de depressió de 42º. Al cap de 30 min, l'angle ha passat a ser de 56º. Si el vaixell s'acosta a velocitat constant, esbrina el valor d'aquesta velocitat. Expressa el resultat en m/s i en km/h.

F.20 L'angle d'elevació del punt més alt d'una muntanya des d'un punt del terra és de 45º. Si retrocedim 30m, l'angle passa a ser de 40º. Calcula l'alçària de la muntanya.

F.21 Un turista observa un monument des d'una certa distància sota un angle de 70º. Sota quin angle el veurà si se n'allunya quatre vegades aquesta distància?

F.22 Un home situat a l'est d'un monument n'observa el punt més alt sota un angle de 35º. S'allunya 15 m cap al sud i l'angle passa a ser de 30º. Determina l'alçària del monument.

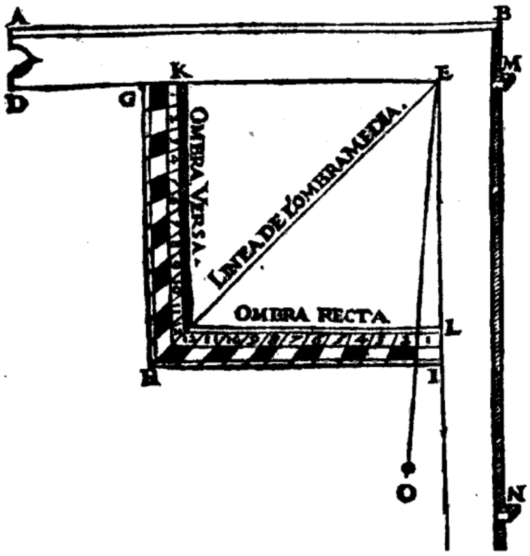
F.23 L'angle d'elevació de l'extrem més alt de l'asta d'una bandera de 3 m d'alçària situada en la part superior d'un edifici, des d'un punt del terra és de 37º i el de la seva base, de 35º. Calcula l'alçària de l'edifici.

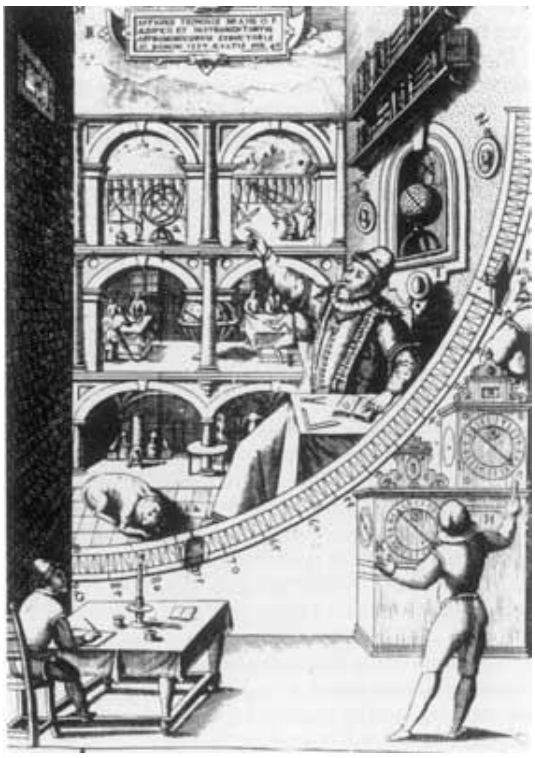
F.24 En un instant determinat, dos observadors, separats una distància de 500 m, veuen una àliga que vola en el mateix pla vertical on ells estan situats, sota angles de 35º i 52º. Esbrina a quina altura vola l'àliga.

ANEX I

EL QUADRANT

El **quadran**t és un dels primers aparells astronòmics inventats després del senzill **gnòmon** (un bastó clavat al terra), un rellotge de sol és, de fet, un quadrant. A Mesopotàmia coneixien ja aquest aparell. Durant la història ha anat patint modificacions i millores vinculades, fonamentalment pels avanços tecnològics. Així doncs els primers quadrants construïts eren de pedra o fusta. En arribar l'Edat Medieval al voltant de l'any 1000 el món àrab volia millorar la precisió d'aquests aparells, perquè hi va haver un gran apogeu de l'astrologia i es van començar a construir quadrants grans, amb la qual cosa es podien fer les graduacions amb molta més precisió.

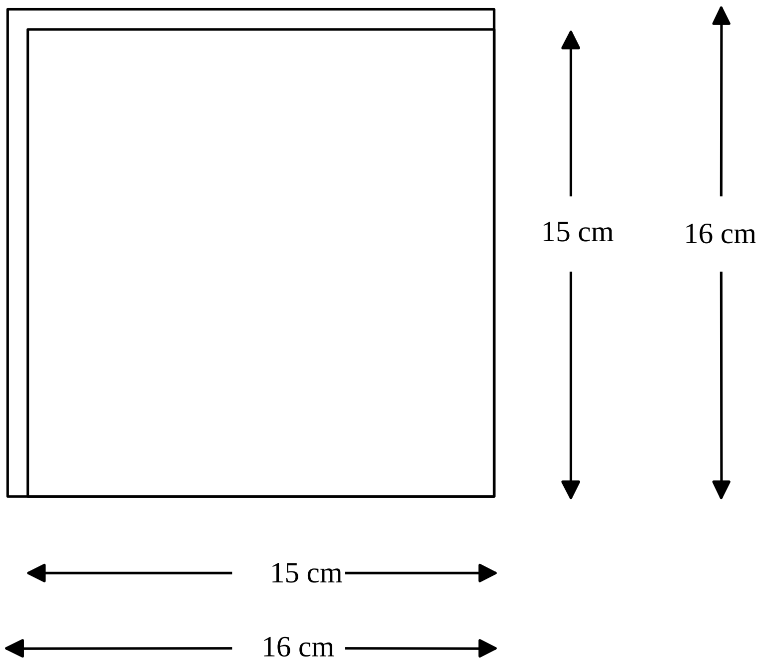




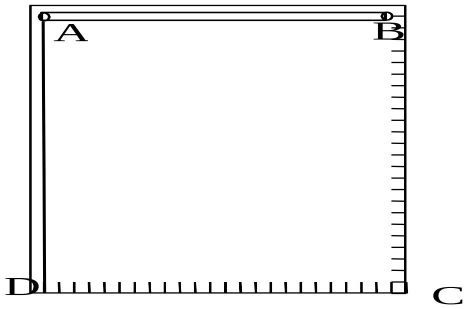
L'ús del metall i la millora en aquest art van permetre grans avanços en la construcció de quadrants pel que fa a grandària i perfecció. A la imatge del costat podem observar el quadrant gegant del millor observatori astronòmic sense telescopi de la historia, l'observatori d'en **Tycho Brahe** del voltant de l'any 1600.

CONSTRUCCIÓ DEL QUADRANT

En un quadrat de cartró de 16 cm de costat dibuixa un quadrat de 15 cm de costat:



A continuació gradua amb centímetres els 15 centímetres que han quedat representats a la dreta i a sota el dibuix (pots enganxar la fotocòpia d'un regle). Gradua el costat DC començant pel punt D i posant el "15" totalment a la vora del punt C. El costat BC caldrà graduar-lo començant pel punt B i posant també el "15" a la vora del punt C



Del punt A al B enganxa una canyeta (de les de xuclar refresc) que et serviran com a *punts de mira* per dirigir la visual.
Finalment lliga una plomada al punt A. La longitud de la corda ha de ser, almenys, 25 cm.
Acabes de construir un **quadrant.**

ERRORS MÉS COMUNS EN LA CONSTRUCCIÓ DEL QUADRANT.

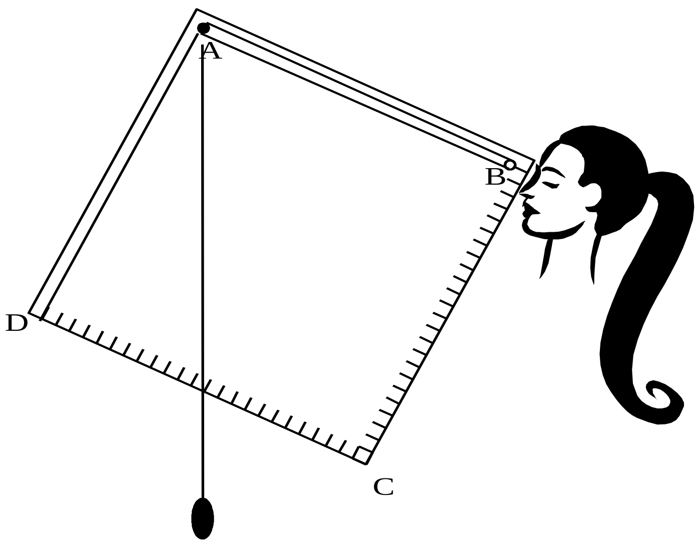
➢Cal enganxar bé la fotocòpia del regle a la fusta de manera que els petits segments que determinen els mil·límetres estiguin just a la vora de la fusta.

➢Per graduar la fusta cal començar pel punt C on aniran els valors 25 cm tocant a la vora (totalment arran de la vora). Això obliga a graduar la cara CD del quadrant **al contrari** de com està graduat normalment un regle. Si utilitzes la fotocòpia d'un regle caldrà esborrar els números i tornar a escriure la graduació.

➢La canyeta ha d’estar alineada amb els valors zero de les vores graduades

COM S'UTILITZA L'APARELL?:

Cal mirar per la canyeta alineant la visual amb l'objecte a mesurar. En aquest cas movem l'aparell i deixem que la plomada ens indiqui els valors a mesurar sobre la graduació.



En aquest cas també tindrem quatre possibilitats dues per mesurar cap a dalt i dues per mesurar cap avall. Investiga i descriu tu mateix els quatre casos.

L’ESCALA DE SEGURETAT

Una arquitecta ha de dissenyar una escala de seguretat per fora de l’edifici que, des de la nostra finestra de la classe vagi fins el terra. Entra a la nostra classe i ens demana si sabem quina alçada hi ha entre la finestra i el terra i nosaltres li contestem que no es preocupi que ho calcularem a classe de matemàtiques. Mesurem doncs la distància entre la finestra de la classe i el terra:

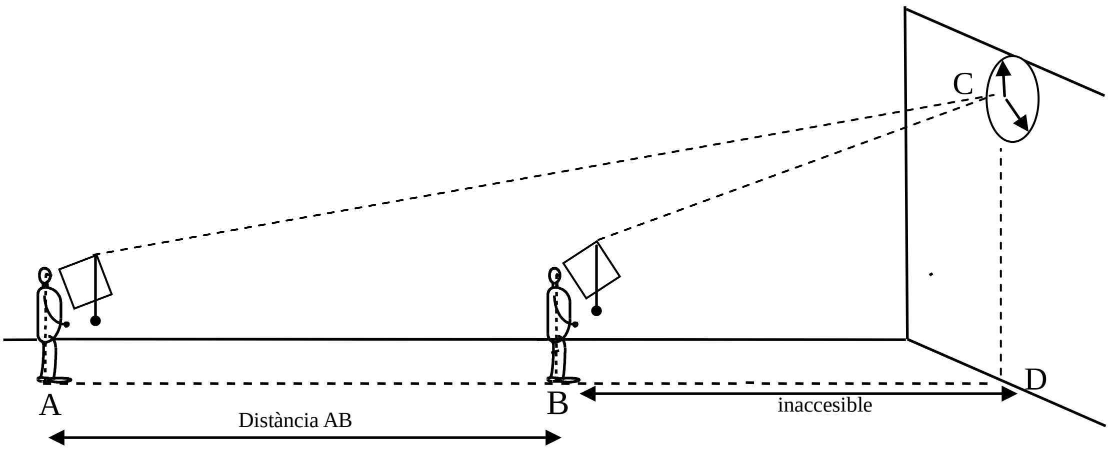
- Des del pati busquem un lloc (anomenat **A)** des del que es vegi bé la finestra i mesurem la distància d’aquest lloc “**A”** a la paret just a sota de la finestra.
- Des del punt **A** mirem la finestra per la canyeta del nostre quadrant i apuntem on senyala el cordill. (no val utilitzar les dades del company. Cadascú de vosaltres ha de mesurar amb el vostre aparell)
- Dibuixem en un paper el triangle que ens ha sortit al quadrant.
- El dibuix anterior és un dibuix a escala de la realitat. Analitzem quina és l’escala amb la que està fet el dibuix.
- Utilitzant l’escala calculem l’alçada que ens demanen.

EL RELLOTGE

Imagineu que volem arreglar el rellotge que compartim amb els nostres amics els del IES Manel Raspall i per a poder arreglar-lo hem de poder accedir al rellotge per la part de fora, necessitarem llogar una escala o una bastida i necessitem saber amb precisió l’alçada a la que està el rellotge del terra.

És clar que la biblioteca tan maca que tenim ens impedeix mesurar la distància d’un punt del pati a la paret just a sota del rellotge, per tant caldrà buscar una estratègia més intel·ligent per a poder resoldre el problema:

- Buscarem dos llocs **A** i B des d’on es vegi bé el rellotge i mesurarem la distància entre aquests dos punts AB.
- Mirarem el rellotge per la canyeta del quadrant des dels dos punts i apuntarem el que mesura.

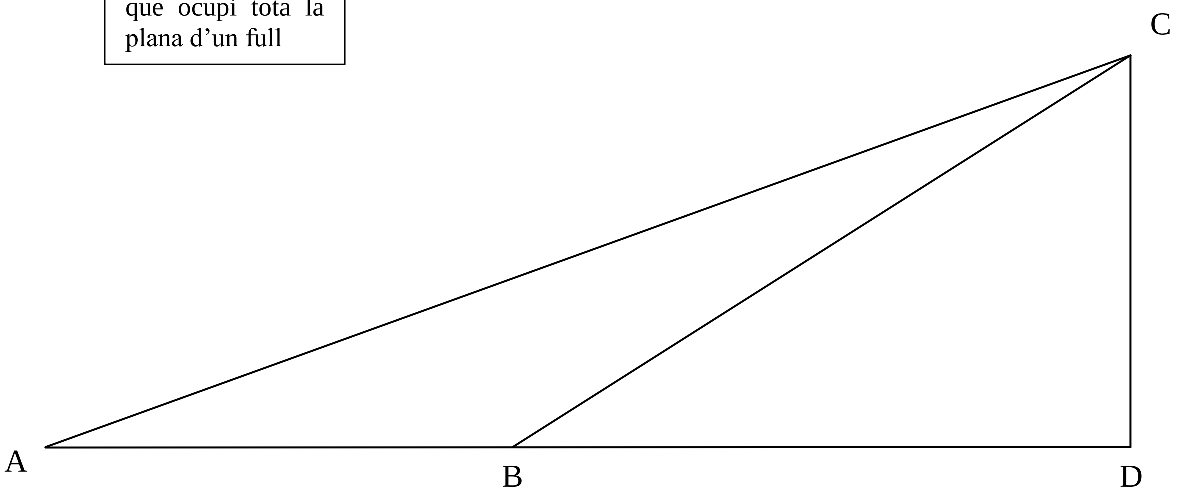


- Farem un dibuix a escala de la realitat utilitzant les dades obtingudes:

○Començarem dibuixant el punt A.
○A la distància AB dibuixarem el punt B.
○Des d’A i des de B dibuixarem els angles mesurats amb l’aparell.
○Allargarem les dues línies anteriors fins que es trobin en un punt. Aquest punt és el punt C.

○Acabem de dibuixar el triangle dibuixant el punt D a sota del C

Cal fer un dibuix que ocupi tota la plana d'un full



•Ara podem mesurar l'alçada del rellotge al dibuix.
•Per acabar farem el canvi d'escala.

Trigonometria

Objectius

L'alumne/a en acabar el tema ha de ser capaç de:

- **Resoldre gràficament un triangle qualsevol.**
- **Resoldre gràficament situacions reals que es puguin representar a escala per un triangle.**
- **Calcular gràficament el valor de les raons trigonomètriques d'un angle agut considerat part d'un triangle rectangle.**
- **Aplicar aquest coneixements a situacions reals.**
- **Dibuixar un angle formant part d'un triangle rectangle, coneguda una de les seves raons trigonomètriques.**
- **Conèixer i utilitzar les raons trigonomètriques per resoldre triangles sense dibuix a escala.**
- **Conèixer i aplicar les fórmules fonamentals de trigonometria.**
- **Calcular distàncies utilitzant aparells de mesura indirecta**
- **Utilitzar correctament la calculadora.**