

PROBLEMES RESOLTS D'ALGEBRA. EQUACIONS I INEQUACIONS

1.- Calcula el valor de “k” per a que el polinomi $P(x)=x^4+kx^2-4x+10$ sigui divisible entre $x-3$.

2.- Per a quin valor de “k” el polinomi del problema (1) al dividir-lo entre $x+2$ fa que el residu sigui 7.

3.- Troba la descomposició factorial de $Q(x)=x^4-6x^3+11x^2-6x$

4.- Resol l'equació $x=2+\sqrt{3x-6}$

5.- Resol l'equació $\frac{2x}{x-1}=\frac{3}{x}+5$

6.- Resol el sistema d'equacions
$$\begin{cases} \sqrt{x}+y=7 \\ \frac{x+1}{y}=1 \end{cases}$$

7.- Resol la inequació $(2x-3)^2 < 8x$

8.- Resol el sistema d'inequacions $\frac{x^2-9}{x+2} > 0$

9.- Calcula i simplifica $1+\frac{1-x}{1+x}:\frac{2x}{1-x^2}$

10.- Resoldre el sistema d'equacions
$$\begin{cases} x-2y-z=-6 \\ 2x+y+3z=13 \\ -3x+y-z=-4 \end{cases}$$

Solució (1):

Segons el teorema del residu per a que $P(x)$ sigui divisible entre $x-3$ s'ha de complir que $P(3)=0$.

Substituint la indeterminada "x" per 3 ens queda

$$3^4 + k \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 + 10 = 9k + 79 = 0 \Rightarrow k = -\frac{79}{9}$$

Solució (2):

Segons el teorema del residu s'ha de complir $P(-2)=7$

Substituint la indeterminada "x" per -2 ens queda

$$(-2)^4 + k(-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 10 = 7 \Rightarrow 4k + 34 = 7 \Rightarrow k = -\frac{27}{4}$$

Solució (3):

Observem que primer cal treure factor comú $Q(x) = x(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)$

Com que el polinomi és mònic cal buscar els divisors del terme independent:

Els divisors del 6 són: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

Ara cal buscar algun d'aquests valors que facin el "0" el valor numèric

Veiem que $Q(1)=0$ per tant $Q(x)$ és divisible entre $x-1$

Dividim per Ruffini

	1	-6	11	-6
1		1	-5	6
	1	-5	6	0

Per tant $Q(x) = x(x-1)(x^2 - 5x + 6)$

El factor de segon grau el podem descompondre solucionant l'equació de segon grau, obtenint per respostes 2 i 3.

Resumint $Q(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$

Solució (4)

Es tracta d'una equació irracional. Cal deixar l'arrel sola en un dels costats de l'equació.

$$x - 2 = \sqrt{3x - 6} \Rightarrow (x - 2)^2 = (\sqrt{3x - 6})^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 3x - 6 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$$

Solucionant l'equació de segon grau obtinguda ens queda $x = 5$ i $x = 2$

Cal comprovar les solucions

$x = 5$	$5 - 2 = \sqrt{3 \cdot 5 - 6}$	Certa
$x = 2$	$2 - 2 = \sqrt{3 \cdot 2 - 6}$	Certa

En aquest cas són certes les dues solucions

Solució (5)

$$\frac{2x}{x-2} = \frac{3}{x} + 5 \Rightarrow \frac{2x \cdot x}{x(x-2)} = \frac{3(x-2) + 5x(x-2)}{x(x-2)} \Rightarrow 2x^2 = 3x - 6 + 5x^2 - 10x \Rightarrow$$

$$3x^2 - 7x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 72}}{6} = \frac{7 \pm 11}{6} \Rightarrow x = 3 \text{ i } x = -\frac{2}{3}$$

Solució (6)

$$\begin{cases} \sqrt{x} + y = 7 \\ \frac{x+1}{y} = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{Aïllant la } y \text{ en la segona equació} \Rightarrow y = x + 1$$

Substituint a la primera equació $\sqrt{x} + x + 1 = 7 \Rightarrow \sqrt{x} = 6 - x \Rightarrow x = (6 - x)^2$

$$x = 36 - 12x + x^2 \Rightarrow x^2 - 13x + 36 = 0 \Rightarrow x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} \Rightarrow x = 9 \text{ i } 4$$

Si $x = 9 \Rightarrow y = 10$ segons la primera equació la resposta és falsa

Si $x = 4 \Rightarrow y = 5$ es pot comprovar que compleix les dues equacions. (Correcte)

Solució (7)

$$(2x-3)^2 < 8x \Rightarrow 4x^2 + 9 - 12x < 8x \Rightarrow 4x^2 - 20x + 9 < 0$$

Com és una inequació de segon grau hem de resoldre l'equació i mirar els signes en els intervals.

$$\text{L'equació } 4x^2 - 20x + 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ i } x = \frac{19}{2}$$

Els intervals són $(-\infty, 1/2)$ $(1/2, 19/2)$ $(19/2, \infty)$

Per valorar el signe en cada interval agafem els valors

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 9 \text{ Positiu} \quad x = 1 \Rightarrow f(1) = -7 \text{ Negatiu} \quad x = 10 \Rightarrow f(10) = 209 \text{ Positiu}$$

Es a dir l'interval solució és $I = (1/2, 19/2)$

Solució (8)

$$\frac{x^2 - 9}{x + 2} > 0 \quad \text{Hem de solucionar les dues inequacions simultàniament .}$$

La primera: $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$ Els intervals són $(-\infty, -3)$ $(-3, 3)$ $(3, \infty)$

Estudiant els signes

+ - +

La segona $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ Els intervals són $(-\infty, -2)$ $(-2, \infty)$

Estudiant els signes

- +

Observem que els dos membres de l'inequació tenen el mateix signe en els intervals

$(-3, -2)$ $(3, \infty)$ que són els intervals solució

Solució (9)

$$1 + \frac{1-x}{1+x} : \frac{2x}{1-x^2} \quad \text{Primer cal resoldre el quocient}$$

$$1 + \frac{1-x}{1+x} : \frac{2x}{1-x^2} = 1 + \frac{(1-x)(1-x^2)}{(1+x)2x} \text{ hem de simplificar } = 1 + \frac{(1-x)(1+x)(1-x)}{2x(1+x)} =$$

$$1 + \frac{(1-x)^2}{2x} = \frac{2x + (1-x)^2}{2x} = \frac{2x + 1 + x^2 - 2x}{2x} = \frac{1+x^2}{2x}$$

Solució (10)

$$\begin{cases} x - 2y - z = -6 \\ 2x + y + 3z = 13 \\ -3x + y - z = -4 \end{cases} \Rightarrow I^a + 2III^a \Rightarrow \begin{cases} x - 2y - z = -6 \\ 4x + 2y + 6z = 26 \end{cases} \Rightarrow 5x + 5z = 20$$

$$I^a + 2III^a \Rightarrow \begin{cases} x - 2y - z = -6 \\ -6x + 2y - 2z = -8 \end{cases} \Rightarrow -5x - 3z = -14$$

Solucionem ara el sistema de dues equacions amb dues incògnites

$$\begin{cases} 5x + 5z = 20 \\ -5x - 3z = -14 \end{cases} \Rightarrow 2z = 6 \Rightarrow z = 3$$

$$\text{Substituint } 5x + 15 = 20 \Rightarrow 5x = 5 \Rightarrow x = 1$$

$$\text{Substituint en qualsevol de les equacions inicials } \Rightarrow y = 2$$