PROBLEMES RESOLTS DE LA CIRCUMFERÈNCIA

1.- Calcular el centre i el radi, si és possible, de les circumferències:

i) $x^2 + y^2 - 4x + 8y = 0$

ii) $2x^2 + 2y^2 - 6x + y - 1 = 0$

iii) $x^2 + y^2 + y + 5 = 0$ 2

2.- Troba l'equació de la circumferència que passa pels punts
A(1,7) B(4,8) C(8,0)

3.- Comprovar si el punt P(3,3) pertany a la circumferència de centre C(2,1) i radi $\sqrt{5}$

4.- Trobar els punts de tall de la circumferència anterior amb la recta $x + 2y - 9 = 0$

Solucións:

1.-

i) Hem de completar els quadrats: $(x-2)^2 + (y+4)^2 \pm ....$

La suma dels termes independents és $2^2 + 4^2 = 20$. Com que a l'expressió inicial no hi ha terme independent, voldir que li hem de restar 20, i per tant ens queda:

$$(x-2)^2 + (y+4)^2 - 20 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+4)^2 = 20$$

El centre és C=(2,-4) i el radi $R = \sqrt{20}$

ii) Hem de fer el mateix procés que abans pero primer hem de dividir entre 2

$x^2 + y^2 - 3x + \frac{y}{2} - \frac{1}{2} = 0$ Ara completem els quadrats:

$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 \pm .....$ en aquest cas la suma dels quadrats és $\frac{37}{16}$.

Per obtenir la forma de l'equació li hem de restar $-\frac{37}{16} - \frac{1}{2} = -\frac{45}{16}$

Per tant l'equació queda: $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{45}{16}$

iii) Completant els quadrats:

$(x)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 \pm .....$ el terme independent és $\frac{1}{4}$ per arribar a 5 li hem de fer:

$-\frac{1}{4} + 5 = \frac{19}{4}$ per tant l'equació ens queda

$(x)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{19}{4}$. Això vol dir que no és cap circumferència.

2.- Hem de trobar les mitjatrius de dos dels segments.

i) Mitjatriu de AB. El vector és AB=(3,1) i el perpendicular (-1,3)

El punt mig és $Pm = \left(\frac{5}{2}, \frac{15}{2}\right)$

L'equació de la mitjatriu $\frac{x - \frac{5}{2}}{-1} = \frac{y - \frac{15}{2}}{3} \Rightarrow 3x - \frac{15}{2} = -y + \frac{15}{2} \Rightarrow 3x + y - 15 = 0$

ii) Mitjatriu de BC. El vector és BC=(4,-8) i el perpendicular (8,4)=(2,1)

El punt mig $Pm = (6,4)$

L'equació de la mitjatriu $\frac{x-6}{2}=\frac{y-4}{1}\Leftrightarrow x-6=2y-8\Leftrightarrow x-2y+2=0$

Per trobar el centre hem de fer la intersecció

$$\begin{cases}3x+y-15=0\\ x-2y+2=0\end{cases}\Rightarrow .....x=4\quad y=3$$

El radi R serà la distància del centre O(4,3) fins qualsevol punt C(8,0)....R=5

L'equació és per tant $(x-4)^2+(y-3)^2=25$

3.- L'equació de l'esmentada circumferència és $(x-2)^2+(y-1)^2=5$

Per veure si un punt pertany a la circumferència hem de substituir les coordenades del punt en la "x" i la "y" de l'equació i veure si la compleix:

En el nostre cas $(3-2)^2+(3-1)^2=1+4=5$ per tant si que la compleix.

4.- Hem de resoldre el sistema format per l'equació de la circumferència i la recta

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y-1)^2=5\\ x+2y-9=0\end{cases}$$ aïllant la "x" $x=9-2y$

Substituïm a la primera

$$(9-2y-2)^2+(y-1)^2=5\Rightarrow(7-2y)^2+(y-1)^2=5$$
$$49+4y^2-28y+y^2+1-2y=5\Rightarrow 5y^2-30y+45=0$$
$$x=\frac{30\pm\sqrt{900-900}}{10}=3$$

Com que només té una solució la recta és tangent a la circumferència en el punt P(3,3)