

LÍMITS, CONTINUÏTAT, ASSÍMPTOTES

1.- Estudar la continuïtat de la funció $f(x) = \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 4x + 3}$

Solucions:

1.- Les possibles discontinuïtats es troben en els punts on s'anul·la el denominador.

Solucionem l'equació $x^2 - 4x + 3 = 0 \dots\dots x = 1$ i $x = 3$. Per veure quin tipus de discontinuïtat hem de calcular els límits

i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 4x + 3} = \frac{0}{0}$ Indeterminació. Per calcular-la hem de descompondre els polinomis per Ruffini. Fent-ho ens queda

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+5}{x-3} = \frac{6}{-2} = -3$$

Per tant en $x=1$ hi ha una discontinuïtat evitable.

ii) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 4x + 3} = \frac{8}{0} \rightarrow \infty$ Per tant és una discontinuïtat asimptòtica

2.- Calcular el límit $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-1} \right)^{3x-2}$

Solució:

Calculant directament el límit ens queda la indeterminació 1^∞

Per treure la indeterminació hem d'aplicar la fórmula:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-1} \right)^{3x-2} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} (3x-2) \cdot \left(\frac{2x+3}{2x-1} - 1 \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} (3x-2) \cdot \left(\frac{4}{2x-1} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x-8}{2x-1}} = e^6$$

3.- Calcular les asímptotes de la funció $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x - 3}$

Solució:

Horizontals:

$$y=k=\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{x - 3} = (\text{Com el grau del numerador és més gran}) \rightarrow \infty \text{ (No n'hi ha)}$$

Verticals: El denominador s'anul·la per a $x=3$ i $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \infty$ per tant $x=3$ és

una asímptota vertical.

Obliqües: $y = mx + b$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2 + 1}{x - 3}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 3x} = 2$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{x - 3} - 2x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1 - 2x^2 + 6x}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x + 1}{x - 3} = 6$$

Per tant l'asímtota obliqua és $y = 2x + 6$

4.- Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 1}{3x + 2} \right)^{2x+1}$

Solució

$$\left(\frac{2}{3} \right)^{\infty} = (\text{Una potència de base menor que 1 i elevada a } \infty) \rightarrow 0$$