

LA DIVINA PROPORCIÓN Y EL PENTAGRAMA PITAGÓRICO

Pitágoras como profeta religioso y como matemático ha tenido una influencia inconmensurable, y los dos campos de su actividad no distan tanto el uno de otro como puede parecer a una mente moderna.

B.RUSSELL. Historia de la Filosofía Occidental, Austral, Madrid, 1995, Vol.1, Libro 1, p.72.

Mefistófeles: – *Hay un pequeño obstáculo que me impide salir de aquí, y es esa estrellita de cinco picos [pentagrama pitagórico] que se atraviesa en el umbral. ...*

Fausto: – *¿Te preocupa el pentagrama? ...*

W.GOETHE. Fausto. Escena tercera de la primera parte (diálogo entre Fausto y Mefistófeles). Aguilar. Madrid, 1968. p.59.

Así como Dios confiere el Ser a la virtud celeste, llamada quintaesencia, y mediante ella a los otros cuerpos simples –es decir, a los cuatro elementos: tierra, agua, aire y fuego –que tienen su forma propia: cubo, icosaedro, octaedro, tetraedro [...], nuestra santa proporción confiere el ser formal, según el antiguo Platón en su Timeo, al cielo mismo, atribuyéndole la figura del dodecaedro.

LUCA PACIOLI. La Divina Proporción. Akal. Madrid, 1991. Cap. V, p.42.

La Geometría tiene dos grandes tesoros, uno es el Teorema de Pitágoras y el otro es la Sección Áurea; si el primero es una joya de oro, el segundo viene a ser una piedra preciosa.

J.KEPLER. *Mysterium Cosmographicum*. Tubinga, 1596.

La Sección áurea o *Divina Proporción* es uno de los capítulos más curiosos de la Geometría pitagórica, donde se entremezclan los aspectos propiamente matemáticos con otros de naturaleza mística y esotérica. Como tópico pitagórico aparece a lo largo de *Los Elementos* de Euclides en los Libros II, IV, VI y XIII. En los Libros II y VI aparece la cuestión en relación con la propia construcción geométrica de la «*división de un segmento en media y extrema razón*», que así llamaban los griegos a la subdivisión de un segmento en forma áurea, en el ámbito de la *Aplicación de las Áreas* del Álgebra Geométrica, es decir, la resolución geométrica de ecuaciones. En el Libro IV, la sección áurea se aplica a la construcción del *triángulo áureo* vinculado a la inscripción del pentágono regular en un círculo. En el Libro XIII, tras el estudio del propio *pentagrama místico pitagórico*, se demuestran bellísimas propiedades que vinculan de forma áurea los lados de polígonos inscritos en un mismo círculo.

Además de sus hermosas propiedades geométricas, la *Divina Proporción* tiene mucha relación con los *números de Fibonacci*, de donde surge su valor en la explicación de la belleza en la naturaleza. Pero donde su aplicación es omnipresente es en la creación artística. Allí donde haya una especial intensificación de la belleza y la armonía de las formas, se encontrará la *Divina Proporción*, empezando por la naturaleza, de donde muchos artistas extraen su inspiración. Por todo lo dicho, la *Divina Proporción* ha fascinado, cultura tras cultura, y ha propiciado importantes especulaciones filosóficas, teológicas, científicas, estéticas e incluso mágicas, desde que la humanidad empieza a reflexionar sobre las formas geométricas que conforman el universo, siendo el Pitagorismo el sistema de pensamiento que empieza a dar consistencia racional a toda esta doctrina, hasta llegar a Gaudí y Dalí, en nuestro tiempo.

La Sección áurea o *Divina Proporción*.

La Sección áurea en *Los Elementos* de Euclides.

El número áureo y los números de Fibonacci.

El rectángulo áureo y las espirales áureas.

La Divina Proporción en la Belleza y el Arte.

La obra de Luca Pacioli *La Divina Proporción*.

El Pentagrama místico pitagórico. Geometría y Mística.

El triángulo áureo.

El simbolismo del Pentagrama místico pitagórico.

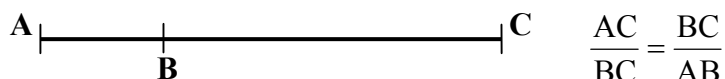
Bibliografía.

La Sección áurea o Divina Proporción

La *Sección áurea* o *Divina Proporción* es uno de los tópicos de la Geometría pitagórica más fascinantes por la decisiva influencia que ha tenido sobre el Arte, la Mística, la Biología e incluso la Magia.

Aunque Euclides realiza una construcción equivalente a la *Sección Áurea* en la Proposición II.11. de *Los Elementos*, introduce la noción en la Definición VI.3:

«Se dice que un segmento está dividido en media y extrema razón cuando el segmento total es a la parte mayor como la parte mayor es a la menor».



Esta subdivisión de un segmento era tan familiar y habitual para los antiguos griegos que no sintieron la necesidad de darle un nombre concreto para designarla, se la llamaba «*división de un segmento en media y extrema razón*» o de forma sucinta y lacónica «*la sección*». Desde los tiempos de Luca Pacioli se la denomina «*la Divina Proporción*» y Leonardo da Vinci y Kepler (para quien era «*una piedra preciosa de la Geometría*») la llaman «*la Sección Áurea*».

Tomando $AB=1$, $BC=x$, la razón áurea se escribirá: $(x+1)/x = x/1$. Al número x se le llama el «*número de oro*». Tradicionalmente se le representa por la letra griega ϕ , que es la inicial del nombre del artista griego Fidias, escultor y arquitecto del Partenón. Así pues, ϕ es la solución de la ecuación: $\phi^2 - \phi - 1 = 0$, cuya raíz positiva es:

$$\phi = (1 + \sqrt{5})/2 = 1,61803399...$$

La otra raíz es:

$$\phi' = (1 - \sqrt{5})/2 = -0,61803399...$$

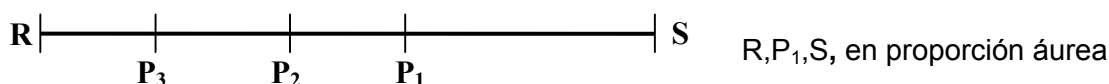
Ambas verifican al ser soluciones de una ecuación cuadrática:

$$\phi + \phi' = 1$$

$$\phi \cdot \phi' = -1$$

Una de las propiedades más curiosas de la *sección áurea* es que es «*auto-reproductiva*» (*Euclides* XIII.5), lo cual no es más que una ratificación de su relación con la sucesión de Fibonacci, según se verá más adelante.

Sea un segmento RS y un punto P_1 que lo divide de forma áurea, siendo RP_1 el segmento más largo. Ahora si sobre RP_1 tomamos el punto P_2 de forma que $RP_2 = P_1S$, entonces el segmento RP_1 queda subdividido a su vez de forma áurea por el punto P_2 . Si tomamos un nuevo punto P_3 sobre RP_2 de forma que $RP_3 = P_1P_2$, entonces el segmento RP_2 queda dividido por P_3 de forma áurea. El procedimiento se puede iterar indefinidamente, obteniéndose un segmento RP_n , cada vez más pequeño, dividido de forma áurea por un punto P_{n+1} .



En efecto, al estar R, P1, S, en proporción áurea:

$$\frac{RS}{RP_1} = \frac{RP_1}{P_1S} = \frac{RP_1}{RP_2} = [\text{Euclides 5.19}] = \frac{RS - RP_1}{RP_1 - RP_2} = \frac{P_1S}{P_2P_1} = \frac{RP_2}{P_2P_1}$$

Así pues, $\frac{RP_1}{RP_2} = \frac{RP_2}{P_2P_1}$, es decir, R, P2, P1, están en proporción áurea.

La Sección áurea en *Los Elementos* de Euclides

Como tema importante de la Geometría pitagórica, la *Sección áurea* aparece de forma notable en *Los Elementos* de Euclides en los Libros II, IV, VI y XIII.

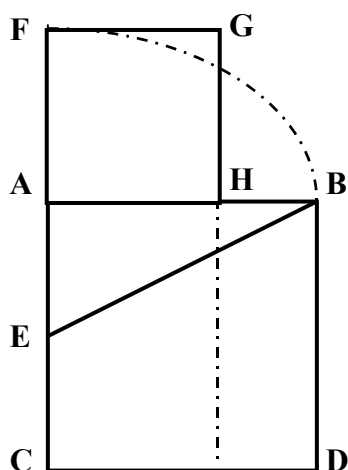
En orden a acercarnos a la forma pitagórica original de la resolución de ecuaciones (lo que se llama, según el término acuñado por Zheuthen, el «*Álgebra Geométrica*» de los griegos, que nutre el Libro II de *Los Elementos* de Euclides, de origen totalmente pitagórico), veamos la construcción geométrica de la *Sección Áurea*.

La construcción de la sección áurea requiere la resolución de una ecuación cuadrática. En efecto, sea el segmento $AB=a$, dividido por el punto H de forma áurea, siendo $AH=x$ el segmento mayor de la división; la propiedad áurea se escribe:

$a/x = x/(a-x)$, de donde se obtiene la ecuación: $x^2=a^2-ax$, cuya resolución algebraica Pitágoras debió aprender de los babilonios. No obstante es plausible que Pitágoras la resolviera por un procedimiento análogo al que encontramos en *Los Elementos* de Euclides II.11 y VI.30 :

Euclides II.11: «Dividir una recta en dos partes de modo que el rectángulo comprendido por la recta entera y por una de sus partes sea equivalente al cuadrado de la otra parte».

Euclides VI.30. «Dividir un segmento en media y extrema razón».



Para dividir un segmento AB en media y extrema razón, Euclides construye en la Proposición II.11 el cuadrado ABCD de lado AB, divide el segmento AC en dos partes iguales mediante el punto E, traza el segmento EB y extiende el segmento CEA hasta F de manera que $EB=EF$. Por último obtiene el punto H buscado completando el cuadrado AFGH. Se comprueba que H resuelve el problema mostrando fácilmente que $AB/AH = AH/HB$.

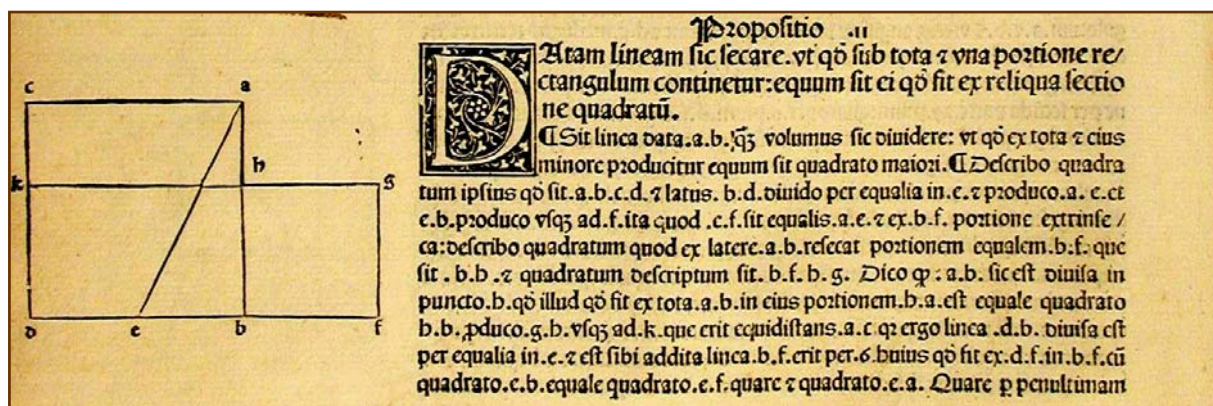
En efecto: hay que probar que $AH^2=AB \cdot HB$, equivalente a que el cuadrado de lado AH sea igual en área al rectángulo de lados BD y HB, equivalente a su vez a que el rectángulo de lados FC y FG sea equivalente al cuadrado de lado AB.

Ahora bien según *Euclides I.47 (Teorema de Pitágoras)*, se tiene: $EB^2 = AE^2 + AB^2$. Además, se verifica:

$$EB^2 = EF^2 = (AF+AE)^2 = AF^2 + AE^2 + 2AE \cdot AF = AF^2 + AE^2 + AC \cdot AH = AE^2 + FC \cdot FG.$$

Simplificando AE^2 de ambas expresiones resulta: $AB^2 = FC \cdot FG$, lo que había que probar.

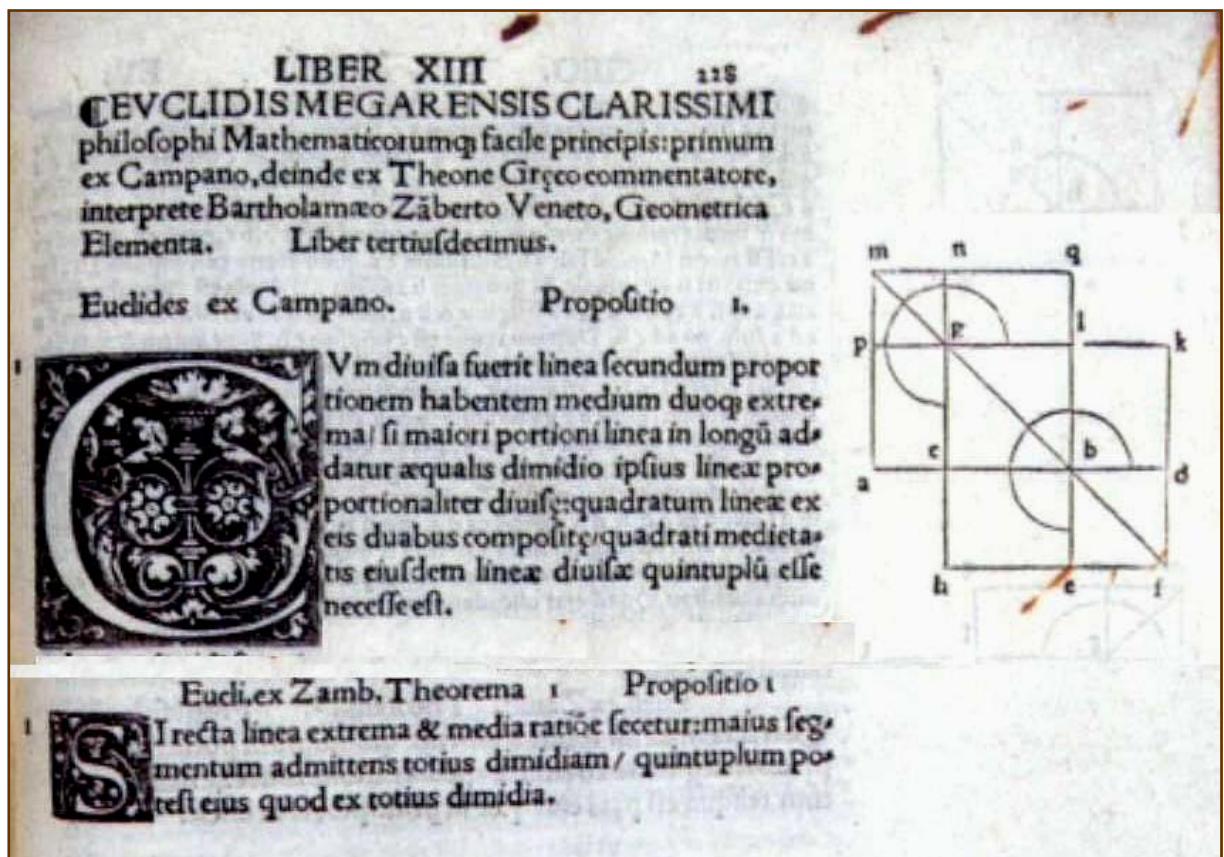
LA DIVINA PROPORCIÓN EN LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES



La Proposición II.11 de *Los Elementos* de Euclides en la edición de E. Ratdolt (Venecia, 1482). Este ejemplar procede de la Biblioteca Monástica de Yuso del Monasterio de San Millán de la Cogolla.

Esta proposición euclídea contiene el fundamento geométrico de la *Sección Áurea* mediante la solución geométrica de la ecuación cuadrática $ax+x^2=a^2$ por el método de *Aplicación de las Áreas*.

LA DIVINA PROPORCIÓN EN LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES



La Proposición XIII.1 sobre propiedades de la *división de un segmento en media y extrema razón* en la edición de Zamberti de *Los Elementos* de Euclides de 1505.

Previamente al estudio de los poliedros, Euclides estudia en la seis primeras proposiciones del Libro XIII nuevas propiedades de la división de un segmento en media y extrema razón, que, quizá, hubieran estado mejor ubicadas a continuación de la Proposición II.11, completando la parte de *Álgebra Geométrica* del Libro II. No obstante, estos resultados son una especie de lemas requeridos para pruebas posteriores. Se cree que proceden de Eudoxo, pues Proclo escribe en su *Comentario* que Eudoxo «hizo progresar las cuestiones relativas a la sección a partir de Platón». Se supone que se trata de la *sección áurea*.

Los enunciados de estas proposiciones son los siguientes:

- Proposición XIII.1. Si se divide una recta en media y extrema razón, el cuadrado del segmento mayor junto con el de la mitad de la recta entera es cinco veces el cuadrado de la mitad.
- Proposición XIII.2. Si el cuadrado de una línea recta es cinco veces el de un segmento parte de ella, cuando se divide el doble de este segmento en media y extrema razón, el segmento mayor es la parte que queda de la recta inicial.
- Proposición XIII.3. Si se divide una recta en media y extrema razón, el cuadrado del segmento menor junto con el de la mitad del segmento mayor es cinco veces el cuadrado de la mitad del segmento mayor.
- Proposición XIII.4. Si se divide una recta en media y extrema razón, el cuadrado de la recta entera y el del segmento menor juntos, son el triple del cuadrado del segmento mayor.
- Proposición XIII.5. Si se divide una recta en media y extrema razón, y se le añade otra recta igual al segmento mayor, la recta entera queda dividida en media y extrema razón, y la recta inicial es el segmento mayor.
- Proposición XIII.6. Si una recta expresable [racional] se divide una recta en media y extrema razón, cada uno de los segmentos es la recta sin razón expresable [irracional] llamada apótoma.

El número áureo y los números de Fibonacci

A partir de la relación $\phi^2 - \phi - 1 = 0$ que verifica el *número áureo*, se obtienen las expresiones:

$\phi = \sqrt{1 + \phi}$, $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$, de donde por aplicación reiterada de las mismas obtenemos las siguientes expresiones infinitas para ϕ :

$$\phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}} \quad , \quad \phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

Por otra parte, calculando las sucesivas potencias de ϕ , se obtiene:

$$\phi^0 = 0 + 1 = 1 + 0,$$

$$\phi^1 = 0 + \phi = 1 + (1/\phi),$$

$$\phi^2 = 1 + \phi = 2 + (1/\phi),$$

$$\phi^3 = 1 + 2\phi = 3 + (2/\phi),$$

$$\phi^4 = 2 + 3\phi = 5 + (3/\phi),$$

$$\phi^5 = 3 + 5\phi = 8 + (5/\phi),$$

$$\phi^6 = 5 + 8\phi = 13 + (8/\phi),$$

$$\phi^7 = 8 + 13\phi = 21 + (13/\phi),$$

$$\phi^8 = 13 + 21\phi = 34 + (21/\phi),$$



Busto de Leonardo de Pisa, conocido por Fibonacci, en una estatua de Pisa.

Fibonacci es uno de los matemáticos medievales más importantes. A él se debe la famosa sucesión que lleva su nombre: {1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...}, aplicada al estudio del crecimiento armónico en la naturaleza e íntimamente vinculada a la *Proporción Áurea*.

de donde se advierte la relación entre el *número de oro* y la sucesión de Fibonacci definida mediante $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $n \geq 1$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$.

Ya que $\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}}$, se deduce que el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}}$ es igual al *número de oro* ϕ ,

resultado que expresa la propiedad que publicó en 1753 el matemático escocés R. Simpson en la revista *Philosophical Transactions*:

«La razón de un término y el siguiente, en la sucesión de Fibonacci, se acerca al número de oro, a medida que se avanza en ella.»

El vínculo entre el *número de oro* ϕ y la sucesión de Fibonacci explica, como veremos, la admirable influencia de la *Divina Proporción* en la conformación de la belleza en la naturaleza.

Al investigar las relaciones entre los términos de la sucesión de Fibonacci y el *número de oro*, el matemático Binet descubrió la siguiente relación:

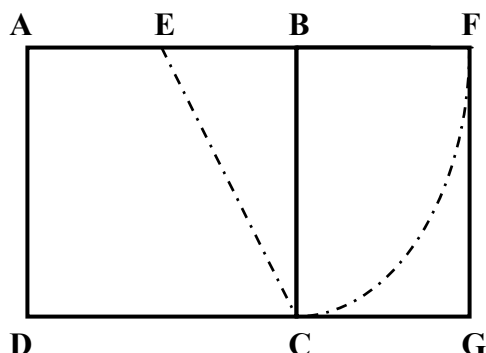
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{1}{\phi^n} + (-1)^{n+1} \phi^n \right].$$

A partir de esta fórmula se obtiene una expresión para el cociente del límite anterior:

$$\frac{F_n}{F_{n+1}} = \phi \frac{1 + (-1)^{n+1} \phi^{2n}}{1 + (-1)^{n+2} \phi^{2n+2}}.$$

El rectángulo áureo y las espirales áureas

Un rectángulo AFGD se llama áureo cuando las dimensiones guardan las proporciones áureas. La Proposición II.11 de Euclides nos permite realizar la construcción de un «rectángulo áureo» a partir de un cuadrado ABCD.



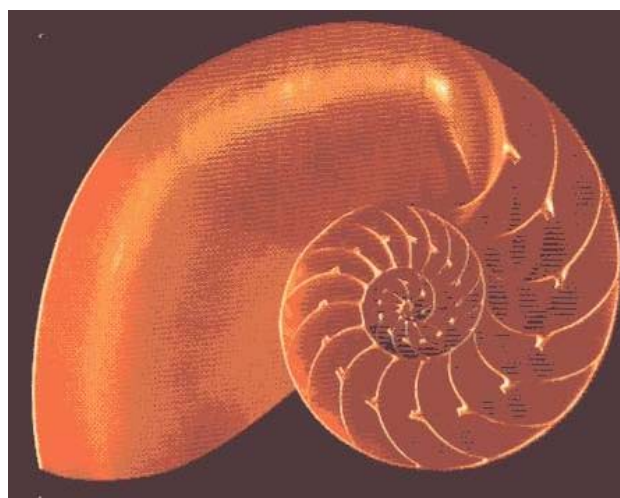
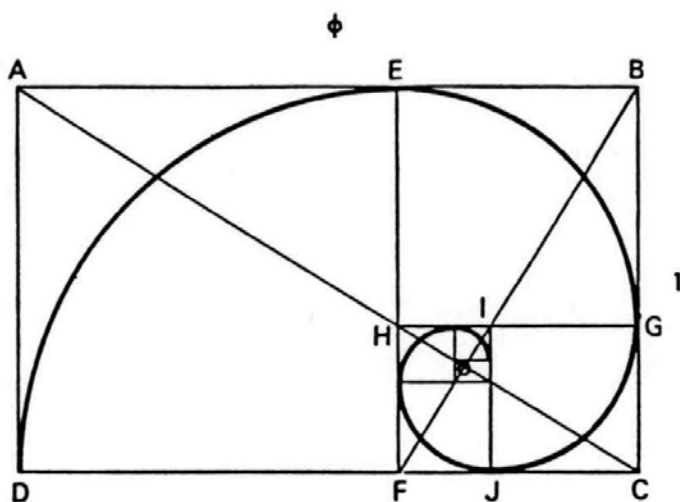
En la construcción $AE=EB$ y $EF=EC$.

Observamos que si $AE=EB=1$, al ser $BC=2$, por el Teorema de Pitágoras $EC=\sqrt{5}$, por tanto $AF=1+\sqrt{5}$. Luego efectivamente los lados del rectángulo AFGD están en proporción áurea:

$$\frac{AF}{AD} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi.$$

La constatación del carácter áureo del rectángulo AFGD $AF/FG=FG/BF$ determina que los rectángulos AFGD y BFGC son semejantes y por tanto éste último también es áureo. Esto muestra el carácter *auto-reproductivo* del rectángulo áureo.

En efecto, si partimos de un rectángulo áureo ABCD, sustrayendo el cuadrado AEFD de lado la dimensión menor AB del rectángulo, resulta que el rectángulo EBCF es áureo. Si ahora de éste sustraemos el cuadrado EBGH, el rectángulo resultante HGCF es áureo. Este proceso se puede reproducir indefinidamente, obteniéndose una sucesión de rectángulos áureos encajados que convergen hacia el polo O de una *espiral logarítmica*.



La *espiral logarítmica* vinculada a los rectángulos áureos gobierna el crecimiento armónico de muchas formas vegetales (flores y frutos) y animales (conchas de moluscos), aquellas en las que la forma se mantiene invariante. Se trata de un crecimiento gnomónico cuyo ejemplo más visualmente representativo es la concha del Nautilus.

La *espiral logarítmica* ha cautivado, por su belleza y propiedades, la atención de matemáticos, artistas y naturalistas. Se le llama *espiral equiangular* (el ángulo de corte del radio vector con la curva es constante, Descartes), *espiral geométrica* (el radio vector crece en progresión geométrica mientras el ángulo polar decrece en progresión aritmética, Halley). J.Bernouilli fascinado por sus encantos la llamó *spira mirabilis* rogando que fuera grabada en su tumba.

La Divina Proporción en la Belleza y el en el Arte

Importantes especulaciones filosóficas, teológicas, naturales y estéticas han surgido en torno a la *Divina Proporción* desde que la humanidad empieza a reflexionar sobre las formas geométricas que conforman el mundo, siendo el pitagorismo quien comienza a dar consistencia racional a toda esta doctrina. La *Sección Áurea* está presente en el arte sacro de Egipto, la India, China y el Islam, domina el arte griego, persiste, aunque oculta, en la Arquitectura gótica de la Edad Media y resurge para su consagración en el Renacimiento. Puede decirse que donde haya una especial intensificación de la belleza y la armonía de las formas, ahí se encontrará la *Divina Proporción*, por ejemplo en muchos aspectos de la naturaleza, de donde muchos artistas extraerán su inspiración.

La *Divina Proporción*, sobre todo en forma de rectángulo áureo, constituye uno de los métodos canónicos de composición para obras de arte más utilizados por toda clase de artistas a lo largo de toda la Historia del Arte. Mencionemos a título de ejemplo algunas obras, que según numerosos estudios, son emblemáticas de la utilización de las proporciones áureas:

- Arquitectura: la gran Pirámide de Keops, el Partenón, la Tumba rupestre de Mira, el templo de la Concordia de Agrigento, El arco de Septimio Severo, la gran muralla china, la Puerta de la muralla de Bagdad, San Pablo de Londres, El Castillo de Windsor, Santa María de las Flores de Florencia, Palacios de la Plaza de la Concordia de París, la fachada de la Universidad de Salamanca, etc.
- Pintura: el Bautismo de Cristo de P. della Francesca, la Primavera de Botticelli, la Santa Cena y la Anunciación de Leonardo, San Miguel abatiendo al demonio y la bella Jardinera de Rafael, La Creación de Miguel Ángel, Los Pastores de la Arcadia de Poussin, las Meninas de Velázquez, Saturno devorando a sus hijos de Goya, el Cristo (*Corpus Hiperbolicus*) y «*Leda atómica*» (el famoso cuadro representando a Gala), ambos de Dalí, etc.

En cuanto a escultura son legión las obras que guardan las proporciones áureas ya que es precisamente en el cuerpo humano donde podemos descubrir el significado físico y metafísico del *número de oro*, tal y como lo expresa el aforismo de Heráclito y de Protágoras: «*El hombre es la medida de todas las cosas*». Numerosos trabajos a caballo entre el Arte y la Anatomía establecen que la *Divina Proporción* interviene en el canon ideal de la belleza humana, en particular en las dimensiones del rostro y de la mano.

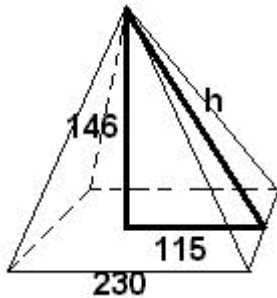
Quizá sea Vitrubio en su obra *De Architectura* quien más explícitamente trata estas cuestiones, en relación con proporciones medias e ideales del cuerpo. Según Vitrubio, los escultores griegos habían estudiado con profundidad las proporciones del cuerpo humano, esculpiendo sus obras según las dimensiones áureas como lo habían hecho los arquitectos en los templos y monumentos. Para Vitrubio mientras los órganos sexuales dividen en dos mitades exactas el cuerpo humano, el ombligo divide al cuerpo de acuerdo con la sección áurea. No obstante, al nacer, el ombligo divide al niño exactamente en dos, y en el curso de la maduración el ombligo se traslada al punto de la división áurea. La descripción que con todo detalle realiza Vitrubio es plasmada por la genialidad artística de Leonardo da Vinci en su diseño más conocido sobre la figura humana: «*El Hombre de Vitrubio*».

La *proporción de oro* es una razón que desde sus orígenes pitagóricos ha fascinado cultura tras cultura. A partir del Renacimiento se convirtió en la proporción utilizada por arquitectos, pintores, escultores, impresores y diseñadores y en nuestra época las múltiples proporciones áureas presentes en el cuerpo humano influyeron sobre el arquitecto Le Corbusier en muchos de sus proyectos. Duckworth encontró en Princeton en 1940 que la *Divina Proporción* presidía la longitud de los párrafos de *La Eneida* de Virgilio y Lendvay ha demostrado que Bela Bartok usó la *razón áurea* en sus composiciones. También ciertos estudios musicales (alguno publicado en revistas tan prestigiosas como *American Scientist*) han establecido el uso de la *proporción de oro* en algunas composiciones de Mozart, Beethoven, Schubert, Debussy y Satie. Todo ello ha llevado a plantearse si los artistas han usado la *Divina Proporción* de forma consciente como una referencia para su trabajo creativo o inconscientemente debido a la ubicuidad de esta razón en el mundo que nos rodea ya que vivimos en un mundo proporcionado por la razón áurea.

PROPORCIONES ÁUREAS EN LA PIRÁMIDE DE KEOPS

El área total de la pirámide y el área lateral se encuentran en proporción áurea, y también lo están el área lateral y el área de la base.

Demostración :



La altura de la pirámide es de 146 metros, y tiene por base un cuadrado de 230 metros de lado sobre el que se apoyan 4 triángulos equiláteros.



El área del cuadrado de la base es: $A_B = \text{lado} \cdot \text{lado} = 230 \cdot 230 = 52900$

Para calcular el área de cada triángulo hay que conocer su altura, ya que se conoce su base que es 230.

Se forma un triángulo rectángulo con la altura de la pirámide (146), la altura de cada triángulo (h) y la mitad de la base (115).

Se aplica el *Teorema de Pitágoras* :

$$h^2 = 115^2 + 146^2 = 34541$$

$$h = 185,8521 \text{ m.}$$

$$A_t = \text{área del triángulo} = 230 \cdot 185,8521 / 2 = 21372,9905 \text{ m}^2$$

$$A_L = \text{área lateral} = 4 \cdot 21372,9905 = 85491,9622 \text{ m}^2$$

$$A_T = \text{área total} = A_B + A_L = 230^2 + 85491,9622 = 138391,9622 \text{ m}^2$$

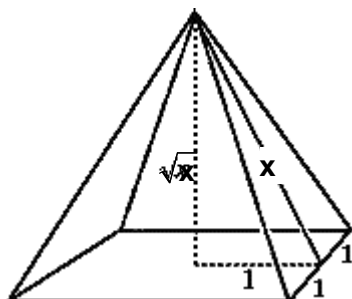
Por tanto, la relación entre las diferentes áreas será:

$$A_L / A_T = 1,618 \approx \phi \text{ y } A_L / A_B = 1,618 \approx \phi .$$

es decir, el número de oro ya aparece hace 4500 años.

Herodoto escribe:

«Según los sacerdotes egipcios las proporciones establecidas para la Gran Pirámide entre el lado de la base y la altura eran tales que el cuadrado construido sobre la altura vertical era exactamente igual al área de cada una de las caras triangulares».

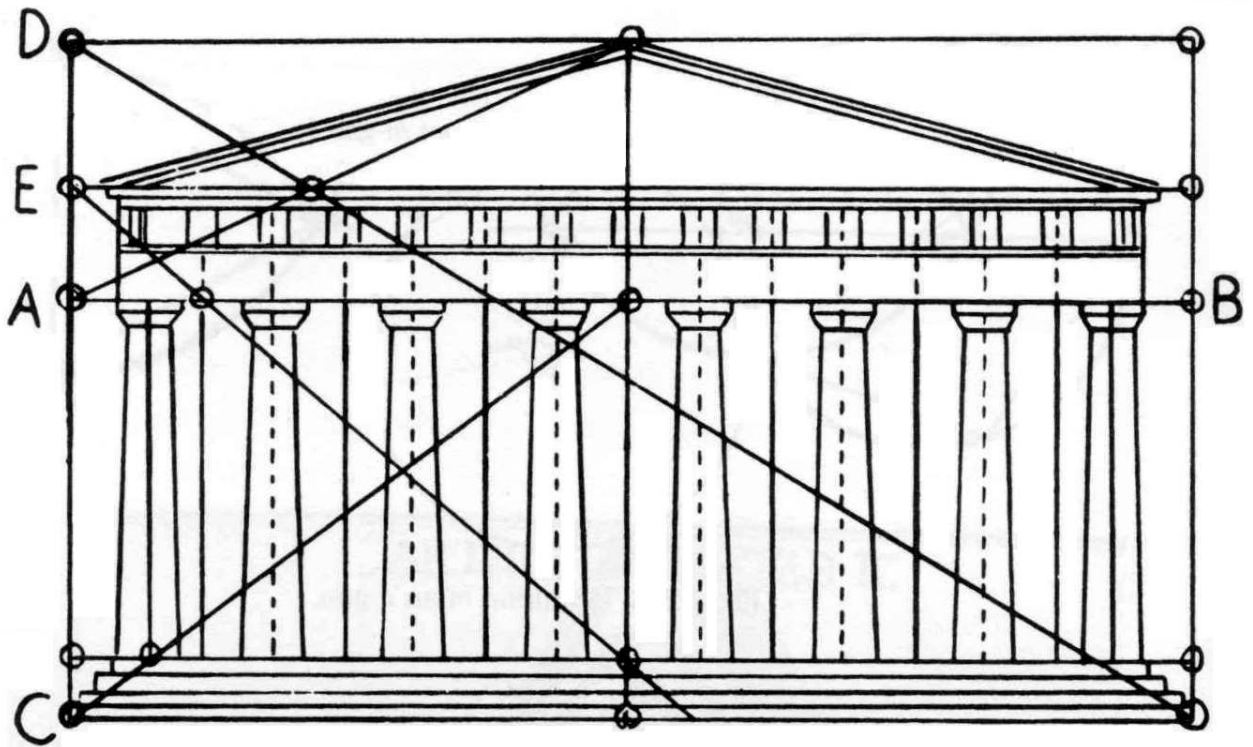


Teorema de Pitágoras $x+1=x^2$, luego $x=\phi$.

El perímetro del cuadrado de la base de la "Gran Pirámide" es sensiblemente igual a la circunferencia cuyo radio es la altura de la pirámide: Cálculo de π

$$8 = 2\pi\sqrt{\phi} ; \pi = 4 / \sqrt{\phi} = 4 / \sqrt{1,618} = 4 / 1,272 = 3.144654$$

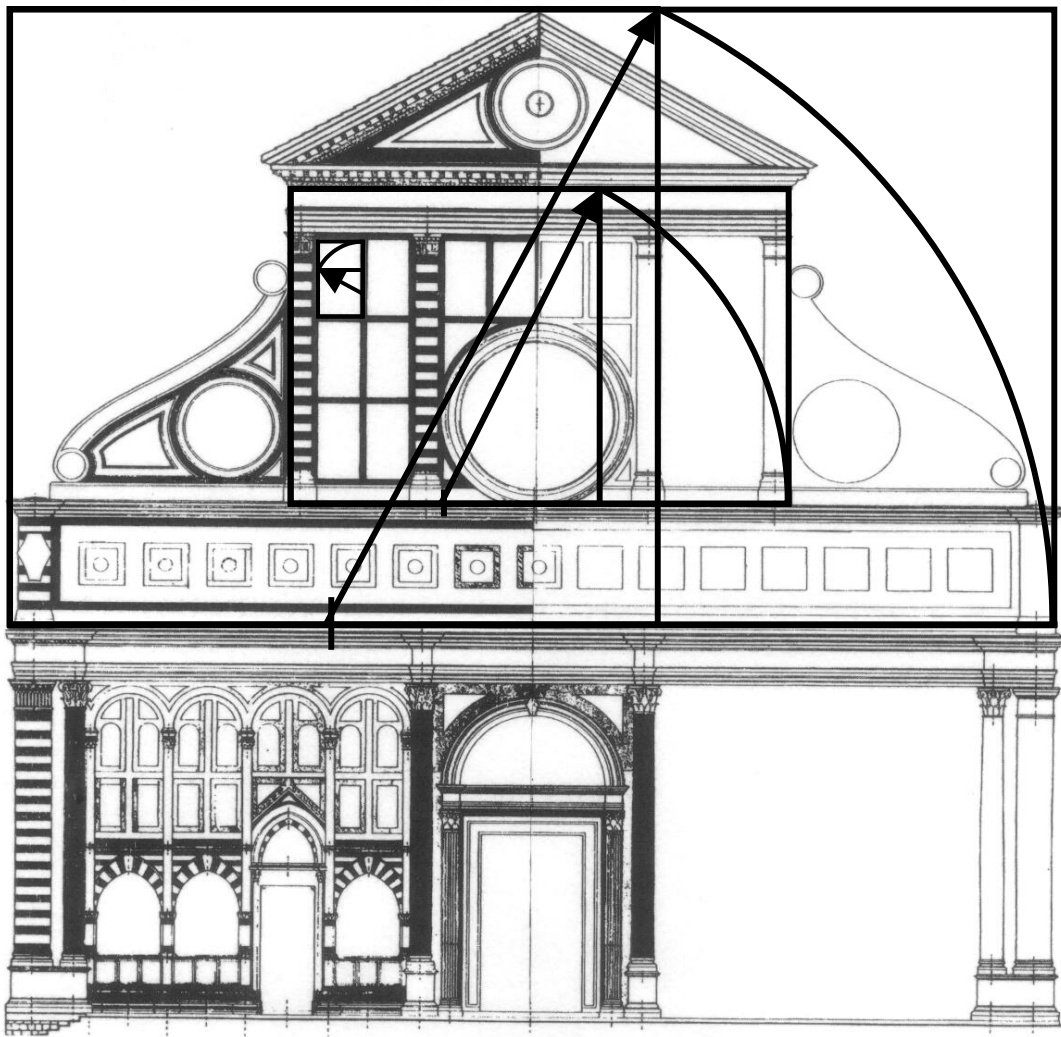
LA DIVINA PROPORCIÓN EN EL PARTENÓN DE ATENAS



La *Divina Proporción* aparece expresamente en el Partenón en las razones: AB/CD , AC/AD , CD/CA , DE/EA , según el análisis armónico geométrico que aparece en la obra de M.C.Ghyka, *Estética de las Proporciones en la Naturaleza y en las Artes* (Poseidón. Barcelona, 1983, P.202).



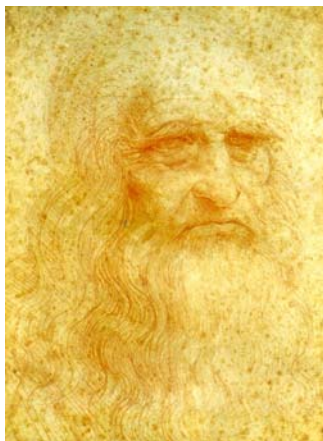
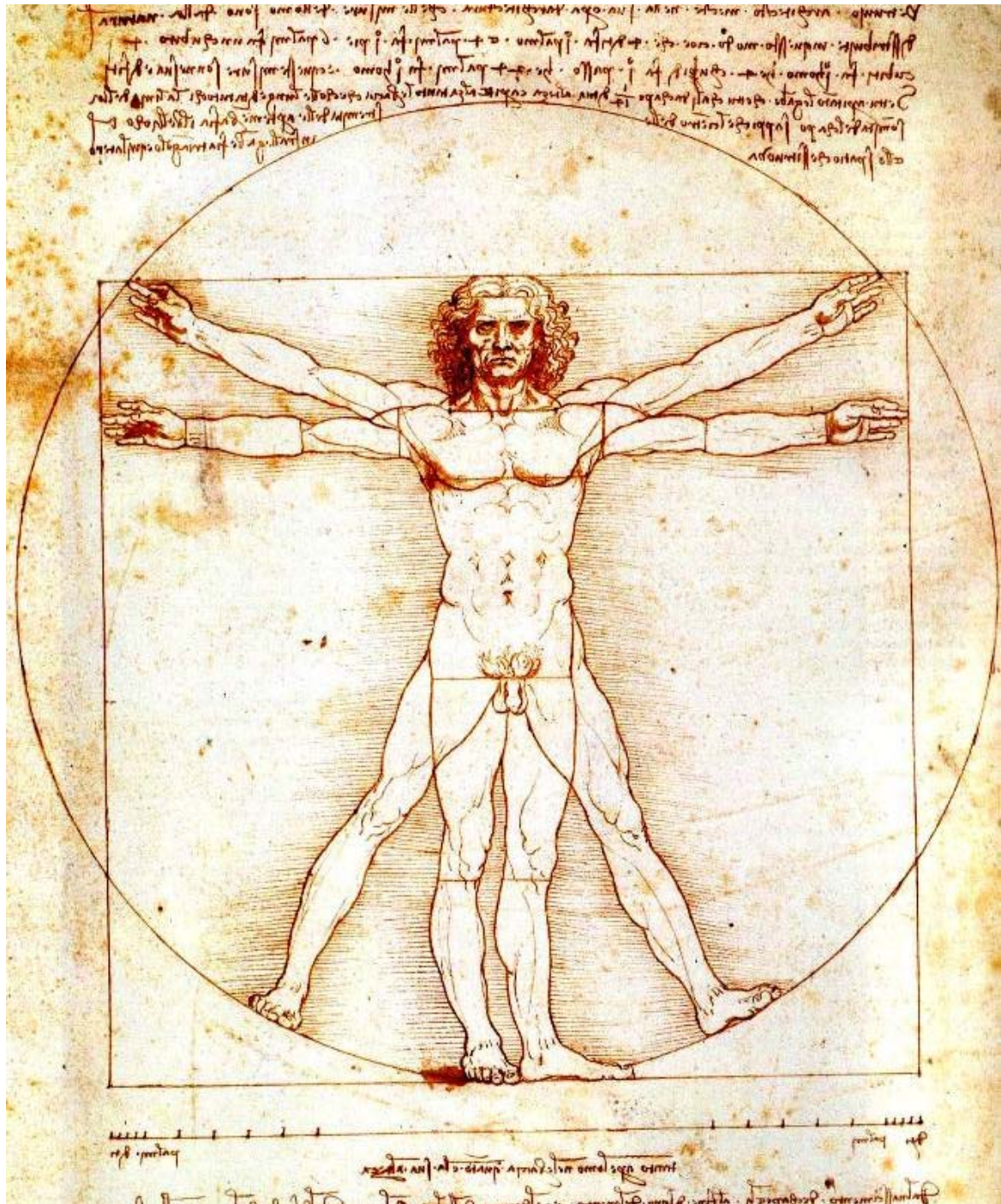
LA DIVINA PROPORCIÓN EN SANTA MARÍA NOVELLA DE FLORENCIA



Fachada de Santa María Novella de Florencia.

La *Divina Proporción* en su forma de *rectángulo áureo* está presente en buena parte de la geometría de la fachada de Santa María Novella de Florencia.

EL HOMO CUADRATUS DE LEONARDO



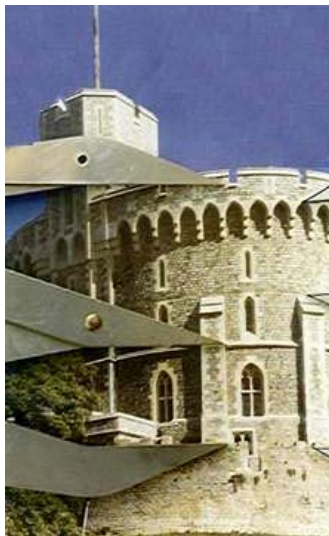
1. El Homo Cuadratus de Leonardo (Academia de Bellas Artes. Venecia).
2. Autorretrato de Leonardo da Vinci (Biblioteca Real, Turín).

El *Homo Cuadratus* es un diseño de Leonardo de la figura humana bajo los cánones de Vitrubio, por eso se llama también *El Hombre de Vitrubio*. Iba a formar parte de un futuro *Tratado de la Pintura* de Leonardo, pero al final pudo contemplarse por primera vez en 1511, formando parte de una reedición del tratado *De Architectura* de Vitruvio, como ejemplo de las proporciones ideales del cuerpo de un hombre, que puede inscribirse tanto en un círculo como en un cuadrado. El círculo está centrado en el ombligo y el cuadrado en los genitales. Las proporciones ideales del cuerpo humano corresponden a la razón áurea entre el lado del cuadrado y el radio del círculo.

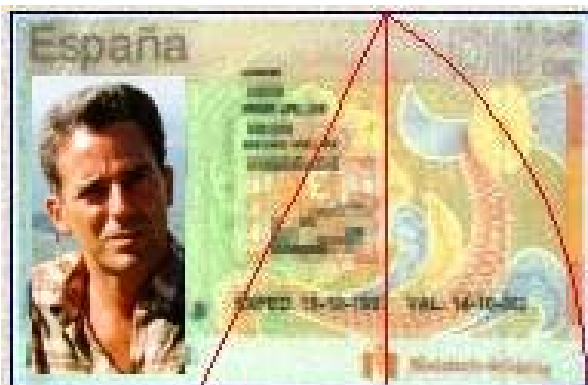
LAS PROPORCIONES ÁUREAS EN MONUMENTOS EMBLEMÁTICOS



Comprobación empírica mediante *el compás áureo* de las proporciones áureas que guardan algunas dimensiones de magníficas construcciones como la Puerta de Bagdad, la Gran Muralla China, El Castillo de Windsor y San Pablo de Londres.



LA PROPORCIÓN ÁUREA EN EL DISEÑO DE TARJETAS.



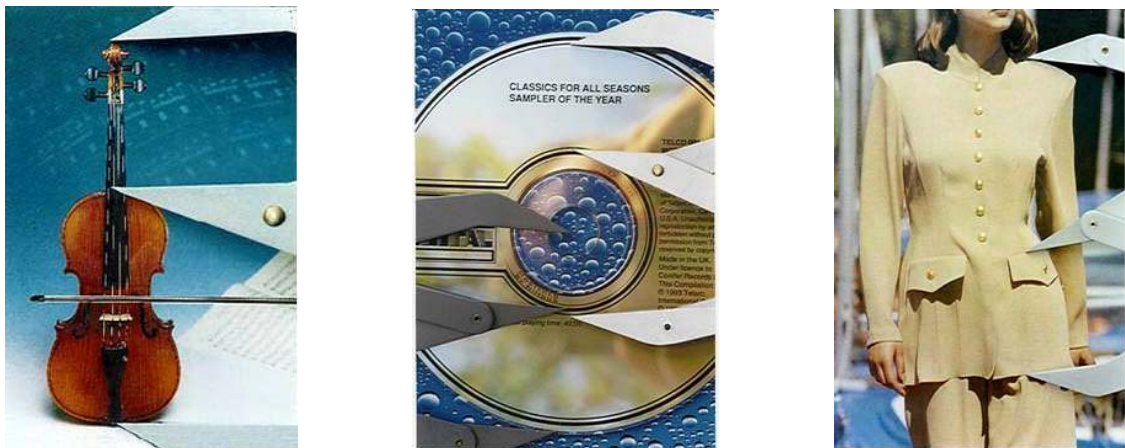
La *Divina Proporción* en su forma de *rectángulo de oro* se aplica en la actualidad al diseño de elementos de uso muy común como las tarjetas.

LA DIVINA PROPORCIÓN

COMPONENTE MATEMÁTICO DE LA BELLEZA



Comprobación empírica mediante *el compás áureo* de las proporciones áureas que guardan algunas dimensiones de tallos con hojas, flores, insectos y pájaros. La *Divina Proporción* es un componente matemático de la belleza natural.



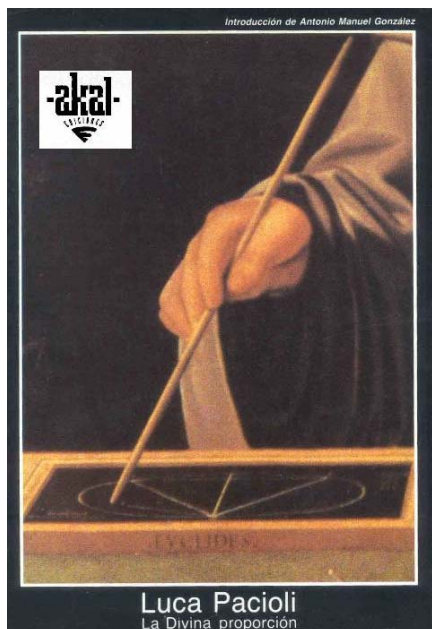
Comprobación empírica mediante *el compás áureo* de las proporciones áureas que guardan las dimensiones de algunos objetos.



La *Divina Proporción* o *Sección Áurea* se encuentra por doquier, con tal de que se la quiera buscar. Y en la actualidad, donde el diseño juega un papel esencial en el consumo, la *Divina Proporción* incide decisivamente en la conformación de muchos objetos.

La obra de Luca Pacioli *La Divina Proporción*

La Divina Proporción de Luca Pacioli (Venecia, 1509) es una de las obras más significativas del ambiente científico y artístico de la Italia de finales del siglo XV, convirtiéndose en uno de los puntos de partida de los numerosos estudios dedicados a las proporciones en el cuerpo humano y en el Arte que se escribieron a lo largo del Renacimiento. La obra responde a la visión filosófica, teológica y estética del neopitagorismo y neoplatonismo que interpretaban la imagen del universo como un *macrocosmos* concebido armónicamente, en el que el hombre y su visión a través del Arte sería un *microcosmos* reflejo del supremo orden universal. En el tratado la *razón áurea* es concebida como principio universal de la belleza y como modelo de evolución de las formas que conservan la imagen de perfección de la unidad divina original, como manifestación de la afinidad del mundo creado con la perfección de su fuente divina y de su potencial evolución futura.



La Divina Proporción de Luca Pacioli, Akal, Madrid, 1991.

De esta edición se toman las referencias, con indicación de página.

En los primeros capítulos de su obra, *La Divina Proporción*, Luca Pacioli se refiere a las propiedades y «singulares efectos» de la sección áurea, para pasar después a estudiar de forma muy profunda, con argumentos teológicos y filosóficos, las propiedades geométricas y místicas de los poliedros regulares bajo una orientación totalmente inspirada en la cosmogonía platónica del *Timeo*.

Previamente, Luca Pacioli escribe un auténtico panegírico sobre la concepción y el supremo grado de certeza de las diversas ciencias matemáticas, alude a los beneficios que producen en el estudio de todo tipo de disciplinas desde la Filosofía y la Teología a las Leyes y la ciencia militar, al contener sus propios fundamentos, y pone como hitos históricos fundacionales de la Matemáticas los trabajos de Pitágoras, Platón, Euclides y Arquímedes.

En el Capítulo II de *La Divina Proporción*, Luca Pacioli escribe (Akal, Madrid, 1991, p.33):

Proemio del presente tratado llamado *La Divina Proporción*

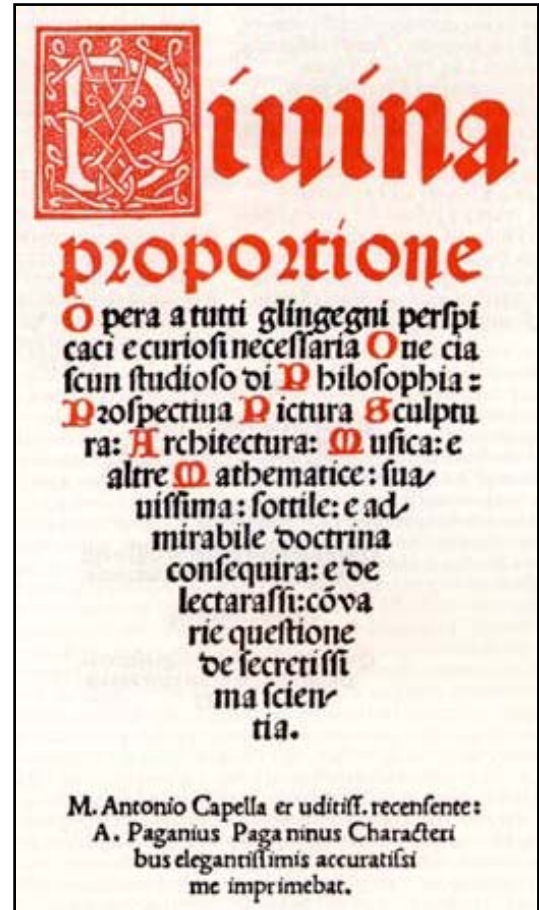
«Las Matemáticas son el fundamento y la escala para llegar al conocimiento de cada una de las demás ciencias, por encontrarse en el primer grado de certeza, como afirma el filósofo cuando dice "Mathematicae enim scientiae sunt in primo grado certitudinis et naturales sequuntur eas". Como se ha dicho, las ciencias y disciplinas matemáticas se encuentran en el primer grado de certeza y las siguen todas las ciencias naturales; y sin el conocimiento de aquellas se hace imposible. Igualmente está escrito en la sabiduría que "omnia consistunt in numero, pondere et mensura", es decir, que todo aquello que se encuentra distribuido por el universo inferior y superior se reduce necesariamente a número, peso y medida.»

Y en el Capítulo III de la obra de Luca Pacioli podemos leer (Akal, p.38):

Lo que de be entenderse por los vocablos «matemático» y »disciplinas matemáticas»

«El vocablo matemática es griego, derivado de la palabra que en nuestra lengua equivale a decir disciplinable; y, para nuestro propósito, por ciencias y disciplinas matemáticas se entienden la aritmética, la geometría, la astronomía, la música, la perspectiva, la arquitectura y la cosmografía, así como cualquier otra dependiente de éstas. Sin embargo, comunmente los sabios consideran como tales a las cuatro primeras, es decir, la aritmética, la geometría, la astronomía y la música, llamando a las demás subalternas. Así lo quiere Platón y Aristóteles, Isidoro en sus Etimologías y Boecio en su Aritmética.»

LA DIVINA PROPORCIÓN DE LUCA PACIOLI



1. Fragmento de un cuadro atribuido por J. De Barbari en 1495 (Museo de Capidomonte, Nápoles) que retrata a Luca Pacioli en un ambiente místico con elementos geométricos relativos a una página de Euclides, en relación con los poliedros y la sección áurea, que el franciscano estudiará en su famosa obra *La Divina Proporción*.
2. Primera página de la obra de Luca Pacioli *La Divina Proporción* (Venecia, 1509) ilustrada de forma bellísima por Leonardo da Vinci. A pesar del título, la obra está dedicada sobre todo a un exhaustivo estudio de los poliedros.

A LA DIVINA PROPORCIÓN

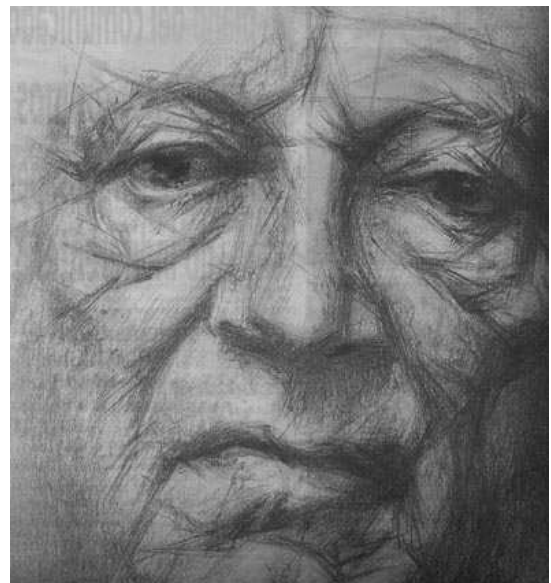
A ti, maravillosa disciplina,
media, extrema razón de la hermosura
que claramente acata la clausura
viva en la malla de tu ley divina.

A ti, cárcel feliz de la retina,
áurea sección, celeste cuadratura,
misteriosa fontana de medida
que el universo armónico origina.

A ti, mar de los sueños angulares.
flor de las cinco formas regulares,
dodecaedro azul, arco sonoro.

Luces por alas un compás ardiente.
Tu canto es una esfera transparente.
A ti, divina proporción de oro.

Rafael Alberti



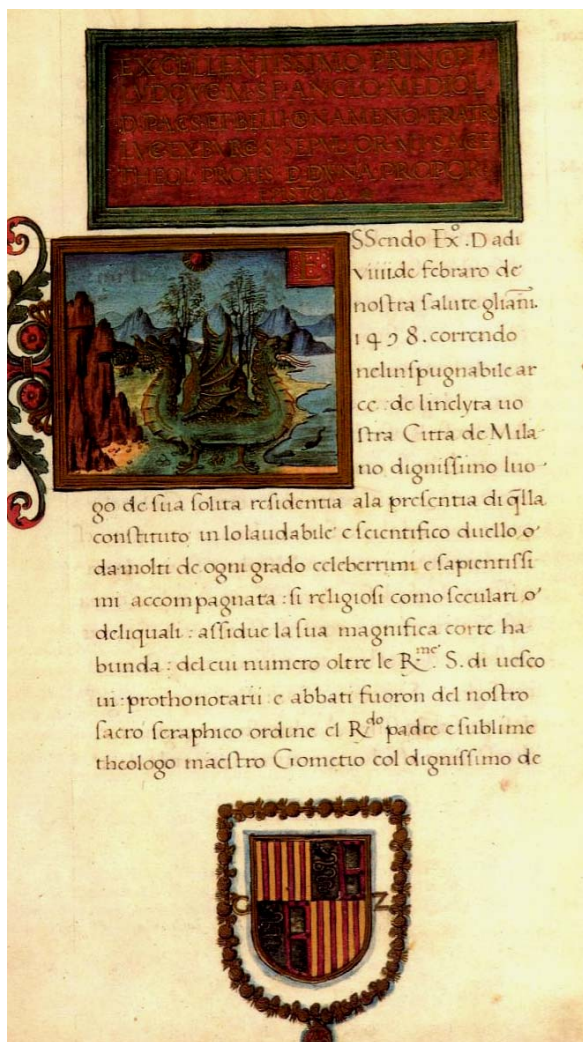
El bellissimo soneto del ilustre poeta gaditano R. Alberti sobre la *Divina Proporción*, cierra con broche de oro lírico el Proemio de la edición de Editorial Losada (Buenos Aires, 1946) de *La Divina Proporción* de Luca Pacioli.

LA DIVINA PROPORCIÓN Y LOS ATRIBUTOS DE DIOS SEGÚN LUCA PACIOLI

El propio nombre que acuña Luca Pacioli *-Divina Proporción-* sintetiza las correspondencias que guarda la *razón áurea* con los atributos de la Divinidad, relacionados en el Capítulo V de la obra (Akal, Madrid, 1991, pp. 41-42) :

Del título que conviene al presente tratado o compendio

«Páreceme, que el título conveniente a nuestro tratado ha de ser el de La Divina Proporción, y ello por numerosas correspondencias de semejanza que encuentro en nuestra proporción, de la que tratamos en este utilísimo discurso, que corresponden a Dios mismo. Para nuestro propósito será suficiente considerar cinco de ellas, entre otras :



Dedicatoria al Duque de Milán en la primera página de La Divina Proporción de Luca Pacioli, El autor llama a la obra Epístola sobre la Divina Proporción.

1. «Es una sola y no más, [...], y dicha unidad es el supremo epíteto de Dios mismo».
2. La Divina Proporción se corresponde con la Santísima Trinidad: «Así como in divinis hay una misma sustancia entre tres personas, [...], de igual modo una misma proporción se encontrará siempre entre tres términos, [...]».

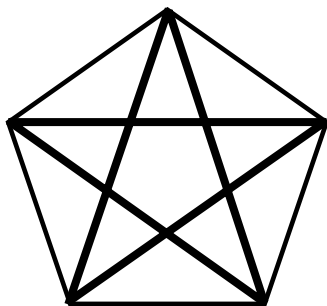
La correspondencia que expresa Luca Pacioli se interpreta mediante la relación: $\frac{\phi + 1}{\phi} = \phi$.

Los tres términos del primer miembro con las operaciones de suma y cociente son como las tres personas de la *Santísima Trinidad*, que, sin embargo, constituyen el único Dios, permaneciendo idéntico a sí mismo [= ϕ].

3. Así como Dios es indefinible, también la Divina Proporción «no puede nunca determinarse con un número inteligible, [...]», (es irracional).
4. «[...] Dios nunca puede cambiar y está en todo», así también es la Divina Proporción.
5. «Así como Dios confiere el Ser a la virtud celeste, llamada quintaesencia, y mediante ella a los otros cuerpos simples -es decir, a los cuatro elementos: tierra, agua, aire y fuego- que tienen su forma propia: cubo, icosaedro, octaedro, tetraedro [...], nuestra santa proporción confiere el ser formal, según el antiguo Platón en su Timeo, al cielo mismo, atribuyéndole la figura del dodecaedro, [...]».



El Pentagrama místico pitagórico. Geometría y mística



Buena parte de la Geometría pitagórica en relación con los poliedros y con la sección áurea, tuvo que ver con el pentágono regular.

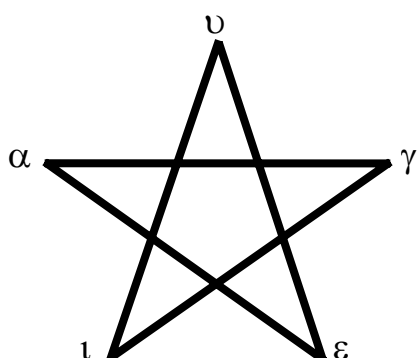
La figura de la estrella de cinco puntas que se forma al trazar las cinco diagonales de una cara pentagonal de un dodecaedro regular, llamado pentágono estrellado, *Pentacle*, *Pentalfa* o *pentagrama místico*, parece haber sido una especie de símbolo esotérico de identificación, a modo de anagrama, de la Escuela Pitagórica (según Jámblico en su obra, *Vida de Pitágoras*). Por eso

los pitagóricos estudiaron exhaustivamente la construcción y propiedades del pentagrama.

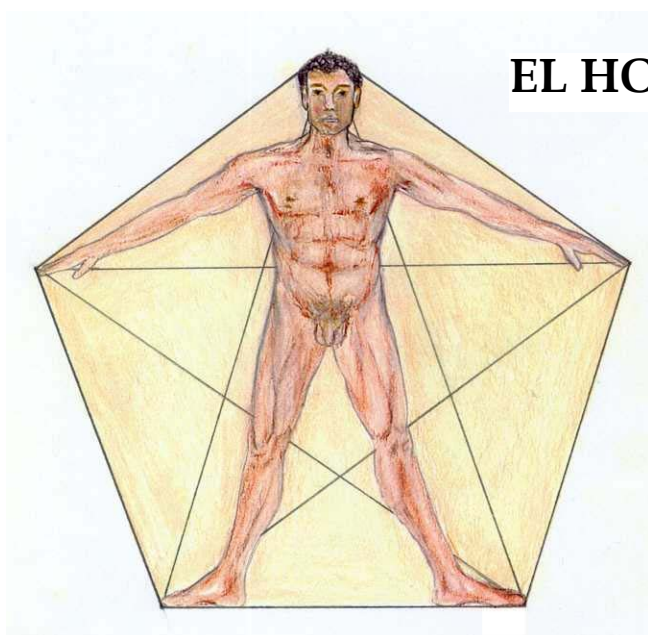
El *Pentagrama místico* fue uno de los tópicos geométricos más importantes de la Escuela pitagórica por sus bellísimas propiedades geométricas de las que nace su simbolismo místico que será ampliamente desarrollado en el capítulo quinto. Además, según veremos, el *Pentagrama místico* pudo estar en la base del más importante hallazgo científico de los pitagóricos: el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables, una de las causas de la profunda crisis que arruinó a la cofradía pitagórica.

De momento digamos que una de las curiosas propiedades del *Pentagrama*, que imponía respeto a los pitagóricos era su «unicursalidad»: «la estrella pentagonal puede ser trazada por el movimiento de un punto sin pasar dos veces por el mismo lado»

Una segunda propiedad profundamente aritmológica en su esencia inspiraba a los pitagóricos un entusiasmo místico, relacionando el pentagrama con la palabra salud



($\upsilon\gamma\epsilon\iota\alpha$ = $\eta\gamma\iota\epsilon\iota\alpha$, de donde deriva higiene). Aunque la palabra $\upsilon\gamma\epsilon\iota\alpha$ tiene seis letras, a veces se producía una contracción que hacía desaparecer la primera υ (como atestiguan algunas inscripciones) quedando entonces con cinco letras $\gamma\epsilon\iota\alpha$, que se situaban sobre cada uno de los vértices del *Pentagrama*, que de esta forma se convertía en el anagrama supremo de la salud. Al ser el *Pentagrama*, a su vez, el símbolo de reconocimiento de los pitagóricos, de aquí podría provenir el término ¡Salud! como saludo ante el encuentro de dos personas.

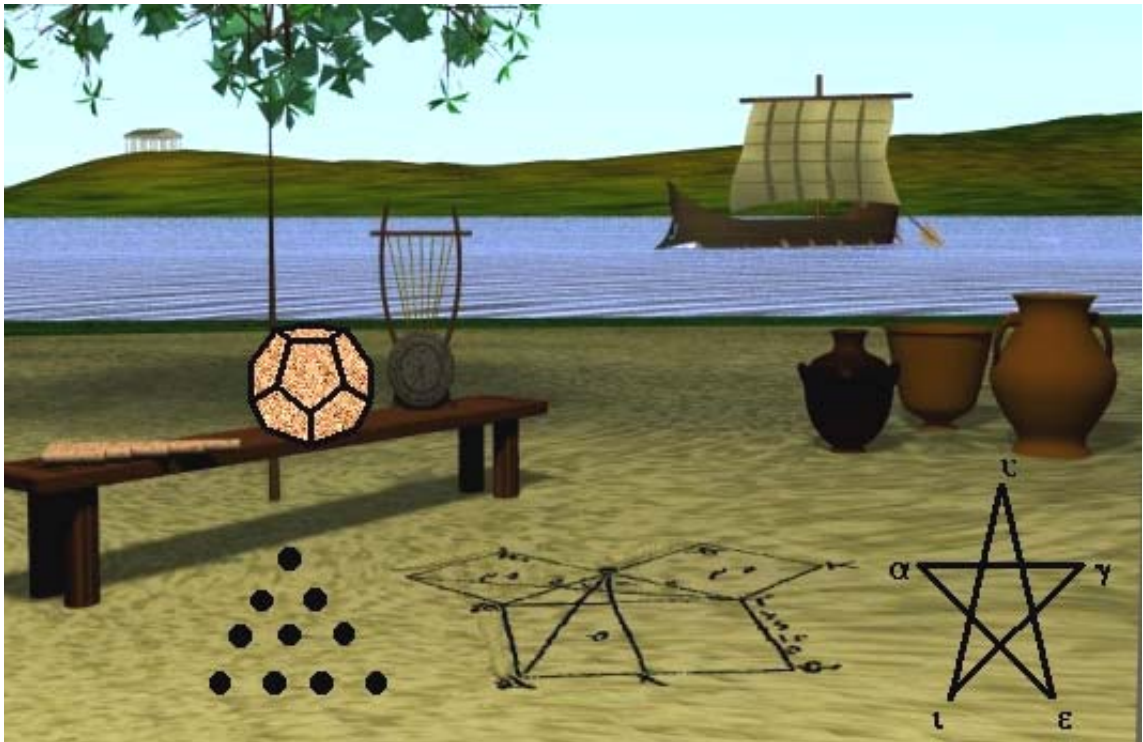


EL HOMBRE-MICROCOSMOS

El *Hombre-Microcosmos*. Ilustración de Pedro Lario Cruz.

El *Hombre-Microcosmos* inscrito en el *Pentagrama místico* pitagórico representa el imperio del Espíritu (número 3) sobre la Materia (número 2) de acuerdo con la Aritmología pitagórica.

SIMBOLISMO DE LOS ATRIBUTOS MATEMÁTICOS EN LA COMUNIDAD PITAGÓRICA



La Arcadia pitagórica, una atmósfera mística impregnada de música y simbología matemática, donde la comunidad pitagórica desarrollaba la pasión por el conocimiento mediante especulaciones filosóficas y matemáticas como base moral para la consecución de la armonía interior y con el entorno, de acuerdo con el orden natural de las cosas que emana de Dios, supremo ordenador cósmico a través del maravilloso poder de la armonía matemática y musical, metáforas del orden universal.

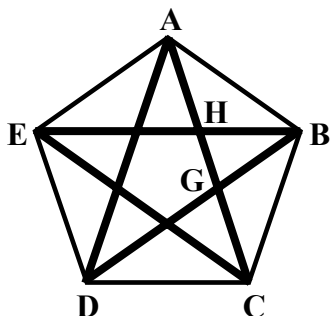
El Dodecaedro como quintaesencia de la Cosmogonía pitagórica, la sagrada *Tetractys* como fuente y raíz de la naturaleza eterna, el triángulo rectángulo depositario de la inconmensurabilidad, el *Pentagrama místico* símbolo de identificación de los pitagóricos y de la salud, son los talismanes de la actividad intelectual del «*modo de vida pitagórico*», en el que la música –cuya armonía es de naturaleza matemática– ejerce una influencia definitiva en el equilibrio emocional.

La comunidad pitagórica, de carácter científico y religioso, se basaba en un ideario común fundamentado en todo un cuerpo de doctrina sobre el hombre, el alma, la sociedad, el cosmos, etc., que conducía necesariamente al estudio, a la reflexión filosófica y a la especulación matemática y cosmológica, actividades en las que la adquisición del conocimiento participaba más del carácter de una iniciación religiosa que de una mera instrucción o investigación, es decir, religión y ciencia son aspectos íntimamente vinculados en un tipo de vida llamado *pitagórico* (Platón, *República*, 600b) y la actividad científica es una consecuencia de la doctrina, no el móvil inicial como sería en la *Academia* platónica, en el *Liceo* de Aristóteles o en el *Museo* de Alejandría. En este sentido escribe Russell (*Historia de la Filosofía Occidental*, Austral, Madrid, 1995, Vol.1, Libro 1, p.72):

«*Pitágoras como profeta religioso y como matemático ha tenido una influencia incommensurable, y los dos campos de su actividad no distan tanto el uno de otro como puede parecer a una mente moderna.*»

El triángulo áureo

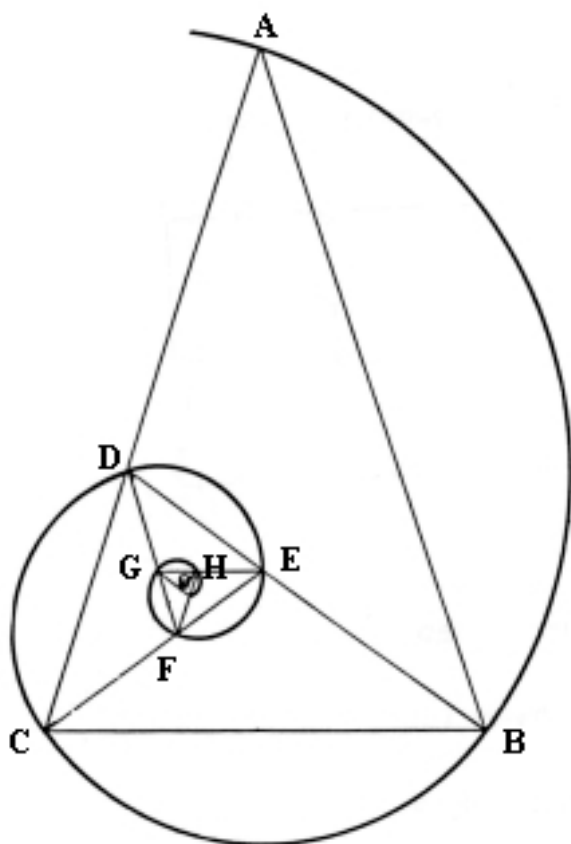
El *pentagrama místico pitagórico* se obtiene a partir de tres triángulos isósceles iguales (por eso al *pentagrama pitagórico* se le llama también «*tripletriángulo*») que tienen los ángulos iguales dobles del ángulo desigual. Este tipo de triángulo se construye en la Proposición 10 del Libro IV de *Los Elementos* de Euclides, cuyo contenido es de raíz pitagórica en su mayor parte. En la siguiente Proposición, la IV.11, se construye efectivamente el pentagrama a base de inscribir en un círculo un pentágono regular y trazar las diagonales, las cuales de forma sorprendente se cortan determinando segmentos que están en *proporción áurea* siendo el segmento mayor igual al lado del pentágono (*Euclides* XIII.8). En efecto:



Por razones de simetría la diagonal EB es paralela al lado DC de modo que DCHE es un paralelogramo, por tanto $EH=DC=AB$. Además, los triángulos $\triangle ABE$ y $\triangle HAB$ son semejantes, de modo que según *Euclides* VI.4: $EB/BA = AB/BH$; y al ser $AB=EH$ resulta: $\frac{EB}{EH} = \frac{EH}{HB} = \phi$.

Por otra parte el triángulo isósceles ABG cumple una propiedad muy especial: los lados iguales están en *proporción áurea* con el lado menor ya que $\phi = EH/HB = AB/GB$.

A un tal triángulo que es el que construye Euclides en la Proposición IV.10 de *Los Elementos* se le llama «*triángulo áureo*»; tiene ángulos en la base de 72° y en el vértice de 36° , y al igual que el *rectángulo áureo* es «*auto-reproductivo*»:



Partiendo del triángulo ABC, la bisectriz del ángulo B corta a AC en D de forma áurea. El triángulo BCD siendo semejante al original ABC resulta ser un *triángulo áureo*. La bisectriz del ángulo C corta a BD en el punto E de forma áurea y el triángulo CDE resulta ser áureo. Este proceso, que es otra forma del crecimiento gnomónico, es indefinido, obteniéndose una sucesión de triángulos áureos que convergen hacia el polo de una espiral logarítmica que pasa por los sucesivos vértices de los triángulos. Además, es fácil advertir las siguientes relaciones:

Si tomamos HG como unidad de longitud se verifica:

$$HG = 1$$

$$FE = 1\phi + 1$$

$$ED = 2\phi + 1$$

$$DC = 3\phi + 2$$

$$CB = 5\phi + 3$$

$$BA = 8\phi + 5$$

.....

donde nuevamente aparece la relación con la sucesión de Fibonacci.

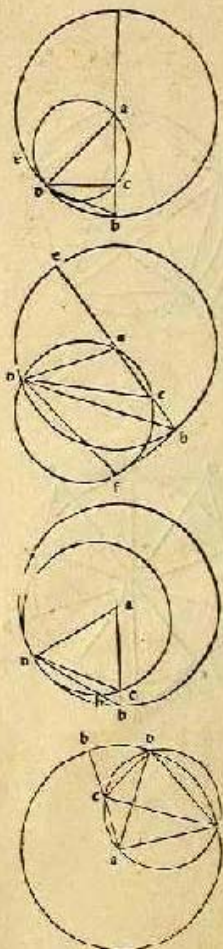
EL TRIÁNGULO ÁUREO

EN EL LIBRO IV DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES

Propositio .10.

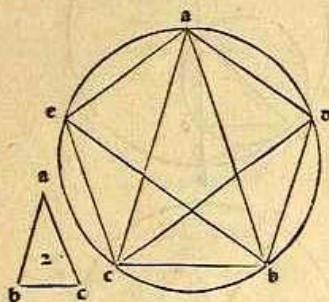
Datum equalium laterum triangulum designare. cuius vterq; duorum angulorum quos basis opunet. reliquo duplus existat.

Intentio est describere unum triangulum duum equalium laterum et tertium inequalis cui vterq; angulorum qui super latere quod est reliquus in eoque existit ad tertium duplus existat. Ad hoc autem faciendum sumatur linea quilibet que sit .a.b. que dividatur secundum quod docet .ii. scilicet in puncto .c. ita quod illud quod sit ex .a.b. in .b.c. sit equale quadrato .a.c. factoque puncto .a. centro sum ipsius quantitatem describatur circulus .b.d.e. intra quem per primam huius cooperetur linea .b.d. equalis lineae .a.c. et producantur due lineae .d.a.d.e. dico triangulum .a.b.d. esse quodlibet propositum: circumscribat circulus qui sit d.c.a. per .5. huius triangulo .d.c.a. quia ergo linea .d.b. est equalis lineae .a.c. erit quod sit ex .a.b. in .b.c. equale quadrato lineae .b.d. quare per ultimam tertii .b.d. linea est contingens circulum .d.c.a. et per .31. eiusdem angulus .c.d.b. est equalis angulo .c.a.d. posito ergo communi angulo .c.d.a. erit totus angulus .b.d.a. equalis duobus angulis .c.a.d. c.d.a. sed per .32. primi angulus .b.c.d. est equalis eisdem quia extrinsecus ad ipsos. ergo angulus .b.d.a. est equalis angulo .b.c.d. et quod angulus .a.d.b. est equalis angulo .a.b.d. per .5. primi: eo quod latera .a.d. et .a.b. sunt equalia. erit angulus .b.c.d. equalis angulo .c.b.d. ergo per .6. primi: linea .c.d. est equalis lineae .b.d. quare et lineae .c.a. ergo per .5. primi: angulus .c.a.d. est equalis angulo .c.d.a. quia ergo vterq; angulorum .c.d.b. et .c.d.a. est equalis angulo .c.a.d. erit totus angulus .b.d.a. duplus ad angulum .d.a.b. et ideo angulus .a.b.d. tibi equalis duplus est etiam ad angulum .b.a.d. quod est propositum. **Q**uoniam dicit aduersarius circuli .d.c.a. circumscriptum trigono partiali secare circulum .b.d.e. in aliquo puncto arcus .b.d. ita quod si mul secabit lineam .b.d. unde ipsa non erit circulo applicata. sicut in demonstratione supponitur. sed ipsum secans. Sit ergo si possibile est ut ponit aduersarius et a puncto .b. ducatur ad ipsum circulum minoram contingens .b.f. et ducantur lineae .f.a.f.d. eritque per penultimam tertii quod sit ex .a.b. in .b.c. equale quadrato .b.f. ergo .b.f. est equalis .b.d. quare per .5. primi angulus .b.f.d. est equalis angulo .b.d.f. et quia per .31. tertii angulus .b.f.a. est equalis angulo .a.d.f. erit angulus .b.d.f. maior angulo .a.d.f. quod est impossibile. cum ipse sit pars eius. **A**lter possimus istud refellere et ostendere quod ille minor circulus nullo modo secabit lineam .b.d.



Propositio .11.

Intra datum circulum equilaterum. atque equiangulum pentagonum describere.



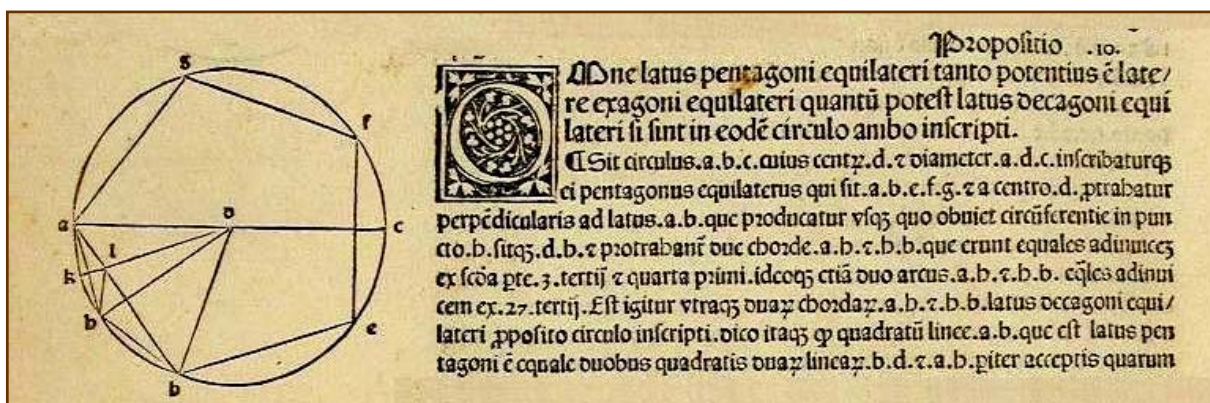
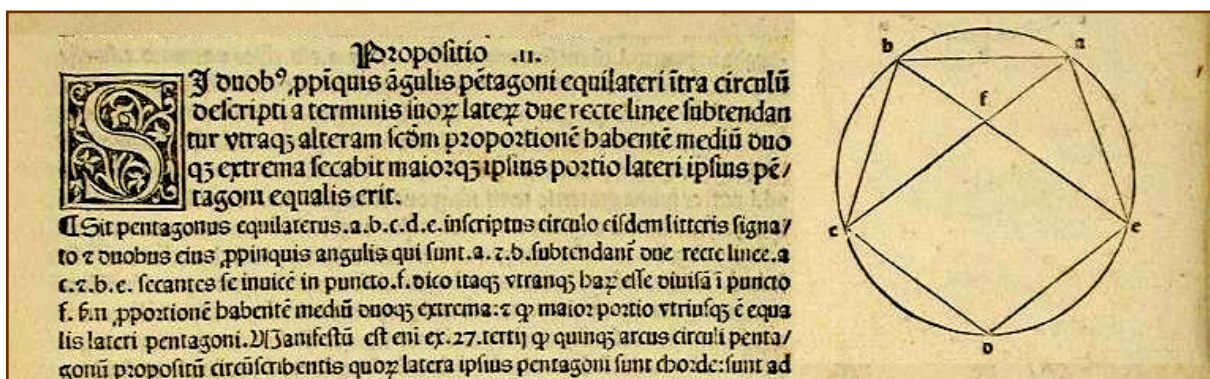
Sit datus circulus .a.b.c. volo intra ipsum describere pentagonum unum equilaterum atque equiangulum. designo triangulum unum qualesque premissa proponit. qui sit .2. cui alius equiangulum intra datum circulum describo. sicut docet secunda huius: qui sit .a.b.c. sitque vterq; angulorum .a.b.c. et .a.c.b. duplus ad angulum .c.a.b. vterque eorum divido per equalia ductis lineis .b.c. et .c.d. eruntque per .25. tertii .5. arcus in quos .5. puncta .a.d.b.c.e. dividunt circulum adinvicem equales. propter id quod quinque anguli qui in dictos arcus cadunt sunt adinvicem equales. continuatis igitur illis quinque punctis per lineas rectas que sunt .a.d.d.b.b.c.c.e. et .e.a. erit pentagonus .a.d.b.c.e. inscriptus dato circulo qualis proponitur: est enim equilateralis per .29. tertii cum .5. arcus: quorum eius quinque latera sunt corde: sint ad invicem equalia: et etiam equiangulus per .26. eiusdem eo quod quinque arcus .d.a.c.a.e.c.e.c.b.c.b.d. et .b.d.a. in quos anguli ipsius pentagoni cadunt sunt adinvicem equalia: sicut constat propositum.

Fragmentos de las Proposiciones IV.10 y IV.11 de *Los Elementos* de Euclides en la edición de E.Ratdolt (Venecia, 1482).. Ejemplar de la Biblioteca del Monasterio de San Millán de Yuso.

En la Proposición IV.10 Euclides construye el *Triángulo Áureo*- un triángulo isósceles que tiene los ángulos iguales dobles del ángulo desigual- como preliminar de la Proposición IV.11 donde inscribe un pentágono regular en un círculo dado.

El *Triángulo Áureo* tiene una gran importancia en la formación del *Pentagrama místico pitagórico*.

LA DIVINA PROPORCIÓN Y EL PENTAGRAMA MÍSTICO EN EL LIBRO XIII DE LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES



Fragmentos de las Proposiciones XIII.8, XII.9, XII.10 de *Los Elementos* de Euclides sobre propiedades muy curiosas, hermosas e interesantes acerca de relaciones entre los lados de polígonos inscritos en el mismo círculo y que constituyen la base de los teoremas posteriores sobre las construcciones de los poliedros inscritos en una esfera.

En la Proposición 8 Euclides demuestra que las diagonales de un pentágono se cortan en razón áurea –un resultado pitagórico de presunta trascendencia sobre el descubrimiento de los inconmensurables-. De la Proposición 9 resulta que los lados del hexágono y el decágono se yuxtaponen de forma áurea; y de la Proposición 10 que los lados del pentágono, hexágono y el decágono inscritos en un mismo círculo forman un triángulo rectángulo. He aquí los enunciados de estas proposiciones:

- XIII.8. Si en un pentágono equilátero y equiángulo, unas rectas opuestas subtienden dos ángulos consecutivos, se cortan entre sí en media y extrema razón y sus segmentos mayores son iguales al lado del pentágono [las diagonales de un pentágono regular se cortan en media y extrema razón, siendo el segmento mayor igual al lado del pentágono].
- Proposición XIII.9. Si se unen el lado de un hexágono y el de un decágono inscritos en el mismo círculo, la recta entera resultante queda dividida en media y extrema razón, y su segmento mayor es el lado del hexágono.
- Proposición XIII.10. Si se inscribe un pentágono equilátero en un círculo, el cuadrado del lado del pentágono es igual a los cuadrados de los lados del hexágono y del decágono inscritos en el mismo círculo [Teorema de Ptolomeo].

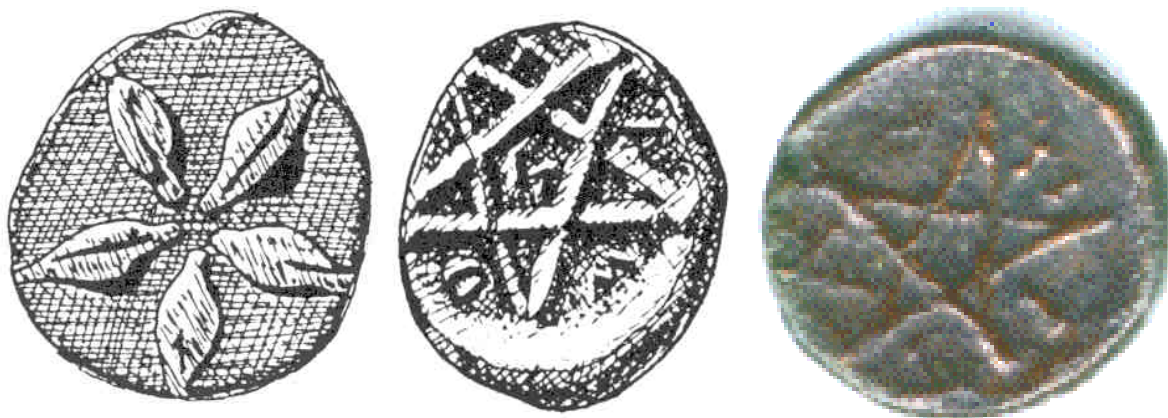
En esta edición de Ratdolt (Ejemplar de la Biblioteca del Monasterio de San Millán de Yuso), las Proposiciones 8 y 12 ocupan el lugar 11 y 8, respectivamente.

El simbolismo del pentagrama místico pitagórico

El simbolismo del pentagrama místico no es privativo de la Escuela pitagórica como muestran las siguientes ilustraciones:



Pentagrama mesopotámico (2600 a.C.), pentagrama judío (500 a.C.) y pentagrama romano (78 a.C.).

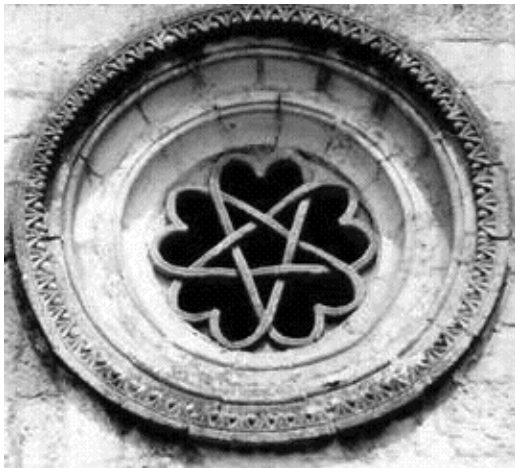
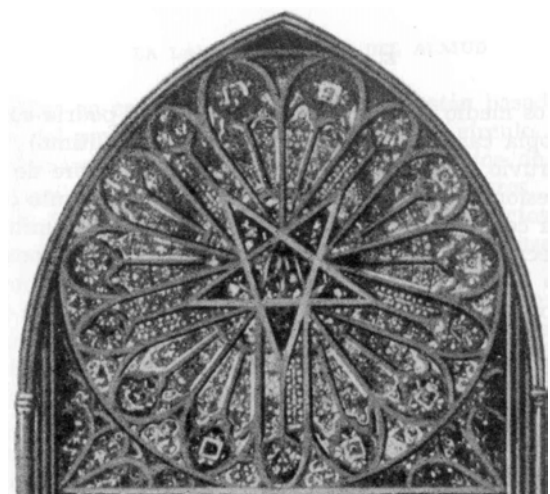
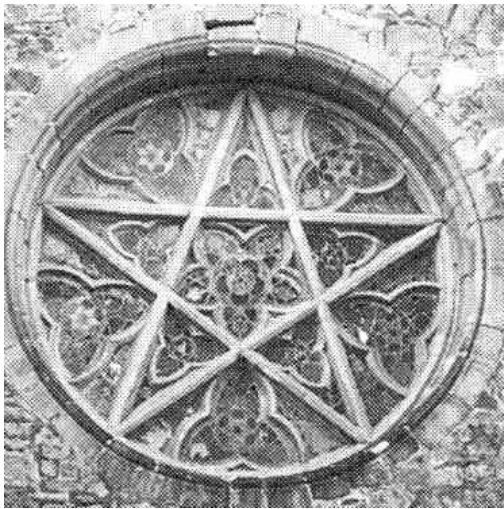


Monedas griegas con simbología pitagórica pentagonal halladas en Metaponto (440 a.C.), Melos (420 a.C.) y Pitane (350 a.C.).

Pitágoras debió recoger en su viajes de juventud la tradición mesopotámica y a su vez la doctrina pitagórica se transmitió a otros pueblos mediterráneos como judíos y romanos. La cuestión es que el *pentagrama místico* de Pitágoras fue un diagrama simbólico esencial del esoterismo geométrico de los pitagóricos, transmitido desde la antigüedad hasta el siglo XVIII, y bajo la forma ideológica que adquirió en el *Timeo* de Platón, recogida por Vitruvio, forma parte de dos tradiciones culturales importantes: los trazados de los arquitectos y las *estrellas pentagonales* del simbolismo mágico europeo, corrientes subterráneas que emergen a la luz a través de la obra de Luca Pacioli *La Divina Proporción*, que con finalidad teológica racionaliza los arcanos del misticismo geométrico pitagórico, exhumando una ciencia geométrica en cuyas fuente beberán Alberti, Durero y otros muchos artistas del Renacimiento.

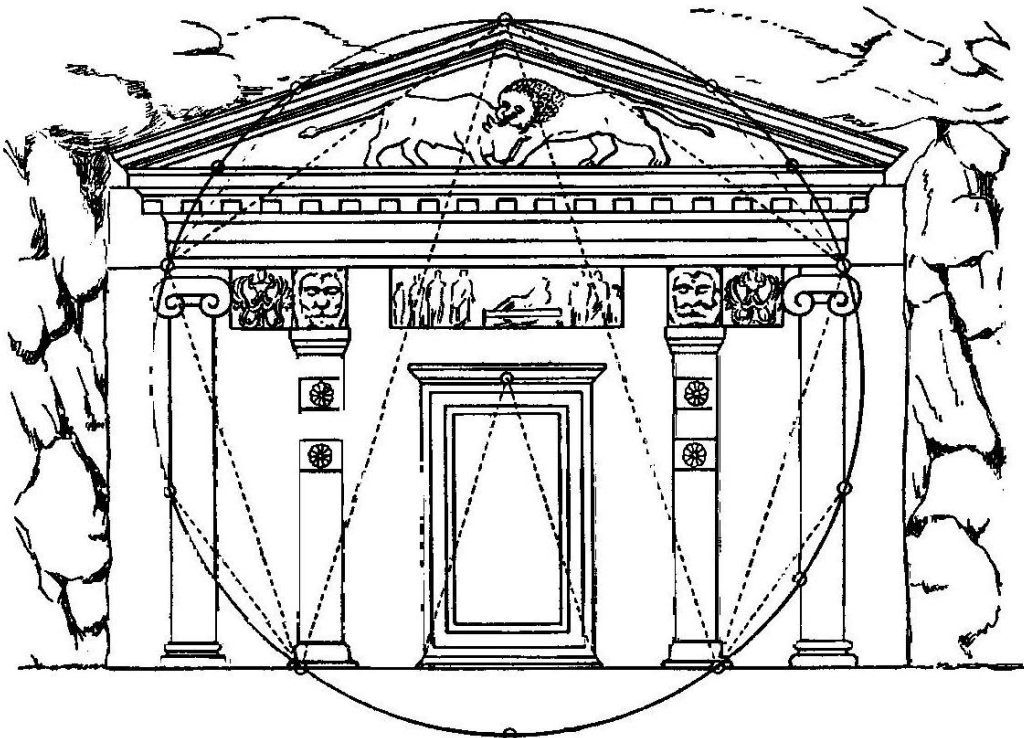
Las cofradías de constructores, albañiles y artesanos medievales transmitieron de generación en generación un ritual iniciático en el que la Geometría pitagórica desempeñaba un papel preponderante, interviniendo en la construcción de las grandes catedrales góticas donde encontramos toda una enciclopedia gráfica en los trazados de rosetones donde el místico símbolo pitagórico irradia luminosa magnificencia a través de los vitrales. Ejemplos bellísimos del pentagrama encontramos en Notre-Dame de París, en Saint-Ouen de Rouen, en el magnífico rosetón norte de la Catedral de Amiens, en Santa Catalina de Estrasburgo, en la abadía de Westminster, en la iglesia de Santa María de Lemgo, etc. En España uno de los más elegantes, aunque muy modesto es el de la Iglesia de San Juan de Castrogeriz (Burgos) en el Camino de Santiago.

EL SIMBOLISMO DEL PENTAGRAMA MÍSTICO EN LA ARQUITECTURA RELIGIOSA



El *pentagrama místico* pitagórico en rosetones góticos:

1. Iglesia de Santa María en Lemgo (Alemania).
2. Catedral de Amiens.
3. Ermita templaria de San Bartolomé en el Cañón del Río Lobos (Ucero, Soria)



Estructura áurea triangular y pentagonal en la Tumba rupestre de Mira (Turquía)

EL SIMBOLISMO DEL PENTAGRAMA MÍSTICO EN LA ARQUITECTURA RELIGIOSA

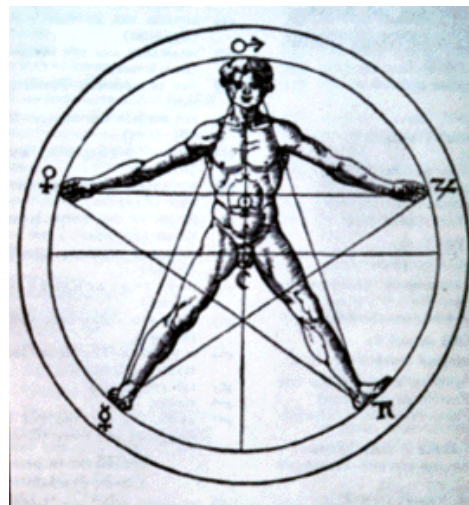


Pentagrama místico pitagórico en un rosetón mudéjar de Calatayud (Zaragoza)

El aspecto geométrico de la metafísica de los números introducido por el pitagorismo en la Filosofía de la Estética aparece en multitud de signos lapidarios y se incorporó a la Magia europea, en lo que se ha llamado la *Magia Gótica*, que en sus técnicas y supersticiones adoptó muchas fórmulas pitagóricas obtenidas a través de la Gnosis, el Hermetismo y la Kábala. El carácter geométrico del esoterismo de esta magia la distingue de sus compañeras de Asia, África y América. El pentagrama es la figura, por excelencia, que se utiliza en los conjuros y que confiere, al que sabe servirse de ella, *el conocimiento supremo*, aunque mal empleado a propósito, sobre todo como pentagrama negro o maléfico, invertido, con dos puntas para arriba (como la cabeza de un macho cabrío) puede desencadenar la furia de los demonios.

El célebre mago Cornelio Agrippa (a quien Descartes estudió con interés) publicó un importante tratado de magia *De Occulta Philosophia*, que contiene un libro sobre la Kábala de evidente influencia pitagórica. En su obra (donde aparece la famosa ilustración que presenta a un hombre inscrito en el pentagrama como símbolo del *Microcosmos*) Agrippa escribe: «*Las Ciencias matemáticas son parientes de la magia,... porque todo cuanto pueda existir en las fuerzas naturales esclavas no consiste más que en número y armonía*». Siguiendo a Pitágoras Agrippa vincula el pentagrama con las virtudes del número cinco, aclamándolo como «*símbolo de la felicidad y de la gracia, sello del Espíritu Santo y vínculo que todo lo enlaza*».

Paracelso, gran experto en talismanes y símbolos mágicos, reduce a dos todos los signos a que obedecen los espíritus: el *Hexagrama* o *Sello de Salomón*, representación del *Macrocosmos* y el *Pentagrama* representación del *Microcosmos* humano, que es «*el signo más poderoso de todos*». Paracelso aplica el *Pentagrama* en una *Teoría armónica* de la Fisiología y considera que todo estado patológico se debe a la ruptura de la armonía interior.



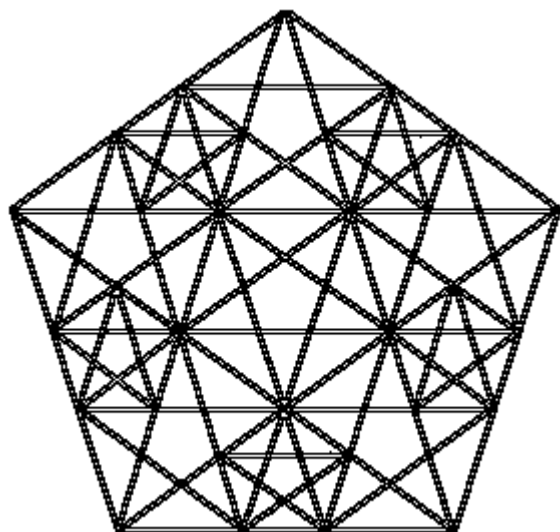
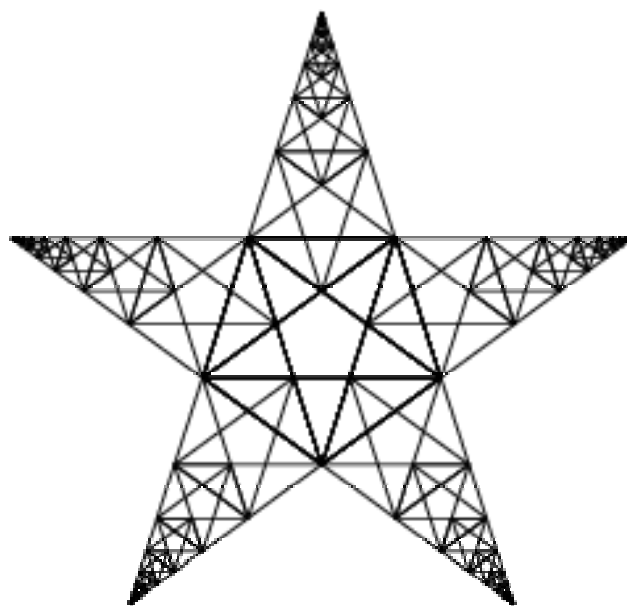
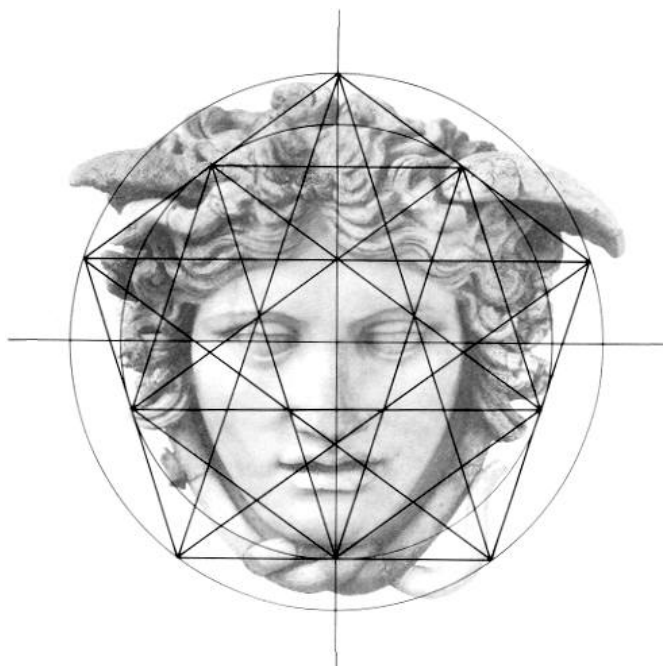
Simbología mágica del Pentagrama pitagórico: el macho cabrío (que desencadena la furia de los demonios por torcida utilización del pentagrama y el Hombre Microcosmos de Agrippa de Nettesheim (*De Occulta Philosophia*, Amberes, 1530), que se adapta perfectamente a las proporciones áureas de la estrella pentagonal inscrita en la armonía de los círculos cósmicos.

La leyenda del nigromante Fausto en relación con Mefistófeles (uno de los siete príncipes de las tinieblas infernales) abunda en alusiones al pentagrama. La imaginación popular alemana del siglo XVI atribuye al propio Fausto el tratado de conjuros mágicos *Höllenzwang, Geisterzwang, Cabala nigra et Alba* que contiene un repertorio de diagramas de *estrellas de cinco puntas* que destila una Geometría tan sabia como los símbolos lapidarios o los rosetones góticos. Goethe immortalizará la leyenda en su excelsa obra *Fausto*, donde en la escena tercera de la primera parte aparece, en el diálogo entre Fausto y Mefistófeles, una alusión mágica al símbolo pitagórico:

Mefistófeles: *Hay un pequeño obstáculo que me impide salir de aquí, y es esa estrellita de cinco picos que se atraviesa en el umbral...*

Fausto: *¿Te preocupa el pentagrama? ...*

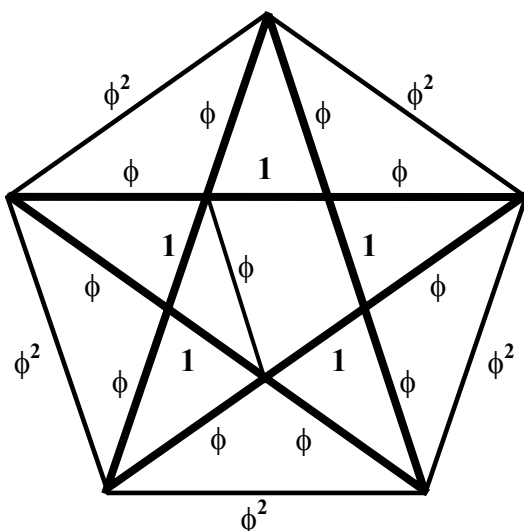
LA REPRODUCCIÓN GEOMÉTRICA DEL PENTAGRAMA PITAGÓRICO



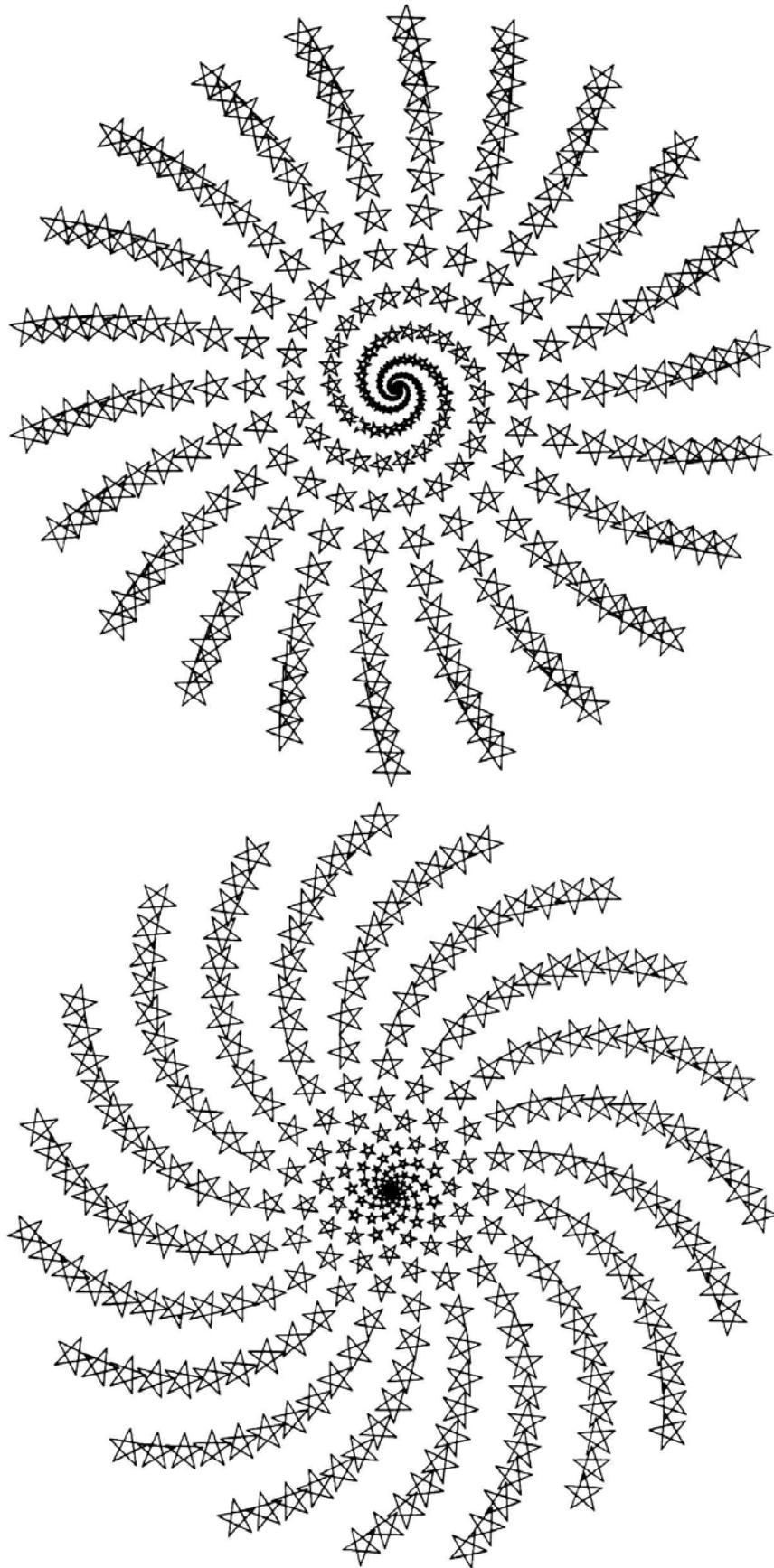
Máscara de Hermes. Mármol romano, copia de uno griego. S.I. a.C. Glyptothek. Munich.

En el *pentagrama* cualquier segmento es *sección áurea* del inmediatamente mayor.

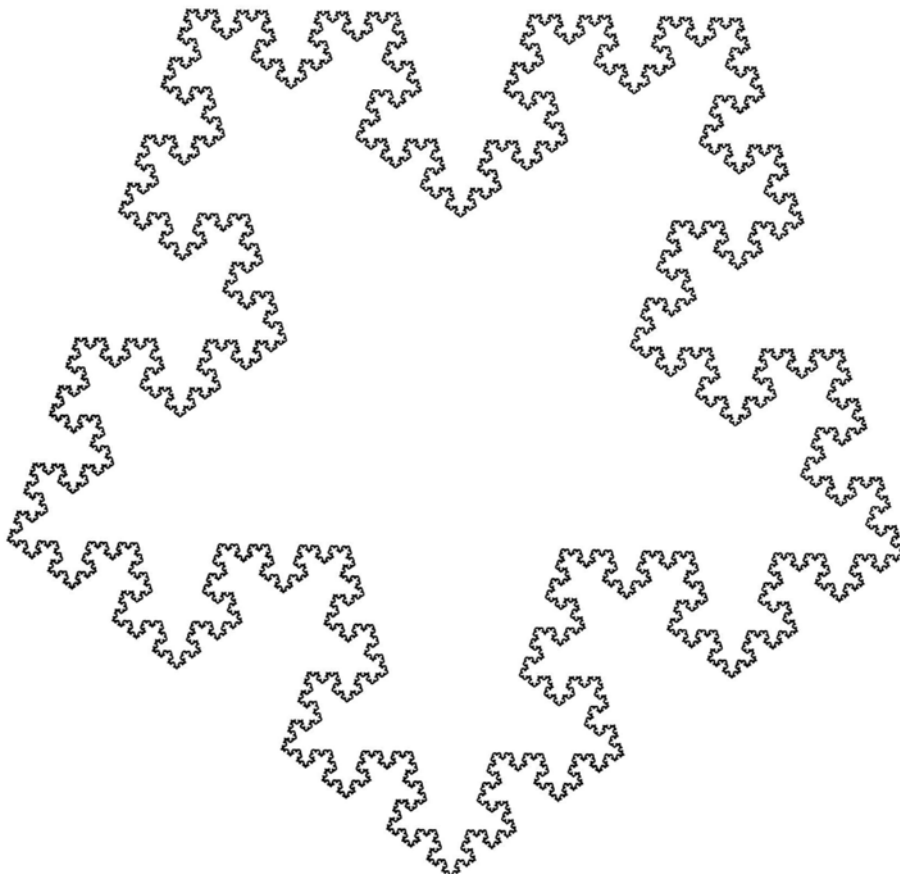
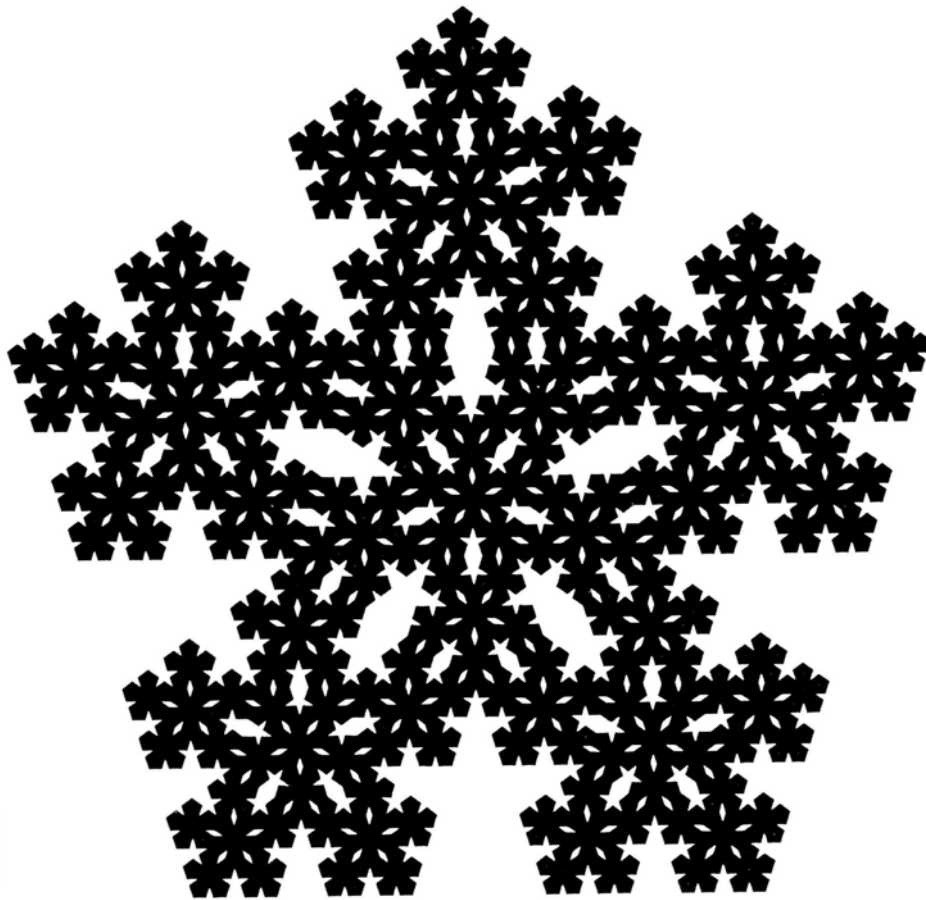
El *pentágono regular* y el *pentagrama pitagórico* son auténticos manantiales de *proporciones áureas* y de nuevos *pentagramas*.



ESPIRALES ÁUREO-PENTAGONALES



FRACTALES ÁUREO-PENTAGONALES



REMINISCENCIAS PITAGÓRICAS EN OBRAS DE GAUDÍ Y DALÍ



La estrella pentagonal pitagórica (*Pentagrama místico*) en tres mosaicos del Parque Güell de Barcelona.



El famoso cuadro (óleo sobre tela) de Dalí «*Leda Atómica*» pintado en 1949, sintetiza siglos de tradición matemática y simbólica, especialmente pitagóricas. Se trata de una filigrana basada en la *Proporción áurea*, pero elaborada de tal forma que no es evidente al espectador. En el boceto de 1947 «*Esbós per a Leda Atómica*» se advierte la meticulosidad del análisis geométrico realizado por Dalí, basado en el *Pentagrama místico* pitagórico.

EL SIMBOLISMO DEL *PENTAGRAMA MÍSTICO PITAGÓRICO*



Maniqueos, cátaros, albigenses, vadeses, templarios, masones, utilizaron la simbología pitagórica como emblema del conocimiento, de conjuros ocultistas, de llamada a los poderes buenos o maléficos.

En las ilustraciones:

1. El *pentagrama flamígero* de una logia masónica, símbolo utilizado, a modo pitagórico, como elemento de reconocimiento entre los iniciados.
2. Símbolo lapidario sepulcral.
3. Anagrama rosacruz.



El *Pentagrama pitagórico*, tal vez utilizado como símbolo de poder, forma parte de la parafernalia militar, sobre todo en los distintivos de los mandos. También el Pentágono es el símbolo y la forma física de la más importante institución militar de los EEUU.

Probablemente de aquí puede provenir el hecho de que la estrella pentagonal aparezca en numerosas banderas (Argelia, Burkina Faso, Burundi, Cabo Verde, Camerún, Rep. Centoaficana, Chile, China, Comores, Corea, Cuba, Djibuti, EEUU, Filipinas, Ghana, Granada, Guinea-Bissau, Honduras, Irak, Liberia, Marruecos, Mauritania, Micronesia, Mozambique, Paquistán, Panamá, Papúa, Puerto Rico, Salomón, Samoa, Santo Tomé, Senegal, Singapur, Siria, Somalia, Surinam, Togo, Túnez, Turquía, Uzbequistán, Venezuela, Vietnam y la Unión Europea).

En la ilustración las banderas de Cuba y la Unión Europea.

PITÁGORAS FILÓSOFO Y MATEMÁTICO



Pitágoras filósofo. Grabado de History of Philosophy. Thomas Stanley, 1660.

La extensa e intensa actividad intelectual de Pitágoras y su Escuela ha dejado un legado que está en la raíz de la Filosofía, la Ciencia, la Matemática, la Cosmología, la Música, ..., y ha tenido influencia decisiva en el Arte, la Educación, la Literatura, la Religión, la Mística, la Ecología, e incluso en la Magia y el Esoterismo.

Para Pitágoras Filosofía, Ciencia, Matemáticas, Cosmología y Religión, son aspectos indisolubles que conforman un estilo de vida: «*el modo de vida pitagórico*», imbuido por un entusiasmo místico que promueve una pasión por el conocimiento mediante la especulación filosófica y matemática como parámetros esenciales cotidianos de la existencia.

El Pitagorismo, tamizado por la Filosofía platónica, está en la base de la fundamentación filosófica e ideológica del Cristianismo. En Pitágoras encontramos el primer antecedente histórico del sincretismo cultural Oriente-Occidente, del pacifismo, del feminismo, del socialismo, del vegetarianismo, del ecologismo y de otros muchos «ismos» y tendencias que hoy son lugares corrientes en nuestra cultura.

Pitágoras es «*el filósofo del número*» artífice máximo del «*milagro griego*». Su figura histórica crea «*las raíces de la Filosofía y de la Matemática*», por eso su entidad intelectual es tan inconmensurable, que debemos situarla en «*el umbral del pensamiento occidental*», como «*cuna del saber y del conocimiento*».

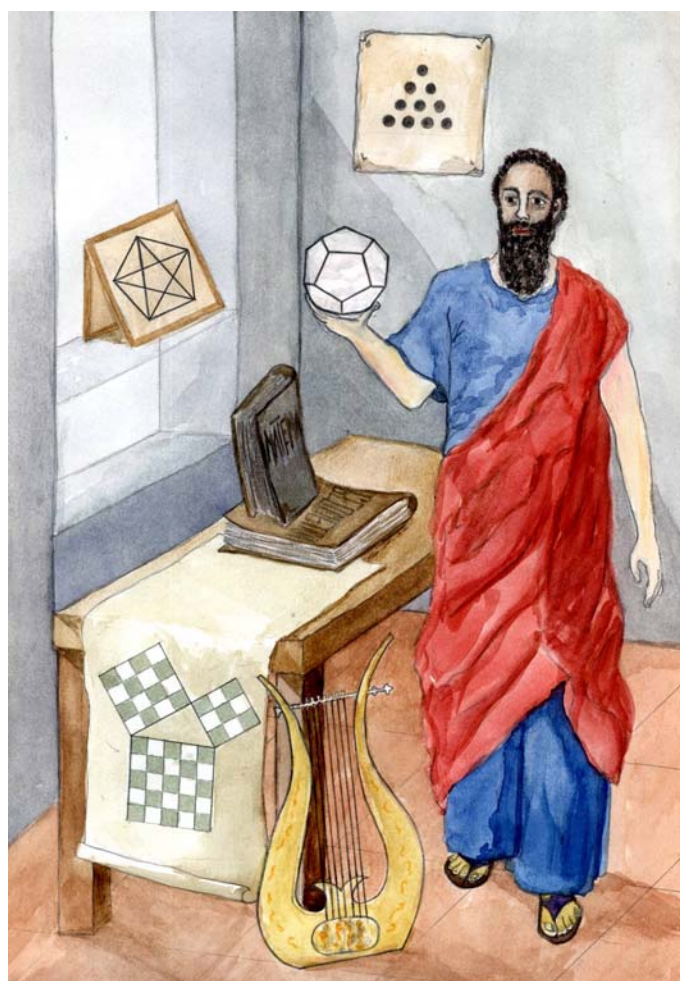
Pitágoras con los atributos de matemático: el Dodecaedro, la *Tetractys*, el Triángulo Rectángulo, el *Pentagrama Místico* y la Música.

Ilustración de Pedro Lario Cruz, 09/ 2000.

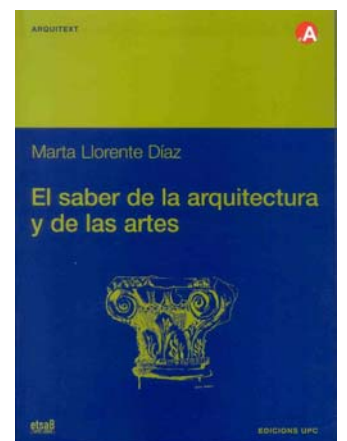
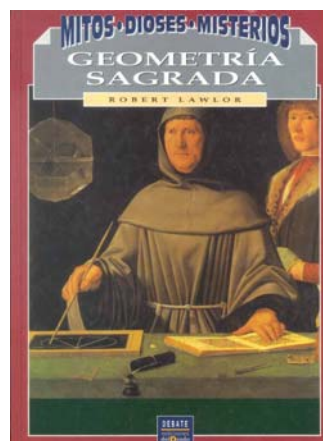
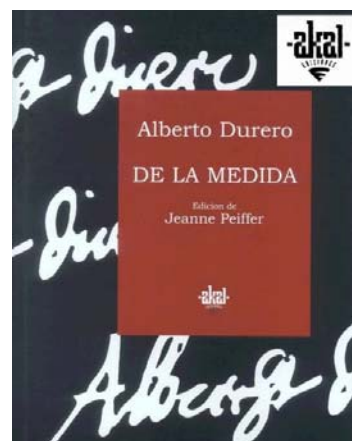
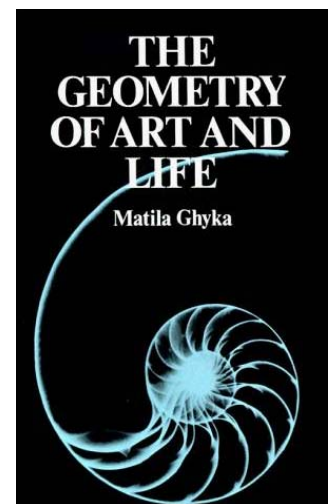
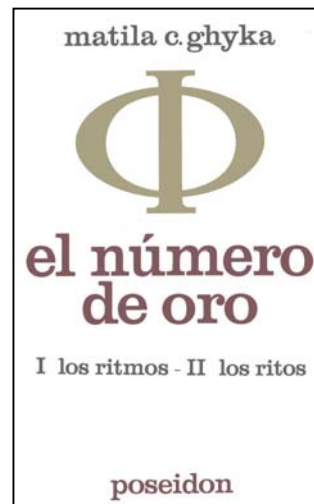
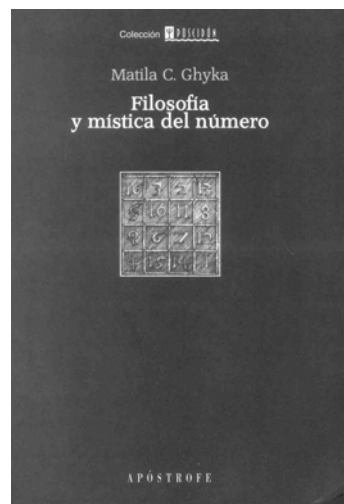
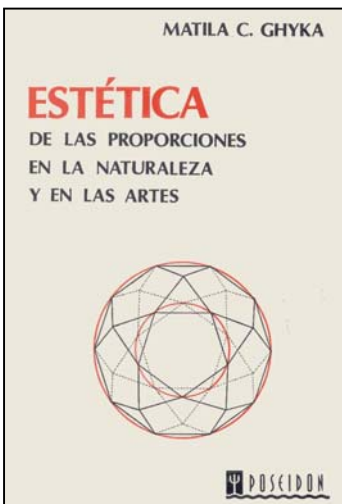
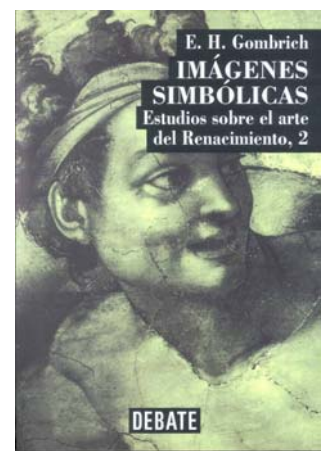
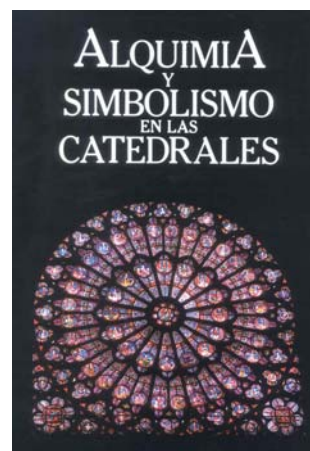
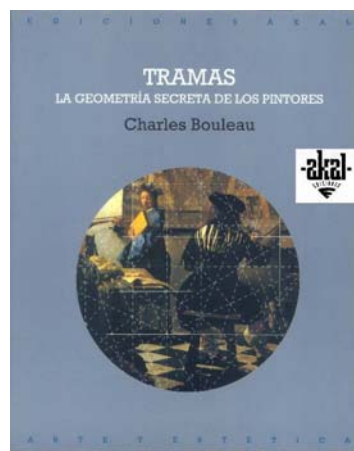
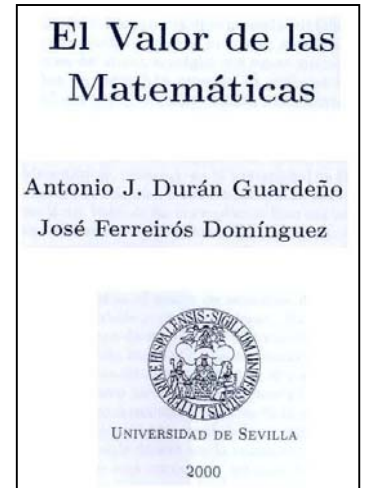
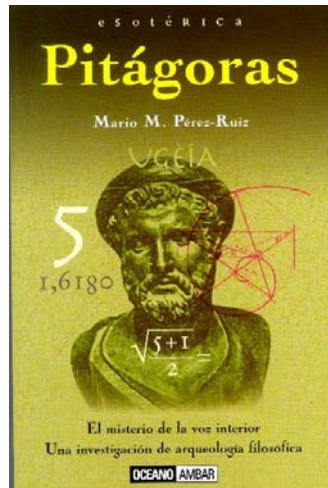
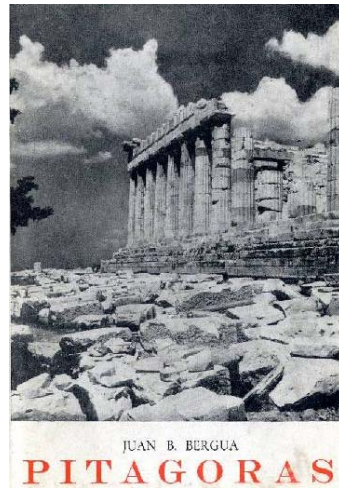
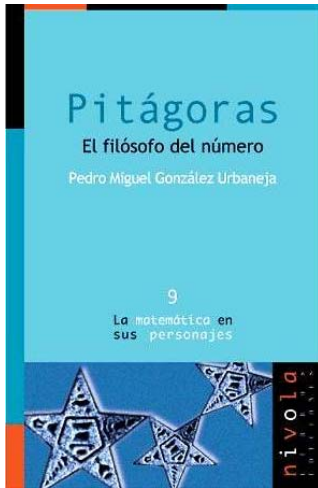
Pitágoras y los pitagóricos aportaron un ingente caudal de conocimientos matemáticos que fluían en el ambiente místico y filosófico de la Escuela Pitagórica:

- La doctrina aritmética incluye la Aritmología pitagórica de los números místicos, la clasificación de los números, los números perfectos y amigos y los números poligonales. Es lo que se llama el *misticismo aritmético-geométrico*, que incluye el descubrimiento del fundamento aritmético de la armonía musical y la construcción del primer sistema cosmológico no geocéntrico.
- La doctrina geométrica clásica atribuye a los pitagóricos infinidad de teoremas elementales sobre triángulos, polígonos, rectas paralelas, círculos, esferas, etc., resultados que conforman gran parte de los trece libros de *Los Elementos* de Euclides. Los pitagóricos aplicaban una teoría restringida de figuras semejantes (válida únicamente para el caso conmensurable) y según testimonio de Proclo conocían los poliedros regulares. Además, se consideran tópicos pitagóricos el famoso Teorema sobre el triángulo rectángulo y la Divina Proporción, ambos depositarios históricos del descubrimiento de las magnitudes inconmensurables.

Pero lo más importante del legado pitagórico matemático es la propia instauración de la Matemática como ciencia racional a través de la práctica de la demostración.



BIBLIOGRAFÍA



BIBLIOGRAFÍA

