LOS SÓLIDOS PITAGÓRICO-PLATÓNICOS
GEOMETRÍA, ARTE. MÍSTICA Y FILOSOFÍA

***Hace falta explicar qué propiedades deberían tener los cuerpos más bellos*, [...], *deben tener la propiedad de dividir en partes iguales y semejantes la superficie de la esfera en que están inscritos*.**
PLATÓN. *Timeo* 54b-55a.

Argumentando como un magnífico geómetra y profundísimo matemático, Platón asoció las cinco formas regulares a los cinco cuerpos simples que concurren en la formación de todo compuesto creado, es decir, a la tierra, el aire, el agua, el fuego y el cielo, como aparece en su *Timeo*, donde trata sobre la naturaleza del universo.
LUCA PACIOLI. *La Divina Proporción*. Akal, Madrid, 1991. Cap.LV. p. 103.

El Creador óptimo Máximo, al crear este mundo móvil y en la disposición de los cielos se atuvo a los cinco cuerpos regulares que han sido tan famosos desde los días de Pitágoras y de Platón.
J.KEPLER. *El secreto del universo*. Alianza Editorial, Madrid, 1992. p.65

El *Timeo* pasa por ser la obra más sublime de toda la filosofía antigua.
VOLTAIRE. *Diccionario filosófico*.

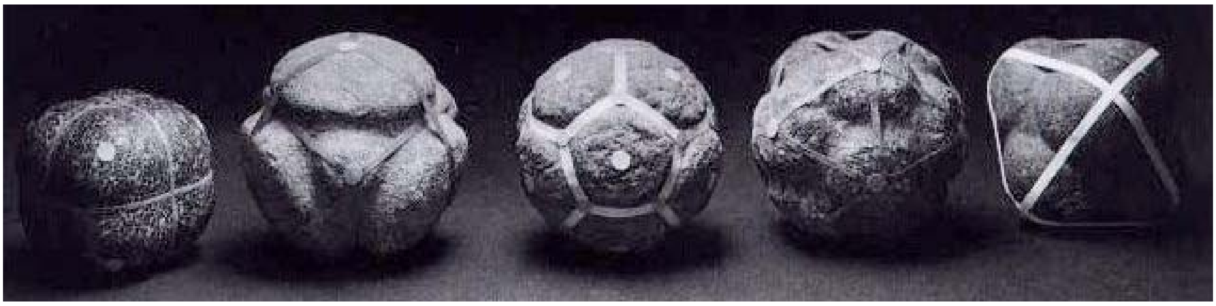
La exuberante geometría de los poliedros regulares ha fascinado en todas las civilizaciones, desde los pueblos neolíticos hasta nuestros días, con un significado de origen geométrico, estético, simbólico, místico y cósmico. Los poliedros son el núcleo de la cosmogonía pitagórica del *Timeo* de Platón, que los asocia con la composición de los elementos naturales básicos, teoría de orden místico que tendrá una decisiva influencia en la cosmología poliédrica de Kepler. Euclides sitúa a los cinco sólidos platónicos como clímax final, glorificación y cenit de un tratado tan brillante como *Los Elementos*, en lo que se considera el primer teorema de clasificación de la Matemática.

Los poliedros, han sido en todas las épocas, símbolo y expresión placentera de la belleza ideal, de ahí su presencia en muchos tratados en los que algunos artistas y teóricos (Piero della Francesca, Pacioli, Leonardo, Durero, ...) diseñan y escriben entre el Arte y la Geometría.

En la modernidad los poliedros han sido un importante nexo que vincula cuestiones de Matemática superior (Topología algebraica y Teoría de Grupos) con la resolución de ecuaciones algebraicas y la Cristalografía, pero también, por su belleza y misterio, una fuente inagotable de inspiración que enciende la fantasía de creadores, diseñadores y artistas, entre los que sobresalen Gaudí, Escher y Dalí, que como sus antepasados imputan a su geometría funciones de orden estético, cosmológico, científico, místico y teológico.

Los poliedros en el Neolítico

La historia de los poliedros regulares y su significado simbólico, místico y cósmico se remonta a los primeros estadios de la Cultura. Keith Critchlow en su obra *Time Stands Still* (Londres, 1979) da una prueba fehaciente de que eran conocidos por los pueblos neolíticos de Escocia, al menos mil años antes de Platón, como muestran las siguientes ilustraciones:



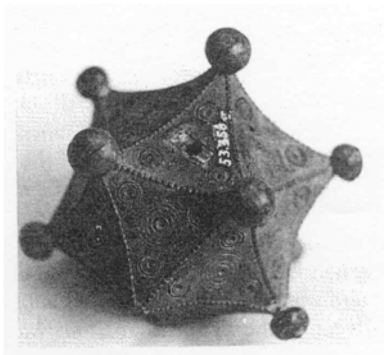
Sólidos regulares neolíticos de Escocia (Ashmolean Museum de Oxford).

Según Critchlow:

> «*Lo que tenemos son objetos que indican claramente un grado de dominio de las matemáticas que hasta la fecha todo arqueólogo o historiador de la matemática le había negado al hombre neolítico*.»

La arqueología ha exhumado numerosas muestras que demuestran que los sólidos platónicos eran conocidos por las culturas históricas europeas. Entre ellas sobresalen las siguientes:





1. **Esfera tetraédrica neolítica (Keith Critchlow: *Time Stands Still*).**
2. **Dodecaedro etrusco (500 a.C. Landes-Museum. Mainz, Alemania).**
3. **Icosaedro romano (Rheinisches Landes-Museum. Bonn)**

El origen de estas piezas puede ser de índole estético, místico o religioso, pero también es posible que fueran observadas en la naturaleza en la forma de algunos cristales como los de pirita, o en esqueletos de animales marinos como la radiolaria.

Según Lawlor (*Geometría Sagrada*. *Filosofía y Práctica.* Cap.10. Debate. Madrid, 1993. p.97) Gordon Plummer en su obra *The Mathematics of the Cosmic Mind,* afirma que la mística hindú asocia el icosaedro con el *Purusha*, la semilla-imagen de Brahma, el creador supremo, la imagen del hombre cósmico, equivalente al antropocosmos de la tradición esotérica occidental, mientras que el dodecaedro es asociado con Prakiti, el poder femenino de la creación, la Madre Universal, la quintaesencia del universo natural. En la mitología hindú, Purusha y Prakiti son la eterna dicotomía creadora, representación mística de la dualidad geométrica entre el icosaedro y el dodecaedro.

La Cosmogonía poliédrica pitagórica

Diversos historiadores de las Matemáticas admiten que las antiguas civilizaciones egipcias y babilónicas tenían conocimiento del cubo, tetraedro y octaedro y que este saber se trasmitiría a Grecia a través de los viajes de Tales y Pitágoras.

Proclo en sus *Comentarios al Libro I de los Elementos de Euclides* atribuye a Pitágoras la construcción de «*las figuras cósmicas*», nombre relacionado con su uso en la elaboración de una cosmogonía pitagórica que asociaría los cuatro elementos primarios –fuego, tierra, aire y agua–, con los cuatro sólidos– tetraedro, cubo, octaedro e icosaedro–, respectivamente, mientras el dodecaedro como símbolo general del universo se relacionaba de forma mística con el Cosmos, representación del universo armónico ordenado por el número.

Aecio (basándose en Teofrastro) atribuye a Pitágoras la cosmogonía descrita con estas palabras (W.K.C.Guthrie. *Historia de la Filosofía griega*. Vol.1. Gredos, Madrid,1999, p.256):

> «*Por ser cinco las figuras sólidas, denominadas sólidos matemáticos, Pitágoras dice que la tierra está hecha del cubo, el fuego de la pirámide* [tetraedro], *el aire del octaedro y el agua del icosaedro, y del dodecaedro está compuesta la esfera del todo*.»

También Filolao y en parte Simplicio aseguran lo mismo, mientras que algunos escoliastas del Libro XIII de *Los Elementos* de Euclides aseguran que los cinco cuerpos platónicos no tuvieron su origen en Platón, sino que el cubo, la pirámide [el tetraedro] y el dodecaedro derivaban de los pitagóricos y las otras dos formas de Teeteto.

Los pitagóricos estaban fascinados por los sólidos regulares, sobre todo por el dodecaedro, debido a la presencia del emblemático pentágono en sus caras, generador al trazar las diagonales de la estrella pentagonal, llamada *Pentagrama místico*, que era el símbolo de identificación de los miembros de la secta pitagórica y responsable, junto con el *Teorema de Pitágoras*, de la aparición de la inconmensurabilidad.

La construcción del dodecaedro era un secreto guardado celosamente, hasta el punto de que se fue fraguando una leyenda sobre el terrible fin de quien osó divulgar sus misterios, relatada entre otros autores por Jámblico (*Vida Pitagórica*, XVIII.88, p.97):

> «*De Hipasos cuentan que fue uno de los pitagóricos que por haber divulgado por escrito por primera vez la esfera de doce pentágonos* [la construcción del dodecaedro inscrito en una esfera] *pereció en el mar por impío*.»

Y también, más adelante (en *Vida Pitagórica*, XXXIV, 247, p.141), Jámblico escribe:

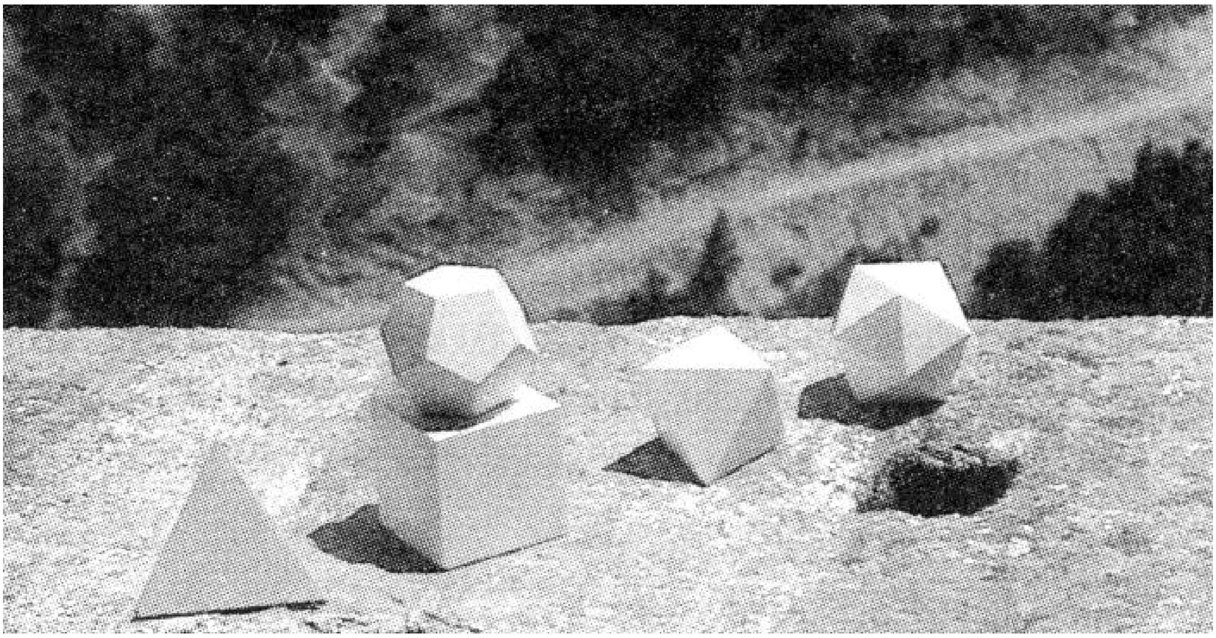
> *Dicen que la divinidad se enojó contra quien divulgó la doctrina de Pitágoras, pereciendo como un impío en el mar por sacrílego el que reveló cómo la estructura del icoságono* (*esto es el dodecaedro, una de las cinco figuras llamadas sólidas*) *se inscribía en una esfera*.»

Este texto recuerda la descripción apocalíptica de muchos escritores acerca de la maldición que cayó sobre Hipasos de Metaponto por haber revelado la aparición de lo inconmensurable. La analogía entre ambas leyendas avalaría la tesis de que el advenimiento de la inconmensurabilidad habría tenido lugar a través del pentágono de las caras del dodecaedro.

Aunque lo aseguren las fuentes mencionadas, la crítica histórica considera improbable que Pitágoras hubiera planteado la cosmogonía descrita, ya que, por una parte, fue Empédocles de Agrigento el primero que distinguió explícitamente los cuatro elementos primarios –fuego, tierra, aire y agua–, y por otra, según mencionan diversas fuentes, los primeros pitagóricos habrían reconocido sólo el tetraedro, el cubo y el dodecaedro, atribuyéndose el octaedro y el icosaedro al brillante matemático de la *Academia*, Teeteto, que realizó importantes aportaciones sobre los inconmensurables y que fue honrado por su amigo Platón con el nombre de uno de sus *Diálogos* (142a–210d).

LA COSMOGONÍA POLIÉDRICA PITAGÓRICA

Caricatura alegórica a la visión cosmogónica de Pitágoras con base en los poliedros regulares.



Los sólidos pitagóricos en una repisa situada sobre el techo de una cueva localizada en la cima del monte Kerkis, en Samos, que según una tradición local habría habitado Pitágoras.

Se especula que el interés de Pitágoras por los poliedros provendría de su observación infantil de las formas regulares geométricas de los minerales, ya que su padre era grabador de piedras preciosas. Por otra parte cristales de pirita en forma de dodecaedro son abundantes en el sur de Italia, donde vivió Pitágoras tras abandonar Samos.

Los Poliedros regulares en *El Timeo* de Platón

Los poliedros regulares se llaman, a veces, «*Cuerpos Platónicos*» por el relevante papel que juegan en el famoso *Dialogo* de Platón sobre la Naturaleza, *Timeo* (53a–56e), que es, sin duda, el más profundamente pitagórico de su obra. El principal interlocutor de este *Diálogo* es quien le da el nombre, Timeo, un ilustre personaje de la Magna Grecia muy versado en la Filosofía pitagórica, como escribe Platón, casi al comienzo del *Diálogo* (*Timeo*, 20a):

> «*Timeo, a quien tenemos aquí, ciudadano de la tan civilizada ciudad de Locria en Italia*, [...] *que ha tenido parte en los más grandes honores de su patria, se ha elevado, al menos por lo que yo creo, a la cima de toda la filosofía*.»

En el *Timeo*, Platón expone, de forma mística, la asociación que presuntamente habría hecho Pitágoras entre el tetraedro, el cubo, el octaedro y el icosaedro y los cuatro elementos naturales primarios, que Empédocles había vinculado con la constitución de toda la materia; mientras que la veneración pitagórica por el dodecaedro conduce a Platón, fascinado por todo lo pitagórico, a considerar a este sólido como la *quintaesencia,* el *quinto elemento*, la sustancia de los cuerpos celestiales, el símbolo místico del Cosmos.

Platón construye, con base en Pitágoras y con el auxilio de Teeteto, una de las primeras teorías matemáticas completas: una definición general junto con una completa clasificación de los objetos que la satisfacen. La definición es (*Timeo*, 55a):

> «[Un sólido es regular si] *tiene la propiedad de dividir en partes iguales y semejantes la superficie de la esfera en que está inscrito*.»

En este *Dialogo* platónico la belleza es un elemento esencial que preside la ordenación del cosmos por el Demiurgo –entendido como el Dios artesano– a través del número, la forma y la medida, de ahí la intervención de los poliedros en la configuración del universo, por ser los cuerpos más bellos, por su regularidad, simetría y perfección (*Timeo,* 53a–53b):

> «*Ciertamente antes de la formación del mundo, los cuatro elementos se comportaban sin razón ni medida*. [...] *Cuando el Todo comenzó a ordenarse* [...], *fue cuando todos los géneros recibieron de él* [de Dios] *su figura por la acción de las ideas y los números*. [...] *Y en la medida en que era posible el Dios ha hecho un conjunto, el más bello y mejor*. *Tomemos, pues, en todo y siempre esta proposición como base.*»

La suprema inteligencia divina más que crear el universo se limita a poner orden en el caos primigenio, a base de separar las cuatro especies de cuerpos que se componían de elementos regulares, formados a su vez de elementos regulares más simples, cuya geometría intrínseca describirá Platón, como veremos más adelante.

Continúa Platón ponderando la belleza y propiedades estéticas de los poliedros (53d-53e):

> «*Hace falta explicar qué propiedades deberían tener los cuerpos más bellos y en número de cuatro, para ser por una parte distintos los unos de los otros y por otra parte capaces de nacer uno de los otros al deshacerse. Si conseguimos esto tendremos la verdad sobre el origen de la tierra*, *del fuego y de los otros cuerpos intermedios entre esos dos, según relaciones regulares*. *Y no concederemos a nadie que sea posible ver en alguna parte cuerpos más bellos, cada uno de los cuales constituyendo un género distinto*. *En consecuencia, esforcémonos por formar una progresión con la ayuda de estos cuatro géneros de cuerpos distintos en belleza y demostrar de esta manera que hemos comprendido suficientemente la naturaleza de ellos.*»

Para Platón, con su inveterado idealismo, la belleza de los sólidos regulares no reside realmente en su apariencia física, sino que permanece oculta en el ámbito ideal del pensamiento matemático. Tal belleza reside, entre otras razones, en que se puede demostrar mediante un razonamiento apriorístico –independiente de la investigación empírica– que existen cinco y sólo cinco representaciones de la idea de poliedro regular, uno de los resultados más famosos en toda la Historia de las Matemáticas, que corona a modo de brillante clímax final la última proposición de *Los Elementos* de Euclides y que debió ser tal vez demostrado en la propia Academia platónica, seguramente por Teeteto.

La belleza de los poliedros regulares se basa en su significación filosófica. La interacción entre el concepto general de regularidad y su realización en exactamente cinco sólidos sólo puede aprehenderse a través de la Matemática. De los ejemplos pitagóricos –tetraedro, cubo y dodecaedro–, Platón asciende –con el concurso de Teeteto– al concepto general de poliedro y regresa a lo particular, añadiendo el octaedro y el icosaedro, completando así la lista. Se trata de un prototipo matemático del procedimiento dialéctico establecido en la *República* (511b) y un magnífico ejemplo de la concepción platónica de la forma y la participación:

> «*cada uno de los cinco sólidos participa en la idea de sólido regular, e inversamente, esta idea se plasma exactamente en cinco casos particulares.*»

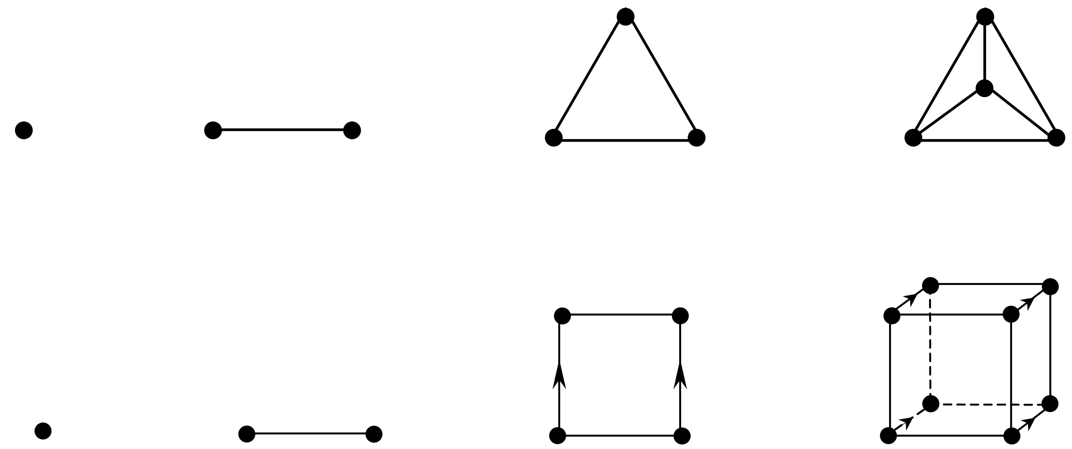
Platón pone en relación los cuatro elementos con los cuatro primeros poliedros. Pero para el filósofo los cuatro tipos de sustancia no son los primeros principios –el *arkhé*– del universo (48b–48c), por eso, en primer lugar, descompone los sólidos regulares en superficies: considera que el tetraedro, el octaedro y el icosaedro constan de un mismo tipo de superficie –el triángulo equilátero–, mientras que el cubo se compone de cuadrados. Ahora Platón realiza una segunda descomposición, porque las dos clases de superficies que componen los poliedros se obtienen a partir de dos clases de triángulos que les anteceden en el orden de los principios (*Timeo*, 53c–53d):

> «*En primer lugar, resulta evidente para todo el mundo que el fuego, la tierra, el agua y el aire son* cuerpos. Ahora bien: la esencia del cuerpo posee también el espesor. *Pero todo espesor envuelve necesariamente la naturaleza de la superficie*. *Y toda superficie de formación rectilínea está compuesta de triángulos.*
>
> *Ahora bien: todos los triángulos derivan su principio de dos tipos de triángulos, de los cuales cada uno tiene un ángulo recto y los otros agudos*. *De estos triángulos uno tiene, por una parte y por otra, una parte del ángulo recto dividido por dos lados iguales; el otro tiene partes desiguales del ángulo recto divididas por lados desiguales. Este es el principio que suponemos para el fuego y para los demás cuerpos elementales*. *Y de esta manera vamos a avanzar, de conformidad con un razonamiento cuya verosimilitud va unida a la necesidad*.»

He aquí la teoría platónica de composición de los cuerpos, que constituye una especie de atomismo geométrico, a la que seguirá la descripción de sus transformaciones y cambios físicos –dilatación, disolución, congelación, fusión, evaporación– por la acción del aire y el calor, es decir, un estudio que incluye la Metereología. Platón indica que toda superficie rectilínea está constituida de triángulos o se resuelve en triángulos, lo que no es otra cosa que la medición práctica de superficies rectilíneas. A su vez todos los triángulos tienen su origen en dos tipos de triángulos rectángulos; el primero isósceles, que no admite más que una especie; y el segundo, escaleno, que tiene un número indefinido de especies. A estos tipos de triángulos reconducirá la composición de todos los cuerpos, pero antes, Platón escribe realiza una manifestación teológica (*Timeo*, 53d):

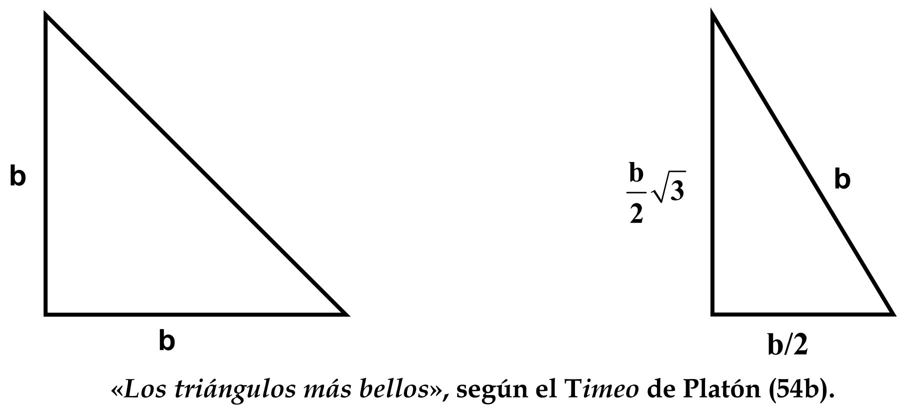
> *En cuanto a los principios superiores aún a estos, solamente Dios los conoce, y entre los mortales, aquellos a quienes Dios concede su amistad*.»

¿A qué principios se refiere Platón? El carácter eminentemente pitagórico del *Timeo*, permite conjeturar que los principios aludidos son los números, ya que en un recorrido inverso, los sólidos derivan de los planos, los planos de las rectas, la recta del punto, que es la representación de la unidad, de la que surgen los números; todo ello acorde con el misticismo aritmético–geometrico de los pitagóricos, que al postular la doctrina de que «*las cosas son números*», supone que la estructura de los objetos depende de las formas geométricas, que, a su vez, podrían describirse mediante números, basando la generación de las figuras geométricas a partir de los puntos, según el mínimo número de puntos necesarios para definir cada una de ellas, de acuerdo con alguno de los dos esquemas siguientes:



Platón considera dos tipos de triángulos rectángulos que corresponderían a los más bellos, –el triángulo rectángulo isósceles y el escaleno mitad de un triángulo equilátero– (54a–54b):

> «*De los dos triángulos el que es isósceles no tiene más que una especie; el que es escaleno tienen un número indefinido de ellas. Nos es pues necesario dar la preferencia, entre los que tienen un número indefinido de especies, al que sea más bello.* [...] *Brevemente admitimos que de entre todos los triángulos escalenos, muy numerosos, hay uno que es el más bello, y dejaremos de lado los demás. Este triángulo será aquel que, utilizado dos veces, nos permita formar el tercer triángulo, que es el equilátero. Por qué razón ello es así sería muy largo de demostrar Escojamos, pues, dos triángulos de los que están constituidos los cuerpos del fuego y de todos los demás elementos: uno es isósceles, el otro tiene siempre el cuadrado de su lado mayor* [su cateto mayor] *igual a tres veces el cuadrado del menor.*»

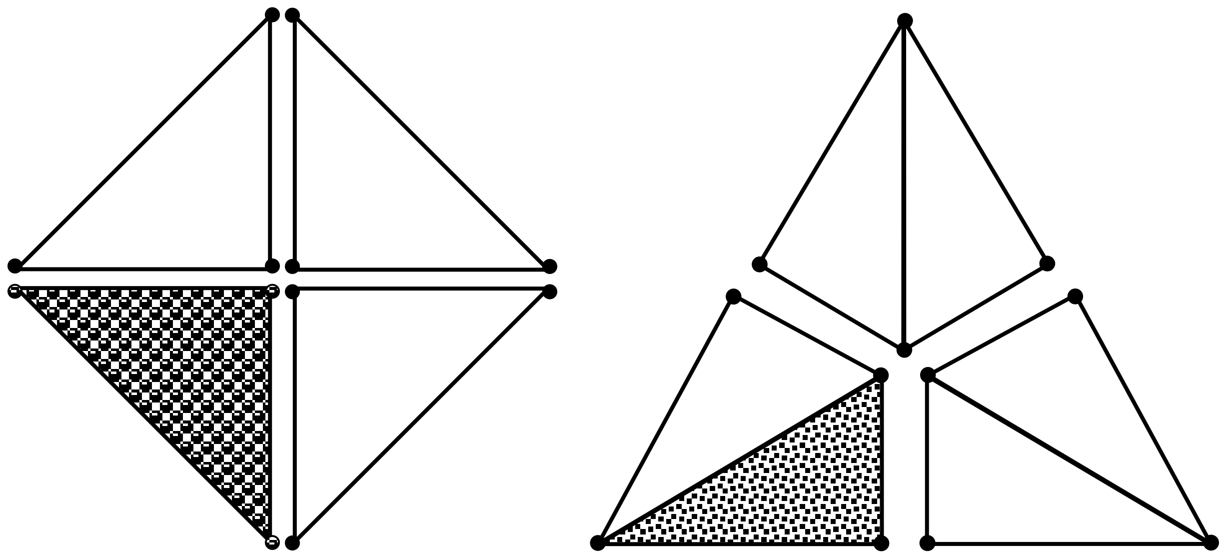


«*Los triángulos más bellos*», según el T*imeo* de Platón (54b).

Platón tomará los triángulos más bellos como subpartículas bidimensionales que componen partículas tridimensionales, es decir, reunidos esos triángulos forman otros triángulos y tetrágonos que al ser, a su vez, reunidos, forman los ángulos planos de los sólidos de que se componen las cuatro especies de cuerpos –los cuatro poliedros regulares: tetraedro, octaedro, icosaedro y hexaedro o cubo–.

Por eso, a continuación (*Timeo*,54d–55c), Platón realiza una curiosa descomposición de las caras de los cuatro sólidos a partir de los triángulos elementales que ha descrito como los más bellos, es decir, estudia la generación y composición de los poliedros regulares mediante elementos geométricos que en última instancia son cuatro triángulos rectángulos isósceles –cada uno de ellos cuarta parte de un cuadrado– para el caso de la cara del cubo, mientras que para el tetraedro, octaedro e icosaedro, considera sus caras compuestas por seis triángulos rectángulos –escalenos bellos– con la hipotenusa doble que el cateto menor –cada uno de ellos mitad de un triángulo equilátero–, obtenidos bisectando los ángulos de triángulos equiláteros y combinando seis mitades para formar un nuevo triángulo equilátero.

La representación gráfica de la generación triangular de las caras de los cuatro poliedros sería la siguiente:



Generación de las caras de los poliedros cubo y tetraedro, octaedro e icosaedro, mediante «*los triángulos más bellos*», según el T*imeo* de Platón (54d–55c).

Así pues, para Platón el análisis de la multiplicidad de las cosas no se detiene en los cuatro elementos tradicionales– fuego, tierra, aire y agua–. Bajo la influencia pitagórica, para Platón la conformación de la materia está determinada en un nivel anterior por su estructura matemática geométrica que se remonta a dos elementos geométricos básicos –el semi triángulo equilátero y el rectángulo isósceles–.

Pero Platón debía tener claro que existen cinco cuerpos poliédricos regulares. En cuanto al quinto poliedro regular –el dodecaedro– resulta que no puede engendrarse a partir de los «*triángulos más bellos*», por eso Platón no lo asocia con ningún elemento separado, sino que le concede una importancia muy superior, indicando que Dios lo empleó no para uno de los cuatro elementos –el dodecaedro es para Platón la síntesis de los cuatro elementos–, sino como la forma de la totalidad del cosmos que los contiene, es decir, el Creador habría utilizado el dodecaedro en la delineación global del universo. En efecto, Platón menciona al dodecaedro con una críptica sentencia de corte pitagórico (*Timeo,* 55c):

> «*Quedaba aún una sola y única combinación; el Dios se sirvió de ella para el Todo cuando esbozó su disposición final*.»

Platón hace otra referencia cósmica al dodecaedro en el *Diálogo* sobre el alma, *Fedón* (110b):

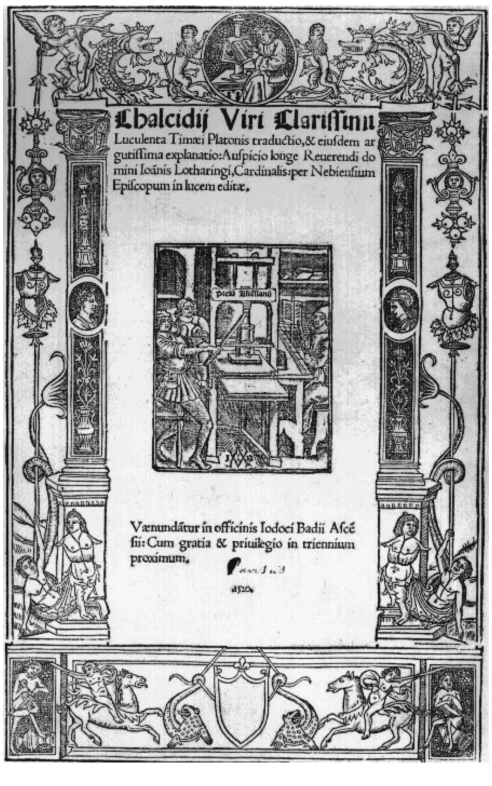
«*Se dice que la tierra se presenta a la vista, si alguien la contempla desde arriba, como las pelotas de doce pieles*, *abigarrada, con franjas de diferentes colores, siendo los que hay aquí y emplean los pintores algo así como muestra de aquellos*.»

Este pasaje platónico compara la tierra esférica con «*las pelotas de doce pieles*». Platón presenta estas pelotas como algo familiar, dado que era una práctica habitual en la época de Platón hacer pelotas cosiendo doce piezas pentagonales de cuero, formando un dodecaedro, que, cuando se hinchaba, adquiría la forma esférica. Parece, pues, que de esta cita se desprende la identificación en la práctica de la esfera con el dodecaedro, y en otro orden de cuestiones platónicas una manifestación más del idealismo de Platón al concebir los colores de los pintores como trasuntos de los auténticos colores ideales, que son los que se contemplan desde ámbitos celestiales.

Con sus explicaciones geométricas sobre la construcción con base en los triángulos más bellos de los cuatro cuerpos regulares –tetraedro, octaedro, icosaedro y cubo– más la consideración significativamente especial del dodecaedro, Platón expone una teoría que se fundamenta en una de las más recientes conquistas geométricas de su tiempo. Se trata de la Geometría del espacio, que Aristóteles llamará *Estereometría* (*Analítica Posterior, Libro* I, Cap.13, 78b), aunque también aparece este nombre en el *Diálogo* platónico *Epinomis* (991b), de dudosa autenticidad. Platón se queja, en la *República*, de que su estudio ha sido hasta el momento muy débil, de modo que debería ser promocionado por el Estado (528b):

«[...] *Siguiendo un orden gradual, después de la segunda dimensión se debería tratar la tercera, es decir, lo que se refiere al desarrollo de los cubos y lo que participa de la profundidad* [...]. *No existe ninguna ciudad en la que se aprecien debidamente estos conocimientos en los que se trabaja débilmente por su propia dificultad* [...], *a pesar de que tiene un encanto extraordinario*.»

Los cinco poliedros regulares son las únicas formas corpóreas derivables de la geometría del triángulo que se pueden inscribir en una esfera, y por ello Platón se sirve de ellas para establecer el arquetipo perfecto del universo, es decir, la esfera.

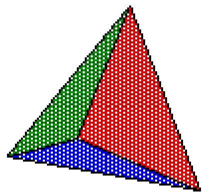


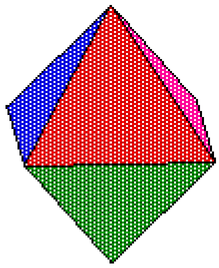
1. **Imagen renacentista de Platón.**
2. ***El Timeo* de Platon. *Chalcidii luculenta Timaei traductio, et eiusdem argutissima explanatio.* Jodocus Badius Ascensius, París, 1520 .**

LA GENERACIÓN TRIANGULAR DE LOS CINCO SÓLIDOS PLATÓNICOS EN EL *TIMEO* (54d–55c)

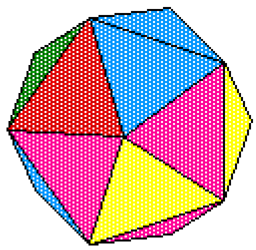
54d **Es necesario explicar cuál es la forma propia de cada uno de los cuerpos, cómo se produce y de qué combinación de números procede.**

Comenzaremos por la primera especie, aquella cuyos componentes son más pequeños. El elemento matemático de esta especie es aquel cuya hipotenusa
54e **tiene una longitud doble de la del ángulo más pequeño del ángulo recto. Dos de esos triángulos se pegan según la hipotenusa, y esta operación se renueva y se repite tres veces, de manera que todas las hipotenusas y todos los lados pequeños de los ángulos rectos vienen a coincidir en un mismo punto que es como un centro. Nace así un triángulo equilátero único, compuesto de pequeños triángulos en número de seis. Cuatro de esos triángulos equiláteros, unidos según tres ángulos planos, dan lugar a un sólo e idéntico ángulo sólido que**
55a **tiene un valor inmediatamente inferior al del ángulo plano más obtuso. Y una vez formados cuatro ángulos de este tipo, nace la primera especie de sólido, que tiene la propiedad de dividir en partes iguales y semejantes la superficie de la esfera en que está inscrito.**

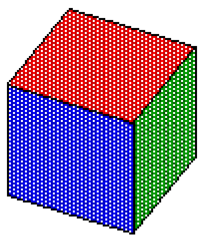




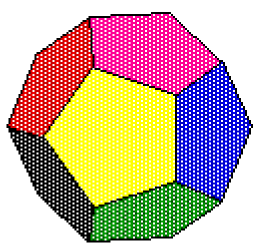
La segunda especie se compone de los mismos triángulos. Ocho de entre ellos se reúnen para formar triángulos equiláteros, y esos a su vez forman un ángulo sólido único, formado de cuatro ángulos planos. Cuando se construyen seis ángulos sólidos de esta clase, resulta acabado el cuerpo de la segunda especie.



La tercera especie se forma por la unión de ciento veinte triángulos elementales, es decir, de doce ángulos sólidos, de los cuales cada uno está comprendido dentro
55b **de cinco triángulos planos equiláteros, y tiene bases que son veinte triángulos equiláteros. Cuando hubo generado estos tres sólidos, el primer tipo de triángulo acabó su función.**



Por su parte, el triángulo isósceles engendró la naturaleza del cuarto cuerpo elemental. Este cuerpo esta formado por cuatro triángulos isósceles: los lados de sus ángulos rectos se une en un centro y forman una figura rectangular equilátera. Al pegarse seis de estas figuras, dan lugar a ocho ángulos sólidos, de los que cada uno
55c **está constituido por la unión armónica de tres ángulos planos. Y la figura así obtenida es la figura cúbica, que tiene como bases seis superficies cuadrangulares, de lados iguales.**



Quedaba aún una sola y única combinación: el Dios se sirvió de ella para el Todo cuando esbozó su disposición final.

LA COSMOGONÍA PLATÓNICA DEL *TIMEO*

Platón con el rostro de Leonardo. Fragmento de la *Escuela de Atenas* de Rafael.
Platón sostiene en una mano *El Timeo* y eleva hacia el cielo el dedo índice de la otra mano como indicando lo ideal y lo sublime.

ΤΙΜΑΙΟΣ

ΠΛΑΤΩΝΟΣ ΤΙΜΑΙΟΣ, Η ΠΕΡΙ ΦΥΣΕΩΣ

ΤΑ ΤΟΥ ΔΙΑΛΟΓΟΥ ΠΡΟΣΩΠΑ

Σωκράτης. Κριτίας. Τίμαιος. Ἑρμοκράτης.

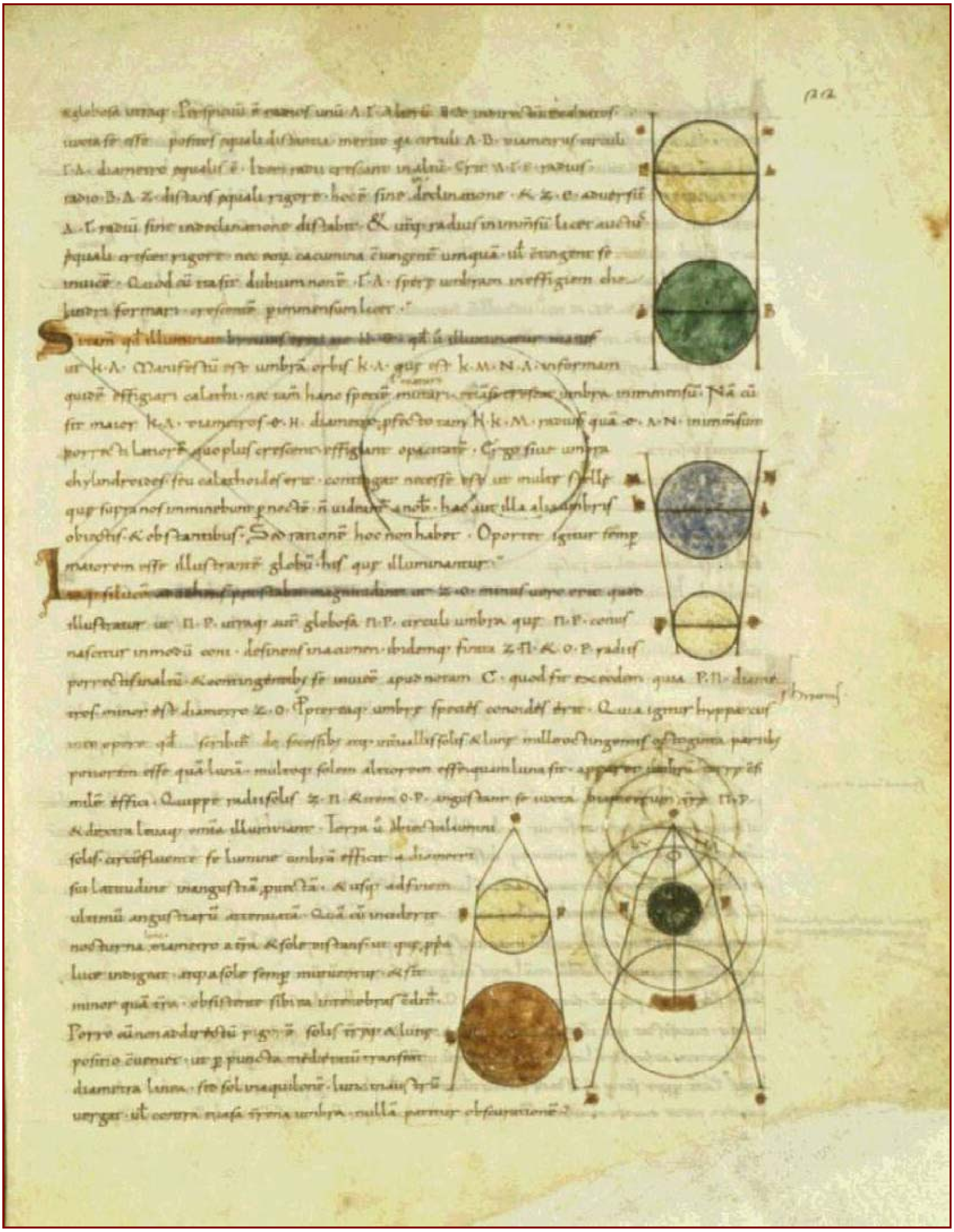
Primera página del *Timeo* de Platón. *Platonis Opera Omnia* Basilea, 1534. Biblioteca Colombina de Sevilla.

El Timeo es un *Diálogo* de raíz pitagórica donde Platón expone su cosmogonía. Platón describe con abundancia de detalles cuáles son las formas fundamentales inteligibles que imponiéndose a una materia primitivamente informe, han presidido la concepción y realización del orden cósmico, en la génesis de todo cuanto nos rodea en la naturaleza, bajo la acción demiúrgica del Dios geómetra soberano, que dispuso los cuatro elementos en la forma y número que exige la necesaria y bella armonía matemática.

Cuatro de los poliedros regulares –tetraedro, octaedro, icosaedro y cubo– que son las formas geométricas más bellas, son, respectivamente, los átomos de los elementos –fuego, aire, agua y tierra–. Pero los elementos primigenios originales constituyentes del mundo material no son propiamente estos poliedros, sino sus componentes geométricos, formados por dos clases de triángulos rectángulos –los triángulos más bellos–; uno es medio cuadrado, es decir, isósceles, que compone el cuadrado cara del cubo y otro es medio triángulo equilátero, y por tanto escaleno, que compone las caras triangulares equiláteras de los otros tres poliedros.

En cuanto al dodecaedro, cuyas caras no se pueden componer con los triángulos más bellos, Platón sugiere que es la forma general del universo.

EL *TIMEO* DE PLATÓN EN LA BIBLIOTECA VATICANA



Página del *Timeo* de Platón, traducido al latín, en el siglo V, por el helenista hispanorromano Calcidius. Manuscrito de la *Colección Vaticana* (*Reg. lat. 1308 fols. 21 verso-22 recto medbio01 NAN.10*).

En el siglo XVI, este manuscrito pertenecía a la Universidad de Leiden, de donde pasaría a la Biblioteca de la reina Cristina de Suecia, siendo entregado a la Biblioteca Vaticana a su muerte.

Sigue Platón, en el *Timeo*, argumentando la identificación de cada poliedro (de acuerdo con sus cualidades) con cada uno de los elementos primarios para concluir (55d–56b):

> «*A la tierra le atribuimos la figura cúbica, porque la tierra es el* [elemento] *más difícil de mover, el más tenaz, el de las bases más sólidas*, [...], *la figura sólida de la pirámide* [tetraedro] *es el elemento y el germen del fuego; la segunda en orden de nacimiento* [octaedro] *es el elemento del aire, y la tercera* [icosaedro]*, el del agua.*»

Para Platón –bajo una aureola de Filosofía pitagórica–, el hacedor del universo creó el orden a partir del caos primigenio de los elementos por medio de las formas y los números esenciales de los poliedros, en una acción que culmina ese ordenamiento en la disposición armónica de los cinco elementos en el universo físico (*Timeo*, 56c):

> «*Y por lo que respecta a las relaciones numéricas que se hallan en su número, en sus movimientos y en sus demás propiedades, hay que considerar siempre que el Dios, en la medida en que el ser de la necesidad se dejó persuadir espontáneamente, las ha realizado en todo de manera exacta, y así ha armonizado matemáticamente los elementos*.»

He aquí una bella analogía que concede a los cinco poliedros regulares el poder de dar forma al mundo material, de modo que subyace en Platón una *Geometría Sagrada* que actúa como metáfora del orden universal.

Platón continúa en el *Timeo* explicando una especie de transición entre los diversos elementos como reflejo de las posibles disoluciones de unos poliedros para formar otros (*Timeo*,56c–56e):

> «[...] *La tierra nunca puede convertirse en otro* elemento. [...] Si *el agua es partida por el fuego o por el aire, es posible que dé lugar a un cuerpo de fuego y dos de aire. En cuanto a los elementos de aire, en caso de perder su unidad y deshacerse, darán lugar a dos corpúsculos de fuego. A la inversa, cuando el fuego rodeado por el aire, el agua o algo de tierra* [...] *lucha y, vencido, se quiebra, dos cuerpos de fuego se condensan en un elemento de aire. Si el aire a su vez es dominado y fragmentado, de dos elementos y medio se forma por aglomeración, un cuerpo completo de agua*.»

A partir de la asociación de los cuatro poliedros –tetraedro, cubo, octaedro e icosaedro– con los cuatro elementos –fuego, tierra, aire y agua–, Platón cifra en la composición y descomposición de los poliedros regulares y su posibilidad de transformarse uno en otro en virtud de su construcción en base a los mismos triángulos la explicación y descripción de fenómenos naturales. En concreto saca consecuencias naturales de las siguientes configuraciones:

- El icosaedro con sus veinte triángulos equiláteros se puede disolver en dos octaedros y un tetraedro.
- El octaedro con sus ocho triángulos equiláteros se puede disolver en dos tetraedros.
- La disolución de dos tetraedros con sus cuatro triángulos equiláteros cada uno se pueden condensar en un octaedro.
- La disolución de dos octaedros y medio se puede condensar en un icosaedro.

Al igual que había hecho Pitágoras en forma numérica, más allá de interpretaciones mitológicas, aunque igualmente fantásticas, Platón apura la explicación de las leyes de la naturaleza en términos geométricos.

LA FILOSOFÍA DE LA MATEMÁTICA DE PLATÓN

Platón. Parque de Lezama. Buenos Aires.

Por herencia pitagórica, para Platón la Matemática no sólo es una realidad perfecta sino la auténtica realidad de la cual nuestro mundo cotidiano no es más que un reflejo imperfecto, una sombra en el sentido del *Mito de la caverna* del diálogo la *República* (Libro VII, 514a–519d). Por tanto los conceptos de la Matemática son independientes de la experiencia y tienen una realidad propia; se los descubre, no se los inventa o crea. Los juicios geométricos son eternos y apriorísticos, y corresponden a una realidad intemporal e inmutable, que es la auténtica realidad, más real que la engañosa, imperfecta e incompleta realidad sensible. De acuerdo con su idealismo geométrico, Platón subraya que los razonamientos que hacemos en Geometría no se refieren a las figuras concretas que dibujamos sino a las ideas absolutas que ellas representan (*República*, 510d–510e):

> **«[Los matemáticos]** *se sirven de figuras visibles que dan pie para sus razonamientos, pero en realidad no piensan en ellas, sino en aquellas cosas a las que se parecen. Y así, por ejemplo, cuando tratan del cuadrado en sí y de su diagonal, no tienen en el pensamiento el que dibujan y otras cosas por el estilo. Las mismas cosas que modelan y dibujan, cuyas imágenes nos las ofrecen las sombras y los reflejos del agua son empleadas por ellos con ese carácter de imágenes, pues bien saben que la realidad de esas cosas no podrá ser percibida sino con el pensamiento.***»**

Por ello, para Platón, la Matemática debe ser independiente de todo pragmatismo, de toda empiria y de la utilidad inmediata, y debe estar liberada intelectualmente de todo instrumento material –que son elementos corruptores y degradantes–, como señala Plutarco en sus *Vidas Paralelas* (*Vida de Marcelo*. XIV), cuando nos habla de la indignación de Platón ante el uso de artificios mecánicos en la Geometría:

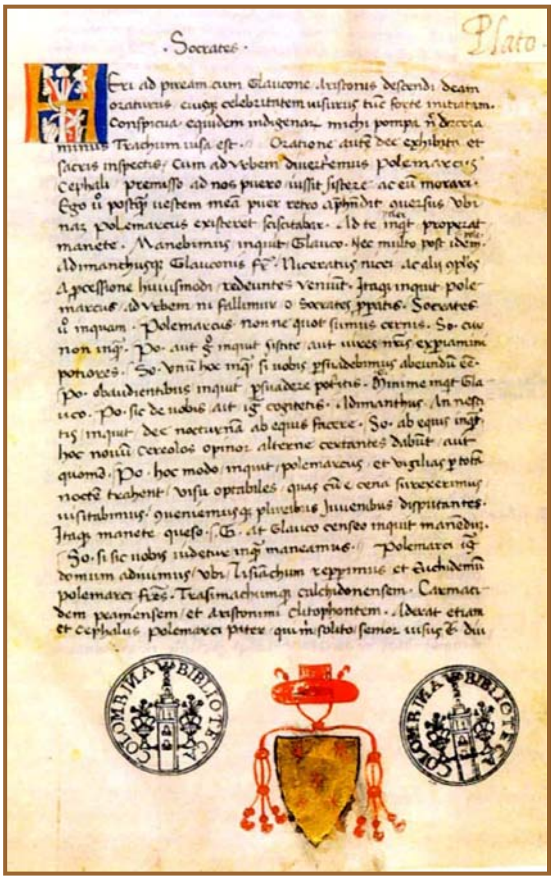
> **«***Platón se indispuso e indignó con ellos* **[contra Arquitas de Tarento y Eudoxo de Cnido]**, *porque degradaban y echaban a perder lo más excelente de la Geometría con trasladarla de lo incorpóreo e intelectual a lo sensible y emplearla en los cuerpos que son objeto de oficios toscos y manuales.***»**

El mismo Platón señala una y otra vez en la *República* que la Geometría no debe tener otra finalidad que el conocimiento en sí mismo. Así lo proclama en 527a:

> **«[...]** *Nadie que se dedique a la Geometría, por poca práctica que tenga en ella, pone en duda que esta ciencia es todo lo contrario de lo que supondría la terminología de los geómetras.* **[...]** *Dicen muchas cosas que por fuerza resultan ridículas. Pues hablan como si realmente actuasen y como si sus palabras tuviesen tan sólo un fin práctico, adornando su lenguaje de términos como cuadrar, prolongar, adicionar. Y, sin embargo, en verdad toda esta ciencia se cultiva con el único objeto de conocer.***»**

De esta visión platónica idealista podría derivar la distinción que en la Grecia clásica se hizo entre Aritmética y Geometría como factores espirituales de elevación hacia la Filosofía y Logística y Geodesia como instrumentos materiales y utilitarios de los artesanos y técnicos. Así pues, debido a la influencia de Platón, la Geometría permanecería a partir de entonces ligada a un modelo teórico de la Matemática pura, que rechaza de forma elitista sus aplicaciones prácticas y desprecia el estudio de la dimensión sensible de la realidad. Como consecuencia de esta Filosofía de la Geometría, puede haber sido Platón el responsable de la restricción predominante en las construcciones geométricas griegas a aquellas que pueden realizarse sólo con regla y compás.

MATEMÁTICA PARA LA FILOSOFÍA EN LA *REPÚBLICA* DE PLATÓN



Primera página de la *República* de Platón (*Plato*, *De Republica. De graco in latinum.* ...). Manuscrito en pergamino de 1401. Biblioteca Colombina de Sevilla.

La *República* es un texto fundamental para comprender la Filosofía de la Matemática de Platón que tanta trascendencia ha tenido en la evolución ulterior de esta ciencia. En esta obra, Platón expone una grandiosa concepción ontológica de la Matemática que ha tenido un singular atractivo sobre los matemáticos de todas las épocas. A través del bellísimo lenguaje metafórico de las alegorías de la caverna y de la línea, Platón reflexiona, una y otra vez, acerca de la naturaleza de las entidades matemáticas, del lugar que ocupan en los diversos dominios de la realidad y de las relaciones que establecen con los diversos ámbitos del conocimiento.

Las ciencias matemáticas son el instrumento que permite al verdadero filósofo empezar a romper las cadenas que le tienen aprisionado en la oscuridad del mundo sensible de la caverna, e ir alcanzando progresivamente la contemplación de la verdadera realidad del mundo inteligible –las ideas y las formas eternas inmateriales y universales–, cuyo ascenso se inicia comenzando por las formas geométricas, verdadera matriz de las ideas y formas abstractas: la Belleza, la Justicia, el Bien, etc.

Esas ciencias matemáticas son las cuatro Artes del *Quadrivium pitagórico*, que Platón hereda del magisterio de Arquitas de Tarento –Aritmética, Geometría, Música y Astronomía– cuyo conocimiento permite que el alma se eleve hacia la auténtica verdad propiciando en la mente la actitud filosófica que culmina en la intelección de la suprema Idea del Bien, que es la verdadera finalidad de la Filosofía.

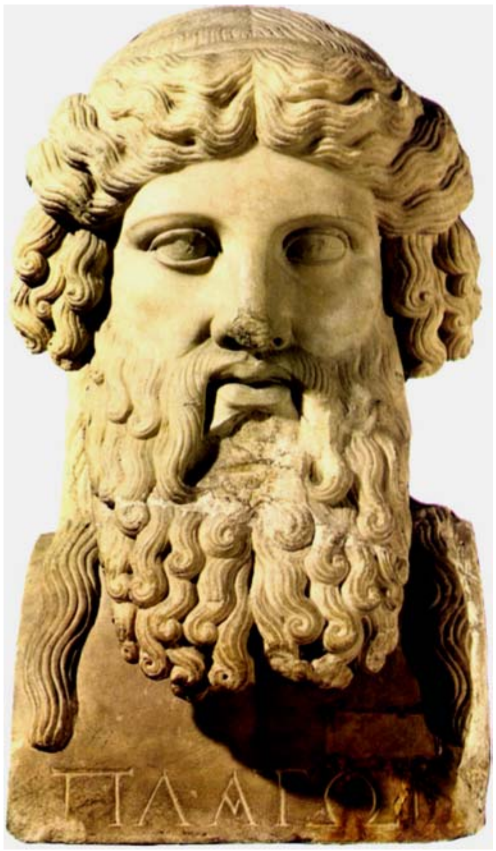
Patón fue uno de los hombres más sabios de su tiempo. Aunque no era propiamente un matemático, su vehemente entusiasmo por las Matemáticas y su creencia en la importancia que estas ciencias tienen como propedéutica de la Filosofía, en la educación e instrucción de la juventud, en la comprensión del Cosmos y en la forja del hombre de Estado, hizo que se convirtiera en un insigne artífice de matemáticos, debiéndose a sus discípulos y amigos casi toda la ingente producción matemática del momento.

Platón matematiza toda la realidad, pero no sólo la realidad física, sino también la esfera espiritual –lo moral, lo estético, lo político, etc.– en un ambicioso proyecto que quiere abarcar la globalidad de la naturaleza y del ser humano.

La celebre frase de ingreso en la Academia –«*No entre nadie ignorante en Geometría*»–, es un epígrafe lapidario con un evidente significado emblemático del pensamiento y el espíritu platónico. La máxima podría ser una ficción poética creada por la retórica helenística, pero expresa de modo absolutamente perfecto el espíritu de la institución y el programa matemático–filosófico que Platón llevaba a cabo en la Academia, tal como lo ratifican numerosos pasajes de la *República*.

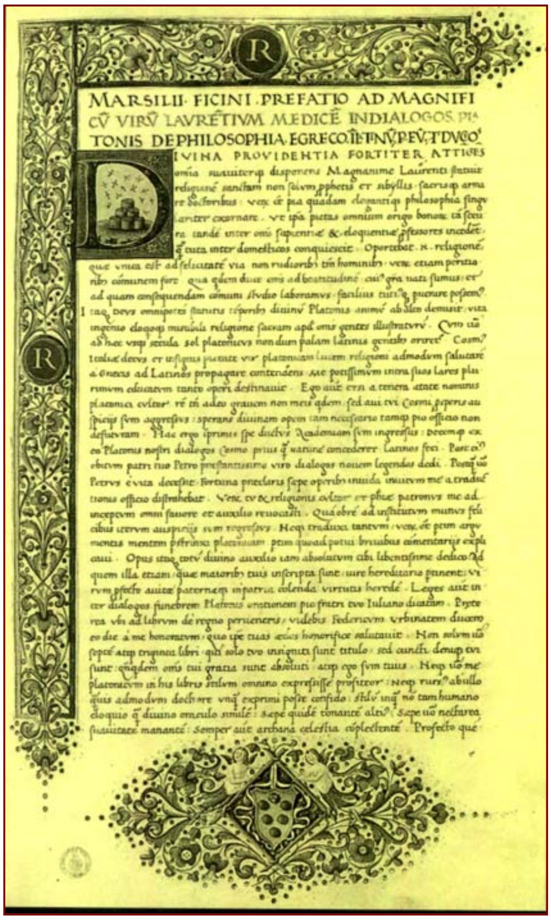
Según Platón las estructuras matemáticas gobiernan no sólo «*la naturaleza del alma humana*», sino también «*la naturaleza del alma del mundo*» (*Timeo*, 34b–36d). Para Platón las Matemáticas están dotadas de un carácter de necesidad divina, lo que sintetiza en la máxima «*Dios siempre hace Geometría* », frase atribuida a Platón por Plutarco en *Quaestiones Convivium* (VIII.2), como respuesta a la pregunta de uno de sus discípulos: *¿Qué hace Dios*?

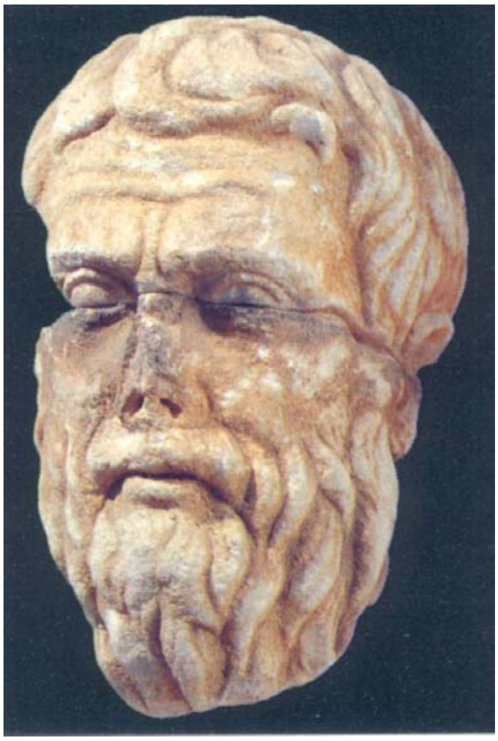
Con Platón la Geometría se convierte en un instrumento heurístico medular de toda su obra, que recoge el pálpito y el sentir de toda la cultura griega, donde, según el filósofo, no debe haber aspecto, ya sea ético, estético, social, político o científico que no se apoye en lo geométrico.



Platón. Museo Capitolino de Roma.

MATEMÁTICA, FILOSOFÍA Y EDUCACIÓN EN PLATÓN





1. **Página miniada de la traducción al latín de los *Diálogos* de Platón realizada por Marsilio Ficino. Biblioteca Laurenziana de Florencia (1482).**
2. **Platón en una réplica helenística de un busto realizado por Silanion (hacia 370 a.C.).**

Nadie con mayor énfasis que Platón ha proclamado que las Matemáticas ejercen una influencia educativa decisiva en la formación y desarrollo de la inteligencia, por lo que es una obligación del Estado proporcionar a la juventud una buena formación matemática, esencial para el hombre de Estado y el estudioso de la Filosofía.

De hecho el término *Matemática* –acuñado como el de Filosofía por Pitágoras–, en cualquier idioma, deriva etimológicamente del griego *mathema*, que significa «*lo que se enseña y se aprende*», es decir lo formativo. Así la Matemática, desde Pitágoras y sobre todo desde Platón, sería «*lo enseñable por antonomasia*», precepto recogido por la tradición pedagógica que ha considerado siempre la Matemática como la clave para la forja del intelecto, de ahí el puesto de honor que le ha reservado.

Los cuatro *Mathemata* o cuatro *Artes liberales* del *Quadrivium* pitagórico–platónico –Aritmética, Geometría, Música y Astronomía– fueron considerados por Platón en La *República* como enseñanzas preliminares que había que dominar antes de emprender el camino de la Filosofía.

Platón, en forma de diálogo entre Sócrates y Glaucón, bajo la influencia pitagórica, poco después del *Mito de la Caverna,* se refiere específicamente, una por una, a las cuatro ciencias del *Quadrivium* en *La República* (525d–533a) como estudios imprescindibles en la propedéutica del filósofo, en la formación del gobernante y como elementos esenciales en la educación de los jóvenes:

> **«[...] *Convendrá imponer esta enseñanza por medio de una ley y convencer a los que deban ocupar los puestos de gobierno de la ciudad para que desarrollen su gusto por estas ciencias.* [...] *Con estas ciencias se purifica y reaviva el órgano del alma, cegado por las demás actividades.* [...] *Cuidemos de que aquellos a los que hemos de instruir no se apliquen a un estudio imperfecto de estas ciencias.* [...] *Por ellas puede elevarse la mejor parte del alma a la contemplación del mejor de los seres.* [...] *A ellas atribuimos la aprehensión de una parte del ser,* [...].».**

En un tono solemne y religioso y dándoles, con sentido pitagórico, un significado metafísico, Platón va aludiendo con su clásico idealismo a las cuatro ciencias:

- **Aritmética: «[...] *Es lo cierto que esa ciencia conduce el alma hacia lo alto y la obliga a razonar sobre los números, sin permitir de ningún modo que nadie presente un ejemplo de números corpóreos y tangibles.* [...]. *Esa ciencia se nos presenta con visos de necesaria, puesto que parece forzar al alma a servirse de la inteligencia pura para alcanzar la verdad en sí.*»**
- **Geometría: «[...] *La parte más elevada de esta ciencia nos conduce a una contemplación más factible de la idea de bien. ... La Geometría nos obliga a contemplar la esencia.* [...] *Es una ciencia del conocimiento del ser, no de lo que está sujeto al cambio o desaparición.* [...] *Conducirá al alma hacia la verdad y dispondrá la mente del filósofo para que eleve su mirada hacia arriba.*»**
- **Música: «*Así como los ojos han sido hechos para la Astronomía, los oídos lo fueron para el movimiento armónico, y que estas ciencias son hermanas al decir de los pitagóricos,* [...], *que buscan los números en esos acordes que escuchan.*»**
- **Astronomía: «*... Esta ciencia obliga al alma a mirar hacia arriba y la conduce de las cosas de aquí abajo a las del cielo.* [Debe ser estudiada como una rama de las Matemáticas] «*en términos de números puros y figuras perfectas* [...] *accesibles a la razón y al pensamiento, pero no a la vista*»**

PLATÓN, MATEMÁTICA Y REALIDAD

Platón tiene el gran mérito de ser el filósofo que más ha reflexionado sobre la naturaleza de los entes matemáticos y de los vínculos que establecen con los distintos ámbitos de la realidad y los diversos dominios del conocimiento. Pero su panmatematismo le llevó a considerar que la realidad y la inteligibilidad del mundo físico sólo se podía aprehender a través de las Matemáticas del mundo ideal. Ya no sólo el mundo estaba matemáticamente estructurado, como pensaban los pitagóricos, y la naturaleza sólo se podía comprender mediante el lenguaje matemático, sino que Platón pretende sustituir a la naturaleza misma por las Matemáticas. No se trata de una mera utilización de la Matemática para explicar mediante relaciones matemáticas las leyes del mundo sensible en que vivimos –como haría Galileo–. De hecho la sorprendente e inesperada aplicabilidad de la Matemática en ámbitos imprevistos le da a esta ciencia un capacidad isótropa de intervención, una omnipresencia universal, de modo que parece que las Matemáticas forman parte de la esencia de todas las cosas en sentido pitagórico, lo que les confiere un cierto poder místico que impresionaba a los primeros filósofos.

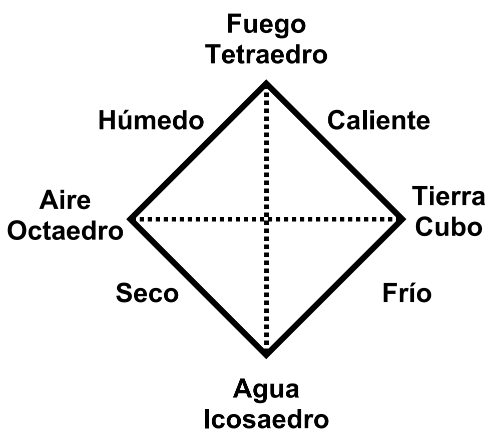
Que una ciencia tan abstracta como la Matemática tuviera tanto que decir acerca del mundo real debía entrañar que toda la naturaleza debía ajustarse a las propias estructuras de la Matemática. A partir de una mera extrapolación, Platón podía estar convencido de que una mirada penetrante sobre el mundo físico, con los ojos de la razón matemática, era suficiente para captar las certezas básicas que necesita el pensamiento para alcanzar las verdades inteligibles, principios últimos de la realidad. Y en este camino la razón se ayuda exclusivamente de las Matemáticas, es decir, estas ciencias sustituyen completamente a las investigaciones físicas.

Así sucede en el *Timeo*, un grandioso mito cosmogónico, especie de fantasmagoría geométrico-cósmica, en la que Platón describe el mundo físico y los fenómenos naturales en clave geométrica, bajo la acción demiúrgica de un Dios que geometriza el universo y lo diseña según las leyes de la Matemática mediante una trasferencia de propiedades del mundo matemático al mundo natural.

Sobre estas cuestiones acerca de la visión platónica de los estrechos vínculos de la Matemática con la realidad escribe Bryan Magee en su interesante y didáctica obra de divulgación de la Historia del Pensamiento filosófico (*Historia de la Filosofía*. Blume, Barcelona, 1988, cap.1)

> **«*Ningún aspecto de la realidad circundante es ajeno al interés de Platón, y en ese sentido, las Matemáticas y la Física aparecen como medios insustituibles a la hora de aproximarse y entender mejor el mundo de las cosas*» (p.25).**
>
> **«*Platón constata que a medida que se profundiza en el conocimiento de la naturaleza, más evidente se hace el estrecho vínculo existente entre las Matemáticas y la realidad del mundo. En este sentido, para Platón el cosmos es un perfecto ejemplo del orden, la armonía y la proporción, algo que nosotros ahora podemos corroborar arguyendo que todo fenómeno producido en la naturaleza puede expresarse en términos de ecuaciones matemáticas. Retomando los postulados de Pitágoras, Platón concede una extraordinaria importancia a este concierto universal al concluir que, por encima dl caos aparente que se manifiesta en la realidad, subyace un orden perfecto que encuentra su máxima expresión en las Matemáticas. Este orden no es perceptible a simple vista, pero, en cambio, sí que es accesible a la razón, la inteligencia y el intelecto. En cualquier caso, lo más importante es que está ahí, existe, y sobre él se asienta la realidad. Precisamente, en su afán por encontrar ese orden absoluto, Platón acogió en su Academia a varios de los matemáticos más celebres de su tiempo, y bajo su égida tuvieron lugar enormes avances en el dominio de las Matemáticas y de todo cuanto hoy en día designamos bajo el nombre genérico de ciencias. Y todo ello como parte indisoluble de la Filosofía*» (pp. 27–28).**

Busto encontrado cerca de Herculano, identificado en el siglo XVIII con Platón. Museo Arqueológico. Nápoles.



Síntesis gráfica de la Cosmogonía platónica del *Timeo*.

El Libro XIII de *Los Elementos de Euclides.*

Diversos comentaristas griegos y la mayor parte de los historiadores de la Matemática atribuyen el contenido del Libro XIII de *Los Elementos* de Euclides –dedicado casi exclusivamente al estudio sistemático de las propiedades de los cinco sólidos regulares– a Teeteto.

Puesto que Euclides debió formarse el ambiente platónico de la *Academia* de Atenas, tuvo que sufrir la fascinación y el delirio de sus miembros por los cinco poliedros regulares, para incluirlos como glorificación y cenit de un tratado tan brillante como *Los Elementos*. De hecho Proclo, en su *Comentario al Libro I de Los Elementos de Euclides*, escribe:

> «*Euclides era platónico,* [...], *mejoró los trabajos de Teeteto,* [...], *se propuso como objetivo final del conjunto de sus Elementos la construcción de los cinco poliedros regulares.*»

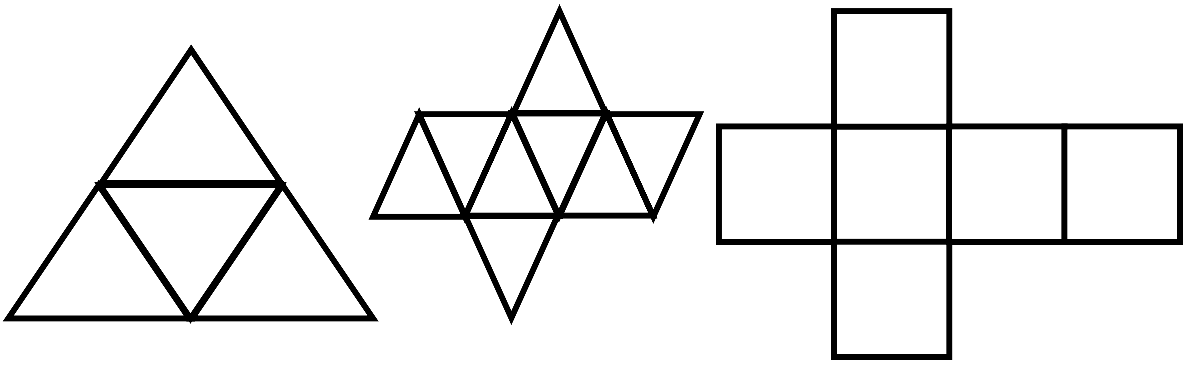
Esta opinión, basada en que Proclo como filósofo profesaba ciegamente como platónico, es manifiestamente exagerada, ya que la mayor parte de *Los Elementos* –los doce primeros libros, salvo algunas definiciones del Libro XI– no está relacionada, en modo alguno, con los sólidos platónicos.

El tratamiento euclídeo de los poliedros regulares es especialmente importante para la Historia de la Matemática porque contiene el primer ejemplo de un teorema fundamental de clasificación. En Euclides no se encuentra –como en Platón– una definición genérica de poliedro regular sino que los introduce uno por uno en las definiciones XI.12 (pirámide), XI.25 (cubo), XI.26 (octaedro), XI.27 (icosaedro), XI.28 (dodecaedro) de *Los Elementos.* Euclides previamente define el ángulo sólido. Veamos estas definiciones:

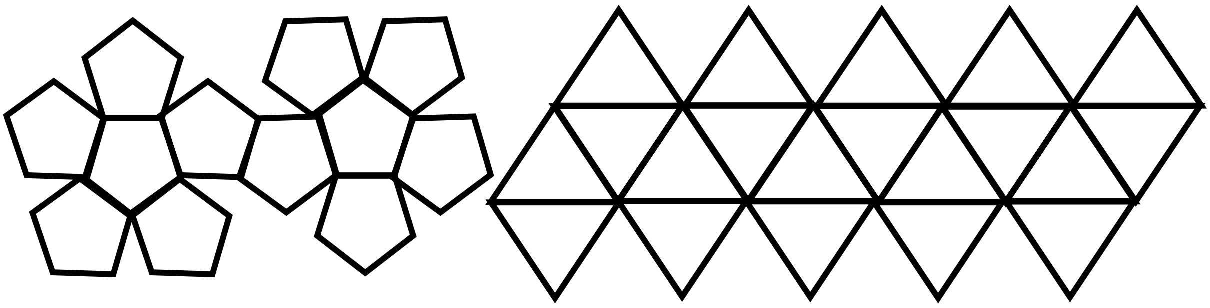
Las definiciones de los cinco poliedros regulares en *Los Elementos* de Euclides

- **Definición XI.11. Un ángulo sólido es la inclinación de más de dos líneas que se tocan entre sí y no están en la misma superficie respecto a todas las líneas. O dicho de otra manera: Un ángulo sólido es el que está comprendido por más de dos ángulos planos construidos en el mismo punto, sin estar en el mismo plano**
- **Definición XI.12. Una *pirámide* es una figura sólida comprendida por planos, construida desde un plano a un punto.**
- **Definición XI.25. Un cubo es la figura sólida que está comprendida por seis cuadrados iguales.**
- **Definición XI.26. Un octaedro es una figura sólida comprendida por ocho triángulos iguales y equiláteros.**
- **Definición XI.27. Un icosaedro es la figura sólida comprendida por veinte triángulos iguales y equiláteros.**
- **Definición XI.28. Un dodecaedro es la figura sólida comprendida per doce pentágonos iguales equiláteros y equiángulos.**

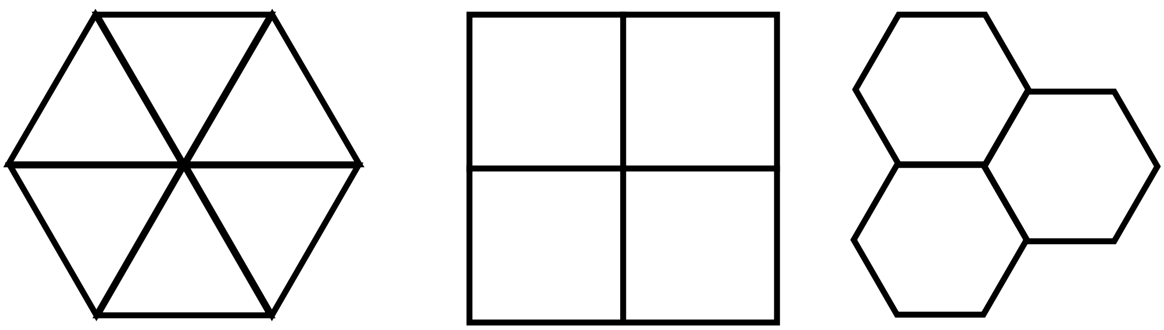
Euclides define cuatro de los cinco poliedros regulares. El tetraedro no es mencionado por Euclides en este Libro XI al ser considerado como una pirámide triangular. De hecho, simplemente la llama «*pirámide*» en el Libro XIII.



Desarrollo de los cinco poliedros regulares: Tetraedro, Octaedro, Cubo, Dodecaedro e Icosaedro.



La construcción pitagórica de los poliedros regulares pudo ser una generalización evidente al espacio de los mosaicos del plano ya que a juzgar por un testimonio de Proclo, los pitagóricos descubrieron que los únicos polígonos regulares que podían recubrir un plano –a modo de mosaico– son el triángulo, el cuadrado y el hexágono, según el gráfico siguiente:



En efecto: Puesto que según la Proposición I.32 de *Los Elementos* de Euclides

«*Los tres ángulos interiores de un triángulo son iguales a dos rectos*»,

los ángulos interiores de un polígono de n lados suman [(n-2)·180º]/n, resultado que se atribuye a Pitágoras, como otros muchos de los cuatro primeros libros de *Los Elementos* de Euclides.

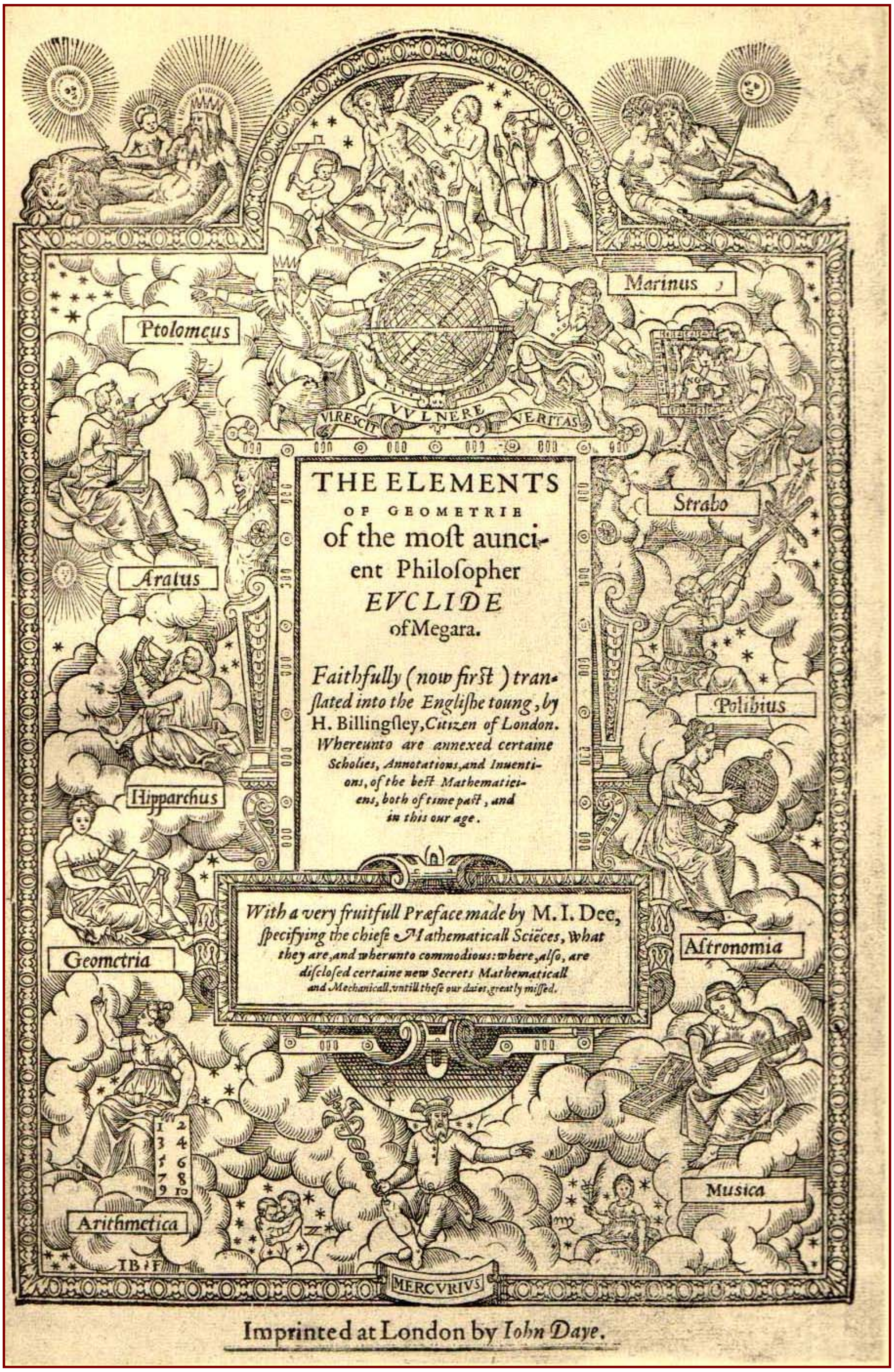
Ahora, si m polígonos regulares de n lados coinciden en un punto, se verifica:

$$\frac{m(n-2)\cdot 180^{\circ}}{n} = 360^{\circ},$$

de donde se obtiene la ecuación: m(n-2)=2n, cuyas únicas soluciones enteras son:

- m(n-2)=2n.
  - para m=6, n=3, resultan triángulos.
  - para m=4, n=4, resultan cuadrados.
  - para m=3, n=6, resultan hexágonos.

LA EDICIÓN DE SIR HENRY BILLINGSLEY
LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES

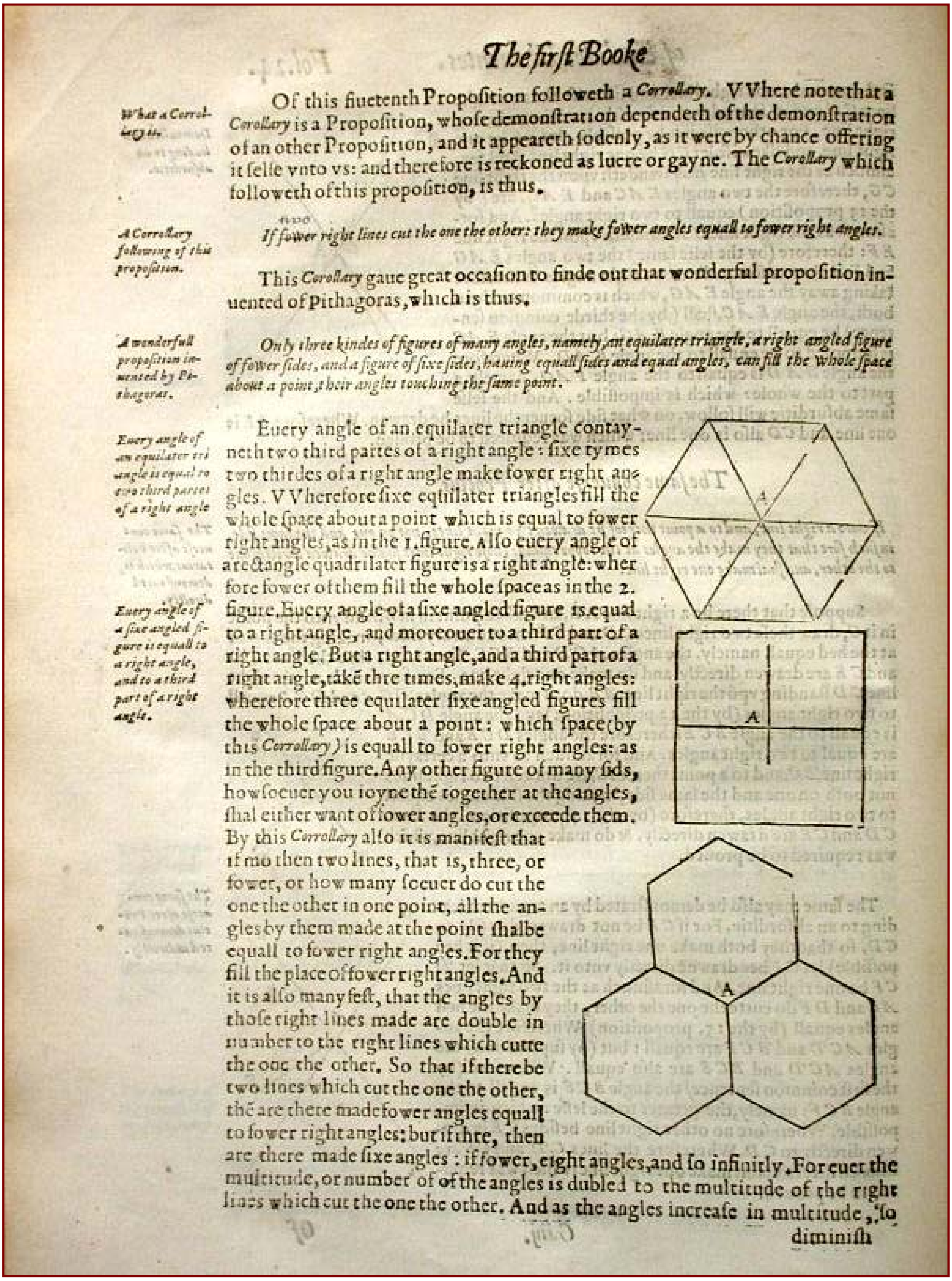


Frontispicio de la primera impresión en inglés de *Los Elementos* de Euclides. Se dice que la traducción es de Sir Henry Billingsley (por entonces – 1570– alcalde de Londres), aunque cierta crítica histórica se la atribuye a Jhon Dee, autor del prefacio. Fue publicada en 1582 por John Daye.

Esta portada –tomada de un ejemplar de la Biblioteca de la Universidad de Toronto– está profusamente ilustrada con alegorías referentes a las *Artes Liberales* del *Cuadrivium* pitagórico y a actividades de famosos geómetras y escritores clásicos.

Como anuncia el título, esta edición ofrece «*numerosos escolios, anotaciones e invenciones de los más importantes matemáticos antiguos y modernos*» redactados por el autor el prefacio Jhon Dee.

MOSAICOS REGULARES LA EDICIÓN DE BILLINGSLEY DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES



The firſt Booke

What a Corrollary is.

Of this fiuetenth Propoſition followeth a *Corrollary*. VVhere note that a *Corollary* is a Propoſition, whoſe demonſtration dependeth of the demonſtration of an other Propoſition, and it appeareth ſodenly, as it were by chance offering it ſelfe vnto vs: and therefore is reckoned as lucre or gayne. The *Corollary* which followeth of this propoſition, is thus.

A Corrollary following of this propoſition.

If fower right lines cut the one the other: they make fower angles equall to fower right angles.

This *Corollary* gaue great occaſion to finde out that wonderful propoſition inuented of Pithagoras, which is thus.

A wonderfull propoſition inuented by Pithagoras.

Only three kindes of figures of many angles, namely, an equilater triangle, a right angled figure of fower ſides, and a figure of ſixe ſides, hauing equall ſides and equal angles, can fill the whole ſpace about a point, their angles touching the ſame point.

Euery angle of an equilater triangle is equal to two third partes of a right angle

Euery angle of an equilater triangle contayneth two third partes of a right angle: ſixe tymes two thirdes of a right angle make fower right angles. VVherefore ſixe equilater triangles fill the whole ſpace about a point which is equal to fower right angles, as in the 1. figure. Alſo euery angle of a rectangle quadrilater figure is a right angle: wherfore fower of them fill the whole ſpace as in the 2. figure. Euery angle of a ſixe angled figure is equal to a right angle, and moreouer to a third part of a right angle. But a right angle, and a third part of a right angle, také thre times, make 4. right angles: wherefore three equilater ſixe angled figures fill the whole ſpace about a point: which ſpace (by this *Corollary*) is equall to fower right angles: as in the third figure. Any other figure of many ſids, howſoeuer you ioyne thé together at the angles, ſhal either want of fower angles, or exceede them. By this *Corollary* alſo it is manifeſt that if mo then two lines, that is, three, or fower, or how many ſoeuer do cut the one the other in one point, all the angles by them made at the point ſhalbe equall to fower right angles. For they fill the place of fower right angles. And it is alſo manyfeſt, that the angles by thoſe right lines made are double in number to the right lines which cutte the one the other. So that if there be two lines which cut the one the other, thé are there made fower angles equall to fower right angles: but if thre, then are there made ſixe angles: if fower, eight angles, and ſo infinitly. For euer the multitude, or number of the angles is dubled to the multitude of the right lines which cut the one the other. And as the angles increaſe in multitude, ſo

Euery angle of a ſixe angled figure is equall to a right angle, and to a third part of a right angle.

diminiſh

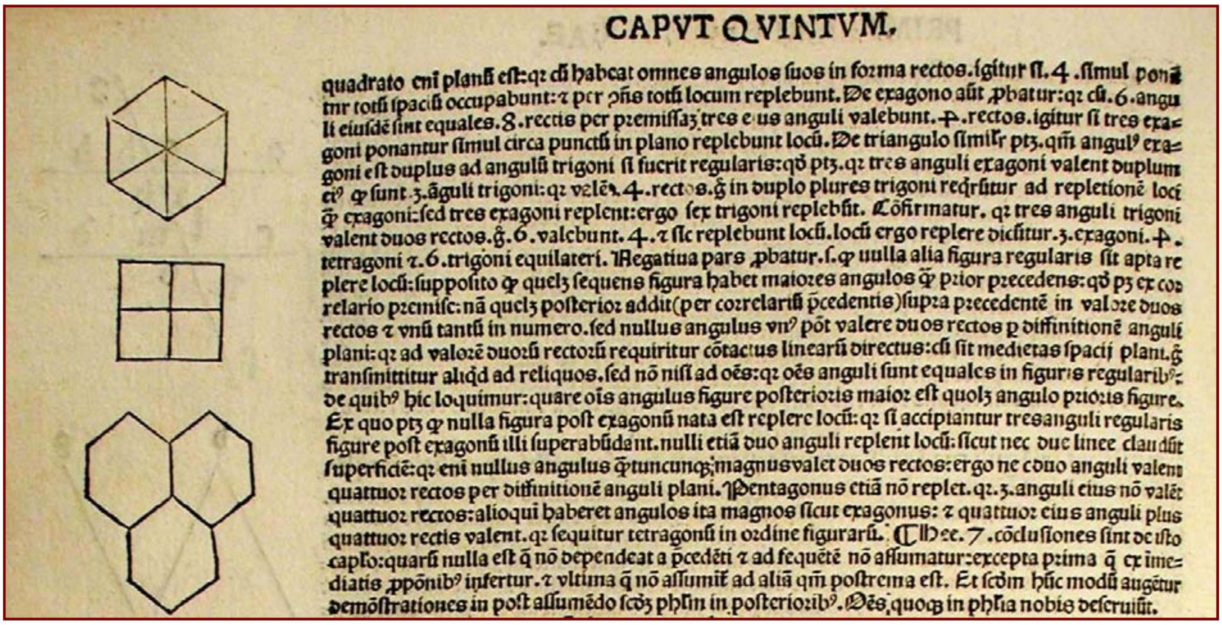
Entre los numerosos corolarios y extensiones de la teoría geométrica que introduce Jhon Dee en la edición de Billingsley de *Los Elementos* de Euclides sobresale, en el Libro I, lo que el autor llama «*una maravillosa proposición inventada por Pitágoras*» sobre los mosaicos regulares que llenan el plano, donde demuestra que sólo existen las tres especies formadas por triángulos, equiláteros, cuadrados, cuadrados y hexágonos regulares.

MOSAICOS REGULARES ENLA OBRA MATEMÁTICA DE P.CIRUELO

CURSUS QUATUOR MATHEMATICARUM ARTIUM LIBERALIUM

Cursus quattuoꝛ mathematicarum artiũ liberaliũ quas recollegit atq; correxit magister Petrus Ciruelus Darocensis theologus simul & philosophus.

Per signũ sanctæ crucis libera nos a peccatis nostris deus noster.



CAPVT QVINTVM.

quadrato eni planũ est: qz cũ habeat omnes angulos suos in forma rectos. igitur si. 4. simul ponãtur totũ spaciũ occupabunt: ꝛ per ɔñs totũ locum replebunt. De exagono aũt ꝓbatur: qz cũ. 6. anguli eiusdẽ sint equales. 8. rectis per premissaꝫ tres eius anguli valebunt. 4. rectos. igitur si tres exagoni ponantur simul circa punctũ in plano replebunt locũ. De triangulo similr̃ pꝫ. qm̃ angul⁹ exagoni est duplus ad angulũ trigoni si fuerit regularis: qđ pꝫ. qz tres anguli exagoni valent duplum ei⁹ ꝙ sunt. 3. ãguli trigoni: qz valẽt. 4. rectos. ĝ in duplo plures trigoni reqrũtur ad repletionẽ loci ꝙ̃ exagoni: sed tres exagoni replent: ergo sex trigoni replebũt. Cõfirmatur. qz tres anguli trigoni valent duos rectos. ĝ. 6. valebunt. 4. ꝛ sic replebunt locũ. locũ ergo replere dicũtur. 3. exagoni. 4. tetragoni ꝛ. 6. trigoni equilateri. Negatiua pars ꝓbatur. s. ꝙ nulla alia figura regularis sit apta replere locũ: supposito ꝙ quelꝫ sequens figura habet maioꝛes angulos ꝙ̃ pꝛior pꝛecedens: qđ pꝫ ex coꝛrelario pꝛemisse: nã quelꝫ posterioꝛ addit (per coꝛrelariũ p̃cedentis) supꝛa pꝛecedentẽ in valoꝛe duos rectos ꝛ vnũ tantũ in numero. sed nullus angulus vn⁹ põt valere duos rectos ꝑ diffinitionẽ anguli plani: qz ad valoꝛẽ duoꝛũ rectoꝛũ requiritur cõtactus linearũ directus: cũ sit medietas spacij plani. ĝ transmittitur aliq̃d ad reliquos. sed nõ nisi ad oẽs: qz oẽs anguli sunt equales in figuris regularib⁹: de quib⁹ hic loquimur: quare oĩs angulus figure posterioꝛis maioꝛ est quolꝫ angulo pꝛioꝛis figure. Ex quo pꝫ ꝙ nulla figura post exagonũ nata est replere locũ: qz si accipiantur tres anguli regularis figure post exagonũ illi superabũdant. nulli etiã duo anguli replent locũ: sicut nec due linee claudũt superficiẽ: qz eni nullus angulus ꝙ̃tuncunq; magnus valet duos rectos: ergo nec duo anguli valent quattuoꝛ rectos per diffinitionẽ anguli plani. Pentagonus etiã nõ replet. qz. 5. anguli eius nõ valẽt quattuoꝛ rectos: alioqui haberet angulos ita magnos sicut exagonus: ꝛ quattuoꝛ eius anguli plus quattuoꝛ rectis valent. qz sequitur tetragonũ in oꝛdine figurarũ. ¶ Hec. 7. cõclusiones sint de isto caplo: quarũ nulla est q̃ nõ dependeat a p̃cedẽti ꝛ ad sequẽtẽ nõ assumatur: excepta pꝛima q̃ ex imediatis ꝓpõnib⁹ infertur. ꝛ vltima q̃ nõ assumit ad aliã qm̃ postrema est. Et scđm hũc modũ augẽtur demõstrationes in post assumẽdo scđꝫ phl̃m in posterioꝛib⁹. Oẽs quoq; in phl̃ia nobis deseruiũt.

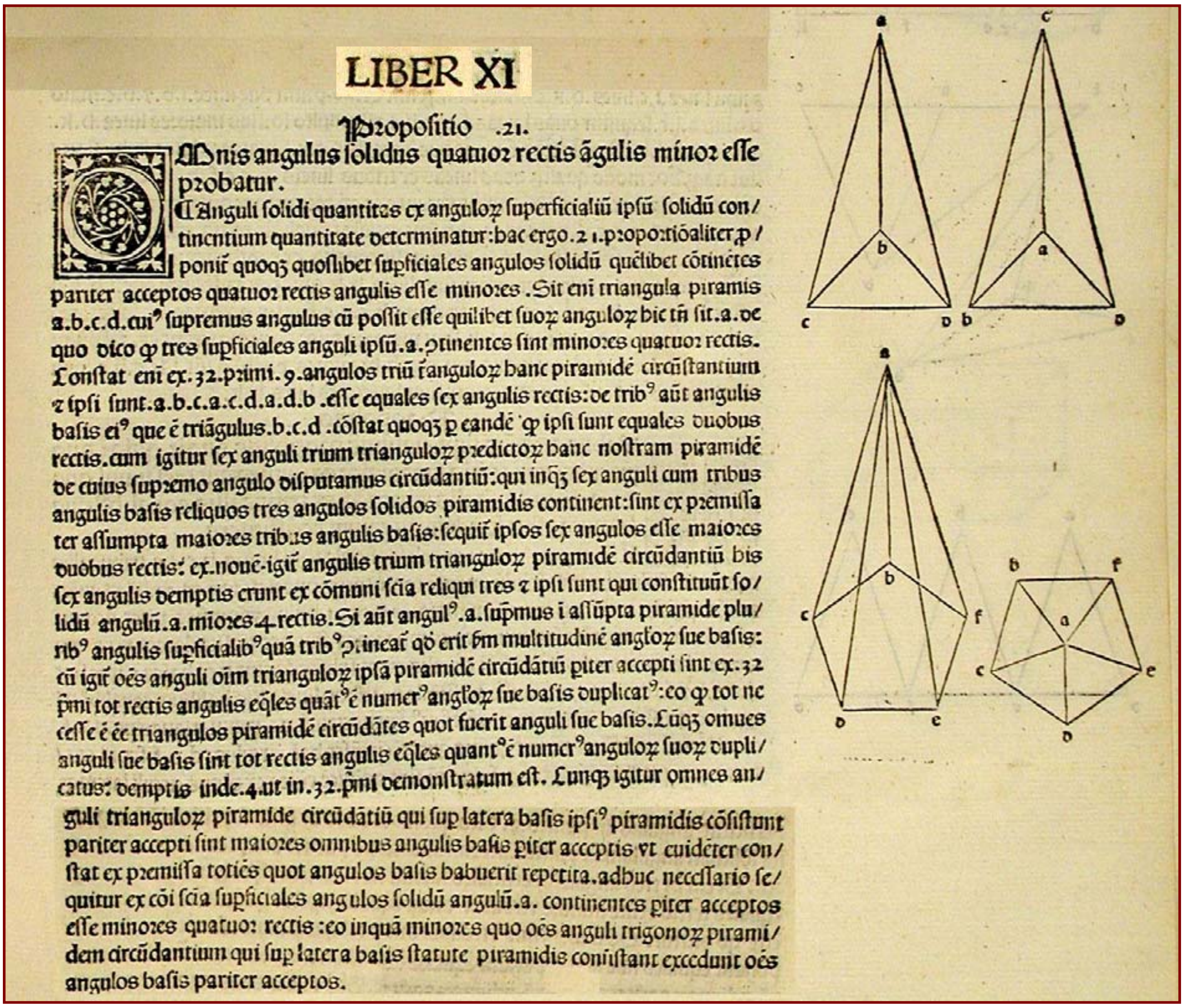
La Proposición pitagórica sobre polígonos que forman mosaicos en la obra de Pedro Ciruelo *Cursus quatuor mathematicarum artium liberalium*... (Primi Libri Geometriae, Caput V). Alcalá, 1516. Ejemplar de la Biblioteca del Monasterio de San Millán de Yuso.

El estudio geométrico aplicado a los mosaicos puede extenderse de forma sensiblemente similar a los poliedros con la necesaria modificación de que la concurrencia de m polígonos regulares de n lados en un vértice da un ángulo sólido, de modo que según la Proposición XI.21 de *Los Elementos* de Euclides:

«*Todo ángulo sólido es comprendido por ángulos planos menores que cuatro rectos*»,

la suma de los ángulos de los polígonos que concurren en el vértice de un poliedro es menor de 360º.

LA PROPOSICIÓN XI.21 SOBRE ÁNGULOS SÓLIDOS EN *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES


LIBER XI

Propositio .21.

Omnis angulus solidus quatuor rectis ãgulis minor esse probatur.

Anguli solidi quantitas ex angulorum superficialiũ ipsũ solidũ continentium quantitate determinatur: hac ergo .21. propositiõaliter proponit quoq; quoslibet superficiales angulos solidũ quẽlibet cõtinẽtes pariter acceptos quatuor rectis angulis esse minores. Sit enĩ triangula piramis a.b.c.d. cui9 supremus angulus cũ possit esse quilibet suorum angulorum hic tñ sit .a. de quo dico q tres superficiales anguli ipsũ .a. cõtinentes sint minores quatuor rectis. Constat enĩ ex .32. primi .9. angulos triũ triangulorum hanc piramidẽ circũstantium et ipsi sunt .a.b.c.a.c.d.a.d.b. esse equales sex angulis rectis: de trib9 aũt angulis basis ei9 que ẽ triãgulus .b.c.d. cõstat quoq; per eandẽ q ipsi sunt equales duobus rectis. cum igitur sex anguli trium triangulorum predictorum hanc nostram piramidẽ de cuius supremo angulo disputamus circũdantiũ: qui inq; sex anguli cum tribus angulis basis reliquos tres angulos solidos piramidis continent: sint ex premissa ter assumpta maiores tribus angulis basis: sequit ipsos sex angulos esse maiores duobus rectis: ex .noue. igit angulis trium triangulorum piramidẽ circũdantiũ bis sex angulis demptis erunt ex cõmuni scia reliqui tres et ipsi sunt qui constituũt solidũ angulũ .a. minores .4. rectis. Si aũt angul9 .a. supmus i assũpta piramide pluribus angulis superficialib9 quã trib9 cõtineat qd erit sm multitudinẽ angulorum sue basis: cũ igit oẽs anguli oĩm triangulorum ipsã piramidẽ circũdãtiũ pariter accepti sint ex .32. primi tot rectis angulis eqles quãt9 ẽ numer9 angulorum sue basis duplicat9: eo q tot necesse ẽ ẽe triangulos piramidẽ circũdãtes quot fuerit anguli sue basis. Cũq; omnes anguli sue basis sint tot rectis angulis eqles quant9 ẽ numer9 angulorum suorum duplicatus: demptis inde .4. ut in .32. primi demonstratum est. Cumq; igitur omnes anguli triangulorum piramide circũdãtiũ qui sup latera basis ipsi9 piramidis cõsistunt pariter accepti sint maiores omnibus angulis basis pariter acceptis ut euidẽter constat ex premissa totiẽs quot angulos basis habuerit repetita. adhuc necessario sequitur ex cõi scia superficiales angulos solidũ angulũ .a. continentes pariter acceptos esse minores quatuor rectis: eo inquã minores quo oẽs anguli trigonorum piramidem circũdantium qui sup latera basis statute piramidis consistant excedunt oẽs angulos basis pariter acceptos.

La Proposición XI.21 sobre ángulos sólidos en la edición de Ratdolt de *Los Elementos* de Euclides (Venecia, 1482). Ejemplar de la Biblioteca del Monasterio de San Millán de Yuso.
Esta proposición sobre ángulos sólidos juega un papel fundamental en los teoremas de Euclides sobre poliedros.

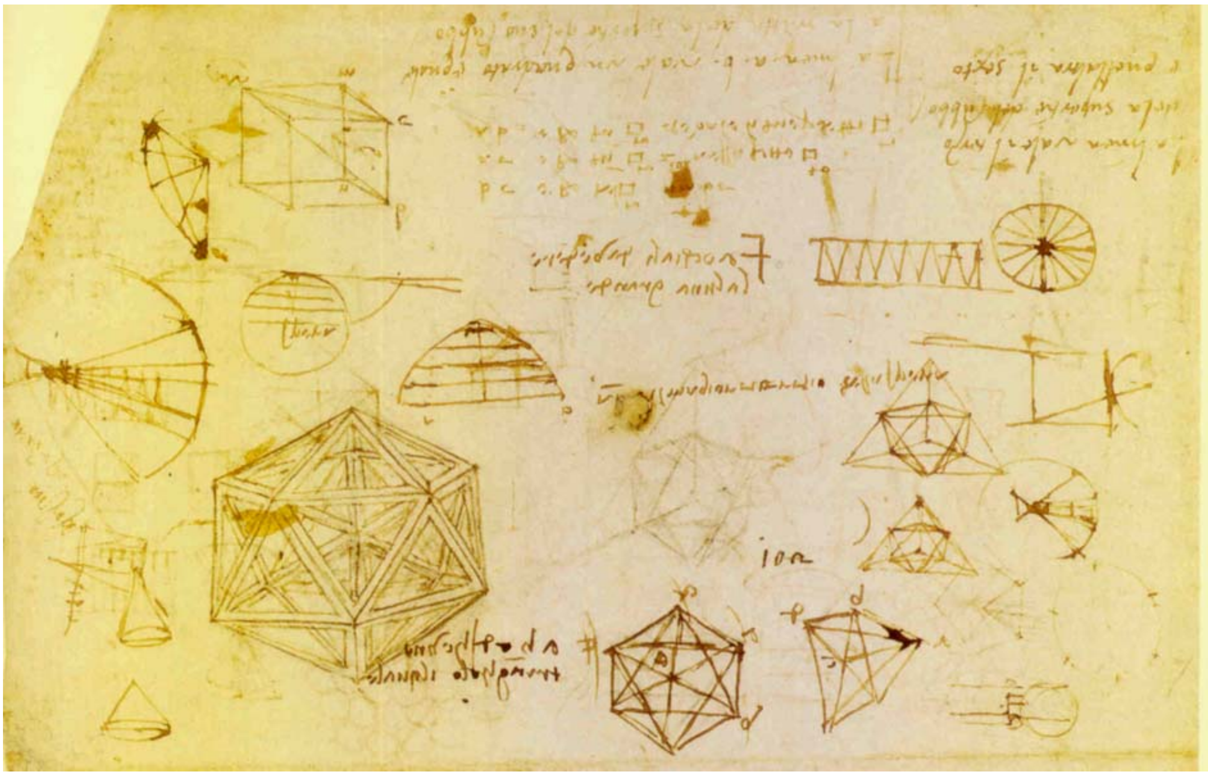
El objeto de los Teoremas del Libro XIII de Euclides es el de inscribir cada uno de los poliedros regulares en una esfera, construcciones que Euclides, con una extraordinaria habilidad geométrica, va obteniendo de forma sucesiva en las Proposiciones XIII.13–XIII.17, hallando la razón de la arista del sólido al diámetro de la esfera circunscrita, obteniendo los resultados que se sintetizan en el cuadro siguiente:

LA CONSTRUCCIÓN DE LOS POLIEDROS INSCRITOS EN UNA ESFERA

- **Proposición XIII.13. Construir una pirámide inscrita en una esfera dada y demostrar que el cuadrado del diámetro de la esfera es una vez y media el del lado de la pirámide.**
- **Proposición 14. Construir un octaedro inscrito en una esfera [...],y demostrar que el cuadrado del diámetro de la esfera es el doble del cuadrado del lado del octaedro.**
- **Proposición 15. Construir un cubo inscrito en una esfera [...], y demostrar que el cuadrado del diámetro de la esfera es el triple del cuadrado del lado del cubo.**
- **Proposición 16. Construir un icosaedro inscrito en una esfera [...], y demostrar que el lado del icosaedro es la recta sin razón expresable llamada *menor.***
- **Proposición 17. Construir un dodecaedro inscrito en una esfera [...], y demostrar que el lado del dodecaedro es la recta sin razón expresable llamada *apótoma.***

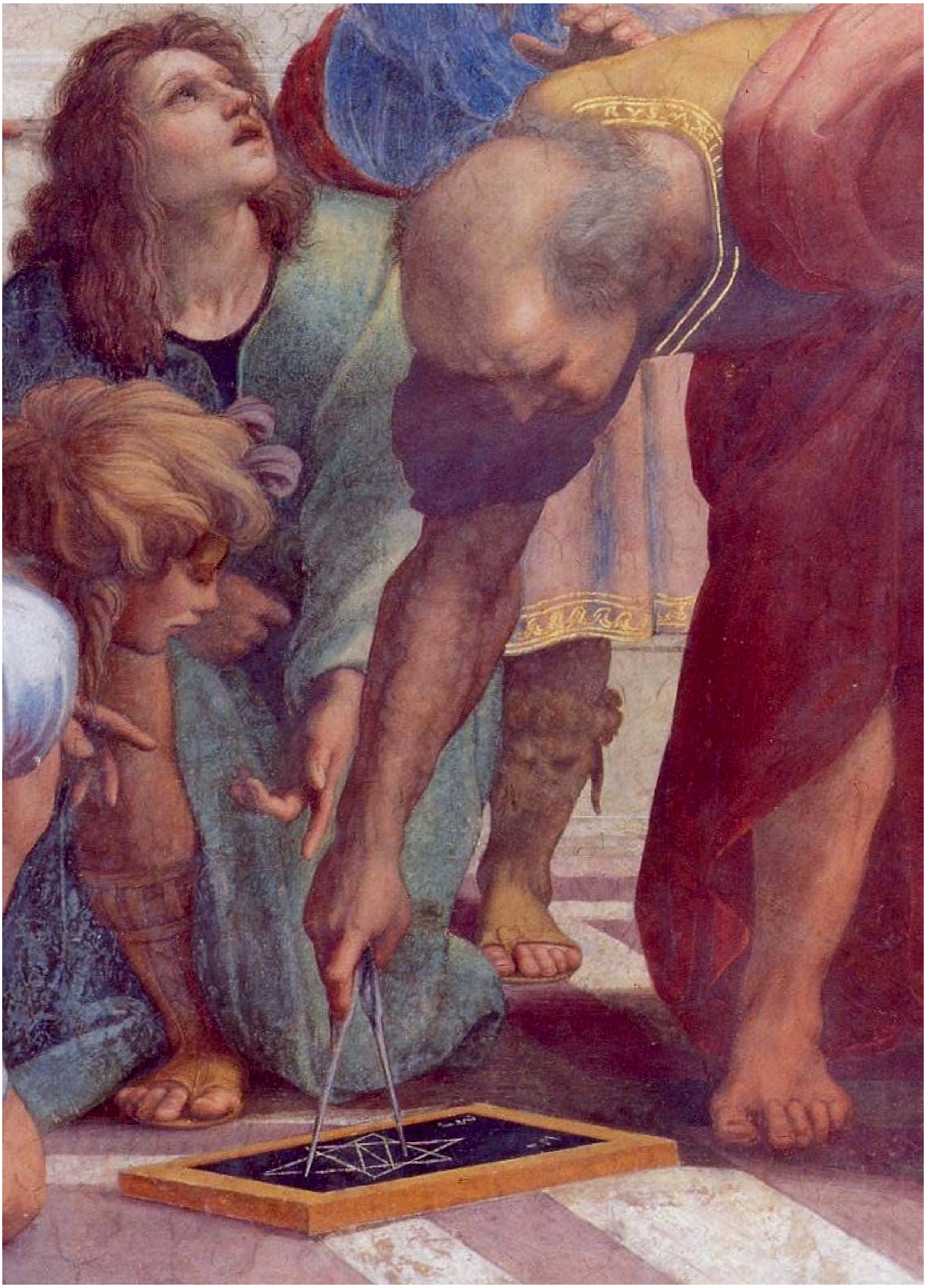
Los resultados anteriores se sintetizan en la tabla adjunta que muestra la razón de la arista de cada sólido platónico al radio R de la esfera circunscrita.

Poliedro	Proposición	Arista
Tetraedro	XIII.13	$\frac{2}{3}R\sqrt{6}$
Cubo	XIII.14	$R\sqrt{2}$
Octaedro	XIII.15	$\frac{2}{3}R\sqrt{3}$
Icosaedro	XIII.16	$\frac{R}{5}\sqrt{10\left(5-\sqrt{5}\right)}$
Dodecaedro	XIII.17	$\frac{R}{3}\left(\sqrt{15}-\sqrt{3}\right)$



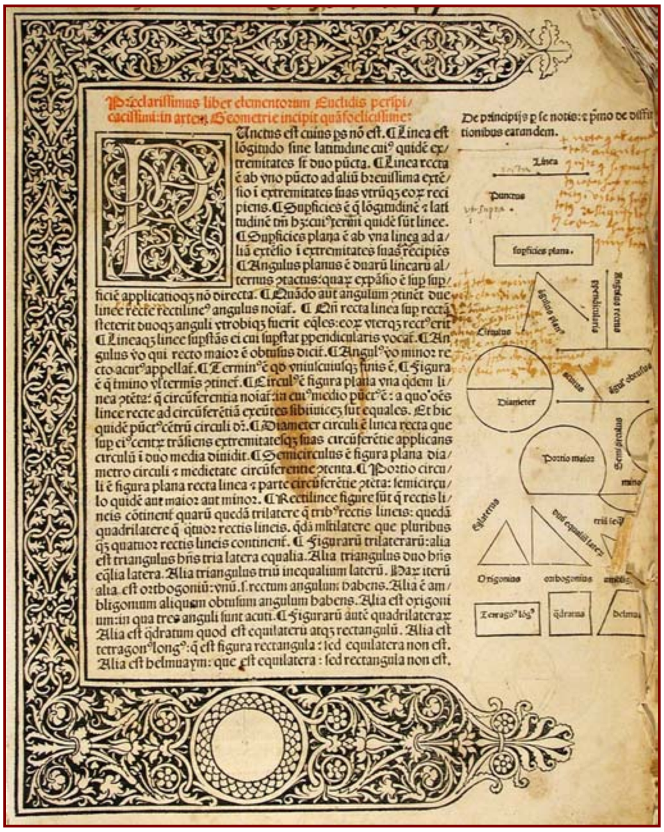
Leonardo. Estudios sobre la geometría de los sólidos platónicos (1513–1514). Códice Atlántico, f.518r

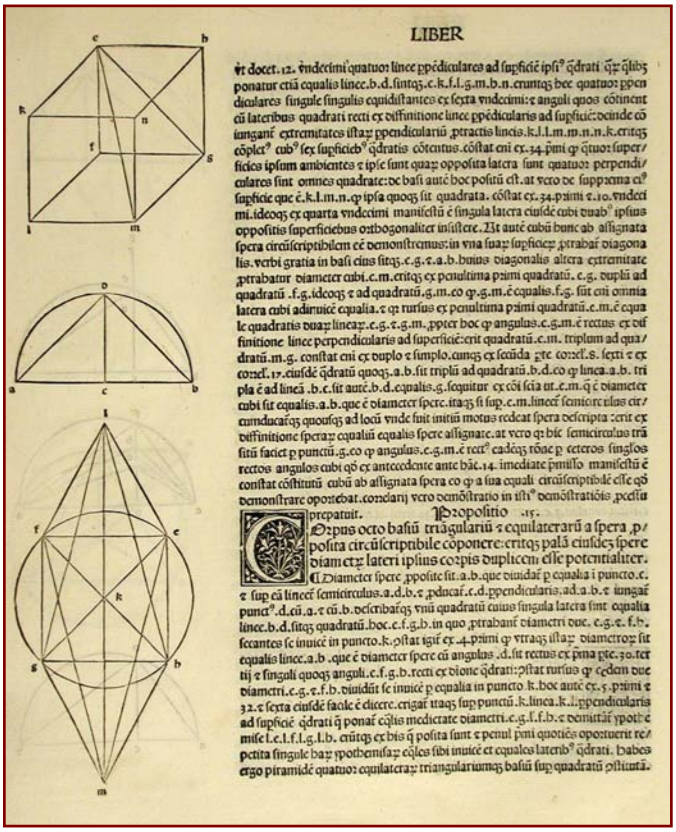
EUCLIDES EN *LA ESCUELA DE ATENAS* DE RAFAEL



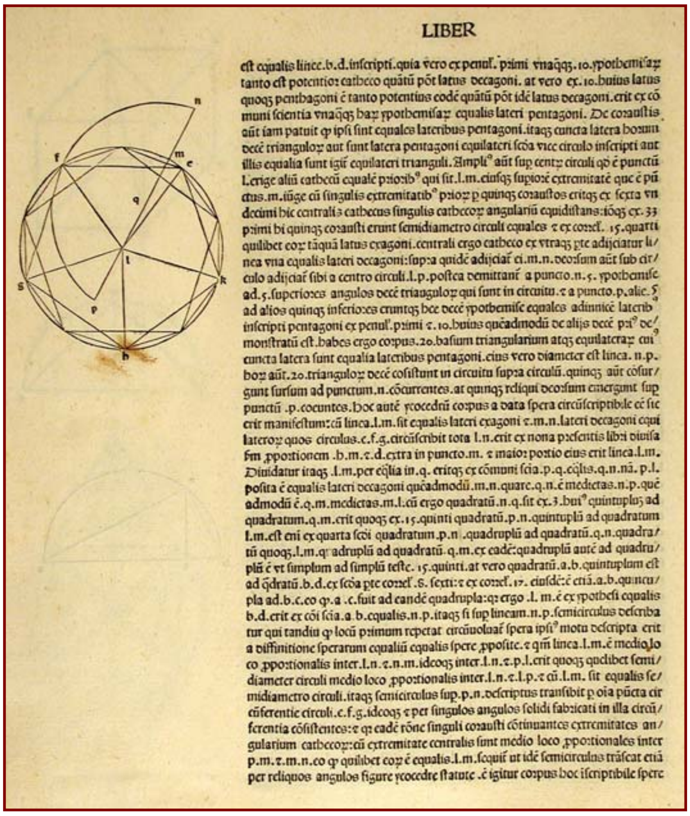
***Euclides enseñando Geometría a sus discípulos*. Fragmento de *La Escuela de Atenas* de Rafael. Estancia de la Signatura, Vaticano. Rafael pintó a Euclides con el rostro de Bramante.**

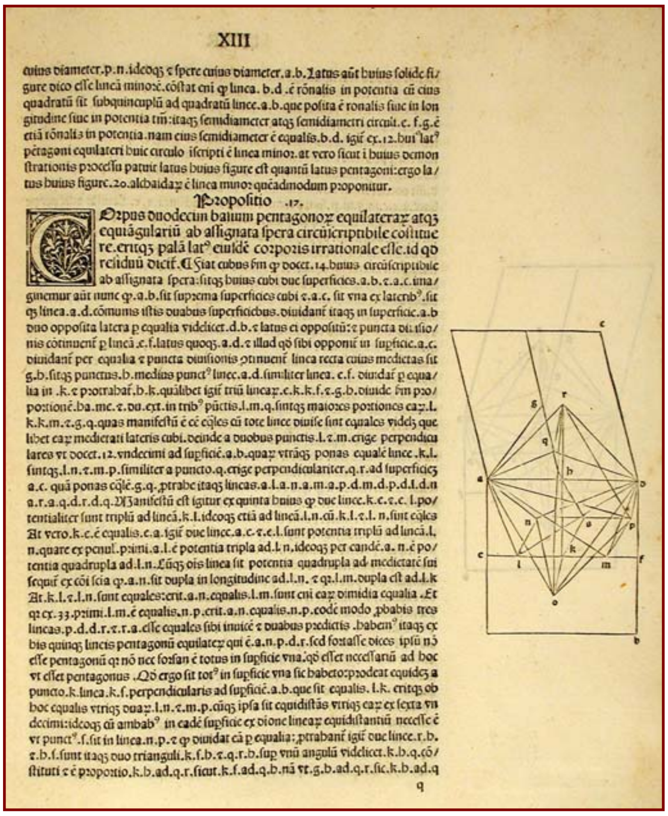
LOS POLIEDROS EN LA PRIMERA IMPRESIÓN DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES





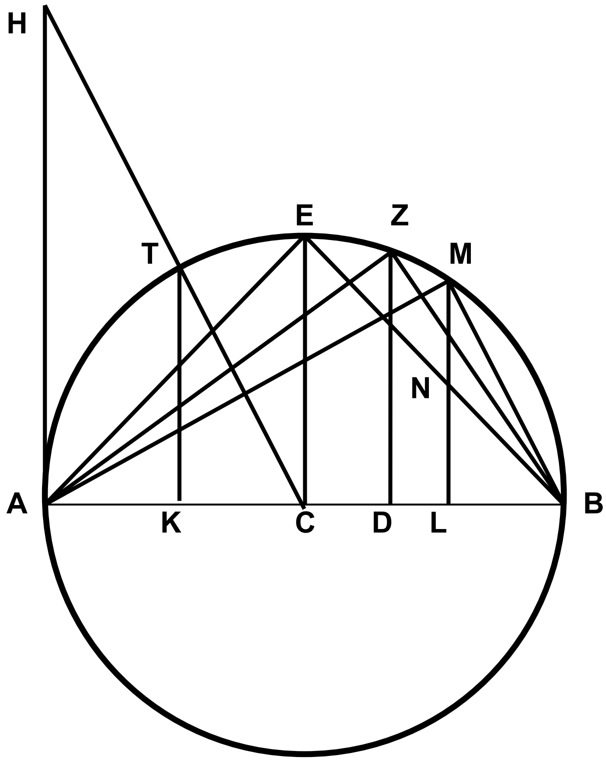
Portada y fragmentos de las importantes Proposiciones de Euclides sobre los Poliedros: construcción e inscripción en una esfera del Octaedro (XIII.14), Hexaedro (XIII.15), Icosaedro (XIII.16) y Dodecaedro (XIII.17). Edición de Ratdolt de *Los Elementos* de Euclides (Venecia, 1482). Ejemplar de la Biblioteca del Monasterio de San Millán de Yuso.





El libro XIII de *Los Elementos* y con él toda la brillante obra de Euclides culmina con el brillante esplendor de la última proposición, que ocupa el lugar 465, la XIII.18:

> «*Construir los cinco poliedros regulares inscritos en la misma esfera y comparar las aristas de las cinco figuras*»:



Euclides traza la figura siguiente tomando:

AB diámetro de la esfera

AC = CB, AD = 2DB

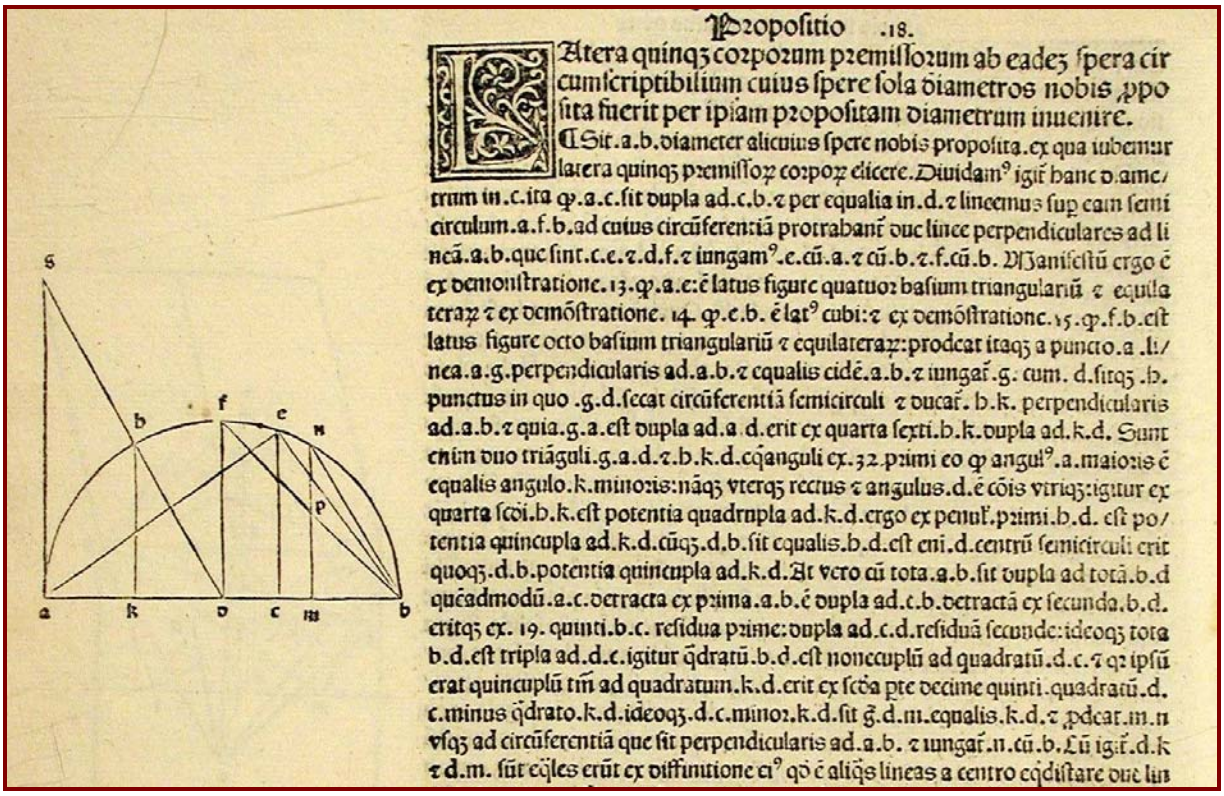
AH = AB, CL = KC .

Y demuestra, paso a paso, utilizando numerosas proposiciones anteriores (en particular las de la *sección áurea*) que:

- AZ es la arista t del tetraedro
- BZ es la arista c del cubo
- BE es la arista o del octaedro
- MB es la arista i del icosaedro
- NB es la arista d del dodecaedro

Siendo la relación entre ellas:

- $t^2 = (4/3)\ o^2 = 2c^2$.
- $o^2 = (3/2)\ c^2$.
- La arista i del icosaedro es mayor que la arista d del dodecaedro.


Propositio .18.

Latera quinq3 corporum premissorum ab eadē spera circumscriptibilium cuius spere sola diametros nobis ꝓposita fuerit per ipsam propositam diametrum inuenire.

¶ Sit.a.b.diameter alicuius spere nobis proposita.ex qua iubemur latera quinq3 premissoꝝ corpoꝝ elicere. Diuidam⁹ igitᷣ hanc diametrum in.c.ita ꝙ.a.c.sit dupla ad.c.b.⁊ per equalia in.d.⁊ lineemus sup eam semicirculum.a.f.b.ad cuius circūferentiā protrahanᷣ due linee perpendiculares ad lineā.a.b.que sint.c.e.⁊.d.f.⁊ iungam⁹.e.cū.a.⁊ cū.b.⁊.f.cū.b. Manifestū ergo ē ex demonstratione.13.ꝙ.a.e:ē latus figure quatuor basium triangulariū ⁊ equilateraꝝ ⁊ ex demōstratione.14.ꝙ.e.b.ē lat⁹ cubi:⁊ ex demōstratione.15.ꝙ.f.b.est latus figure octo basium triangulariū ⁊ equilateraꝝ:prodcat itaq3 a puncto.a.linea.a.g.perpendicularis ad.a.b.⁊ equalis eidē.a.b.⁊ iungaᷣ.g.cum.d.sitq3.h.punctus in quo.g.d.secat circūferentiā semicirculi ⁊ ducaᷣ.h.k.perpendicularis ad.a.b.⁊ quia.g.a.est dupla ad.a.d.erit ex quarta sexti.h.k.dupla ad.k.d. Sunt enim duo triāguli.g.a.d.⁊.h.k.d.eq̄anguli ex.32.primi eo ꝙ angul⁹.a.maioris ē equalis angulo.k.minoris:nāq3 vterq3 rectus ⁊ angulus.d.ē cōis vtriq3:igitur ex quarta scōi.h.k.est potentia quadrupla ad.k.d.ergo ex penulᷣ.primi.h.d.est potentia quincupla ad.k.d.cūq3.d.b.sit equalis.h.d.est eni.d.centrū semicirculi erit quoq3.d.b.potentia quincupla ad.k.d.At vero cū tota.a.b.sit dupla ad totā.b.d quēadmodū.a.c.detracta ex prima.a.b.ē dupla ad.c.b.detractā ex secunda.b.d.eritq3 ex.19.quinti.b.c.residua prime:dupla ad.c.d.residuā secunde:ideoq3 tota b.d.est tripla ad.d.c.igitur q̄dratū.b.d.est noncuplū ad quadratū.d.c.⁊ q̄r ipsū erat quincuplū tm̄ ad quadratum.k.d.erit ex scōa pte decime quinti.quadratū.d.c.minus q̄drato.k.d.ideoq3.d.c.minor.k.d.sit ḡ.d.m.equalis.k.d.⁊ ꝓdcat.m.n vsq3 ad circūferentiā que sit perpendicularis ad.a.b.⁊ iungaᷣ.n.cū.b.Cū igiᷣ.d.k ⁊ d.m.sūt eq̄les erūt ex diffinitione ei⁹ qd̄ ē aliq̄s lineas a centro eq̄distare due lin

Fragmento de la última Proposición (XIII.18) de *Los Elementos* de Euclides. Edición de Ratdolt (Venecia, 1482). Ejemplar de la Biblioteca del Monasterio de San Millán de Yuso.

La ultima proposición de *Los Elementos* de Euclides acaba, a su vez, con el teorema de clasificación de los poliedros, punto culminante de la obra de Euclides:

> «*Ninguna otra figura, además de estas cinco, se puede construir con polígonos equiláteros y equiángulos entre sí*.»

La demostración es similar a la de los mosaicos pitagóricos, pero ahora hay que resolver una inecuación en números enteros: la que resulta de la Proposición XI.21:

$\frac{m(n-2)\cdot 180^\circ}{n} < 360^\circ$, si concurren en un vértice m polígonos regulares de n lados.

Esta inecuación es equivalente a (m–2)·(n–2)<4, que da como soluciones geométricas:

$$\begin{cases} \bullet\ (m\text{-}2)\cdot(n\text{-}2) < 4 : \\ \quad \bullet\ \text{para } m = 3 \begin{cases} n = 3 & \text{(tetraedro).} \\ n = 4 & \text{(cubo).} \\ n = 5 & \text{(dodecaedro).} \end{cases} \\ \quad \bullet\ \text{para } m = 4,\ n = 3\ \text{(octaedro).} \\ \quad \bullet\ \text{para } m = 5,\ n = 3\ \text{(icosaedro).} \end{cases}$$

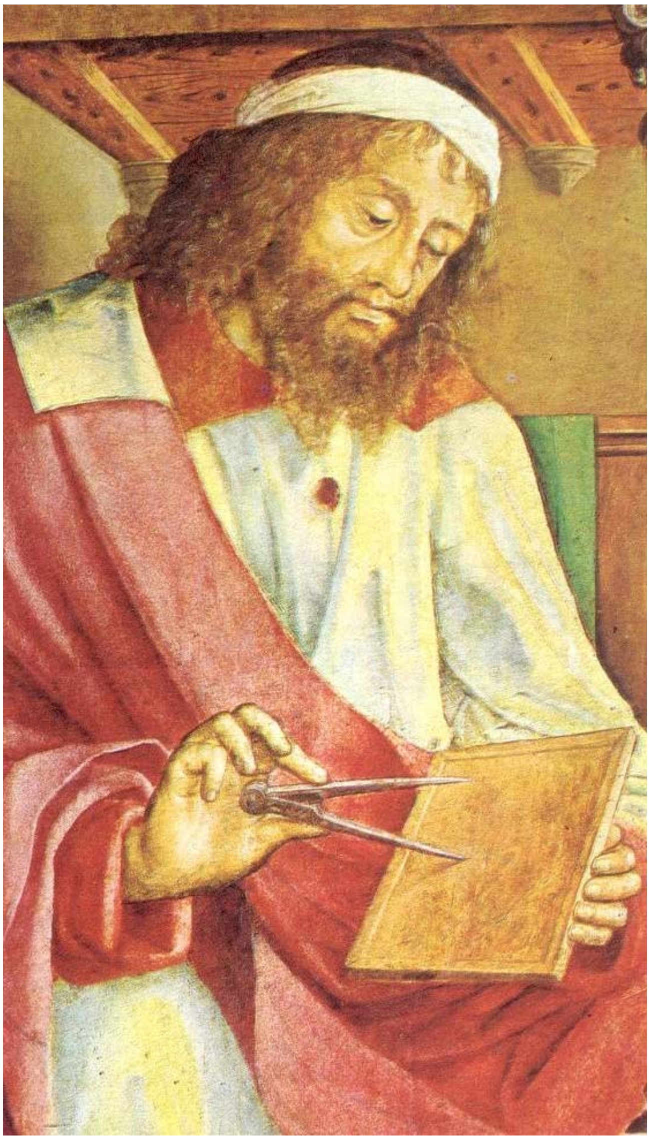
EXISTEN CINCO Y SÓLO CINCO POLIEDROS REGULARES

EL TEXTO DE EUCLIDES (XIII.18)

Digo ahora que, aparte de las cinco figuras antedichas, no se construirá otra figura comprendida por [figuras] equiláteras y equiangulares iguales entre sí.

Porque no se construye un ángulo sólido con dos triángulo o, en absoluto, con dos planos. Sino que el ángulo de la pirámide se construye con tres triángulos, el del octaedro con cuatro, el del icosaedro con cinco; pero no se construirá un ángulo sólido mediante seis triángulos equiláteros y equiangulares [colocados] en un sólo punto; porque si el ángulo del triángulo equilátero es dos tercios de un recto, los seis serán iguales a dos rectos; lo cual es imposible, porque todo ángulo sólido es comprendido por menos de cuatro rectos [XI.21]. Por lo mismo, tampoco se construye un ángulo sólido con más de seis ángulos planos. Y el ángulo del cubo es comprendido por tres cuadrados; por cuatro es imposible, porque serán a su vez cuatro rectos. Y el [ángulo] del dodecaedro es comprendido por tres pentágonos equiláteros y equiangulares; por cuatro es imposible, porque, siendo el ángulo del pentágono equilátero un recto más un quinto, los cuatro ángulos serán mayores que cuatro rectos; lo cual es imposible. Y un ángulo sólido tampoco será comprendido por otros polígonos en razón de la misma imposibilidad.

Por consiguiente, aparte de las cinco figuras antedichas, no se construirá otra figura sólida comprendida por [figuras] equiláteras y equiangulares. Q.E.D



Euclide immaginato. Justus van Ghent (siglo XV).

EXISTEN CINCO Y SÓLO CINCO POLIEDROS REGULARES

W.Dunham. *Viaje a través de los genios*. Pirámide. Madrid, 1992. pp.113–114

Ya que, según se piensa, Euclides había estudiado en la Academia de Atenas de Platón, se puede sospechar que estos sólidos [los cuerpos platónicos] fascinaron a Euclides lo suficiente como para que tuvieran asegurada su inclusión como el punto culminante de los *Elementos.*

[...] Los geómetras conocían desde hacía tiempo la existencia de cinco sólidos regulares. En la proposición 465 y última de los *Elementos,* Euclides demostró que no podía haber otros, que la geometría, de alguna manera, había dictaminado que el número de tales bellas figuras eran cinco, ni más, ni menos. La sencilla demostración se basa en la proposición XI.21. Euclides, simplemente consideró las clases de polígonos que forman las caras de los sólidos regulares, a la luz de la restricción de que la suma de los ángulos planos que componen cualquier ángulo sólido debe ser menor que cuatro ángulos rectos, o, en jerga moderna, 360°.

Supóngase que cada cara del sólido regular es un triángulo equilátero, de modo que cada ángulo plano tenga 60º. Un ángulo sólido, por supuesto, debe estar formado por la intersección de tres o más caras, de modo que el caso mínimo es el de tres triángulos equiláteros por cada vértice del sólido, lo que hace un total de 3x60°=180°. Esto es precisamente lo que caracteriza al tetraedro.

Podíamos tener cuatro triángulos equiláteros que se encuentran en cada vértice, con un total de 4x60°=240º (el octaedro); o cinco en cada vértice, con un total de 5x60°=300º (el icosaedro). Pero, una vez que se cortan seis o más triángulos equiláteros en cada vértice, la suma de los ángulos planos sería, como mínimo, 6x 60°=360°, y esto viola la proposición XI.21. Por consiguiente, no existen otros sólidos regulares con triángulos equiláteros como caras.

¿Qué decir de los sólidos cuyas caras son cuadrados? Cada ángulo del cuadrado es, por supuesto, 90°, de modo que tres cuadrados podían cortarse formando un ángulo sólido de 3x90°=270°; este sólido es el cubo. Pero si cuatro o más cuadrados formaran un ángulo sólido, la suma de los grados sería, como mínimo, 4x90°=360°, algo imposible. En consecuencia, ningún otro sólido regular tiene caras cuadradas.

Alternativamente, las caras pueden ser pentágonos regulares. Puesto que cada ángulo interior de tales pentágonos tiene 108°, puede haber tres ángulos (3x108°=324°< 360°), y no más, formando un ángulo sólido. El sólido regular así formado es el dodecaedro.

Si intentamos construir uno de estos sólidos con hexágonos, heptágonos, octógonos, etc., regulares como caras, entonces cada ángulo y plano contendrá, como mínimo, 120º, de modo que incluso poniendo el mínimo de tres en cada ángulo sólido, igualaríamos o superaríamos el límite de 360°. [...].

En resumen, Euclides había mostrado que no podía haber más de cinco sólidos regulares –tres con triángulos equiláteros de caras, uno con cuadrados y otro con pentágonos–. Ninguna cantidad de esfuerzo o ingenio produciría un mayor número de estas notables figuras.

Con esto termina el libro de los *Elementos.* Fue, y ha permanecido así durante 2.300 años, un documento matemático insuperado. Como toda gran obra maestra, puede ser leído una y otra vez, suministrando nuevos aspectos del genio de su creador. Aún hoy, estos viejos escritos constituyen una fuente ilimitada de goce para los que disfrutan con la ingeniosidad y el artificio de un argumento matemático elegante. Lo mejor que podemos hacer es citar de nuevo a sir Thomas Heath, quien lo ha dicho de una forma simple, directa y exacta. El libro de los *Elementos* «*... es y sin duda permanecerá como el libro de texto de matemáticas más grande de todos los tiempos*».

Los sólidos arquimedianos o poliedros semirregulares

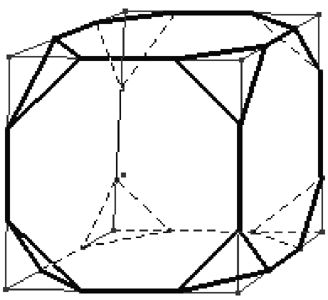
Los sólidos arquimedianos son trece cuerpos que –como los cinco sólidos platónicos– son igualmente inscriptibles en una esfera, y tienen por caras polígonos regulares de dos o tres tipos (aunque tienen la misma arista), siendo iguales todos los vértices e iguales los polígonos que resultan de unir puntos medios de aristas que concurren en un vértice.

Los sólidos arquimedianos también se llaman poliedros semirregulares ya que mantienen la regularidad de las caras y de los vértices, aunque no la igualdad de las caras por tener cada uno más de un tipo de polígonos.

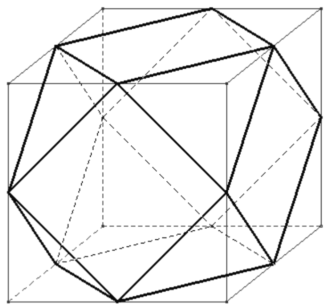
Podemos obtener los sólidos arquimedianos al cortar de una forma determinada las esquinas de los poliedros regulares, es decir, mediante un proceso de truncamiento. Concretamente los cortes en torno a los vértices se realizan mediante planos perpendiculares al eje de rotación del poliedro que pasa por esos vértices. De esta forma cada sección del poliedro de origen se convierte en un polígono regular, que es de la misma clase (triángulos, cuadrados, pentágonos, etc.) para todos los cortes.

Obtenemos los poliedros arquimedianos haciendo dos tipos de secciones:

1. Cortando por un plano que pase a una distancia del vértice igual a un tercio del valor de la arista. El poliedro resultante tendrá unas caras con un número de lados igual al orden del vértice y otras con doble número de lados que las del poliedro de partida.
2. Cortando por un plano que pasa por el punto medio de todas las aristas que concurren en cada vértice. El nuevo poliedro tendrá unas caras cuyo número de lados será igual al orden del vértice y otras del mismo número de lados que las caras del poliedro inicial.

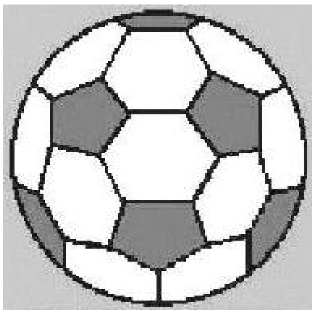


1. Cubo truncado



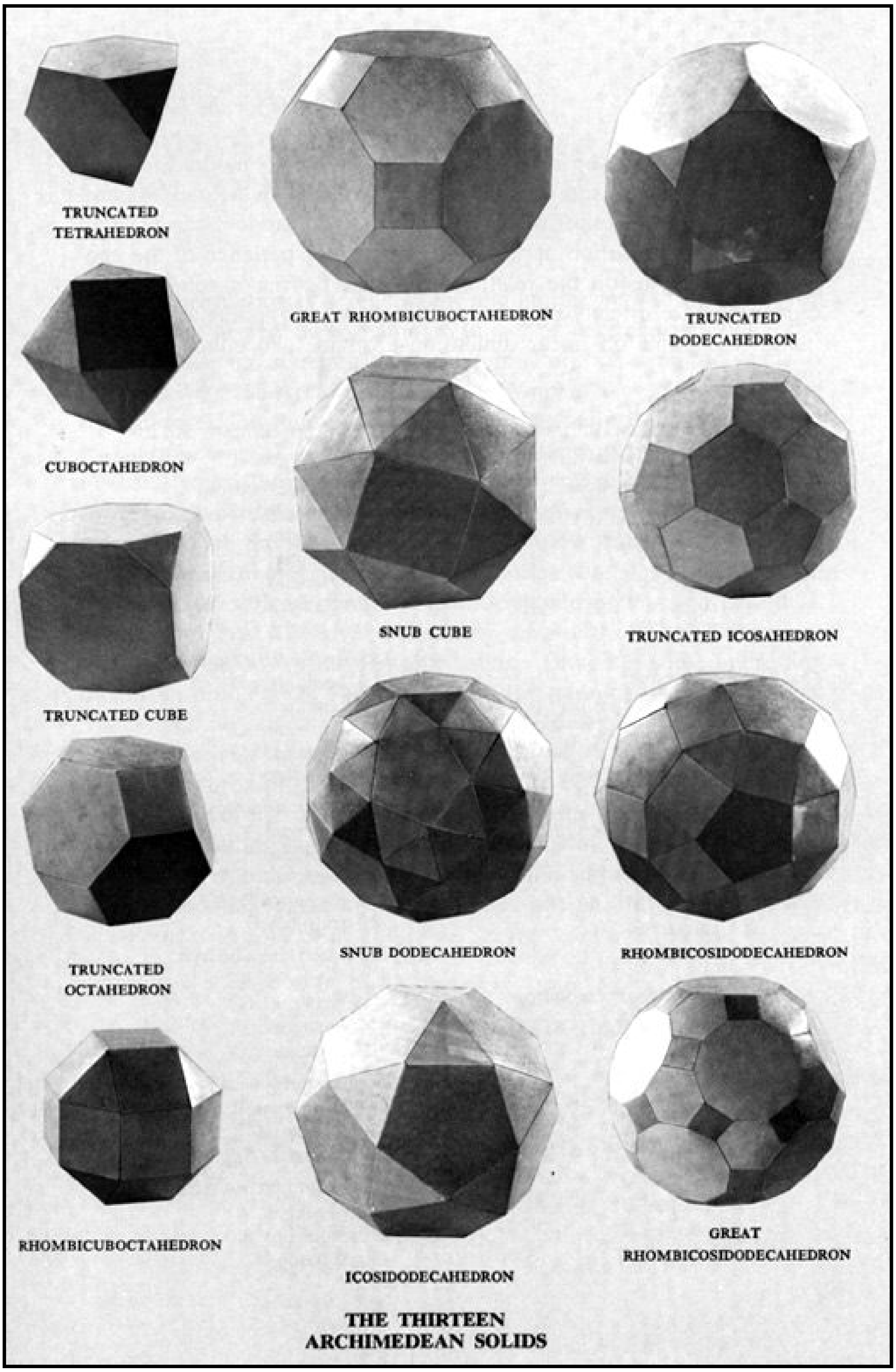
2. CuboOctaedro

De los trece poliedros arquimedianos, los siete primeros se pueden obtener por truncamiento de los cinco platónicos. Al truncar de la primera forma –dividir la arista en tres segmentos iguales y cortar por estas divisiones– se obtienen los poliedros llamados con los nombres platónicos de origen más el término «*truncado*». En cambio al truncar de la segunda forma, es decir, si dividimos las aristas por la mitad y truncamos cortando por estas divisiones, sólo se obtienen dos nuevos poliedros: el CuboOctaedro y el IcosiDodecaedro. Los nombres acrónimos provienen de que al truncar de esta forma en el caso del Cubo y el Icosaedro se obtiene el mismo poliedro, por eso se llama CuboOctaedro; y lo mismo sucede con el Icosaedro y el Dodecaedro, se obtiene un mismo poliedro que se llama IcosiDodecaedro. Y si se trunca de esta segunda forma un Tetraedro resulta de nuevo un Tetraedro. La explicación de esta cuestión geométrica tiene que ver con la llamada dualidad poliédrica que se describirá más adelante.



Según el *Fedón* (110b) de Platón los griegos jugaban con balones de doce pieles en forma de dodecaedro que al hincharse se aproximaban a la forma esférica, lo que constituía un antecedente de nuestro balón de fútbol. Al principio de los tiempos modernos los balones de fútbol tenían forma de *icosaedro truncado* –poliedro arquimediano formado por 12 pentágonos y 20 hexágonos–, pero en la actualidad el balón oficial corresponde al *pequeño rombicosidodecaedro* –poliedro arquimediano formado por 20 triángulos, 30 cuadrados y 12 pentágonos– en el que el tamaño de las caras está bastante igualado y es la forma poliédrica más redondeada, ya que es el que más se aproxima a la esfera circunscrita –ocupa más del 94% de esta esfera–.

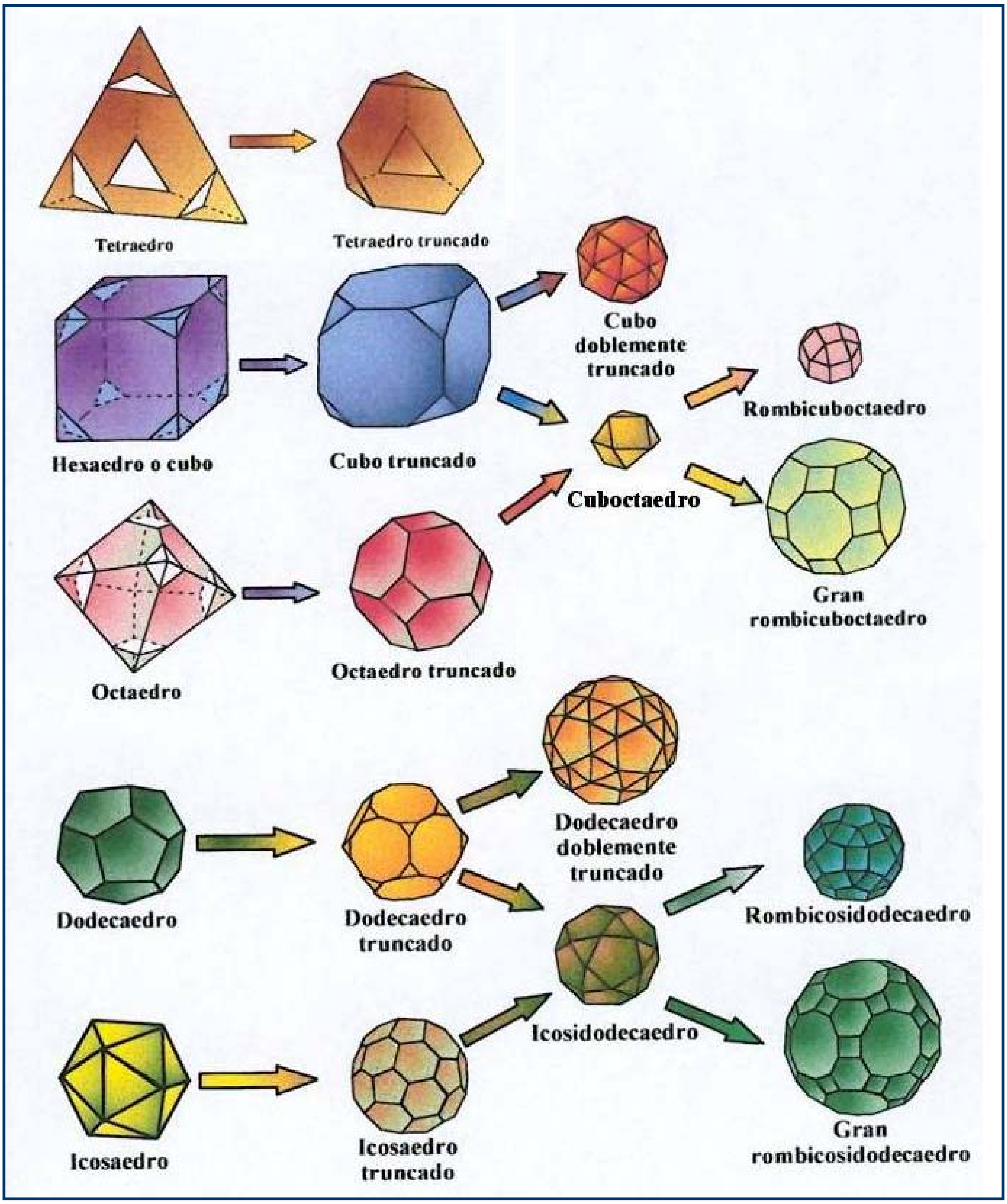
LOS TRECE POLIEDROS ARQUIMEDIANOS



Los 13 poliedros arquimedianos en la obra de J.Wenniger *Polyedron Models for the Classroom*.. National Council of Teachers of Mathematics («*Classics in Mathematics Education*»). Washington, 1966. P.7.

Los poliedros arquimedianos se llaman también semirregulares porque todas las caras son polígonos regulares de diversos tipos y con la misma arista y todos los vértice son idénticos (concurren los mismos tipos de polígonos).

LA GENERACIÓN DE LOS POLIEDROS ARQUIMEDIANOS



Nombre	Polígonos regulares de las caras
Tetraedro truncado	4 hexágonos y 4 triángulos
Cubo truncado	6 octógonos y 8 triángulos
Cuboctaedro	6 cuadrados y 8 triángulos
RombiCuboctaedro menor	18 cuadrados y 8 triángulos
Octaedro truncado	8 hexágonos y 6 cuadrados
Cubo doblemente truncado (o redondeado)	6 cuadrados y 32 triángulos
RombiCuboctaedro mayor	6 octógonos, 8 hexágonos y 12 cuadrados
IcosiDodecaedro	12 pentágonos y 20 triángulos
Dodecaedro truncado	12 decágonos y 20 triángulos
Icosaedro truncado	20 hexágonos y 12 pentágonos
RombIcosiDodecaedro menor	12 pentágonos , 30 cuadrados y 20 triángulos
Dodecaedro doblemente truncado (o redondeado)	12 pentágonos y 80 triángulos
RombIcosiDodecaedro mayor	12 decágonos, 20 hexágonos y 30 cuadrados

LOS POLIEDROS ARQUIMEDIANOS EN LA *COLECCIÓN MATEMÁTICA* DE PAPPUS

PAPPI
ALEXANDRINI
MATHEMATICAE
COLLECTIONES
A FEDERICO
COMMANDINO
VRBINATE
In Latinum conuersæ, & Commentarijs illustratæ.
In hac nostra editione ab innumeris, quibus scatebant mendis, & præcipuè in Græco contextu diligenter vindicatæ.
ET SERENISSIMO PRINCIPI
LEOPOLDO GVLIELMO
ARCHIDVCI AVSTRIAE, &c.
DICATÆ.

BONONIÆ Ex Typographia HH. de Duccijs. M.DC.LX.
SVPERIORVM PERMISSV.

1. Arquímedes geómetra Fragmento de un fresco de la Biblioteca de El Escorial. Pellegrino Tibaldi. 1586.
2. La *Colección Matemática* de Pappus. Edición de F.Commandino. (Bolonia, 1670).

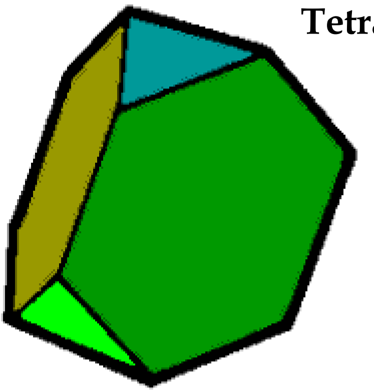
Pappus de Alejandría (hacia 325 d.C) atribuye la invención de sólidos arquimedianos a Arquímedes –de donde derivaría su nombre–, quien los habría estudiado en una obra ahora perdida. Pappus da una somera descripción de estos sólidos e indica, además, para cada sólido, el número de caras, aristas y vértices en el Libro V, capítulo XIX de su enciclopédica obra sobre la Geometría superior de los griegos *La Colección Matemática* (Tomo 1, Blanchard, 1982, pp. 272–273):

> **«[...]** ***Es posible imaginar un gran número de figuras sólidas que tienen superficies de toda especie, pero solamente prestaremos atención a aquellas que parecen regulares. Ahora bien, éstas no son exclusivamente las constituidas por cinco figuras que encontramos en la obra del divino Platón, a saber: el tetraedro, el hexaedro, el octaedro y el dodecaedro, y, en quinto lugar, el icosaedro, sino también aquellas que han sido descubiertas en número de trece por Arquímedes y son comprendidas por polígonos equiláteros y equiángulos, pero no semejantes.*****»**

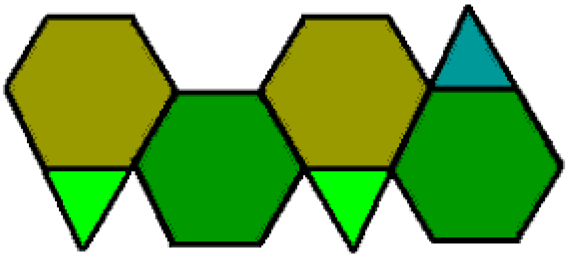
Sellos con imágenes de poliedros arquimedianos.

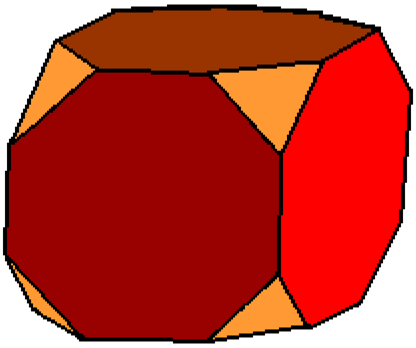
1. **Sello alemán con cristales de sulfuro de plomo en forma de cuboOctaedro (6 cuadrados y 8 triángulos) y sulfuro de zinc en forma de tetraedro truncado (4 hexágonos y 4 triángulos).**
2. **Sello de la Polinesia francesa que podría ser un Rombicuboctaedro mayor.**

LOS DESARROLLOS PLANOS DE LOS POLIEDROS ARQUIMEDIANOS

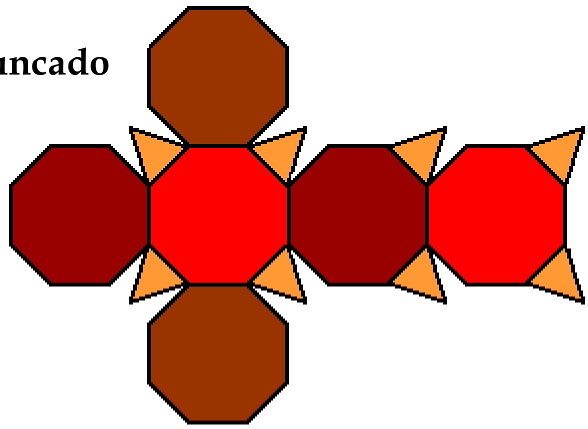


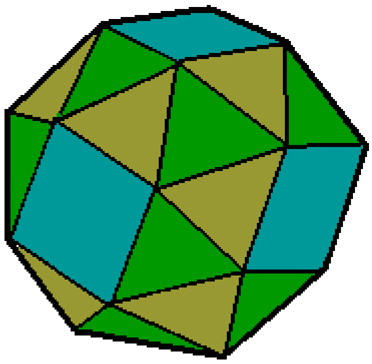
Tetraedro truncado



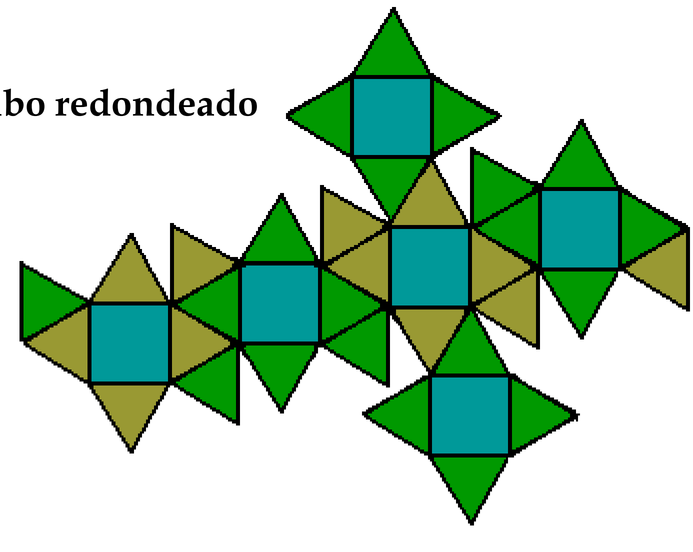


Cubo truncado

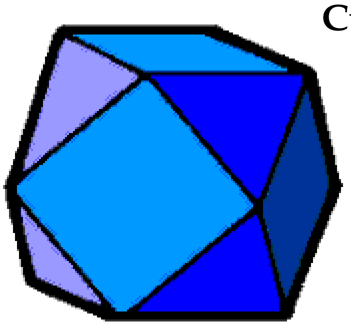


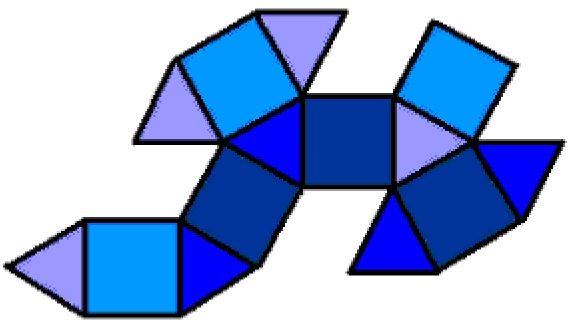


Cubo redondeado

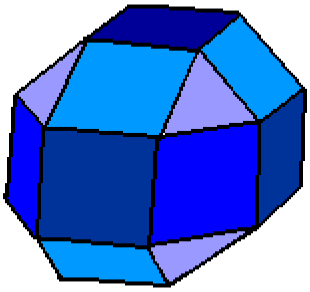


CuboOctaedro

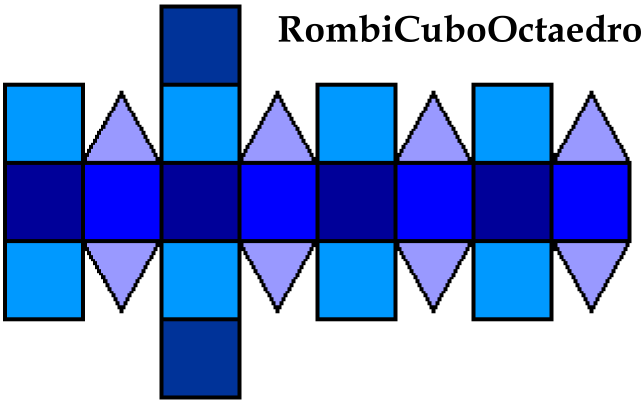


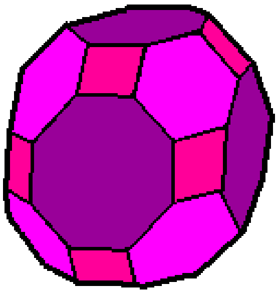


LOS DESARROLLOS PLANOS DE LOS POLIEDROS ARQUIMEDIANOS

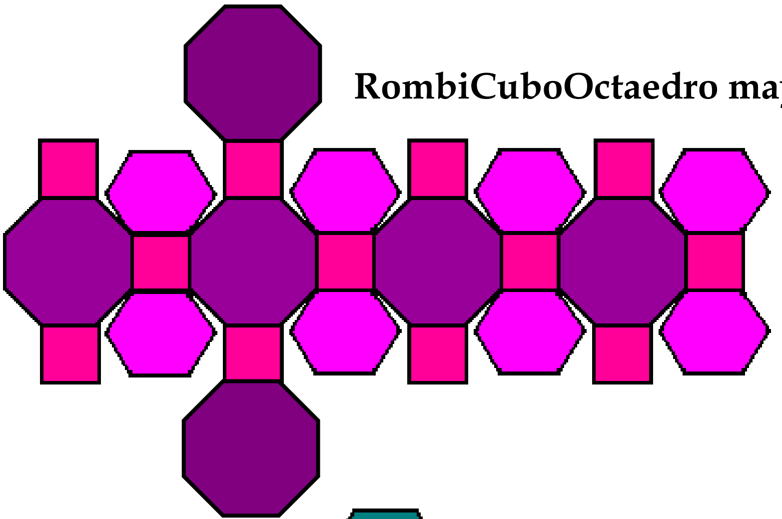


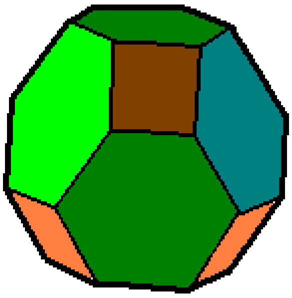
RombiCuboOctaedro menor



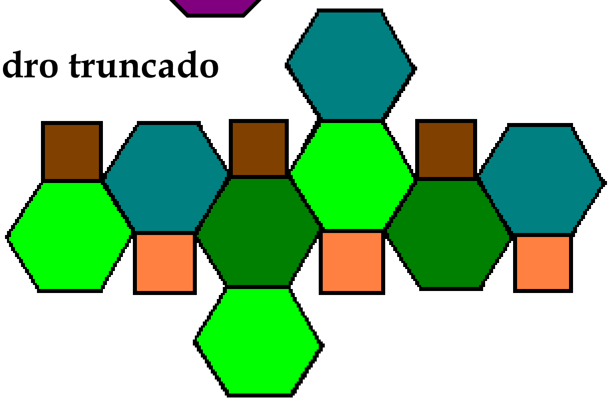


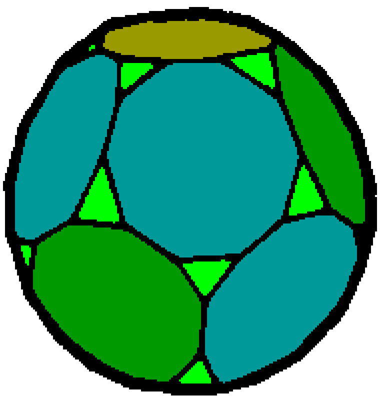
RombiCuboOctaedro mayor



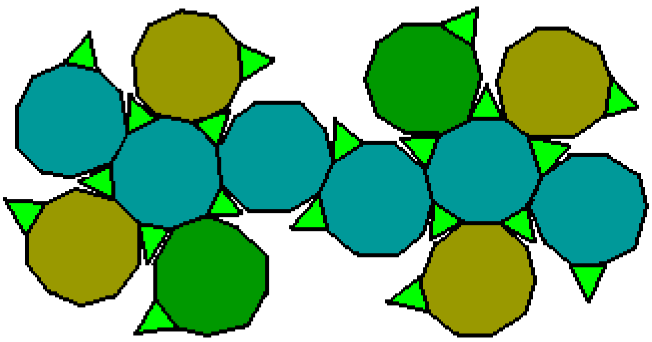


Octaedro truncado



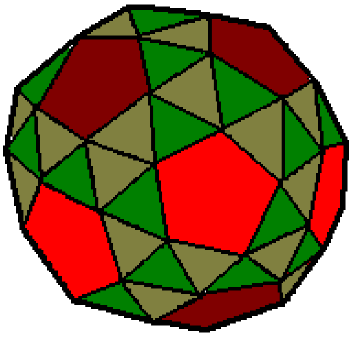


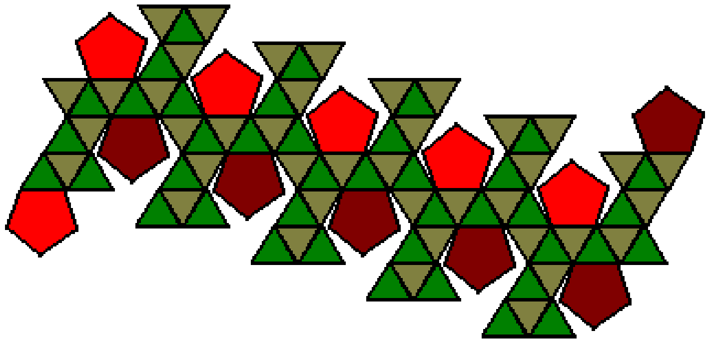
Dodecaedro truncado



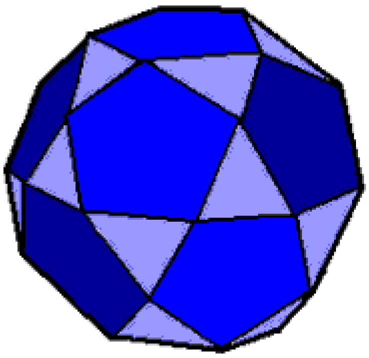
LOS DESARROLLOS PLANOS DE LOS POLIEDROS ARQUIMEDIANOS

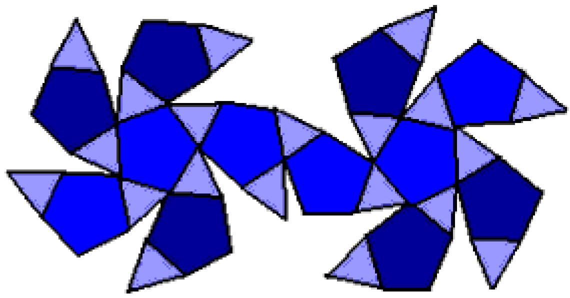
Dodecaedro redondeado



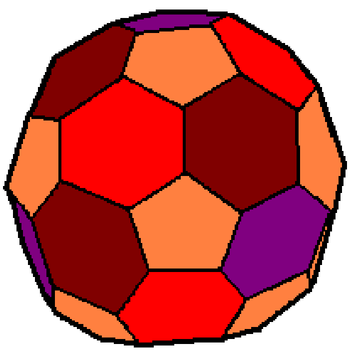


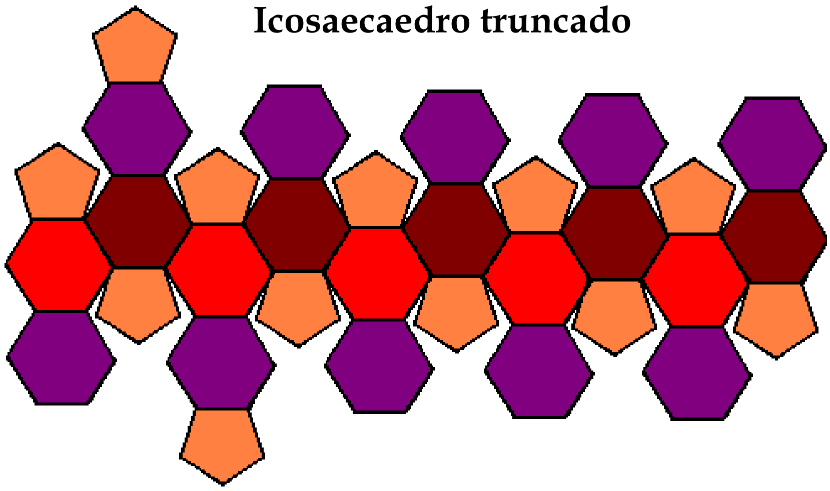
IcosiDodecaedro





Icosaecaedro truncado





CITAS MEMORABLES SOBRE LOS SÓLIDOS PLATÓNICOS

1. **Pitágoras investigó los teoremas de un modo inmaterial e intelectual y descubrió la dificultad de los números irracionales y la construcción de las figuras cósmicas** [poliedros]. Proclo de Licia. *Comentarios al Libro I de los Elementos de Euclides*.
2. **A la tierra le atribuimos la figura cúbica** [Hexaedro], **porque la tierra es el elemento más difícil de mover, el más tenaz, el de las bases más sólidas; la figura sólida de la pirámide** [Tetraedro] **es el elemento y el germen del fuego; la segunda en orden de nacimiento** [Octaedro] **es el elemento del aire; y la tercera** [Icosaedro], **el del agua. [...] Quedaba aún una sola y única combinación** [dodecaedro]; **el Dios se sirvió de ella para el Todo cuando esbozó la disposición final del universo.** Platón. *Timeo* (55d–55c).
3. **Digo ahora que, aparte de las cinco figuras antedichas, no se construirá otra figura comprendida por (figuras) equiláteras y equiangulares iguales entre sí** [Existen cinco y sólo cinco poliedros regulares]. Euclides. *Los Elementos*. Proposición XIII.18.
4. **Argumentando como un magnífico geómetra y profundísimo matemático, Platón asoció las cinco formas regulares a los cinco cuerpos simples que concurren en la formación de todo compuesto creado, es decir, a la tierra, el aire, el agua, el fuego y el cielo, como aparece en su *Timeo*, donde trata sobre la naturaleza del universo.** Luca Pacioli. *La Divina Proporción*. Akal, Madrid, 1991. Cap.LV. p.103
5. **El dodecaedro, por estar dotado de una singular prerrogativa con respecto a los demás, a ninguno ha prohibido o vedado alojamiento, siendo receptáculo de todos. Por ello el antiguo Platón, lo atribuyó, junto con los cuerpos mencionados al universo.** Luca Pacioli. *La Divina Proporción*. Akal, Madrid, 1991. Cap.XLVI. p.89.
6. **Es mi intención demostrar en este libro que el Creador Optimo Máximo, al crear este mundo móvil y en la disposición de los cielos se atuvo a los cinco cuerpos regulares que han sido tan famosos desde los días de Pitágoras y de Platón hasta los nuestros y también que en función de su naturaleza ajustó su número, sus proporciones y la razón de sus movimientos.** J.Kepler. *El secreto del universo* (*Mysterium Cosmographicum*). Alianza Editorial, Madrid, 1992. p.65
7. **El *Timeo* pasa por ser la obra más sublime de toda la filosofía antigua.** Voltaire. *Diccionario filosófico*
8. **La culminación de *Los Elementos* de Euclides con la construcción de los poliedros responde al interés especial que mostraban los filósofos griegos por todo lo que atañe a los cuerpos regulares.** F.Klein. *Matemática elemental desde un punto de vista superior*. Vol. II. Geometría Biblioteca Matemática. Dtor: J.Rey Pastor. Madrid, 1931. p.260.
9. **Ya que según se piensa, Euclides había estudiado en la Academia de Atenas de Platón, se puede sospechar que estos sólidos fascinaron a Euclides lo suficiente como para que tuvieran asegurada su inclusión como punto culminante de *Los Elementos*.** W.Dunham. *Viaje a través de los genios*. Pirámide. Madrid, 1992. p.115.
10. **Popper afirmó que la teoría geométrica de la estructura del mundo, que aparece por primera vez en Platón, ha sido la base de la cosmología moderna desde Copérnico y Kepler, a través de Newton, hasta Einstein; y Heisenberg precisó que la física moderna se halla más próxima al *Timeo* de Platón que a Demócrito.** W.Guthrie, *Historia de la Filosofía griega*, Gredos, Madrid, 1992, vol. 5, p.256–257.

Los poliedros y los artistas a partir del Renacimiento:

Piero della Francesca, Leonardo, Luca Pacioli, Durero

Los poliedros, como otros temas de la Matemática pitagórica y platónica, han formado parte importante del Arte, en diversas épocas, por su especial belleza, simetría y regularidad. La cumbre de este interés por los poliedros desde el punto de vista artístico tiene lugar en la época renacentista con los llamados artistas matemáticos y los estudiosos y teóricos del arte en general. Para algunos artistas del Renacimiento los poliedros proporcionaban excelentes modelos para los estudios sobre Perspectiva. Para otros, los poliedros poseían una fuerte carga simbólica de verdades religiosas o profundas ideas filosóficas. En este sentido, la asociación que hizo Platón, en el *Timeo*, entre los cinco sólidos regulares –tetraedro, octaedro, hexaedro, icosaedro y dodecaedro– y los cuatro elementos componentes –fuego, aire, tierra y agua– y el universo, respectivamente, será objeto de una importante consideración durante el Renacimiento, propiciado por la revitalización de los estudios platónicos producida por la reaparición de ciertos manuscritos con las obras de Platón y las numerosas traducciones de las fuentes platónicas acompañadas de amplios comentarios, entre las que se debe mencionar las de los intelectuales humanistas de la llamada Academia platónica de Florencia, fundada por Cosme de Médicis en 1459, que bajo la dirección de Marsilio Ficino se propuso la restauración del Platonismo como religión filosófica.

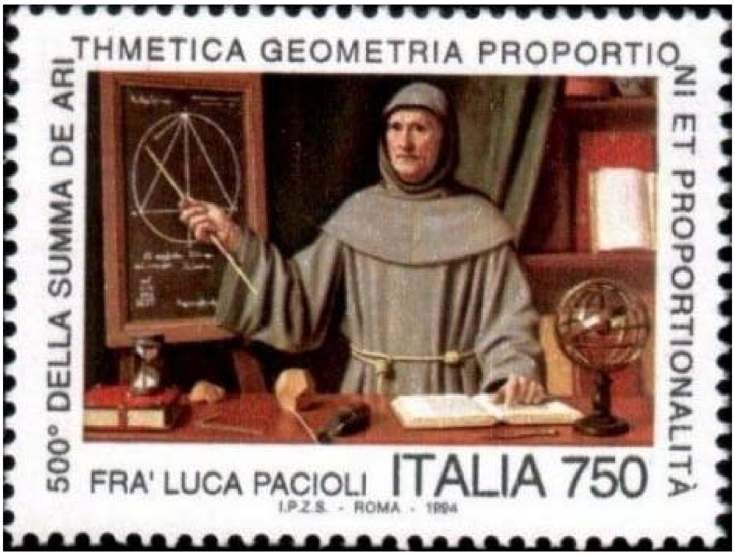
Así pues, a comienzos del siglo XVI, los poliedros regulares eran conocidos a través del *Timeo* de Platón, obra de la que Marsilio Ficino había publicado una traducción completa en 1484. Pero enseguida contribuyó también a la difusión de la geometría vinculada a los sólidos platónicos el Libro XIII de *Los Elementos* de Euclides, una de cuyas traducciones latinas se imprime –incluso las figuras geométricas– por primera vez en 1482 en Venecia, en la imprenta de Ratdolt. Incluso poco después aparecerán las traducciones de la obra euclídea en lenguas vernáculas: en italiano –Tartaglia (Venecia, 1543) y Commandino (Urbino, 1575)–; Alemán –J.Scheubel (Augsburg, 1555) y W. Holtzman (conocido como Xylander, Basilea, 1562)–; Francés –Forcadel de Beziers (París,1565), Español –Rodrigo Çamorano (Sevilla, 1576)–; Inglés –Henry Billingsley (Londres, 1582)–; y otras.

Para el artista renacentista beber en las fuentes pitagóricas, platónicas y euclídeas era el equivalente a la actual formación matemática, científica, técnica y cultural del profesional actual, de modo que el artista cumple un papel intelectual y humanista al trascender lo meramente artesanal para convertirse en artista racional que representa la diversa realidad a partir de los principios geométricos, las técnicas artísticas y las ideas filosóficas. Al fundir, por una parte el Arte con la Ciencia y la Filosofía, y por otra, el saber clásico con el renacentista, el artista, como el científico y el filósofo, se sitúa en la asamblea de los doctos, elevando las artes plásticas, antaño reducidas a mecánicas, a la misma categoría intelectual que *Las Artes Liberales*, de modo que más allá de la plasmación de la percepción de los sentidos, el artista perseguirá la búsqueda de la idea a través del discurso mental en un progresivo proceso de racionalización del Arte.

Muchos de los artistas renacentistas conceden una importancia suprema al estudio de las proyecciones de los poliedros regulares sobre un plano, que formaba parte muy importante de la educación técnica del pintor. De hecho el estudio de múltiples aspectos de los poliedros es el broche brillante que corona algunas importantes obras teóricas y didácticas de ciertos artistas y estudiosos del arte. Con ello, además de profundizar en su naturaleza geométrica con nuevos hallazgos matemáticos, los artistas y teóricos del Renacimiento dan un nuevo aliento a esos bellísimos cuerpos pitagórico–platónicos que pasan de ser meros sólidos susceptibles de estudio meramente teórico a exquisitos elementos decorativos y fascinantes objetos de un diseño ejemplar.

Nos ocuparemos principalmente de los estudios y trabajos sobre poliedros de Piero della Francesca, Leonardo da Vinci, Luca Pacioli y Alberto Durero. Estos sabios, geómetras y artistas del Renacimiento, están vinculados por la relación maestro–discípulo. Piero della Francesca enseñó Matemáticas a Luca Pacioli y Leonardo las aprendió de éste, mientras que Durero, directa o indirectamente aprendió de los tres.

POLIEDROS Y ARTE
EN PIERO DELLA FRANCESCA, LEONARDO, PACIOLI Y DURERO



El espíritu renacentista de filósofos y artistas desarrolló, como herencia platónica, una verdadera veneración mística hacia los poliedros regulares, con una carga simbólica que les concedía un potencial casi sobrenatural. Además, para muchos artistas del Renacimiento los poliedros proporcionaban excelentes modelos para los estudios sobre Perspectiva, que pretendían lograr la corrección y verosimilitud en la representación del espacio y por ende una garantía de perfección estética.

Piero della Francesca, Leonardo da Vinci, Luca Pacioli y Alberto Durero son los sabios, geómetras y artistas del Renacimiento que más cultivaron el estudio de los poliedros. Además, entre ellos hay un vínculo maestro–discípulo. Piero della Francesca enseñó Matemáticas a Luca Pacioli y Leonardo las aprendió de éste e ilustró sus obras. Durero de forma directa o indirecta aprendió Geometría y Teoría del Arte de los tres.

El *Libellus De Quinque Corporibus Regularibus* de Piero della Francesca

Piero della Francesca fue uno de los personajes más originales del Renacimiento. Pocos artistas como Piero han creado una obra tan profundamente calada por una concepción geométrica de la Belleza. Piero era un artista singular pero también tenía un gran genio matemático, por eso integraba en una perfecta superposición dos vehementes pasiones: el Arte y la Geometría. Poseído por ellas, Piero aborda la Pintura bajo su vocación de geómetra. Para Piero la Geometría contiene la piedra filosofal de la Estética.

G.Vasari, ilustre biógrafo de artistas escribe sobre Piero della Francesca, en su famosa obra *La vida de los más eminentes pintores, escultores y arquitectos italianos*:

> «*Piero della Francesca fue considerado como un gran maestro en los problemas sobre los cuerpos regulares, tanto aritméticos como geométricos*. [...]. *Con toda justicia adquirió la reputación de ser el líder de los geómetras de su tiempo*. [...]. *A causa de sus logros como matemático y como pintor* [...] *fue empleado por Guidobaldo de Montefeltro, el anterior duque de Urbino*.»

Piero escribe importantes tratados matemáticos: *De Prospectiva pingendi* (1474) –*La Perspectiva en la Pintura*–, *Trattato d'Abaco* –*Tratado del Ábaco*– y *Libellus De Quinque Corporibus Regularibus* (1485) –*Corto Libro sobre los Cinco Cuerpos Regulares*–. El estilo matemático de estos tratados está asociado con la tradición de la Matemática práctica de la época que consiste en dar largas series de ejemplos muy trabajados. Ninguno de los trabajos de Piero fue publicado con su nombre durante el Renacimiento pero parece ser que circularon en manuscrito y llegaron a tener gran influencia a través de su incorporación a las obras publicadas por otros matemáticos. En particular, buena parte de la Aritmética del *Trattato d'Abaco* aparece en la obra de Luca Pacioli *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*, mientras que su trabajo sobre poliedros es plagiado en *De Divine Proportione* (*La Divina Proporción*), también de Luca Pacioli.

La obra de Piero *De Prospectiva pingendi* es el primer tratado de perspectiva en la Pintura. En la primera parte de la obra se introducen las bases fundamentales de la perspectiva y sus aplicaciones para dibujar en un plano figuras geométricas tridimensionales, a base de considerar el cono de radiación –formado por los rayos que van del ojo a los diversos objetos– y que al ser cortado por el plano en cuestión, queda determinada la posición en perspectiva de los diversos objetos en dicho plano. En la segunda parte de la obra se considera la proyección sobre un plano, bajo diferentes ángulos, de los cinco sólidos platónicos. Y en la tercera parte lo mismo referente a cuerpos irregulares. Esta obra de Piero es de gran utilidad para pintores, pero además tiene un alto valor iniciático para las Matemáticas, ya que en ella aparecen algunos de los primeros principios de Geometría Proyectiva y de Geometría Descriptiva. Además la obra es muy estimable desde el punto de vista pedagógico, ya que conduce al lector, con intereses artísticos o matemáticos, de forma sistemática, mediante el uso de la regla y el compás, al progresivo conocimiento y a la resolución de problemas prácticas de dificultad creciente.

Piero della Francesca se da cuenta de que los poliedros resultan ser unos magníficos modelos para los estudios de perspectiva, tan útiles a los artistas, por lo que decide profundizar mucho más en su estudio geométrico y por eso realiza el estudio ilustrado sobre poliedros más completo de todo el Renacimiento en la citada obra *Libellus De Quinque Corporibus Regularibus*, a base de resolver numerosos problemas prácticos que plantea.

La obra empieza con las siguientes palabras (L.Pacioli, *La Divina Proporción*, Losada, Buenos Aires, 1946, p.187):

> «*Los cuerpos laterados pueden muy bien colocarse en el cuerpo esférico, tocando con todos sus ángulos la superficie de la esfera. Pero sólo son cinco los cuerpos regulares, es decir, los que tienen lados y bases iguales*. *El primero es el de cuatro bases triangulares*, [...] *el quinto es el de veinte bases triangulares. De tales cuerpos es mi intención mostrar con números, raíces y binomios su cantidad y sus medidas*. [...].

Sobre esto daré tres breves tratados. En el primero se hablará de los lados y de la superficie de las bases, en el segundo de los cuerpos laterados [regulares] *y de sus superficies y cuadraturas, en el tercero de los cuerpos contenidos uno por uno y algo de la esfera, si Dios quiere, etcétera*.»

Así pues, en la primera parte del *Libellus ...*, Piero estudia con exhaustividad, a través de cincuenta y cinco problemas prácticos con datos numéricos, numerosas propiedades de los polígonos que pueden ser caras de poliedros regulares –triángulos, cuadrados y pentágonos–.

En la segunda parte del *Libellus* ... Piero estudia, a través de treinta y siete problemas prácticos con datos numéricos, los tópicos euclídeos habituales sobre cada uno de los poliedros regulares, en particular problemas equivalentes a las Proposiciones XIII.13–XIII.17 de *Los Elementos* de Euclides que relacionan las aristas con el diámetro de la esfera que los circunscriben, pero también otros problemas que relacionan las aristas con los ejes de los poliedros, y estas dos longitudes con el volumen de los mismos. Por ejemplo, dos problemas típicos de esta parte serían los siguientes:

«*Dado el cuerpo de ocho bases triangulares cuya cuadratura es igual a 400, hallar el diámetro de la esfera que lo contiene*» (Problema, 25; p.229).

«*Dado el cuerpo de doce bases pentagonales cuyo lado es igual a 4, hallar su cuadratura*» (Problema, 29; p.232).

«*Dado el cuerpo de veinte bases triangulares equilátero cuya superficie es igual a 200, hallar el diámetro de la esfera que lo contiene*» (Problema, 34; p.235).

El último problema de esta parte es equivalente a la última proposición de *Los Elementos* de Euclides, que Piero escribe de la forma (p.237):

[*De los lados de los cuerpos regulares*]

«*Y ahora que hemos hablado de la cantidad de los lados, superficies y cuadraturas* [volúmenes] *de los cinco cuerpos regulares contenidos por las diversas esferas, creo conveniente hablar, en esta última parte del segundo tratado, de los lados de todos estos cuerpos, contenidos por una misma esfera*. [...]»

Piero della Francesca fue un experto en relacionar los diversos poliedros regulares; obtuvo unos a partir de otros y los inscribió sucesivamente. Hasta trece problemas dedica Piero a estas cuestiones en la tercera parte del *Libellus* ...., que empieza así (p.238):

«*Ahora, en este tercer tratado*, [...] *hablaré de la cantidad de los lados de esos cuerpos, contenidos unos en otros, y cuántos caben en cada uno de ellos*. [...].»

De esta forma, además de enfatizar la primera diferencia entre polígonos regulares y poliedros regulares en cuanto a su número –el número de polígonos regulares en el plano es infinito, pero el número de poliedros regulares en el espacio es de cinco y sólo cinco–; Piero subraya otra distinción significativa entre ambos tipos de entes –mientras que en el plano, el triángulo, el cuadrado y el pentágono, por ejemplo, son geométrica y algebraicamente independientes unos de otros, los cinco poliedros regulares guardan entre sí íntimas relaciones estructurales–. De ellas la más elemental es la llamada *dualidad* o *reciprocidad* poliédrica según la cual

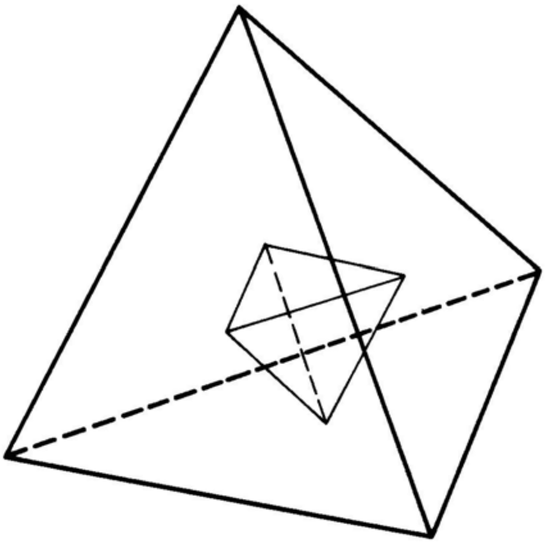
«*El sólido cuyos vértices son los centros de las caras de uno platónico también es platónico*»

y también

«*el sólido determinado por los planos tangentes en los vértices a la esfera circunscrita a un sólido platónico también es platónico.*»

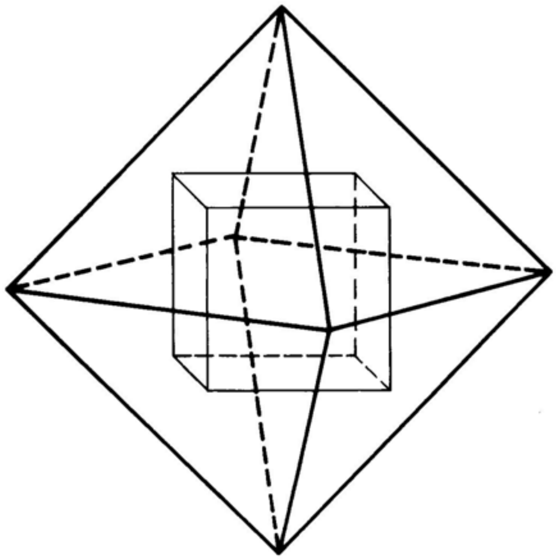
Un poliedro y su dual tienen el mismo número de lados y el número de caras de uno es igual al número de vértices del otro.

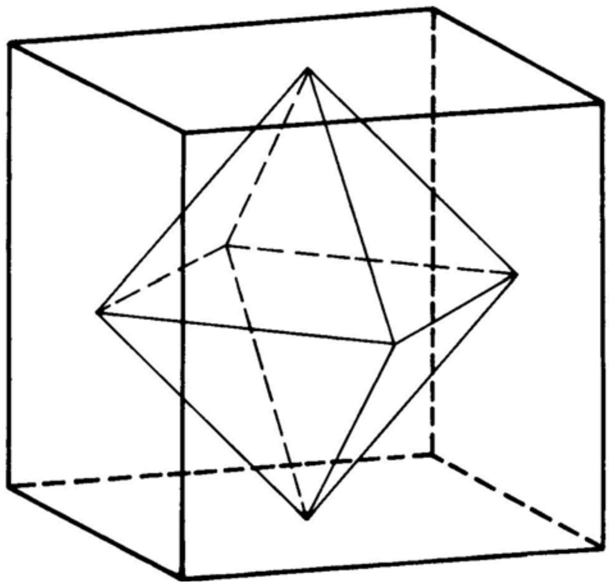
LA DUALIDAD DE LOS SÓLIDOS PLATÓNICOS

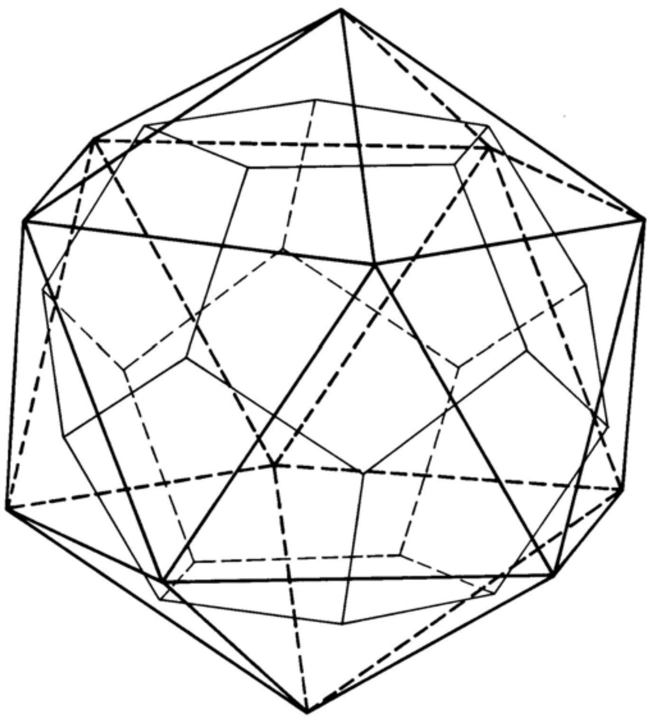


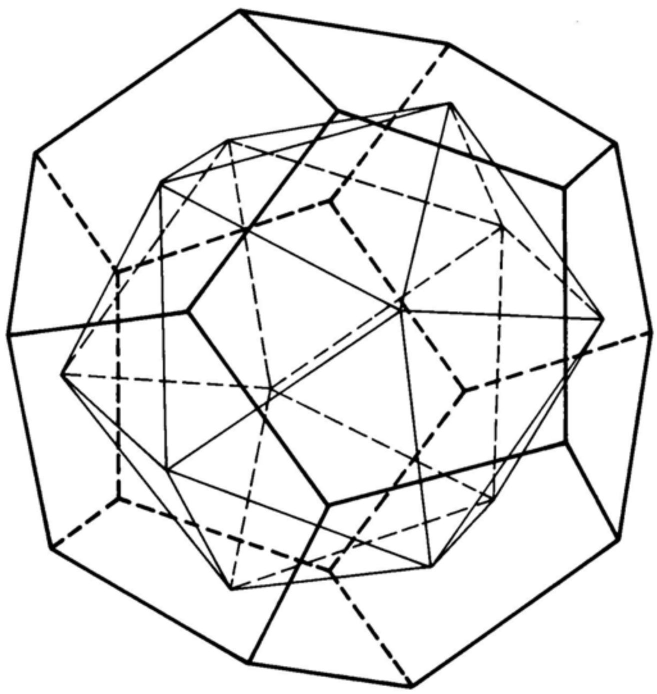
Los cinco poliedros regulares se clasifican por *dualidad* en tres grupos:

- **Tetraedro que es dual de sí mismo.**
- **Cubo–Octaedro (el dual del Cubo es el Octaedro y viceversa).**
- **Icosaedro–Dodecaedro (el dual del Icosaedro es el Dodecaedro y viceversa).**

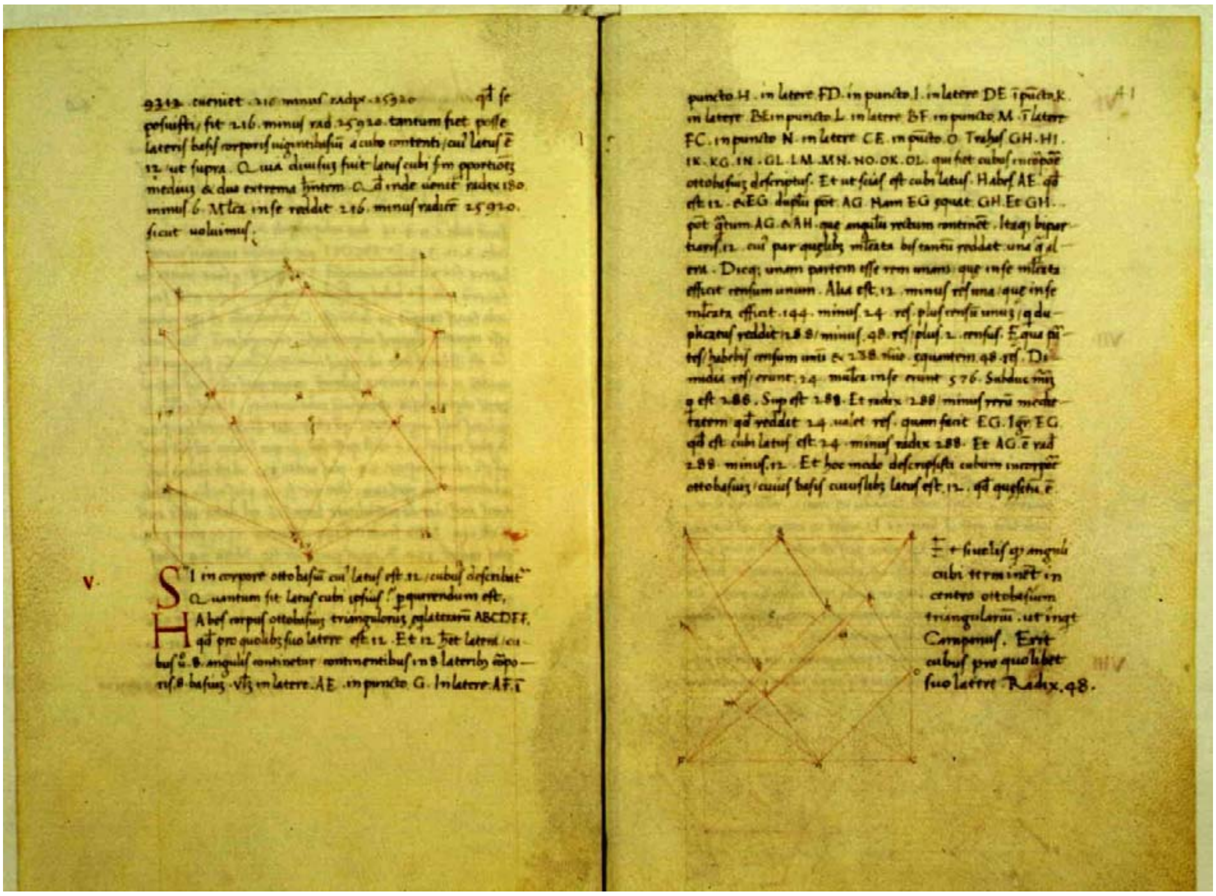






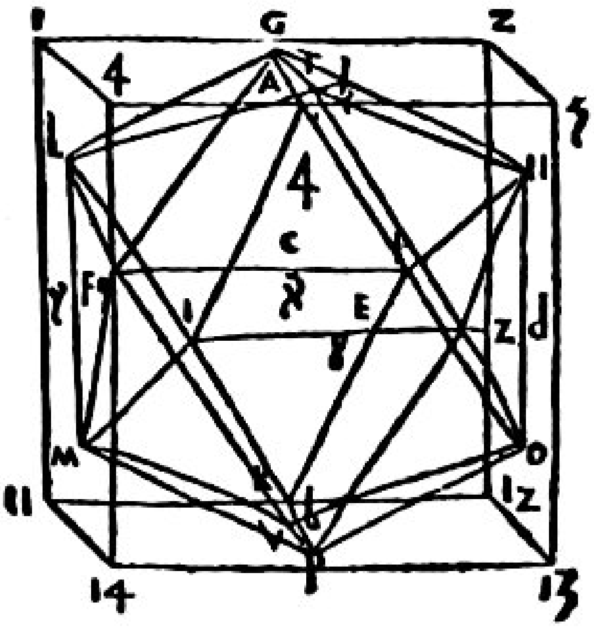


VÍNCULOS ENTRE SÓLIDOS PLATÓNICOS EN EL *LIBELLUS* ... DE PIERO DELLA FRANCESCA



Página de *Libellus De Quinque Corporibus Regularibus* de Piero della Francesca (Manuscrito de la Biblioteca Vaticana, 1480, Urb. lat. 632 fols. 40 verso- 41 recto math03 NS.18).

Las figuras fueron realizadas por Piero della Francesca. Representan a un icosaedro inscrito en un cubo y un cubo inscrito en un octaedro.



En el *Libellus De Quinque Corporibus Regularibus* Piero della Francesca realiza un estudio muy completo de formas de pasar directa o indirectamente de unos sólidos platónicos a otros, vinculando de múltiples maneras los diversos poliedros, algunas de las cuales son estudiadas por Ghyka (*Estética de las proporciones en la Naturaleza y en las Artes*. Poseidón, Barcelona, 1983, cap.3) y Lawlor (*Geometría Sagrada*. Debate. Madrid, 1993, cap.10). También en Guillén (*El mundo de los poliedros*. Síntesis. Madrid, 1997, cap.5) se puede encontrar un estudio bastante exhaustivo de la interrelación de sólidos platónicos, a base de buscar de forma sistemática las posibles inscripciones entre poliedros regulares dispuestos de tal forma que las simetrías comunes coincidan (por ejemplo, como el cubo y el octaedro tienen las mismas simetrías, se podrán inscribir en los mismos poliedros, y también podrán inscribirse en ellos los mismos poliedros). En particular, al considerar los pares de poliedros (de un tamaño adecuado) que tienen exactamente las mismas simetrías, resultan parejas de sólidos en los que los vértices del poliedro inscrito yacen en los centros de las caras del otro poliedro, que son los pares de poliedros que hemos llamado duales.

Grabado de *La Divina Proporción* de L. Pacioli, copia de la ilustración del problema cuarto de la tercera parte del *Libellus* ... de Piero della Francesca (Manuscrito *Urb. lat. 632 fols. 40 verso* de la Biblioteca Vaticana, 1480).

La imagen representa una original inscripción de un icosaedro en un cubo, de forma que los vértices del icosaedro están situados sobre las caras del cubo.

PIERO DELLA FRANCESCA Y LOS POLIEDROS

Retrato de Piero della Francesca en *La vida de los más eminentes pintores, escultores y arquitectos italianos*, de Giorgio Vasari, edición de 1568.

Según G. Vasari:

> ***Piero della Francesca realizó intensos y extensos estudios sobre la perspectiva en la pintura. Había adquirido un íntimo conocimiento de Euclides, entendiendo mejor que ningún otro geómetra la naturaleza de los cuerpos regulares* [...]. *Los más eminentes estudios y las cuestiones más notables sobre ellos surgieron de su pluma.***

El Tratado de Piero *Libellus De Quinque Corporibus Regolaribus* es el primer texto de Geometría en el Renacimiento en el que problemas relativos a la construcción y cálculo de poliedros se resuelven mediante diseños estereométricos. En realidad el escrito de Piero es el primero en la historia dedicado por entero al tema de los poliedros. En sus estudios geométricos sobre poliedros platónicos y arquimedianos, Piero diseña laboriosas proyecciones de los diversos poliedros, de un gran valor y de gran influencia sobre los incipientes estudios renacentistas en torno a la Perspectiva.

El original del tratado que se conserva es un único manuscrito (Códice *Vaticano Urbinate Latino* 632) compilado por un autor desconocido al que acompaña diseños de figuras, correcciones y adiciones realizadas por el propio Piero, quien lo dedicó a Guidubaldo da Montefeltro, Duque de Urbino. El trabajo de Piero era conocido desde comienzo del siglo XVI, pero no a través de este manuscrito latino, sino como parte de *De Divine Proportione* de Luca Pacioli, que lo publicó en italiano como trabajo propio. El plagio fue denunciado por Giorgio Vasari y ha sido objeto de una encencida polémica desde entonces.

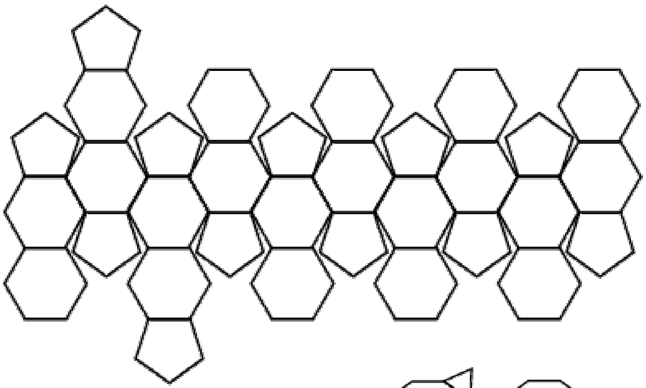
Piero della Francesca es el primero de una serie de artistas cuyas exploraciones geométricas conducen al gradual redescubrimiento de los poliedros arquimedianos, sólidos que no eran conocidos en su tiempo, lo que tiene lugar en la continuación de la tercera parte del *Libellus* ... , donde Piero escribe:

> «*Habiendo hablado de los cuerpos regulares abarcados por la esfera,* [...] *y de su colocación, uno dentro de otro, me parece oportuno hablar además de algunos cuerpos irregulares contenidos por la esfera, `tocando con todos los ángulos su superficie cóncava*, [...].»

En concreto Piero introduce la noción de «*truncar un poliedro*» en su sentido matemático moderno y describe seis de los trece sólidos arquimedianos: los cinco sólidos platónicos truncados –el Tetraedro, el Cubo, el Octaedro, el Icosaedro y el Dodecaedro, truncados– y también el CuboOctaedro. Tanto el Tetraedro truncado como el CuboOctaedro son estudiados por Piero en el *Trattato d'Abaco* y todos los truncados en el *Libellus De Quinque Corporibus Regularibus*. Estos sólidos son empleados por Piero en nuevos y sustanciales problemas geométricos, por ejemplo, calculando la superficie, el volumen y la longitud de la arista de un sólido poliédrico en función del diámetro de la esfera circunscrita, o, recíprocamente, calculando la superficie, el volumen y el diámetro de la esfera circunscrita en función de la longitud de la arista del sólido poliédrico.

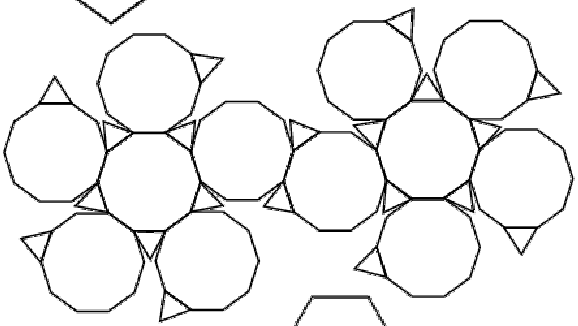
No sabemos si Piero conocía la descripción que Pappus hace de los poliedros arquimedianos en *La Colección Matemática*. Como quiera que la obra de Pappus apareció y se difundió con posterioridad al trabajo de Piero –la primera impresión es la edición de Commandino de 1589– es probable que los estudios de Piero tengan el mérito de ser un verdadero y original redescubrimiento

LOS POLIEDROS ARQUIMEDIANOS DE PIERO DELLA FRANCESCA



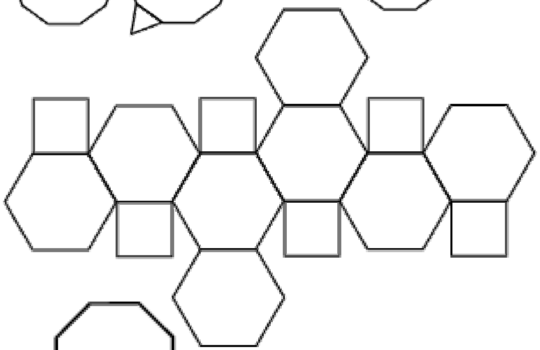
ICOSAEDRO TRUNCADO

Caso 2. Dado un cuerpo de 32 bases, es decir, 20 hexagonales y 12 pentagonales, siendo los lados de cada una igual a 2 y tocando sus ángulos la esfera que circunscribe a dicho cuerpo, se pregunta por el diámetro de la esfera y por la superficie del cuerpo de 32 bases y por su cuadratura



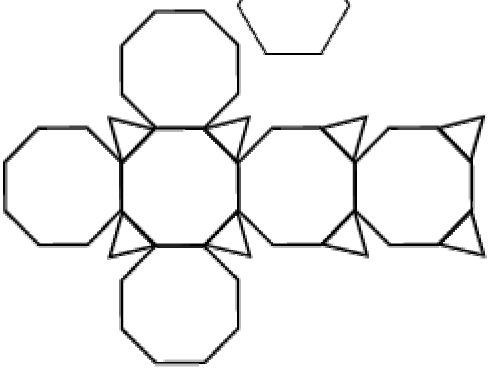
DODECAEDRO TRUNCADO (p.261)

Caso 3. Dado el cuerpo de 32 bases, 20 triangulares equiláteras y 12 decagonales equiláteras, inscrito en la esfera y que toca con todos sus ángulos la circunferencia cóncava de la esfera, hallar el diámetro de la esfera, los lados, la superficie la cuadratura.



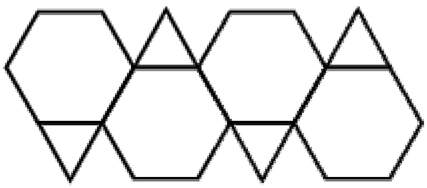
OCTAEDRO TRUNCADO

Caso 4. Dado el cuerpo de catorce bases, es decir, seis cuadradas y ocho hexagonales, siendo el lado de cada base igual a 2, se pregunta cuál será su superficie y su cuadratura, y el diámetro de la esfera.



HEXAEDRO TRUNCADO

Caso 5. Dado el cuerpo de 14 bases, es decir, seis octogonales y ocho triangulares equiláteras, contenido por la esfera cuyo eje es igual a 10, se quiere hallar el lado, la superficie y la cuadratura.



TETRAEDRO TRUNCADO

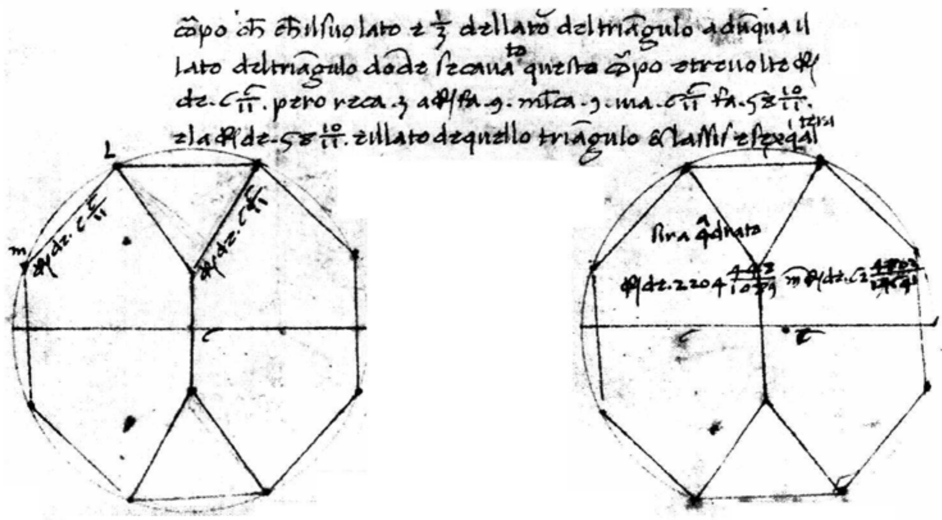
Caso 6. Dada una esfera cuyo eje es igual a 12, en el cual está encerrado un cuerpo irregular de ocho bases, cuatro triangulares y cuatro de seis lados, en el cual los ángulos tocan la superficie cóncava de la esfera, se quiere conocer los lados, la superficie y la cuadratura.

Se dan aquí los enunciados de cinco problemas sobre poliedros arquimedianos, obtenidos por truncación, que aparecen en la tercera parte del *Libellus De Quinque Corporibus Regolaribus* de Piero della Francesca incorporado por Luca Pacioli a *La Divina Proporción* (págs. 259–267).

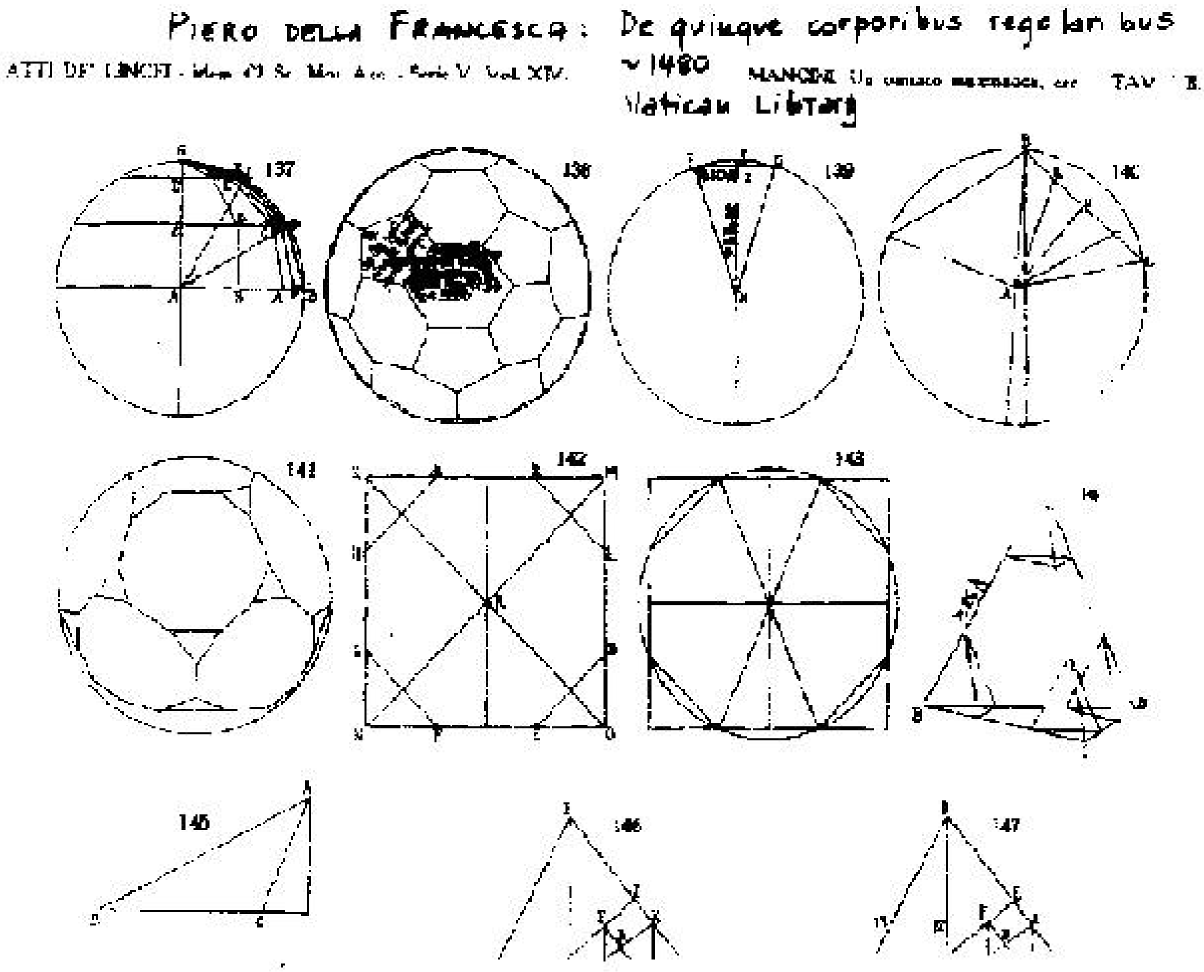
A diferencia de los problemas anteriores sobre poliedros regulares, para estos problemas el texto sólo aporta el dibujo en perspectiva del tetraedro truncado, por lo que hemos dibujado los desarrollos para comprender mejor los enunciados. En este sentido, en el problema del octaedro truncado aparece una nota de Lucas Pacioli que reza así:

> ***«Lector, no te extrañe si, para tales cuerpos compuestos de diversas y varias bases no se ponen al margen sus figuras, puesto que son muy difíciles de dibujar, ya que se necesitan que estén hechas por un buen perspectivo, y no siempre se puede tener uno para este propósito, tal como por su amor a las humanidades hizo nuestro Leonardo da Vinci. Pero cuando aquí, en el tratado anterior y también en el siguiente, hay algunos casos que se han puesto* [sin la figura correspondiente] *basta que tu ojees entre los dibujos puestos antes, al principio, en perspectiva* [y hechos por Leonardo] *de su propia mano,* [...].**

POLIEDROS ARQUIMEDIANOS DE PIERO DELLA FRANCESCA OBTENIDOS POR TRUNCAMIENTO DE POLIEDROS PLATÓNICOS



Ilustraciones del poliedro arquimediano Tetraedro truncado de la obra *Trattato d'Abaco* de Piero della Francesca. Biblioteca Medicea–Laurenziana, Codice Ashburnhamiano 280.



Ilustraciones de los poliedros arquimedianos Icosaedro truncado y Dodecaedro truncado del manuscrito de la obra *Libellus De Quinque Corporibus Regularibus* de Piero della Francesca.

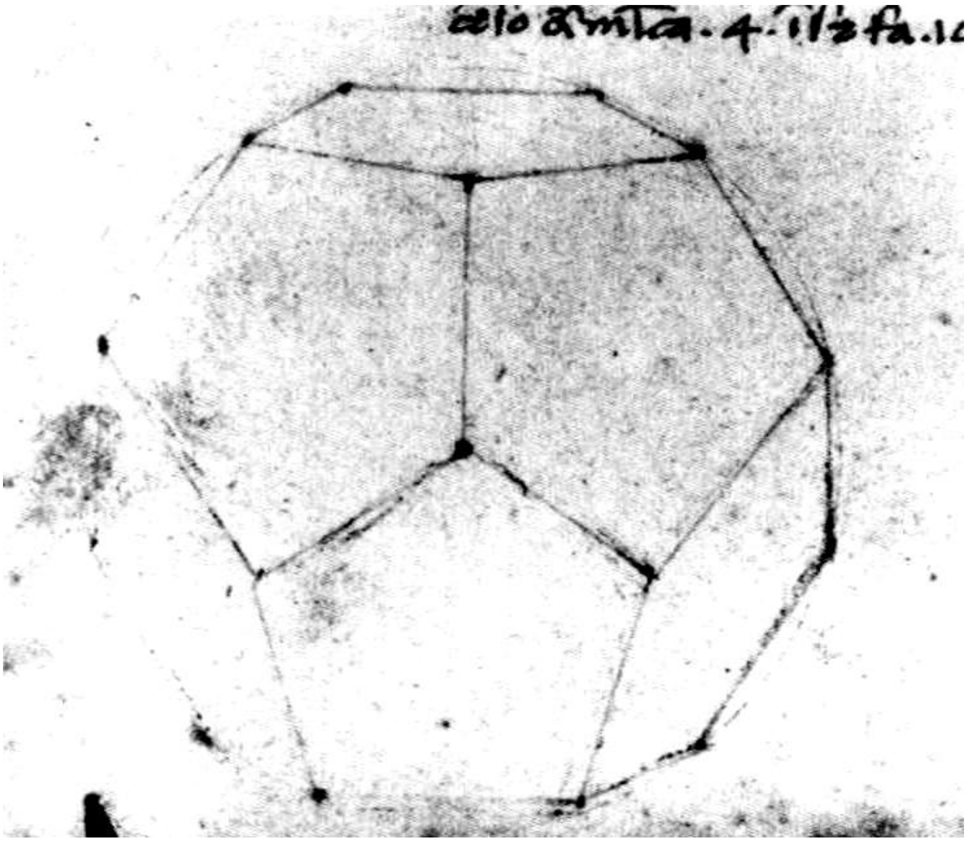


Ilustración del poliedro platónico Dodecaedro de la obra *Trattato d'Abaco* de Piero della Francesca. Biblioteca Medicea–Laurenziana de Florencia, Codice Ashburnhamiano 280.

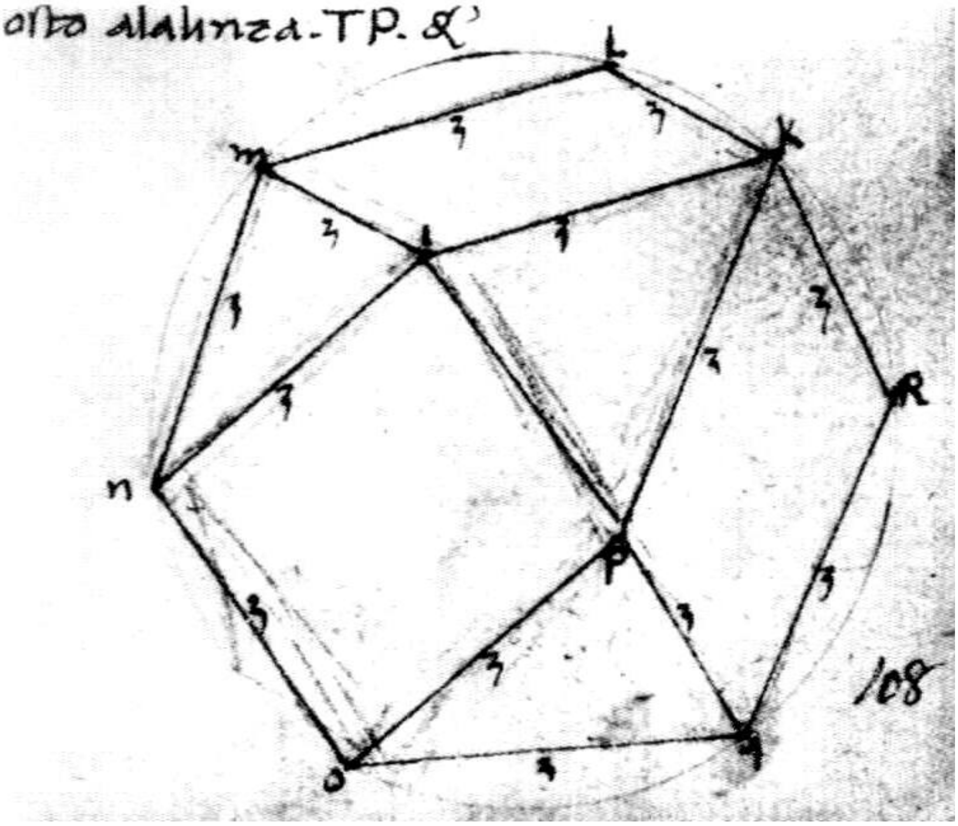


Ilustración del poliedro arquimediano CubiOctaedro de la obra *Trattato d'Abaco* de Piero della Francesca. Biblioteca Medicea–Laurenziana de Florencia, Codice Ashburnhamiano 280.

Poliedros en la *Divina Proporción* de Luca Pacioli

Luca Pacioli es uno de los matemáticos más famosos del período renacentista. Quizá también es el matemático más completo de la época, en el sentido de que supo recoger las diversas tradiciones matemáticas, clásicas, medievales y renacentistas, y aunarlas en una sólida obra, no muy original, pero de gran valor como compendio enciclopédico de la cultura matemática del coetánea. Así tiene lugar con su obra conocida como *Summa* (su largo título es *Summa di arithmetica, geometrica, proportione et proportionalita*) que se imprime en Venecia en 1494, y que había sido escrita con finalidad didáctica como obra orgánica y sistemática del conjunto de los conocimientos de las ciencias matemáticas puras y aplicadas del momento: Aritmética teórica y práctica (que incluye Matemática comercial) y Geometría teórica (fundamentalmente *Los Elementos* de Euclides y en particular la *Teoría de la Proporción* de notable importancia en los estudios matemáticos de los artistas) y aspectos geométricos prácticos incluso de cierta incipiente Trigonometría.

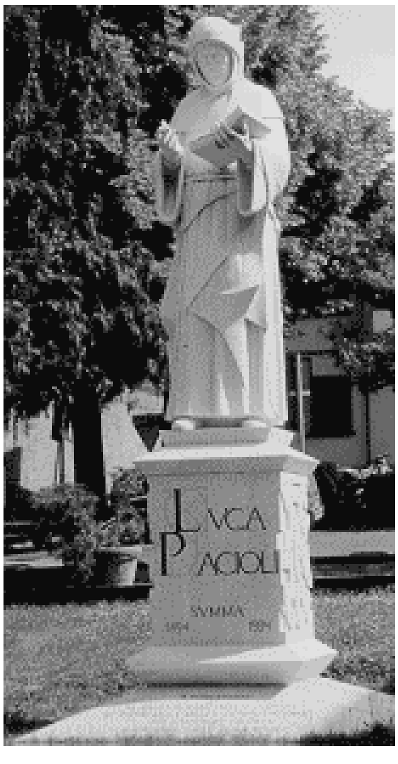
Para Pacioli las disciplinas matemáticas se encuentran en el primer grado de certeza, por eso proclama, una y otra vez, con entusiasmo que las Matemáticas son ya no sólo el fundamento de todas las demás ciencias sino que en términos prácticos menciona los beneficios que producen en el estudio de la Filosofía, la Teología, la Religión, las Leyes, la ciencia militar, en todas las Artes –Música, Pintura, Arquitectura, Escultura–, e incluso en el diseño de las letras del alfabeto. Toda esta disposición hacia las Matemáticas desarrolló en Pacioli una acusada vocación por la enseñanza y la difusión de la Matemática pura y aplicada, de modo que en toda su obra escrita, Pacioli debió repercutir no sólo sus reflexiones científicas sino multitud de argumentos, observaciones y consideraciones extraídas de sus lecciones orales desarrolladas a lo largo de su dilatada experiencia docente como Profesor de Matemáticas en numerosas instituciones académicas italianas.

Luca Pacioli recibió una decisiva influencia matemática de Piero della Francesca, quien en las frecuentes visitas que realizaba a la ciudad natal de ambos, Borgo de Sansepolcro, a partir de1460, procuraba ver a Pacioli, lo que permitió a éste trabar una profunda amistad con el ya famoso artista y asistir a sus lecciones más o menos informales de Matemáticas. Pacioli también se benefició gracias a Piero de la magnífica biblioteca de Federico de Montefeltro, duque de Urbino, cuyos textos antiguos estimularon su espíritu ávido de conocimiento científico. Con toda razón y gratitud, pues, Pacioli ensalza con todo tipo de elogios a Piero como su principal maestro.

Estatuas de Piero della Francesca y de Luca Pacioli, erigidas en la localidad natal de ambos, el Borgo de Sansepolcro, cercana a Florencia.

Piero y Luca Pacioli siempre mantuvieron una gran amistad entre ellos. Pacioli siempre consideró a Piero como un maestro digno de veneración y no escatimó panegíricos hacia él. En la segunda parte de la *Divina Proporción,* que viene a ser un Tratado de Arquitectura, Luca Pacioli escribe respecto al honor que supone para su patria chica el haber dado una figura egregia como Piero della Francesca:

«En lo que respecta a las Matemáticas lo ilustra claramente el monarca de la pintura y la arquitectura de nuestros días, maestro PIERO DELLA FRANCESCA con su pincel.»



Inspirándose ante todo en las fuentes platónicas y euclídeas –y en primera instancia pitagóricas–, pero también en la obra de Vitrubio, en las conversaciones con Leonardo da Vinci y en las especulaciones de los neoplatónicos florentinos, Luca Pacioli escribe su famosa obra *La Divina Proporción* –que se imprime en Venecia en 1509–, a lo largo de la cual se entremezclan consideraciones y teorías geométricas con argumentos filosóficos y alusiones esotéricas y místicas.

Cuando se menciona a *La Divina Proporción* de Luca Pacioli, en general se alude a la primera parte de la obra dedicada a estudio de la *sección áurea* –lo que los griegos llamaban la división de un segmento en media y extrema razón– a la que Pacioli bautiza como *divina proporción,* y sobre todo al estudio exhaustivo de los poliedros. No obstante, la edición de *La Divina Proporción* incluye, además, dos trabajos, con títulos *Tractato de la Architectura* –, que revela algunas reglas aplicables a las proporciones de los edificios basadas en las medidas y proporciones del cuerpo humano, ideas de inspiración vitrubiana– y otro con título muy largo: *Libellus in tres partiales tractatus divisus quinque corporum regularium et dependentium activae perscrutationis,* que es la traducción al italiano vulgar del códice *Libellus De Quinque Corporibus Regularibus* de Piero Francesca.

En el capítulo geométrico de la *Summa*, Luca Pacioli realiza ya un estudio de ciertos aspectos de los poliedros regulares y arquimedianos que incluye el cálculo de sus volúmenes. De hecho la parte VIII de este capítulo geométrico es un apéndice que lleva por título *Particularis tractatus circa corpora regularia et ordinaria*. Pero es en *La Divina Proporción*, entre los capítulos XXIV y LIV, donde Pacioli expone una teoría completa que realiza la construcción y formación y hace un estudio exhaustivo de las propiedades de los poliedros regulares y de otros tipos.

Como se ha dicho, la tercera parte de *La Divina Proporción* viene a ser una traducción casi literal al italiano del escrito de Piero della Francesca sobre poliedros *Libellus De Quinque Corporibus Regolaribus*. Ya que en ese lugar Pacioli no menciona explícitamente el nombre de Piero, puede surgir la sospecha de que Pacioli se hiciera atribuir a sí mismo la obra de Piero, lo que sería el origen de la acusación de plagio que surgió con G.Vasari y que se ha ido alimentando hasta la actualidad. Pudo ser así, aunque el cálido afecto que Pacioli profesaba hacia Piero debiera desmentirlo y se podría encontrar una explicación de la conducta de Pacioli en el hecho de que habiendo ya mencionado los escritos matemáticos de su maestro y coterráneo, incluso con agradecido encomio, Pacioli debía presuponer que la paternidad del escrito de Piero era muy conocida y por tanto no era necesario aludir a ella especialmente. En cualquier caso, si la actuación de Pacioli con el *Libellus* ... de Piero no fue un plagio, sí fue, sin duda, una imprudencia imperdonable.

Desde el principio de la obra *La Divina Proporción*, Luca Pacioli hace continuas referencias a Platón y Euclides e incluso a Pitágoras. Así en el capítulo II, Pacioli escribe (Pacioli, Akal, Madrid, 1991, pp.36–37):

> «[...] *Entre los sabios se acostumbra a decir, según proverbio común*: "*Aurum probatur ignis et ingenium mathematicis*", *es decir, que* "*la bondad del oro la demuestra el fuego y la calidad de los ingenios las disciplinas matemáticas*". *Y esta sentencia pretende expresar que el genio apto para las matemáticas lo es también para las otras ciencias*. [...] *Por ello el antiguo y divino filósofo Platón negaba, no sin razón, a los que ignorasen la geometría la entrada en su celebérrimo gimnasio, sobre cuya puerta principal colocó, en letras grandes y bien inteligibles, una breve inscripción con esta formales palabras: Nemo huc geometriae expers ingrediatur, es decir, que no entrase quien no fuese un buen geómetra; e hizo esto porque en la geometría se encuentra oculta toda otra ciencia. Y, anteriormente el estudiosísimo contemplador de la naturaleza Pitágoras, lleno con la suavísima dulzura de esta ciencia, hizo, según cuenta Vitrubio, sacrificar cien bueyes a los dioses, con grandísima fiesta y júbilo, por el descubrimiento del ángulo recto*. [...].
>
> *Conforme a la gracia que me ha concedido el Altísimo, expongo el sublime volumen del mencionado Euclides* (*a quien todos seguimos como archimandrita de nuestra facultad*) *sobre las ciencias de la aritmética, geometría y proporciones. Y ya he puesto*

dignísimo final a sus diez libros, interponiendo siempre nuestra práctica en su teoría para mayor utilidad y comprensión.»

El nombre de *Divina Proporción* corresponde más bien a la primera parte de la obra que debió de ser escrita mucho antes que las restantes. De hecho el capítulo quinto de *La Divina Proporción* se titula precisamente «*Del título que conviene al presente tratado o compendio*». Tal vez Pacioli estuvo dudando sobre el asunto del título final de la obra, ya que aunque los primeros capítulos se refieren a las propiedades y «*singulares efectos*» de la sección áurea, la mayor parte de la obra esta dedicada a un análisis profundo de los poliedros regulares y de otros tipos. Pero en este capítulo, como para señalar los vínculos y la ilación entre la sección áurea y los sólidos platónicos, Pacioli asevera, con argumentos teológicos y filosóficos de naturaleza platónica con origen en el *Timeo*, que la divina proporción confiere el ser formal al cielo mismo, atribuyéndole la figura del cuerpo de doce pentágonos, llamado Dodecaedro, el cual no se puede formar sin la mencionada divina proporción. Pacioli recuerda aquí, de forma muy sintética, el resto de la cosmogonía platónica que vincula los cuatro elementos con las formas y figuras de los restantes poliedros regulares, adelantando que mediante ellos, la divina proporción da forma a otros infinitos cuerpos dependientes, y que la sagrada proporción también interviene en proporcionar entre sí los cinco cuerpos regulares, es decir, en imaginar la armonía y digna conveniencia entre sí y en circunscribirlos a la esfera.

En los capítulos XXIV–XXXI (Pacioli, Akal, 1991, pp.60–79) Luca Pacioli va relacionando los cinco poliedros regulares y demuestra la imposibilidad de que exista algún otro. Después describe «*cómo se forman de modo que sean exactamente circundados por una esfera y también qué proporción tienen sus lados con respecto al diámetro de la esfera*» (p.63). Estos capítulos vienen a resolver cuestiones equivalentes a las Proposiciones XIII.13–XIII.17 de *Los Elementos* de Euclides que relacionan las aristas de los poliedros con el diámetro de la esfera que los circunscribe. En el capítulo XXXI desarrolla un teorema equivalente a la última proposición de *Los Elementos* de Euclides, que Pacioli enuncia de la forma (p.76):

> «*Saber encontrar los lados de los cinco poliedros regulares, circunscritos todos exactamente por una misma esfera de la que sólo conozcamos el diámetro*.»

En los capítulos XXXII–XLVI (Akal, pp.79–90) Luca Pacioli da la proporción mutua de todas sus superficies y estudia las inclusiones de los cinco cuerpos unos en otros. Ya que cada uno no es capaz de acoger a todos no hay veinte sino sólo doce inclusiones posibles.

En los capítulos XLVIII–LV (Akal, pp.90–104) trata de los poliedros dependientes de los regulares, que se obtienen por *extracción* de otros cuerpos geométricos (poliedros *abscisos* que son arquimedianos), o por adición de otros cuerpos geométricos (poliedros *elevados* que son estrellados). Estas formas, dice Pacioli, pueden desarrollarse hasta el infinito.

En los capítulos LVI–LVII (Akal, pp.104–108) trata del cuerpo esférico y de cómo se pueden colocar en él los cuerpos regulares.

En los capítulos LVIII–LXIX (Akal, pp.108–126) trata de los cuerpos oblongos, es decir los que son más largos o altos que anchos, estudiando en particular las columnas (cilindros y prismas), los conos y las pirámides, incluso las figuras truncadas.

En el capítulo LXX (Akal, p.127) explica cómo están referenciadas en el tratado las figuras dibujadas en perspectiva que sitúa al final, y ofrece al Príncipe Ludovico Sforza modelos de cuerpos poliédricos que ha estudiado, con estas palabras:

> «*Vuestra Alteza podrá disponer de ellos en una y otra forma. Tales cuerpos, en vez de ser del vil material que yo me he visto obligado a usar a causa de mi pobreza, merecerían ser de metal precioso y estar ornados con finas gemas.*

La Divina Proporción de Luca Pacioli termina en el capítulo LXXI (Akal, pp.128–129) con un glosario de términos matemáticos: hipótesis, hipotenusa, perpendicular, cateto, diámetro, diagonal, centro, etc.

ICONOGRAFÍA DE LUCA PACIOLI

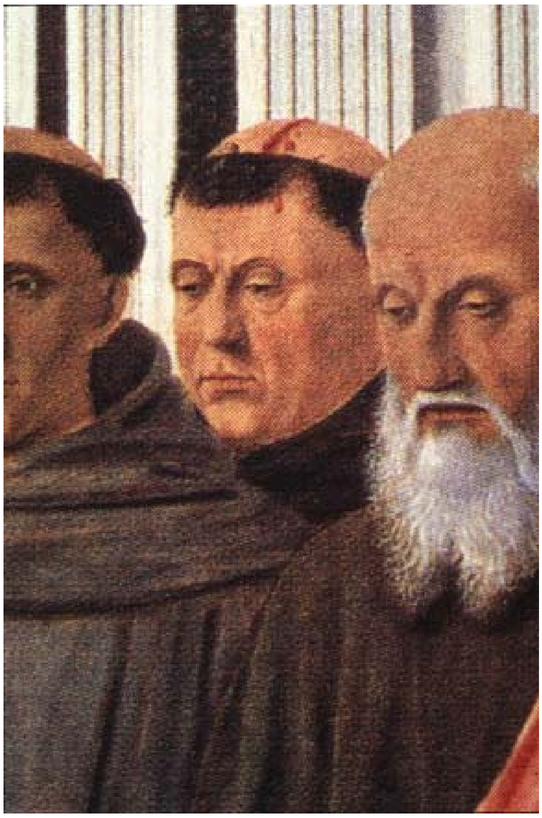
1. **Moneda con la efigie de Luca Pacioli acuñada con motivo del 500 aniversario de la publicación de su famosa obra *Summa di arithmetica, geometrica, proportione et proportionalita***
2. **Letra inicial grabada sobre madera que representa a Luca Pacioli vestido de Franciscano. Se encuentra en su obra *Summa di arithmetica, geometrica, proportione et proportionalita* (Venecia, 1494).**
3. **Apunte manuscrito de Luca Pacioli sobre poliedros.**

LUCA PACIOLI, HUMANISTA, ILUSTRE MATEMÁTICO, ESCRITOR Y GRAN PROFESOR RENACENTISTA

Luca Pacioli tuvo una intensa y extensa actividad docente que compatibilizaba con la producción científica y didáctica de publicaciones de gran valor no sólo para sus discípulos sino para científicos, comerciantes y artistas. Siempre sintió una febril vocación por la enseñanza y la difusión de la Matemática pura y aplicada. En 1475 es lector de Matemáticas en Perugia, donde obtiene el título académico de Magister; en 1490 enseña Teología y Matemáticas en Nápoles, mientras construye una colección de poliedros regulares que regala a Guidobaldo de Montefeltro. Entre 1490 y 1493 Pacioli se encierra en su pueblo natal para preparar la publicación de su enciclopédica obra *Summa di arithmetica, geometrica, proportione et proportionalita*, que se imprimirá en Venecia en 1494. En 1493 da lecciones públicas de Aritmética y Geometría en Padua. Por invitación del duque Ludovico Sforza se traslada a Milán, en 1496, para enseñar Matemáticas y entabla una fructífera amistad con Leonardo, con un enriquecedor intercambio de ideas, experiencias y conocimientos, que da como fruto los bellísimos sesenta dibujos de los cuerpos poliédricos que el genial artista realizó para la edición de *De Divina Proporcione* que Pacioli estaba preparando y que termina el 14 de diciembre de 1498. De 1500 a 1505 Pacioli sigue moviéndose como profesor de disciplinas matemáticas entre diversos centros de estudios y universidades: Pisa y Perugia (1500), Bolonia (1501–1502) y Florencia (1502–1505). En 1508 ultima una impresión de su traducción al latín de *Los Elementos* de Euclides –basada como la primera impresión (Ratdolt, Venecia, 1482) en la traducción que había hecho Campanus en el siglo XIII–. Pacioli también preparó una traducción al italiano de *Los Elementos* de Euclides que se ha perdido y que sería la primera en esa lengua, anterior a las ediciones de Tartaglia y Commandino y tal vez la primera en una lengua vernácula europea. También se cuida en estos días de la edición de *De Divina Proporcione* que se imprime en Venecia, a primeros de junio de 1509, en la imprenta de Paganius Paganinus. Vuelve a impartir docencia en 1510 en la universidad de Perugia, ciudad donde acaba su tercera obra importante *De Viribus Quantitatis*. Requerido por el papa León X, Pacioli se traslada a Roma en 1514, casi con 70 años para hacerse cargo de la cátedra de Matemáticas en la Sapienza.

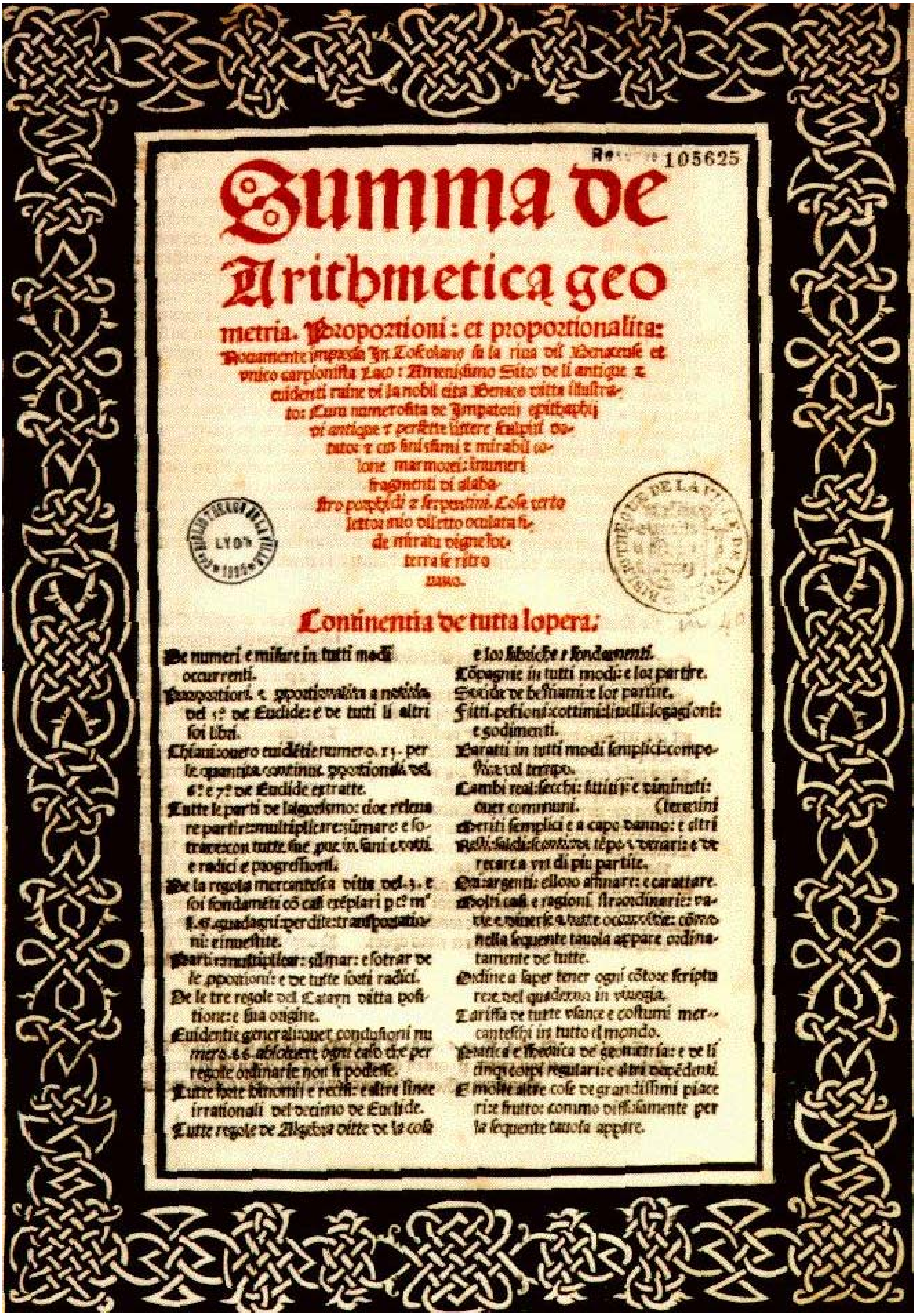
Pacioli fue asiduo de diversas cortes italianas, protegido de sus príncipes y bien relacionado con artistas y estudiosos del Arte como Alberti, Piero, F.Giorgio, Leonardo, Bramante, Durero y otros. A través de ellos pudo conocer los esfuerzos que los artistas y técnicos desplegaban en la aplicación de la Geometría al Arte, de forma que al asimilarlos él mismo contribuirá a vincular estrechamente Arte y Geometría.

Con toda la rica experiencia de su dilatada labor académica, docente y editorial, a lo largo de toda su vida, se comprende el éxito de las obras de Pacioli y la enorme influencia sobre matemáticos, profesores y artistas contemporáneos y los de la siguiente generación sobre los que como fuente dejó su impronta.



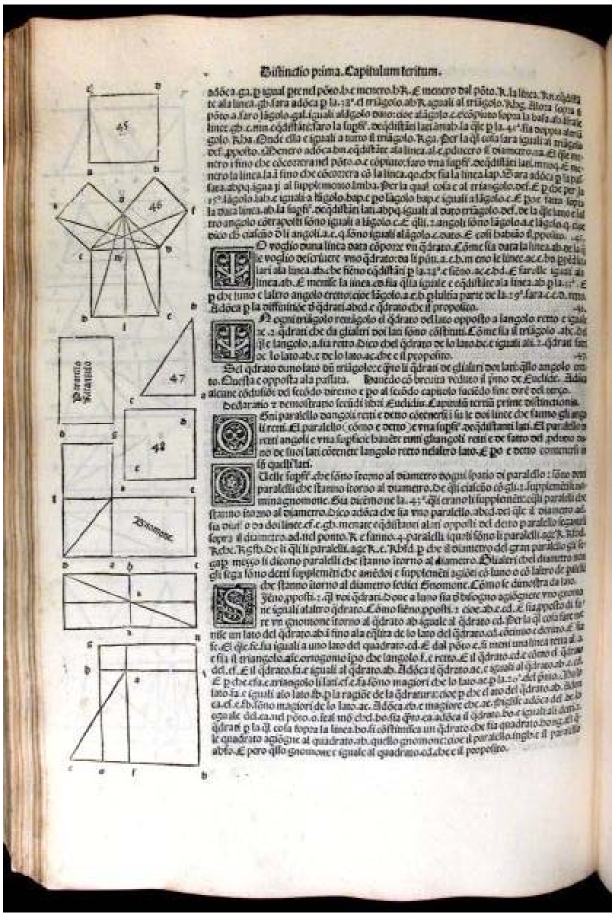
1. **Piero della Francesca retrata a su coterráneo y amigo Luca Pacioli en el célebre cuadro –por la perfección de su perspectiva– *Madona con bambino , Santi e Angeli e il duca Federico II da Montefeltro*, pintado entre 1472 y 1474 (Pinacoteca di Brera, Milán). Piero representa a Luca Pacioli en la figura de San Pedro Mártir. En el cuadro es el segundo personaje por la derecha del espectador.**
2. **Fragmento ampliado del cuadro anterior. En el centro Luca Pacioli como San Pedro Mártir.**

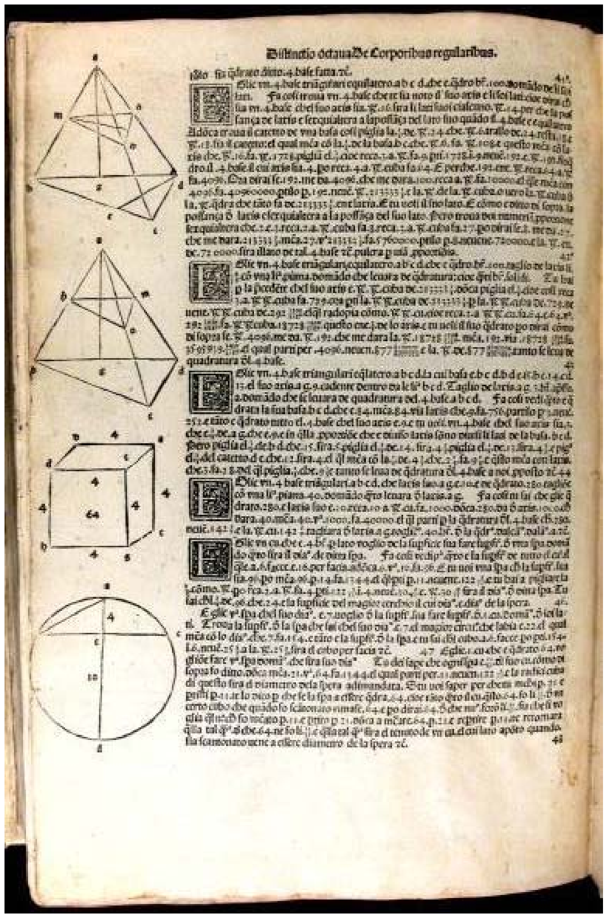
LA *SUMMA DI ARITHMETICA*... DE LUCA PACIOLI



Portada de la obra de Luca Pacioli ***Summa di arithmetica, geometrica, proportione et proportionalita*****. Imprenta de Paganius Paganinus. Venecia, 1494.**

LA *SUMMA DI ARITHMETICA*... DE LUCA PACIOLI





Páginas de la *Summa di arithmetica, geometrica, proportione et proportionalita* de Luca Pacioli relativas al *Teorema de Pitágoras* y a la geometría de los poliedros.

Esta magna obra de Luca Pacioli es una especie de enciclopedia del conocimiento matemático –aritmético y geométrico– de la época, considerada a veces como la primera enciclopedia de Matemática pura y aplicada.

Como indica su largo título, la obra es la suma de los textos y notas que el maestro había ido componiendo para su exhaustiva actividad docente como recopilación de la matemática de su tiempo –operaciones aritméticas con la nueva numeración indo-arábiga, (suma, resta, multiplicación y división, raíces cuadradas); aplicaciones aritméticas sencillas; resolución de problemas mediante ecuaciones algebraicas de primero y segundo grado; aplicaciones teóricas y prácticas de la Geometría de Euclides, etc. –. En las páginas de la *Summa* Pacioli aporta, además, un simbolismo que anuncia las notaciones actuales.

La obra se imprime en Venecia, en 1494, en los talleres de Paganius Paganinus –es una de las primeras obras matemáticas impresas– y está dedicada al protector de Pacioli, Guidobaldo da Montefeltro, el joven duque de Urbino. Está dividida en cinco partes, La primera es la más extensa y trata de Aritmética y Álgebra, con numerosos algoritmos para las diversas operaciones aritméticas. La segunda se compone de la Aritmética comercial utilizada por los mercaderes italianos de la época. La tercera está dedicada a la teneduría de libros. La cuarta relaciona los distintos sistemas monetarios, pesas y medidas que se usaban entonces en los distintos estados italianos. La quinta se emplea en la Geometría teórica y práctica.

Luca Pacioli basa su obra en la Matemática conocida en su tiempo. El autor reconoce que sus fuentes principales son *Los Elementos* de Euclides, La *Aritmética* de Boecio y sobre todo el *Liber Abaci* y *Liber Quadratorum* de Leonardo de Pisa –más conocido como Fibonacci–. A veces el texto de Pacioli transcribe de forma casi literal el contenido de estas obras. Luca Pacioli no puede considerarse, pues, un gran matemático creador, pero tiene el gran mérito de exponer los temas con una gracia y amenidad que hace más asequibles los conocimientos, a lo que coadyuva también el escribir en lengua vernácula. Además, como un gran valor añadido, la *Summa* nos muestra como las Matemáticas pueden ser muy útiles en la vida cotidiana, en el comercio, en el reparto de los bienes, en la construcción, en los juegos de azar, etc.

La escasa originalidad de la obra se compensa con el importante valor de recopilación, ordenación y divulgación de la cultura matemática coetánea. La *Summa* circuló ampliamente en el siglo XVI y es nombrada por los grandes algebristas del Renacimiento, Cardano, Tartaglia, Bombelli, etc.

En el Prefacio de la *Summa*, Pacioli insiste en el carácter fundamental de la ciencia matemática, cuyos principios han de servir como guía en todas las ciencias y las artes. Una de las cuestiones más importantes que trata Pacioli es la Teoría de la Proporción «*madre y reina de las artes*» que concierne no sólo a la Matemática y a las Artes, sino a la estructura misma del cosmos, de modo que Pacioli bebe en la fuente mística pitagórico-platónica y en la fuente geométrica euclídea, de ahí sus habituales referencias al *Timeo* de Platón y a *Los Elementos* de Euclides.

LUCA PACIOLI. *LA DIVINA PROPORCIÓN*

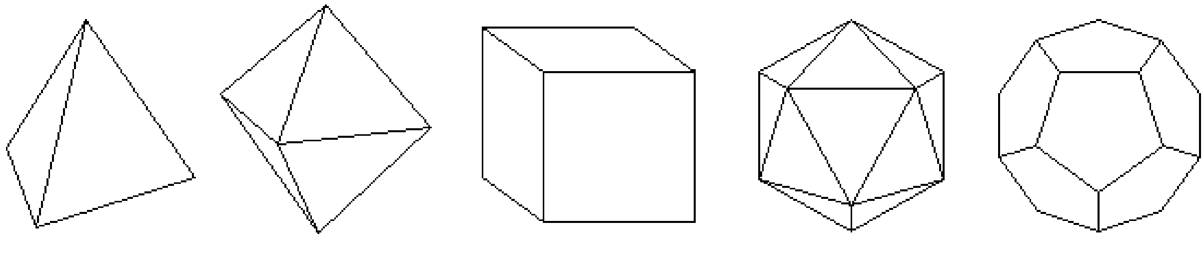
CAPÍTULO XXV (Pacioli, Akal, 1991, pp.61–62)

Cómo no puede haber más de cinco cuerpos regulares

Conviene ahora demostrar cómo en la naturaleza no pueden ser más de cinco los mencionados cuerpos, es decir, los cuerpos cuyas bases sean iguales entre sí, lo mismo que sus ángulos sólidos y planos y sus lados. Ello es así porque, para la constitución de cada ángulo Sólido, es necesario el concurso de al menos tres ángulos superficiales, ya que un ángulo sólido no puede determinarse sólo mediante dos ángulos superficiales; luego, porque los tres ángulos de un hexágono equilátero son iguales a cuatro ángulos rectos, y, además, en el heptágono, es decir, la figura de siete lados, y, en general, en toda figura equilátera y equiángula de más lados, sus tres ángulos son siempre mayores que cuatro rectos, como se manifiesta en la trigésimo segunda de¡ primero, y todo ángulo sólido es menor que cuatro ángulos rectos, como se ve por la vigésimo primera del undécimo. Así pues, es imposible que tres ángulos del hexágono, del pentágono o, en general, de cualquier figura equilátera y equiángula de más lados formen un ángulo sólido. Y así queda claro que ninguna figura sólida equilátera y de ángulos iguales puede formarse con superficies hexagonales o de más lados, pues si tres ángulos del hexágono equilátero y equiángulo son mayores que un ángulo sólido, se sigue que, con mucha más razón, cuatro o más ángulos excederán de dicho ángulo sólido. Sin embargo, tres ángulos del pentágono equilátero y equiángulo son, manifiestamente, menores que cuatro rectos, mientras que cuatro son mayores que cuatro rectos. De donde, con tres ángulos de un pentágono equilátero y equiángulo, se puede formar un ángulo sólido, pero con cuatro de sus ángulos o con más no es posible formar ángulo sólido. Por ello, un cuerpo se forma sólo con pentágonos equiláteros y equiángulos, y es el llamado por los filósofos dodecaedro o, de otra manera, cuerpo de doce pentágonos. En él, los ángulos de los pentágonos, de tres en tres, forman y contienen todos los ángulos sólidos de dicho cuerpo.

La misma razón se da en las figuras cuadriláteras de lados y ángulos iguales, como se ha dicho para los pentágonos, ya que toda figura cuadrilátera, si es equilátera y de ángulos iguales, será por definición cuadrada, porque todos sus ángulos serán rectos, como se demuestra en la trigésimo segunda del primero. De ahí que con tres ángulos de dicha figura superficial sea posible formar un ángulo sólido, pero imposible con cuatro o más. Por ello, con tales figuras superficiales, siendo cuadriláteras, equiláteras y de ángulos iguales, se puede formar un sólido que llamamos cubo, que es un cuerpo contenido por seis superficies cuadradas y con doce lados y ocho ángulos sólidos.

En los triángulos equiláteros seis ángulos equivalen a cuatro rectos, por la mencionada trigésimo segunda del primero, yg por tanto, menos de seis ángulos valen menos que cuatro rectos y más de seis más que cuatro rectos, por lo que con seis ángulos o más de dichos triángulos no es posible formar un ángulo sólido, mientras que sí lo es con cinco, cuatro o tres. Y, como tres ángulos del triángulo equilátero contienen un ángulo sólido, con triángulos equiláteros se forma el cuerpo de cuatro bases triangulares de lados iguales llamado tetraedro; y cuando se unen cuatro de dichos triángulos se forma el cuerpo de ocho bases conocido como octaedro; y si cinco triángulos equiláteros contienen un ángulo sólido, se forma entonces el cuerpo conocido como icosaedro, de veinte bases triangulares y de lados iguales. Así, el por qué son tantos y tales los cuerpos regulares y no más es cosa plenamente aclarada con lo que hemos dicho.



CANTO LAUDATORIO A LOS SÓLIDOS PLATÓNICOS EN UN SONETO ESTRAMBÓTICO DE LUCA PACIOLI

DANIELE GAETANI CREMONENSIS EPIGRAMA

Natura omniparens produxit corpora quinque;
Simplicia haec certo nomine dicta manent.
Compositio in numerum concurrunt addita cuique
Atque inter sese consociata viegent.
Condita principio pura et sine labe fuere;
Nomina sunt aer, coelum, aqua, flamma et humus.
Foetibus innumeris voluit Plato maxima illa
Esse, ubi est primun sumpta figura, dare.
Sed quia naturae lex nil concedit inane
In coelo et mundo dixit Aristoteles,
Quodque unum per se positum est, caret atque figura;
Nulla subest oculi supposito species.
Propterea Euclidae sublimius atque Platonis
Ingenius excussit sphaerica quinque alia,
Iocunda aspectu et multum irritantia sensum,
Monstravere bases ut latus omne docet

SONETO DEL AUCTOR

Cinque corpi in natura son producti,
Da naturali semplici chiamati,
Perchè a ciascun composito adunati
Per ordine concorran fra lor tutti.
Immixti, netti e puri fur constructi;
Quattro elementi e ciel così nomati;
Quali Platone vol che figurati
L'essere dien a infiniti fructi.
Ma perchè el vacuo natura abhorre
Aristotil, in quel de Coelo et Mundo,
Per se non figurati volesse porre.
Però l'ingegno geometra profondo
Di Plato e d'Euclide piacque exporre
Cinqu'altri che in sfera volgan tundo,
Regolari, d'aspecto iocundo,
Come vedi, de lati e basi pare,
E un altro sexto mai se po formare.

Después del título de la obra de Luca Pacioli, el volumen impreso de *La Divina Proporción* empieza con dos poesías. La primera es un *epigrama* en latín transformado por Luca Pacioli –en su traducción poética al italiano– en un enrevesado *soneto con estrambote*. La poesía es un canto a las maravillosas virtudes de los sólidos platónicos. Es posible que la composición en latín sea del patricio veneciano Daniele Gaetani Cremonensis, autor de una epístola laudatoria hacia Luca Pacioli, mientras que traducción al italiano la hizo el propio autor de *La Divina Proporción*, dando muestras de su mística veneración hacia los sólidos platónicos.

Abajo se ofrecen dos traducciones al español, una muy literal y otra más libre pero con métrica. Han sido realizadas por el Profesor Hermenegildo Delgado Reyes, Catedrático de Griego del Instituto Villalba Hervás de La Orotava (Tenerife) en Mayo de 2000.

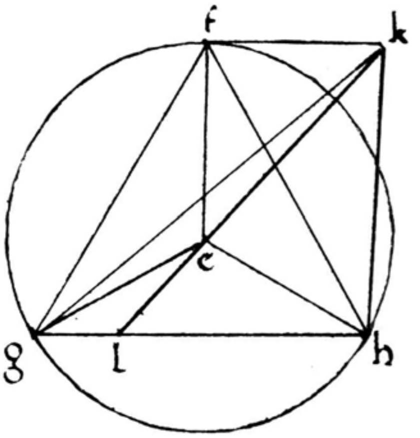
TRADUCCIÓN LITERAL AL ESPAÑOL

Cinco cuerpos se han formado en la Naturaleza designados como simples naturales para que todos concurran acordes y ordenados entre sí a cada compuesto: sin mezcla, netos y puros fueron creados los cuatro elementos y el cielo, que así se llaman (*lit.* así llamados); y Platón quiere que den el ser a infinitos frutos por estar ellos mismos dotados de figura (*lit.* figurados), pero Aristóteles en su *De Caelo et Mundo* querría ponerlos sin figura propia, porque la Naturaleza aborrece el vacío. Mas yo he querido (*lit.* plúgome) exponer el profundo genio geométrico de Platón y Euclides: otros cinco que giren en redondo por la esfera; regulares, de aspecto airoso; lados y caras iguales como ves; y que jamás se podría formar un sexto.

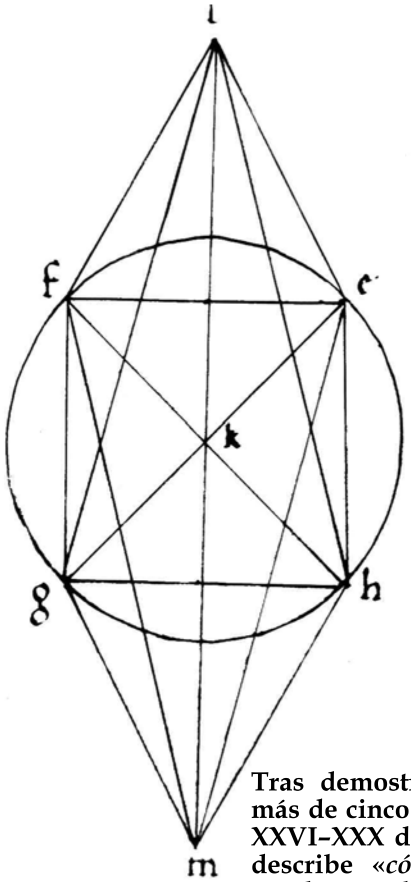
TRADUCCIÓN MÉTRICA AL ESPAÑOL

Sólo estos cuerpos simples naturales
quiso Natura hacer: cinco elegidos
que a cada ser compuesto requeridos
concurran siempre acordes y puntuales.
Este Cielo, y los Cuatro elementales,
netos, sin mezcla y puros han nacido;
y de infinitos frutos causa han sido
por su figura en sí, si asentir vale
con Platón; Aristóteles quisiera
verlos sin ella; que en su *Coelo et Mundo*
el vacío y natura se aborrecen.
Mas ved que el geométrico profundo
genio de Euclides y Platón ofrece
otros cinco que giren en la esfera.
Regulares y airosos aparecen;
de iguales caras, lados... tan perfectos
que nadie añadirá jamás un sexto.

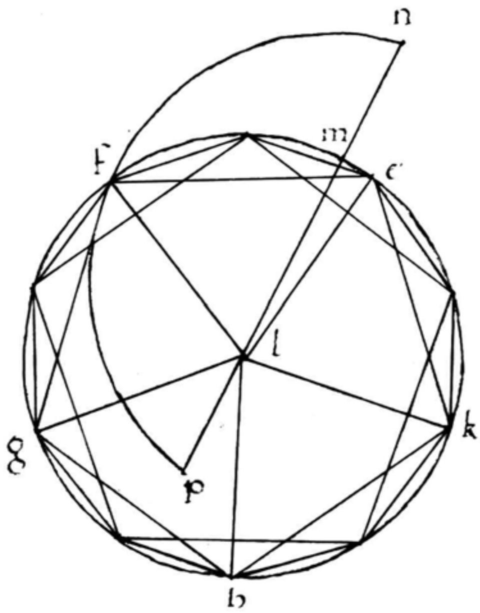
LOS CINCO SÓLIDOS PLATÓNICOS EN LA *DIVINA PROPORCIÓN DE* LUCA PACIOLI



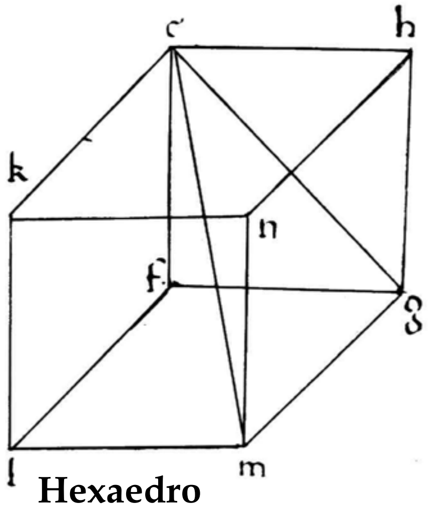
Tetraedro



Octaedro



Icosaedro

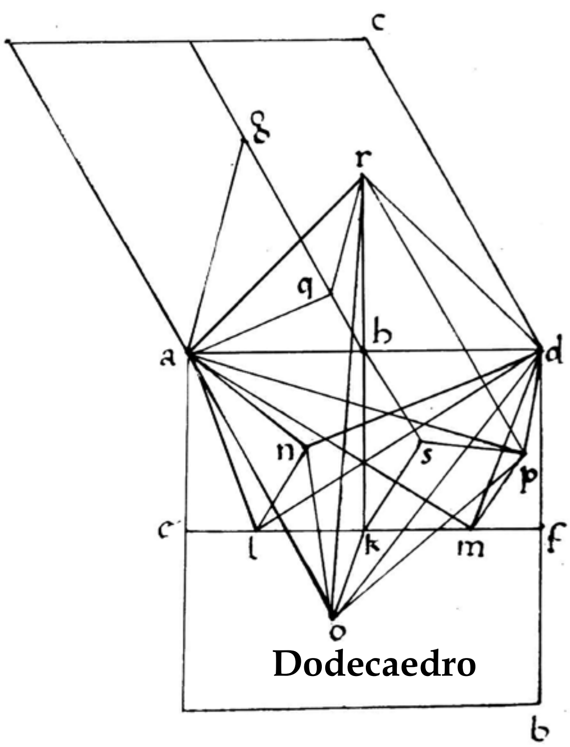


Hexaedro

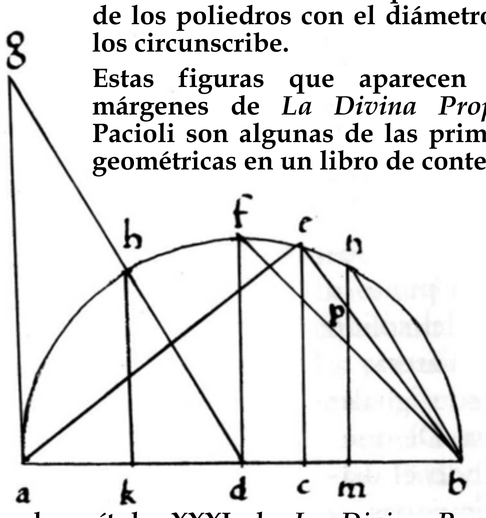
Tras demostrar la imposibilidad de que exista más de cinco poliedros regulares, en los capítulos XXVI–XXX de *La Divina Proporción* Luca Pacioli describe «*cómo se forman los cinco poliedros regulares de modo que sean exactamente circundados por una esfera y también qué proporción tienen sus lados con respecto al diámetro de la esfera*».

Estos capítulos resuelven problemas equivalentes a las Proposiciones XIII.13–XIII.17 de *Los Elementos* de Euclides que relacionan las aristas de los poliedros con el diámetro de la esfera que los circunscribe.

Estas figuras que aparecen en los amplios márgenes de *La Divina Proporción* de Luca Pacioli son algunas de las primeras ilustraciones geométricas en un libro de contenido matemático.



Dodecaedro



En el capítulo XXXI de *La Divina Proporción* Luca Pacioli desarrolla un teorema equivalente a la última proposición de *Los Elementos* de Euclides (XIII.18), que Pacioli enuncia de la forma:

> **«*Saber encontrar los lados de los cinco poliedros regulares, circunscritos todos exactamente por una misma esfera de la que sólo conozcamos el diámetro ab.*»**

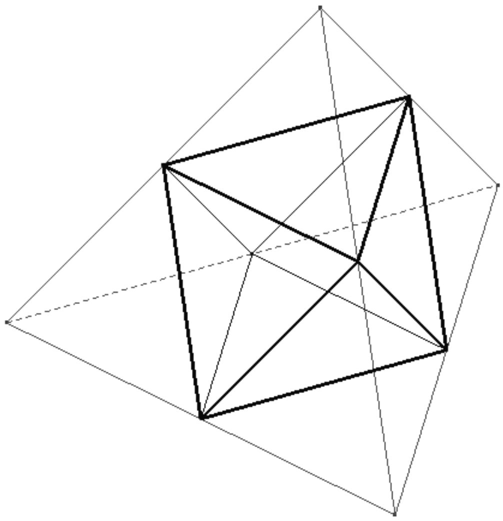
Tomando los segmentos ab=2ad, ac=2cb, resulta:

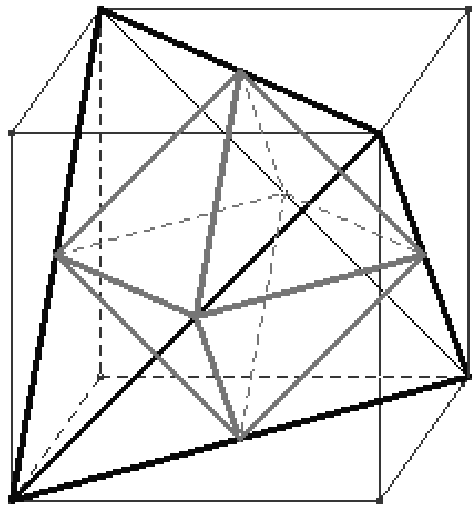
ae: lado del Tetraedro; eb: lado del Cubo. fb: lado del Octaedro; nb es el lado del icosaedro; pb es el lado del dodecaedro.

Y se verifica: ae > fb > eb > nb >pb .

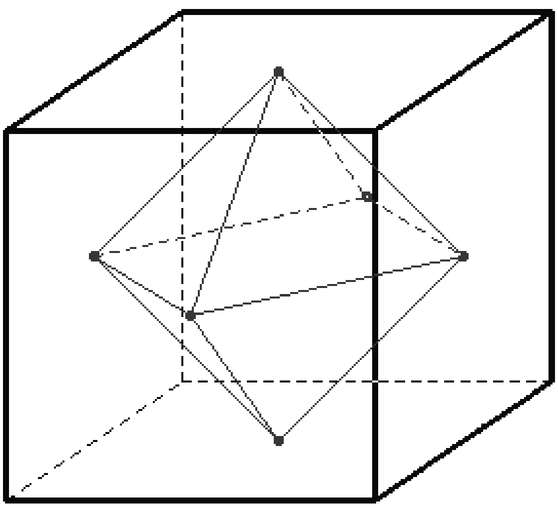
En los capítulos XXXIV–XLVI (Pacioli, Akal, 1991, pp.79–90) Luca Pacioli da las instrucciones para estudiar las inclusiones de los cinco cuerpos regulares unos en otros. Asegura que las construcciones que hace son consecuencia de teoremas del apócrifo Libro XV de *Los Elementos*. Veamos sucesivamente las doce posibles inclusiones posibles.

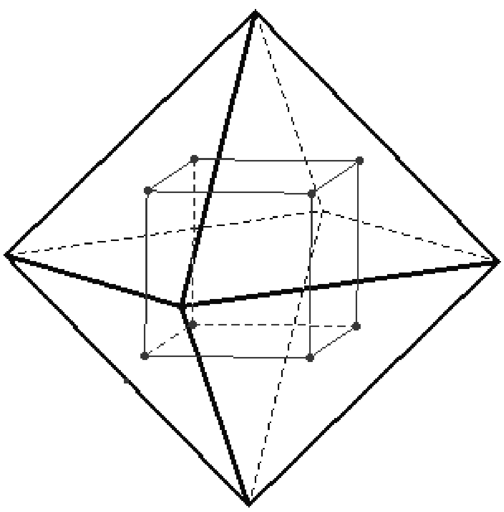
- **Cap.XXXIV. Inclusión del Octaedro en el Tetraedro**: se divide cada uno de los lados del Tetraedro en partes iguales; al unir todos los puntos medios resultantes obtenemos las doce aristas del Octaedro pedido.
- **Cap. XXXV. Inclusión del Tetraedro en el Cubo**: se trazan la diagonales de las seis caras del cubo, que resultan ser las seis aristas del Tetraedro incluido en el Cubo.
- **Cap. XXXVI. Inclusión del Octaedro en el Cubo**: la inclusión del Tetraedro en el Cubo y del Octaedro en el Tetraedro nos da la inclusión del Octaedro en el Cubo.
- **Cap. XXXVII. Inclusión del Cubo en el Octaedro**: Se halla el centro de cada una de las ocho caras del Octaedro. Al unir tales centros obtenemos las aristas del cubo pedido.
- **Cap. XXXVIII. Inclusión del Tetraedro en el Octaedro**: la inclusión del Cubo en el Octaedro y del Tetraedro en el Cubo nos da la inclusión del Tetraedro en el Octaedro.



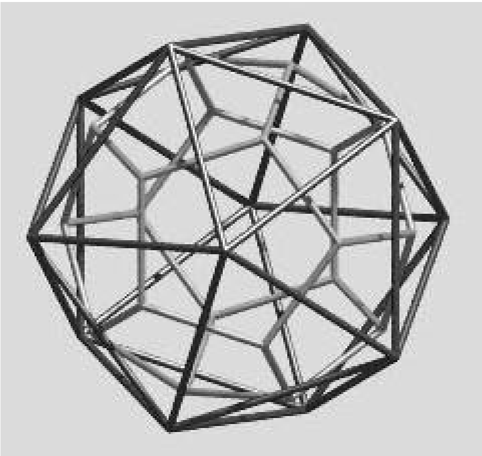


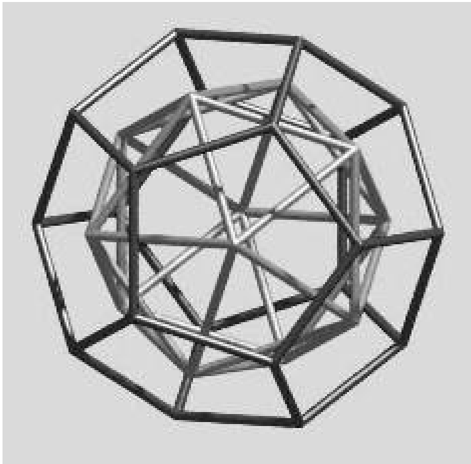
3. **Inclusión del Octaedro en el Tetraedro según el método de Luca Pacioli.**
4. **Inclusión del Tetraedro en el Cubo y del Octaedro en el Cubo por transición –Octaedro en el Tetraedro y Tetraedro en el Cubo– según el método de Luca Pacioli. La inclusión del Octaedro en el Cubo es equivalente a la dualidad Octaedro–Cubo, que utiliza los puntos medios de las caras del poliedro incluyente para obtener las aristas del poliedro incluido.**
5. **Inclusión del Octaedro en el Cubo por dualidad.**
6. **Inclusión del Cubo en el Octaedro por el método de dualidad, utilizado en este ejemplo por Luca Pacioli.**





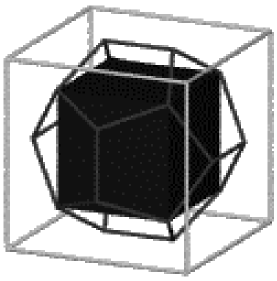
- **Cap. XXXIX. Inclusión del Dodecaedro en el Icosaedro**: Se halla el centro de cada una de las veinte caras triangulares del Icosaedro. Al unir tales centros mediante treinta líneas obtenemos doce pentágonos que son las caras del Dodecaedro pedido.
- **Cap. XL. Inclusión del Icosaedro en el Dodecaedro**: Se halla el centro de cada una de las doce caras pentagonales del Dodecaedro. Al unir tales centros mediante treinta líneas obtenemos veinte triángulos equiláteros que son las caras del Icosaedro pedido.





1. **Inclusión del Dodecaedro en el Icosaedro por dualidad, método utilizado en este ejemplo por Luca Pacioli.**
2. **Inclusión del Icosaedro en el Dodecaedro por dualidad, método utilizado en este ejemplo por Luca Pacioli.**

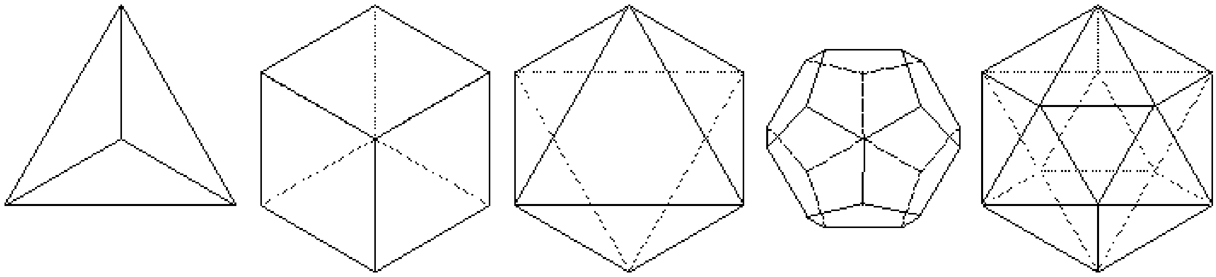
- **Cap. XLI. Inclusión del Cubo en el Dodecaedro**: Al trazar una diagonal en cada uno de los doce pentágonos del Dodecaedro se obtienen seis superficies cuadrangulares equiláteras que dan las doce aristas del cubo pedido.

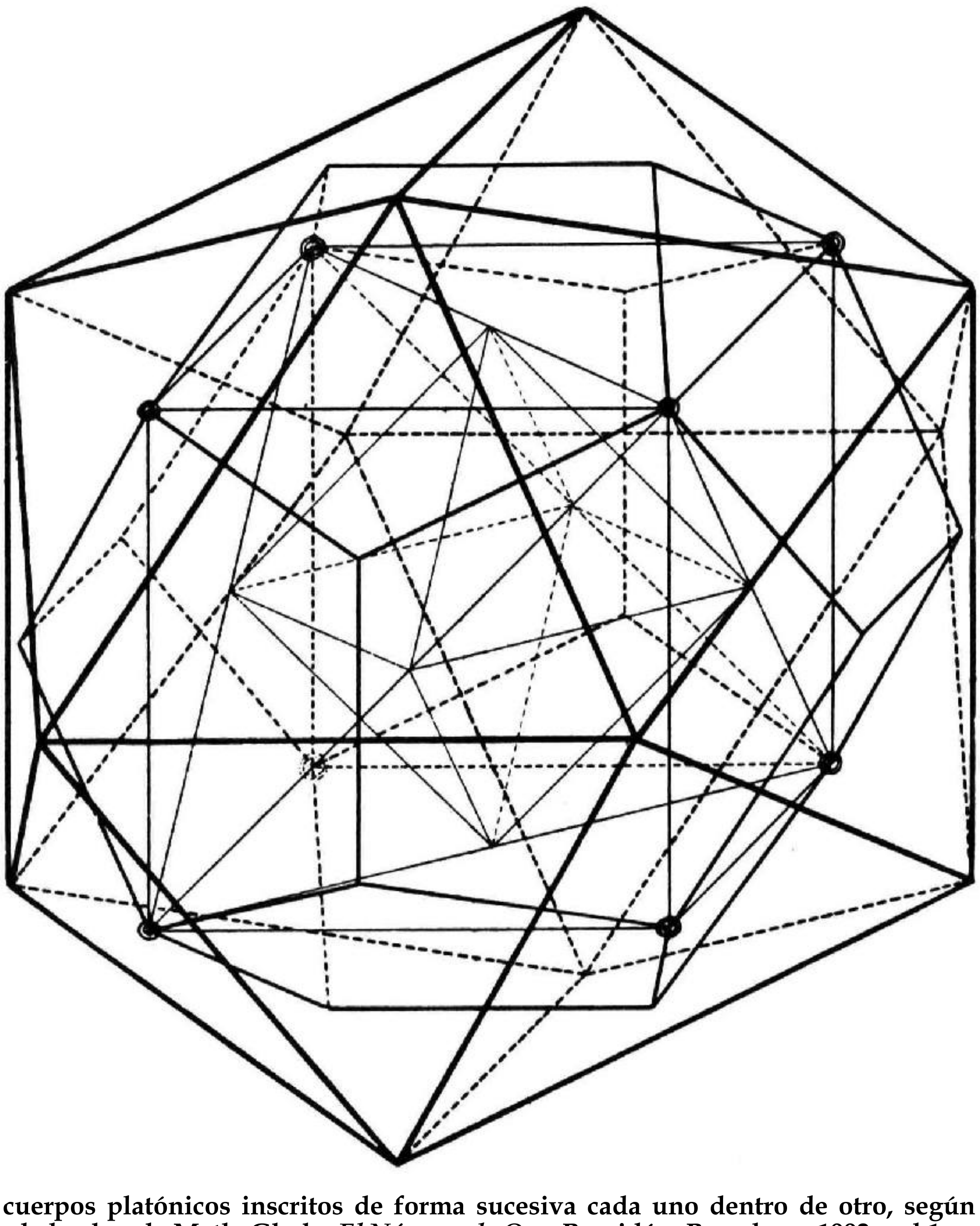


Inclusión del Cubo en el Dodecaedro por el método de Luca Pacioli.

- **Cap. XLII. Inclusión del Octaedro en el Dodecaedro**: la inclusión Cubo en el Dodecaedro y del Octaedro en el Cubo nos da la inclusión del Octaedro en el Dodecaedro.
- **Cap. XLIII. Inclusión del Tetraedro en el Dodecaedro**: la inclusión del Cubo en el Dodecaedro y del Tetraedro en el Cubo nos da la inclusión del Tetraedro en el Dodecaedro.
- **Cap. XLIV. Inclusión del Cubo en el Icosaedro**: la inclusión del Cubo en el Dodecaedro y del Dodecaedro en el Icosaedro nos da la inclusión del Cubo en el Icosaedro.
- **Cap. XLV. Inclusión del Tetraedro en el Icosaedro**: la inclusión del Cubo en el Icosaedro y del Tetraedro en el Cubo nos da la inclusión del Tetraedro en el Icosaedro.

LOS CINCO POLIEDROS REGULARES ENCAJADOS SEGÚN LA *DIVINA PROPORCIÓN DE* LUCA PACIOLI





Los cinco cuerpos platónicos inscritos de forma sucesiva cada uno dentro de otro, según Luca Pacioli. Ilustración de la obra de Matla Ghyka *El Número de Oro*, Poseidón, Barcelona, 1992, vol.1, cap.2. p.51.

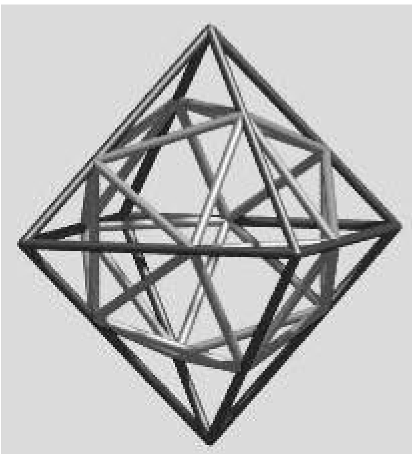
Dado un Icosaedro, los centros de sus veinte caras son los vértices de los doce pentágonos de un Dodecaedro (cap.39). Al trazar una diagonal en cada uno de los doce pentágonos del Dodecaedro se obtienen las doce aristas de un Cubo (cap.41). Las diagonales de las caras del Cubo nos dan las seis aristas de un Tetraedro (cap.35). Los puntos medios de las seis aristas de este Tetraedro son los vértices de un Octaedro (34). Aplicando los resultados de Pacioli obtenemos una interesante combinación de los cinco poliedros regulares –Icosaedro, Dodecaedro, Cubo, Tetraedro y Octaedro– inscrito cada uno de ellos en el anterior.

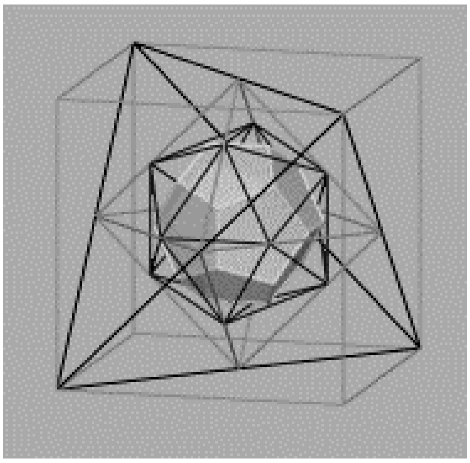
Luca Pacioli acaba esta parte justificando por qué no puede haber más inclusiones:

- **Cap. XLVI. Por qué dichas inscripciones no pueden ser más.**

  «*Conforme a todo lo anteriormente dicho*, [...] *queda claro que, siendo cinco los cuerpos regulares, si supusiésemos que en cada uno de ellos pudieran formarse debidamente los demás se seguiría que cada cuerpo acogería a cuatro y, en consecuencia, entre todos, vendrían a resultar veinte inscripciones, es decir, cuatro veces cinco. Pero, como no todos los cuerpos pueden recibir a todos, como se ha explicado, no hay sino doce inscripciones: una sola, la del octaedro, en el tetraedro; dos en el cubo, la del tetraedro y la del octaedro; dos más en el octaedro, una del cubo y otra del tetraedro; tres son las inscripciones que se pueden dar en el icosaedro, una del dodecaedro, otra del cubo y otra del tetraedro; y cuatro son las inscripciones posibles en el dodecaedro, una del icosaedro, otra del cubo, otra del octaedro y la cuarta del tetraedro. Todas ellas en conjunto son doce. En efecto, en la pirámide de cuatro bases no hay lados, ni ángulos, ni superficies en que puedan apoyarse los ángulos de los otros cuerpos regulares, a no ser los del octaedro. Igualmente el cubo sólo puede recibir a la pirámide y al octaedro, y este último sólo al cubo y a la pirámide; y en ninguno de ambos es posible inscribir alguno de los otros dos restantes, icosaedro o dodecaedro. Y, mientras que el icosaedro da cabida a los tres cuerpos, únicamente la niega al octaedro, lo que sucede por respecto al glorioso signo que a todos los demonios hace temblar, el de la Santa Cruz; en efecto, no hay modo de poder trazar debidamente para la disposición de dicho octaedro las tres líneas tiradas diametralmente de un ángulo a otro y cortándose entre sí en escuadra. Por contra, el dodecaedro, por estar dotado de una singular prerrogativa con respecto a los demás, a ninguno ha prohibido o vedado alojamiento, siendo receptáculo de todos. Por ello el antiguo Platón lo atribuyó, junto con los otros cuerpos mencionados, al universo.*»

Las doce posibles inclusiones de unos poliedros regulares en otros que determina Luca Pacioli o en su propio lenguaje las doce formas posibles de ser recibidos unos sólidos platónicos por otros, se obtienen de una geometría muy elemental en la que las aristas del poliedro que es recibido se obtienen uniendo puntos medios de las aristas o de las caras o considerando diagonales de los polígonos del poliedro que recibe, y considerando una transición de inclusiones. Pero hay otras posibilidades que utilizan otros instrumentos geométricos más complejos como precisamente *seccción áurea* o divina proporción que da el nombre a la obra de Luca Pacioli. Por ejemplo si se dividen las aristas de un Octaedro regular en «*media y extrema razón*», es decir, en forma de *seccción áurea*, los veinte puntos de división son los vértices de un icosaedro regular.





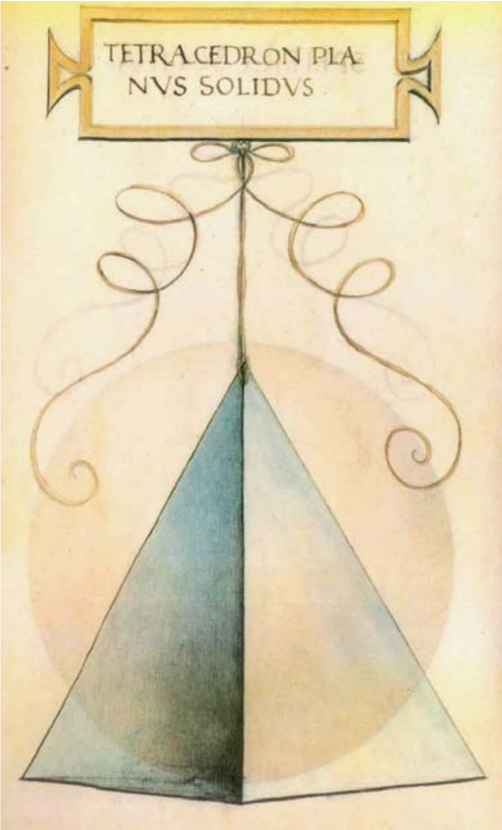
1. **Inclusión del Icosaedro en un Octaedro mediante la división áurea de sus aristas.**
2. **Una curiosa combinación de los cinco poliedros regulares: Dado Cubo, las diagonales de sus caras nos dan las seis aristas de un Tetraedro regular inscrito en el Cubo. Los puntos medios de las seis aristas de este Tetraedro son los vértices de un Octaedro regular. Tomando un punto de cada una de las doce aristas de este Octaedro, determinado por la *sección áurea* –según la construcción anterior– construimos un Icosaedro regular. Los centros de las veinte caras de este Icosaedro son los vértices de los doce pentágonos de un Dodecaedro regular. Así obtenemos una refinada combinación de los cinco poliedros regulares –Cubo, Tetraedro, Octaedro, Icosaedro y Dodecaedro– inscrito cada uno de ellos en el anterior.**

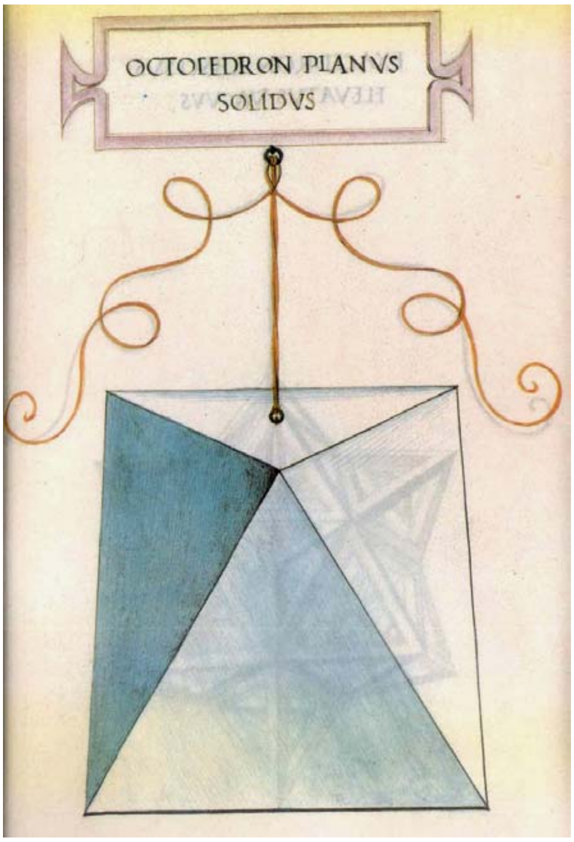
LUCA PACIOLI. *LA DIVINA PROPORCIÓN*

CAPÍTULO LV (Akal, pp.102–104)

Hemos seguido hasta aquí sólo para demostrar que cómo la virtud de esos cinco cuerpos regulares se destila siempre a los cuerpos dependientes, a semejanza de los cinco cuerpos simples que concurren a la formación de todo compuesto creado. Por ello [...] se vio Platón constreñido a asignar las mencionadas cinco formas regulares a los cinco cuerpos simples que concurren en la formación de todo compuesto creado, es decir, a la tierra, el aire, el agua, el fuego y el cielo, como aparece en su *Timeo,* donde trata sobre la naturaleza del universo. Al elemento tierra le atribuyó la forma cúbica, es decir, la del hexaedro, dado que ninguna figura precisa de mayor violencia para moverse y, entre todos los elementos, ninguno es más fijo, constante y firme que la tierra. La forma del tetraedro la atribuyó al elemento del fuego, dado que éste, cuando vuela hacia arriba, origina la forma piramidal, como nos muestra nuestra vista cuando vemos que en la base es ancho y uniforme y que va adelgazándose hacia arriba de tal modo que su llama en lo alto termina en punta como el cono de la pirámide. La forma del octaedro la atribuye al aire, pues, así como el aire sigue al fuego en un pequeño movimiento, del mismo modo la forma del octaedro sigue a la piramidal por su facilidad para el movimiento. La figura de veinte bases, o sea, el icosaedro, la asignó al agua, ya que, al estar limitada por más bases que ninguna otra figura, le pareció que en la esfera convenía más al movimiento de la cosa que desciende derramándose que no al de la cosa que asciende. Y la forma de doce bases pentagonales la atribuyó al cielo como a aquello que es receptáculo de todas las cosas, del mismo modo que el dodecaedro es receptáculo y albergue de todos los otros cuerpos regulares, como se puede comprobar por la inscripción de un cuerpo en otro y además, porque, así como en el cielo hay doce signos en su zodíaco y cada uno de ellos se divide en treinta partes iguales, de manera que su revolución anual sea 360, de igual modo tiene este dodecaedro doce bases pentagonales, cada una de las cuales se resuelve en cinco triángulos con la punta en el centro, y cada uno de dichos triángulos en seis escalenos, que son treinta triángulos en cada base y trescientos sesenta en total, como en el mencionado zodíaco. Esta formas son muy recomendadas por el celebérrimo filósofo Calcidio en su exposición del aludido *Timeo*, como también por Macrobio, Apuleyo y otros muchos, porque verdaderamente son dignas de toda recomendación por las razones que al hablar de su construcción se aducen y que muestran que la suficiencia de dichas cinco formas, así como las de los cinco cuerpos simples, no puede en modo alguno ser mayor; y, así como el número de los cuerpos simples no puede aumentar en la naturaleza, de igual modo es imposible señalar otros cuerpos que sean iguales de bases, lados y ángulos y que, situados en la esfera, al tocar un ángulo la toquen todos los demás. Porque si se pudiera encontrar en la naturaleza un sexto cuerpo simple, el Sumo Hacedor resultaría disminuido y sería posible achacarle falta de prudencia al no haber previsto desde el principio todas las necesidades oportunas. Por esta razón Platón atribuyó tales elementos a cada uno de los mencionados cuerpos simples, argumentando así como un magnífico geómetra y profundísimo matemático; viendo que las cinco diversas formas de estos cuerpos no pueden en modo alguno imaginarse ni formarse como no sea tendiendo hacia la esfera, con bases y ángulos iguales, según se demuestra por la penúltima del décimo tercero [de los *Los Elementos* de Euclides], oportunamente aducido por nosotros, argumentó con razón que dichas formas conducían a los cinco cuerpos simples y que de ellas dependía toda otra forma.

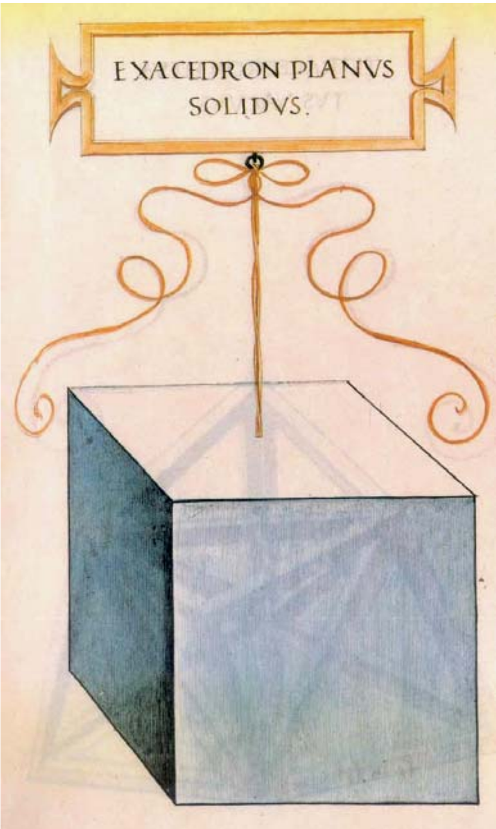
LOS DISEÑOS DE LEONARDO DE LOS SÓLIDOS *PLATÓNICOS* PARA *LA DIVINA PROPORCIÓN* DE LUCA PACIOLI

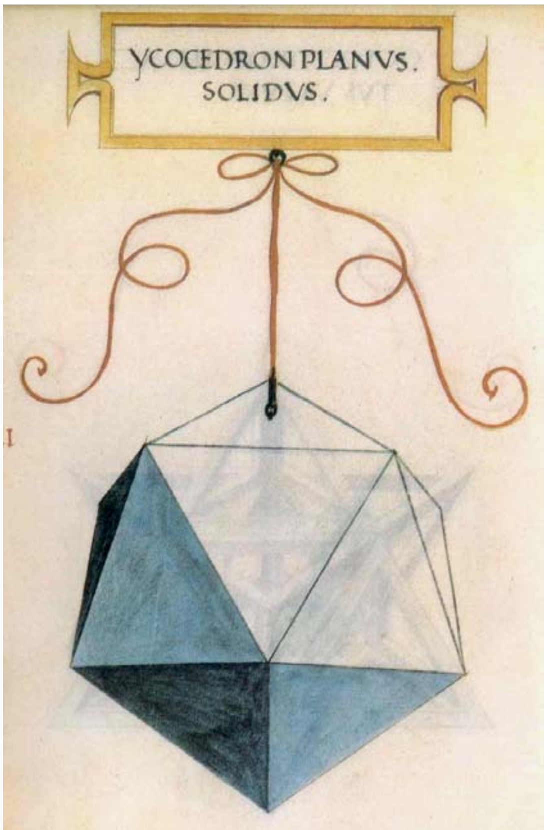




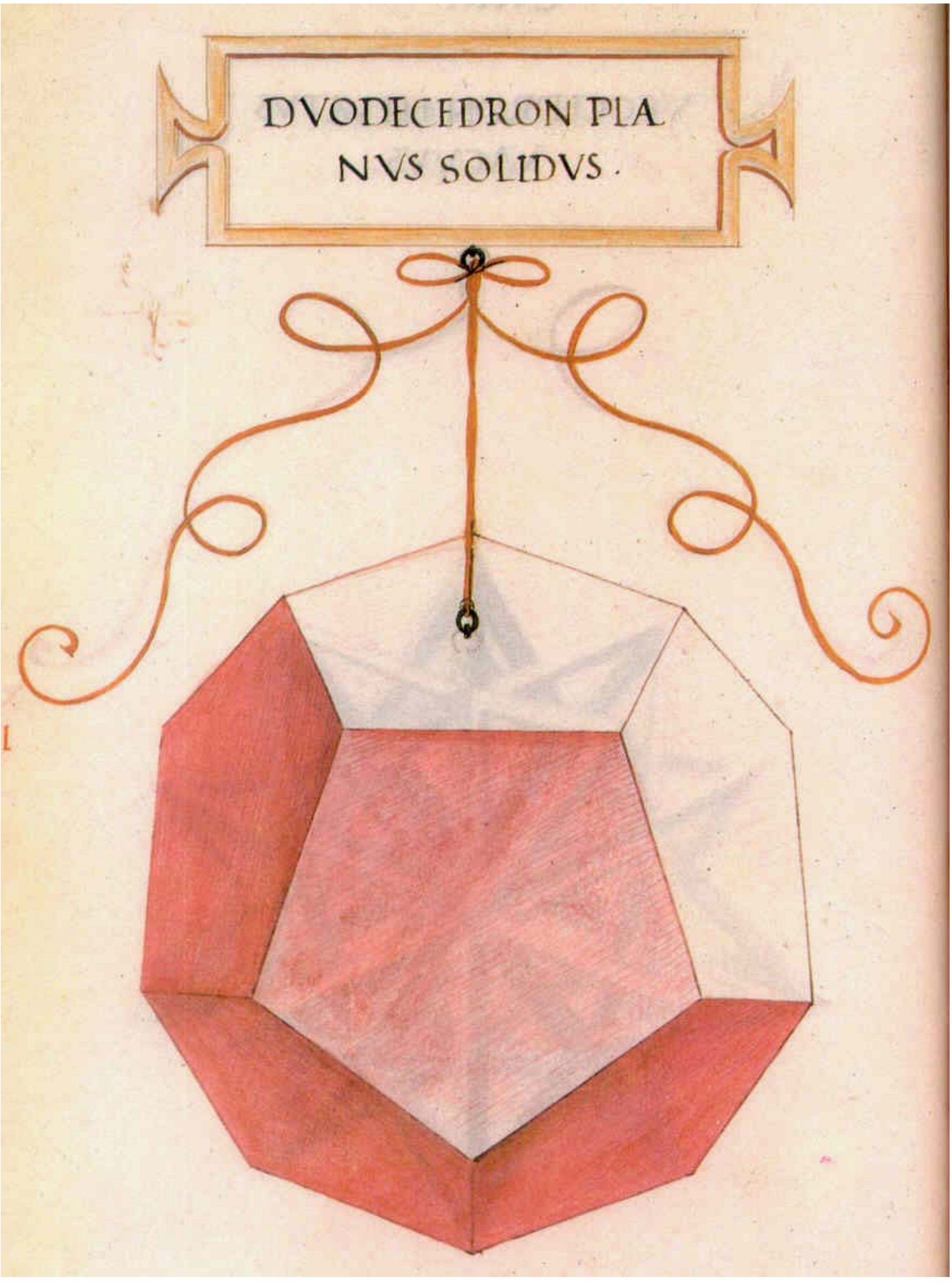
Dibujos de Leonardo da Vinci de los poliedros regulares sólidos (Tetraedro, Octaedro, Hexaedro e Icosaedro) diseñados para ilustrar la obra de Luca Pacioli *La Divina Proporción* (Venecia, 1509).

Pacioli es uno pocos escritores que tuvieron el inmenso privilegio de ver recompensada la amistad con la lujosa ilustración de sus libros con la fuerza artística de un genio como Leonardo.





EL *NOBILÍSIMO* DODECAEDRO DISEÑADO POR LEONARDO PARA *LA DIVINA PROPORCIÓN* DE LUCA PACIOLI



La influencia pitagórico-platónica le infunde a Luca Pacioli la veneración hacia el dodecaedro, al que llama *nobilísimo cuerpo regular*. Con argumentos teológicos y filosóficos de naturaleza platónica con origen en el *Timeo* y geométricos con fuente en *Los Elementos* de Euclides, Pacioli asevera que la divina proporción confiere el ser formal al cielo mismo, atribuyéndole la figura del cuerpo de doce pentágonos, llamado Dodecaedro, que «*por estar dotado de una singular prerrogativa con respecto a los demás* [poliedros]*, a ninguno ha prohibido o vedado alojamiento, siendo receptáculo de todos. Por ello el antiguo Platón lo atribuyó al universo* (Luca Pacioli, *La Divina Proporción,* Cap. XLVI).

LOS POLIEDROS REGULARES Y LA ESFERA

LUCA PACIOLI. *LA DIVINA PROPORCIÓN*

CAPÍTULO XLVII (Pacioli, Akal, 1991, pp.89–90)

Cómo se forma la esfera en cada uno de estos cuerpos regulares

Como más arriba se ha visto, [...], hemos demostrado que cada uno de los mencionados cinco cuerpos regulares es inscribible en una esfera propuesta y circunscribible por la misma. Falta ahora por demostrar convenientemente que también dicha esfera puede inscribirse en cada uno de estos cuerpos. A continuación mostraremos con evidente claridad que a su vez la esfera puede inscribirse en cada uno de ellos. Lo cual se demostrará del modo que sigue. Desde el centro de la esfera que circunscribe a cada uno de tales cuerpos trácense todas las perpendiculares a todas las bases de todos ellos; estas perpendiculares caerán, necesariamente, en los centros de los círculos que circunscriben exactamente dichas bases y, dado que todos estos círculos son iguales, serán también iguales dichas líneas perpendiculares. De donde se sigue que si, conforme a la cantidad, describimos el círculo de cada una de ellas sobre el centro de la esfera que lo circunscribe y hacemos girar su semicírculo hasta que vuelva al lugar desde donde empezó a moverse, como es necesario que dicho semicírculo pase por los extremos de todas las perpendiculares, resultará, por el corolario de la decimoquinta de¡ tercero, que la esfera descrita por el movimiento de este semicírculo toca exactamente todas las bases del cuerpo dado en la concurrencia de las perpendiculares. Pues la esfera no puede tocar las bases del cuerpo más de lo que toca el semicírculo cuando se mueve. Conforme a todo lo cual, queda claro que hemos inscrito la esfera en el cuerpo asignado, como era nuestro propósito.

CAPÍTULO LVII (Pacioli, Akal, 1991, pp.105–106)

Cómo se colocan en la esfera los cinco cuerpos regulares

En esta esfera podemos imaginar los cinco cuerpos regulares del modo siguiente. En primer lugar, el tetraedro: si sobre la superficie de la esfera, es decir, sobre su revestimiento, se marcan o se imagina cuatro puntos equidistantes uno de otro en todos los sentidos y se unen mediante seis líneas rectas que, necesariamente, pasarán por dentro de la esfera, se formará exactamente en ella el cuerpo previsto. Y si imaginariamente cortamos la esfera con una superficie plana siguiendo dichas líneas en todos los sentidos, quedaría al descubierto justamente el mencionado tetraedro. [...]. Del mismo modo, si en la superficie esférica se marcan ocho puntos equidistantes entre sí y se unen mediante doce líneas rectas, habremos situado imaginariamente en la esfera el segundo cuerpo regular, llamado hexaedro o cubo, es decir, la figura del diabólico instrumento llamado dado. [...]. Y si en esa superficie se marcan seis puntos igualmente equidistantes entre sí, según se ha dicho, y se continúan o unen mediante doce líneas rectas, se habrá construido exactamente en dicha esfera el tercer cuerpo regular, llamado octaedro. [...]. Del mismo modo, si se marcan doce puntos y se unen mediante treinta líneas rectas, habremos colocado en dicha esfera el cuarto cuerpo, llamado icosaedro. [...]. Y si se marcan veinte puntos uniéndolos mediante treinta líneas rectas, se habrá formado en dicha esfera el quinto y nobilísimo cuerpo regular llamado dodecaedro, es decir, el cuerpo de doce bases pentagonales. [...]. Así estarán todos esos cuerpos imaginariamente colocados en la esfera de modo que sus puntos angulares estén situados en la superficie esférica y que, si uno de sus ángulos toca la esfera, todos los demás también la toquen, no siendo posible en modo alguno que uno la tocara sin que la tocasen los otros cuando dicho cuerpo esté colocado en la esfera.

En los capítulos XLVIII–LV (Pacioli, Akal, pp.90–104) Luca Pacioli estudia otros muchos poliedros que se forman a partir de los platónicos. Unos se obtienen por *extracción* y otros por *adición* de otros cuerpos geométricos –Pacioli dice despuntando sus ángulos o cortando sus lados–. A los primeros Pacioli los llama poliedros *abscisos* y a los segundos –que son estrellados– los llama poliedros *elevados*. Pacioli hace una descripción minuciosa de aristas, ángulos superficiales, ángulos sólidos y las diversas caras poligonales.

Por su importancia, su simplicidad, su completa descripción por Pacioli y por ser arquimedianos se relacionarán sólo los poliedros *abscisos,* que Pacioli obtienen por truncamiento.

- **Capítulo XLVIII. *De la forma del Tetraedro absciso plano.*** *El Tetraedro despuntado o absciso está contenido por dieciocho líneas que forman treinta y seis ángulos superficiales y doce sólidos* [...], *lo circundan ocho bases, cuatro hexagonales y cuatro triangulares, equiláteras y equiángulas*. [...] *Y deriva del Tetraedro regular mediante el corte uniforme de sus lados en tres partes iguales*.
  Es el poliedro arquimediano llamado Tetraedro truncado.

- **Capítulo XLIX. Del hexaedro absciso plano.** *El Hexaedro despuntado o absciso plano tiene veinticuatro líneas que originan en él cuarenta y ocho ángulos superficiales* [...]; *tiene doce ángulos sólidos y está contenido por catorce superficies o bases, seis de las cuales son cuadradas y ocho triangulares*. [...]. *Y este cuerpo se origina del Cubo mediante el corte uniforme en la mitad de sus lados*.
  Es el poliedro arquimediano llamado CuboOctaedro.

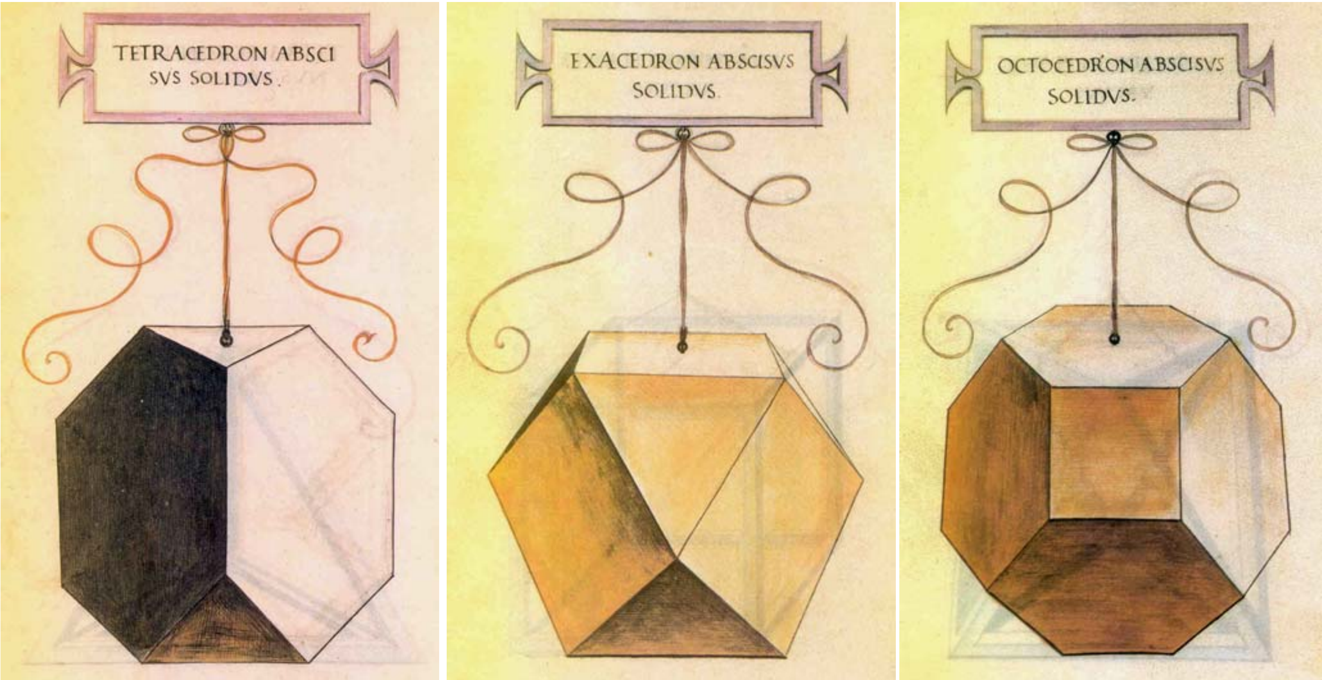
- **Capítulo L. Del Octaedro absciso plano.** *El Octaedro absciso o cortado plano tiene treinta y seis líneas que forman setenta y dos ángulos superficiales* [...], *y contiene veinticuatro ángulos sólidos y catorce bases, ocho de las cuales son hexagonales y seis cuadradas*. [...]. *Y se origina a partir de Octaedro regular por corte uniforme de sus lados en tres partes.*
  Es el poliedro arquimediano llamado Octaedro truncado.

- **Capítulo LI. Del Icosaedro absciso plano.** *El icosaedro absciso plano tiene noventa lados o líneas y ciento ochenta ángulos superficiales* [y treinta ángulos sólidos] [...]; *estas líneas forman en torno a dicho cuerpo treinta y dos bases, veinte de las cuales son hexágonos y doce pentagonales. Y todas en su especie son entre sí equiláteras y equiángulas*. [...]. *Pero todos los lados, tanto de los pentágonos como de los hexágonos, son iguales entre sí. Este cuerpo se origina a partir del Icosaedro regular cuando se cortan sus lados de modo uniforme en su tercera parte*.
  Es el poliedro arquimediano llamado Icosaedro truncado.

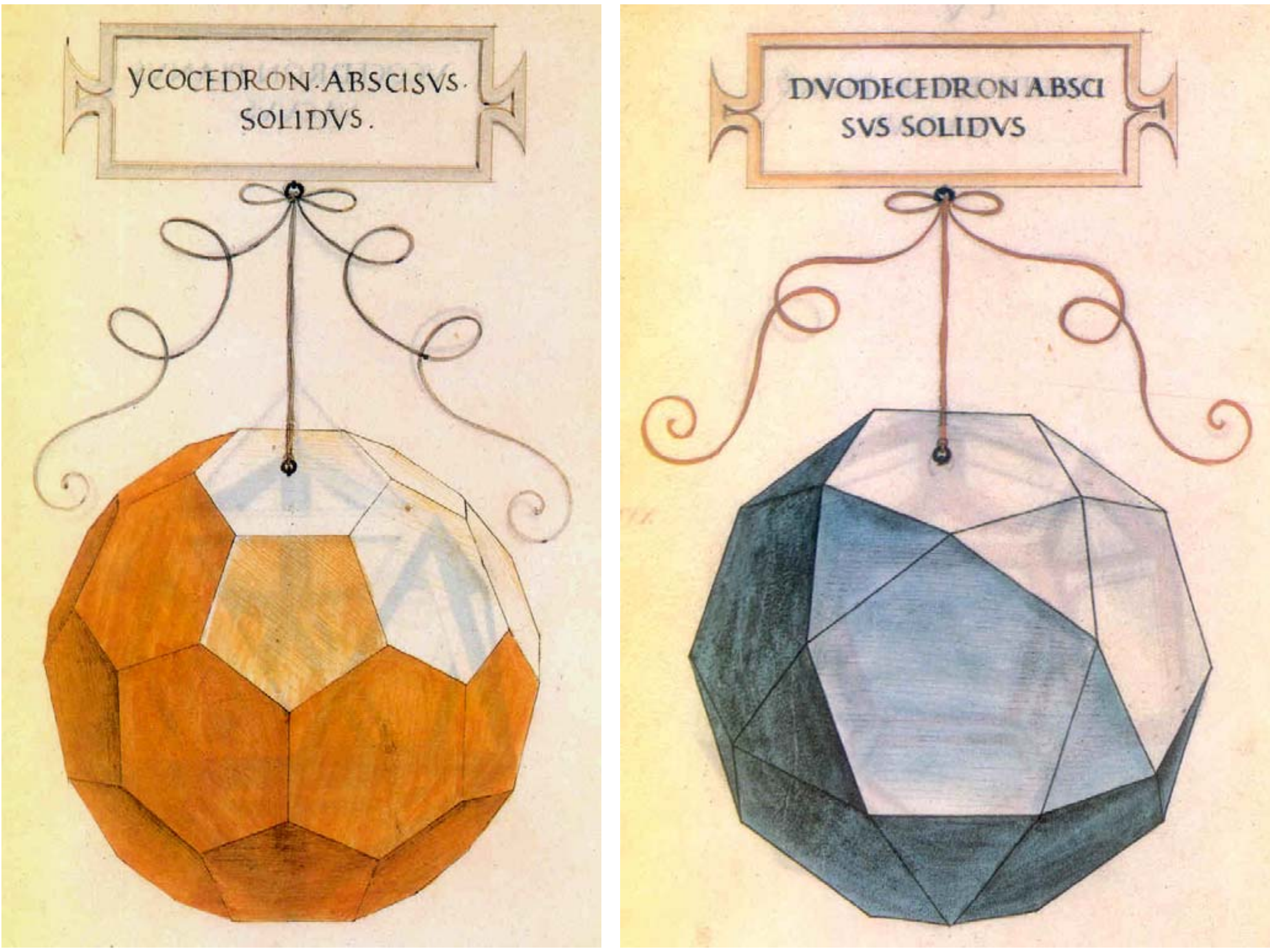
- **Capítulo LII. Del Dodecaedro absciso plano.** *El Dodecaedro despuntado o absciso plano tiene sesenta líneas, todas de igual longitud, ciento veinte ángulos superficiales, de los cuales sesenta son de triángulos y sesenta de pentágonos; y tiene treinta ángulos sólidos*. [...]. *Y todas sus líneas son comunes a los triángulos y a los pentágonos*. [...]. *Las superficies que circundan este cuerpo son treinta y dos, doce de las cuales son pentágonos y veinte triángulos, ambas figuras equiláteras y equiángulas*. [...]. *Y dicho cuerpo deriva del Dodecaedro regular si se corta de modo uniforme por la mitad de cada uno de sus lados.*
  Es el poliedro arquimediano llamado IcosiDodecaedro.

- **Capítulo LIII. Del cuerpo de veintiséis bases plano.** *Otro cuerpo muy distinto de los ya nombrados, es el llamado cuerpo de veintiséis bases, de hermosísimo principio y origen derivado. De sus veintiséis bases, dieciocho son cuadradas y ocho triangulares, equiláteras y equiángulas. Tiene cuarenta y ocho lados o líneas y noventa y seis ángulos superficiales que determinan la formación de veinticuatro ángulos sólidos. El origen de este cuerpo es el hexaedro uniformemente cortado en todas sus partes* [....]. *Su conocimiento resulta utilísimo para quien bien lo sepa aplicar, sobre todo en arquitectura.*
  Es el poliedro arquimediano llamado RombiCuboctaedro menor.

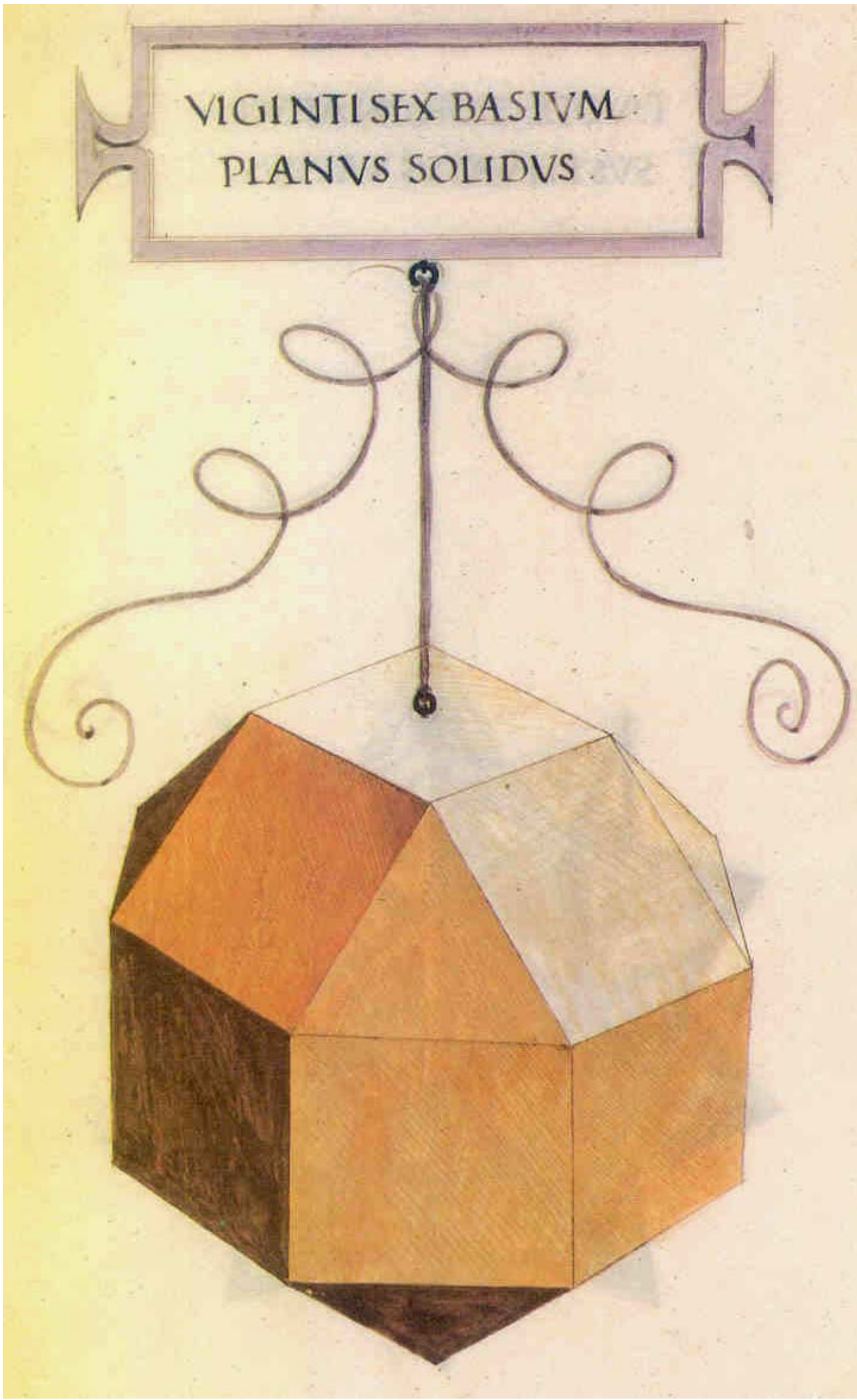
LOS DISEÑOS DE LEONARDO DE LOS POLIEDROS *SÓLIDOS ABSCISOS* PARA *LA DIVINA PROPORCIÓN* DE LUCA PACIOLI



Dibujos de Leonardo da Vinci de los poliedros *abscisos sólidos* (Tetraedro *absciso*, Hexaedro *absciso*, Octaedro *absciso*, Icosaedro *absciso* y dodecaedro *absciso*) diseñados para ilustrar la obra de Luca Pacioli *La Divina Proporción* (Venecia, 1509). Estos poliedros son los sólidos arquimedianos obtenidos por un primer truncamiento de los sólidos platónicos, y en la literatura matemática se conocen por los nombres de Tetraedro truncado, CuboOctaedro, Octaedro truncado, Icosaedro truncado e IcosiDodecaedro.



EL ROMBICUBOOCTAEDRO DISEÑADO POR LEONARDO PARA *LA DIVINA PROPORCIÓN* DE LUCA PACIOLI



En el capítulo LIII de *La Divina Proporción* Luca Pacioli estudia el poliedro arquimediano que nombra como «*el cuerpo de veintiséis bases plano*», poliedro que en la literatura matemática se llama RombiCubOctaedro menor. Pacioli escribe sobre él:

> **«[Es un cuerpo] *de hermosísimo principio. De sus veintiséis bases, dieciocho son cuadradas y ocho triangulares, equiláteras y equiángulas.* [...] *El origen de este cuerpo es el hexaedro uniformemente cortado en todas sus partes* [....]. *Su conocimiento resulta utilísimo* [...] *sobre todo en arquitectura.*»**

POLIEDROS EN EL RETRATO DE LUCA PACIOLI

El famoso cuadro atribuido a Jacopo de Barbari (1495). Museo de Capidemonte, Nápoles.

Esta extraordinaria pintura, cargada de simbolismo matemático y de instrumentos geométricos, representa a Luca Pacioli rodeado de elementos geométricos alusivos a unas páginas de Euclides, en relación con los poliedros, a cuyo estudio está dedicada gran parte de su obra más conocida *La Divina Proporción*. Quizá ninguna otra obra artística compendia de forma tan expresiva y elocuente la profunda y extensa conexión que el Renacimiento establece entre Arte y Matemáticas, ya que cada aspecto o rasgo de la obra ha sido compuesto con esta significación.

En la pintura aparece, a la derecha del espectador, un dodecaedro regular de madera –que contiene en sus caras pentagonales la Divina Proporción (la *Sección Áurea)*– como símbolo de unión mística entre maestro y discípulo (representado por un joven de noble aspecto, probablemente su protector, Guidobaldo de Montefeltro, Duque de Urbino –a quien había dedicado su famosa obra *Summa di arithmetica*–, aunque algún osado exégeta ha querido ver a un joven Durero),

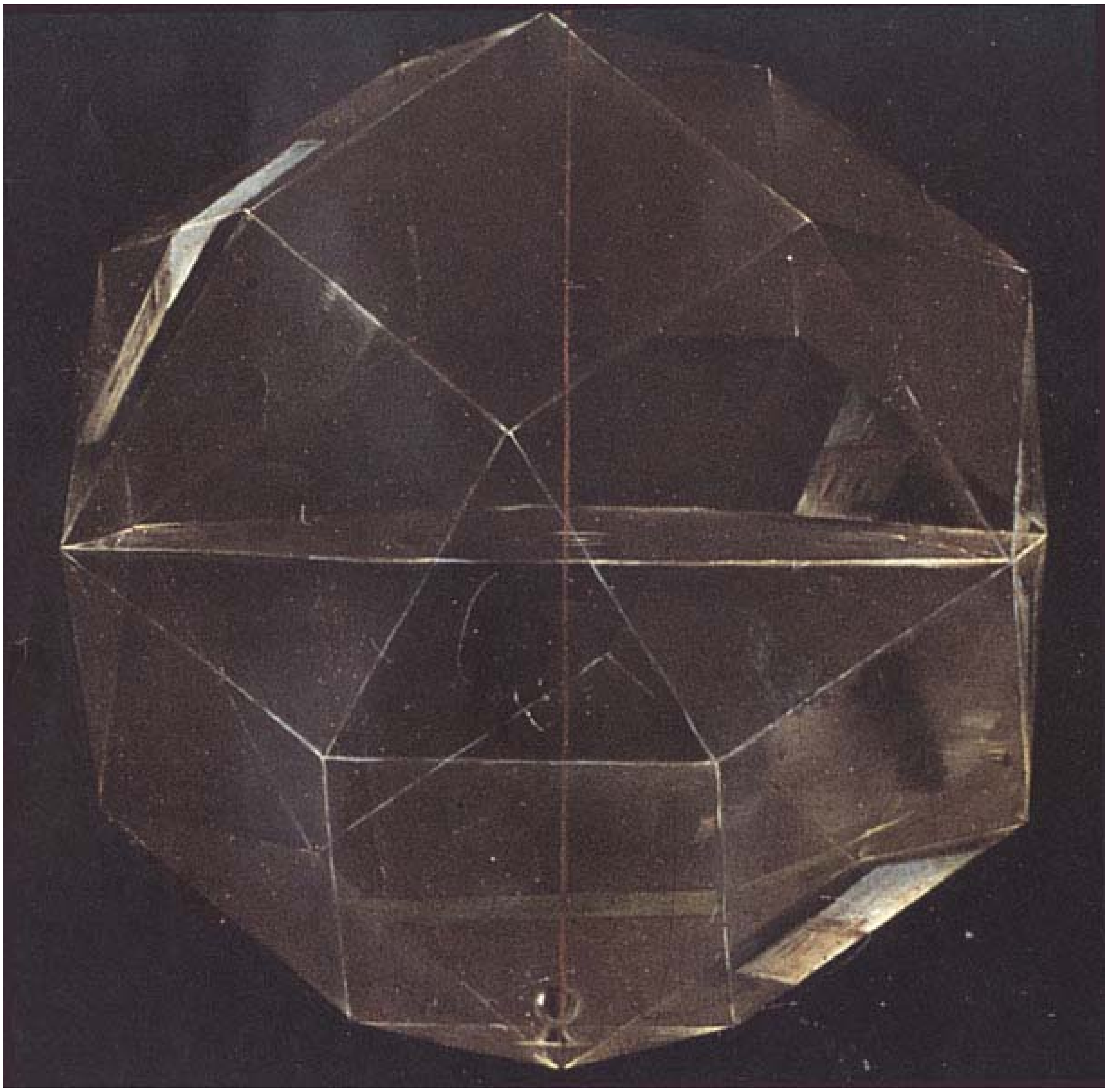
El libro cerrado sobre la mesa que soporta el dodecaedro se supone que es su obra matemática más importante *Summa di arithmetica geometria proportioni et proportionalita.* Junto a este libro aparece un pequeño cartel abierto donde se observa asta una mosca. En el cartel hay una inscripción que reza: «CO.BAR.VIGEN/NIS 1495». La leyenda aporta la fecha del cuadro y unas iniciales que son la fuente de las múltiples interpretaciones sobre la paternidad del lienzo.

El libro abierto exhibe páginas del Libro XIII de *Los Elementos* de Euclides –dedicado al estudio de los sólidos platónicos–. Por el dibujo trazado con tiza en la pizarra –que muestra por delante el nombre de Euclides–, Pacioli claramente está exponiendo la Proposición XIII.12: «*Si se inscribe un triángulo equilátero en un círculo, el cuadrado del lado del triángulo es el triple del cuadrado del radio del círculo*», que precede a la construcción e inscripción en una esfera del Tetraedro (Proposición XIII.13: «*Construir una pirámide inscrita en una esfera dada y demostrar que el cuadrado del diámetro de la esfera es una vez y media el del lado de la pirámide*»).

Sobre la superficie verde de la mesa aparecen otros objetos matemáticos: un par de compases, una escuadra plegable para medir ángulos o goniómetro y una caja cilíndrica para guardar instrumentos geométricos. Todos ellos son útiles habituales usados en Matemáticas. También aparece una pequeña esponja para borrar la pizarra.

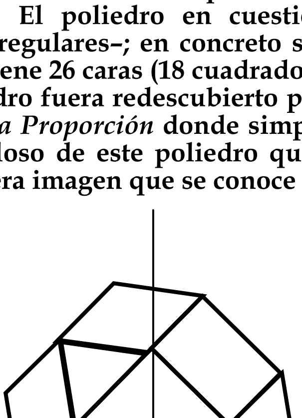
Finalmente, digamos que es muy digno de atención observar la intensa y penetrante mirada de Pacioli dirigida hacia el objeto trasparente suspendido del techo. Se trata de un precioso poliedro arquimediano cuya explicación se da en la página siguiente.

EL ROMBICUBOOCTAEDRO DE LUCA PACIOLI



El RombiCuboOctaedro del retrato de Luca Pacioli de Jacopo de Barbari (1495).

Uno de los elementos geométricos más significativos del emblemático cuadro que refleja la actividad de Luca Pacioli como profesor de Matemáticas es el poliedro de vidrio trasparente suspendido del techo. El poliedro en cuestión es uno de los trece sólidos arquimedianos –llamados sólidos semirregulares–; en concreto se trata del poliedro bautizado por Kepler como RombiCuboOctaedro que tiene 26 caras (18 cuadrados y 8 triángulos equiláteros), 24 vértices y 48 aristas. Es posible que este poliedro fuera redescubierto por Pacioli, quien lo estudia de forma especial en el capítulo LIII de *La Divina Proporción* donde simplemente le llama «*cuerpo de veintiséis bases*». Pacioli debía estaba tan orgulloso de este poliedro que debió indicar al artista que lo representara en el cuadro, siendo la primera imagen que se conoce del mismo.



Proyección del RombiCuboOctaedro de Pacioli visto desde la derecha.

El poliedro de vidrio contiene agua hasta el nivel de la mitad y es una obra maestra de la plasmación en Pintura de la reflexión, la refracción y la perspectiva. En efecto, el artista ha sido capaz de captar en el lienzo, de una forma extraordinaria, las reflexiones y refracciones que se producen en el líquido y la perspectiva general del sólido, lo que ha sugerido a algunos críticos que es posible que interviniera el mismo Leonardo da Vinci en esta parte del cuadro.

Mirando el poliedro desde la derecha del espectador, se observa que las diagonales del cuadrado del centro dan la posición horizontal –como puede verse por el nivel del agua que llena el poliedro justo hasta la mitad– y la posición vertical que es la dirección del cordel de suspensión, lo que es de gran ayuda para la determinación del punto del triángulo superior desde el que se suspende el poliedro.

Los diseños poliédricos de Leonardo

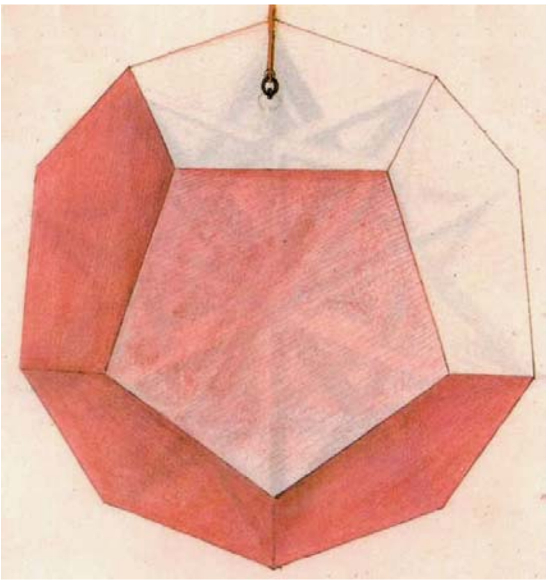
Leonardo da Vinci fue el modelo paradigmático del hombre del Renacimiento: artista, geómetra, científico e ingeniero. En su permanente investigación sobre la naturaleza y el hombre aplicaba ante todo primero la observación y la experiencia y después la razón. Leonardo pretendía entender las causas de todo mecanismo natural para aislando los fundamentos científicos generales poder reproducirlo técnicamente y dejaba constancia de ello recreándolo con sus pinceles, para lo cual recurría de forma sublime a la Geometría. Su temperamento inquieto y la preeminencia absoluta que concedía a lo experimental no eran condiciones muy relevantes para la abstracción matemática, sin embargo bajo la dirección de su amigo Luca Pacioli desarrolló un fuerte empeño en dominar la Geometría como instrumento conceptual de sus increíbles dibujos que son el equivalente conceptual del modelo. Con ellos, Leonardo se sitúa a la cabeza de los inicios de la ilustración científica moderna. Nadie como él ha sido capaz de exponer de forma tan eficaz en un dibujo las características de un proyecto técnico complejo o las virtualidades de unos cuerpos geométricos como hace con sus diseños de los poliedros.

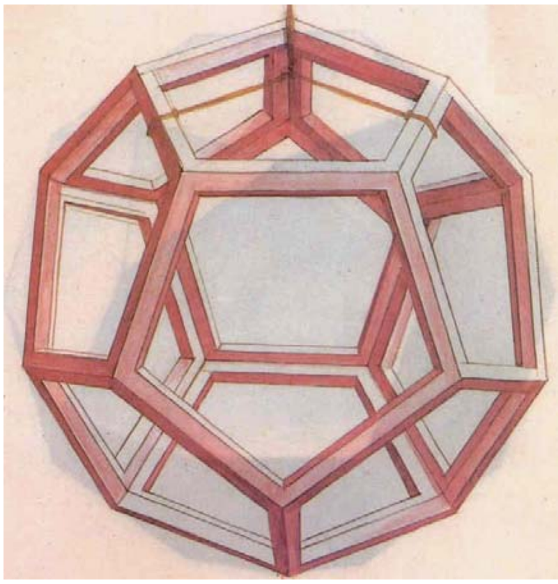
Tradicional efigie de Leonardo da Vinci

En 1496, tal vez impresionado por la lectura de la obra de Luca Pacioli la *Summa*, Leonardo fomenta que Ludovico Sforza –mecenas de sabios, que alienta las Artes y organiza debates científicos entre sabios– invite a su autor a Milán como tutor suyo en Matemáticas, Geometría y Proporción. Para Leonardo Pacioli sería, en el ámbito de las Matemáticas, el experto a cuya mediación acudía para actualizar los conocimientos que concebía como necesarios en el desarrollo de su actividad artística, científica y tecnológica. Los dos sabios estuvieron juntos cerca de diez años en Milán y Florencia reforzándose mutuamente en sus ideas, experiencias y habilidades. Desde luego es muy posible que Leonardo debiera a Piero della Francesca, a través de Pacioli, sus conocimientos y competencia en Perspectiva. Cada uno de ellos aparecerá mencionado por el otro con encomio y gratitud (Leonardo en las obras de Pacioli y éste en las notas de Leonardo). Y desde luego Luca Pacioli no pierde oportunidad de manifestar con abundantes elogios una ferviente admiración hacia Leonardo, desde las primeras páginas de *La Divina Proporción*, donde enfatiza (Akal, 1991, p.30) que su obra «*nada tiene que envidiar a las de Fidias y Praxíteles*» y ante ella «*se estima hoy que cederían Apeles, Mirón y Policleto rindiéndose ante su fama*».

La mayor contribución de Leonardo al estudio de los poliedros son las famosas ilustraciones poliédricas para *La Divina Proporción* de Luca Pacioli. Son sesenta dibujos de cuerpos geométricos representados en perspectiva que abarcan desde el cuerpo más simple –la esfera– hasta el poliedro más complejo. El conjunto de las ilustraciones incluye los sólidos platónicos y varios cuerpos arquimedianos truncados y elevados –poliedros que resultan al añadir a las caras exteriores pirámides cuyas caras están compuestas de triángulos equiláteros–.

LOS POLIEDROS *SÓLIDOS* Y *VACIOS* DE LEONARDO





Las dos versiones de Leonardo – *Solidus* y *Vacuus*– del Dodecaedro.

Para cada cuerpo, Leonardo representa la versión sólida –que es la considerada habitual– y la hueca o vacía «*sin planos*», realizada por medio de un armazón o esqueleto que permite poner de manifiesto su estructura total , es decir, permite ver no sólo el exterior sino también el interior y del poliedro.

Pacioli llama a los poliedros huecos «*planum vacuum*» que se refiere al hecho de que las caras están huecas, de manera que son un ensamblaje hueco de aristas sólidas, es decir, una especie de rejilla poligonal tridimensional. Al dibujar los poliedros sólidos sólo se ve la parte frontal. A veces se marcan los contornos ocultos (formados por las aristas invisibles) con un trazo punteado, pero siempre aparece cierta confusión visual entre el frente del poliedro y la parte trasera. Las caras huecas de Leonardo permiten ver a través de la estructura las superficies traseras del poliedro. He aquí una nuevo y brillante modelo de ilustración geométrica para el despliegue gráfico de información significativa digno de la genial perspicacia de Leonardo.

No podemos saber si la forma «*planum vacuum*» fue inventada por Leonardo, o si el artista simplemente dibujó con genial perspectiva modelos de estos poliedros, que según el Capítulo LXX de *La Divina Proporción* habría construido en madera el propio Luca Pacioli.

Hay muchos textos de Pacioli en los que asegura que estas bellísimas ilustraciones que acompañan a *La Divina Proporción* son creaciones exclusivas de Leonardo:

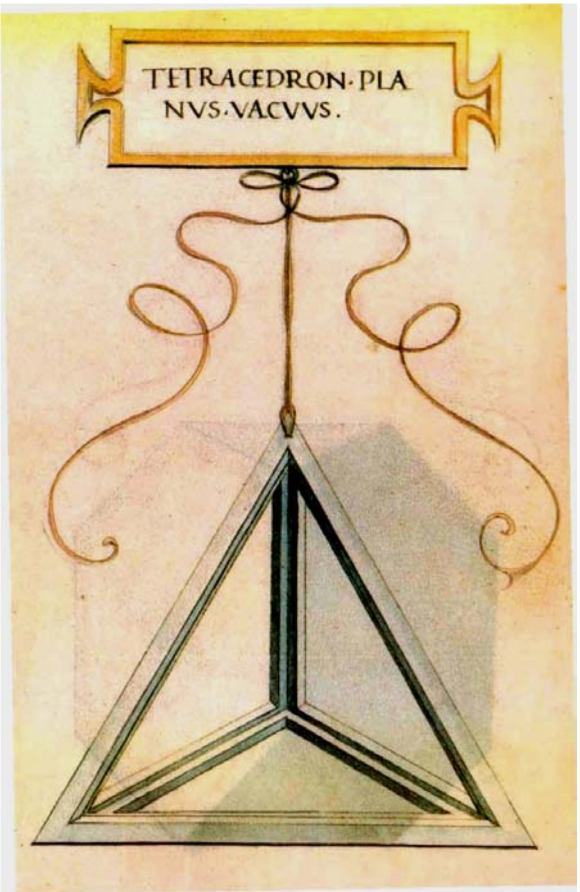
- **En el Capítulo LXX de *La Divina Proporción* (Pacioli, Akal, 1991, p.127):**
  «*Las figuras están representadas en el plano con total perfección de perspectiva, como hace nuestro Leonardo da Vinci.*»

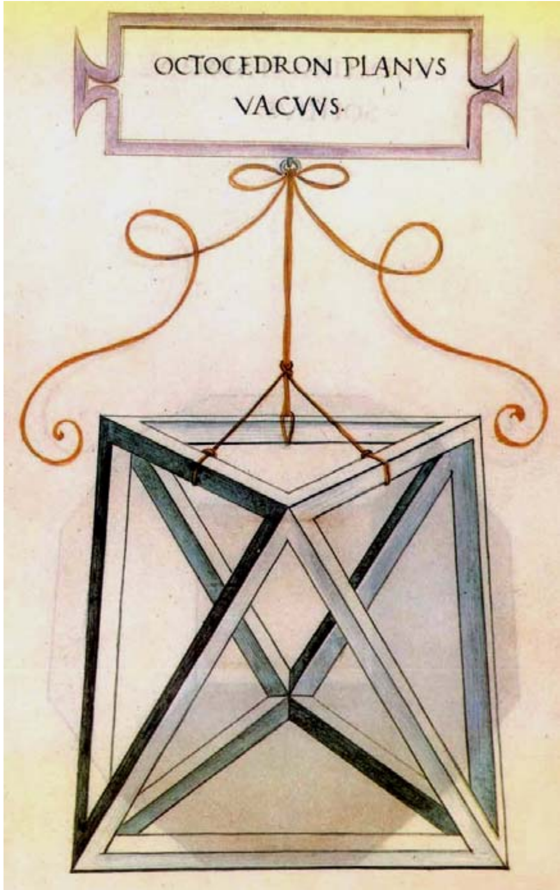
- **En el capítulo X de la segunda parte de *La Divina Proporción*, dedicada a la Arquitectura, cuando habla de las pirámides redondas y lateradas (Pacioli, Losada, 1959, p.171):**
  «[...] *Su orden y figura los tendréis al comienzo de este tomo junto con todos los otros cuerpos ejecutados también por la mano de nuestro eximio Leonardo da Vinci, florentino, cuyos dibujos y figuras, en verdad, nunca hubo nadie que pudiera igualar.*»

- **En la nota que escribe Luca Pacioli en el problema del octaedro truncado de la traducción del *Libellus De Quinque Corporibus Regolaribus* de Piero della Francesca, justificando que no se incluyan al margen las figuras (Pacioli, Losada, 1959, p.263):**
  «[...] *puesto que son muy difíciles de dibujar, ya que se necesitan que estén hechas por un buen perspectivo, y no siempre se puede tener uno para este propósito, tal como por su amor a las humanidades hizo nuestro Leonardo da Vinci.*»

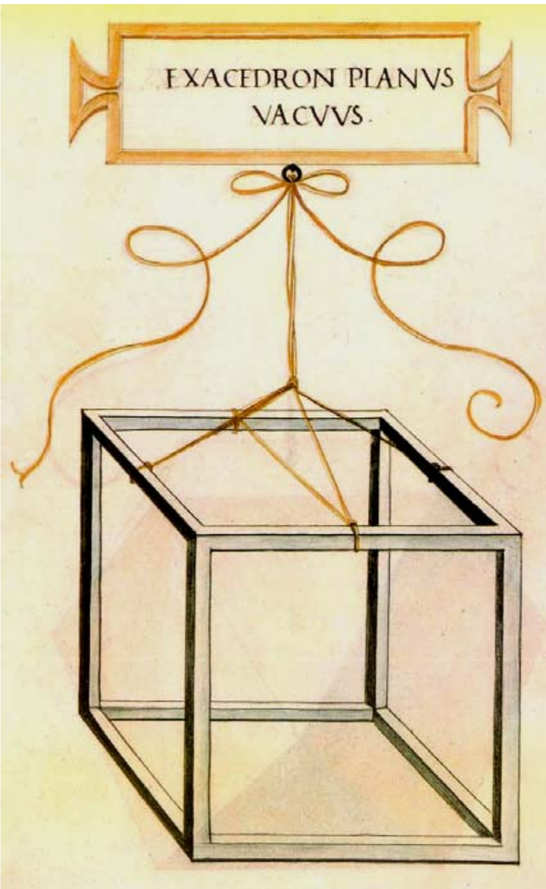
- **En el capítulo 116 del manuscrito de *De Viribus Quantitatis*: (Pacioli, Losada, 1959, p.32):**
  «*Suo effecto* [della prospettiva] *largamente manifesta l'opera del nostro Lionardo Venci compatriota fiorentino quando con tutta forza feci in ditto libro* [De Divina Proportione] *de sua gloriosa mano li corpi mathematici qual ancora apresso di noi tenemo maravigliosi a ognuno che li mirano.*»

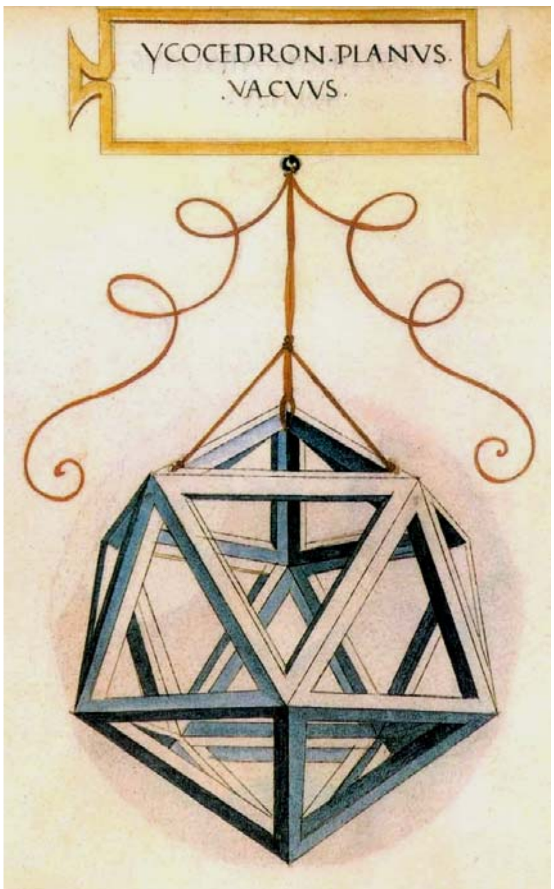
LOS DISEÑOS DE LEONARDO DE LOS *SÓLIDOS PLATÓNICOS VACÍOS* PARA *LA DIVINA PROPORCIÓN* DE LUCA PACIOLI



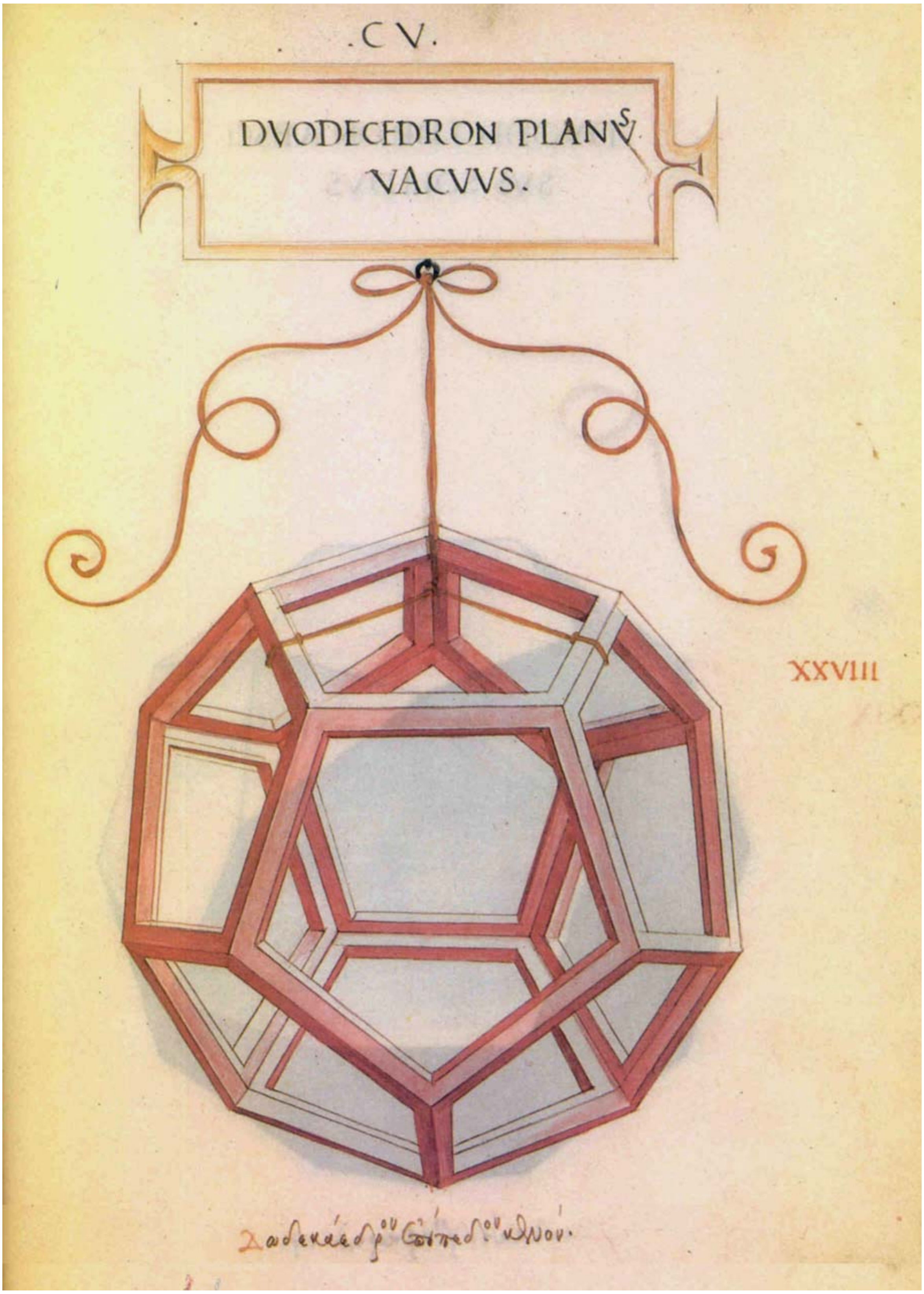


Dibujos de Leonardo da Vinci de los poliedros regulares *vacíos* (Tetraedro, Octaedro, Hexaedro e Icosaedro) diseñados para ilustrar la obra de Luca Pacioli *La Divina Proporción* (Venecia, 1509).



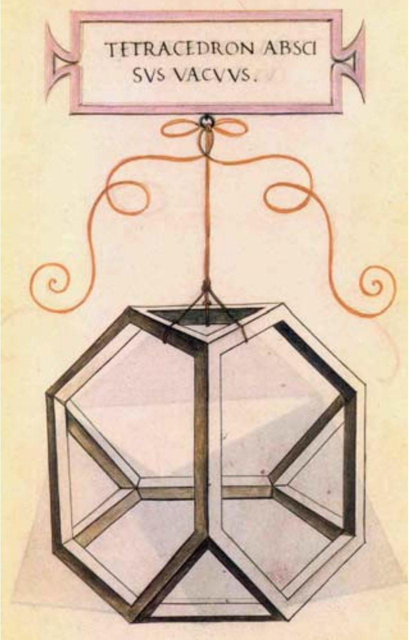


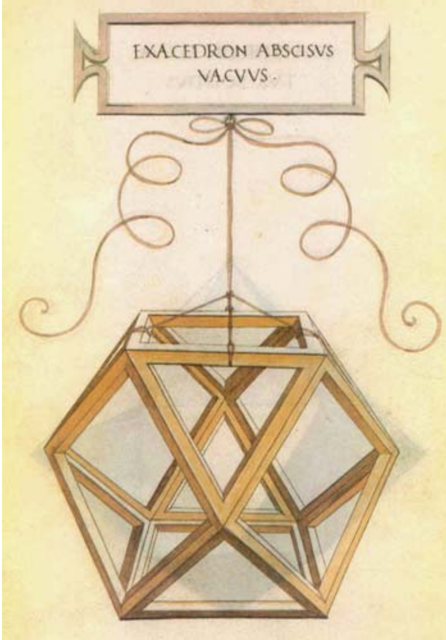
EL NOBILÍSIMO DODECAEDRO VACÍO DISEÑADO POR LEONARDO PARA *LA DIVINA PROPORCIÓN* DE LUCA PACIOLI

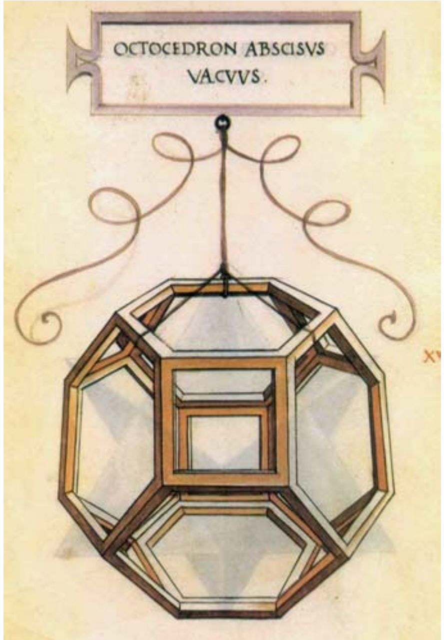


En el capítulo LXX, penúltimo de La *Divina Proporción*, Luca Pacioli explica cómo en el tratado se deben encontrar las figuras de los poliedros «*representadas en el plano con total perfección de perspectiva, como hace nuestro Leonardo da Vinci*», de acuerdo con una numeración que sitúa en el margen del texto y en el margen del dibujo en perspectiva del poliedro, donde además aparece su nombre en latín, en un recuadro superior, y en griego, en la parte inferior.

LOS DISEÑOS DE LEONARDO DE LOS POLIEDROS *ABSCISOS VACIOS* PARA *LA DIVINA PROPORCIÓN* DE LUCA PACIOLI

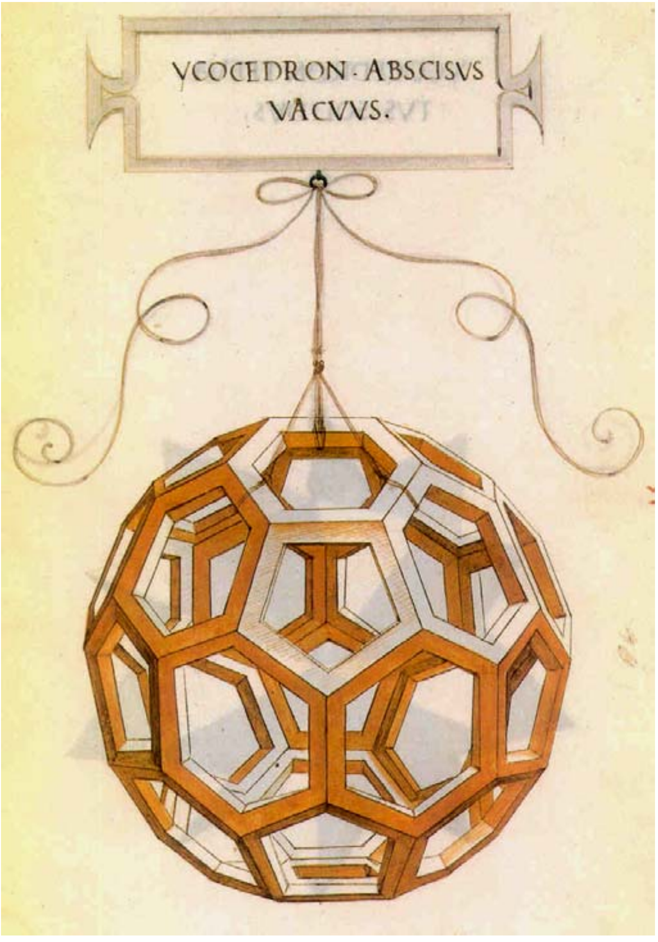


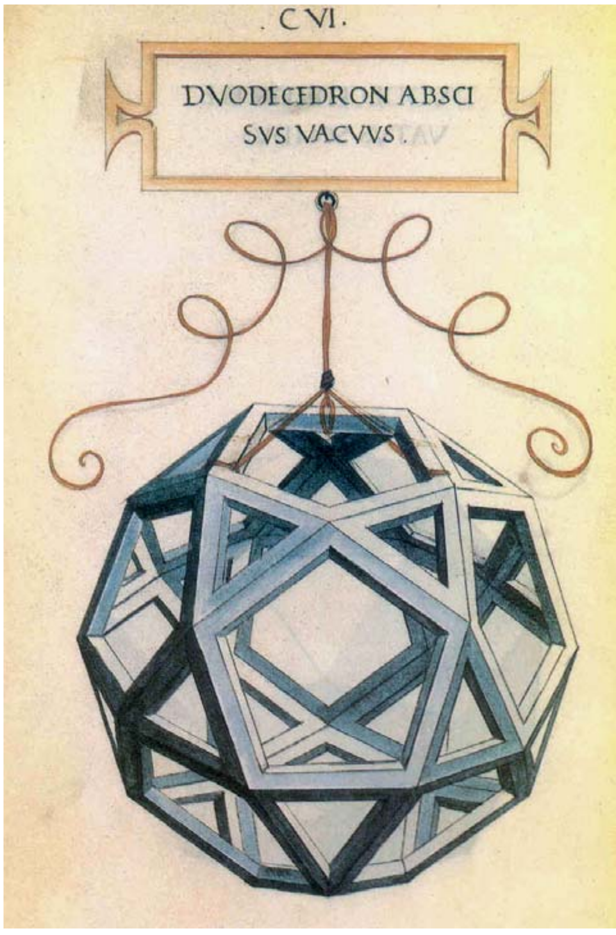




Dibujos de Leonardo da Vinci de los poliedros *abscisos vacíos* (Tetraedro *absciso vacío*, Hexaedro *absciso vacío*, Octaedro *absciso vacío*, Icosaedro *absciso vacío* y Dodecaedro *absciso vacío*) diseñados para ilustrar la obra de Luca Pacioli *La Divina Proporción* (Venecia, 1509).

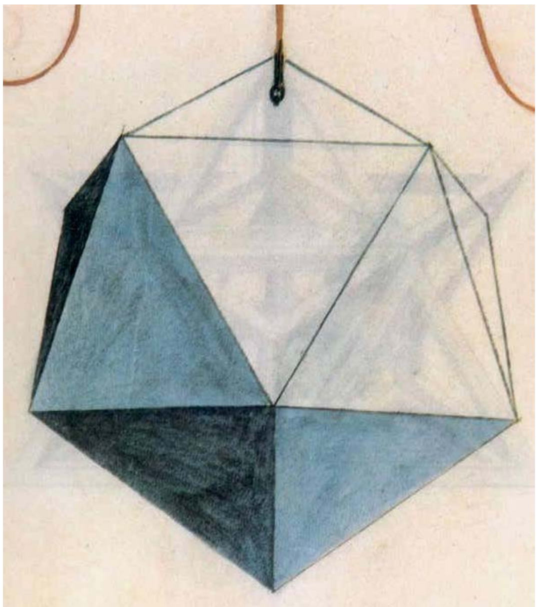
Estos poliedros son los sólidos arquimedianos obtenidos por un primer truncamiento de los sólidos platónicos, y en la literatura matemática se conocen por los nombres de Tetraedro truncado, CuboOctaedro, Octaedro truncado, Icosaedro truncado e IcosiDodecaedro.





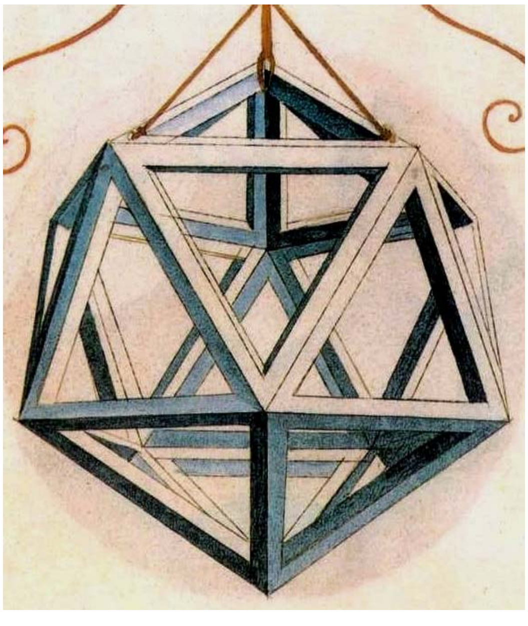
DE PLATÓNICO A RQUIMEDIANO POR TRUNCAMIENTO.

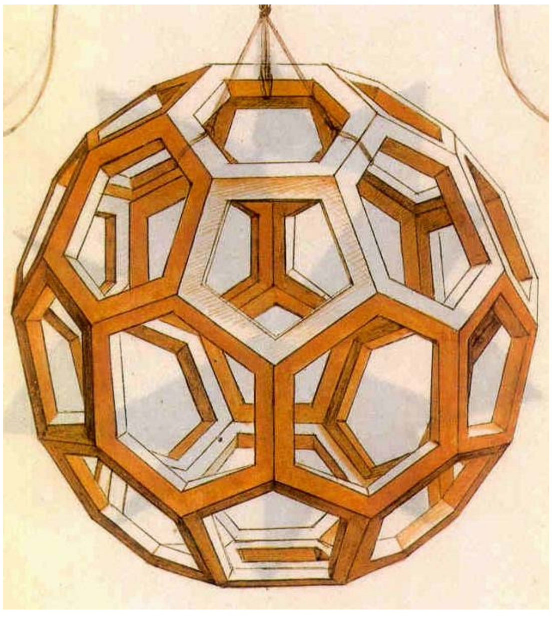
EL CASO DEL ICOSAEDRO



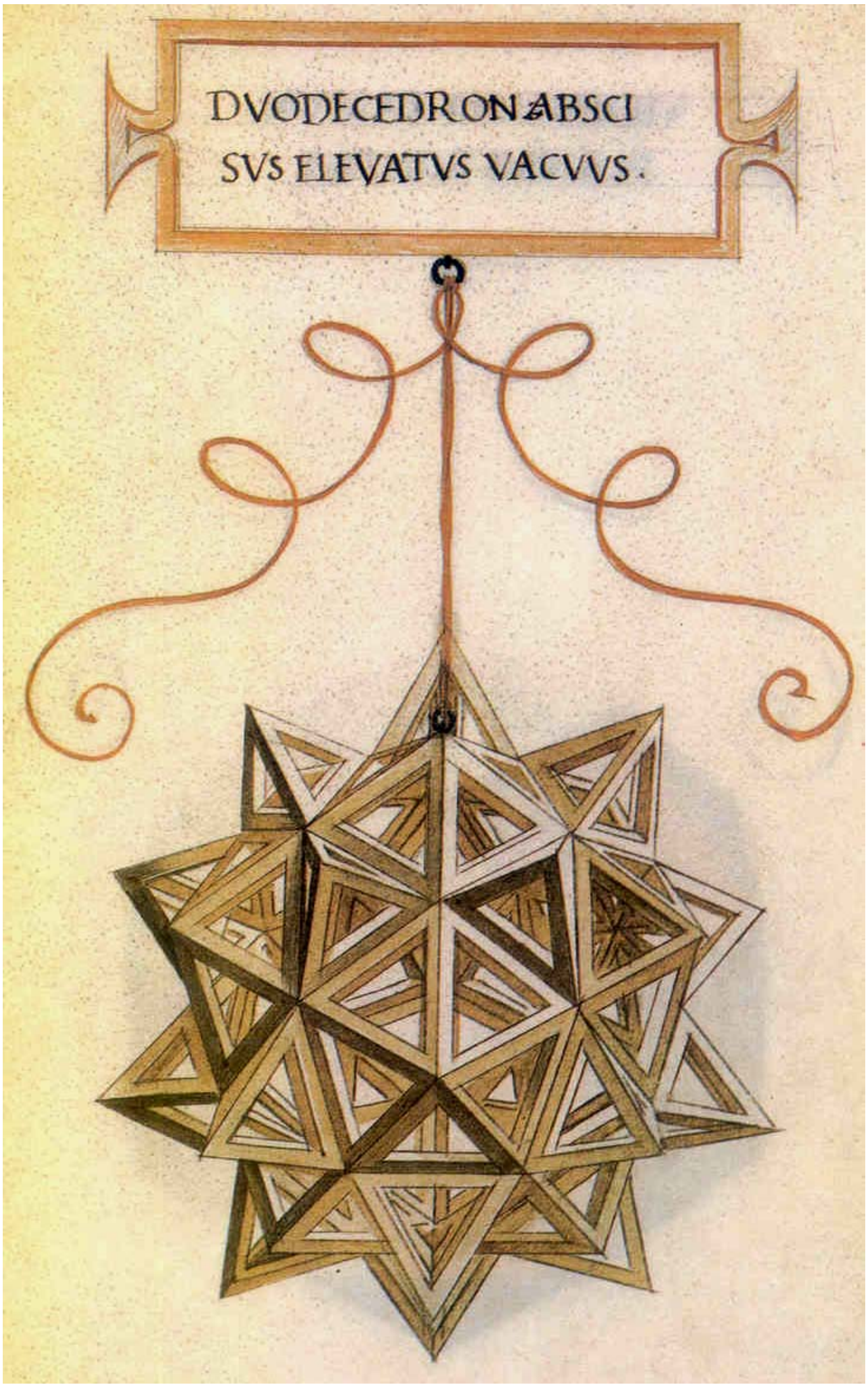
El poliedro platónico Icosaedro regular tiene veinte caras triángulos equiláteros y en cada uno de los doce vértices concurren cinco de estos triángulos. Al cortar los vértices con planos perpendiculares a los ejes, es decir, al truncar el poliedro, estos vértices son sustituidos por caras pentagonales regulares. El corte para truncar también convierte cada una de las caras triangulares en hexágonos regulares. Así resulta el Icosaedro truncado poliedro arquimediano que tiene como caras doce pentágonos y veinte hexágonos. En palabras de Luca Pacioli (*La Divina Proporción*, cap. LI):

> **«Del Icosaedro plano sólido o hueco, absciso sólido o hueco. [...]; *El icosaedro absciso plano o sólido tiene noventa lados o líneas y ciento ochenta ángulos superficiales* [y treinta ángulos sólidos] [...]; *estas líneas forman en torno a dicho cuerpo treinta y dos bases, veinte de las cuales son hexágonos y doce pentagonales. Y todas en su especie son entre sí equiláteras y equiángulas.* [...]. *Pero todos los lados, tanto de los pentágonos como de los hexágonos, son iguales entre sí. Este cuerpo se origina a partir del Icosaedro regular cuando se cortan sus lados de modo uniforme en su tercera parte.* »**



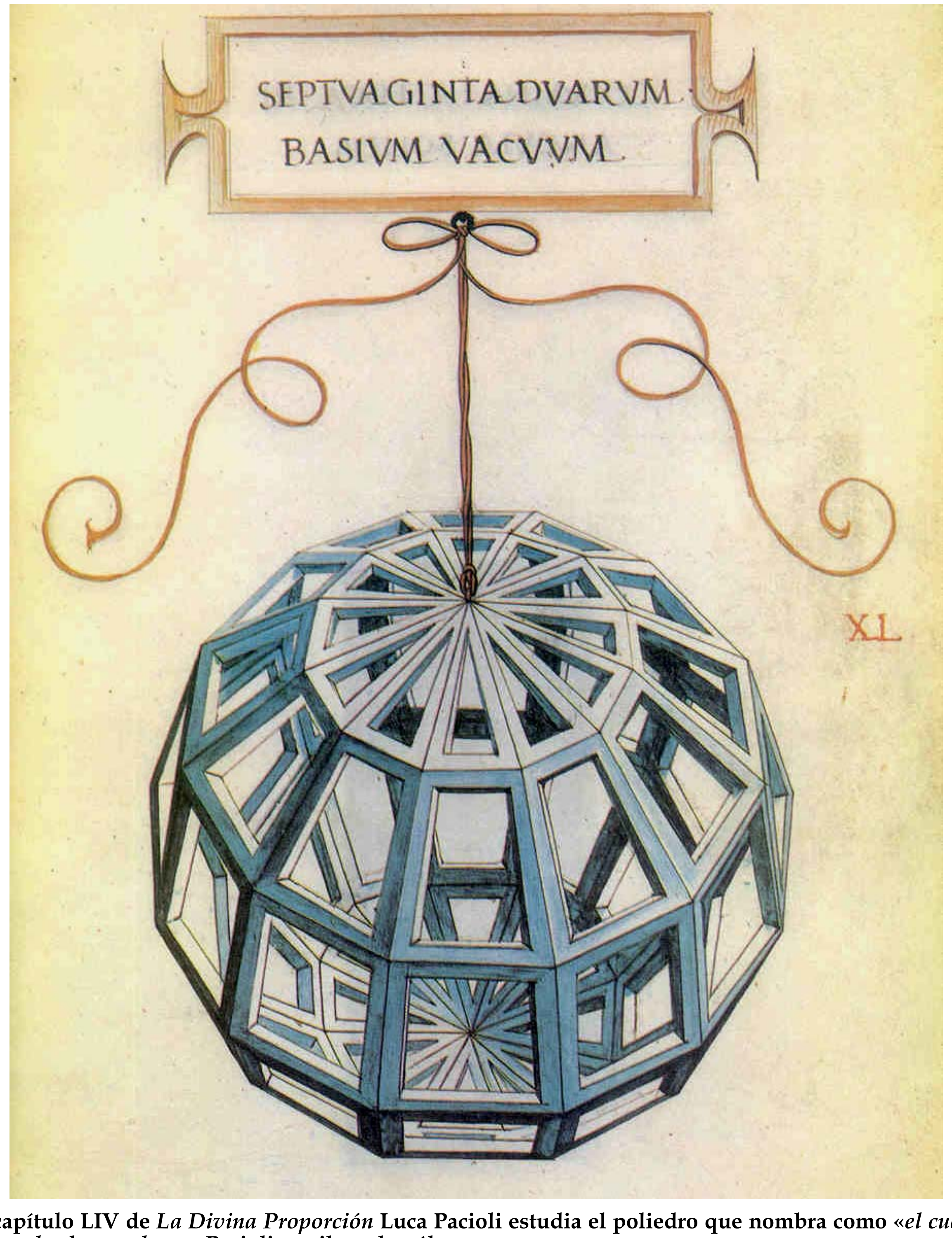


EL DISEÑO DE LEONARDO DEL POLIEDRO DODECAEDRO *ABSCISO, VACIO* Y *ELEVADO* PARA *LA DIVINA PROPORCIÓN* DE LUCA PACIOLI



el poliedro dodecaedro *absciso, vacio* y *elevado* se obtiene a partir del poliedro arquimediano IcosiDodecaedro por «*elevación*», es decir, al añadir a las caras exteriores del poliedro pirámides cuyas caras están compuestas de triángulos equiláteros.

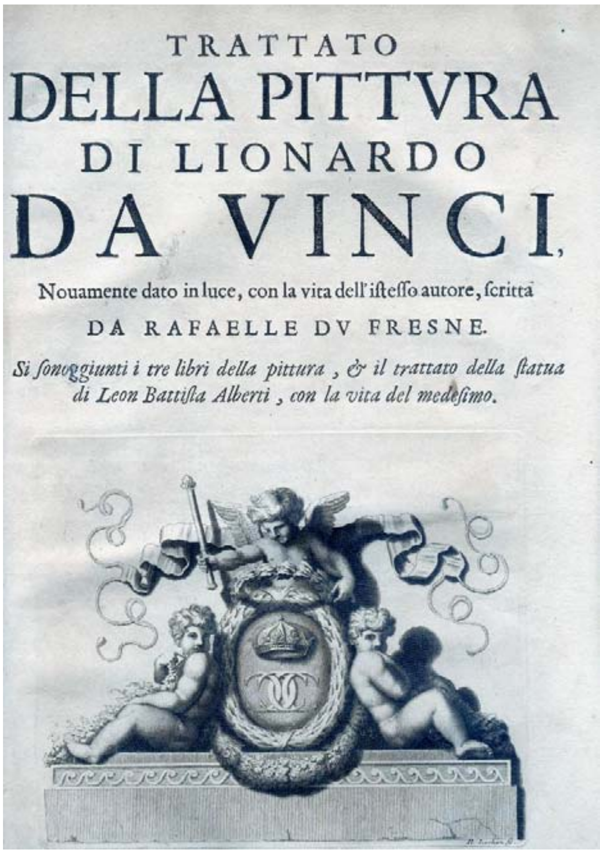
EL CUERPO DE SETENTA Y DOS BASES DISEÑADO POR LEONARDO PARA *LA DIVINA PROPORCIÓN* DE LUCA PACIOLI



En el capítulo LIV de *La Divina Proporción* Luca Pacioli estudia el poliedro que nombra como «*el cuerpo de setenta y dos bases plano*». Pacioli escribe sobre él:

> «*Dicho cuerpo, aunque tiene sus bases planas laterales y angulares y deformes, no se puede decir que dependa o derive de alguno de los cuerpos regulares, sino que se forma y se crea, mediante la figura dodecagonal* [...]. *Cuarenta y dos de sus bases son cuadrangulares, no equiláteras ni equiángulas, y tiene sus dos lados opuestos dirigidos hacia uno y otro polo o cono e iguales entre sí; y sus otras veinticuatro bases son triangulares igualmente no equiláteras; doce de ellas están en torno a uno de los conos y doce en torno al otro, y cada una de ellas tiene dos lados iguales.* [...] *este cuerpo de setenta y dos bases es frecuentemente utilizado por los arquitectos en sus disposiciones de edificios, por ser forma bastante útil, sobre todo cuando hay que hacer tribunas y bóvedas o cielos. Y aunque no siempre en tales edificios se emplean tantas caras, se guían si embargo, los arquitectos por la similitud con dicho cuerpo, tomando una cuarta o una tercera parte de él, en todas las formas, según el lugar y sitio en que quieran colocar su edificio. De acuerdo con ello se encuentran dispuestos y construidos numerosos edificios en distintos lugares, como el inestimable templo antiguo del Panteón, en la capital del mundo,* [...]»

EL *TRATADO DE LA PINTURA* DE LEONARDO



El *Tratado de la Pintura* de Leonardo da Vinci. Primera edición. París, 1651.

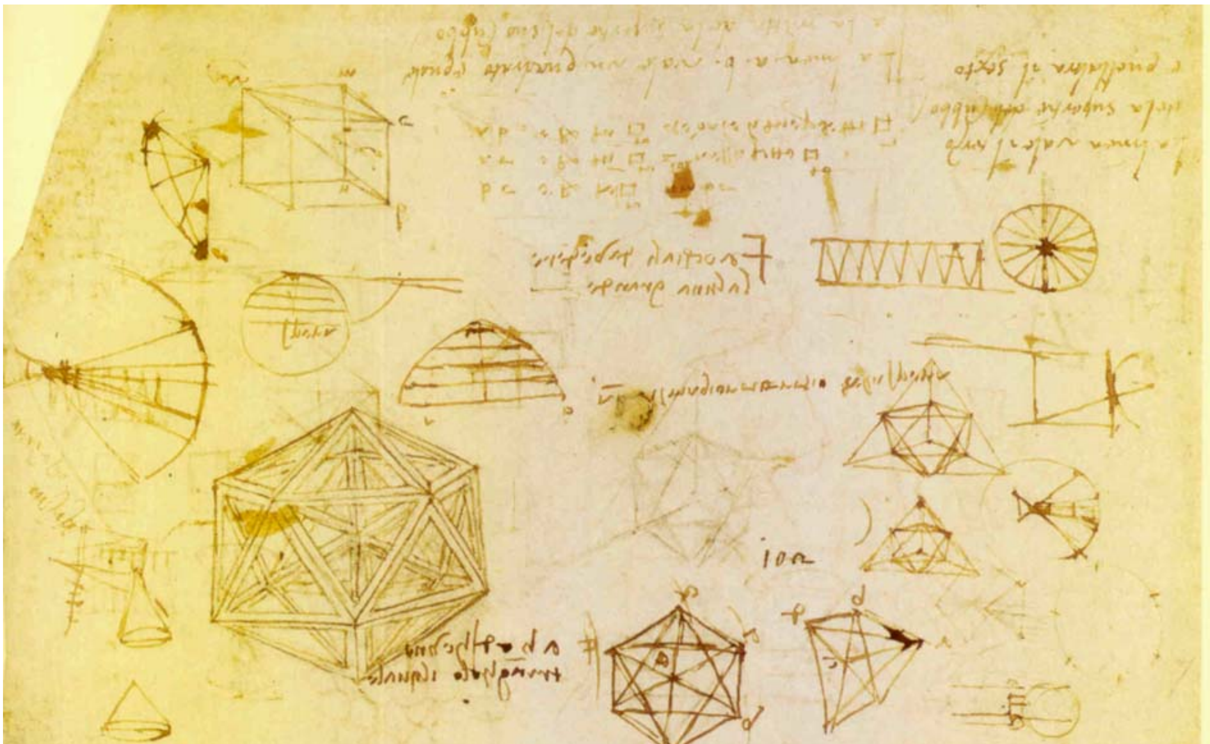
Es probable que algunos escritos de Leonardo quisieran ser apuntes para algunos discípulos, porque de hecho llenó miles de páginas con textos y profusas ilustraciones dibujadas con precisión y todo ello con criterio didáctico.

En una carta de 9 de febrero de 1498, Luca Pacioli comunica a Ludovico Sforza que Leonardo había dado ya fin «*con toda diligencia al digno libro de la pintura y humanos movimientos*». De este presunto tratado sólo se conservan algunos fragmentos, pero nos indica que es posible que Leonardo deseara ultimar algún día una auténtica enciclopedia sobre los más heterogéneos temas que investigó y sobre los que escribió minuciosas notas a lo largo de su vida. El posible empeño de Leonardo vio la luz en París, en 1651, aunque, debido a la dispersión, pérdida y depredación de sus manuscritos, no se sabe muy bien con qué grado de precariedad.

Para Leonardo en la Matemática en general y la Geometría en particular hay que buscar los principales fundamentos del saber, también de los de la Pintura, por eso en su *Tratado de Pintura* aparecen multitud de referencias a las ciencias matemáticas. Entre las más famosas las siguientes:

«*No lea mis principios quien no sea matemático*.» [1]

«*Ninguna humana investigación se puede proclamar verdadera ciencia si no se somete a las demostraciones matemáticas*.» [Parangón, 1]



Estudios de Leonardo da Vinci (1513) sobre la Geometría de los poliedros con especial énfasis en el Cubo y el Icosaedro. Códice Atlántico (f. 518r).

LEONARDO DA VINCI Y LA MATEMÁTICA

Leonardo desarrolló una extraordinaria combinación de Arte, Ciencia y Tecnología en una apasionada actividad teórica y práctica que abarca ampliamente todos los campos del conocimiento. Los textos clásicos y medievales a los que recurre los somete a la verificación de la experimentación mediante el cálculo matemático. Leonardo se aproxima a los textos del saber antiguo y medieval recurriendo al control experimental e imponiendo la justificación matemática como criterio de racionalidad.

Convencido de que el estudio de la Geometría es el fundamento de casi todos los aspectos de la investigación científica y de la interpretación de los fenómenos naturales, Leonardo siente la necesidad de profundizar en la ciencia de Euclides, en cuya complejidad y dificultades se abre camino, hacia 1496, gracias a la ayuda de un eximio matemático de gran experiencia didáctica, Luca Pacioli., con quien, paso a paso, supera, uno a uno, todos las proposiciones de *Los Elementos*. Es más, Leonardo y Pacioli trabajarán juntos en la nueva edición de *Los Elementos* de Euclides que Pacioli publica en 1509, con gran reconocimiento hacia Leonardo por su notable colaboración.

Para Leonardo la Matemática es una de las principales fuentes del saber. Su obra escrita está plagada de alusiones a las ciencias matemáticas, en general, y a cuestiones matemáticas concretas, en particular.

En el mismo comienzo del Proemio del *Tratado de Pintura*, Leonardo hace una declaración de principios (Akal, 2004, [1, p.91] :

> *«No lea mis principios quien no sea matemático»*

una auténtica paráfrasis del cartel que campeaba en el frontispicio de la puerta de la Academia platónica: *No entre nadie ignorante en geometría*».

En algunas notas de 1515 de sus cuadernos, Leonardo afirma :

> *«No existe ninguna certeza cuando no se pueda aplicar alguna de las ciencias matemáticas, o bien alguna de las que están relacionadas con ellas.»*

> *«Mi intención es experimentar en primer lugar, y después a través de la razón matemática, demostrar porqué cada experimento se desarrolla de una forma determinada.»*

En el *Tratado de Pintura* (Akal, 2004) encontramos las siguientes frases:

> *«Ninguna humana investigación se puede proclamar verdadera ciencia si no se somete a las demostraciones matemáticas. Y si alguien dice que las ciencias que empiezan y terminan en la mente son verdaderas, es necesario negarlo por muchas razones antes de que estos procesos mentales no se verifiquen a través de la experiencia, sin la cual nada es por sí mismo cierto.»* **(Parangón, 1, p.32)**

> *«Las verdaderas ciencias son aquellas que la experiencia ha hecho penetrar a través de los sentidos, silenciando la lengua de los litigantes, y que no adormecen a sus investigadores, sino que siempre proceden a partir de verdades primeras y principios notorios; paso a paso pero ininterrumpidamente, hasta el fin; tal como se comprueba en los fundamentos de las Matemáticas, a saber: número y medida o, también, Aritmética y Geometría, que tratan con suma verdad de la cantidad discontinua y continua.»* **(Parangón, 6, p.35)**

> *«De entre las grandes cosas de las matemáticas, más preclaramente ensalza el ingenio de los investigadores la certeza de la demostración»* **(12, p.96).**

Con estas frases, en las que Leonardo subraya el fundamento matemático de todas las ciencias, el genio se sitúa en la antesala de la renovación científica del Renacimiento, preludio de la Revolución Científica de los siglos siguientes.

LEONARDO DA VINCI Y LA MATEMÁTICA

Para Leonardo la Geometría es la ciencia de la cantidad continua:

> «*La Geometría y la Aritmética se interesan por la cantidad continua y discontinua, belleza de las obras de la naturaleza y ornato del mundo*» **(Parangón, 11, p.41),**

El primer principio de la Geometría es el punto sin dimensión (Parangón, 1, p.31). Frente a otros artistas, también de orientación geométrica, como Alberti, que se interesan por la condición sensible de los elementos geométricos, Leonardo como ya antes hiciera Piero della Francesca se limita a considerarlos en su estricta dimensión matemática. A título de ejemplo citemos algunas de sus frases sobre el punto en el ***Tratado de la Pintura*****:**

> «*El punto es único en su origen, pues carece de altura, de longitud y de anchura o profundidad; de donde se concluye que es indivisible y no conoce lugar*» **(41, p.111).**
>
> «*Un punto no es parte de una línea*» **(42, p.112).**
>
> «*El menor punto natural es mayor que todos los puntos matemáticos, lo que se prueba así: el punto natural es una cantidad continua y, como tal, divisible hasta el infinito, en tanto que el punto matemático es indivisible, pues no constituye una cantidad*» **(43, p.112).**

Capítulos importantes del ***Tratado de Pintura*** **son dedicados por Leonardo a estudiar la Perspectiva lineal y las proporciones del cuerpo humano. En ellos, como en otros muchos, Leonardo se plantea demostrar que la pintura es una ciencia que se auxilia de la Matemática. La Perspectiva y la Proporción son para Leonardo los fundamentos científicos del estudio del Arte. En una nota de 1505 escribe:**

> «*La proporción no se encuentra sólo en los números y las medidas, sino también en los sonidos, pesos, tiempos, lugares y en todo cuanto existe.*»

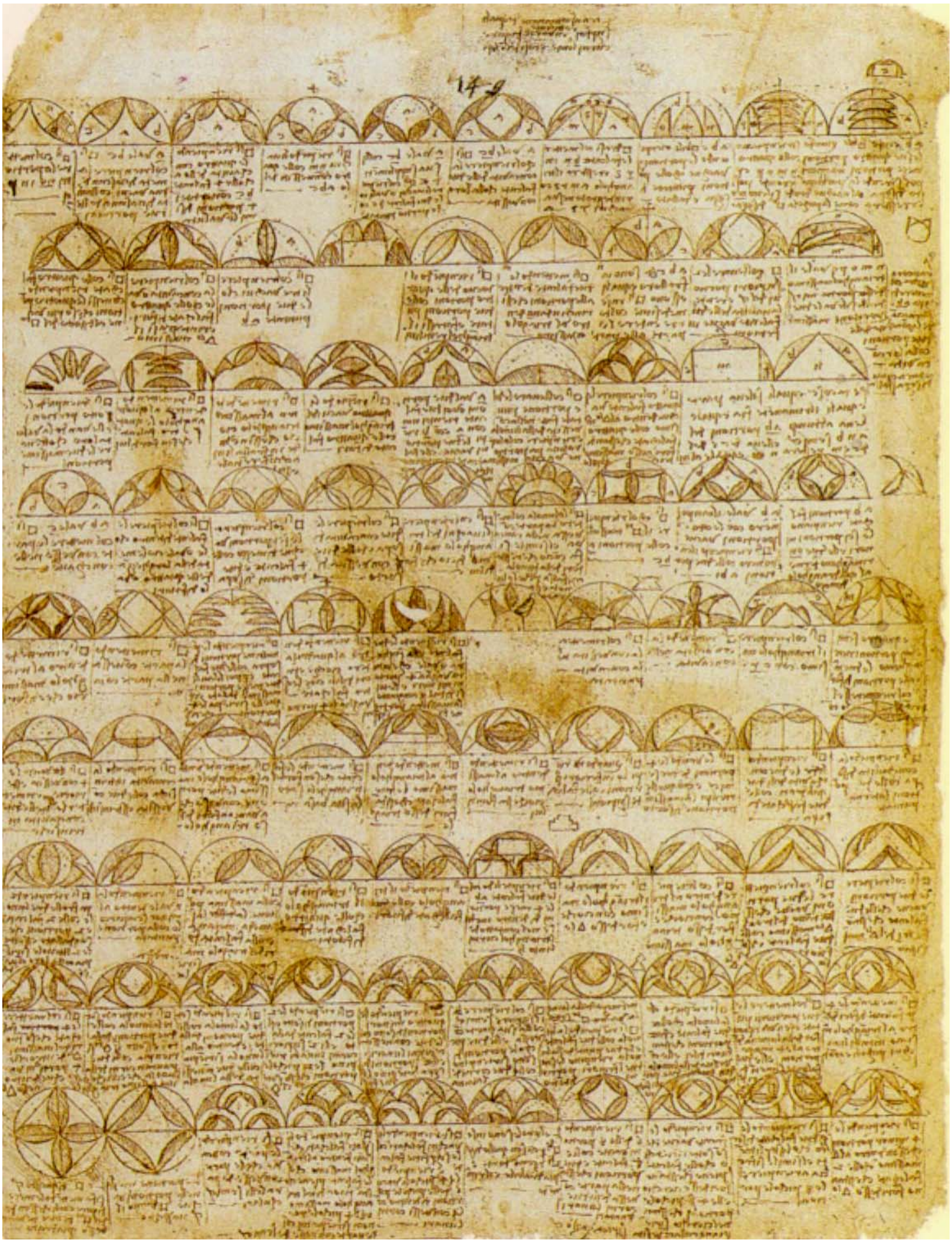
De aquí resulta el enorme interés de Leonardo por la Antropometría, desde la interpretación gráfica del canon de Vitrubio hasta las exhaustivas mediciones y comparaciones modulares entre las diversas partes del cuerpo humano, como si fuesen cuerpos geométricos.

Los vínculos de Leonardo con las Matemáticas y su obsesión por la Geometría alcanzan el paroxismo en sus estudios sobre algunas Obras de Arquímedes. El perfil como matemático e ingeniero–inventor del más grande de los científicos de la antigüedad encajaba fielmente en el espíritu de Leonardo, que no escatimará en sus escritos admiración por la divina sabiduría geométrica y mecánica del siracusano. Por la época de Leonardo aparece una antología de escritos de Arquímedes, dirigida por Gaurico, en la que se menciona a Leonardo como «***muy notable por su ingenio arquimediano*****». Entre los estudios arquimedianos de Leonardo sobresalen las investigaciones sobre espejos parabólicos para aprovechar la energía solar –inspirados en los terribles espejos ustorios que Arquímedes presuntamente habría utilizado en la defensa de Siracusa– pero sobre todo los trabajos sobre** ***La Cuadratura del Círculo*****, en los que Leonardo derrochó ingenio sutil, llegando a escribir en sus notas :**

> «*Y yo cuadro el círculo, excepto una porción tan minúscula como el intelecto sea capaz de imaginar, es decir, como el punto visible*».
>
> «*La noche de San Andrés* **[30 de noviembre de 1504]** *encontré la solución a la cuadratura del círculo, cuando se acababa el candil, la noche y el papel en el que estaba escribiendo; lo concluí al alba.*»

Más allá de la solución a algunos problemas matemáticos de gran trascendencia histórica, la revisión de las investigaciones de Arquímedes por Leonardo fue la oportunidad para actualizar un método geométrico–mecánico de investigación que trasformaría radicalmente la forma de entender el conocimiento científico.

LAS LÚNULAS DE HIPÓCRATES DE QUÍOS EN LOS CUADERNOS DE LEONARDO DA VINCI



Estudios de Leonardo (hacia 1515) sobre las *Lúnulas de Hipócrates*. Códice Atlántico (f. 455r).

En sus estudios sobre la *Cuadratura del Círculo* Leonardo recurre a la enciclopedia científica de Giorgio Vasari (publicada en 1501) para el estudio de las *Lúnulas* de Hipócrates de Quíos (hacia 450 a.C.). El poder calcular ciertas áreas curvilíneas circulares, hechizó de tal modo a Leonardo, que se convirtió en una verdadera obsesión la realización en numerosos escritos de multitud de estudios sobre lúnulas buscando la cuadratura del círculo.

LEONARDO SEGÚN VASARI. PINTURA Y GEOMETRÍA

Retrato de Leonardo en *La vida de los más eminentes pintores, escultores y arquitectos italianos*, de Giorgio Vasari, edición de 1568.

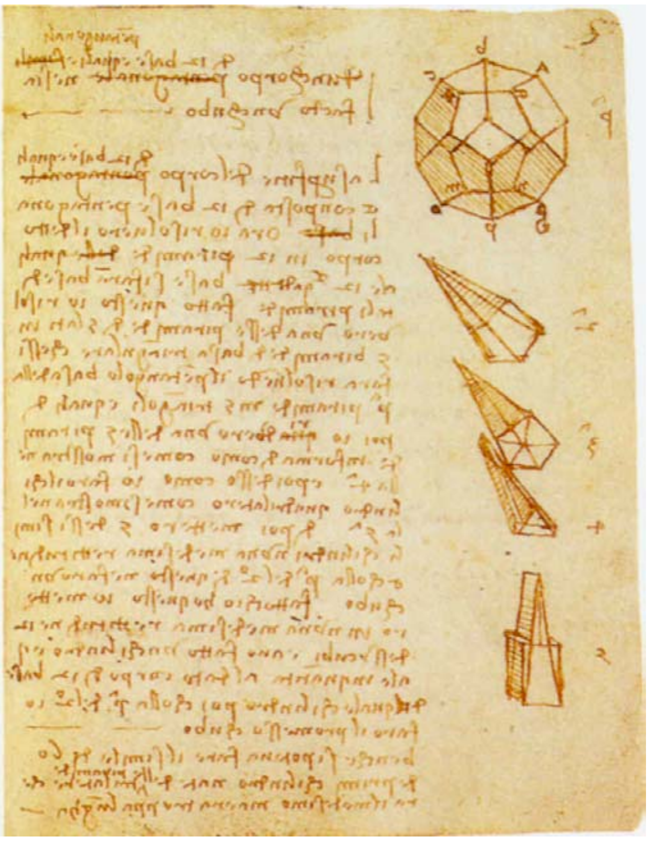
En su famosa obra Giorgio Vasari escribe sobre Leonardo:

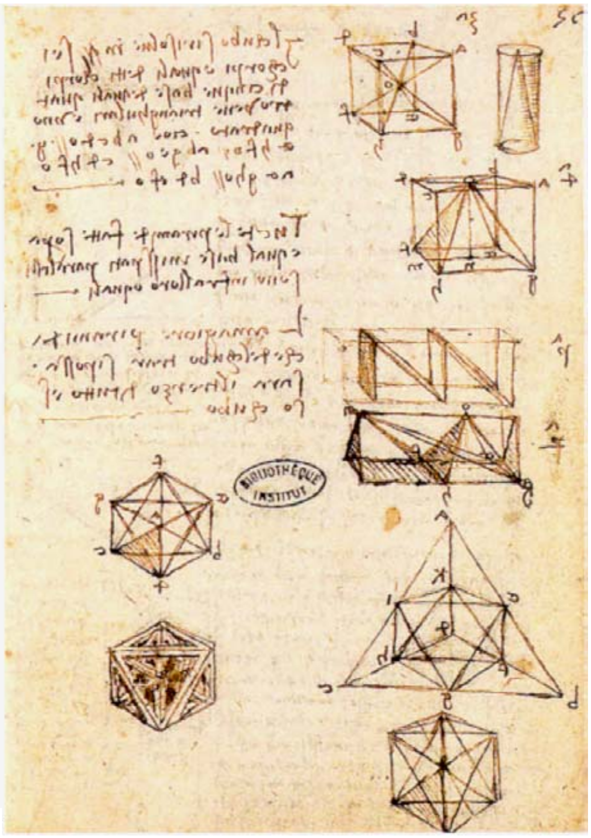
> ***«No ejerció una sola profesión , sino todas aquellas en las que intervenía el dibujo. Y eso contando con un intelecto tan divino y maravilloso que, aun siendo un excelente geómetra, no sólo obró en la escultura y la arquitectura, sino que quiso que su profesión fuera la pintura.»***

Leonardo concibe la pintura como fundamento de todas las ciencias y todas las artes, pero hace depender la divinidad de la Pintura de las certezas matemáticas, las cuales en muchos de sus fragmentos teoréticos parece, a su vez, identificar o depender de las observaciones empíricas. Leonardo hace confundir de forma deliberada en sus escritos experiencia y Matemática, hasta ser utilizadas indistintamente. Pero para Leonardo experimentar es dibujar y dibujar es ejercer de matemático y de geómetra, pues el ojo se enseñorea de todas las ciencias, y las simples proporciones aritméticas que resumen las figuras se convierten en inagotable fuente de analogías. Sobre estas ideas escribe Leonardo en el *Tratado de la Pintura* (Akal, 2004, [Parangón, 27, p.60]):

> ***«La divinidad de la ciencia de la Pintura considera las obras, sean humanas o divinas, limitadas por superficies, esto es por las líneas que son término de los cuerpos. Con tales líneas prescribe al escultor la perfección de sus estatuas, y por el dibujo, que es su principio, enseña al arquitecto a hacer sus edificios gratos al ojo; [...] ella ha inventado los caracteres de que se sirven las distintas lenguas, ha dado las cifras a los aritméticos, ha enseñado el arte de las figuras a la Geometría; ella instruye a los ópticos, a los astrólogos, a los constructores de máquinas y a los ingenieros.»***

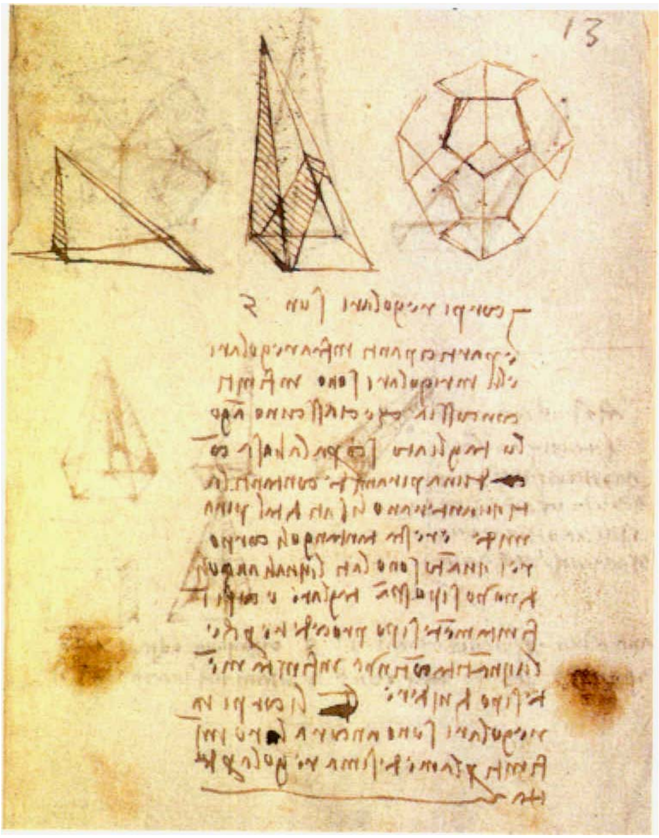
ESTUDIOS POLIÉDRICOS DE LEONARDO

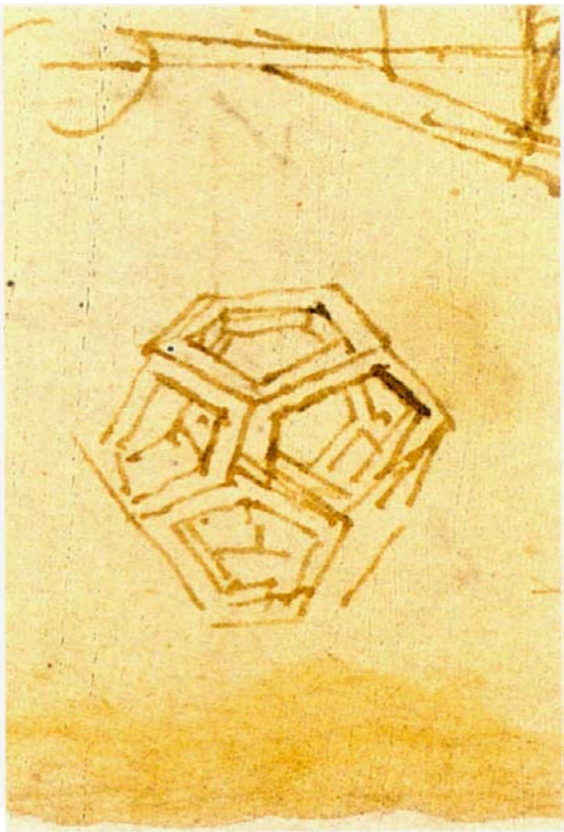




1. Figuras geométricas de Leonardo: Dodecaedro y Pirámide pentagonal (1505). Códice Foster I, (f. 7r).
2. Geometría sólida y Poliedros (1513), manuscrito E, (f. 56r).
3. Hoja de estudios sobre fortificaciones. Boceto de un Dodecaedro (1503). Códice Atlántico, (f. 942v).
4. Geometría sólida y Poliedros (1505), Códice Foster I, (f. 13r).

Leonardo es uno de los pocos artistas que nos ha legado multitud de textos con apuntes que yacían en innumerables notas escritas con su mano izquierda e inteligibles sólo mediante un espejo. Se cree que las tres cuartas partes de los manuscritos de Leonardo –robados, perdidos o vendidos– están desaparecidos.





Poliedros en el *Underweysung der messung* de Durero

Durero ha sido uno de los más importantes matemáticos del Renacimiento. Al orientar su creatividad en Geometría a través de su aplicación matemática al Arte, Durero desarrolla nuevas e importantes ideas y teorías en el ámbito de la propia Matemática.

Para Erasmo, Durero es el «*segundo Apeles*» cuando escribe en *De recta Latini Graecique sermonis*:

> «*Apeles como Durero habría enseñado mil cosas admirables sobre los misterios del arte gráfico sacados de las ciencias matemáticas*».

En el famoso texto de Michel Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et les méthodes en géométrie* (París, 1837, p.529), el gran geómetra del siglo XIX compara a Durero con Leonardo:

> «*El siglo XVI nos presenta a dos célebres pintores, Alberto Durero y Leonardo da Vinci, que merecen ser considerados también entre los geómetras más sabios de su época*.»

Los trabajos de Piero della Francesca y Luca Pacioli sobre poliedros tuvieron una gran incidencia en la posterior Literatura matemática vinculada al Arte, sobre todo la desarrollada por Durero en su obra de 1525 *Underweysung der messung*, recien editado por vez primera en castellano (Durero, Akal, Madrid, 2000), con el nombre de *De la Medida*. Se trata de una especie de enciclopedia geométrica para uso como manual para pintores, redactada por un gran maestro artista-geómetra formado en el cruce de las tradiciones prácticas, artesanas, sabias, artísticas y humanistas, que pretendía dotar a la creación artística de una base científico-geométrica. Es por esto por lo que la obra de Durero es una magnífico manantial de problemas para enseñar y aprender Geometría con acentos estéticos e históricos. Aunque Durero fue un gran admirador de Euclides, los problemas geométricos que trata el *Underweysung der messung* insisten más sobre la construcción que sobre la demostración.

Buena parte del Libro IV de la obra de Durero está dedicada a los poliedros regulares y semiregulares. Durero describe los poliedros regulares en la forma siguiente (Akal, p.295):

> «[...] *cuerpos que son iguales en todo, caras, ángulos y lados, a los que Euclides llama corpora regularia. Él describe cinco, pues no pueden ser otros que los que se inscriben en su totalidad tangentes a una esfera. Éstos, por ser útiles para muchas cosas, son los que quiero mostrar aquí*.»

A continuación, Durero describe, uno por uno, los cinco poliedros regulares, indica el número de caras, aristas y vértices, y representa, por primera vez en la Historia de la geometría, cada uno de los cuerpos por su desarrollo en un plano y por dos proyecciones ortogonales sobre los planos horizontal y vertical, lo que, en alguna medida, es un antecedente de la *Geometría Descriptiva* de Monge. Durero no da la representación de los poliedros en perspectiva, aunque parece ser que en sus manuscritos hay tentativas de hacerlo.

Así por ejemplo, introduce el primer poliedro regular, el Tetraedro, a quien no nombra explícitamente, con estas palabras:

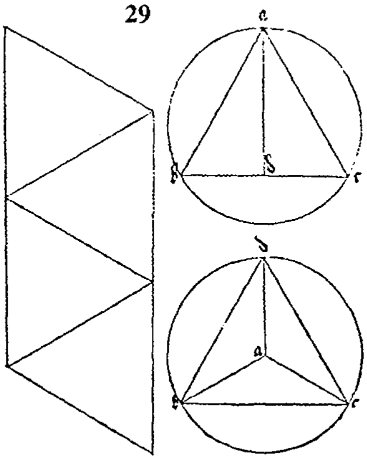
> «*En primer lugar está un cuerpo triangular que tiene cuatro caras planas triangulares de ángulos iguales y seis aristas iguales. Como lo he dibujado a continuación, abierto, cerrado en planta y luego en alzado*.»

Desde luego resultan muy explícitas las nociones de proyección horizontal y vertical como planta y alzado, respectivamente.

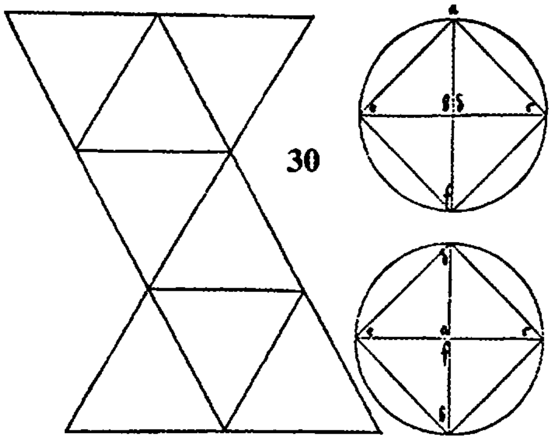
Durero describe de forma totalmente análoga, y de forma repetitiva, el resto de los poliedros regulares, Octaedro, Cubo, Icosaedro y Dodecaedro.

LOS DESARROLLOS Y LAS PROYECCIONES DE LOS SÓLIDOS PLATÓNICOS EN EL *UNDERWEYSUNG* DE DURERO

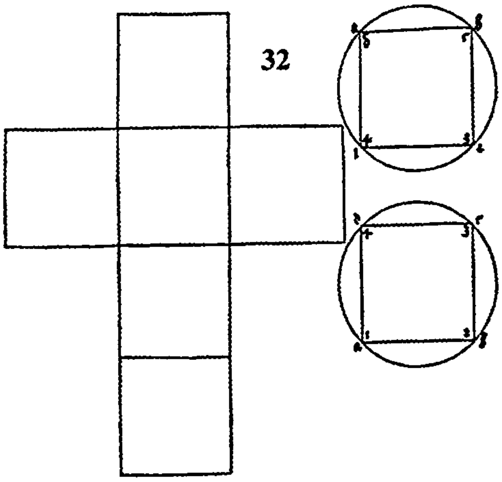
29



30



32



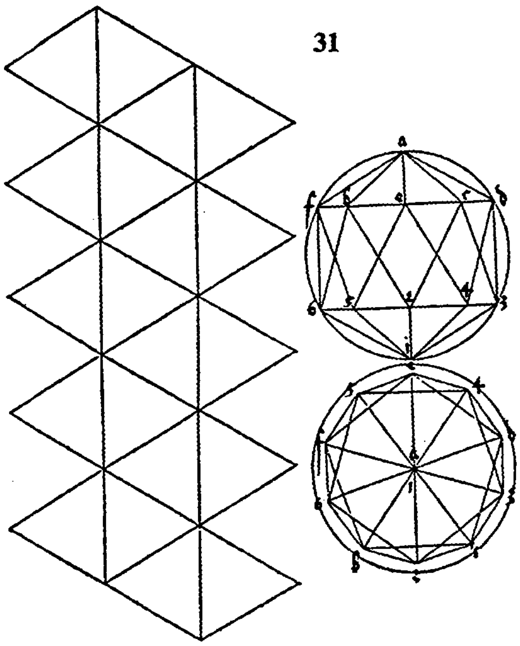
Ilustraciones de Durero de los desarrollos planos y las proyecciones horizontal y vertical de los cinco poliedros regulares –Tetraedro, Octaedro, Cubo, Icosaedro y Dodecaedro–.

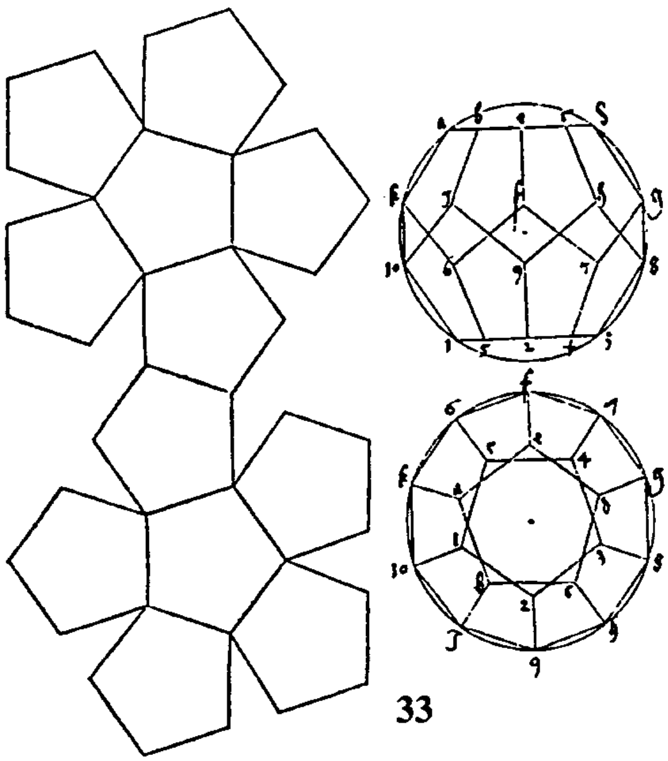
Durero se expresa de forma similar para los cinco sólidos en la forma:

> «[...] *lo he dibujado totalmente abierto, luego cerrado y en planta y otra vez en alzado*».

El desarrollo de Durero permite reconstruir el objeto poliédrico en tres dimensiones: se recorta en papel la red formada por las caras y se pliega a lo largo de las aristas de las caras contiguas. Es el mismo procedimiento utilizado en la escuela para construir los poliedros regulares.

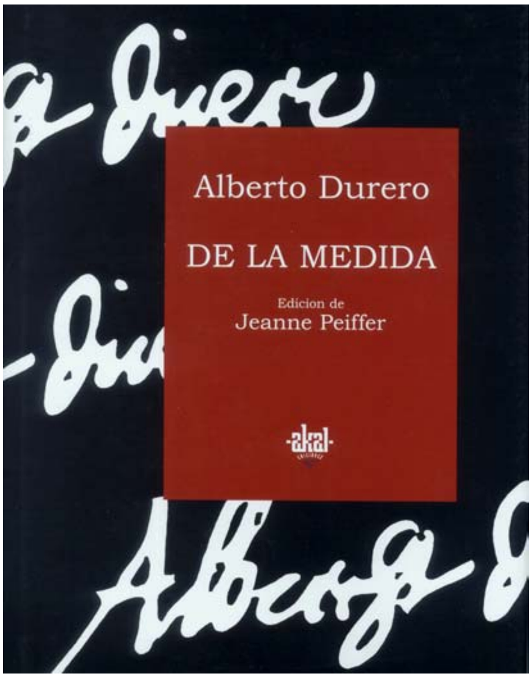
31





33

EL *UNDERWEYSUNG DER MESSUNG* DE DURERO



1. Alberto Durero. Autorretrato de 1498 a los 28 años. Museo del Prado. Madrid.
2. Primera traducción del alemán al Castellano de la obra de Durero *Underweisung der Messung* con el título de *De la medida* (Akal, Madrid, 2000).

En 1525 Durero publica su obra matemática más conocida, el tratado de largo título *Underweisung der Messung mit dem Zirkel und Rich* (*Instrucción para la medida con el compás y la regla de líneas*).

Salvo en lo que se refiere a textos de Aritmética comercial, este tratado es el primer libro de Matemáticas publicado en Alemania, y sitúa a Durero como uno de los más relevantes matemáticos renacentistas. Las fuentes del *Underweisung* son la practica matemática de los artesanos, la matemática clásica de las obras impresas y manuscritos sobre todo de *Los Elementos* de Euclides y de Obras de Arquímedes, Apolonio, Herón y Ptolomeo y los manuales matemáticos de los artistas y estudiosos del Arte italiano del Renacimiento.

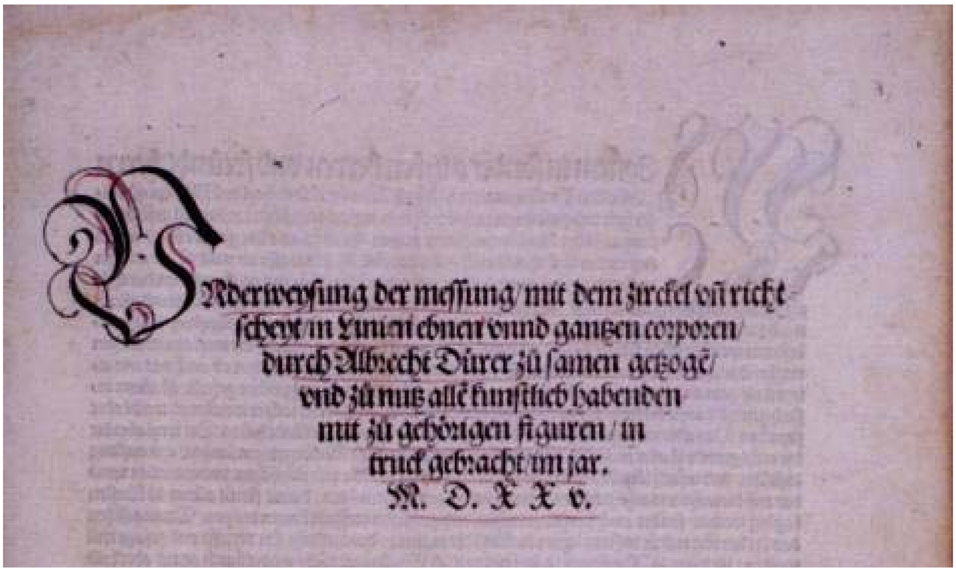
En la dedicatoria de Durero a W.Pirckheimer, a modo de prefacio del trato, Durero escribe (p.130):

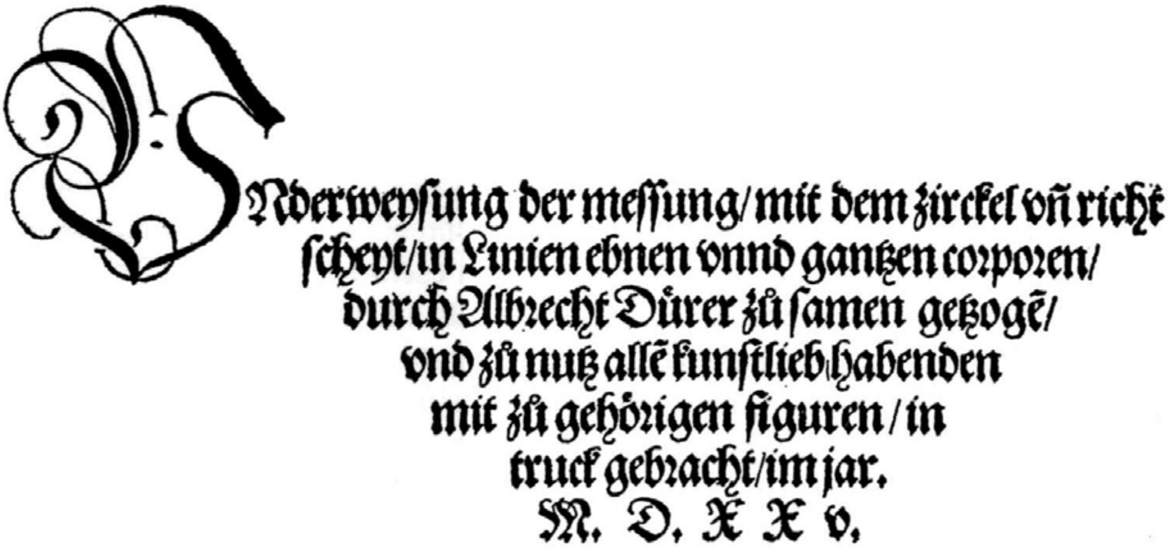
> ***«Al ser la Geometría y el arte de la medida la recta razón de toda pintura, me he propuesto iniciar y dar razón de ello a todos los jóvenes con inquietudes artísticas.* [...].»**

Así pues, el tratado de Durero tiene una misión didáctica de enseñar los rudimentos geométricos a los que pretenden cultivar el Arte. En sí no es, pues, un tratado de Geometría pura, diferenciando, en general, lo que es una prueba apodíctica estrictamente matemática de las construcciones meramente aproximadas de objetos geométricos.

El primero de los cuatro libros describe la construcción de un diverso conjunto de curvas: las tres secciones cónicas, la Espiral de Arquímedes, la Espiral logarítmica, La Concoide de Nicomedes, la Epicicloide, la Hipocicloide, el Caracol de Pascal y otras. En el libro segundo Durero ofrece métodos exactos y aproximados de construcción de polígonos regulares, entre ellos los de 5, 7, 9, 11 y 13 lados y sus derivados (por ejemplo el de 15 lados a partir del pentágono. También estudia los pavimentos del plano y da métodos aproximados para la *Cuadratura del círculo* y la *Trisección del ángulo* con regla y compás. En el libro tercero Durero estudia pirámides, cilindros y otros cuerpos sólidos; ilustra la aplicación práctica de la Geometría a las tareas concretas de arquitectura, ingeniería, decoración, e incluso tipografía, de modo que también construye geométricamente las letras del alfabeto latino y gótico. Finalmente en el libro cuarto Durero estudia los sólidos platónicos y algunos arquimedianos. Además trata el famoso problema délico de la *Duplicación del cubo*, así como la teoría de las sombras y una breve introducción a la teoría matemática de la Perspectiva como arte de representar figuras tridimensionales en un plano a partir de ciertas reflexiones geométricas. Tal como plantea Durero su discusión sobre la Perspectiva, no es una mera disciplina técnica al servicio de la Pintura o la Arquitectura, sino que debe ser una rama importante de las Matemáticas, y efectivamente, a partir de Durero así evolucionó hacia la disciplina matemática que conocemos como Geometría Proyectiva, de la que Durero es, sin duda uno de los principales pioneros.

EL *UNDERWEYSUNG DER MESSUNG* DE DURERO





Instrucción para la medida con el compás y la regla de líneas, planos y todo tipo de cuerpos, reunida por Alberto Durero, en provecho de todos los aficionados al arte

Primera página del Tratado *Underweysung der messung* de Durero, con reproducción en letra gótica del largo título de la obra.

El Libro I del *Underweysung der messung* de Durero empieza con estas palabras:

El muy sagaz Euclides recopiló los fundamentos
de la geometría. Quien los conozca bien, no tiene ninguna
necesidad de lo escrito a continuación, pues sólo
se ha escrito para los jóvenes y para aquellos
a quienes nadie ha instruido con excelencia.

DURERO, ARTISTA Y MATEMÁTICO

Como los artistas–geómetras italianos, Durero estaba convencido de que el nuevo Arte debería ser fundamentado sobre la ciencia, y en particular sobre la Matemática, la más exacta, lógica y gráficamente constructiva de todas las ciencias. Y en efecto, para Durero Italia le ofrecería no sólo nuevas ideas en Arte sino también un mundo donde estaba teniendo lugar un espectacular renacimiento de las Matemáticas. Realizó un primer viaje a Italia en 1494, y aunque en él no pudo contactar con ningún matemático de renombre, sí que trabó relación con Jacopo de Barbari –el presunto autor del famoso cuadro sobre Pacioli con los atributos matemáticos– quien le habló del trabajo matemático del franciscano y de su importancia sobre las doctrinas acerca de la belleza y el Arte. Durero tampoco pudo conocer a Leonardo, pero sí saber de la excepcional importancia que el gran genio de Vinci concedía a las Matemáticas como fundamento, instrumento y vehículo expresivo para el Arte.

De regreso a su ciudad natal, Nuremberg, Durero se siente impelido a comenzar serios y profundos estudios de Matemáticas. Teniendo acceso a la nutrida y valiosa biblioteca de Regiomontano, empieza por *Los Elementos* de Euclides, algunas obras de Arqímedes y *De Architectura* de Vitrubio y se familiariza con los estudios de Alberti y Pacioli sobre Arte y Matemáticas, y en particular con las teorías sobre la proporción. Ello empieza a dar sus frutos en la Pintura a partir de 1500, cuando las obras de Durero muestran una manifiesta influencia de la Teoría matemática de la Proporción. Así se advierte en el famoso autorretrato con *Ecce Homo* de 1500 –donde las dimensiones de la cabeza guardan una estricta proporcionalidad– y sobre todo en el grabado de *Adán y Eva* (1504) donde aplica intrincadas construcciones con regla y compás; también en sus grabados en madera sobre *La vida de la Virgen* (1502–1505), donde, además, impone su dominio de la perspectiva, alcanzado con sus estudios de Geometría. Con estos trabajos Durero adquiere una amplia reputación como artista y como matemático al conjugar de forma equilibrada la perfección estética y los saberes matemáticos cumpliendo un proyecto de inspiración humanista: fundamentar el arte de la Pintura sobre la Geometría para elevar la profesión al rango de *Arte Liberal*.

Entre 1505 y 1507 Durero vuelve de nuevo a Italia, pero esta vez le mueve más aprender las Matemáticas que el Arte de los italianos. A la búsqueda de los secretos matemáticos del Arte, Durero visita en Bolonia a Pacioli y se obsesiona por alcanzar las cumbres del conocimiento matemático, regresando a Alemania con el firme propósito de profundizar en los saberes geométricos y sus aplicaciones a las Artes.

Durero así lo hace, estudia y recopila notas matemáticas que utilizará después en sus trabajos matemáticos, mientras produce destacadas obras de arte, entre ellas la de mayor importancia matemática, *La Melancolía* (1514) un grabado pleno de simbolismo geométrico, matemático y freudiano.

En 1525 Durero publica *Underweysung der messung*, una extensa e intensa enciclopedia geométrica para artistas, con una ingente amplitud temática : estudio de diversas curvas –espirales y hélices, generación de cónicas, la primera sinusoide, el *Folium* de Durero, la Epicicloide, la Concoide, etc.–, Teoría de las Proporciones, división de un arco de círculo –construcción de polígonos regulares–, pavimentos y rosetones, problemas clásicos griegos –Cuadratura del círculo, Duplicación del cubo, Trisección del ángulo–, poliedros –platónicos y arquimedianos–, Perspectiva central, etc.

En 1527 Durero publica *Ettliche underricht*, un tratado sobre fortificaciones que, ante la flagrante amenaza turca, tuvo gran trascendencia militar en la defensa de las ciudades. Con sus métodos de resolver los problemas de proyección y describir el movimiento de los cuerpos en el espacio, puede decirse que Durero anticipa algunos aspectos de la Geometría Descriptiva de Monge.

DURERO, ARTISTA Y MATEMÁTICO

Durero es un gran geómetra, pero debido a su genialidad como artista, grabador y colorista, quizá no se ha valorado suficientemente su faceta de geómetra, que es la fuente de su Arte.

En su estancia en Italia, Durero tuvo una experiencia que le impactó para siempre. Jacopo de Barbari le mostró dos figuras, una masculina y otra femenina, construidas mediante métodos geométricos que no le reveló. Lo hubiera dado todo por conocerlo.

Como artista y como matemático a Durero lo que más le interesa son las teorías sobre la proporción y su aplicación al Arte sobre la que realizó una inagotable investigación personal que culmina en su obra de 1528 *Cuatro libros sobre las proporciones del cuerpo humano*, donde fundamenta su Filosofía de la belleza en la armonía de las proporciones, redundando en el gran principio estético de la antigüedad y del Renacimiento italiano, según el cual «*la belleza consiste en la armonía de las partes entre sí y con el todo*», lo que se llamó *harmonia* en griego, *symmetria* o *concinnitas*, en latín y *convenienza* en el italiano de Alberti, Pacioli, Leonardo, Barbaro y Palladio. Durero lo designa con el polisémico término de *Vergleichung*: «*Lo mismo que cada parte en sí debe ser convenientemente dibujada también su reunión debe crear una armonía de conjunto*, [...], *porque a los elementos armoniosos se les tiene por bellos*».

¿Pero cómo alcanzar una buena proporción? La solución o al menos una aproximación a ella está en la *Geometria* (nombre griego latinizado): «*El error es consustancial con la facultad de conocer*, [...], *pero aquel que apoya su obra en una demostración geométrica y muestra una verdad bien fundada, todo el mundo debe creerlo*, [...], *y es justo tener a ese hombre por un maestro que haya recibido un don de Dios. Y los principios de su demostración son deseables de oír y sus obras aún más agradables de ver*».

El que entiende esta Geometría, según Durero, la ha recibido como «*don de Dios*», el Dios Geómetra que, en lenguaje del *Libro de la Sabiduría* (que cita en diversos pasajes), creó el mundo según «*las leyes de la medida, del número y del peso*». Al ser de esencia divina, esta Geometría es con frecuencia un ideal fuera del alcance de las criaturas que por naturaleza no pueden llegar a tanta perfección, ya que el saber geométrico de que disponen tiene un contenido cognitivo limitado. Pero cuanto más se sepa mejor «*porque uno se hace más semejante a la imagen de Dios que todo lo sabe*» aumentando el poder creador del *artista-geómetra*. Además, «*el que enseña a los otros lo que ha aprendido, obra bien, porque en ello sigue la voluntad de Dios, por quien nosotros sabemos*».

Durero distingue una Geometría demostrativa, euclidiana *Geometria* –en latín– y una Geometría constructiva –la *Messung*–, que enseña reglas y métodos. La diferencia entre los conceptos abstractos de la *Geometria* y los objetos visibles y extensos de la *Messung* queda patente en Durero cuando considera junto a la definición euclidiana de punto como elemento geométrico sin tamaño –sin longitud, ni anchura ni grosor–, como hacía Leonardo en el *Tratado de la Pintura*, una realización práctica «*como un diseño hecho con la punta de una pluma*». La Geometría, al demostrar, hace partícipe al artista–geómetra de la verdad divina, pero no se puede demostrar todo, por lo que debemos auxiliarnos del *Arte de la Medida*, adquiriendo una sólida experiencia contemplando la naturaleza y operando medidas empíricas sobre ella «*porque en verdad el Arte* [es decir, el saber], *se encuentra encerrado en la naturaleza; el que sabe extraerlo de ella, lo posee*,[...] *y gracias a la Geometría, puedes demostrar la justeza de muchas cosas en tu obra*. [...]. *Si te has instruido en la teoría y la práctica, el arte adquirido ha dotado a tu ojo de un justo sentido de la medida*».

Según Durero la práctica de las construcciones geométricas forma el ojo y el espíritu del artista-geómetra y le proporciona la seguridad «*que hace la mano obediente*».

El Libro IV del *Underweysung* de Durero prosigue con el estudio de los poliedros irregulares, algunos de ellos arquimedianos (siete en la edición de 1527 y nueve en la póstuma de 1538) y lo hace de manera bastante diferente a los estudios de Piero della Francesca y Luca Pacioli. Mientras Piero sólo trunca cada uno de los poliedros regulares y Pacioli obtiene de cada sólido platónico el cuerpo truncado y el elevado (no necesariamente arquimediano) que se obtiene al añadir una pirámide de caras equiláteras a cada una de las caras, y después representa en perspectiva los diversos cuerpos, primero macizos y luego vaciados, sobre figuras bellamente diseñadas por Leonardo, Durero se conforma con dar los desarrollos planos de los sólidos, después de describir sus elementos geométricos –caras, aristas y vértices–. Lo que interesa a Durero es su sencilla construcción – a partir de estos desarrollos planos–, tal vez inspirado en los modelos de diversas colecciones de poliedros construidas por Pacioli, que circularon por Italia coincidiendo con la estancia de Durero en esa tierra.

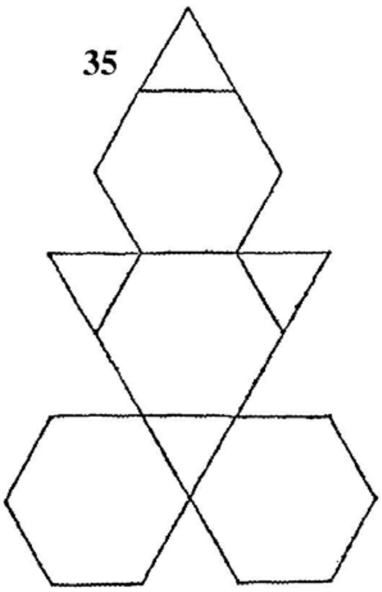
Además, Durero como otros artistas del Renacimiento difunde la idea de que los poliedros son modelos de gran valor artístico y por ello merecen la atención de todo artista (Akal, 304):

> «*Con estos elementos* [los poliedros irregulares]*, intercambiando sus partes, se pueden hacer muchas cosas que sirven para la talla de columnas y sus adornos*.»

Durero presenta estos sólidos de la siguiente forma (Akal, p.299):

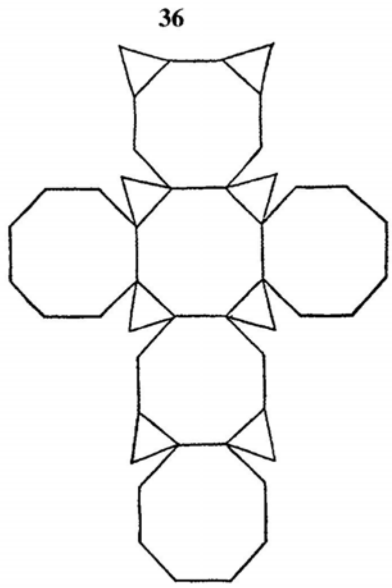
> «*Se pueden hacer otros muchos cuerpos hermosos, que, aunque también tocan con todos sus vértices a una esfera hueca, tienen caras desiguales. A continuación quiero dibujar algunos de ellos completamente abiertos, para que cada cual pueda montarlos por sí mismo. Quien quiera hacerlos, dibújelos a mayor tamaño en un papel doblado y, con un cuchillo afilado, corte por un lado el contorno en uno de los pliegos de papel. Una vez retirado el papel restante, se formará el cuerpo doblando por los trazos marcados. Presta, pues, atención a los siguientes diseños, ya que tales objetos son útiles para muchas cosas*.»

A continuación, Durero describe uno por uno hasta ocho de estos cuerpos:



«El primer cuerpo, cuyos planos no son todos iguales entre sí, tiene cuatro caras hexagonales y cuatro triangulares, pero las aristas son todas de la misma longitud. Y cuando este cuerpo. que está abierto, se monta, tiene doce vértices y dieciocho aristas.»

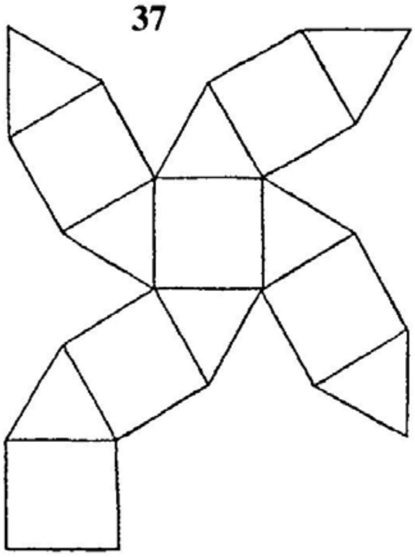
Es un Tetraedro truncado.



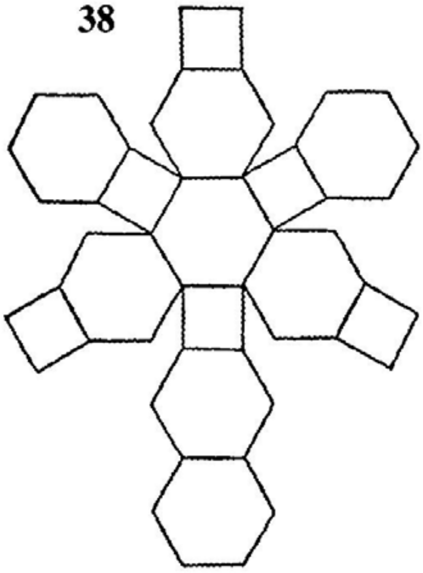
«El segundo cuerpo irregular tiene seis caras octogonales y ocho triangulares. Cuando se monta este cuerpo, que está dibujado abierto, tiene veinticuatro vértices y treinta y seis aristas.»

Es un Cubo truncado.

37



38

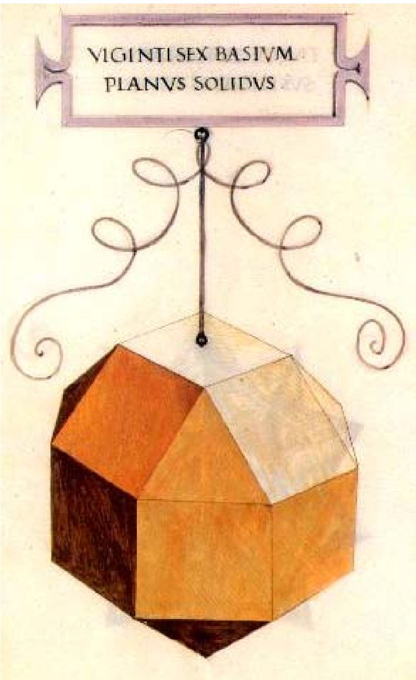


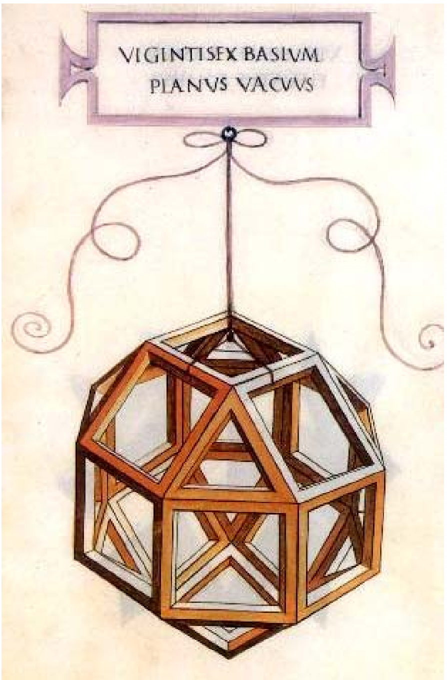
«*El tercer cuerpo irregular tiene seis caras cuadradas y ocho triangulares. Cuando se monta este cuerpo, que está abierto, tiene doce vértices y veinticuatro aristas*.»

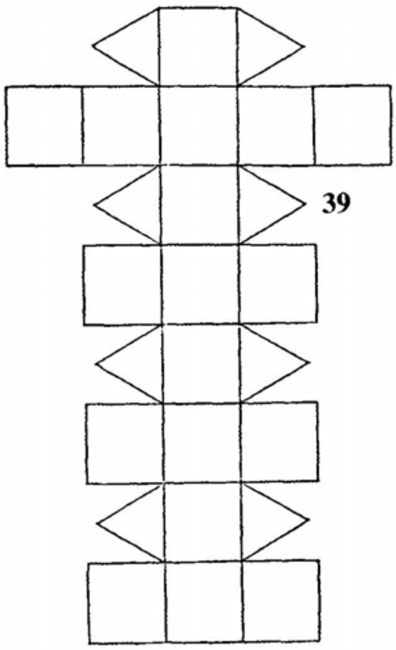
Es un CuboOctaedro.

«*El cuarto cuerpo tiene, abierto, ocho caras hexagonales y seis cuadradas. Cuando se monta, el cuerpo tiene veinticuatro vértices y treinta y seis aristas*.»

Es un Octaedro truncado.







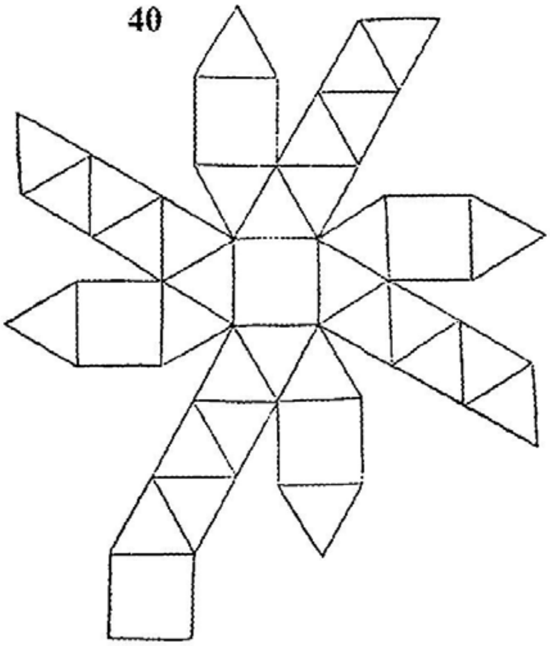
39

Diseños de Leonardo para *La Divina Proporción* del RombiCuboOctaedro macizo (*solidus*) y vaciado (*vaccus*), poliedro arquimediano muy caro a Luca Pacioli.

A la derecha, el desarrollo plano de este poliedro en el Libro IV de *Underweysung* de Durero (Akal, p.301):

> «*El quinto cuerpo, cuando está abierto, tiene dieciocho caras cuadradas y ocho triangulares. Cuando se torna un cuerpo con ellas, tiene veinticuatro vértices y cuarenta y ocho aristas.*»

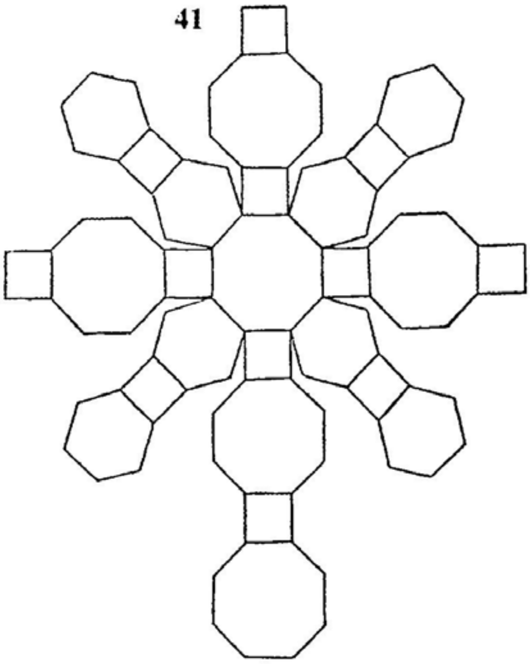
40



«*El sexto cuerpo, cuando está desplegado, tiene seis caras cuadradas y treinta y dos triangulares. Cuando se monta, tiene veinticuatro vértices y sesenta aristas.*»

Es un Cubo doblemente truncado (llamado también Cubo redondeado).

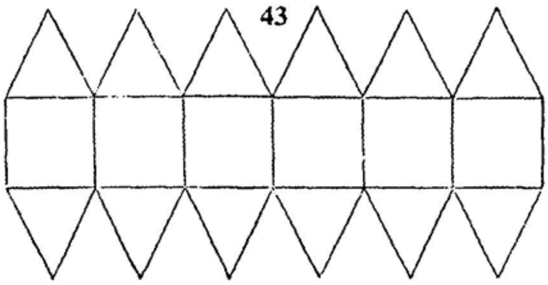
41



«*El séptimo y siguiente cuerpo, cuando está abierto, tiene seis caras octogonales y ocho hexagonales y doce cuadradas, y cuando se monta, tiene cuarenta y ocho vértices y setenta y dos aristas.*»

Es un RombiCuboOctaedro mayor (llamado también CuboOctaedro truncado).

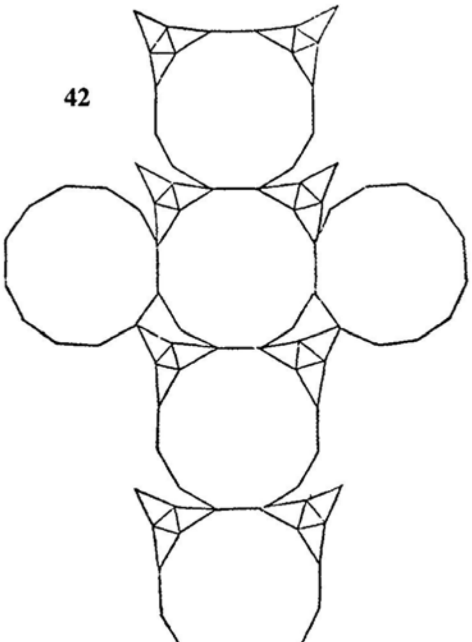
43



«*Si yuxtapones seis cuadrados y doce triángulos cada uno de los cuales sea tan alto como el lado de un cuadrado, y lo armas todo, se obtiene un cuerpo tal como el que está dibujado abierto.*»

Este desarrollo no se puede cerrar y por tanto no corresponde a un poliedro arquimediano.

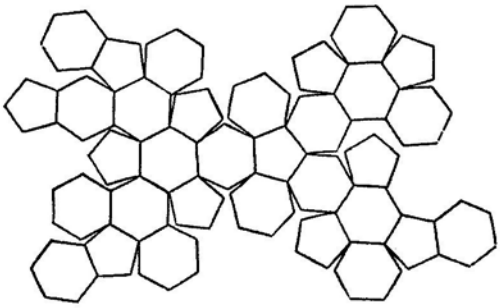
42



«*El octavo cuerpo hazlo de seis caras dodecagonales, entre las cuales hay treinta y dos triángulos; no tienen todos los lados de la misma longitud, tal como está dibujado abierto.*»

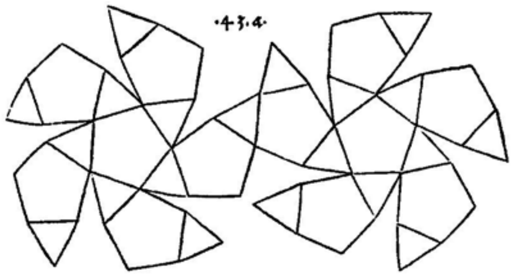
Los polígonos de este desarrollo no son regulares, por tanto no podrían formar un poliedro arquimediano. Durero intenta dibujar el desarrollo de un poliedro que resulte de truncar un cubo truncado, pero comete un error muy significativo. Resulta que en ocho de los vértices (los de la parte superior izquierda y derecha de los cuatro dodecágonos centrales) sus ángulos planos concurrentes suman exactamente 360°, por tanto, según la Proposición XI.21 de *Los Elementos* de Euclides, no se puede formar el ángulo sólido, es decir, no se puede plegar los polígonos para formar el vértice del poliedro.

La edición póstuma de 1538 del *Underweysung* de Durero añade dos nuevos poliedros arquimedianos :



«Haz también otro **[cuerpo]** *de veinte caras hexagonales planas, equiláteras y equiángulas, a las cuales se añaden doce caras planas, pentagonales, cuyos lados son iguales a los de las caras hexagonales, que, en sí, sean equiángulas y estén unidas según buen orden, como he representado abierto en el plano que se encuentra aquí abajo. Cuando unimos todo esto, tendremos un cuerpo que contará con sesenta y dos vértices y noventa aristas. Este cuerpo toca con todos sus vértices el interior de una esfera hueca.»*

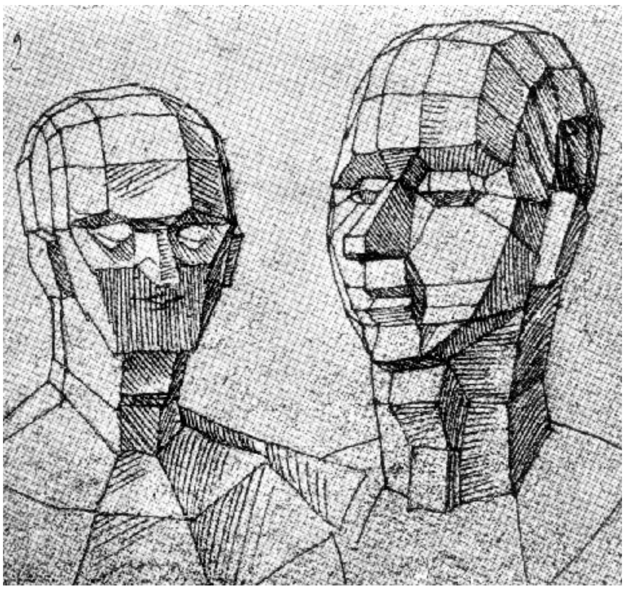
Es un Icosaedro truncado.



«Haz otro cuerpo de doce caras planas pentagonales y veinte caras planas triangulares tales que cada cara tenga ángulos interiores iguales. Cuan do las reúnas todas, tendrás un cuerpo de treinta vértices y sesenta aristas, como he representado abierto en el plano de debajo. Este cuerpo toca también con todos sus vértices el interior de una esfera hueca.»

Es un IcosiDodecaedro.

DURERO ¿PRECURSOR DEL CUBISMO A TRAVÉS DE LOS POLIEDROS?



Durero. Cabeza de hombre (*Cuaderno de Dresden*).

M.Ghyca titula de forma anacrónica a esta lámina «*estudio cubista*» (*Estética de las proporciones en la Naturaleza y en las Artes*. Poseidón. Barcelona, 1983, p.189), como admitiendo la influencia estética de las concepciones poliédricas sobre el Cubismo.

Durero acaba el estudio de los poliedros con el siguiente texto (Durero, Akal, p.304)

> *«Si a los cuerpos que se acaban de hacer se les quitan sus vértices con unos cortes limpios y posteriormente se vuelven a quitar los vértices restantes, se pueden realizar diversos tipos de cuerpos.»*

En relación con estas palabras, Durero pudo ser fascinado, además, por una idea que desarrolla Pacioli en el Capítulo LV de *La Divina Proporción* (Pacioli, Akal, p.102):

> *«No me parece conveniente* **[...]** *extenderme más sobre dichos cuerpos* **[poliedros]** *pues su desarrollo tiende hacia el infinito por el continuo y sucesivo corte de su ángulos sólidos, según el cual se multiplican sus diversas formas.»*

Si se truncan los ángulos de un poliedro y se sustituyen por facetas, se obtienen cuerpos de complejidad creciente que pueden proporcionar una aproximación a los cuerpos delimitados por superficies curvas cualesquiera como las que conforman el cuerpo humano. El Neoplatonismo renacentista vigente, bajo el impulso de Marsilio Ficino, abonaría la idea de origen platónico, según la cual no sólo los entes materiales, sino también toda criatura, por designio divino, estaría compuesta por combinaciones poliédricas. A partir de esta idea se puede comprender el gran interés que los artistas y teóricos renacentistas prestaron al estudio de los poliedros.

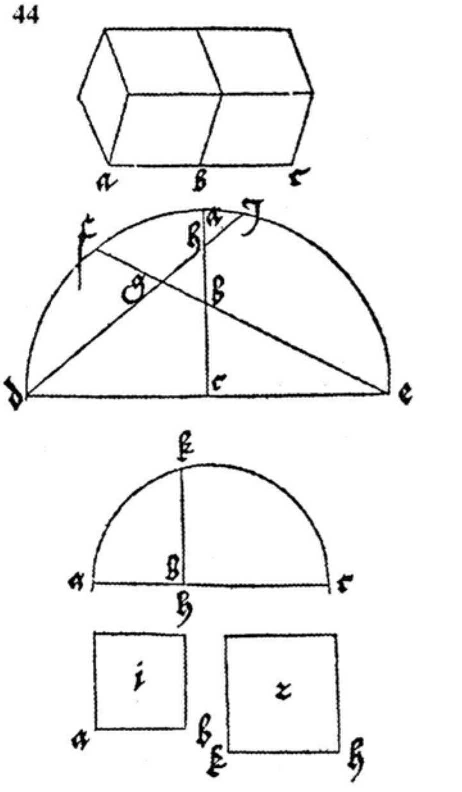
De hecho, Durero intentará, una y otra vez, representar el cuerpo humano y sus posiciones en movimiento, encerrando sus miembros en cuerpos regulares o derivados de ellos; por eso estudia la manera de ponerlos en perspectiva y de construir su sombra. A ello se aplica al final del *Underweysung*, donde enseña cómo construir el dibujo en perspectiva de un cubo con su sombra, iluminado y situado sobre un plano horizontal.

EL PROBLEMA CLÁSICO DE LA DUPLICACIÓN DEL CUBO
EN EL *UNDERWEYSUNG* DE DURERO

(Durero, Akal, 2000, pp.304–305)

En una ocasión en que la ciudad de Atenas padeció la epidemia de la peste, los ciudadanos consultaron al ídolo Apolo sobre el modo en que podían librarse de ella. Él les respondió que quedarían salvados cuando doblaran su altar. Así que mandaron hacer una piedra del mismo tamaño que el altar y la pusieron encima. Mas como la peste no cesara, volvieron a preguntar al ídolo por qué pasaba esto si ellos habían cumplido su mandato. Les respondió que no habían actuado como les había mandado, sino que habían hecho el altar bastante mayor del doble. Y como sus artífices no supieran encontrar el modo en que debían hacerlo, pidieron consejo a los sabios y en especial al filósofo Platón, que les enseñó cómo hallar entre dos líneas dadas de desigual longitud otras dos que guardasen la proporción respecto a ellas. De este modo podrían duplicar, triplicar e ir aumentando y ensanchando cada vez más *el cubum,* esto es, un cuerpo cuadrangular como un cubo. y todas las demás cosas. Como este arte, ocultado y tenido en gran secreto por los sabios, es muy útil y sirve a todos los trabajadores, quiero sacarlo a la luz y enseñarlo, pues con él se pueden fundir bombardas y campanas, duplicándolas y aumentándolas como se quiera, siempre con su correcta proporción 114 y manteniendo su peso. Con él se pueden, asimismo, agrandar toneles, arcas, medidas, ruedas, habitaciones, cuadros y lo que se quiera. Presten, por tanto, atención todos los artífices, porque, en lo que yo sé, hasta el día de hoy nunca se había descrito en lengua alemana .

44



Primero junta dos cubos iguales *abc.* Pon esta misma longitud *ac* en vertical sobre una horizontal *de* formando ángulo recto, y desde el centro *c* traza un semicírculo *dae.* A continuación traza una línea recta desde *e* hasta la circunferencia pasando por *b*; pon una *f*. Toma luego una regla estrecha, marca en ella un punto central y gradúala a ambos lados con números, y pon los números tanto en un lado como en el otro, de modo que a cada lado del centro el primer número sea uno. Moviendo la regla tienes que encontrar la primera línea con la que se debe hallar la del cubo doble. A continuación pon uno de los extremos de la regla que acabamos de hacer en el punto *d* y déjalo siempre allí, ya se desplace hacia arriba o hacia abajo. Si mueves la otra parte de la regla, deja siempre la regla con su centro en la línea *abc,* y muévela hasta que encuentres un punto central entre la línea *ef* y la circunferencia ; donde la regla móvil corte la línea *ef,* pon una *g*, y donde corte la línea *abc,* pon una *h,* y donde la susodicha regla toque la circunferencia, pon una *i*.

Con *gh y hi* se obtienen, de este modo, dos longitudes iguales. *hc* es la primera línea encontrada, con la que se hallará el lado del cubo doble. A continuación haz una línea horizontal con *hc y* el lado *ab* del cubo simple, obteniendo *ahc.* Pon el brazo de un compás en el centro de *ac* y traza un semicírculo *ac.* Desde *h* dibuja una vertical hasta la circunferencia, y pon allí una *k*. Esta línea *kh te* proporciona un lado del cubo doble, como lo he dibujado.

EL GRABADO *LA MELANCOLIA* I DE DURERO

EL grabado *La Melancolía* I de Durero (1514). 239x189. Museo Británico.

Debido a la multiplicidad de objetos de carácter geométrico, el famoso grabado *La Melancolía* I de Durero tiene un gran simbolismo matemático –en particular poliédrico–, pero también posee un poderoso significado freudiano y un gran contenido místico y mágico.

***La Melancolía* I de Durero es una de las representaciones más originales, curiosas, emocionantes, misteriosas y enigmáticas de la iconografía universal, en la que cada objeto del cuadro tiene un simbolismo de lectura e interpretación muy problemática, que en conjunto ofrece una compleja alegoría sobre la actividad intelectual y artística desde perspectiva de la Filosofía del Renacimiento**

EL GRABADO *LA MELANCOLIA* I DE DURERO

La estampa de *La Melancolía* I de Durero representa en un ámbito nocturno, sombrío, frío y solitario, a un personaje sentado en un banco de piedra –una mujer con alas de ángel–, en estado meditabundo, pensativo, absorto, ensimismado y aparentemente ausente –sus enormes ojos están abiertos y fijos, con expresión sombría y triste–, reclinado sobre el puño cerrado de la mano izquierda, mientras ocupa la otra mano –que reposa sobre un libro cerrado– con un enorme compás. Sobre el muro del edificio hay una balanza, un reloj de arena, una campana y un cuadrado mágico con números. Al lado, una escalera apoyada en la pared con siete peldaños –como siete son los pilares de la sabiduría–. En el suelo hay herramientas de carpintería y arquitectura, un tintero, una pluma y dos objetos geométricos –una esfera de madera torneada y un poliedro de piedra perfectamente labrada–. Por un lado tenemos la sombra que proyecta la luna sobre los objetos, y por otro el brillo de un cometa que, como símbolo maléfico esta encerrado en un arco iris lunar que llega a proyectar una extraña luz que ilumina el título del grabado –MELENCOLÍA I– en un cartel que lleva un murciélago. La soledad vital de Melancolía es acompañada por un tristón angelote y un perro famélico dormido a sus pies.

El complejo conjunto del grabado está dominado por la idea de concentración del hombre como ser pensante que afronta el devenir de su existencia, que ha de recluirse en el retiro del intelectual para alcanzar la luz de la sabiduría y que tiene la capacidad del Arte a través de su *imaginación melancólica*. Melancolía es la personificación de la virtud intelectual del genio profano en el mundo racional e imaginario de la Ciencia y el Arte. Melancolía representa al artista, que posee el conocimiento y la técnica para crear, pero cuya inspiración a veces se resiste a levantar vuelo, aunque para eso tiene las alas que adornan su espalda, símbolo de la imaginación y la creatividad y manifestación de su superioridad intelectual. He aquí una compleja alegoría sobre la actividad artística e intelectual en el marco de la Filosofía del Renacimiento

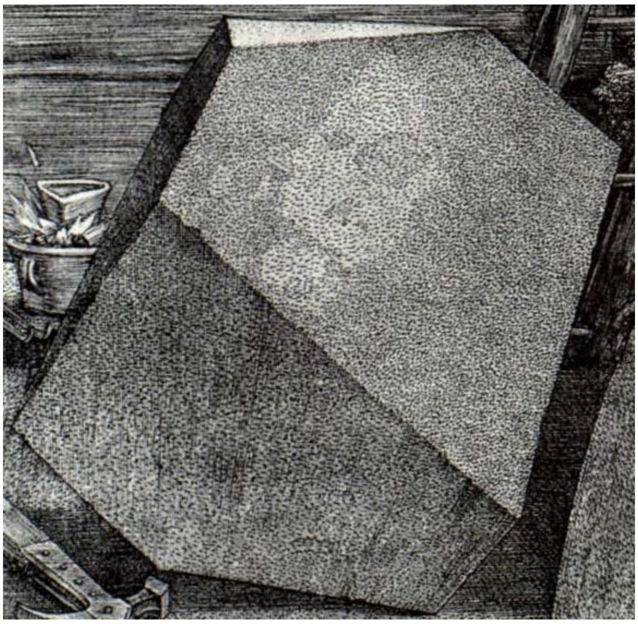
Durante el Renacimiento se asociaba la melancolía con el temperamento artístico, la imaginación y la creatividad, según las ideas vertidas por Agrippa de Nettesheim en *De Occulta Philosophia*, texto esotérico que, aunque publicado en 1531, era conocido en círculos intelectuales en versión manuscrita a partir de 1510. Agrippa habla en su obra de tres tipos de melancolía: la *melancolía imaginativa*, la *melancolía mental* y la *melancolía racional*. La primera sería la que afectaría a los artistas, lo que explica el I del título del grabado, *Melancolía* I, que representaría el carácter imaginativo de los artistas. No sabemos si Durero se proponía completar un programa artístico que incluyera a los tres tipos de melancolía. Bajo esta interpretación, mantenida por diversos exégetas, Durero intelectualiza la melancolía y la asocia al Arte, a través de una intrincada reflexión, la más compleja y profunda de las realizadas por Durero en torno a la personalidad del artista. De forma que no es extraño que el grabado *La Melancolía* se haya podido considerar como su último autorretrato –esta vez alegórico– dentro del lenguaje simbólico propio del Renacimiento.

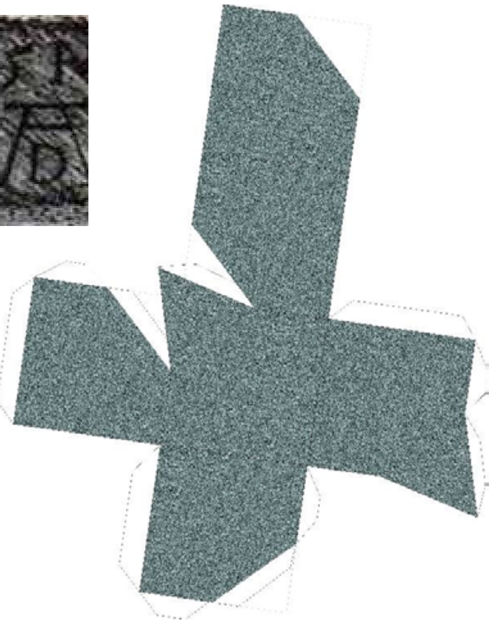
Este análisis también explicaría que la representación de Durero esté rodeada de diferentes objetos, unos (compás, esfera, poliedro) son atributos de la Geometría de los artistas, síntesis de las Artes Liberales y otros (martillo, clavos, serrucho, cepillo de carpintería, cincel, ...) instrumentos de las artes mecánicas y constructivas de los artesanos.

En cuanto al simbolismo matemático y geométrico, concretamente en el grabado aparecen los siguientes elementos:

- **El Compás de geómetra, instrumento de la proporción geométrica, fundamento de la belleza.**
- **La Esfera como símbolo cósmico que encierra los poliedros, componentes platónicos últimos de la naturaleza.**
- **El Poliedro irregular como objeto de enorme interés artístico.**
- **El Cuadrado mágico pleno de simbolismo aritmético y cronológico.**
- **El Infinito simbolizado en el punto de fuga de la perspectiva en la cabeza del cometa.**
- **La Balanza, símbolo de la proporción matemática.**
- **Reloj de arena, símbolo del tránsito inexorable del tiempo.**

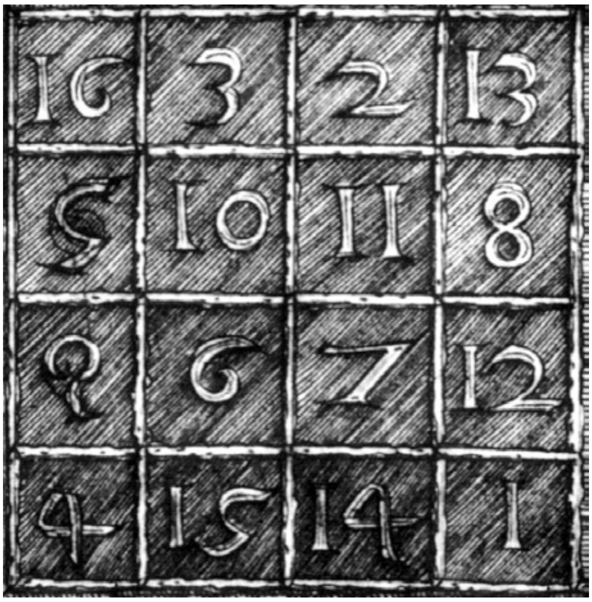
EL SIMBOLISMO MATEMÁTICO DE *LA MELANCOLIA* I DE DURERO





El poliedro irregular de *La Melancolía* de Durero y su presunto desarrollo plano.

El poliedro irregular es uno de los objetos más notorios de *La Melancolía* de Durero. Debido a su posición, no se puede saber con exactitud su catalogación geométrica. En general se piensa que podría ser un cubo o romboedro al que se le ha truncado el vértice superior. No se ve si el vértice inferior también está truncado en una cara triangular, o si este vértice penetra en la tierra. Según algunas interpretaciones la segunda figura podría ser una aproximación al poliedro de Durero de modo que las caras serían dos triángulos equiláteros y otros seis pentágonos irregulares



El famoso cuadrado mágico de orden cuatro del grabado *La Melancolía* de Durero.

El cuadrado mágico de orden 4 de *La Melancolía* de Durero ocupa un lugar destacado en el grabado. Es una ordenación de $4^2=16$ números naturales consecutivos dispuestos en un cuadrado, es decir en 4 filas y 4 columnas, de forma que el valor llamado «*mágico*» de la suma de los números de cada fila, de cada columna y de cada diagonal deben ser iguales. Al ser de orden cuatro, de acuerdo con la ley general de formación de los cuadros mágicos que empiezan por la unidad este *valor mágico* es: $4 \cdot (4^2+1)/2 = 34$.

El cuadrado mágico de Durero debía verificar 10 relaciones (4 filas + 4 columnas + 2 diagonales) iguales a 34, pero verifica muchas más, ya que el *valor mágico* se obtiene sumando los números de:

a) la matriz de las cuatro esquinas, b) cada una de las cuatro matrices de orden dos sobre las esquinas, c) la matriz central de orden dos, d) las matrices formadas por los dos números centrales de las filas (o columnas) primera y última, e) etc. etc.

Por si fuera poco, Durero se permitió inscribir la fecha del grabado (1514) que se encuentra expresada en las dos celdas centrales inferiores. Esta fecha también lo es de la muerte de su madre, Barbara Holper, que vivía con él, luego de haber tenido diecisiete hijos, y cuyo deceso afectó mucho al artista.

No es extraño que el cuadrado mágico de Durero haya fascinado a los estudiosos y que se haya llamado con toda razón cuadrado *sumermágico*.

16	3	2	13	16	3	2	13	16	3	2	13	16	3	2	13	16	3	2	13
5	10	11	8	5	10	11	8	5	10	11	8	5	10	11	8	5	10	11	8
9	6	7	12	9	6	7	12	9	6	7	12	9	6	7	12	9	6	7	12
4	15	14	1	4	15	14	1	4	15	14	1	4	15	14	1	4	15	14	1

Algunas cuaternas particulares de números en el cuadrado mágico de Durero que suman el *valor mágico*.

DURERO, LA GEOMETRÍA ESENCIA DE LA BELLEZA

Durero, autorretrato como *Ecce Homo*, a los 28 años (1500). Munich, Alte Pinakothek.

Hay una profunda geometrización en esta obra articulada por medio de una serie de triángulos equiláteros, figura que acerca a la perfección divina.

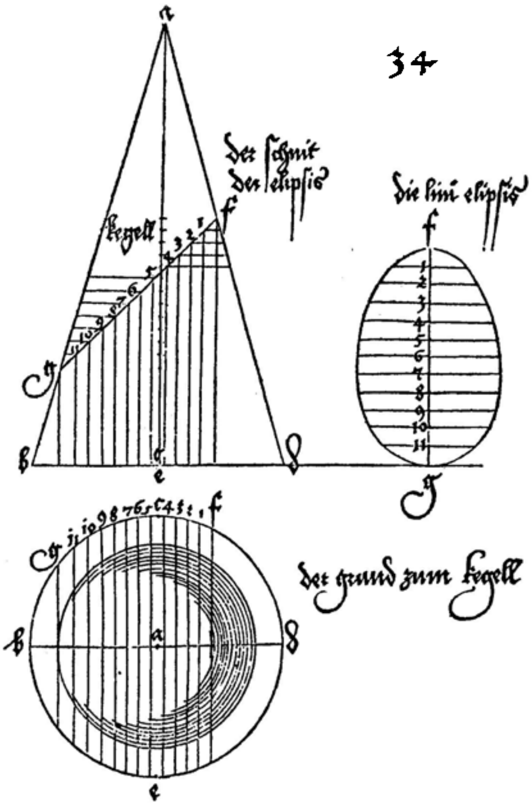
La Matemática ha sido uno de los argumentos más importantes en las especulaciones teóricas de Durero sobre el Arte que pretendían elevar a intelectual el carácter artesanal de la actividad artística, tema recurrente en el Renacimiento.

Durero puso la Geometría al servicio de su expresividad en el Arte por su capacidad de evocar simbólicamente a través de un ideal de belleza, lo esencial, lo original, lo inmutable y lo verdadero, en el afán de conocimiento de lo universal, de modo que subyace en toda obra de Durero una geometría, ostensible o secreta, que conforma proporciones, da significado a las intenciones del artista y contribuye a la emoción y al misterio que emana de la sublime belleza de sus composiciones.

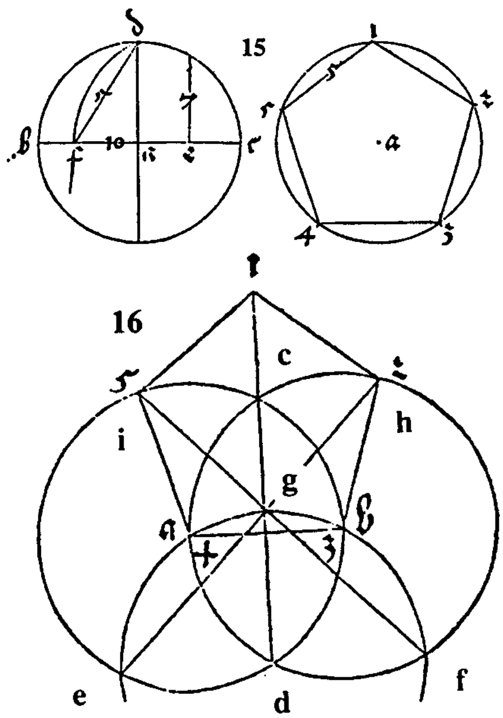
Pero Durero no se limita a la aplicación sobre el Arte de la Matemática útil o práctica sino también a los aspectos filosóficos de las Matemáticas –los *saberes* matemáticos– de modo que con Durero hablamos de *Arte, Geometría y Pensamiento*.

Para Durero la armonía de las proporciones es la esencia de la Belleza en su Filosofía de la Estética. Genio, ingenio y técnica, presiden sus cálculos, proporciones y simetrías, fundamento de la belleza que trasmite su obra de arte, que en modo alguno es casual, sino consecuencia de la primigenia armonía pitagórico-platónica de las proporciones que como matemático descubre y como artista aplica.

Al experimentar la revelación de unas proporciones geométricas que simbolizan la unidad de la Belleza, el arte de Durero ha dado un giro filosófico que alcanza el clímax en el grabado de *La Melancolia* I.



La construcción punto a punto de la elipse como sección de un cono en el Libro I del *Underweysung* de Durero.

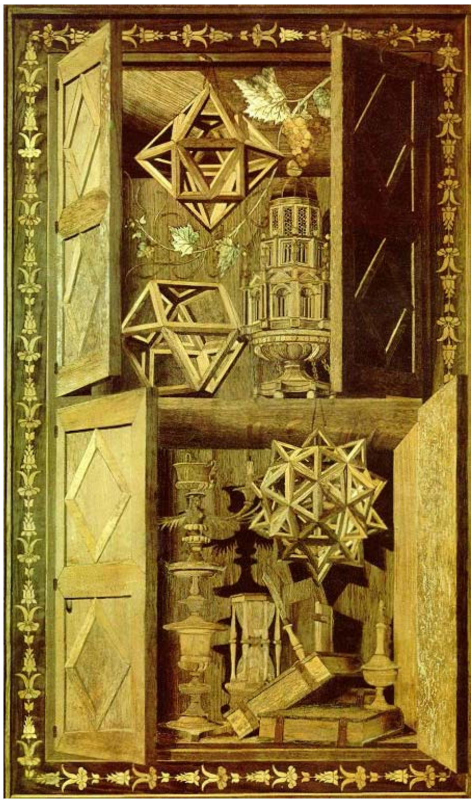
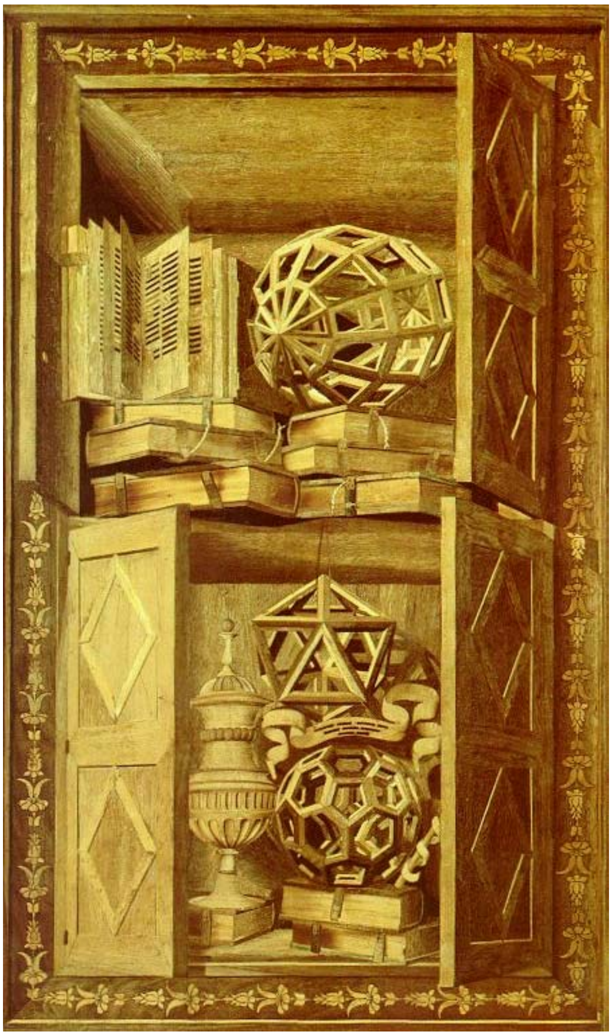


La construcción del pentágono regular en Libro II del *Underweysung* de Durero.

La construcción de Durero es una de las más renombrada de toda la literatura matemática. Estimuló la imaginación de matemáticos como Cardano, Tartaglia y Galileo, y Pietro Cataldi llegó a escribir toda una monografía sobre ella.

LOS POLIEDROS COMO ELEMENTO DECORATIVO



Mosaicos de taracea de Fray Giovanni de Verona (hacia 1520).

Una taracea es un mosaico hecho con incrustación de trozos de maderas. Era un tipo muy original de piezas artísticas muy propias del norte de Italia durante los siglos XV y XVI.

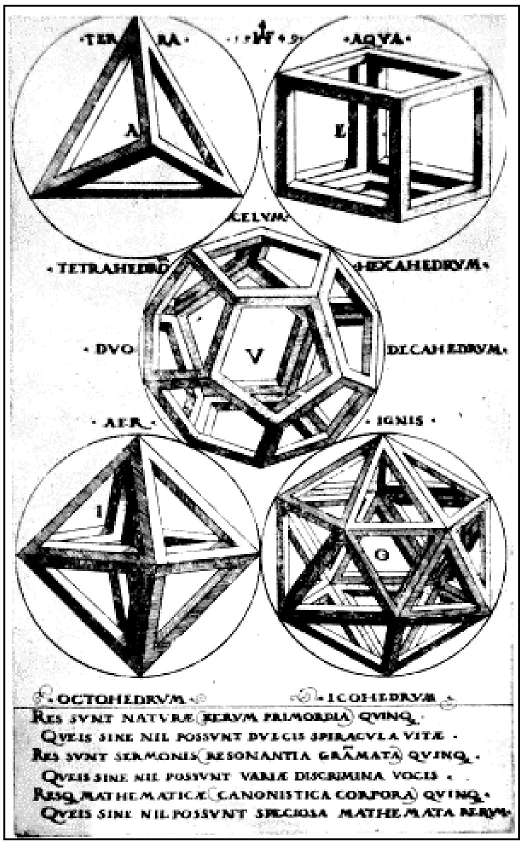
Algunos de los ejemplos más relevantes se exhiben aquí y en ellos la decoración más distinguida es de tipo poliédrico con inspiración en los modelos vaciados, tipo esqueleto, que Leonardo diseñó para *La Divina Proporción de Luca Pacioli*.

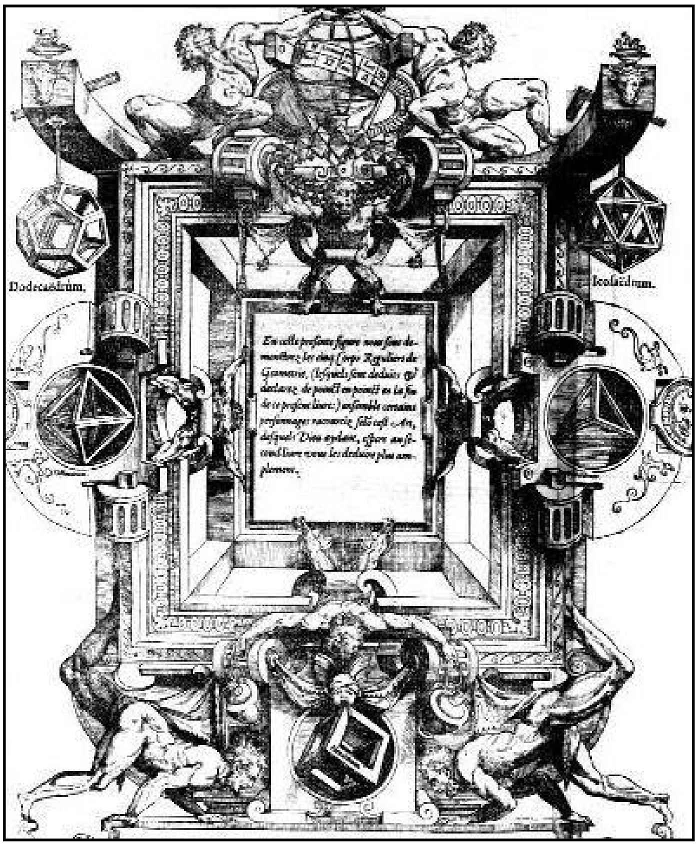
Los dos primeros están en el Monasterio del Monte Olivetto Maggiore (cerca de Siena). Los otros dos están en la Iglesia de Santa María in Organo de Verona. La descripción de cada uno es la siguiente:

1. **Abajo hay diversos instrumentos geométricos; arriba aparece el «*cuerpo de setenta y dos bases plano y hueco*» llamado así por Luca Pacioli en el capítulo LIV de *La Divina Proporción*.**
2. **Abajo aparece un *IcosiDodecaedro elevado*.**
3. **Arriba hay un *CuboOctaedro* y un *Cubo elevado*. Abajo hay un *IcosiDodecaedro elevado***
4. **Vuelve a aparecer arriba el «*cuerpo de setenta y dos bases plano y hueco*». Abajo hay un *Icosaedro regular* y un *Icosaedro truncado*.**

Las taraceas son paneles planos pero tienen toda la apariencia de armarios con las puertas abiertas debido al efecto visual de la magistral perspectiva, magnificado aun si cabe por la presencia de los diversos poliedros.

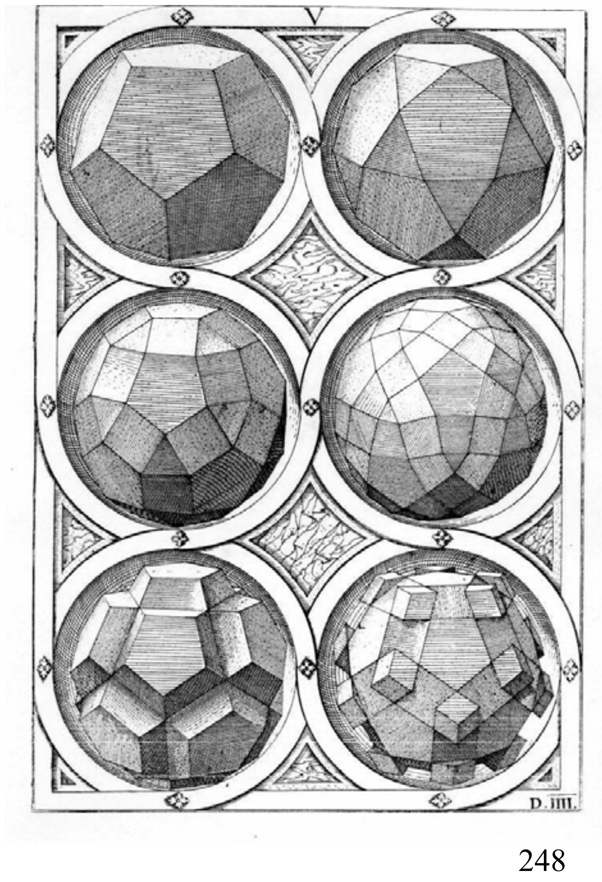
LOS POLIEDROS COMO ELEMENTO DECORATIVO





A partir del Renacimiento abunda la Literatura poliédrica, como **muestra estas ilustraciones donde aparece el simbolismo poliédrico sobre todo con modelos similares a los de Leonardo:**

1. **Representación de los *Sólidos Platónicos* (con una asociación de los cuatro elementos con los poliedros regulares diferente a la de Platón) en un grabado de 1549 del artista A.Herschvogel.**
2. **Portada de la Obra de J.Cousin del *Livre de Perspective* (1560).**
3. **Fantasía escultural poliédrica de L. Stoer en su obra *Geometria et Perspectiva* (1567).**
4. **Lámina del libro de W. Jamnitzer *Perspectiva Corporum Regularium* (1568) con formas poliédricas basadas en los sólidos platónicos.**

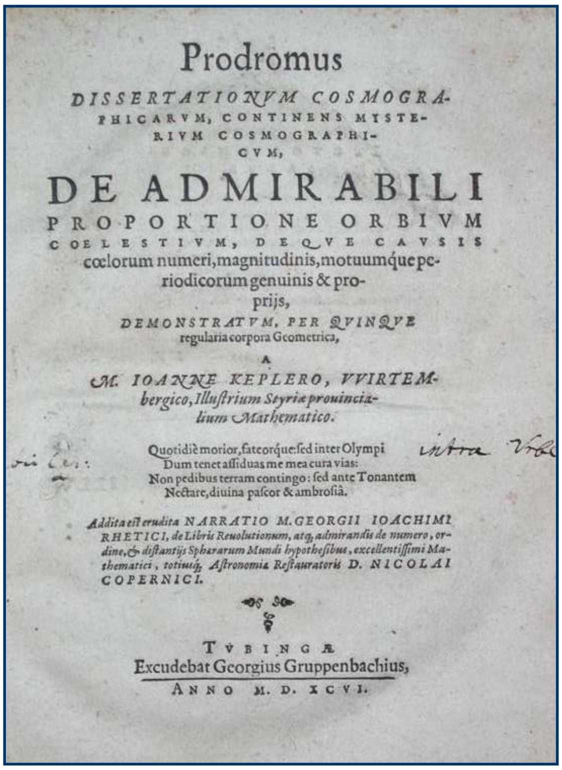


La Cosmología poliédrica de Kepler

Johannes Kepler fue uno de los matemáticos más brillantes de su época. Además de sus descubrimientos científicos en el terreno de la Astronomía y del incipiente Cálculo Integral, realizó importantes avances en el estudio de los poliedros, donde extendió y sistematizó los resultados conocidos hasta entonces. Mientras que los llamados artistas geómetras descubrían y estudiaban poliedros particulares, Kepler tuvo un enfoque más matemático a base de definir clases de poliedros, descubrir los miembros de la clase y demostrar que con ellos el conjunto está completo. Esto es precisamente lo que hace con los llamados poliedros arquimedianos. Aún así, el espíritu científico, digamos moderno, de Kepler, no pudo sustraerse al misticismo del platonismo vigente, de modo que en su obra *Harmonice Mundi* (1619) intenta incluso demostrar la asociación que había hecho Platón en el *Timeo* de los sólidos regulares con los clásicos elementos.Kepler fue de tal modo seducido por la cosmogonía pitagórico-platónica que elaboró una Cosmología basada en los cinco sólidos regulares, en la creencia de que estos serían la clave utilizada por el creador para la construcción de la estructura del Universo.

En la época de Kepler sólo se conocían seis planetas, Mercurio, Venus, la Tierra, Marte. Júpiter y Saturno. Mientras que hay infinitos polígonos regulares sólo existen cinco poliedros regulares. No podía ser una casualidad, la mano del *Dios geómetra* no improvisa. Kepler pensó que los dos números estaban vinculados: «*hay sólo seis planetas porque hay sólo cinco poliedros regulares*», y da una visión del sistema solar que consiste en sólidos platónicos inscritos, encajados o anidados unos dentro de otros, relacionando los radios de las esferas concéntricas circunscritas que intervienen con las órbitas de los planetas. Al creer que había reconocido el esqueleto invisible del Universo en esas estructuras perfectas que sostenían las esferas de los seis planetas, llamó a su revelación *El Misterio Cósmico*.

EL *MYSTERIUM COSMOGRAPHICUM* DE KEPLER



Prodromus
DISSERTATIONVM COSMOGRAPHICARVM, CONTINENS MYSTERIVM COSMOGRAPHICVM,
DE ADMIRABILI PROPORTIONE ORBIVM COELESTIVM, DEQVE CAVSIS cœlorum numeri, magnitudinis, motuumque periodicorum genuinis & proprijs,
DEMONSTRATVM, PER QVINQVE regularia corpora Geometrica,
A
M. IOANNE KEPLERO, VVIRTEMbergico, Illustrium Styriæ prouincialium Mathematico.

Quotidiè morior, fateorque: sed inter Olympi
Dum tenet assiduas me mea cura vias:
Non pedibus terram contingo: sed ante Tonantem
Nectare, diuina pascor & ambrosiâ.

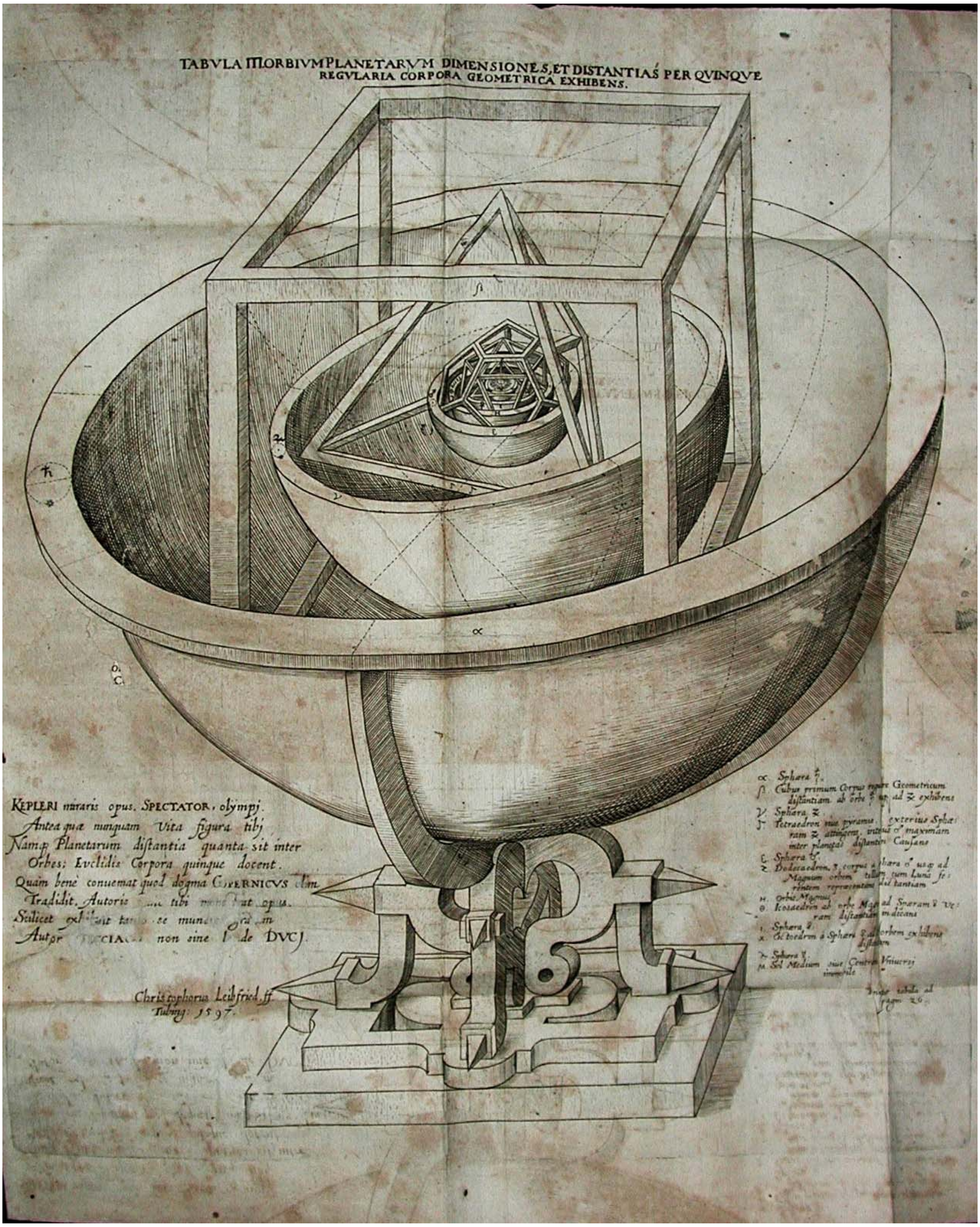
Addita est erudita NARRATIO M. GEORGII IOACHIMI RHETICI, de Libris Reuolutionum, atq; admirandis de numero, ordine, & distantijs Sphærarum Mundi hypothesibus, excellentissimi Mathematici, totiusq; Astronomiæ Restauratoris D. NICOLAI COPERNICI.

TVBINGÆ
Excudebat Georgius Gruppenbachius,
ANNO M. D. XCVI.

1. Portada de la primera edición del *Mysterium Cosmographicum*. Tubinga, 1596.
2. J. Kepler, junto a un retrato de Tycho Brahe (Pintura de J.L Huenn, National Geographic Society.

El término *Pródomo* que abre el título de la disertación de Kepler (ahora obsoleto, salvo en Medicina, donde indica el comienzo de una enfermedad) quiere dar a entender que el tratado es una avanzadilla copernicana contra las hipótesis astronómicas clásicas que sería el preludio a un proyecto más ambicioso. Una ferviente combinación de mística pitagórica y meticulosa experimentación (auxiliado por las precisas mediciones de Tycho Brahe) permitió a Kepler encontrar sus famosas *Leyes planetarias* . Por eso Kepler es tanto el último astrólogo científico como el primer astrofísico.

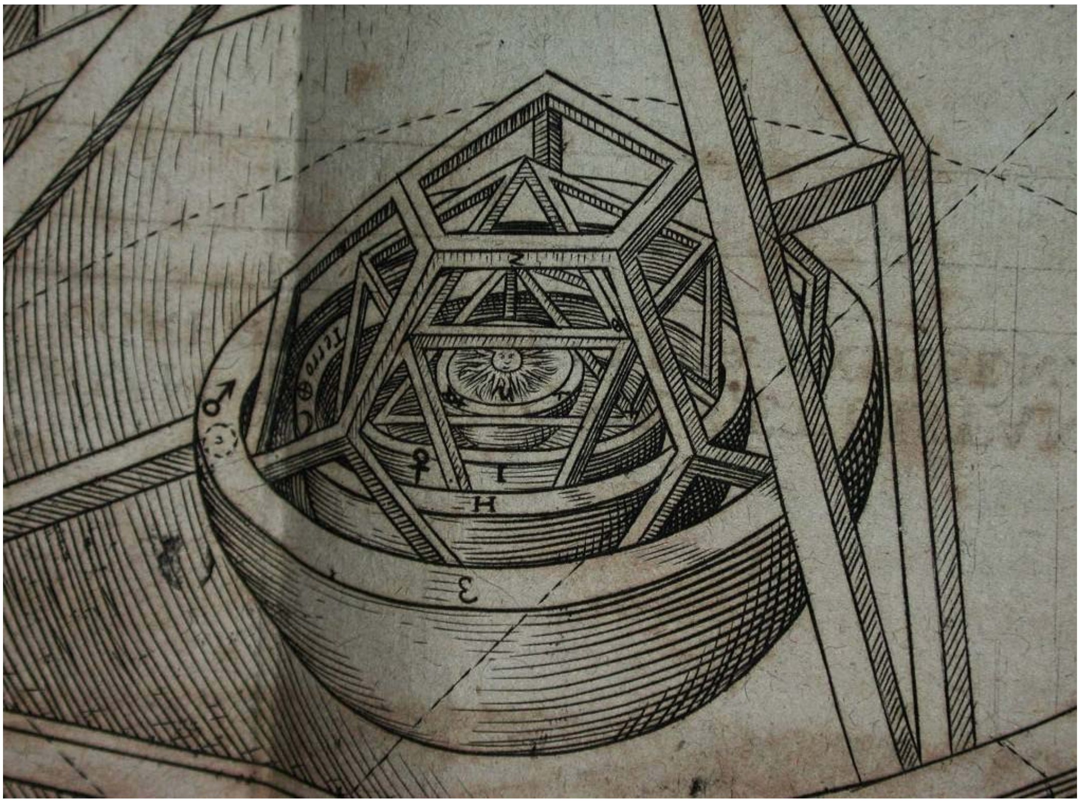
EL SISTEMA COSMOLÓGICO DE KEPLER DEL *MYSTERIUM COSMOGRAPHICUM*



Modelo cosmológico de Kepler basado en los sólidos pitagórico-platónicos e inspirado en los modelos vaciados de Leonardo. Grabado de la obra de Kepler *Mysterium Cosmographicum*, 1596. Biblioteca Universitaria de Basilea.

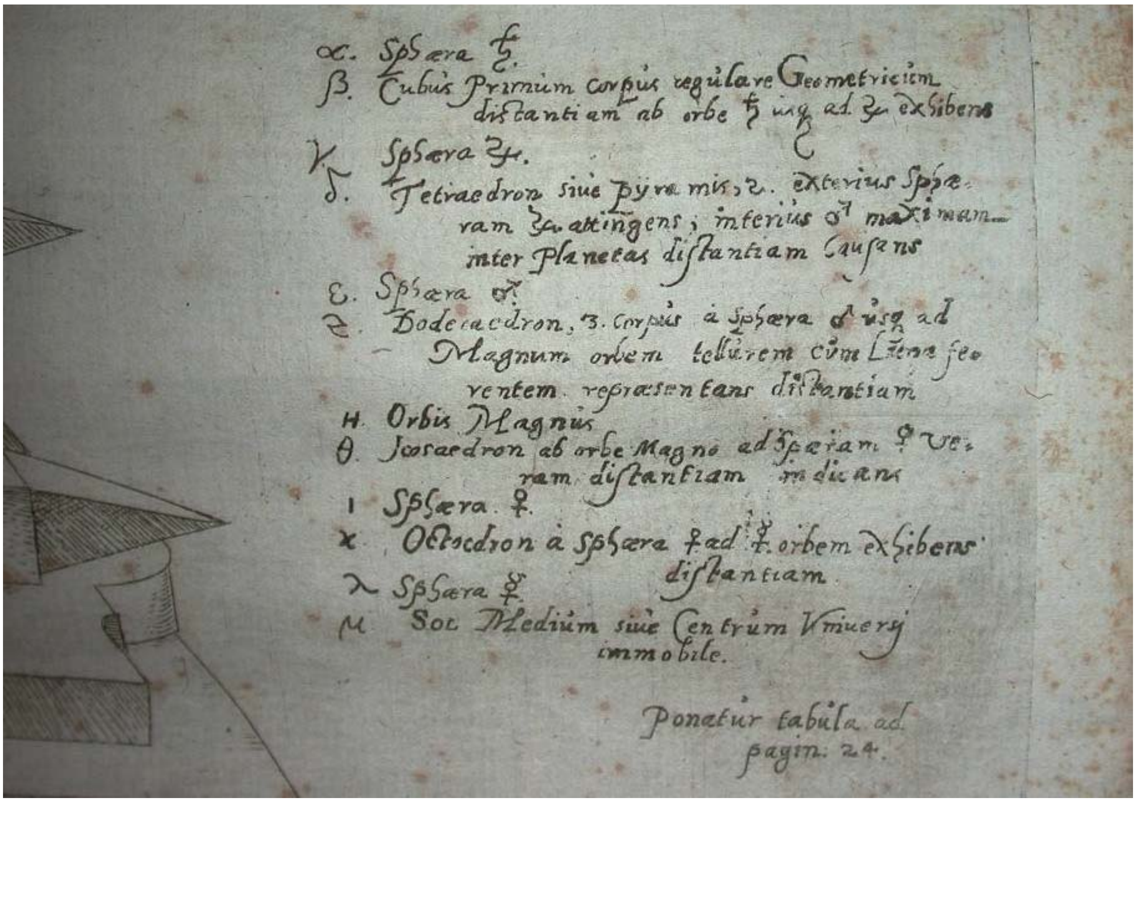
Los cinco sólidos platónicos de *Los Elementos* de Euclides fascinaron a Kepler, que veía en ellos los elementos básicos estructurales de la construcción del universo. Kepler desarrolla un impresionante modelo cosmológico del universo donde imagina que los planetas se abrían camino en un gigantesco encaje de poliedros regulares que muestra un Cubo con un Tetraedro inscrito en él, un Dodecaedro inscrito en el Tetraedro, un Icosaedro inscrito en el Dodecaedro, y finalmente un Octaedro inscrito en el Dodecaedro.

EL SISTEMA COSMOLÓGICO DE KEPLER
DEL *MYSTERIUM COSMOGRAPHICUM*



Detalles del modelo cosmológico de Kepler basado en los sólidos pitagórico-platónicos. Aparecen las esferas de Marte, la Tierra, Venus y Mercurio con el Sol en el centro.

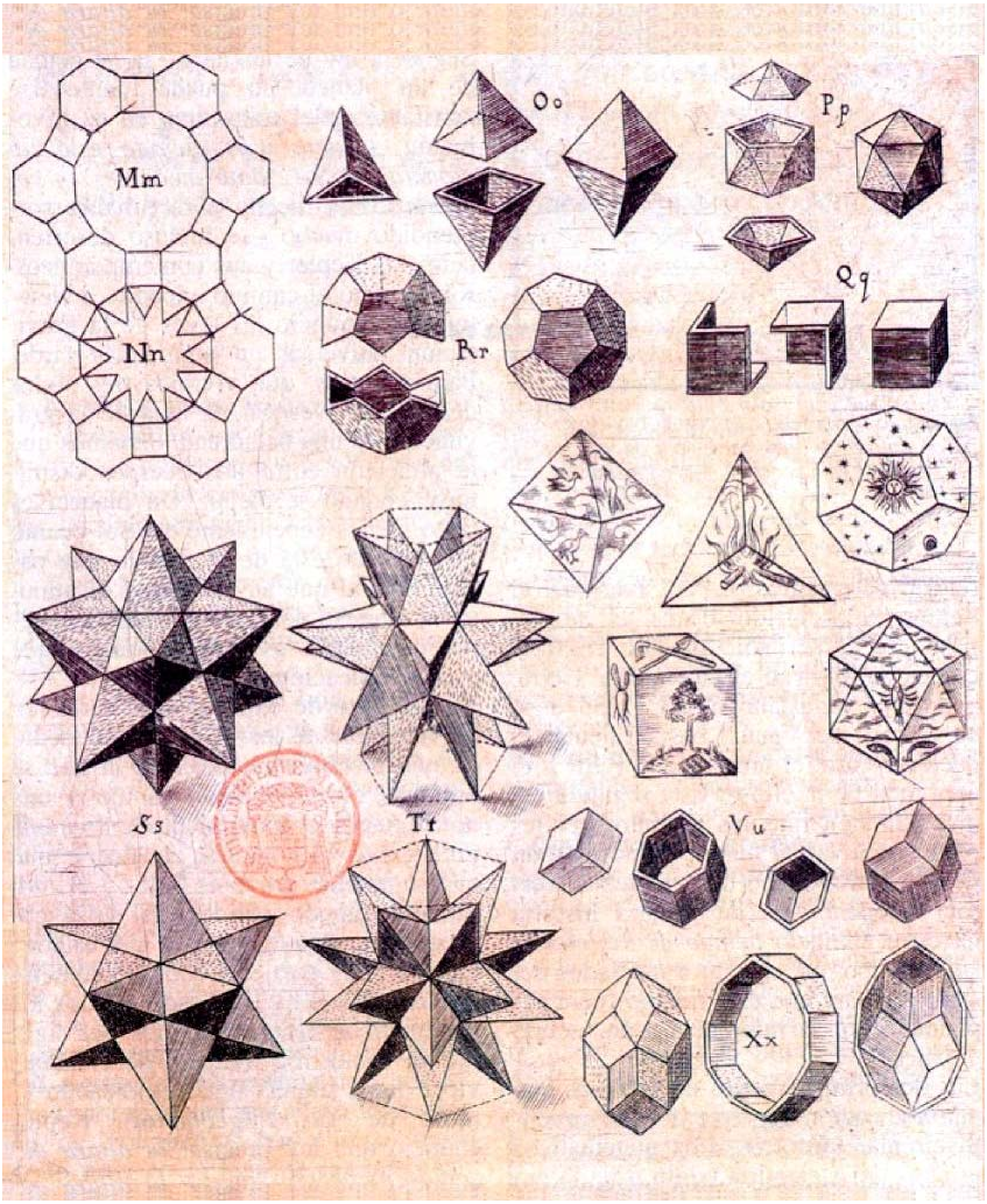
Según la explicación detallada, dentro de la órbita o esfera de Saturno Kepler inscribió un Cubo; y dentro de éste la esfera de Júpiter circunscrita a un Tetraedro. Inscrita en éste situó a la esfera de Marte. Entre las esferas de Marte y la Tierra estaba el Dodecaedro; entre la Tierra y Venus el Icosaedro; entre Venus y Mercurio el Octaedro. Y en el centro de todo el sistema el Astro Rey, el Sol.



α. Sphæra ♄.
β. Cubus Primum corpus regulare Geometricum distantiam ab orbe ♄ usq. ad ♃ exhibens
γ. Sphæra ♃.
δ. Tetraedron sive pyramis, 2. exterius Sphæram ♃ attingens; interius ♂ maximam inter Planetas distantiam causans
ε. Sphæra ♂.
ζ. Dodecaedron, 3. corpus à Sphæra ♂ usq. ad Magnum orbem tellurem cum Luna ferentem repræsentans distantiam
H. Orbis Magnus
θ. Icosaedron ab orbe Magno ad Sphæram ♀ Veram distantiam indicans
ι. Sphæra ♀.
κ. Octaedron à Sphæra ♀ ad ☿ orbem exhibens distantiam
λ. Sphæra ☿.
μ. Sol Medium sive Centrum Universi immobile.

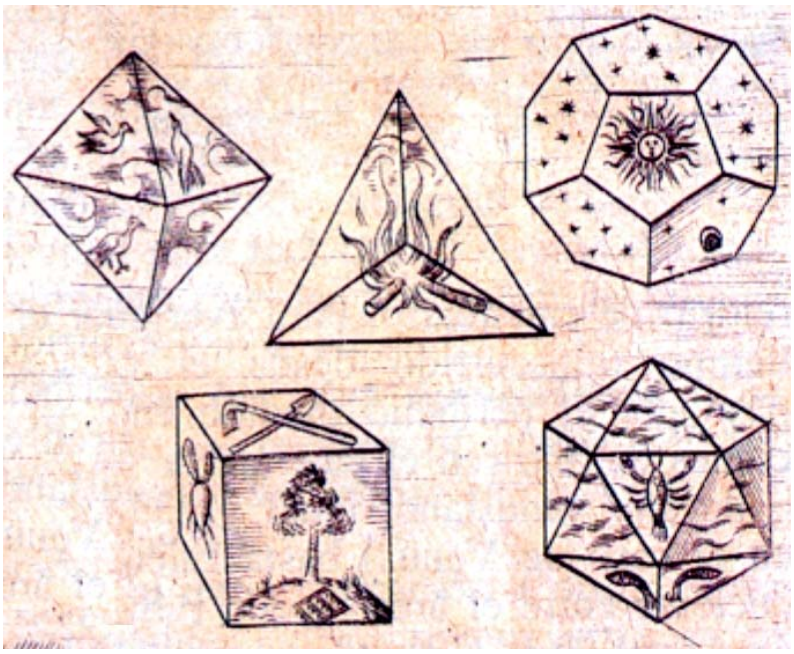
Ponatur tabula ad pagin. 24.

CONSTRUCCIONES POLIÉDRICAS DE KEPLER



Representaciones poliédricas de Kepler (*Harmonice Mundi,* 1619).
En la ilustración aparece un desarrollo de un poliedro irregular, disecciones de los sólidos platónicos, la representación poliédrica visual de la Cosmogonía pitagórico-platónica, poliedro estrellados y disecciones de poliedros rómbicos.

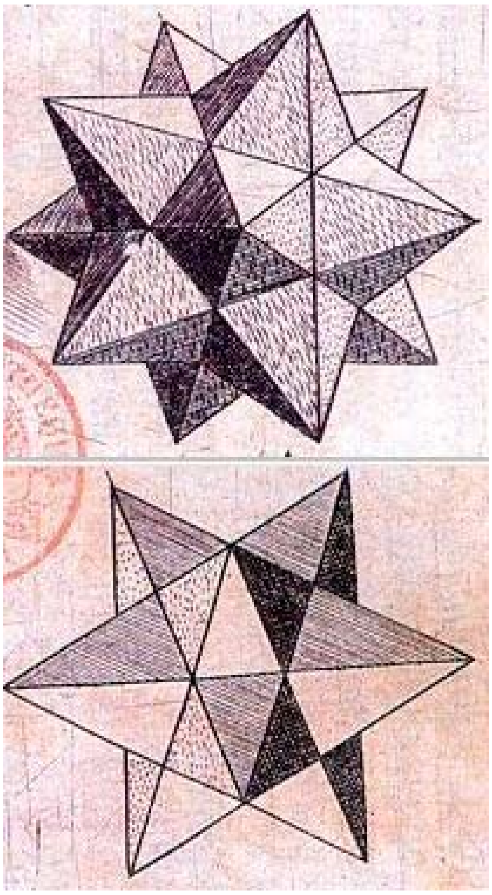
LA INFLUENCIA DEL *TIMEO* DE PLATÓN EN LA COSMOGONÍA POLIÉDRICA DE KEPLER



Representación poliédrica visual de la Cosmogonía pitagórico-platónica de Kepler (*Harmonice Mundi,* 1619).

Las asociaciones que Platón hace en *El Timeo* de los sólidos regulares con los elementos naturales primarios de Empédocles impresionaron tanto a Kepler, que intentó dar una ingeniosa explicación de las mismas, justificativa de la Cosmogonía pitagórico-platónica.

Kepler asume intuitivamente que el tetraedro encierra el menor volumen para su superficie, mientras el icosaedro encierra el mayor. Siendo las relaciones entre superficie y volumen cualidades de sequedad y humedad, y ya que el fuego es el más seco de los cuatro elementos y el agua el más húmedo, el tetraedro debe representar el fuego y el icosaedro el agua. El cubo, al ser el poliedro de mayor estabilidad, es asociado con la tierra. El octaedro como cogido por sus dos vértices opuestos con los dedos pulgar e índice puede hacérsele girar fácilmente, tiene la inestabilidad del aire. Finalmente el dodecaedro es asociado con el universo porque tiene doce caras como doce son los signos del zodiaco.



Poliedros estrellados de Kepler: gran Dodecaedro estrellado y pequeño Dodecaedro estrellado.

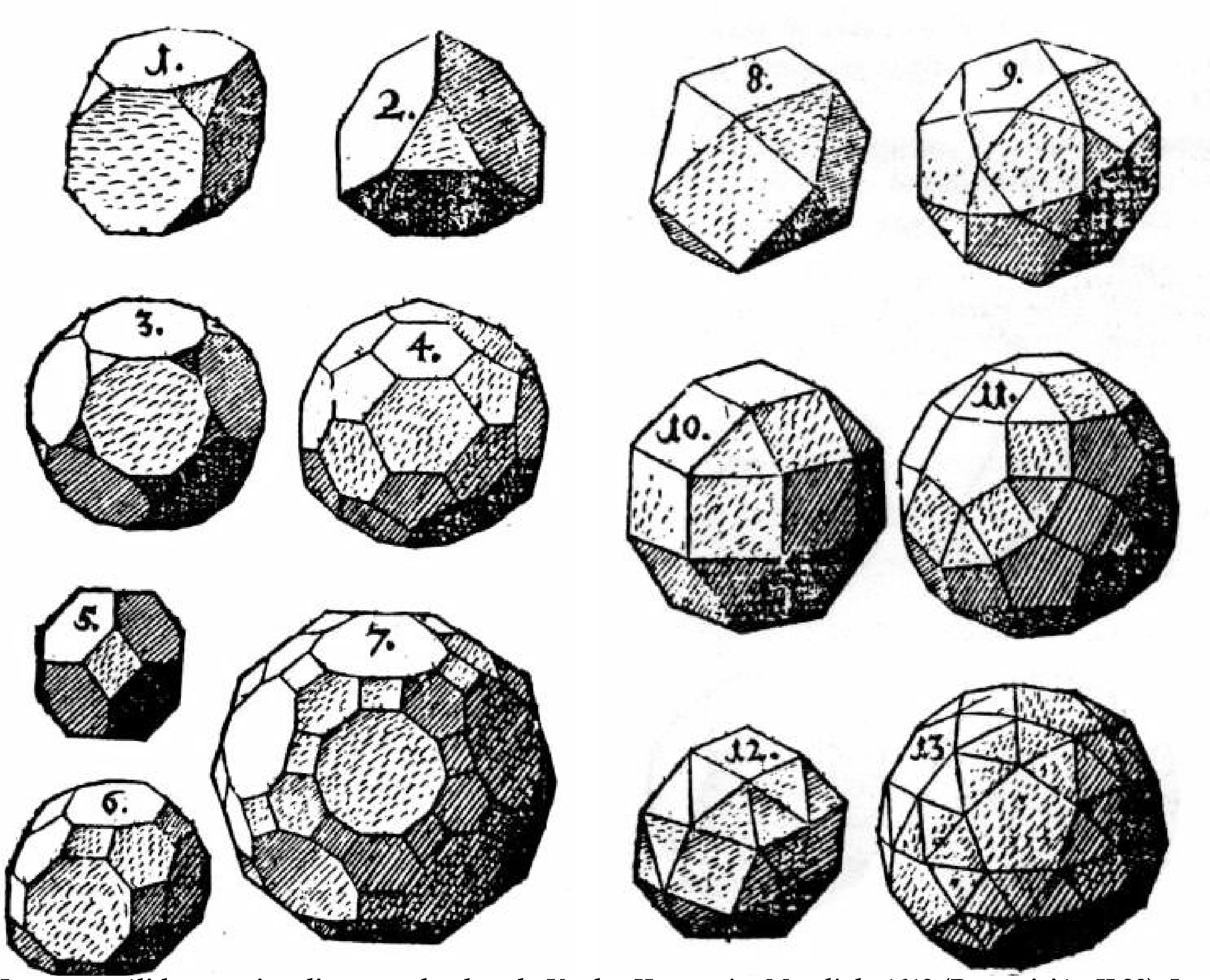
Aunque con anterioridad ya se conocían muchas ilustraciones de poliedros estrellados, Kepler fue el primero en reconocerlos como una clase de poliedros y dar un adefinición general.

Los *poliedros estrellados* tienen una gran importancia en la actualidad tanto en la Ciencia como en el Arte.

Hacia 1970 el ruso Arnold empezó a buscar principios de clasificación de estos poliedros y otros científicos han especulado con la posibilidad de aplicar estos entes geométricos a la clasificación de las partículas elementales de la Física.

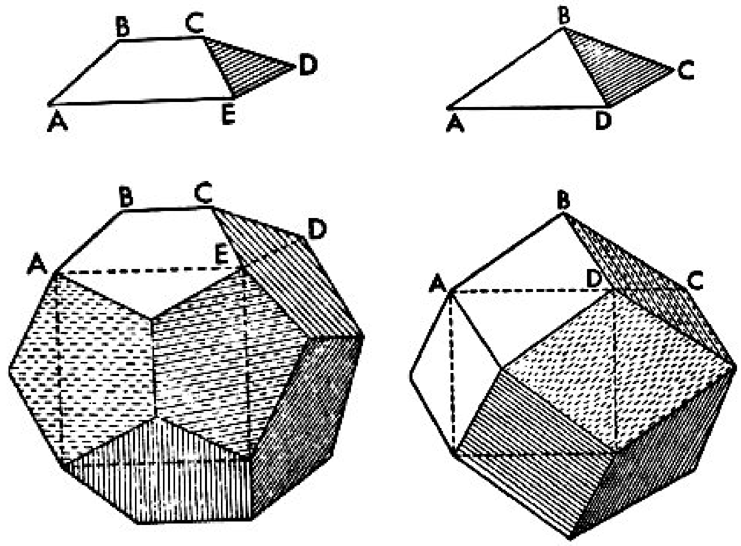
Si Kepler aplicó la mística de los *Sólidos Platónicos* para entender el *Macrocosmos* ¿no se estará intentando aplicar una nueva mística, la de los *Poliedros de Kepler,* a la comprensión del *Microcosmos* atómico?

LOS POLIEDROS ARQUIMEDIANOS DE KEPLER



Los trece sólidos arquimedianos en la obra de Kepler *Harmonice Mundi* de 1619 (Proposición II.28). Las ilustraciones de estos poliedros fueron realizadas por el amigo de Kepler, Profesor de la universidad de Tubinga, Wilhelm Schickard.

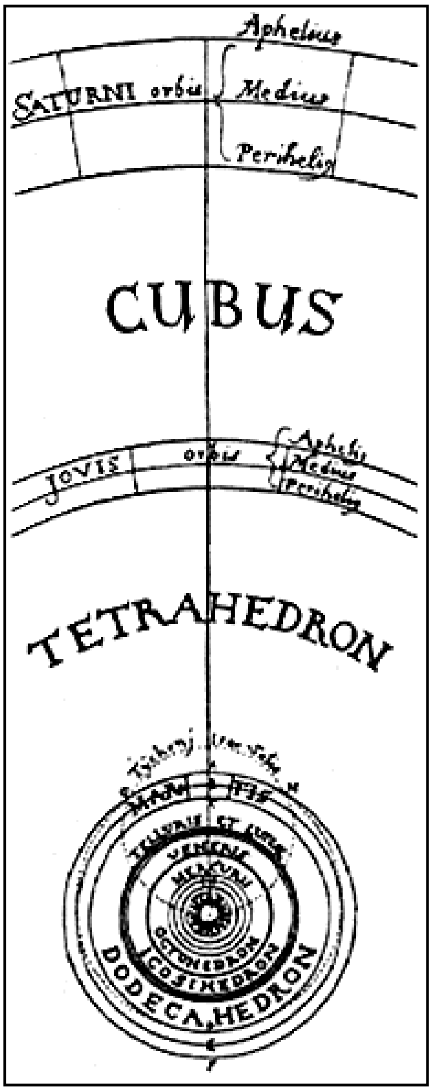
Algunos de los poliedros arquimedianos habían sido estudiados por azar, en el Renacimiento, de forma parcial e individual, creyendo incluso que podrían formarse poliedros de este tipo en número infinito. La gran contribución de Kepler al tema estriba en que define esta clase de poliedros, la explora de forma sistemática y encuentra que el conjunto de los trece sólidos arquimedianos está completo.

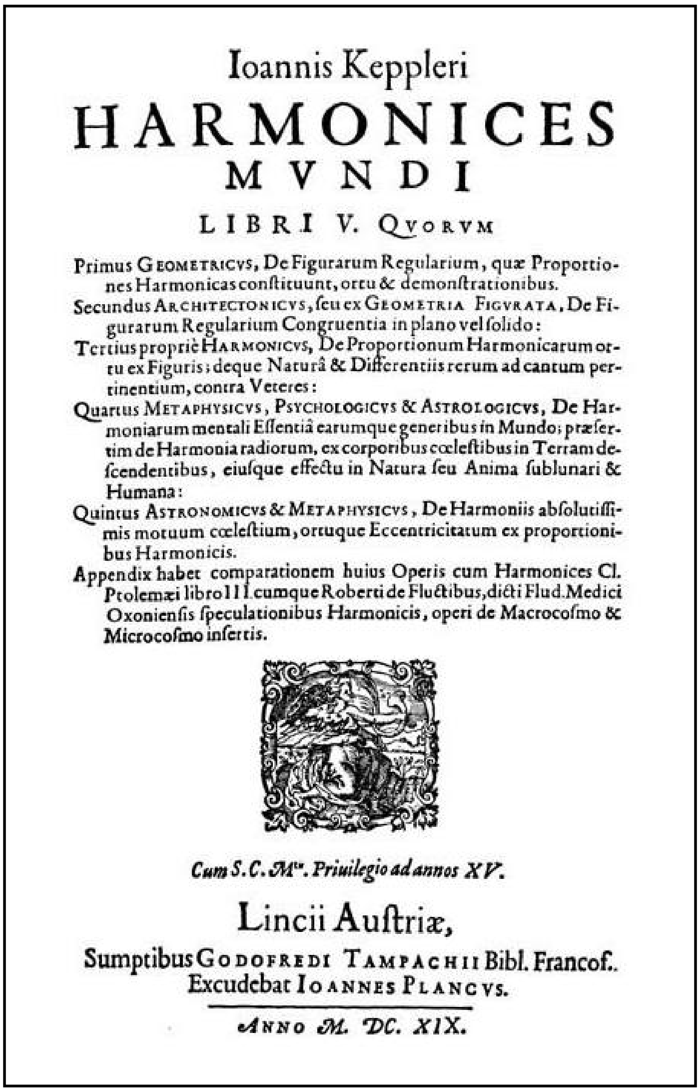


Construcciones poliédricas de Kepler en el libro *Epitome de Astronomía copernicana:*

1. **Construción de un Dodecaedro por adjunción de «*tejados*» a las seis caras de un cubo.**
2. **Construcción de un Dodecaedro rómbico por adjunción de «*tejados*».**

LA ARMONÍA DEL UNIVERSO DE KEPLER




Ioannis Keppleri
HARMONICES
MVNDI
LIBRI V. QVORVM
Primus GEOMETRICVS, De Figurarum Regularium, quæ Proportiones Harmonicas conſtituunt, ortu & demonſtrationibus.
Secundus ARCHITECTONICVS, ſeu ex GEOMETRIA FIGVRATA, De Figurarum Regularium Congruentia in plano vel ſolido:
Tertius propriè HARMONICVS, De Proportionum Harmonicarum ortu ex Figuris; deque Naturâ & Differentiis rerum ad cantum pertinentium, contra Veteres:
Quartus METAPHYSICVS, PSYCHOLOGICVS & ASTROLOGICVS, De Harmoniarum mentali Eſſentiâ earumque generibus in Mundo; præſertim de Harmonia radiorum, ex corporibus cœleſtibus in Terram deſcendentibus, eiuſque effectu in Natura ſeu Anima ſublunari & Humana:
Quintus ASTRONOMICVS & METAPHYSICVS, De Harmoniis abſolutiſſimis motuum cœleſtium, ortuque Eccentricitatum ex proportionibus Harmonicis.
Appendix habet comparationem huius Operis cum Harmonices Cl. Ptolemæi libro III. cumque Roberti de Fluctibus, dicti Flud. Medici Oxonienſis ſpeculationibus Harmonicis, operi de Macrocoſmo & Microcoſmo inſertis.

Cum S. C. Mtis. Priuilegio ad annos XV.

Lincii Auſtriæ,
Sumptibus GODOFREDI TAMPACHII Bibl. Francof.
Excudebat IOANNES PLANCVS.
ANNO M. DC. XIX.

1. **Portada del Libro V de *Harmonices Mundi* de 1619**
2. **Síntesis del esquema poliédrico del modelo cosmológico de Kepler en *Harmonices Mundi*.**

Para Kepler las proporciones y armonías geométricas de los sólidos platónicos son los arquetipos que guiaron a Dios en el trabajo de la creación del orden universal del Cosmos del que derivan las leyes planetarias. Kepler sintió las reverberaciones pitagóricas al estudiar música, teología y matemáticas, vislumbrando una imagen de la perfección y del esplendor cósmico a través de la Geometría y la Música de Pitágoras, llegando a escribir:

> **«*La Geometría existía antes de la Creación. Es coeterna con la mente de Dios.* [...] *La Geometría ofreció a Dios un modelo para la Creación.* [...] *La Geometría es Dios mismo*».**

Kepler estaba convencido de las armonías matemáticas pitagórico-platónicas que presiden el mundo: «*El universo está marcado por las proporciones armónicas*» y de que el movimiento de los planetas debe estar regido por relaciones numéricas sencillas, intuiciones que tras una laboriosa investigación plasmará en su famosa obra *Harmonices Mundi*, de 1619, una especie de *Cantar de los Cantares* matemático dedicado al «*gran armonista de la creación*».

La Geometría pitagórica tamizada por el idealismo místico y filosófico de Platón y por la estructuración euclídea, permitió a Kepler vislumbrar una imagen de la perfección esplendente del Cosmos trasunto de la excelsitud del Creador a través de la Sagrada Geometría. Las minuciosas mediciones astronómicas de su amigo Tycho Brahe hicieron evolucionar el pensamiento de Kepler, tras gigantescos esfuerzos intelectuales, hacia el descubrimiento de sus famosas leyes planetarias.

Los poliedros en los tiempos modernos

La famosa *Fórmula de Euler* que relaciona caras, vértices y aristas de un sólido platónico: «*en todo poliedro convexo, el número de vértices menos el número de aristas más el número de caras es igual a dos*» (V – A + C = 2), es posible que fuera conocida por el matemático de la Academía platónica, Teeteto y por Arquímedes, pero es Descartes quien primero la establece hacia 1635, aunque este hecho no fue conocido hasta 1860 con la publicación de sus *Oeuvres inédites* por P.Tannery. Euler la obtuvo de nuevo de forma independiente en 1752, dando una sencilla prueba inductiva. Hoy se estudia como un invariante topológico y es uno de los tópicos más representativos de la moderna Topología Algebraica, en relación con la *Característica* de *Euler-Poincaré* de una superficie.

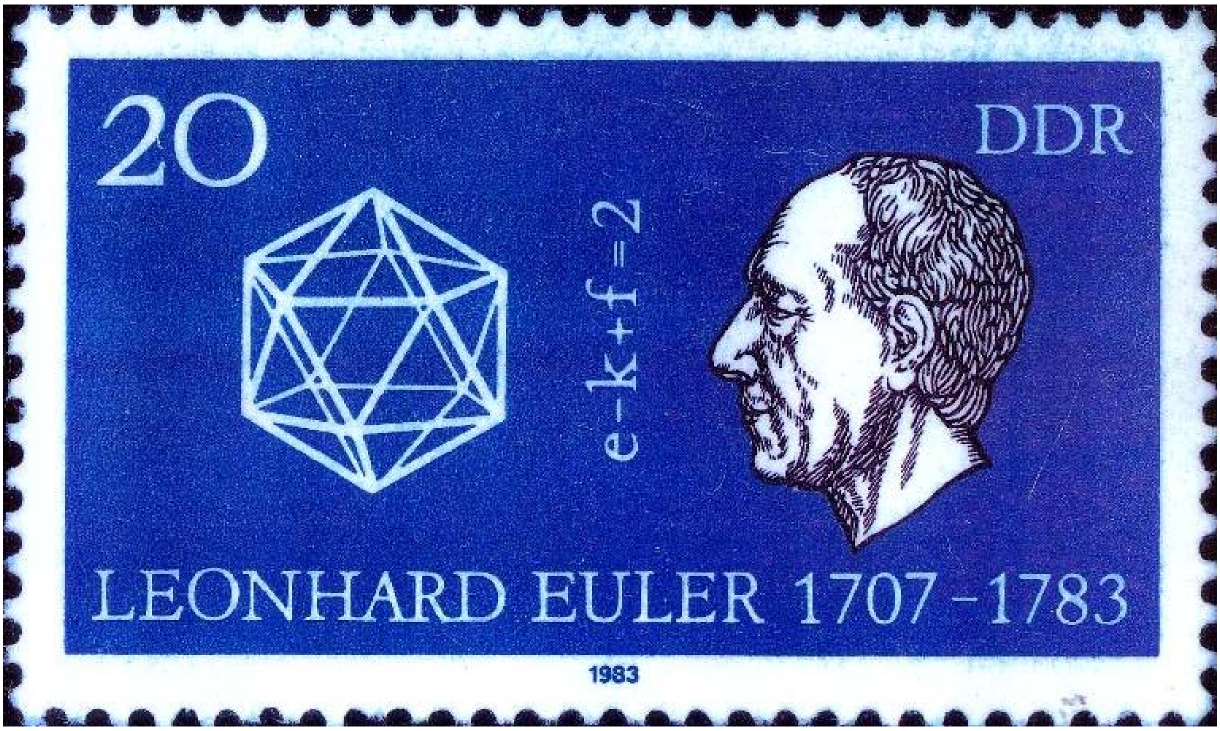
POLIEDROS REGULARES

Nombre	p	q	C	V	A
Tetraedro	3	3	4	4	4
Cubo	4	3	6	8	12
Octaedro	3	4	8	6	12
Dodecaedro	5	3	12	20	30
Icosaedro	3	5	20	12	30

LA FÓRMULA DE EULER

(V – A + C = 2)

p: número de aristas en cada cara.
q: número de caras en cada vértice.
C: número de caras.
V: número de vértices.
A: número de aristas.



Sello de la antigua Alemania oriental alusivo a la Fórmula de Euler, emitido en el segundo centenario de la muerte del gran matemático.

La *Fórmula de Euler*: «*en todo poliedro convexo, el número de vértices menos el número de aristas más el número de caras es igual a dos*» es una de las más importantes de la Matemática elemental. Puede considerarse que con ella nace una nueva rama de las Matemáticas: la Topología.

En términos de la Matemática actual esta fórmula muestra un invariante algebraico asociado a un espacio topológico, lo que quiere decir que se mantiene bajo deformaciones continuas del objeto y tiene como consecuencia fundamental el que haya únicamente cinco poliedros regulares.

Además, la simetría entre V y C está vinculada a los conocidos dualismos entre los poliedros: Cubo-Octaedro, Dodecaedro-Icosaedro, y Tetraedro-Tetraedro.

DESCARTES Y LOS POLIEDROS

Caricatura de Descartes que publicó el 23 de marzo de 1996 la sección de PENSAMIENTO de la revista LA ESFERA del Diario *EL MUNDO* de Madrid, con motivo del cuarto centenario de su nacimiento.

A Descartes se le considera, junto con Fermat, el fundador de la Geometría Analítica. En sus estudios sobre poliedros, parece ser que Descartes llegó a conocer la conocida *Formula de Euler* que relaciona aristas, caras y vértices de un poliedro.

A partir de la *Fórmula de Euler* se puede demostrar por procedimientos muy elementales la Proposición XIII.18 que culmina con broche de oro la composición de Euclides: la existencia de justamente cinco poliedros regulares distintos .

Cada poliedro se caracteriza por el símbolo (p,q) que significa que concurren en cada vértice q caras p-gonales. En el caso de un poliedro regular, además de la *Fórmula de Euler* se verifican las siguientes sencillas relaciones numéricas:

$$q\cdot V = 2\cdot A = p\cdot C ,$$

de donde se obtienen fórmulas que permiten expresar V, A y C como funciones de p y q.

En efecto:

$$\frac{V}{\frac{1}{q}} = \frac{A}{\frac{1}{2}} = \frac{C}{\frac{1}{p}} = \frac{V - A + C}{\frac{1}{q} - \frac{1}{2} + \frac{1}{p}} = \frac{2}{\frac{1}{q} - \frac{1}{2} + \frac{1}{p}} = \frac{4pq}{2p + 2q - pq},$$

De donde se obtiene:

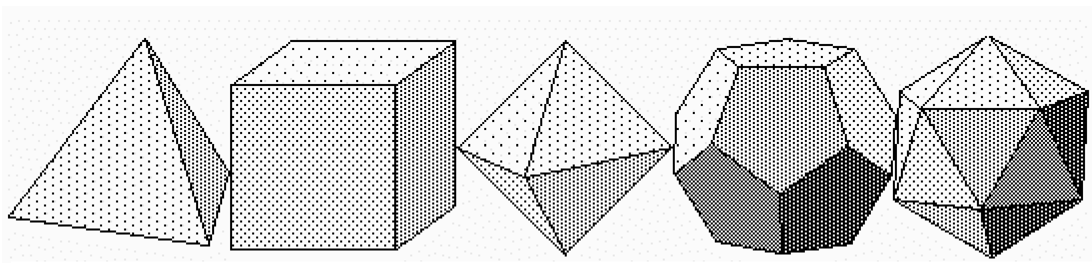
$$V = \frac{4p}{2p + 2q - pq} \quad , \qquad A = \frac{2pq}{2p + 2q - pq} \quad , \qquad C = \frac{4q}{2p + 2q - pq} \quad .$$

Ya que estos números deben ser positivos y así son los numeradores, también deben ser positivos los denominadores, de modo que los posibles valores de p y q están restringidos por la desigualdad: $2p+2q–pq > 0$ o la equivalente $(p–2)((q–2) < 4$, de modo que los únicos productos posibles pueden ser:

$$1\cdot 1 \text{ o } 2\cdot 1 \text{ o } 1\cdot 2 \text{ o } 3\cdot 1 \text{ o } 1\cdot 3 .$$

Estas cinco posibilidades nos dan una prueba elemental del aludido *Teorema de Euclides*: la existencia de justamente cinco sólidos platónicos que corresponden a los tipos:

(3,3) [Tetraedro] , (4,3) [Cubo] , (3,4) [Octedro], (5,3) [Dodecaedro], (3,5) [Icosaedro].



Tetraedro Cubo Octaedro Dodecaedro Icosaedro

A finales del siglo XIX el estudio de los poliedros recibió nuevo impulso con la aplicación de la *Teoría de Grupos* en Matemáticas y Cristalografía, sobre todo por parte de F.Klein, que en su obra *El Icosaedro y la Solución de las Ecuaciones de Quinto Grado*, estudia los grupos de simetrías de los poliedros regulares obteniendo:

- El *Grupo Tetraédrico* que es isomorfo con el grupo alternado A_4 de las permutaciones pares de cuatro elementos.
- El *Grupo Octaédrico* (que es el mismo que el grupo del cubo), isomorfo con el grupo simétrico S_4 de las permutaciones de cuatro elementos.
- El *Grupo Icosaédrico* (que es el mismo que el *Grupo Dodecaédrico*), isomorfo con el grupo alternado A_5 de las permutaciones pares de cinco elementos.

La consideración de estos grupos permite explicar la dualidad entre el octaedro y el cubo así como entre el icosaedro y el dodecaedro y en general situar la Teoría de los *Sólidos Platónicos* en una perspectiva totalmente nueva, relacionando campos muy diversos de las Matemáticas como los poliedros regulares, la *Teoría de Grupos* y la resolubilidad de las ecuaciones algebraicas mediante radicales.

Los Poliedros en el Arte del siglo X: Gaudí, Escher y Dalí

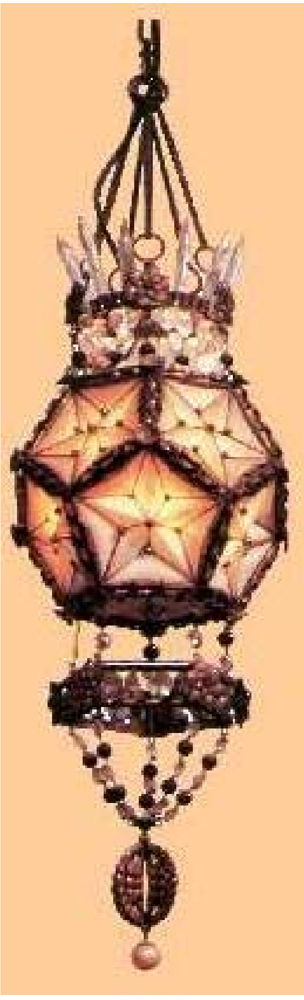
En la modernidad los poliedros han seguido siendo un tema inagotable que penetra ya no sólo en las profundidades matemáticas sino en la inspiración de los creadores y diseñadores que idean abundantes filiaciones de poliedros más o menos regulares derivados de los cinco antepasados platónicos. Mencionemos someramente a tres grandes artistas del siglo XX: Gaudí, Escher y Dalí.

Gaudí desarrolló una capacidad casi milagrosa de utilizar todas las formas geométricas y no sólo como nueva morfología estética en el ámbito de la belleza sino como componente estructural desde la perspectiva gravitatoria de las cargas. Se definía así mismo como geómetra («*yo soy geómetra que quiere decir hombre de síntesis*») y al considerar la naturaleza como fuente de inspiración escribía: «*en la naturaleza está el principio y el fin de todas las formas*», no podía ignorar las formas poliédricas.

Gaudí utilizó luces en forma de dodecaedro tanto en la cripta de la Sagrada Familia como en la catedral de Palma de Mallorca y es curioso saber que colgaban del techo de su obrador algunos poliedros.

En los pináculos de los campanarios la Sagrada Familia, tanto en la fachada del Nacimiento como en la de la Pasión, aparecen complejas formas resultantes de la intersección de diversos poliedros (sobre todo cubos y octaedros) con esferas, con vaciados cilíndricos funcionales que crean espacios donde situar la original iluminación. En los cuatro pináculos de los campanarios de la fachada de la Gloria están presentes dodecaedros regulares.

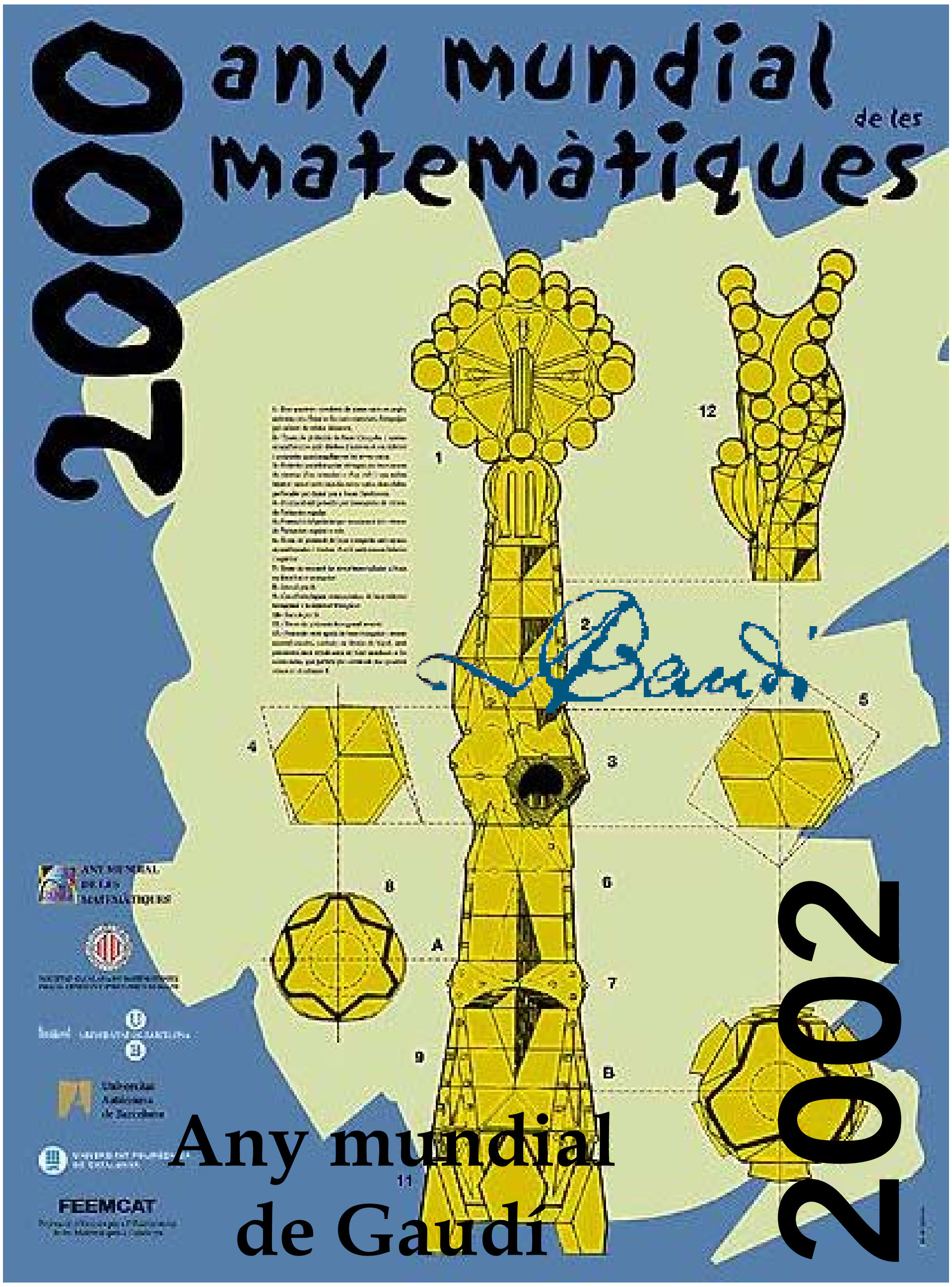
Si en las proporciones de la Sagrada Familia, Gaudí optó por las relaciones 1/4, 1/3, 1/2, 2/3, 3/4, 1, asociadas a los divisores de 12 y hay doce campanarios con pináculos, no es de extrañar que los tres poliedros regulares que intervienen sean el cubo y el octaedro de 12 aristas y el dodecaedro de doce caras.



1. Lámpara de forma dodecaédrica. Cripta de la Sagrada Familia.

2. En la torres de la Sagrada Familia hay un impresionante despliegue geométrico poliédrico, a base de maclas (intersecciones) de diversos cuerpos geométricos de forma poliédrica. La complejidad de la geometría de estas estructuras de Gaudí se explica en la ilustración siguiente.

LOS POLIEDROS
EN LA SAGRADA FAMILIA DE GAUDÍ
ANAGRAMA DEL AÑO MUNDIAL (2000)
DE LAS MATEMÁTICAS



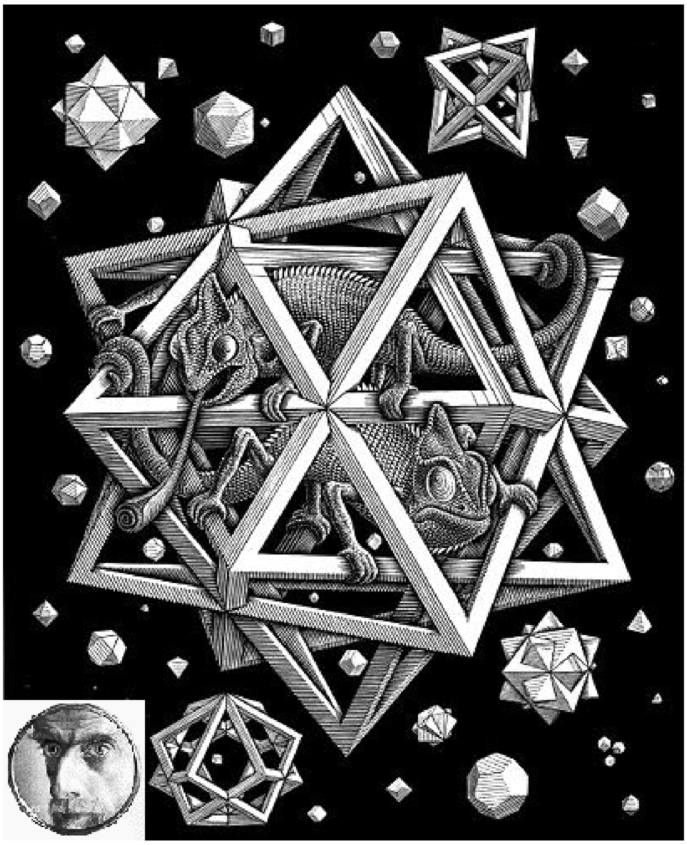
Las torres de la Sagrada Familia, por su despliegue geométrico poliédrico, donde abunda la *maclación* (intersección) de cuerpos geométricos, fue el anagrama del Año Mundial (2000) de las Matemáticas en Cataluña.

En este anagrama aparece la descripción de una estructura poliédrica presente en un pináculo de la Sagrada Familia (figuras 3, 4, 5 de la ilustración**):**

1. **Poliedro pseudoregular obtenido por truncamiento de los vértices de un octaedro o de un cubo y una esfera interior, secante en todas sus caras, dos de ellas perforadas para dar paso a focos luminosos.**
2. **Formación del poliedro per truncamiento de vértices del octaedro regular.**
3. **Formación del poliedro por truncamiento de vértices del cubo.**

Como en otros muchos artistas, la Geometría ha servido a Escher uno de los argumentos más importantes en sus especulaciones artísticas, hasta el punto de que llega a escribir que él mismo no está seguro de si está haciendo Arte o Matemáticas.

Escher estaba fascinado por la misteriosa regularidad de las formas minerales con las que debía tener frecuente contacto al tener un hermano que era geólogo de profesión: «*hay algo de estremecedor en las leyes que gobiernan las formaciones cristalinas*». De ahí nace su interés por los poliedros, cuyas formas utilizará con asiduidad en los múltiples modelos de diversos materiales y en numerosos grabados donde los dibuja en diversas posiciones. Con el fin de tenerlos en todo momento presentes, Escher construyó con hilo y alambre un modelo de los cinco cuerpos platónicos, inscritos unos en otros, que le acompañaba siempre.



Escher. *Estrellas*, xilografía, 1949. Es un universo poblado de todo tipo de poliedros (platónicos, dodecaedro rómbico, cubooctedro, icositetraedro, rombocubooctaedro, etc.) en torno a una estructura formada por tres octaedros.

Los poliedros son el tema principal en las siguientes dibujos de Escher: *Cristal* (1947), *Estrellas* (1948), *Planetoide doble* (1949), *Orden y caos* (1950), *Gravitación* (1952), *Planetoide tetraédrico* (1954). Como tema secundario también aparecen en numerosos grabados, entre ellos *Reptiles* (1943) y *Cascada* (1961).

Entre las piezas de arte más interesantes de Escher está el *Poliedro con flores* (1958) que consiste en cinco tetraedros que al compenetrarse mutuamente dan lugar a una especie de dodecaedro romboidal en forma de estrella. Otra curiosa pieza es la *Galletera* (1963) en forma de icosaedro adornado con conchas y estrellas de mar.

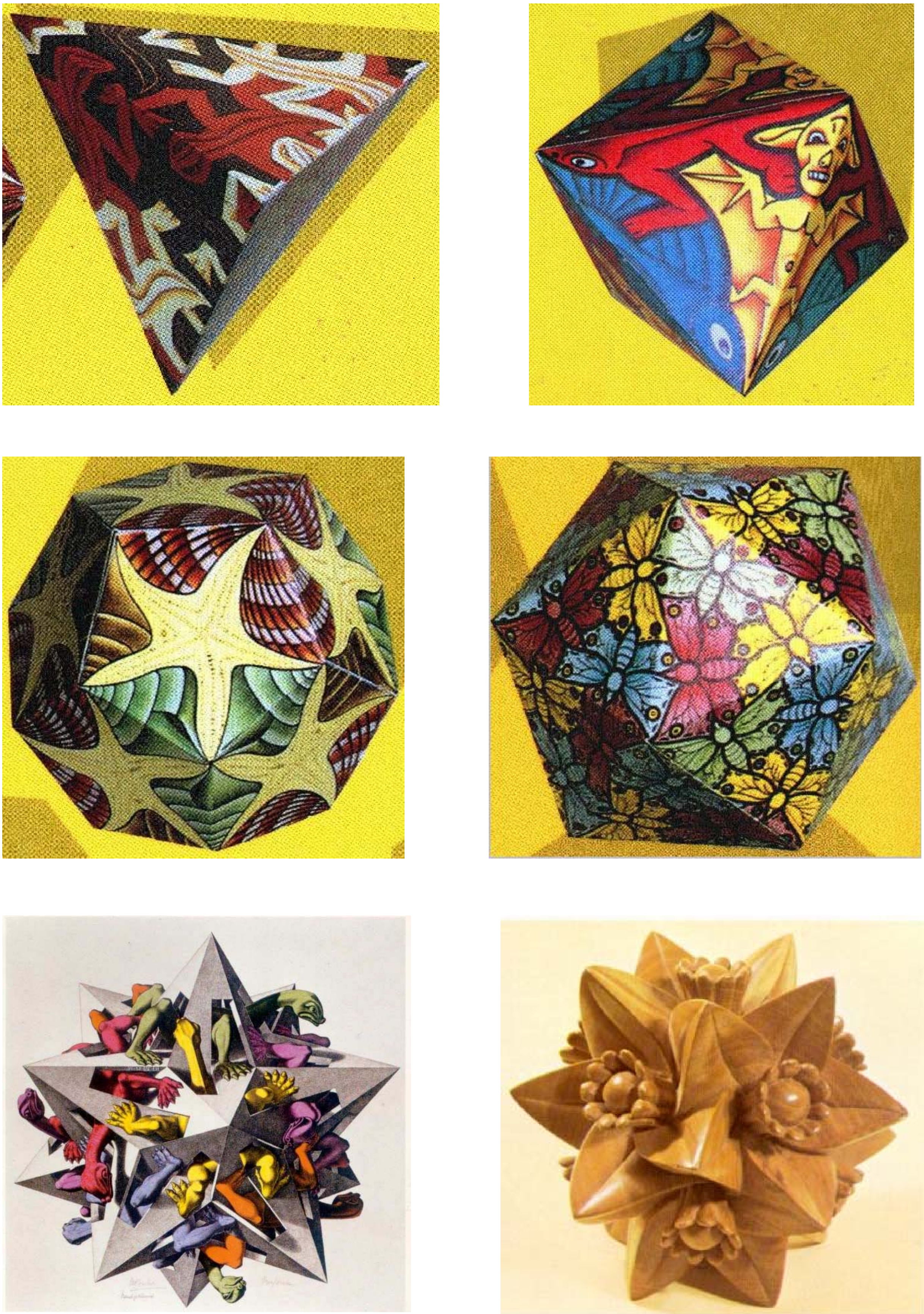
Entre los mundos fantásticos que Escher diseña sobresale un extravagante edificio submarino, plamado en la litografia *Platelmintos* (1959), con la que demuestra que es posible rellenar sin hueco alguno una superficie, alternado la presencia de tetraedros y octaedros. Para una comprobación de este hecho mediante ensamblados de desarrollos planos de ambos poliedros.

Para Dalí, como para otros muchos artistas, la Geometría proporciona importantes fundamentos y argumentos en las reflexiones teóricas previas a la obra de arte. En particular la *Divina Proporción* y los poliedros regulares, además de las implicaciones estéticas acreditadas por su presencia en algunos de sus cuadros, asumen una función de orden cosmológico, científico, místico, teológico y simbólico. En la aplicación constante de la Matemática a su pintura, Dalí sintetiza siglos de tradición geométrica y simbólica pitagórica y platónica.

Dalí se había interesado en los años 30 del pasado siglo por las investigaciones de M. Ghyka acerca de la sección áurea, la geometría y la numerología pitagóricas, lo que deja una huella en su arte que adquiere una estrecha relación entre Ciencia y Religión.

Como reminiscencia platónica la mitología en torno al dodecaedro le ha servido a Dalí para evocar y asumir una fuerte carga simbólica en algunas de sus composiciones.

EL MÁGICO UNIVERSO POLIÉDRICO DE ESCHER



Diseños poliédricos platónicos y estrellados de Escher con diversos grabados: Tetraedro, Octaedro, Dodecaedro e Icosaedro regulares y Dodecaedros estrellados.

EL SIMBOLISMO MÍSTICO DE LOS SÓLIDOS PLATÓNICOS EN LA CREATIVIDAD DE DALÍ

1. **Dalí. *El Sacramento de la Eucaristía en la Última Cena*. 1955. Colección Chester Dale. Galería Nacional de Arte. Washington.**

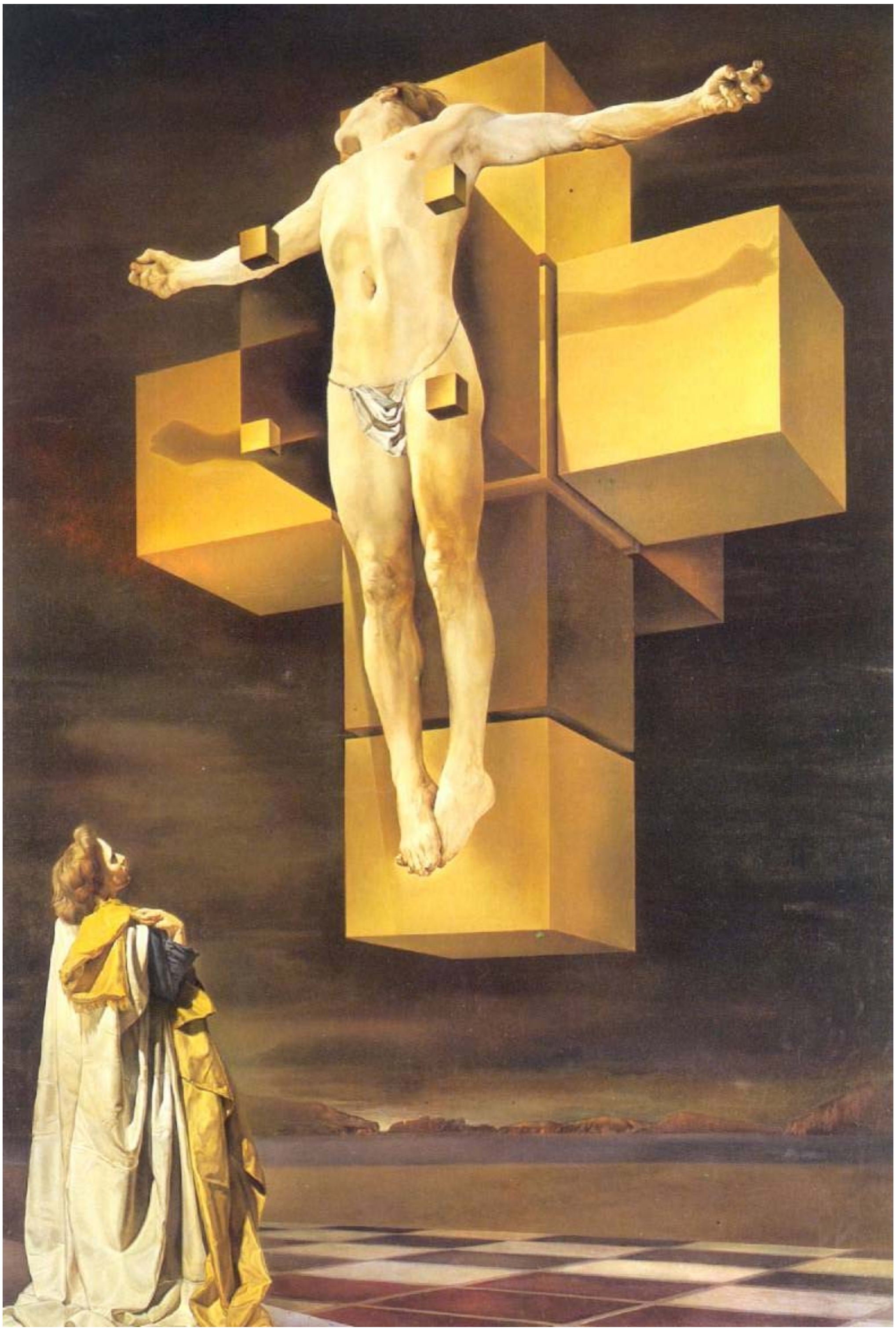
En *La Ultima Cena* de Dalí, Jesucristo instaura el Sacramento de la Eucaristía bajo la quintaesencia del Dodecaedro cósmico, supremo emblema pitagórico-platónico del universo. Dalí se hace eco con frecuencia del simbolismo místico que Platón y los artistas del Renacimiento habían otorgado al Dodecaedro, tal como había enfatizado Luca Pacioli en su obra *La Divina Proporción* de 1509 (Cap.LV) la idea platónica (*Timeo*, 55c) de la acción demiúrgica divina en la delineación del universo mediante el Dodecaedro: «*La forma de doce bases pentagonales la atribuyó Platón al cielo como receptáculo de todas las cosas*, [...]».

2. **Dalí. A la búsqueda de la cuarta dimensión. Óleo sobre tela. Colección particular 1979.**

Análisis surrealista del inconsciente en la Geometría tetradimensional del espacio-tiempo de Einstein, aludido aquí por la rueda junto a la caverna (cóncava y convexa) y el reloj blando. A través de la fascinación por el Dodecaedro que contiene en sus caras pentagonales la esencia de la *Divina Proporción*, Dalí pone la más racional de las ciencias, la Geometría, al servicio de su expresividad en la conquista de lo irracional. La pareja de espaldas recuerda a Platón y Aristóteles en *La Escuela de Atenas*, de Rafael.

Como reminiscencia pitagórica y platónica, la mitología en torno al Dodecaedro, asiste a Dalí para evocar y asumir una fuerte carga mística y simbólica en algunas de sus creaciones artísticas.

EL SIMBOLISMO MÍSTICO DE LOS SÓLIDOS PLATÓNICOS EN LA CREATIVIDAD DE DALÍ



Dalí. *Corpus hypercubus.* 1954. Metropolitan Museum of Art, Nueva York. Representación de la Crucifixión de Cristo en una cruz que geométricamente es una yustaposición de ocho cubos, desarrollo tridimensional de un hipercubo tetradimensional (de forma análoga al desarrollo de un cubo de tres dimensiones en una figura plana en forma de cruz).

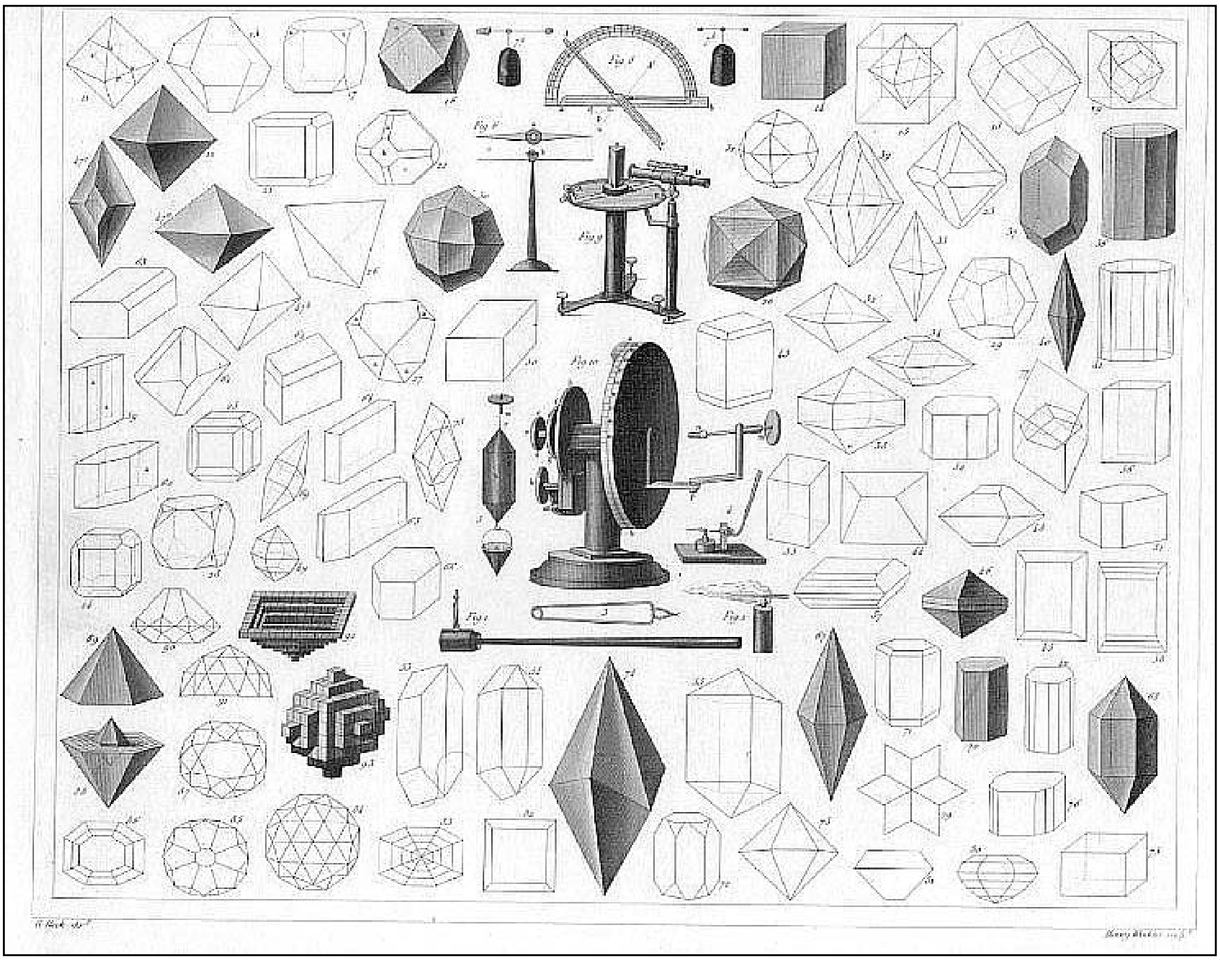
Según algunas interpretaciones, al pintar la cruz de esta forma Dalí simboliza la creencia cristiana ortodoxa de que la muerte de Cristo fue un acontecimiento metahistórico, que tuvo lugar en la región del más allá, que trasciende a nuestro tiempo y espacio tridimensional.

La belleza y el misterio de los sólidos regulares que alumbraron los pitagóricos continúan fascinando como en las épocas helénica y renacentista, encendiendo la fantasía a todo tipo de artistas.

Hoy en día hay una corriente, muy ligada al mundo científico, cuyas obras representan figuras de poliedros o de sus deformaciones hasta conseguir creaciones muy bellas; numerosas referencias e ilustraciones de ellas pueden encontrarse en una muy completa y documentada página web, la de George Hart:

http://www.georgehart.com/

Beethoven **de Paul Flavin (1996).**
Recreación poliédrica del rostro de Beethoven, reminiscencia actual de las ideas de Platón y de Durero.

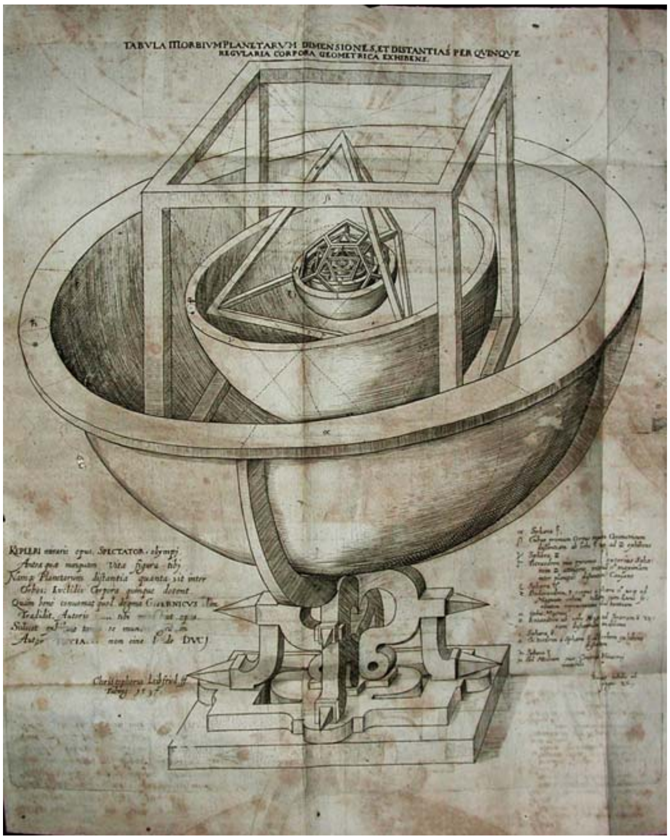


Formas cristalinas poliédricas. *Iconographic Encyclopedia*. G.Heck's, 1851.

La Historia de la Matemática como recurso didáctico e instrumento de integración cultural de la Matemática

HISTORIA DE LA MATEMÁTICA ELEMENTAL PARA LA ENSEÑANZA SECUNDARIA

EL TEOREMA LLAMADO DE PITÁGORAS
LA DIVINA PROPORCIÓN Y EL PENTAGRAMA PITAGÓRICO
EL DESCUBRIMIENTO DE LOS INCONMENSURABLES
LOS SÓLIDOS PITAGÓRICO-PLATÓNICOS



Pedro Miguel González Urbaneja
pgonzale@pie.xtec.es