DISSENY D’AGENTS PEDAGÒGICS INTEL.LIGENTS PER MILLORAR LES COMPETÈNCIES ESTRATÈGIQUES DE L'ALUMNAT EN LA RESOLUCIÓ DE PROBLEMES DE MATEMÀTIQUES

PEDRO COBO LOZANO

Curs escolar: **2003-2004**
Especialitat: **MATEMÀTIQUES**

Índex

AGRAÏMENTS

El meu agraïment a totes les persones que han participat de manera directa o indirecta en aquesta recerca, especialment al tutor d'aquest treball en Josep M. Fortuny per les seves aportacions i idees, a l'Eloi Puertas per la seva dedicació a les tasques informàtiques i a l'alumnat per l'interès que ha posat en la fase d'experimentació.

Aquest treball ha estat possible gràcies a una llicència d'estudis concedida pel *Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya* (DOGC núm. 3926 de 2003-07-16).

INTRODUCCIÓ

Una part de la investigació sobre educació matemàtica ha derivat en els últims anys tant en la creació de nous entorns d'ensenyament i aprenentatge al voltant de les noves tecnologies, com en les anàlisis de les influències que els esmentats entorns tenen en els processos cognitius de l'alumnat que les utilitzen.

Aquest treball neix amb la idea d'aplegar aquest desenvolupament de les noves tecnologies i les investigacions més recents sobre els mètodes instructius per a l'ensenyament de la resolució de problemes de matemàtiques. Aquestes investigacions tracten d'incorporar a l'aula els aspectes relacionats amb la metacognició, que es van iniciar en la dècada dels vuitanta, i els més recents estudis sobre les influències socials.

L'interès d'aquest treball va associat al fet que la incorporació de les noves tecnologies a l'aula, i en especial la de l'ordinador, obre noves vies per facilitar l'adquisició de competències bàsiques a l'alumnat d'educació secundària com, per exemple, les relacionades amb les estratègies de resolució de problemes de matemàtiques. Però també contribueix a atendre, gairebé de forma individualitzada, l'alumnat amb diferents necessitats educatives, des del que necessita una ampliació i aprofundiment en el tema fins al que té dificultats d'aprenentatge i necessita reforços personalitzats.

Aquesta nova aproximació al tema de la resolució de problemes ens suposa una motivació especial ja que és una continuïtat de les investigacions que havíem iniciat ara fa deu anys (Cobo, 1995, 1996, 1998, 2004; i Cobo i Fortuny, 2000), i que, com dèiem aleshores, estaven motivades per la necessitat i per la dificultat de transmetre a l'alumnat les nostres pròpies vivències quan resolíem problemes de matemàtiques.

Així doncs, ara pretenem aportar el nostre assessorament pedagògic per a l'elaboració d'un sistema tutorial multiagent que simuli les funcions de tutorització humana ajudant l'alumnat en la resolució de problemes de matemàtiques. És a dir, tractarem d'identificar models instructius per a l'ensenyament de la resolució de problemes amb la idea d'extreure sistemes de missatges amb els quals puguem implementar el sistema tutorial. A la implementació del sistema tutorial per part de l'equip de treball de la UAB, del qual formo part, seguirà la seva posta en marxa i l'experimentació amb alumnat de l'educació secundària per tal d'analitzar la seva aplicabilitat.

Per tal d'aconseguir aquests objectius hem dividit aquesta memòria en diferents capítols:

Al capítol 1 fem una presentació detallada del projecte, amb descripcions dels objectius, la metodologia, unes breus consideracions sobre el marc de referència en el qual es fonamenta el projecte, que serà ampliat en capítols posteriors, i els recursos que hem fet servir.

Hem dividit el capítol 2 en dues parts: la primera l'hem dedicada a precisar la terminologia, relacionada amb la resolució de problemes que fem servir al llarg de tota la memòria, i la segona a fer una anàlisi del tractament que fa el desenvolupament curricular de l'ESO i del Batxillerat sobre la resolució de problemes de matemàtiques.

La recerca bibliogràfica per tal de descriure els models instructius sobre l'ensenyament de la resolució de problemes és el tema del capítol 3, que acaba amb la identificació de possibles formes d'enfocar aquest ensenyament a les aules, que van des de la consideració del professor/a com a guia de l'alumnat fins al treball cooperatiu en petits grups de treball.

Al capítol 4 fem una justificació de la tria del tipus de problemes que hem considerat -problemes que comparen àrees de superfícies planes-, i hi fem una identificació detallada dels continguts conceptuals i procedimentals d'aquests problemes. Aquesta identificació la farem servir al capítol 5 per reconèixer totes les possibles accions que un alumne/a faria per resoldre cadascun dels problemes que hem considerat, i per establir, a mode de guió teatral, el sistema de missatges que podrem enviar a l'alumnat en cada moment de cadascuna de les possibles formes de resoldre'ls.

Al capítol 6 detallem el funcionament de totes i cadascuna de les parts del sistema tutorial multiagent, al qual hem anomenat AgentGeom.

Al capítol 7 mostrem el marc teòric, l'esquema d'anàlisi i les anàlisis dels processos de resolució que tres alumnes d'educació secundària experimenten amb l'AgentGeom resolent un dels problemes proposats.

Les conclusions finals i les perspectives d'ampliació d'aquest treball completen la present Memòria.

Les conclusions finals i les perspectives d'ampliació d'aquest treball completen la present Memòria.

CAPÍTOL 1

PRESENTACIÓ DEL PROJECTE

1.1. Introducció

La idea bàsica d’aquest projecte de treball de recerca i estudi neix de la presa de consciència de la importància que tenen actualment, i tindran en el futur, els processos d’ensenyament i aprenentatge de la resolució de problemes de matemàtiques (Schoenfeld, 1992; Lester, 1994; Carrillo, i Contreras, 2000; Southwell, 2004; Weber, 2004), i les noves tecnologies de la informació i comunicació com a eines vehiculars de l'aprenentatge (Fortuny, i Murillo, 1999; Luengo, 1999; Balacheff, 2000; Sígales, 2001; Rodríguez, 2003; Laboratoire Leibniz, 2003).

Pel que fa a la resolució de problemes, cada cop tenen més incidència en els plans d’estudi actuals (NCTM, 1989, 2000, ...), sigui com a objecte d’estudi, en sí mateixa, o com a introducció i aprofundiment de conceptes nous. Són moltes les raons que justifiquen l’estudi de la resolució de problemes a l’educació secundària, algunes identificades per Carrillo (1998), però també la resolució de problemes pot servir com a base de propostes metodològiques que ajudin a implicar en el procés d’aprenentatge a alumnes de diferents nivells de coneixement i actitud (Cobo, 2004).

Per altra banda, l’aplicació de les noves tecnologies obre vies per millorar la qualitat del procés d’ensenyament i aprenentatge, facilitant l’adquisició de competències bàsiques per part de l'alumnat de l’educació secundària com, per exemple, les estratègies de resolució de problemes de matemàtiques. L’adquisició d’aquestes competències està associada a la diversificació d’alumnes, com els que tenen necessitats educatives específiques, els que necessiten reforç personalitzat fora de l’aula, els que fan que en una mateixa classe hi hagi diferents nivells cognitius o, fins i tot, l'alumnat nouvingut i d'incorporació tardana, que té moltes més dificultats per seguir el discurs oral de les classes, que l’expressió escrita, visual i interactiva.

Així doncs, la problemàtica que se’ns presenta és com atendre aquesta diversificació de casos. Una solució, que és la que desenvoluparem en aquest projecte, podria ser la utilització de les noves tecnologies. En concret, l’ordinador amb connexió a Internet pot ser una eina bàsica i fonamental si darrera del programari que es presenta hi ha una anàlisi seriós i en profunditat de les tasques pedagògiques i matemàtiques a desenvolupar. Per tant, les feines a fer en aquest projecte seran les d’integrar l’ensenyament de la resolució de problemes amb la utilització de l’ordinador, que es concreten en: analitzar en profunditat la comunicació entre professors i alumnes en la resolució de problemes de matemàtiques i elaborar un sistema pedagògic intel·ligent que interactuï i faci les funcions de tutorització humana.

Un sistema pedagògic intel·ligent, que a partir d’aquest moment anomenarem “sistema tutorial intel·ligent” o simplement “sistema intel·ligent” és un sistema que ha de tenir tres característiques bàsiques: autonomia, en el sentit que ha de se capaç de comportaments qualificables com espontanis i ha de tenir una certa iniciativa proactiva, és a dir, proporcionar al seu usuari activitats i ajudar-lo a realitzar-les. Personalització, és a dir, ha de ser capaç d'evolucionar en el tractament de la realització de la tasca i adaptar-se al seu usuari, l'alumne. I, per últim, conversa. Ha de tenir capacitats d'interacció avançades, en el nostre cas mitjançant missatges escrits. Ha de poder mantenir una conversa i, per tant, ha d'incorporar una base de coneixement i un model de discurs que li permetin conversar i també associar idees.

Tot aquest plantejament està en la línia de les investigacions més recents, ja que l'acompanyament i l'assistència pedagògica i intel·ligent de l'alumne són aspectes interactius que tenen molta acceptació en la comunitat científica internacional relacionada amb la investigació en Didàctica de la Matemàtica, mostrant-se com elements claus en el desenvolupament d'aprenentatges de qualitat.

1.2. Objectius que pretenem aconseguir

Aquest projecte té a veure amb les idees bàsiques d'atendre les necessitats educatives específiques, dins o fora de l'aula, d'adaptar i utilitzar les noves tecnologies per conduir l'aprenentatge de la resolució de problemes de matemàtiques, i d'introduir noves estratègies metodològiques que ens ajudin a desbloquejar situacions d'incomunicació matemàtica o d'estancament en l'evolució dels coneixements dels alumnes. En aquest sentit, els objectius són:

- Analitzar els processos de comunicació entre el professor i els alumnes en la resolució de problemes de matemàtiques i identificar models de comunicació que ens serveixin com a guia per tal d'augmentar l'eficàcia de la tutorització en la resolució de problemes i per a l'elaboració d'un agent intel·ligent.
- Dissenyar i experimentar un prototip de sistema tutorial intel·ligent que ajudi els alumnes a resoldre un conjunt de problemes complexes dins de l'àmbit de la geometria plana i que sigui capaç de:
    - Proporcionar les eines necessàries a l'usuari per a resoldre un problema geomètric a partir de seu enunciat;
    - Reconèixer en cada moment el procés de resolució del problema que segueix l'alumne, validi o no les seves afirmacions i l'orienti en cas de bloqueig o resolució incorrecta;
    - Ser accessible de manera personalitzada i també col·laborativa al màxim nombre d'usuaris a través d'Internet.

Amb aquests objectius podríem aconseguir un sistema de tutorització bimodal, humana i artificial, que ens serviria per atendre la diversitat dels casos esmentats a l'apartat anterior.

1.3. Breu presentació del tema

Actualment, la presència del professorat en els processos d'ensenyament i aprenentatge és essencial. Malgrat això, determinats entorns d'aprenentatge assistits per ordinador poden desenvolupar les funcions d'un tutor humà o ser utilitzats per aquest com una eina més d'atenció a la diversitat a les seves classes. Poden ser els casos d'alumnes que volen aprendre fora de l'horari escolar, com per exemple els que fan concentracions esportives, o d'alumnes que necessiten una atenció educativa específica dins de l'aula (incloent, en aquest apartat, tant els alumnes que tenen unes capacitats cognitives més desenvolupades com els que presenten dèficits cognitius, culturals i físics), etc.

Ara bé, la utilització de l'ordinador, per sí mateix, és insuficient si no disposem del programari necessari que simuli certes funcions de tutorització en l'ensenyament de la resolució de problemes, com poden ser les d'assistència, les de motivació, els ajuts graduats, les d'avaluació, les d'informació, etc. Aquestes són precisament les funcionalitats que volem considerar quan parlem de sistema tutorial intel·ligent.

Per tal que un ordinador arribi a simular les funcions d'un tutor humà en la realització de tasques matemàtiques cal, primerament, identificar i analitzar en profunditat aquestes funcions de tutorització, i això s'aconsegueix analitzant els processos de comunicació matemàtica que tenen lloc entre professors i alumnes durant la resolució de problemes de matemàtiques (tipus de missatges, informacions addicionals sobre procediments, sobre conceptes, tipus d'orientacions, validacions d'afirmacions, reorientacions en situacions de bloqueigs, etc.). I, després, construint l'espai bàsic del problema a resoldre, és a dir, s'han d'identificar totes les possibles formes de resoldre el problema i tots els passos possibles dins de cada forma per tal d'elaborar un programari que permeti a l'ordinador transmetre a l'alumne els missatges adients en cada possible situació intermèdia de la resolució, com ho faria un tutor humà, ja sigui animant-lo a continuar per la forma de resolució triada o per invitar-lo a reorientar la resolució per un altre camí.

La diversificació de tasques matemàtiques i la complexitat d'analitzar totes les possibles formes de resoldre-les, així com la varietat de continguts matemàtics involucrats, ens ha obligat a delimitar aquest treball i a centrar la nostra atenció en els processos de tutorització relacionats amb la resolució de problemes de geometria plana. A més dels arguments que mostrem a l'apartat 4.1 (pàg. 55), la tria d'aquests tipus de problemes de geometria es justifica pel fet que l'aplicatiu permet la realització de figures planes.

El desenvolupament informàtic s'ha de dissenyar de forma que sigui una aplicació portable a qualsevol entorn. Per aquest motiu el sistema tutorial intel·ligent es desenvoluparà sobre una arquitectura web. Fent servir els recursos més bàsics que ens proporciona aquest entorn aconseguirem que l'alumne pugui interactuar amb el sistema amb qualsevol computadora connectada a la Xarxa i amb un navegador senzill. Es tracta de fer una aplicació servidora, és a dir, el sistema es trobarà en una màquina servidora i els alumnes s'hi connectarien mitjançant el protocol HTTP. Igualment, serà multiusuari, de forma que permeti la connexió de molts alumnes simultàniament.

L'alumne rebrà missatges del sistema intel·ligent a mesura que interactuï amb les diferents eines. Quan faci deduccions, el sistema acceptarà o no la seva escriptura, mostrant, si és el cas els missatges de correcció corresponents i, després, el tutor validarà o no les deduccions, mostrant el resultat a l'alumne. Quan faci servir les eines gràfiques rebrà consells per tal d'ajudar-lo a explorar i modificar la construcció per a poder solucionar el problema que se li plantegi. A la figura 1.3.1 mostrem la pantalla de l'àrea de treball de l'alumne, el contingut de la qual descriurem al capítol 6.

Així doncs, podem considerar que aquest projecte té dues parts: per una banda, de forma individual, identifico i analitzo tant les característiques de les funcions tutorials del professorat en relació amb els seus alumnes com les dels tipus de problemes que considero, per altra, en equip (amb un programador, una persona que fa el disseny gràfic i un coordinador general), elaborem el prototip de programari i, per acabar, experimento amb alumnes el prototip d'agent intel·ligent elaborat.

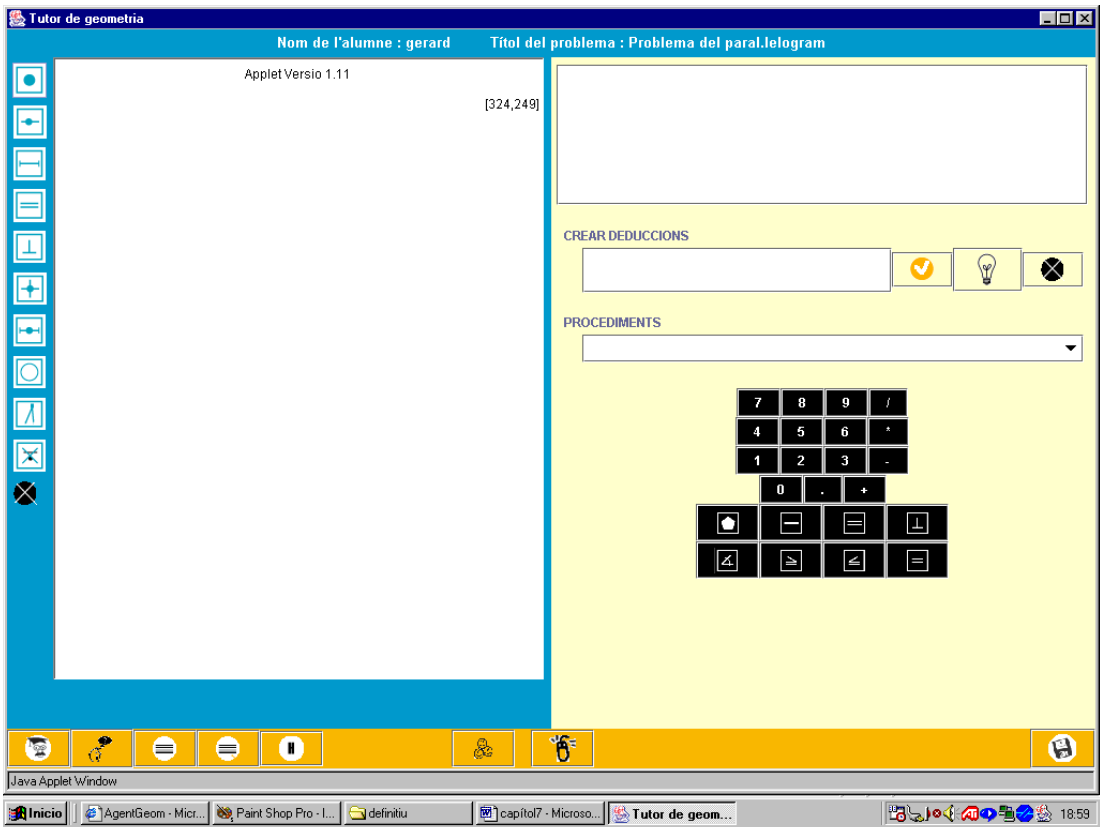


Figura 1.3.1. Pantalla de l'àrea de treball de l'alumne

1.4. Consideracions generals sobre el marc de referència en el qual es fonamenta la recerca

En aquest apartat fem unes breus consideracions generals sobre el marc teòric en el qual es fonamenta aquest projecte. Aquest marc teòric serà ampliat en els successius capítols, quan tractem cadascuna de les fases de la recerca en les quals està dividit el projecte.

Actualment existeix un debat ampli i fructífer en la comunitat internacional d'educació matemàtica sobre els enfocaments teòrics en les recerques i la seva corresponent epistemologia.

Les diferents interpretacions de les investigacions en educació matemàtica que provenen del constructivisme, de l'enfocament socio-històric o de l'interaccionisme són contínuament comparades, enfrontades o plantejades de forma complementària en discussions que no només són competència de l'educació matemàtica sinó de l'educació en general (Sierpinska i Lerman, 1996). Totes aquestes consideracions resulten essencials per a donar forma a la investigació en educació matemàtica i, el que és encara més important, per a poder traslladar el resultat d'aquestes investigacions a la pràctica docent.

Sembla evident, per la forma d'introduir aquest projecte, que els nostres punts de vista teòrics estiguin més propers als enfocaments socio-culturals i interaccionistes. De la teoria socio-cultural prenem que l'alumnat, i també el professorat, està envoltat per una cultura i altres situacions de tipus local que fan que no tingui sentit parlar de l'individu o del coneixement si no és a través del context en el qual es realitza l'activitat. Si no és així, seria difícil comprendre, per exemple, en quina mesura és diferent la situació d'un estudiant a distancia o d'un que treballa a l'aula. A més, una de les principals conseqüències derivades de la realització d'aquest projecte és precisament el seu efecte social sobre l'alumnat, en concret, l'atenció als diferents contextos de diversitat.

Si de l'enfocament socio-cultural recollim l'èmfasi en el context, a l'interaccionisme trobem altre aportament com és la idea que les interaccions (de molts tipus) no són enteses exclusivament com un mitjà per a comprendre el coneixement, sinó que són considerades inseparables del seu avenç. Així, el focus d'estudi no són els individus, sinó les interaccions que es produeixen entre ells.

En l'educació matemàtica, ambdós enfocaments tenen el seu origen principalment en la psicologia cultural (Cole, 1996) i l'interaccionisme (Bruner, 1989 i Cobb i Bauersfeld, 1995).

En la discussió entre aquestes dues teories i el complement entre una i l'altra es situa el marc de referència general del nostre projecte.

Així mateix, és important entendre que el context de l'aula no pot deslligar-se d'aquest altre context cultural en el qual la tecnologia està immersa i les reaccions socials davant la tecnologia. Aquestes consideracions són les que ens permeten interpretar determinades reaccions del professorat, dels pares, o dels propi alumnat cap a l'ús de les noves tecnologies: certa por davant la seva utilització a les aules, por del professorat a perdre protagonisme en l'activitat d'instrucció, magnificació de les possibilitats que n'ofereix, etc.

En aquest sentit, un dels principals aspectes que ens interessa tenir en compte és la consideració de la *tecnologia* des d'un punt de vista ampli, que permeti atendre el context de l'aula de matemàtiques, o la viabilitat de la seva utilització en entorns virtuals d'aprenentatge assistits per un sistema tutorial intel·ligent com el que tractem en aquest projecte. Aquesta visió amplia l'ús habitual dels ordinadors a les aules com a suport d'aplicacions que faciliten la visualització i el tractament de les dades de cara a millorar la qualitat del procés d'ensenyament i aprenentatge. Aquest aprenentatge es fonamenta en la idea Vigotskyana d'eines de mediació físiques i psicològiques que són determinades històricament i cultural i que mitjancen totes les accions entre els individus d'una comunitat (Vygotsky,1978; i Cole,1996).

En aquesta investigació, la comunicació social es desenvolupa per signes i per mitjans tecnològics que mitjancen en els processos comunicatius. Així, l'aprenentatge de l'alumnat és mediat per una eina psicològica clau com és el llenguatge escrit, que suposa una modificació de la comunicació verbal presencial, però que dóna lloc a un augment del valor significatiu, de generació de coneixements, i, en general, d'intel·ligència col·lectiva (Lévy, 1994). A més, el mitjà tecnològic crea un context en la qual el procés comunicatiu es fa possible, gràcies al disseny de l'entorn virtual d'aprenentatge en el qual les àrees que s'implementen faciliten la comunicació entre el tutor (sigui humà o artificial) i els alumnes.

1.5. Pla de treball

El pla de treball per a portar a terme aquest projecte comprèn les fases següents:

1. Recerca bibliogràfica, que abraça:

La recerca i lectura d'investigacions relacionades amb l'educació matemàtica i, dins d'aquesta, de les que tenen a veure amb els processos comunicatius entre professor i alumnes en la resolució de problemes de matemàtiques.
La bibliografia en la qual es tracti sobre els entorns virtuals d'aprenentatge en la qual es faci servir, sobretot, els ordinadors.

Els models que fan servir els diferents investigadors per a l'ensenyament i l'aprenentatge dels processos de resolució de problemes de matemàtiques.

Els conceptes i procediments involucrats en la resolució de problemes geomètrics i, en concret, d'equivalència, semblança, heurístiques, algorísmics, etc.

2. Identificació dels continguts matemàtics implicats en la resolució dels problemes que seleccionem.

La idea fonamental consisteix en establir un model d'actuació, mitjançant tot un seguit de passos, que ens permetin identificar els continguts matemàtics dels problemes, analitzant el seu enunciat, construint el seu espai bàsic i observant tots els enfocaments possibles que ens poden portar a la seva resolució. Per a modificar, després, l'enunciat si el considerem oportú.

3. Elaboració de sistemes de missatges corresponents a la resolució de cada problema.

Aquesta fase ha d'estar associada a l'anterior, ja que la previsió dels processos de comunicació entre cada professor/a i el seu alumnat s'ha de fer seguint cadascun dels enfocaments de l'espai bàsic del problema en qüestió, de forma que en cada pas de cada enfocament es tinguin previstes les accions gràfiques i deductives dels alumnes i els possibles missatges del professor.

Així doncs, en aquesta fase hem de realitzar una mena de guió teatral que contempli tots els moments possibles del procés de resolució de cada problema.

4. Assessorament pedagògic en l'elaboració del programari per part del grup de treball de la UAB, que recolza aquest treball d'acord amb les pautes bàsiques de seguiment i missatges establerts a la fase 3.

Pilotatge i validació del prototip de sistema tutorial artificial.

Establiment provisional de l'aplicatiu desenvolupat.

5. Experimentació del sistema tutorial artificial.

L'experimentació es portarà a terme amb tres alumnes de l'educació secundària. L'experimentació tindrà dos objectius: per una banda, ens servirà com a prova del funcionament del prototip de sistema tutorial artificial, amb la finalitat de detectar les possibles errades que tingui per a rectificar-les i amb la idea d'establiment definitiu de l'aplicatiu, i, per altra, tractarem d'analitzar els processos de resolució dels alumnes per a veure si el tutor té incidència o no en l'aprenentatge dels alumnes, és a dir, podrem tenir un estudi de la seva incidència en el procés d'aprenentatge dels alumnes.

6. Redacció definitiva de la memòria que abraci totes les parts d'aquest projecte.

Així doncs, la distribució prevista de feina a realitzar durant el curs de la llicència (2003/2004) serà la següent:

Durant el primer trimestre del curs (de setembre fins al desembre de 2003): recerca i lectura de la bibliografia que hem esmentat a la primera fase, i la identificació dels continguts dels problemes (segona fase).

Durant el segon trimestre de la llicència (des del gener fins al març de 2004) ens centrarem en la identificació dels sistemes de missatges (tercera fase), que anirem compaginant amb l'elaboració, amb el grup de treball, del programari que tenim previst a la quarta fase.

Per últim, durant la resta de la llicència (des de l'abril fins al juny de 2004), finalitzarem la posta en marxa de l'aplicatiu (acabar definitivament la cinquena fase) i la redacció definitiva de la memòria (sisena fase).

1.6. Metodologia utilitzada

És coherent començar el desenvolupament d'aquest projecte fent una revisió de la bibliografia sobre les interaccions entre alumnes i, a continuació, centrar el nostre esforç en la recerca bibliogràfica dels models instructius dels diferents investigadors en l'ensenyament i aprenentatge de la resolució de problemes de matemàtiques, ressaltant les incorporacions més importants que s'han fet al llarg dels últims vint anys. És important analitzar la comunicació entre el professor i els alumnes, per la qual cosa hem d'estudiar les diferents formes d'aprenentatge cooperatiu i guiat de la resolució de problemes. Per acabar aquesta fase, hem d'intentar buscar antecedents i referències que relacionin els processos d'ensenyament i d'aprenentatge amb els sistemes tutorials intel·ligents des de la vessant pedagògica, per tal de poder col·laborar amb el grup interdisciplinari abans esmentat.

La lectura de la bibliografia, la realització de consultes i entrevistes, l'anàlisi de les investigacions, i la realització d'esquemes que relacionin els aspectes que considerem, serà el mètode de treball que farem servir per tal d'aconseguir el primer objectiu.

Per altra banda, tenint en compte els objectius del nostre projecte i les referències teòriques prèvies que hem utilitzat, des de les quals pretenem interpretar, almenys inicialment, les experimentacions i observacions, és clar que la metodologia que triarem es situarà, evidentment, en l'ampli camp dels mètodes qualitatius. En particular, la naturalesa de la investigació i les característiques dels objectius plantejats, orientats cap a una comprensió profunda de realitats concretes i amb la idea d'identificar models d'actuació de professors i alumnes que es comuniquin a distància o a l'aula resolent de forma espontània una activitat matemàtica, ens porta a la consideració d'un estudi de casos, que analitzarem des d'una perspectiva qualitativa, depenent de l'obtenció de dades que provenen d'observacions.

Pel que fa a l'elaboració del sistema tutorial intel·ligent, seguirem els següents dos passos generals, que poden variar en funció dels inconvenients que puguem tenir durant el desenvolupament:

- Proporcionar les eines necessàries a l'alumne per tal que pugui manipular, verificar propietats i respondre al problema des d'un punt de vista geomètric a partir de l'enunciat. Aquesta fase comportarà, principalment, l'elaboració del mòdul de creació de construccions geomètriques i de verificació de les seves propietats, la part del sistema que fa possible la comunicació amb l'alumne i la creació de l'estructura geomètrica.
- Adaptar i reelaborar el sistema tutorial intel·ligent que supervisi la resolució del problema i ajudi l'alumne quan detecti que no avança. Això comportarà, essencialment: la definició exacta de les tasques del tutor, el reconeixement de les accions de l'alumne, la cerca de l'acció a l'espai bàsic del problema i l'elaboració i implementació de missatges d'ajuda del tutor.

Aquesta descripció general de la metodologia a emprar inclourà una referència, malgrat que sigui breu, a la redacció final de la memòria del projecte, que ha de tenir almenys un capítol per cadascuna de les fases que defineixen aquest projecte. En concret, ha d'haver-hi una redacció dels referents bibliogràfics, en la qual es fonamenti la investigació, amb comentaris dels punts claus de les investigacions que es citen, i també han de ser explícits els models de comunicació que es presenta en la interacció professor/alumne i d'aquests amb el context. El procés d'anàlisi de les resolucions a la fase d'experimentació amb els alumnes serà detallada i comportarà un esquema teòric inicial en el qual es fonamenti les anàlisis.

El redactat final d'aquesta memòria inclourà també les especificacions detallades del sistema tutorial intel·ligent, així com el disseny de l'estructura i de tots els blocs que conformaran aquest sistema.

1.7. Descripció dels recursos

Per a dur a terme aquest projecte, caldran, entre d'altres, els recursos següents:

a) Recursos bibliogràfics:

Sobre l'observació de la interacció entre el professor i els alumnes en la resolució de problemes.

Sobre l'ensenyament i l'aprenentatge dels processos de resolució de problemes de matemàtiques.

Sobre els conceptes i procediments involucrats en la resolució de problemes geomètrics, en general i, més concretament, d'equivalència, semblança, congruència, àrees, heurístiques, algorísmics, etc.

Els relacionats amb l'arquitectura del programari que pretenem realitzar per a obtenir un dels resultats final d'aquest projecte.

b) Recursos informàtics:

Ordinador amb connexió a Internet, per tal d'iniciar la recerca bibliogràfica. Amb aquesta connexió hauria de poder entrar a la biblioteca de diferents universitats. Això i la recerca bibliogràfica directa a les diferents universitats ens obligarà a desplaçar-nos amb freqüència des de Manresa fins a Bellaterra (Universitat Autònoma de Barcelona). Igualment, utilitzarem l'ordinador per a emmagatzemar les dades que anem obtenint i per a escriure la memòria final.

Els recursos informàtics també seran necessaris per a comunicar-nos amb els nostres companys del projecte de recerca (mitjançant Internet) per tal que hi hagi, en tot moment, un seguiment recíproc del treball que es vagi realitzant i per a atendre, en temps real, els suggeriments que es vagin fent.

c) Altres tipus de recursos com, per exemple:

Els audiovisuals per enregistrar actuacions de professors i d'alumnes quan resolen problemes, fent servir o no l'aplicatiu que finalment obtinguem.

Segurament també caldrà demanar oficialment fotocòpies d'articles i/o de parts de llibres que no estiguin al nostre abast.

I, en general, els que puguin ser necessaris per als instruments d'observació i elaboració del programari que es pretén realitzar en aquest treball.

1.8. Consideracions finals sobre la presentació del projecte

Al llarg d'aquest capítol i, en particular, a la redacció dels objectius, hem anat concretant el que s'espera aconseguir com a resultat final d'aquest projecte. Malgrat això, tot seguit farem un breu resum que el concretarà encara més.

Hem d'aconseguir suficients referències bibliogràfiques que ens permetin afrontar la investigació amb garanties de fer aportacions noves en el camp de l'educació matemàtica i, en especial, en la utilització de l'ordinador com a eina vehicular de l'ensenyament i l'aprenentatge de la resolució de problemes de matemàtiques. Així doncs, la recopilació bibliogràfica fonamentarà el projecte. D'aquesta manera, el que s'ha d'esperar és una redacció que justifiqui bibliogràficament que la tria dels objectius del projecte ha estat encertada, i que responen a les necessitats reals del sistema educatiu.

Hem d'identificar models interactius entre el professor i els seus alumnes en la resolució de problemes de matemàtiques. Aquesta identificació no ha de ser l'objectiu últim, sinó que l'hem de fer servir com a referent de l'últim objectiu d'aquest projecte.

Els resultats d'aquesta fase del projecte han de ser entenedors a nivell del professorat en actiu i els ha de donar pautes clares d'actuació. Només d'aquesta manera aconseguirem reduir el temps que va des que un investigador fa la seva recerca fins que aquesta s'aplica a les aules.

Com a resultat del segon objectiu del projecte, hem d'obtenir un sistema tutorial intel·ligent, que, en implementar-lo, els alumnes puguin resoldre problemes dins de l'àmbit de la geometria plana. Aquest sistema ha de ser accessible a través d'Internet i ha de tenir al seu abast les eines necessàries - geomètriques i deductives- per tal que l'usuari pugui resoldre un problema a partir de seu enunciat, i per tal que el mateix sistema sàpiga reconèixer en cada moment el procés de resolució del problema que segueix l'alumne, validi o no les seves afirmacions, i l'orienti en cas de bloqueig o resolució incorrecta.

CAPÍTOL 2

LA RESOLUCIÓ DE PROBLEMES DE MATEMÀTIQUES A L'ESO I EN EL BATXILLERAT

2. 1. Introducció

L'auge que ha tingut la investigació en resolució de problemes de matemàtiques es manifesta amb la ràpida evolució de les investigacions en els últims anys, considerant, primer, l'estudi dels elements que determinen la dificultat dels problemes; tenint en compte, després, els aspectes relacionats amb la metacognició; per a arribar a la més recent incorporació de l'estudi de les influències socials (Lester, 1994). Aquestes influències socials es fan extensives, en l'actualitat, a la consideració dels ordinadors, no només com a eines mediadores en l'aprenentatge dels alumnes sobre la resolució de problemes, sinó com a part essencial i protagonista d'aquest aprenentatge, en considerar-los interlocutors vàlids en les interaccions amb els alumnes, és a dir, simuladors de les conductes de la tutorització humana.

La dificultat de l'aprenentatge dels continguts procedimentals en la resolució d'un problema fa que aquest sigui un dels temes més adients per ser treballats continuadament i progressiva al llarg de tota l'educació secundària. Per això, la introducció periòdica d'activitats planificades afavoreix l'adquisició i el desenvolupament de les diferents estratègies de resolució de problemes en cada moment del procés evolutiu de l'alumne.

Ara bé, s'ha de procurar que aquesta introducció progressiva i contextualitzada de la resolució de problemes no els converteixi en problemes d'aplicació, per tant, s'ha d'afavorir el fet que sigui el propi alumne (en el grup), amb l'ajut del professor, qui descobreixi els conceptes i procediments en els problemes i situacions problemàtiques que se li plantegin. És a dir, s'ha de tenir presents i analitzar els avantatges i inconvenients de fer servir metodologies en les quals sigui el professor qui faci l'explicació directa dels procediments de resolució, així com de plantejar propostes de resolució de problemes immediatament després d'introduir els procediments de resolució, la qual cosa faria que perdessin el seu caràcter de veritables problemes.

En aquesta línia d'actuació, s'ha de considerar la possibilitat de fer propostes de tutorització compartida –artificial i humana-, que forcin l'alumne a afrontar les resolucions de problemes traient el profit estratègic que tenim programat, però també, el desenvolupament conceptual i procedimental que requereixi l'esmentada activitat.

Aquestes reflexions generals, i d'altres que farem en els següents capítols, sobre aspectes metodològics de l'ensenyament i l'aprenentatge de la resolució de problemes de matemàtiques s'han de fonamentar, per una banda, en la clarificació de la terminologia implicada en el tòpic de la resolució de problemes, i que fem servir al llarg d'aquesta memòria. Així doncs, en la primera part d'aquest capítol tractarem de diferenciar entre problema i situació problemàtica, explicarem el concepte d'espai bàsic d'un problema i el que entenem per procés de resolució d'un problema, així com la diferència entre procediments algorísmics, tècnics i heurístics.

Per altra banda, en la segona part d'aquest capítol, identificarem els aspectes relacionats amb la resolució de problemes que apareixen en el desenvolupament curricular de l'ESO i del Batxillerat, que han de servir de base de les nostres propostes metodològiques. I, per acabar, ja al capítol 3, farem una revisió bibliogràfica de les metodologies proposades per diferents investigadors per ensenyar la resolució de problemes de matemàtiques als seus alumnes.

2.2. Diferenciar entre problema i situació problemàtica

Amb la finalitat d'evitar situacions ambigües, com passa en la utilització que es fa dels termes "situació problemàtica" i "problema" en el desenvolupament curricular de l'Àrea de Matemàtiques (objectius generals i terminals de l'Àrea), precisem a continuació la diferència que n'hi ha i el sentit que donarem nosaltres als diferents conceptes que aniran apareixent al llarg d'aquesta memòria, com per exemple: exercici, problema, situació problemàtica, espai bàsic d'un problema, resolució de problemes i diferents tipus de procediments.

2.2.1. Problema i situació problemàtica

A l'àmbit escolar es parla molt sovint de la diferència entre exercici i problema, sent aquesta diferenciació difícil de fer debut al caràcter subjectiu d'ambdós conceptes. La classificació que fa Butts (cf. Puig, 1996) pot ser clarificadora pel que fa a l'establiment d'una línia de separació entre ambdós conceptes.

Butts, segons Puig, diferencia entre: *"exercici de reconeixement"* –si l'alumne només ha de buscar a la seva memòria el resultat-; *"exercici algorísmic"* –si l'alumne només fa servir un algorisme de forma automàtica-; *"problema d'aplicació"* –si l'alumne coneix el procediment, però ha de justificar que és adient, o si la seva execució ha d'anar acompanyada d'una argumentació-; *"problema de recerca"* –si s'ha de crear el procediment per a arribar a la solució-; i *"situacions problemàtiques"*, en les quals no queden clars els objectius.

No és la nostra intenció arribar a una definició del concepte de problema, ni tan sols fer una revisió de les interpretacions que del terme han fet diferents corrents psicològiques[1], sinó només reflexionar sobre les característiques que creiem que es tindrien que ressaltar quan parlem de problemes en el context escolar.

Si haguéssim d'adoptar una definició objectiva de problema, en el sentit que fos suficientment àmplia per a abraçar problemes de molts tipus, que, a més, s'adaptés a les característiques d'aquesta recerca i, per tant, al tractament informàtic que donarem a la seva resolució, faríem servir una definició basada en els estats del problema. *"Qualsevol definició de problema hauria de consistir de tres idees: 1) el problema està actualment en un estat, però 2) es desitja que estigui en un altre estat, i 3) no hi ha una via directa i obvia per a realitzar el canvi"* (Mayer, 1986, pàg. 19).

Però aquesta definició, possiblement per massa general, no té en compte els quatre aspectes que considerem essencials en la nostra idea de problema de matemàtiques a l'àmbit escolar.

Els dos primers aspectes, tasca i subjecte, estan relacionats fins al punt que , com indica Schoenfeld (1985b), *"ser un problema no és una propietat inherent d'una tasca matemàtica. Més aviat és una relació entre l'individu i la tasca el que fa de la tasca un problema per a aquesta persona"* (pàg. 74).

[1] Tot un ventall de definicions de "problema", contextualitzades en les diferents teories psicològiques, es poden trobar en Puig (1996).

Un tercer aspecte que cal considerar és el context en el qual es presenta el problema, ja que un mateix problema en un context determinat pot tenir totes les característiques d'un veritable problema, però en un altre es pot reduir a una aplicació rutinària de procediments, quan aquests acaben de ser explicats.

Hi ha un quart aspecte que volem comentar. La denominació de problemes matemàtics hauria d'estar reservada per a problemes en els quals la connexió entre els estats inicial i final s'hagués de produir mitjançant la recerca d'algoritmes, l'establiment de relacions o la implicació d'afectes, com indica Callejo (1994), i deixar de banda els que fan servir només grans càlculs numèrics per a trobar la solució.

2.2.2. Espai i espai bàsic d'un problema

La simulació per ordinador de la resolució de problemes va contribuir de forma important a la introducció i el desenvolupament teòric d'alguns conceptes relacionats amb el tema. Així, van ser Newell i Simon, (cf. Mayer, 1986) els que van introduir, el 1972, la idea d'espai d'un problema, definida, en paraules de Mayer, com *"el conjunt de tots els estats (o totes les seqüències possibles d'operadors) que coneix qui resol el problema"* (pàg. 202). Ara bé, els problemes que es van tractar en els inicis van ser problemes en els que queden molt clars els estat inicial, el final, i sobretot, les normes de transformació per a passar d'uns estats a d'altres, potser perquè eren generalment jocs i les normes de transformació estaven molt definides.

En canvi, les normes de transformació dels problemes de matemàtiques dins de l'àmbit escolar són molt més obertes, en molts casos poden presentar ambigüitats i, per tant, molt més difícils de precisar les que intervenen en el pas d'un estat a un altre. Així doncs, la resolució d'un d'aquests problemes comportarà un procés de recerca de possibilitats i d'identificació de normes de transformació (conceptes i procediments) amb molta més profunditat i imprecisió.

En aquest context és particularment important la diferència que Mayer (1986), citant a Newell i Simon, estableix entre l'espai d'un problema, que té per referència un resolutor particular, i l'espai bàsic d'un problema que és *"l'espai del problema generat per algú que resolgui perfectament el problema"* (pàg. 202), és a dir, per un resolutor expert i, per tant, per una persona que identifiqui totes les possibles formes de resoldre el problema.

2.2.3. Procés de resolució d'un problema

Podem aplicar al nostre estudi, amb petites modificacions, la definició que fan Puig i Cerdán (1988) sobre el procés de resolució de problemes: *"L'activitat mental desplegada pel resolutor des del moment en el qual, se'l presenta un problema i assumeix que el que té al davant és un problema i vol resoldre-ho, fins que dóna per acabada la tasca"* (pàg.21).

Sobre aquesta definició hem de fer dues observacions de diferent naturalesa. En primer lloc, l'assumpció, per part de l'alumne, que el que té al davant és un problema -ressaltada per Puig i Cerdán- és, en el nostre cas, obvi des del moment en què els alumnes saben a priori que el que han de resoldre és un problema i assumeixen la seva resolució voluntàriament. En segon lloc, que l'esmentada definició correspon al procés de resolució desenvolupat per un resolutor. Així, s'hauria d'adaptar al cas d'un resolutor, l'actuació del qual es veu recolzada en tot moment per un tutor informàtic que simula les funcions d'un tutor humà i, per tant, s'haurien de considerar les interaccions que es produeixen entre ells, que influeixen en el desenvolupament del procés.

2.2.4. Procediments algorísmics, tècnics i heurístics

Al llarg d'aquesta memòria farem servir moltes vegades els termes procediments tècnics, algorísmics i heurístic (o heurístiques). A continuació, precisarem el significat que nosaltres els donarem.

En els procediments algorísmics estan establertes per anticipat les normes que els desenvolupen, sent aquest tipus de coneixements procedimental bastant semblant al factual pel que fa al seu ensenyament, aprenentatge i avaluació, fins al punt que alguns autors (Baroody i Ginsburg, 1986) el consideren de la mateixa naturalesa (coneixements mecànics). Schoenfeld (1985b) considera entre els procediments algorísmics totes les construccions estàndard amb regle i compàs (traçat de les altures d'un triangle, de la bisectriu d'un angle, etc.), el càlcul de derivades, etc.

Els procediments tècnics (o tècniques) abracen els algorísmics i tots els estan relacionats amb els continguts matemàtics específics dels problemes que es resolen, per exemple, en els problemes de comparació d'àrees, que farem servir als capítols següents, es podrien considerar procediments tècnics l'aplicació o comparació de fórmules, l'aplicació de criteris de congruència de polígons, la triangulació o la quadratura de polígons, etc.

Puig (1996) dóna de l'heurística una definició que ens permet delimitar perfectament els procediments que han de portar aquest qualificatiu: *"El que és propi de l'heurística és l'estudi de les formes de comportament en resoldre problemes i els mitjans que s'utilitzen en el procés de resoldre'ls, que són independents del contingut i que no suposen garantia de què s'obtingui la solució"* (pàg.38).

Aquesta definició, segons indica l'autor, deixa fora dels procediments heurístics els que per a descriure'ls cal fer referència al contingut matemàtic del problema, és a dir, els relacionats amb els elements específic del domini del problema que es resol. Els procediments heurístics obren vies per a poder resoldre un problema, que poden ser recorregudes de diferent forma fent servir diverses tècniques, però que no suposen garantia d'obtenir la solució.

2.2.5. Procediments metacognitius

Als apartats següents farem reflexions sobre els procediments heurístics presents o absents a l'ESO i al Batxillerat. De vegades també farem referència als procediments metacognitius i, en particular, als relacionats amb la gestió dels processos de resolució. Concretem ara el seu contingut i la seva importància i influència en els processos de resolució de problemes.

La metacognició és entesa com reflexió sobre la cognició o pensament sobre el nostre propi pensament. Ja des dels anys 80, Garofalo i Lester (1985), i Schoenfeld (1985b i 1987) van concretar aquesta definició en considerar tres categories: a) El coneixement sobre els teus propis processos de pensament. Com ets de precís per a descriure el teu propi pensament? b) El control o autorregulació, és a dir, la gestió dels processos de resolució; i c) Les creences i intuïcions, és a dir, les idees que es tinguin de les matemàtiques. Totes tres categories, segons moltes investigacions (Hirabayashi i Shigematsu, 1987; Schoenfeld, 1992; McLeod, 1992; Laforune i St-Pierre, 1994; Fernández i altres, 1994; Goos i Galbraith, 1996; Gómez, 2000; Kapa, 2001; Vila, 2002) són claus en l'ensenyament i l'aprenentatge de les matemàtiques i, en particular, de la resolució de problemes i, per tant, es recomanen que es tinguin en compte a les programacions.

Així doncs, totes les mesures que vagin encaminades cap a la incidència en la modificació de les actituds dels alumnes cap a les matemàtiques i que els facin veure la importància de gestionar de forma adient els seus processos de pensament poden contribuir a millorar el seu rendiment.

2.3. Tractament de la resolució de problemes a l'ESO.

Un dels 13 objectius generals de l'educació secundària obligatòria –l'objectiu núm. 10- (Departament d'Ensenyament, 1992) gira explícitament al voltant dels problemes i la seva resolució.

"Identificar problemes en els diversos camps del coneixement i elaborar estratègies per resoldre'ls, mitjançant procediments intuïtius, de raonament lògic i d'experimentació, tot i reflexionat sobre el procés seguit i el resultat obtingut". (Departament d'Ensenyament, 1992, pàg. 2759).

Aquest objectiu assenyala tres aspectes claus pel que fa al tractament, en general, dels problemes dins de l'àmbit escolar, i concretament a la franja dels 12 als 16 anys, que són els següents:

a) La identificació de problemes en els diferents camps del coneixement;

b) L'elaboració d'estratègies per resoldre problemes, fent servir procediments intuïtius, de raonament lògic i d'experimentació; i

c) La reflexió sobre el procés seguit en la resolució d'un problema, i sobre el resultat obtingut.

Són importants els dos primers apartats tant pel que fa a l'aprenentatge que ha de seguir l'alumne perquè sigui capaç d'identificar problemes d'altres camps de coneixement, com pel fet que sigui el mateix alumne qui "elabori" les estratègies per a resoldre els problemes i no es limiti a aplicar les estratègies que prèviament li ha explicat el professor, com assenyala l'apartat *b*, que està d'acord amb psicologia constructivista que serveix de base a l'ordenació del Batxillerat. Però potser la idea que més ens crida l'atenció és la de l'apartat *c*, que introdueix, de forma molt innovadora, la idea de gestió del procés de resolució i, per tant, la idea de metacognició, malgrat que d'una manera molt restringida: limitant-se només a aspectes reflexius sobre el procés de resolució i el resultat obtingut.

Pel que fa a l'Àrea de Matemàtiques, aquest objectiu general, relacionat amb la resolució de problemes, es concreta en els objectius generals i terminals de l'Àrea de la forma que descrivim a continuació.

En els objectius generals i terminals de l'Àrea de Matemàtiques (Departament d'Ensenyament, 1992 i 2002a) es citen els problemes i les situacions problemàtiques com a *"situacions de partida"*, o bé *"situacions plantejades"*. No hi ha, per tant, cap referència explícita a la identificació de problemes en el camp de les Matemàtiques ni en la relació d'aquestes amb d'altres camps de coneixement. Tampoc es fa referència a la generació de situacions problemàtiques noves a partir de les plantejades inicialment. Potser el caràcter instrumental que es dóna a les Matemàtiques sigui el motiu d'aquesta absència, malgrat que aquest no sigui un argument objectiu, segons el nostre criteri.

És ampli el desenvolupament del tipus d'estratègies que s'exigeix que l'alumne utilitzi en la resolució de problemes a l'ESO. De vegades (figura 2.3.1), són estratègies independents dels continguts matemàtics dels problemes plantejats, com per exemple:

- Distinció entre el que es coneix i el que és desconegut (objectiu terminal 3).
- Diferenciació entre la informació útil i la supèrflua (objectiu terminal 3).
- Estimació de possibles solucions (objectiu terminal 3).
- Reduir problemes complexos a d'altres més senzills (objectiu terminal 6).
- Provar propietats per mètodes inductius i deductius (objectiu terminal 7).

- Formular hipòtesis (objectiu terminal 9).
- Buscar exemples i contraexemples (objectiu terminal 9).
- Aplicar algorismes de càlcul amb calculadores (objectiu terminal 20).
- Fer servir el llenguatge algebraic (objectiu terminal 27).

OBJECTIUS GENERALS DE L'ESO	IDENTIFICACIÓ DE PROBLEMES	ELABORACIÓ D'ESTRATÈGIES (els propis alumnes descobreixen l'estratègia que apliquen)	REFLEXIÓ SOBRE EL PROCÉS I LA SOLUCIÓ
OBJECTIUS GENERALS I TERMINALS DE L'ÀREA DE MATEMÀTI-QUES	Cap referència explícita	• Heurístiques • D'altres procediments relacionats amb continguts matemàtics concrets	• Cap referència a la reflexió sobre el procés • Reflexions sobre el resultat • Diferents referències a l'actitud dels alumnes enfront dels problemes.

Figura 2.3.1. Aspectes de la resolució de problemes explícitament citats en el desenvolupament del currículum de l'Àrea de Matemàtiques.

Altres vegades (figura 2.3.1), les estratègies a les quals es refereixen els objectius terminals estan relacionades amb l'aplicació de continguts matemàtics involucrats en la seva resolució, com per exemple:

- Plantejar expressions numèriques i efectuar els càlculs que se'n derivin amb els diferents tipus de nombres (objectiu terminal 18).
- Aplicar les relacions de divisibilitat a problemes de mesura i a altres situacions que ho requereixin (objectiu terminal 24).
- Aplicar les raons trigonomètriques a la resolució de triangles rectangles (objectiu terminal 36)
- Aplicar els teoremes geomètrics (Tales, Pitàgoras, del catet, de l'altura, etc.) en la resolució de problemes (objectiu terminal 37). Etc.

Pel que fa als aspectes metacognitius, en general, i actitudinals, en particular, trobem a faltar referències explícites a reflexions sobre el procés que l'alumne segueix per a obtenir una solució. En canvi, s'afronta la comprovació de la validesa dels resultats trobats de dues formes diferents: contrastant-los raonadament amb els de la situació de partida (objectius terminals 3 i 9), i fent comprovacions experimentals (objectiu terminal 9).

L'actitud dels alumnes enfront dels problemes i situacions problemàtiques és àmpliament desenvolupada. En tenim exemples concrets als objectius terminals 4, 5, 9, etc.

2.4. Tractament de la resolució de problemes en el Batxillerat

Un dels 15 objectius generals del Batxillerat (Objectiu núm. 8) parla explícitament de resoldre nous problemes. Concretament, diu:

"Tenir constància en el treball, confiança en les pròpies possibilitats i iniciativa a l'hora de resoldre nous problemes i aplicar els continguts apresos a la realització de treballs de recerca, tant individuals com d'equip" (Departament d'Ensenyament, 1996, pàg. 2431).

Com es veu, tracta la resolució de problemes d'una manera molt general, limitant-la només a aspectes actitudinals: *"constància en el treball"*, *"confiança"* i *"iniciativa"*, sense cap altra referència a estratègies heurístiques o metacognitives. Potser, la importància d'aquests tipus d'estratègies hagués merescut alguna referència com en el cas dels objectius generals de l'ESO.

2.4.1. Tractament de la resolució de problemes en els objectius generals de l'Àrea de Matemàtiques

Centrant-nos en els objectius generals de l'Àrea de Matemàtiques (Departament d'Ensenyament, 2002b), que abraça les matèries de Matemàtiques i Matemàtiques aplicades a les Ciències Socials, podem dir que els objectius 10 i 11 parlen explícitament de la resolució de problemes:

10. *"Habituar-se a la discussió prèvia en la resolució de problemes i a la comprovació i interpretació de les solucions obtingudes en el context propi del problema"*

11. *"Cercar diversos procediments per a la resolució de problemes, tendint a l'optimització dels processos"*.

En aquests objectius ja es fa referència als hàbits relacionats amb la gestió dels processos de resolució, en particular a les *"discussions prèvies"* i a la *"comprovació i interpretació de les solucions"* (objectiu núm. 10), que es concreta en el contingut procedimental: *"comprovació, anàlisi de la validesa i interpretació pràctica de les solucions obtingudes a partir de les condicions inicials del problema"*. També la gestió es fa evident en la conveniència de buscar diferents procediments en la resolució d'un problema per tal de triar el que optimi el procés de resolució. Aquesta és la interpretació que donem a l'objectiu núm. 11, si observem els continguts sobre resolució de problemes del Decret del Departament d'Ensenyament (2002b), en el qual s'esmenta, concretament, el *"plantejament del problema i obtenció de les possibles solucions al problema".*

La concreció d'aquests objectius generals en els continguts, pel que fa a la resolució de problemes, es fa associant els procediments emprats a continguts conceptuals. Així, es parla de *"resolució de problemes de topografia bàsica",* associats a la resolució de triangles; problemes *"d'optimització funcional"*, associats a les propietats de funcions; de *"geometria analítica",* relacionats amb conceptes de l'espai afí i mètric; etc. Aquestes associacions es posen de manifest en el desenvolupament dels objectius terminals de l'Àrea de Matemàtiques per a les dues matèries de modalitat, com comentarem als paràgrafs següents, i facilita la presentació dels problemes al final d'explicacions dels procediments que tenen a veure amb aquests continguts, el que els treu la seva veritable condició de problemes.

Altres objectius generals de l'Àrea de Matemàtiques (Departament d'Ensenyament, 2002b) també es refereixen a procediments relacionats amb la resolució de problemes, malgrat que no s'esmentin amb aquesta nomenclatura, és el cas dels *"procediments de càlcul aritmètic"* (objectiu núm. 1); *"procediments de càlcul algebraic"* (objectiu núm. 2), com a component d'altres procediments més complexos, malgrat que en aquests casos en els objectius terminals s'associïn a continguts molt concrets; i la utilització de *"procediments de* *raonament lògic",* als quals ens referirem en capítols successius com a habilitats que els nostres alumnes desenvolupen en la resolució de problemes que comparen àrees de superfícies planes.

A continuació comentarem la forma en què aquestes referències a la resolució de problemes i als procediments associats en els objectius generals del Batxillerat i de l'Àrea de Matemàtiques es concreten en els objectius terminals de l'Àrea.

2.4.2. La resolució de problemes en els objectius terminals de l'Àrea de Matemàtiques

Els procediments relacionats amb el càlcul aritmètic i algebraic són fonamentals en la seva aplicació a la resolució de problemes de matemàtiques. I, malgrat que els objectius terminals els associen a continguts matemàtics concrets, el cert és que estan presents pràcticament en qualsevol problema de matemàtiques. Podem citar alguns objectius terminals que fan referència a aquests tipus de procediments, com per exemple, els càlculs numèrics i algebraics relacionats amb les progressions geomètriques i les seves aplicacions en processos d'interès compost i càlcul financer, en el cas de les Matemàtiques aplicades a les Ciències Socials (objectius terminals núm. 8 i 9), i els procediments de càlcul en topografia elemental i la seva associació a la resolució de triangles, en el cas de la Modalitat de Matemàtiques (objectiu núm. 8).

Com en el cas de l'ESO, trobem a faltar referències a un procediment heurístic tan poc considerat com important, és el cas del tempteig o assaig i error. Aquesta absència es fa notar encara més quan en ambdues modalitats es diu: *"... aplicar algun procediment de càlcul aproximat d'arrels de funcions",* i tots saben que, en aquests casos, l'esmentat procediment juga un paper decisiu.

L'Objectiu General núm. 10 de l'Àrea de Matemàtiques (Departament d'Ensenyament, 2002b) es veu clarament desenvolupat en tots els objectius terminals relacionats amb problemes de resoldre sistemes d'equacions lineals, de programació lineal o bé associats a temes d'Estadística, que es presten a la seva relació amb situacions reals i per tant a plantejaments, discussions, resolucions i interpretacions de les solucions trobades. El mateix podem dir dels típics problemes d'optimització que, en el context en el qual es desenvolupen, com aplicacions de procediments bàsics de l'anàlisi funcional, perden, d'alguna manera, la seva entitat de veritables problemes.

Esment especial mereixen els *"procediments de raonament lògic".* Tot i que el raonament lògic ha d'estar present en qualsevol part de les matemàtiques i en qualsevol tipus de problemes i, per tant, en els que hem esmentat anteriorment, els objectius terminals *"valoren els processos inductius i deductius com a eines fonamentals en el treball matemàtic...".* És important aquesta referència malgrat que no s'explicitin més els processos inductius i, sobretot, deductius que es citen. Ambdós són claus en els processos de resolució de problemes en general i, concretament, en els problemes que proposem als alumnes, ja que els processos inductius són generadors de conjectures que, després, s'han de provar de forma deductiva. En aquest sentit, és clara la referència de Polya (1975) a problemes per a resoldre (o de trobar) i problemes per a demostrar (o de provar), sent el propòsit dels primers *"descobrir cert objecte, la incògnita del problema"* (pàg. 161), i dels segons *"mostrar de forma concloent l'exactitud o falsedat d'una afirmació clarament enunciada"* (pàg. 161). Veurem al capítol 7 com el sistema tutorial multiagent que hem construït facilita als alumnes la transformació d'un problema de trobar en un de provar, mitjançant l'establiment d'un conjectura. Aquest canvi modifica sensiblement la forma d'actuar dels alumnes en la resolució d'un problema.

En relació als procediments de raonament lògic, potser trobem a faltar referències més explícites a formes deductives que, de fet, es fan servir sobretot a la Modalitat de

Matemàtiques. Ens referim, concretament, a la reducció a l'absurd, a la demostració per contrarreciprocitat, a la demostració indirecta, o el més utilitzat procediment de treball cap enrera, que desvinculat de cap contingut matemàtic conceptual és acceptat pels alumnes amb molta naturalitat i de manera molt senzilla (Cobo, 2004).

CAPÍTOL 3

MODELS INSTRUCTIUS PER A L'ENSENYAMENT DE LA RESOLUCIÓ DE PROBLEMES DE MATEMÀTIQUES

3.1. Introducció

Els treballs de Polya (1975) són el primer referent important sobre resolució de problemes. Polya reflexiona sobre els seus propis processos de resolució i genera un model de resolutor ideal que considera quatre fases: comprensió, elaboració d'un pla, execució del pla i visió retrospectiva, a les quals associa les preguntes: per on he de començar?, què puc fer?, i què guanyo fent això? La seva proposta del que ha de fer el professor per a introduir l'alumne en la resolució de problemes es la imitació i la pràctica: *"quan el professor fa als seus alumnes una pregunta o un suggeriment de la llista, pot proposar-se dues finalitats. La primera, ajudar l'alumne a resoldre el problema en qüestió. La segona, desenvolupar l'habilitat de l'alumne de tal forma que pugui resoldre per sí mateix problemes posteriors"* (pàg. 27).

Amb aquesta breu ressenya sobre Polya, iniciem un capítol en el qual farem una revisió bibliogràfica, que no pretén ser exhaustiva, de propostes metodològiques, la finalitat de les quals sigui l'ensenyament de totes les estratègies involucrades en la resolució de problemes de matemàtiques, ressaltant de cadascuna d'elles els aspectes que ens han semblat interessants i que poden tenir incidència en l'elaboració dels sistemes de missatges que farem al capítol 5, que serviran com a base dels tipus d'ajuts i suggeriments que implementarem en el sistema tutorial AgentGeom. Així doncs, començarem resumint la recopilació de perspectives dels últims 25 anys sobre l'ensenyament de la resolució de problemes que va fer Kilpatrick(1985), per a continuar amb la proposta metodològica de Krulik i Rudnick (1987), de la que ressaltarem aspectes relacionats amb la comprensió de l'enunciat del problema, les formes d'agrupament dels alumnes per a treballar la resolució de problemes, i les propostes sobre l'actuació del professor davant de situacions de bloqueig de l'alumne.

La continuació d'aquesta revisió bibliogràfica no pot ser altra que la introducció de la metacognició en els programes instructius dels alumnes, que va ser considerada primerament per Garofalo i Lester (1985), Lester (1985) i per Schoenfeld (1985a, 1985b), adaptant la definició de Flawel a la resolució de problemes, malgrat que ja al 1982, quan va sortir la primera edició de Mason, Burton i Stacey (1988), aquests autors, a proposta de Schoenfeld, inclouen al seu llibre un capítol dedicat a la gestió del procés de resolució o en paraules dels autors *"l'activitat de raonar la descriurem com si hagués un agent independent dintre de tu que et va aconsellant el que has de fer,..., gairebé igual que un tutor personal que et vigila i et fa les preguntes oportunes..."* (pàg. 126).

Una descripció del model de Stacey i Groves (1999), dels suggeriments d'O'Daffer (1995), i les propostes metodològiques de Callejo (1994) i Puig (1996) completen la primera part d'aquest capítol. Totes les propostes metodològiques anteriors consideren l'ensenyament i l'aprenentatge de les estratègies involucrades en la resolució de problemes com a objectiu principal i, fins i tot, únic. A la segona part d'aquest capítol fem una breu descripció de dues propostes metodològiques en les quals la resolució de problemes està integrada en el currículum de matemàtiques com un objectiu més: el projecte MAT_{789}, desenvolupat per Abrantes (1996), i els de més tradició de la NCTM (2000).

Les continues referències en les propostes d'ensenyament de la resolució de problemes anteriors a les formes d'agrupar els alumnes i la importància de l'actuació del professor en la instrucció de la resolució de problemes (Lester, 1994) -sigui com a referent o model a imitar, com a guia o simplement com a moderador- ens han portat a incloure en aquest capítol una tercera part en la qual identifiquem diferents patrons interactius entre alumnes i d'aquests amb el professor en l'ensenyament de la resolució de problemes, que van des de la consideració del professor com a expositor magistral fins a l'ensenyament cooperatiu de la resolució de problemes en grups petits d'alumnes.

3.2. Recopilació de perspectives sobre l'ensenyament de la resolució de problemes de matemàtiques de Kilpatrick

Kilpatrick (1985), en una revisió restrospectiva dels 25 anys sobre investigació en ensenyament de resolució de problemes matemàtics, agrupa les diferents perspectives en cinc categories, que les anomena amb noms que reflecteixen l'èmfasi de cada aproximació: osmosi, memorització, imitació, cooperació i reflexió.

a) Osmosi

La instrucció que segueix el procés que Lester anomena osmosi consisteix a submergir l'alumne en un entorn de resolució de molts problemes, fent servir tècniques i procediments, i esperant que, d'alguna forma no explícita, l'alumne les aprengui per un procés semblant a l'osmosi. Com assenyala Puig (1996), *"l'organització de l'ensenyament consisteix bàsicament en l'elaboració d'una col·lecció de problemes que contingui implícitament el que es vol ensenyar i en l'establiment d'una seqüència adient de presentació als alumnes"* (pàg. 84). A més, Lester (1985) va indicar que resoldre molts problemes durant molt temps és un mètode d'instrucció efectiu per a aprendre a resoldre problemes.

b) Memorització

Els mètodes instructius sobre resolució de problemes que abraça aquest títol es caracteritzen perquè la solució del problema és descomposta en procediments atòmics que són ensenyats i apresos per separat pels alumnes com si fossin fets aïllats de coneixement. S'insta als alumnes a aprendre els passos que s'han de fer en la resolució. Aquesta forma d'instrucció pot ser vàlida per als problemes que es resolguin mitjançant algorismes, però l'ensenyament de les estratègies heurístiques fent servir procediments de memorització és difícil per als alumnes i, com argumenta bibliogràficament, ja en aquesta època, Kilpatrick, pot ser fins i tot contraproduent, ja que els alumnes troben dificultat per a classificar els problemes en diferents tipus.

c) Imitació

El procés d'imitació comporta la comparació de la solució d'un resolutor expert amb la de l'alumne, o l'observació de la conducta d'un resolutor expert que simula ignorància, incertesa, i aleshores garantitza el desenvolupament de diferents procediments de resolució de problemes a la seva classe per tal que els alumnes acabin imitant-lo....

d) Cooperació

A començament i mitjans dels anys 80, les investigacions utilitzen cada cop més grups d'alumnes en la resolució de problemes, i defensen aquestes agrupacions com a vehicles d'instrucció. Segons Kilpatrick, *"les discussions en grups petits poden ajudar els alumnes a* *clarificar conceptes i repassar procediments en formes que són difícils de fer treballant sols"* (pàg. 10).

e) Reflexió

Com indica Kilpatrick, el lema de John Dewey que diu que *"els alumnes aprenent fent"* ha passat a ser el que diu Papert (cf. Kilpatrick,1985): *"els alumnes aprenent fent i pensant sobre el que fan".* Aquest pensar sobre el que es fa va donar pas a la introducció dels processos metacognitius, la finalitat dels quals és que els alumnes arribin a reflexionar sobre el progrés de la resolució de problemes i avaluïn l'efectivitat dels procediments que fan servir.

3.3. El model de S. Krulik i J. A. Rudnick

El model de Krulik i Rudnick (1987)[2], que és una extensió derivada de Polya (1975), s'aproxima a la instrucció de la resolució de problemes considerant conjunts d'estratègies agrupades segons les fases del procés de resolució: llegir, explorar, seleccionar una estratègia, resoldre, i revisar i estendre. Aquestes fases formen part d'un procés continu de pensament, que es desenvolupa de forma lineal.

A més, les autores presenten suggeriments que el professor pot fer servir a les seves classes per a assistir els alumnes en la utilització del model heurístic en el seu desenvolupament de les habilitats de resoldre problemes, és a dir, el que és important és que els alumnes aprenguin d'aquest model heurístic, en concret, el desenvolupament d'un conjunt de preguntes que s'han de fer, i ser capaços de referir-se contínuament a elles quan passin per les diferents fases de la resolució del problema. D'entre els 16 mètodes que presenten ressaltem els cinc següents: a) ensenyar els alumnes a llegir el problema, b) grups de treball, c) suggeriment d'alternatives quan l'estratègia que segueixen ha ofert tota la informació possible, d) produir preguntes creatives i constructives i e) no ensenyar noves matemàtiques mentre s'ensenya a resoldre problemes.

a) Ensenyar els alumnes a llegir el problema

És fonamental per a resoldre qualsevol problema comprendre el seu enunciat, és a dir, a partir d'una presentació escrita, que és la forma normal de proposar els problemes en el context de l'escola, identificar les idees essencials i les seves implicacions per a arribar comprendre la situació que descriu l'enunciat.

Hi ha moltes tècniques que ajuden els alumnes a desenvolupar una lectura crítica, com les que assenyalen Krulik i Rudnick (1987): fer que els alumnes identifiquin paraules claus i discutir a la classe perquè ho són, o, ja que en matemàtiques hi ha paraules amb significats especials, discutir-ne a classe algunes (volum, funció, diferència, potència, etc.). Una altra tècnica és mostrar als alumnes figures, gràfics , dibuixos, etc., i demanar-los-en coses, ja que, moltes vegades, la informació que dóna un problema es troba en una figura o dibuix que es subministra. O fer activitats amb els alumnes consistents en, a partir d'unes dades o sentències escrites, construir problemes que tinguin a aquestes dades o sentències per resultats o com informacions per a obtenir nous resultats.

b) Grups de treball

Krulik i Rudnick (1987) asseguren que és aconsellable treballar la resolució de problemes en parelles o en petits grups, ja que la interacció ajuda els alumnes a aprendre la forma de modificar el pensament dels seus companys i a defensar les seves posicions mentre considera les posicions dels altres. A més, els alumnes tenen l'oportunitat de millorar les

[2] La primera edició de la publicació de Krulik i Rudnick va ser al 1980

formes d'expressió del que pensen, fent servir de forma precisa el llenguatge, especialment la terminologia matemàtica.

Les autores animen que a les classes es treballi com les empreses, és a dir, en equip i aportant i compartint idees (remolí d'idees). En aquesta tasca d'aportar i compartir idees, que no és habitual fer-la a classe, el professor ha de jugar el paper de guia per tal que els alumnes adquireixin experiència i, en aquest paper, ha de transmetre als alumnes quatre idees bàsiques sobre aquesta tècnica del remolí d'idees: no està permès cap tipus d'avaluació de les idees aportades, s'ha d'animar els alumnes a deixar anar la seva imaginació, a aportar el màxim nombre d'idees possibles, i a crear noves idees o a modificar les dels altres.

c) Suggeriment d'alternatives quan l'estratègia que es segueix ha ofert tota la informació possible

Segons Krulik i Rudnick, els professors s'equivoquen quan, davant d'una situació de bloqueig per part de l'alumne, els suggereixen les direccions més eficients per a resoldre el problema. En aquestes situacions, el professor ha de fer que l'alumne torni a una fase d'exploració i tingui en compte, a més del que ha fet, totes les possibles estratègies i formes d'apropar-se a la solució d'un problema que facin que tingui la possibilitat de canviar l'estratègia errònia (o sense fruit) que havia començat. Així doncs, el professor guiarà l'exploració addicional de l'alumne indicant fets, inferències, suggeriments o missatges, que nosaltres hem anomenat de canvi d'estratègia (veure el capítol 6). Aquests missatges de canvi d'estratègia abracen formes diferents d'enfocar la resolució del problema.

d) Produir preguntes creatives i constructives

Els professors tenim tendència a donar als alumnes informacions decisives sobre la resolució del problema quan aquests estan bloquejats, fins i tot mostrant-los la solució completa, o fent preguntes que els condueixen directament a la solució del problema. Alguns dels principis bàsics en l'ensenyament de la resolució de problemes, reiterats per molts investigadors son, per una banda, que els alumnes han de tenir temps per a resoldre cada problema i, per l'altra, que en la resolució l'alumne ha de ser `protagonista, és a dir, el professor només ha de fer els mínims suggeriments imprescindibles per a orientar l'alumne, sense mostrar-li mai la solució o sense fer-li mai preguntes que incloguin massa informació. Així, Krulik i Rudnick proposen preguntes obertes que poden desbloquejar, sigui de la forma: quants...?, compte el nombre de...?, troba...?, o preguntes que posin èmfasi sobre el procés que ja s'ha seguit: examina el procés que has seguit, identifica els punts claus, què passa si...?, quines noves preguntes ets suggereix això?, com deus fer aquesta pregunta?, tracta de reconèixer un model, prova una altre camí, què passa si modifiques les condicions del problema?, etc. Com s'observa, preguntes molt generals que només tracten d'orientar l'alumne. En qualsevol cas, les autores abans esmentades indiquen que s'ha de ser curós amb tres aspectes que elles assenyalen:

> *"1. La teva pregunta no ha de ser canviada o alterada mentre els alumnes la estan considerant.*
>
> *2. Deixa als alumnes un temps ampli abans de formular la següent pregunta.*
>
> *3. No has de respondre la pregunta que has fet fins que estiguis segur que els alumnes han acabat les seves respostes. Potser aleshores, un suggeriment o comentari addicional pot conduir-los en la direcció correcta."* (pàg. 59).

d) No ensenyar noves matemàtiques mentre s'ensenya a resoldre problemes

En contraposició amb d'altres propostes sobre l'ensenyament de la resolució de problemes integrades en el procés d'aprenentatge de nous continguts matemàtics (veure l'apartat 3.10), Krulik i Rudnick creuen que, quan es fa resolució de problemes, l'objectiu principal ha de ser l'aprenentatge de les estratègies involucrades en aquesta resolució. Això no vol dir que els problemes proposats no facin servir cap tipus de conceptes i tècniques matemàtiques, sinó que els que utilitzin estiguin a l'abast dels alumnes que resolen el problema, és a dir, el procés de resolució de problemes emergirà com l'objectiu principal de l'activitat si el nivell dels continguts matemàtiques (conceptuals i tècnics) es manté dins dels coneixements dels alumnes.

3.4. Les reflexions metodològiques de A. H. Schoenfeld sobre l'ensenyament de la resolució de problemes

Schoenfeld (1985a) ja tenia en premsa el seu llibre Mathematical problem solving (1985b) quan va exposar a Madrid els seus *"suggeriments per a l'ensenyament de la resolució de problemes"* al VI Simposi sobre matemàtiques. D'aquestes reflexions i de les aportacions posteriors fetes per l'autor, relacionades amb la instrucció de la resolució de problemes, fem un resum a continuació, ressaltant els aspectes que més ens interessen.

No existeix una única manera *"correcta d'ensenyar a resoldre problemes, ... existeixen tantes maneres d'ensenyar eficaçment a pensar matemàticament com existeixen professors de talent"* (Schoenfeld,1985a, pàg. 31). Amb aquest plantejament inicial, Schoenfeld exposa diferents formes d'actuar que ha experimentat a les seves classes (amb alumnes del primer curs de la universitat), amb la idea que cada professor pugui adaptar la més adient al seu estil.

a) El professor com un model de comportament

Existeixen tres formes d'actuar que segueixen aquest model

- Seguint el model pas a pas,

En aquesta forma d'actuar, el professor va resolent el problema concret a poc a poc i, al mateix temps, va explicant els passos que va realitzant, fent-se en veu alta les preguntes i reflexions com les que s'hauria de fer l'alumne: què fer quan un s'enfronta a un problema com aquest?, no tinc un procediment generalitzat per a trobar..., probablement el millor que puc fer en aquest moment és examinar alguns exemples senzills, encara no intueixo el que està passant, el més intel·ligent seria triar polinomis que..., ja està!, això funciona, en aquest moment puc seguir dos camins, etc., fins a arribar a la proposta de fer una revisió general, examinant d'on va sorgir la inspiració de la demostració que ha portat a terme, identificant dos moments claus: la consideració de casos més senzills, i el segon va ser quan es va tornar a les condicions del problema, examinant i buscant connexions concretes entre elles i els resultats que es buscaven, amb preguntes com, què significa que...?, com és...?, com podem aconseguir...?, etc.

En aquest mateix context, Schoenfeld (1987) proposa una primera tècnica per a ensenyar els components metacognitiu, especialment els que tenen a veure amb els elements de gestió i control dels processos de resolució, que és la utilització de vídeos que analitza amb els seus alumnes amb la finalitat que prenguin consciència dels seus propis processos de pensament. Parteix de la base que el coneixement de la nostra pròpia conducta intel·lectual és el primer pas per a canviar-la. En la segona tècnica, la conducta metacognitiva del professor es pren com un model. Però aquesta conducta del professor no ha de ser la de mostrar les solucions que ha trobat del problema proposat, sinó, més aviat, presentar la resolució completa del problema i els processos de pensament involucrats, per exemple, mirar diferents casos per a estar segurs de la comprensió del problema, tractar de fer diferents exploracions i de preveure diverses coses que es puguin realitzar, generar diverses aproximacions raonables, decidir entre elles, etc.

Com assenyala l'autor, aquestes dues tècniques consideren l'alumne com un espectador, és a dir, en aquesta forma d'actuar la comunicació només es produeix del professor cap a l'alumne, sense que aquest es vegi involucrat en la resolució, sense que això suposi una experiència personal, i sense que els alumnes posin en pràctica les seves habilitats metacognitives.

- Resoldre el problema amb l'alumne, fent servir les seves idees

La idea és que la classe sencera resolgui conjuntament el problema, actuant el professor com a moderador i com a gestor de la classe, plantejant preguntes "executives" amb la idea que siguin els mateixos alumnes els que se les facin després d'una fase d'aprenentatge. Aquestes preguntes serien del tipus: *"té algun suggeriment a fer?, una altra cosa?, que et va fer pensar això?, que et fa pensar en això com una cosa raonable? Molt bé, tenim les següents idees. Quina podem posar en pràctica?, què et fa pensar que és més adient? Quan acabem, com seguiràs? Molt bé, et sona lògic?, vols que ho intenti?"* (Schoenfeld, 1985a, pàg. 37). I continua amb expressions com: bé, portem fent això cinc minuts i no ens condueix enlloc, esteu segurs que compreneu bé el problema?, etc.

Tot aquesta pràctica acaba donant fruits quan en un moment determinat de l'aprenentatge el professor demana als alumnes: quina pregunta faré ara?, i els alumnes acaben sabent-la.

Amb aquesta forma d'actuar el professor va introduint l'alumne en el control del seu procés de resolució.

- El professor tracta de resoldre el problema sense preparació prèvia

Que el professor es trobi en les mateixes situacions que els alumnes quan resolen problemes és de vegades formatiu perquè les explicacions del professor no tindran el caràcter artificial que tenen les explicacions preparades prèviament. A més, d'aquesta manera es desmitifica la idea del professor com resolutor infal·lible de problemes.

b) El professor com un entrenador

Schoenfeld estableix un paral·lelisme entre la tasca d'un entrenador en un esport qualsevol i la d'un professor que ensenya als seus alumnes la resolució de problemes. En aquesta tasca el professor s'ha de comportar de la mateixa forma que un entrenador que prepara a un esportista. L'entrenador no només tracta d'ensenyar les tècniques bàsiques o procediments habituals propis de l'esport corresponent, sinó que ajuda els esportistes a saber prendre decisions intel·ligents durant la realització de les proves. D'alguna manera, el professor, com l'entrenador, ha de transmetre a l'alumne la necessitat que prevegi les formes d'actuar que siguin més adients.

Schoenfeld també aporta idees sobre la necessitat de fer veure als alumnes la possibilitat de resoldre un problema de múltiples formes, o la proposició de problemes que dins del context en el qual s'expliquen els continguts matemàtics poden ser molt elementals, però que fora d'aquests contextos poden resultar estimulants i instructius, així com que els problemes llargs i tediosos poden ser també importants.

c) Organització de la classe per a resoldre problemes

El lema del que parteix Schoenfeld és que els alumnes aprenen fent, no mirant. I, segons aquesta idea, planteja les seves classes amb molt poca estona dedicat a introduccions teòriques (al voltant d'un 10%), un altre temps semblant, durant el qual els alumnes resolen els problemes conjuntament amb el professor i la resta de la forma següent:

- Discussió dels problemes resolts a casa

Si algun alumne ha resolt el problema a casa, el professor ha d'animar els alumnes que facin dos tipus de preguntes: si és correcta o no la solució proposta i per què hem d'acceptar-la, i d'on ha sortit aquesta solució, és a dir, què és el que ha portat a aquest alumne a resoldre el problema d'aquesta forma i per què?

- Treballar els nous problemes en grups petits

Quan els alumnes reben nous problemes es distribueixen en grups de quatre o cinc alumnes i comencen les resolucions. Mentrestant, el professor va actuant com a assessor amb el propòsit no que els alumnes obtinguin les respostes correctes, sinó que estiguin actuant de forma raonable, és a dir, que siguin capaços de detallar qualsevol operació que estiguin fent, que puguin justificar el perquè d'aquesta operació i que puguin dir el que faran amb el resultat segons s'apropin a la solució del problema.

Per a Schoenfeld, el treball en grups petits es justifica per l'oportunitat que tenen els alumnes d'intervenir directament en el procés de resolució del problema, sense haver d'enfrontar-se amb el problema ja acabat. També, el resoldre els problemes en grups provoca discussions sobre les diferents possibilitats, que no es produeixen en la resolució individual. Les propostes de diferents maneres d'enfocar les resolucions i el decidir sobre elles enriqueix molt el procés de resolució. Una altra raó dels avantatges del treball en grups és que els dóna confiança ja que permet veure les dificultats dels companys, contribuent a superar la inseguretat que els alumnes mostren quan s'enfronten a la resolució de problemes.

En treballs posteriors, Schoenfeld (1987) explica que, des del començament del procés instructiu, informa als seus alumnes del dret que ell es reserva de fer-los les següents preguntes: *"què és (exactament) el que estàs fent? (pots descriure-ho amb precisió?); per què ho estàs fent? (com s'ajusta el que fas amb la solució?); com t'ajuda? (què faràs amb el resultat quan l'obtinguis?)"* (pàg. 206).

- Treballar la classe sencera sobre problemes tractats en els grups

Després que els alumnes han tingut l'oportunitat d'aprofundir en el problema proposat, l'autor reuneix a la classe sencera per tal d'estudiar la resolució pas a pas. Els alumnes fan suggeriments i el professor actua com a moderador.

Després, Schoenfeld (1987) explicita molt més a la seva tercera tècnica sobre l'ensenyament dels procediments metacognitius, en la qual explica: *"quan la classe treballa sencera, pren el paper de supervisor i d'orquestrador dels suggeriments dels alumnes. No tracto de guiar els alumnes cap a les solucions correctes, basades en el meu coneixement de les matemàtiques. Això és la tècnica estàndard usada en els diàlegs socràtics –una tècnica de cert valor, però no apropiada per als objectius que ens proposem-. Millor, la meva tasca és ajudar els alumnes a fer el màxim dels que ells mateixos generen i ajudar-los a reflexionar sobre com fer-ho"* (pàg. 201). Per tant, aquesta tècnica va en la direcció d'ensenyar als alumnes a reflexionar sobre els que ells proposen.

Els treballs de Schoenfeld sobre la resolució de problemes són múltiples. Per exemple, al seu llibre Mathematical problem solving, pel qual l'autor és més conegut, analitza els components del coneixement i de la conducta dels alumnes quan resolen problemes de matemàtiques, des de la consideració dels coneixements de base dels alumnes, de les estratègies de resolució dels problemes, de la gestió i control del procés de resolució, i del sistema de creences i afectes de l'alumne, als quals, més tard (Schoenfeld,1992) incorpora les pràctiques.

3.5. El model de Garofalo i Lester

Garofalo i Lester (1985), i Lester (1985) fan el següent plantejament: si partim de la base que les accions metacognitives són les forces que guien la resolució de problemes, i davant del fet que el model de Polya (1975) no les considera, és necessari proposar un model instructiu sobre la resolució de problemes que abraci el model cognitiu de Polya, amb les seves quatre fases (comprensió, planificació, desenvolupament del pla i mirada cap enrere), i les components metacognitives. Amb aquest raonament sorgeix el model cognitiu-metacognitiu de Garofalo i Lester, que integra els components cognitiu i metacognitiu. El cognitiu comprèn les mateixes quatre categories de l'activitat proposades per Polya, però anomenades d'una altra forma per a ressaltar la interactivitat: orientació, organització, execució i verificació. El metacognitiu guia les accions cognitives i considera les variables de persona, de tasca i d'estratègia.

Les variables de persona abracen les creences de l'alumne i les seves característiques afectives, que influeixen en la seva actuació (motivació, ansietat, perseverança, etc.), així com la valoració de l'alumne de la seva capacitat i limitacions respecte a una tasca matemàtica concreta.

La consciència que l'alumne té de les característiques de la tasca poden influenciar la seva actuació en la resolució d'un problema. Les variables relacionades amb aquesta conscienciació formen part de les variables de tasca, que Garofalo i Lester classifiquen en cinc sots-categories: contingut, context, estructura, sintaxi i procés.

Les variables d'estratègia inclouen la consciència de l'alumne de les estratègies que li ajuden en la comprensió, planificació, execució del pla i revisió i verificació. Per exemple, ser conscient del valor de la identificació de les paraules claus de l'enunciat d'un problema, el reconeixement de la utilitat de fer un dibuix o un esquema per a representar la informació, saber quan usar una determinada heurística (treball cap enrere, problema equivalent, etc.), i saber com i quan gestionar el procés de resolució.

El model cognitiu-metacognitiu no només considera aquests components de forma aïllada, sinó que inclou la seva interacció, com una part essencial del mateix. Així, es poden establir interaccions entre variables de persona i de tasca, que inclouen estimacions dels alumnes sobre la dificultat i preferència d'un tipus de tasca o un altre; interaccions entre variables de persona i estratègia, que consideren la familiaritat i confiança amb les estratègies potencialment útils; interaccions entre variables d'estratègia i de tasca, com la conscienciació que un tipus concret de problemes poden ser resolts fent servir una determinada estratègia, o que un problema d'enunciat llarg ha de ser llegit diverses vegades. Com indiquen Garofalo i Lester, la interacció de *"les tres variables del component metacognitiu té un impacte directe sobre la conducta cognitiva"* (pàg. 64).

Garofalo i Lester tradueixen la interacció entre el components cognitiu i metacognitiu, responent a la pregunta: com, quan i fins a quin punt la metacognició guia, dirigeix i regula la resolució del problema? La resposta que proposen és tot un seguit de reflexions i suggeriments, que ells anomenen decisions metacognitives que relacionen les tres variables del component metacognitiu amb les quatre fases del component cognitiu, algunes de les quals mostrem a continuació.

Pel que fa a la fase d'orientació, les decisions metacognitives que proposen serien les següents: miro les paraules claus, elles em diran el que he de fer, els nombres d'aquest problema són massa grans, sembla un problema tipus, no sé el que fer per a resoldre aquest problema, hi ha massa nombres, no és com els que he fet abans.

A la fase d'organització: penso que el problema pregunta per..., puc resoldre el problema trobant..., penso que hauria d'operar aquests nombres, no estic segur però crec que el mètode podria funcionar per aquest tipus de problema, no estic segur què he de fer, primer tractaré d'endevinar-ho, aquest és un problema tipus, el resoldré com els altres.

A la fase d'execució: hauria d'anar més a poc a poc, això és complicat, hauria de seguir els passos amb cura, aquest mètode no funciona, provaré una altra cosa, necessito vocalitzar el que estic fent per tal que això em guiï pel bon camí, necessito escriure aquests passos.

I, per últim, a la fase de verificació: no vaig ser curós, hauria d'haver corregit els meus passos, no estic segur que aquest pla sigui apropiat, hauria de mirar-m'ho una altra vegada, no estic segur que hagi entès el problema, ho tornaria a llegir un altre cop, la resposta sembla massa gran, hauria de corregir el meu treball, pensava que era un problema tipus però no crec que ho sigui.

3.6. El model de K. Stacey i S. Groves

Ja des del pròleg, Stacey i Groves (1999) es plantegen la pregunta: com ensenyar a resoldre problemes als alumnes de secundària?, i comenten la necessitat de fer aquest ensenyament de forma que no sigui rutinari, així com el paper fonamental que juga el professor, que és l'encarregat de crear una *"atmosfera de confiança i desafiament a la vegada, d'ajudar els alumnes que estan bloquejats (sense donar-los les respostes), de mostrar la utilitat d'algunes estratègies i la forma d'utilitzar-les"* (pàg. 11).

Stacey i Groves resumeixen el paper del professor en cinc funcions bàsiques: ajudar els alumnes a acceptar els reptes, crear un ambient de confiança a la classe, permetre que els alumnes desenvolupin les seves pròpies idees, proporcionar als alumnes un marc en el qual puguin reflexionar (pensar, escriure i discutir) sobre els processos en els quals estan immergits, i parlar als alumnes sobre aquests processos.

A més, les autores assenyalen els moments claus de l'ensenyament de la resolució de problemes, dient: *"una de les tasques més difícils amb la qual el professor s'enfronta és trobar el just equilibri entre dir als alumnes massa i deixar-los bloquejats molta estona. És contraproduent que els alumnes se sentin bloquejats, incapaços de moure's, però també ho és el fet que una altra persona els resolgui el problema"* (pàg. 16). I continuen dient que el més adient potser seria donar ànims als alumnes, amb preguntes semblants a les següents: estàs bloquejat?, no et preocupis, què podries intentar?, o d'altres relacionades amb suggeriments de canvis d'estratègies: has buscat alguna regularitat?, què aconsegueixes si trobes les diferències entre aquests nombres?, etc. En qualsevol cas, per desbloquejar-se, els alumnes han de reconèixer que estan bloquejats i fer-se preguntes del tipus: quines coses sé sobre el problema?, què vull trobar?, què puc usar que m'ajudi?, puc fer una conjectura?, puc comprovar el que he trobar?

Els suggeriments que les autores consideren útils per a superar aquestes situacions de bloqueig en les diferents fases de la resolució d'un problema els resumim als següents apartats: *a)* en començar, llegeix l'enunciat i tracta de comprendre'l bé, procura que els alumnes es facin les preguntes: què sé sobre el problema?, i què vull fer?, i que recorrin sempre que estiguin bloquejats a la lectura de la pregunta de l'enunciat; *b)* escriu el que fas, les autores donen especial importància a l'escriptura del que es fa perquè escriure un pla obliga a clarificar les idees. *c)* Treballa sistemàticament, aquest hàbit et pot ajudar a saber cap a on vas, i pot ajudar a respondre la pregunta què puc usar que m'ajudi?, amb la consideració de diagrames, taules, etc.; *d)* usa alguna cosa que t'ajudi: material útil (paper apropiat, fitxes...), o alguna eina matemàtica que coneguis (gràfics, àlgebra...), escrius el que fas, etc. *e)* Si et sembla que has acabat (procés de verificació), explica com l'has fet de forma que un altre alumne pugui entendre les teves explicacions, revisa el que has fet i fes un informe, comprova el teu treball, etc. A més d'explicar el que l'alumne ha fet és important comminar-lo a explicar perquè l'ha fet. Al final de cada procés de resolució, seria bo que l'alumne sempre es plantegés la pregunta: què passaria si...?, amb la idea de generalitzar el problema que s'ha resolt.

L'experimentació que Stacey i Groves porten a terme del seu model la fan assajant amb la classe sencera, és a dir, els alumnes treballen individualment amb fitxes guiades de cada problema, malgrat que les autores considerin que pot ajudar a la comprensió del problema el fet que puguin treballar en grups de dos o tres alumnes.

3.7. Els suggeriments d'O'Daffer i altres sobre l'ensenyament de la resolució de problemes

O'Daffer (1995) és coautor i editor d'un llibre format per tot un seguit d'articles de diferents autors (el mateix O'Daffer, Nelson, Schaaf, Silver, Adams, Burns, Charles, Greens, Immerzeel, entre d'altres), que tracten de respondre a la pregunta: què podem fer a les nostres classes per a ajudar els alumnes a ser millors resolutors de problemes?

En el seu camí d'ajudar l'alumne, consideren la resolució de problemes com un procés que requereix diferents fases: comprendre el problema, tractar les dades, planificar una solució, trobar la solució i analitzar-la i avaluar-la.

El programa instruccional que proposen diferencia entre estratègies de resolució de problemes, associades amb els procediments heurístics com, per exemple, l'ús del raonament lògic, fer una taula, l'ús de raonament visual, trobar un model, fer una llista, fer o usar un dibuix, resoldre un problema més senzill, etc., i les habilitats, més relacionades amb la gestió del procés de resolució i, per tant, amb les formes de fer suggeriments per tal que l'alumne aprengui a fer-se preguntes intermèdies sobre el desenvolupament de l'esmentat procés.

El programa instruccional suggereix set objectius:

- Usar habilitats de pensament en la resolució de problemes,
- Seleccionar i usar estratègies de resolució de problemes,
- Construir actituds i creences útils sobre la resolució de problemes,
- Usar coneixements que tinguin a veure amb la resolució,
- Controlar i avaluar els seus pensaments i progrés durant la resolució,
- Resoldre problemes en situacions d'aprenentatge cooperatiu, i
- Trobar respostes correctes a una varietat de problemes.

Per tal d'aconseguir aquests objectius, els diferents autors mostren els seus suggeriments en esquemes, agrupats en quatre seccions: desenvolupant estratègies de resolució de problemes, estenent les estratègies de resolució de problemes, desenvolupant habilitats de resolució de problemes, i implementant un programa de resolució de problemes. Per a cadascuna d'aquestes seccions presenten, per una banda, un o diversos problemes que il·lustren una estratègia de resolució i, per altra, suggeriments sobre la forma d'ensenyar sota diferents epígrafs: el clima de la classe, donar-lo a provar, desenvolupant habilitats de resolució de problemes, racó de problemes, etc.

A continuació mostrem alguns dels suggeriments, la finalitat dels quals és aconseguir els objectius referits anteriorment.

a) Desenvolupament d'habilitats sobre la resolució de problem*es*

- Sobre la planificació

Fer un pòster amb totes les estratègies de resolució de problemes (triar operacions, assaig i error, fer un dibuix, fer una taula, etc.), i animar els alumnes a referir-se a elles quan facin un pla per a resoldre el problema, amb preguntes com: pots suggerir algunes estratègies que et puguin ajudar a resoldre el problema?. O, potser, després d'haver trobat la solució correcta a un problema, preguntar als alumnes sobre l'estratègia que han usat, o fer-los explicar la seva planificació i solució, o mirar i discutir solucions alternatives amb preguntes semblants a les següents: has usat estratègies per a resoldre el problema?, quines?, què vas fer en primer lloc per a resoldre el problema?, pots descriure la solució del problema?

- Sobre l'avaluació de les seves respostes

Ajudar els alumnes a avaluar la raonabilitat de les seves respostes, fent càlculs mentals, fent estimacions, etc. Per ajudar els alumnes a avaluar el problema que han resolt podem assignar punts a la resposta: per exemple, 5 punts si estan molt segurs que la seva resposta és correcta, 3 punts si estan quasi segurs que és correcta, i 1 punt si no estan segurs. Per cada resposta correcta han de sumar els punts que s'havien assignat i per cada resposta incorrecta, restar-los.

- Sobre l'ensenyament a llegir el problema

Podem trobar altres tècniques semblants a O'Daffer (1995), entre les que ressaltem les que tenen a veure amb la generació d'un nou problema a partir d'un que ens donen. En aquest sentit, és possible desenvolupar les habilitats dels alumnes relacionades amb la comprensió si fem servir diferents estratègies: canviar el tema d'un problema, canviar els nombres d'un problema, canviar una o més condicions del problema, intercanviar dades i resultats, etc. O utilitzar problemes en els quals les dades siguin insuficients, o que n'hi hagi de sobres, o amb dades alternatives, entre les quals els alumnes hagin de discutir per a seleccionar les més adients, amb preguntes semblants a: com decideixes les dades que són necessàries per a resoldre el problema?. O, potser, variar les fonts d'obtenció de les dades: dades dins de l'enunciat, dades en gràfics o taules, dades en fonts externes (referències de llibres, menú, ordinadors, etc.) o generar-les en experiments o activitats. De vegades, els alumnes necessiten tocar i moure objectes concrets per a comprendre millor la situació. En qualsevol cas, el terme lectura significa molt més que la lectura física de les paraules de l'enunciat, així els alumnes han de comprendre el problema, comprendre la pregunta, triar els fets pertinents, reconèixer dades extres i reconèixer dades absents. En tots els casos a O'Daffer podem trobar exemples d'enunciats de problemes sobre els quals els autors proposen múltiples preguntes per a analitzar la seva comprensió per part dels alumnes. Moltes d'aquestes preguntes les hem fet servir com a models en la generació de suggeriments que proposem al capítol 5.

- Sobre l'aprenentatge a fer i respondre preguntes

Fer ús continu de frases com les següents ajuden l'alumne a desenvolupar les seves habilitats de preguntar i respondre sobre les qüestions relacionades amb la resolució d'un problema: em pregunto si...?, suposem que...?, com podríem trobar...?, és possible que...?, com saps que..?, com has decidit...?, estàs segur que...?, com va ocórrer...?, pots descriure...?, què penses sobre...?, etc. O, d'una forma més concreta, animar els alumnes a fer-se preguntes a partir de les dades del problema.

b) Ajudar els alumnes a sentir-se segurs sobre la seva habilitat per a resoldre problemes i a desenvolupar actituds positives sobre la resolució de problemes

Els autors fan tot un seguit de recomanacions i suggeriments per tal de motivar l'alumne i desenvolupar actituds positives cap a la resolució de problemes, algunes de les quals resumim a continuació.

- S'ha de donar temps als alumnes per a resoldre un problema. Així doncs, seria convenient diferenciar entre fets o càlculs en els quals la resposta ha de ser ràpida i resoldre un problema en el qual la resposta ha de prendre el seu temps.

- L'entusiasme del professor i la forma de recompensar als alumnes les seves accions juga un paper fonamental en el desenvolupament de l'aprenentatge de la resolució de problemes a la classe. Per exemple, fan miracles els reconeixements no verbals o comentaris especials que premiïn la bona voluntat i el prendre riscos, o la perseverança, o l'autoconfiança (confiar en les nostres pròpies habilitats), o al pensament no algorísmic. Però en cap cas el professor ha de resoldre el problema i no ha de rebutjar les conjectures, sinó perseguir-les.

- La motivació i l'interès estan garantits si personalitzem els problemes usant els noms dels alumnes, si fent servir coses que interessin els alumnes, si utilitzem dades del seu interès (record Guinness, diaris, grups de rock, menjar, esports, etc.). O si piquem la curiositat dels alumnes animant-los a preguntar-se coses relacionades amb el seu entorn (quan de temps dura un bolígraf, quan filferro caldria per a fer una capsa de clips, etc.). En qualsevol cas, treballar amb problemes aplicats pot proporcionar un vehicle per a integrar les matemàtiques i altres tòpics del currículum Disminueix l'ansietat dels alumnes en la resolució de problemes els fets de tenir paciència, d'acceptar les errades, amb la idea que de vegades ajuden en la resolució, i amb la idea que fer progressos cap a la solució és tenir èxit, etc.

- Buscar situacions que ajudin els alumnes a adquirir experiència com, per exemple, identificar el que fan els adults quan resolen una situació problemàtica. Concretament, ajuda a millorar les tècniques instruccionals el fet de tenir presents les necessitats dels resolutors experts i no experts.

c) Resoldre problemes en situacions d'aprenentatge cooperatiu

O'Daffer (1995) suggereix formes d'agrupar els alumnes i normes de funcionaments de les agrupacions perquè siguin més efectives al seu treball. Per exemple, considera que si es treballa en parelles, la seva composició ha de ser formada per un alumne d'habilitat alta i un de mitjana, o un de mitjana amb un de baixa. S'ha de subministrar només un material per parella (una calculadora, un llibre, un paper, etc.). Malgrat que Randall Souviney (O'Daffer, 1995) indica que és aconsellable que els grups de treball dels alumnes siguin de dos o quatre components, ja que *"l'experiència ha mostrat que els grups de tres no treballen tan bé"* (pàg. 39), O'Daffer, al llarg de la seva proposta, anima els alumnes a agrupar-se en grups de tres o quatre, tot seguint tres normes bàsiques: que cada alumne estigui implicat a la feina del seu grup, compartint i escoltant els altres membres del grup; ser o usar el grup per a ajudar-se, és a dir, ajudar a qui pregunta i preguntar en el grup, i demanar l'ajut del professor només quan el grup no sàpiga resoldre el problema; i, per últim, prendre decisions en el grup i, per tant, arribar a consensos en les descripcions, anàlisis i respostes.

d) Què faig, professor?

Sota aquest títol O'Daffer fa recomanacions als professors sobre el que han de respondre i preguntar en situacions en les quals l'alumne interactua amb l'ordinador per produir un programa o resoldre un problema. L'autor fa suggeriments en diferents situacions: el que han de respondre quan els alumnes pregunten sobre el primer que han de fer si les pistes estan sobre la pantalla, quan els alumnes diuen que no saben quina tria faran sobre el menú, què fer quan els alumnes fan progressos bons o tenen dificultats, i quan pregunten sobre la qualitat de les seves solucions.

3.8. La proposta metodològica de M. L. Callejo per a treballar la resolució de problemes

Callejo (1994) es fa la pregunta: es pot ensenyar a resoldre problemes? Per a respondre-la fa una proposta metodològica, que experimenta en un club matemàtic al qual assisteixen alumnes amb certa motivació per les matemàtiques, sent la seva finalitat només introduir els alumnes en l'aprenentatge de la resolució de problemes.

Aquesta proposta metodològica consta de quatre punts:

1. Els problemes que proposa són de diferent grau de dificultat, són fàcilment particularitzables i generalitzables, i els continguts matemàtics involucrats en la seva resolució són senzills per als alumnes que els resolen.
2. Es demana als alumnes que escriguin els seus processos de resolució amb el màxim detall possible.
3. Es demana als alumnes que reflexionin sobre els processos de resolució prèviament enregistrats.
4. Es fan posades en comú i discussions conjuntes per tal que els alumnes tinguin l'oportunitat d'expressar les seves idees, estratègies, raonaments, bloqueigs, etc.

Que els alumnes elaborin un *protocol escrit* sobre el procés de resolució és una feina difícil d'aconseguir si no és amb paciència i de forma que vegin els beneficis que comporta. Callejo proposa als seus alumnes que resolguin el problema i, simultàniament, en una columna al marge anotin *"les idees que considerin importants en el decurs de la resolució, el que intentaven fer i el seu parer sobre tot plegat"* (pàg. 58). A poc a poc, va aconseguir introduir un element de control en el procés de resolució, facilitant, d'aquesta manera, la reflexió posterior sobre el procés.

Per a facilitar aquesta *reflexió sobre el procés*, a més de realitzar els protocols escrits, demana als alumnes, en entrevistes, que expliquin els processos i les seves percepcions, i que facin posades en comú analitzant les idees i bloqueigs que havien tingut. Concretament, demana sobre la solució –has trobat la solució del problema?-, la comprovació de la solució –has verificat el plantejament, els raonaments, per a comprovar que la teva solució és correcta?...-, el camí –com ha estat el camí?, on et vas bloquejar?...-, altres problemes semblants –saps ara resoldre el problema de manera més senzilla?..-, i els seus sentiments –expressa quins han estat els teus sentiments en resoldre el problema-.

De vegades la resolució es fa de forma individual, però quan el *treball es fa en grup*, sempre hi ha a cada grup (d'entre quatre i sis alumnes) un moderador i un secretari, amb unes funcions que Callejo defineix sense ambigüitats, i amb unes pautes de treball en grup que esquematitza clarament a l'annex 6 del seu llibre (pàg. 275).

La proposta de Callejo dóna especial importància a la comunicació d'idees, sigui en posades en comú o en discussions dins de cada grup d'alumnes o entre grups. Ella facilita aquesta comunicació de la forma següent: a) animant tots els alumnes a participar, sobre tot els més passius, i evitant que es monopolitzi la paraula; b) impedint que es jutgin les idees exposades, només està permès demanar explicacions sobre les idees, demostracions o propostes que es considerin no vàlides; c) evitant que s'abandonin idees, pel contrari es tracta que se n'aprofundeixi; d) analitzant els bloqueigs que sorgeixen al llarg de la resolució; i e) demanant que es generalitzin les dades del problema o el resultat obtingut.

Callejo també comenta les dificultats que ha tingut per a l'aplicació de la seva proposta metodològica, classificant-les segons la naturalesa de les activitats proposades, la forma de treball dels alumnes i la manera d'intervenir del professor. Comentem aquesta última, per la repercussió que tindrà al nostre treball d'identificació de preguntes i suggeriments a fer als alumnes al llarg del procés de resolució.

L'estil del professor, que Callejo proposa dins del seu model instructiu, ha d'anar en la línia de només guiar l'activitat de l'alumne. Aquest guiatge de les accions de l'alumne té repercussions a tres nivells: el matemàtic, en el qual el professor ha de percebre les diferents aproximacions dels alumnes al problema i ajudar-los en el cas que no siguin adients; el didàctic, en el qual el professor ha de decidir quan intervenir, quan proporcionar suggeriments, com desbloquejar, etc.; i el personal, en el qual, a base d'experiència, el professor anirà incrementant l'autoconfiança i la seguretat en els seus propis recursos.

A nivell d'intervenció del professor en el procés de resolució dels alumnes, Callejo adapta la proposta de De Guzmán (1986) per a fer tot un seguit de suggeriments, orientacions, preguntes o pautes d'actuació per tal d'ajudar l'alumne. Aquestes pautes, que resumim a continuació, estan ordenades segons la fase del procés de resolució (pàgs. 273-274):

a) Familiarització amb el problema:

- Llegeix el problema a poc a poc, tracta de comprendre totes les paraules.
- Diferencia les dades de les incògnites, tracta de veure la relació entre ambdues.
- Intenta expressar el problema amb les teves paraules.
- Si pots, fes un dibuix o un esquema de la situació

...

b) Busca unes quantes estratègies per a solucionar el problema:

- És semblant a altres problemes que ja coneixes?, com els resolies?, alguna idea et podria ser útil?
- Imagina't un problema més fàcil per començar i així animar-te.
- Experimenta amb casos particulars, et donen alguna pista sobre la possible solució?
- Pots ajudar-te d'un dibuix o d'una representació gràfica?

...

c) Selecciona una de les estratègies i treballa amb ella:

- No et donis per vençut fàcilment
- No t'obsessionis amb aquesta estratègia. Si veus que no condueix a res, deixa-la.
- Si l'estratègia que has triat no va bé, selecciona una altra o una combinació d'elles.

...

d) Reflexiona sobre el procés seguit:

- Com ha estat el camí?, on et vas bloquejar?, en quin moment i com vas sortir dels bloqueigs?
- Quan has canviat de rumb?, aquests moments han estat encertats?
- Entens bé la teva solució?

...

3.9. La proposta de L. Puig

De forma semblant a com fa LeBlanc (cf. Puig, 1996), que descriu un curs per a la formació de professors d'educació primària dividint-lo en quatre fases que van des de la consideració de l'alumne com un resolutor de problemes fins a un últim moment en el qual se li demana que faci la tasca de professor, Puig (1996) presenta el seu model d'ensenyament com un component del seu model teòric local, del qual formen part, a més, els models de competència formal, els models dels processos cognitius i els models dels processos de comunicació.

Aquest model d'ensenyament és una seqüència d'instrucció organitzada en etapes, amb la incorporació dels nous estats dels alumnes corresponents a cada una d'elles, que els vam permetent abordar les tasques que se'ls van proposant.

La seqüència d'etapes i estats que proposa Puig és la següent:

a) Resolutor

En aquesta primera etapa es considera l'alumne com un resolutor d'una forma semblant a com ho fa a la categoria d'osmosi descrita per Kilpatrick (1985);

b) Resolutor i observador de sí mateix

L'alumne ha de considerar-se, a més de resolutor, observador dels seus processos de resolució, és a dir, resolutor conscient;

c) Resolutor i observador

En aquesta tercera etapa, l'alumne ha de continuar sent resolutor, però ha d'incorporar l'estat d'observador d'altres alumnes i del mateix professor, que actua com un model;

d) Resolutor, observador i investigador

Aquí s'ensenyen les eines heurístiques i, per tant, ja no s'aprèn per osmosi. Així doncs, l'estat del resolutor ja no és el d'observador ingenu, sinó organitzat, amb la qual cosa el resolutor pot considerar-se com un investigador;

e) Observador, investigador i professor

S'abandona l'estat de resolutor i s'introdueix el de professor.

Per tal d'anar superant aquestes etapes i incorporant els nous estats, Puig proposa tasques que, per sí mateixes, en el cas de les tres primeres etapes i estats, van propiciant que els mateixos alumnes assumeixin els estats d'observadors, sense l'acció explícita del professor. Aquestes tasques inicials incideixen en la reiteració i en la imitació en l'ús de destreses amb potencial heurístic com el fet de ser sistemàtic, fer una taula i utilitzar una notació adient. Aquestes tasques són: *"resoldre un problema de diferents maneres, plantejar possibles formes de solució (sense desenvolupar-les), enunciar problemes (després de resoldre el problema plantejat) que estiguin resolts en part o es tingui idea de la forma de resoldre'ls, gràcies a la resolució del problema plantejat, variar sistemàticament un problema, per a generar altres, i descriure el procés de resolució i no només la solució"* (pàg. 61).

En considerar els estats de resolutor, observador i investigador, les tasques corresponents serien: l'estudi sistemàtic de les eines heurístiques (consideració d'un cas, la divisió del problema en parts, la reformulació, la variació parcial, l'examen de possibilitats, el pas al contrarrecíproc, la consideració d'una figura auxiliar i l'analogia aclarida) i mètodes de resolució amb contingut heurístic i els espais de problema associats, així com usar les eines heurístiques per a resoldre problemes, per a generar plans de resolució, per a enunciar problemes que estiguin resolts, en part, gràcies a la resolució del problema plantejat, i per a descriure el procés de resolució fent servir els elements teòrics pertinents.

La consideració de l'estat del professor, dins de la cinquena etapa, va lligada a les característiques dels problemes proposats, i a la necessitat que els professors en formació puguin tenir una experiència semblant a la dels seus alumnes. Per tant, la dificultat dels problemes a proposar als futurs professors ha de ser similar a la dificultat que tindrien per als seus alumnes els que ells els proposarien. En qualsevol cas, les característiques dels problemes serien: no han de requerir grans coneixements per a ser abordats, no són passatemps, sinó problemes amb continguts matemàtic, i tenen potencial heurístic.

Per a acabar, Puig afirma que l'actuació del professor no pot ser uniforme, basant-se en la diversitat de tasques a realitzar i en la naturalesa diversa dels elements del seu model de competència, que engloba, entre d'altres, les destreses amb potencial heurístic, que no tenen capacitat per a transformar el problema –per exemple, fer una taula-; els suggeriments heurístics, que assenyalen la direcció de treball –per exemple, buscar un problema relacionat-; les eines heurístiques, que són procediments independents del contingut del problema que el transformen en un altre; i el gestor instruït, relacionat amb els elements de gestió del procés de resolució introduïts per Schoenfeld (1985b), i que té les funcions d'avaluació de la familiaritat amb el problema i del nivell de dificultat, d'ús de diferents aproximacions per a comprovar, del control de la direcció en l'execució del pla, de revisió, etc. Així doncs, segons Puig, el professor ha d'actuar com un suggeridor heurístic i gestor instruït.

3.10. Propostes metodològiques sobre resolució de problemes en el context curricular

3.10.1. El projecte MAT_{789}

Entre 1988 i 1992, el Projecte MAT_{789} (Abrantes, 1996) va desenvolupar un currículum experimental de matemàtiques per a alumnes d'entre 12 i 15 anys, centrat en la resolució de problemes, per tal de superar el tractament que fins aquell moment rebia la resolució de problemes de matemàtiques a les aules portugueses, és a dir, considerar que *"els problemes sorgien com aplicacions de coneixements o com formes d'introduir nous temes però, en qualsevol cas, desenvolupant el paper d'un senzill factor de motivació externa per a l'estudi de continguts que constituïen l'essencial dels programes"* (pàg. 8). Així, el Projecte MAT_{789} va tractar de superar la proposta de problemes perfectament formulats en contextos molt precisos, per a estendre-la als *"processos que impliquen exploració del context més enllà del que explica l'enunciat, la creació de formulacions alternatives o la interpretació i clarificació de la que es proporciona"* (pàg. 9), emergent la idea de Borasi (cf. Abrantes, 1996) de situació problemàtica. D'aquesta manera, la proposta d'Abrantes destaca *"el treball al voltant de situacions problemàtiques i processos com els d'experimentar, conjecturar, matematitzar, provar, generalitzar i discutir"* (pàg. 7).

Malgrat que el currículum va estar centrat en la resolució de problemes, això no es va traduir en la creació d'una categoria de problemes, sinó que la resolució de problemes va estar present en qualsevol activitat que es proposava als alumnes. Així, totes les activitats eren propostes de treball per a animar els alumnes a explorar formes personals d'apropar-se a la solució, a descobrir i a crear les seves pròpies regles. D'aquesta manera, en la proposta d'Abrantes *"es pot dir que la resolució de problemes va ser un context general d'aprenentatge, estretament relacionat amb l'ambient de treball i amb la naturalesa de les activitats propostes a l'alumnat"* (pàg. 10).

El fet de presentar el currículum de matemàtiques en un ambient de resolució de problemes, fa que els processos d'explorar, de descobrir i de crear portin als alumnes a relacionar situacions aparentment diferents com, per exemple, a associar processos de recompte en contextos reals diversos; a conjecturar i argumentar i, per tant, a començar a entendre el que és una demostració en matemàtiques, etc.

A més, el Projecte MAT_{789} dóna una importància especial a dos aspectes que volem ressaltar: per una banda a les relacions de les matemàtiques amb la realitat i, per l'altra, a la rellevància que hi tenen la reflexió i la comunicació.

Com assenyala Abrantes, la relació de les matemàtiques amb les situacions reals que envolten l'alumne va estar molt present al llarg de tota l'experiència. Les activitats d'aquesta mena comporten que sigui el propi alumne qui hagi de definir el problema a resoldre, partint d'un objectiu inicial formulat en alguns casos de forma molt imprecisa i poc matemàtica, i de planejar i dirigir el seu propi treball, prenent les decisions adients a la situació plantejada, en molts casos sobre aspectes matemàtics i no matemàtics. Aquestes situacions problemàtiques reals involucren processos de resolució de problemes i d'altres conceptes i procediments relacionats amb continguts matemàtics concrets, siguin geomètrics, estadístics, etc.

Per altra banda, el foment en els alumnes de la realització d'informes escrits, de presentacions orals i d'exposicions, com a eines que formen part de la resolució de les activitats, van contribuir a desenvolupar els processos de reflexió i de comunicació de les activitats resoltes, com van tenir oportunitat de reconèixer els mateixos alumnes.

3.10.2. La proposta del NCTM

El tractament que la NCTM (2000) fa de l'ensenyament de la resolució de problemes per als alumnes de fins als 18 anys està immers en una organització curricular en la qual els Estàndards que descriuen objectius de contingut matemàtic a les àrees de nombres i operacions, àlgebra, geometria, mesura, i anàlisi de dades i probabilitat es combinen amb els Estàndards dirigits cap als processos de raonament i demostració, connexions, comunicació, representació i els mateixos sobre resolució de problemes.

Concretament, els programes sobre instrucció de la resolució de problemes marquen els quatre objectius fonamentals a aconseguir: construir nous coneixements matemàtics a través de la resolució de problemes, resoldre problemes que sorgeixen a les matemàtiques o en d'altres contextos, aplicar i adaptar una varietat d'estratègies apropiades per a resoldre problemes, i gestionar i reflexionar sobre els processos de la resolució de problemes de matemàtiques. Es ressalta, per tant, que l'aprenentatge es fa "sobre" i "a través" de la resolució de problemes.

Centrant-nos en la resolució de problemes per als alumnes entre 12 i 18 anys, la NCTM (2000) assenyala que *"l'èxit de la resolució de problemes requereix coneixement de continguts matemàtics, coneixement d'estratègies de resolució de problemes, auto-control efectiu, i una disposició productiva a posar i resoldre problemes"* (pàg. 341). Així, els professors poden contribuir a millorar l'ensenyament de la resolució de problemes incidint en els aspectes que resumim a continuació.

- Han de planificar els problemes que resoldran els seus alumnes. Aquests problemes han de donar l'oportunitat als alumnes d'aprendre continguts importants a través de les seves exploracions i de practicar un ampli espectre d'estratègies heurístiques.
- Han de ser reflexius per tal de crear ambients en els quals els alumnes se sentin còmodes per a reflexionar sobre el seu treball, la qual cosa afavorirà la introducció de nous suggeriments, d'observacions que provoquin noves conjectures i exploracions, i de generalitzacions, la validesa de les quals pugui ser desconeguda pel professor.
- Els professors han de proposar problemes que puguin tenir respostes múltiples, la qual cosa afavorirà les noves propostes de solució, la discussió i la seva anàlisi.
- Els professors poden ajudar a motivar els alumnes animant-los a comunicar les seves idees i a col·laborar amb els seus companys, instant-los a buscar noves solucions més completes i a proposar problemes encoratjadors. També reconeixent les contribucions i aportacions noves dels seus alumnes, fins i tot, com feia O'Daffer (1995), posant el nom de l'alumne a l'aportació que hagi fet.
- Els professors han de tenir presents les creences dels alumnes i actuar per tal de modificar les disposicions negatives dels alumnes. Per exemple, han d'ajudar els alumnes a comprendre i analitzar els problemes abans d'intentar buscar solucions, per a, després, persistir en la recerca de les solucions.
- Com assenyala la NCTM, l'essència de la resolució de problemes és saber què fer quan ens enfrontem a un problema no familiar. En aquestes situacions, els professors han d'ajudar els seus alumnes a ser conscients de la seva activitat de resoldre problemes a través de la modelització, l'observació i la realització de preguntes. Aquests processos afavoriran les discussions obertes i freqüents. Dins d'aquesta pressa de consciència de l'activitat que fan els alumnes, els professors han d'animar-los a controlar i avaluar els seus processos de resolució. Els bons resolutors han de reconèixer el que saben i el que

no saben, el que és bo i el que no ho és, per tal d'estalviar temps i energies.

- Igualment, els professors han d'ajudar els seus alumnes a ser sistemàtics i a trobar i analitzar totes les possibilitats en la recerca de les solucions d'un problema.
- A través de la reflexió guiada, els alumnes poden identificar els continguts matemàtics involucrats en la resolució de cada problema, aprendre a generalitzar i a estendre problemes, comprendre que la resolució d'un problema no s'acaba fins que no es mira cap a enrere, es revisa i s'avalua tot el procés. També, aquesta reflexió guiada pot ajudar els alumnes a establir conjectures i a examinar-les.

Potser la millor manera d'entendre l'ensenyament de la resolució de problemes sigui, com diu la NCTM, considerar aquest ensenyament, en sí mateix, com una activitat de resolució de problemes.

Els problemes estratègicament triats i curosament seqüenciats poden ser exemples del doble paper que, per a la NCTM, ha de jugar la resolució de problemes al currículum de matemàtiques, per una banda, com a vehicle d'aprenentatge de nous conceptes matemàtics o en el desenvolupament i l'aprofundiment dels conceptes o idees que hagin sortit abans i, per l'altra, com a activitat capaç de dotar els alumnes amb coneixements i eines que els permetin formular, enfocar i resoldre problemes diferents dels que han estudiat. En aquest sentit, la NCTM proposa el següent problema per a aprofundir de formes diverses en les idees de raó i proporció:

"Un equip de beisbol guanya 48 dels seus 80 primers partits. Quants dels seus pròxim 50 partits ha de guanyar l'equip per tal de mantenir la raó de guanyats a perduts?" (pàg. 256).

O el següent problema que proporciona als alumnes l'oportunitat de construir els continguts matemàtics durant la seva resolució, d'aprendre i practicar algunes estratègies heurístiques, i a fer connexions entre diferents formes de pensar sobre el mateix contingut matemàtic.

"Quants rectangles hi ha en un tauler estàndard d'escaig de 8x8? Comptar només els rectangles (quadrats inclosos), els costats dels quals estiguin sobre les línies de la quadrícula" (pàg. 335).

El professor pot aprofitar aquests tipus de problemes per discutir amb els seus alumnes la necessitat de ser sistemàtics als primers intents de resoldre el problema. Molt aviat sorgeix el fet de considerar l'estratègia heurística provar amb un problema relacionat més senzill, així com l'aprenentatge important per part dels alumnes que, de vegades, cal abandonar aproximacions sobre les quals havíem treballat de valent.

Els professors han d'orientar els alumnes cap a la recerca sistemàtica de patrons, l'establiment de conjectures i la proposta de demostracions, així com la recerca d'altres formes diferents d'apropar-se a la solució del problema com, per exemple, la que té a veure amb un raonament combinatori, que proporciona als alumnes una revisió de les tècniques de comptar. Un cop revisat tot el procés de resolució, el professor ha d'animar els alumnes a formular possibles extensions interessants del problema original.

3.11. Entre la instrucció guiada i l'aprenentatge cooperatiu. Diferents patrons interactius

Com assenyala Forman (1989), la instrucció entre iguals difereix de la instrucció professor-alumne almenys en dos aspectes: el primer el podem considerar com un *continuum* a la relació de poder i coneixement entre les persones que interactuen, que va des d'una interacció de complementarietat, en la qual una de les persones fa de professor –té el poder i el coneixement- i l'altra d'alumne, fins a una interacció de reciprocitat, en la qual el poder i el coneixement estan compartits i les persones es van tornant, fent d'instructors dels seus companys.

La segona diferència entre la instrucció professor-alumne i l'aprenentatge cooperatiu (o instrucció entre iguals) és el grau en el qual els alumnes poden assumir la responsabilitat de definir els objectius i les estratègies de les tasques a realitzar, que va des de l'assumpció completa, per part del professor, de les responsabilitats de definir la tasca a realitzar, en la instrucció professor-alumne, fins al fet de compartir les responsabilitats d'establir objectius i estratègies per part dels alumnes, en el treball cooperatiu.

En qualsevol cas, sigui com sigui el tipus d'instrucció, la reducció i la retirada progressiva de les ajudes del professor o dels seus companys permetran a l'alumne l'ús independent d'estratègies i la resolució de nous problemes amb èxit (Pifarré i Sanuy, 2001).

De la mateixa forma que el professor ha d'actuar seguint unes normes preestablertes en la instrucció guiada, com hem pogut observar en els models instructius que hem descrit en aquest capítol, en la resolució cooperativa de problemes, com diu Galtón i Wiliamson (cf. Mercer, 1997), *"no és suficient donar als alumnes permís per a conversar, sinó que perquè la cooperació tingui èxit hem d'ensenyar els alumnes com col·laborar perquè d'aquesta forma tinguin una idea clara del que se n'espera"* (pàg. 102). Quan Mercer (1997) explica el s'espera que els alumnes aconsegueixin quan treballen plegats, es refereix a què tinguin l'oportunitat de fer servir activament el llenguatge en la resolució de problemes i que quedin alliberats de les obligacions del discurs dirigit pel professor. En aquest sentit, són molts els autors (Webb, 1989, 1991; Yackel i altres, 1991; Stacey, 1992; Lambdin i altres, 1992; Kroll i altres, 1992; Fernandez i altres, 1994; Callejo, 1994; Cobo i Fortuny, 2000; Aïmeur i altres, 2000; etc.) que han investigat les relacions comunicatives entre alumnes que treballen en grup resolent problemes, per construir més coneixements o per fer aquesta construcció més significativa.

Com hem pogut observar al llarg d'aquest capítol, els models instructius que hem descrit dels diferents investigadors combinen fases d'actuacions guiades pel professor amb moments en els quals els alumnes interactuen cooperativament. En els paràgrafs següents mostrem patrons d'interacció –regularitats que es construeixen interactivament entre el professor i els alumnes-, que diferents autors (Voigt, 1985 i 1994; Wood, 1994; Cobo, 1998; i Godino i Llinares, 2000) descriuen. Aquests patrons apareixen sense que necessàriament siguin reconeguts pels participants i estableixen un procés de negociació de significats (Voigt, 1995). A més, en la pràctica diària de cada professor és possible que molts es produeixin de forma combinada.

a) Model extractiu

Aquest model, descrit per Voigt (1985), és en certa forma una combinació de dues idees aparentment contradictòries: la idea d'extreure un cos nítid de coneixement matemàtic, i la idea d'una classe lliberal centrada en l'alumne (Voigt, 1994). En aquest model es diferencien tres fases:

- En la primera, El professor proposa una tasca ambigua que no pot ser completament resolta pels alumnes. Aquests treballen cooperativament per tal de fer intents de solucionar el problema. Aquestes temptatives contribueixen almenys a facilitar la comprensió del problema a resoldre. Els alumnes presenten diferents anàlisis, respostes i solucions segons les seves competències, que el professor avalua amb qualificatius com correcta, falsa, útil, etc.

  Podem dir que, en aquesta primera fase els alumnes interactuen lliurement en funció de les seves característiques (cognitives, afectives...), i que aquesta interacció es pot produir de forma cooperativa, si cada alumne contribueix equitativament al procés de resolució, guiada, si un dels alumnes assumeix la responsabilitat de fer les aportacions més significatives, o potser en paral·lel, si els alumnes treballen agrupats però cadascun ho fa per la seva banda (Cobo i Fortuny, 2000).

- En la segona, el professor guia les propostes dels alumnes cap a una solució definida i extrau i ressalta coneixements implícits en aquesta solució. Els alumnes s'esforcen en seguir la forma de resolució que marca el professor, o sigui l'"oficialment" correcta.

  En aquesta fase, el professor dirigeix el procés comunicatiu i marca implícitament o explícita tant el procés de resolució del problema com les intervencions, els continguts matemàtics de les quals l'interessen.

  Les intervencions dels alumnes han de seguir pas a pas les propostes del professor.

- En la tercera fase, el professor i els alumnes reflexionen i avaluen el que han obtingut, és a dir, la tasca, la solució, el procediment, etc.

Les normes socials que caracteritzen aquest model són, per una banda, la llibertat d'acció dels alumnes quan interactuen per a resoldre el problema proposat. En aquesta fase, poden actuar amb autonomia, pel que fa a l'aptitud crítica envers les explicacions dels seus companys i les valoracions de la solució que troben. I, per altra banda, la poca espontaneïtat de la classe, durant la qual el professor només ressalta aquells coneixements que l'interessen de les resolucions que ell guia. En aquest sentit es posa de manifest la contraposició d'idees que explicàvem al començament d'aquest model.

La finalitat última de les normes que regeixen aquest model interactiu és la d'arribar a obtenir una solució del problema i extreure un cos nítid de coneixements. És a dir, la proposta i resolució d'un problema es converteix en una excusa per seleccionar i reflexionar sobre els continguts matemàtics que interessen al professor.

b) Model de discussió (discursiu)

Com descriuen Godino i Llinares (2000), en aquest model interactiu la forma d'actuar del professor i dels alumnes és, en certa forma, cíclica, en el sentit que:

- Els alumnes agrupats en petits grups resolen el problema proposat pel professor.
- El professor demana que informi un alumne.
- Un alumne de cada grup presenta i explica la solució que han obtingut, mentre que el professor fa observacions, preguntes addicionals, reformulacions, judicis o aportacions noves a la proposta de l'alumne.
- El professor pregunta als alumnes sobre altres formes de solucionar el problema i altres propostes de problemes que es poden obtenir de la primera, i
- Els alumnes comencen un altre cop a intentar proposar solucions.

Podríem caracteritzar el paper dels alumnes en aquest model interactiu per la plena llibertat d'acció quan interactuen en grups petits per a resoldre el problema proposat, i en la seva presentació i exposició a tota la classe. En ambdues situacions actuen amb autonomia. En canvi, el paper del professor, a més de proposar problemes, és el de fomentar en els alumnes l'aportació de nous continguts matemàtics que facin el procés de resolució dinàmic i progressiu. El professor ha d'ocupar el node central de la xarxa d'interaccions que promouen el desenvolupament del coneixement matemàtic a la classe. També, ha de fomentar l'esperit crític dels alumnes, gestionar el coneixement que va sorgint espontàniament en el decurs de la resolució, i les reflexions que es produeixin, amb la idea que cada alumne s'apropiï del coneixement socialment generat.

Els alumnes saben que les discussions a la classe són obertes, que el professor fomenta les aptituds crítiques i que les valoracions, explicacions i argumentacions matemàtiques que es facin han de ser negociades i acceptades per tots. D'aquesta forma, la construcció de significats es fa de manera compartida.

La finalitat última de les normes que regeixen aquest model no és, com es pot apreciar, la d'arribar a obtenir una solució del problema, sinó que la solució trobada és el punt de partida per a tornar a reflexionar sobre els continguts matemàtics involucrats en la resolució del problema o que vagin sortint espontàniament.

c) Models de l'embús i de focalització

En aquests models d'interacció el professor i els alumnes actuen conjuntament per a intentar crear noves oportunitats d'aprenentatge (Wood, 1994). Així, ambdues situacions es caracteritzen per una primera fase comuna, en la qual el professor planteja un problema amb dificultat als alumnes, sabent que aquests no seran capaços de resoldre'l. En la segona fase, el model de focalització es caracteritza pels intents, per part del professor, de qüestionar l'actuació dels alumnes, contribuint, d'aquesta manera, a focalitzar les seves atencions en aspectes crítics que els portin, primerament, a comprendre el problema i, després, a mirar cap enrere per tal de trobar elements nous sobre els quals reflexionar i discutir, que puguin contribuir a solucionar el problema.

En canvi, en el model de l'embús, la naturalesa del discurs que es produeix no porta als alumnes a fer una construcció significativa de significats, quedant-se, només, en la creació de procediments tractats de forma superficial. Com indica Wood (1994), en aquest model interactiu, moltes vegades el professor amaga el fet que la resposta d'un alumne sigui errònia, i li fa preguntes amb la idea que posi en lloc les seves pròpies estratègies de pensament perquè s'adoni i rectifiqui.

Les interaccions que es produeixen en aquests models són majoritàriament del tipus pregunta i resposta, en les quals el professor fa preguntes, introdueix informació nova, planteja simplificacions del problema original, tot amb la idea de focalitzar l'atenció en un o diferents aspectes específics del problema. En el cas del model de focalització a aquesta forma d'actuar del professor s'uneix una actuació oberta i participativa dels alumnes, que contribueix a la creació de noves oportunitats d'aprenentatge. En canvi, en el model de l'embús la participació d'alumnes i professor degenera en un tractament superficial dels continguts, potser per les característiques dels alumnes o perquè les demandes del professor no siguin adients.

d) Model afirmatiu

Segons Sierpinska (cf. Godino i Llinares, 2000), en aquest model el professor i els alumnes treballen conjuntament en la resolució d'un problema de forma que:

- Els alumnes fan propostes, introdueixen aportacions o comentaris, generalment de forma dubitativa, al llarg de la resolució i
- El professor simplement valida i es conforma amb les aportacions introduïdes pels alumnes, malgrat siguin fetes de forma dubitativa.

Malgrat que les validacions del professor poden significar, de bon començament, un estímul afectiu, la necessitat d'introduir justificacions i d'aprofundir en els continguts matemàtics es deixa sota la responsabilitat dels alumnes, la qual cosa provoca un tractament superficial dels conceptes i procediments que es tracten. Així doncs, en la mesura que aquesta actuació per part del professor sigui freqüent, contribuirà a què els coneixements i les construccions de significats per part dels alumnes siguin superficials i instrumentals.

En aquest model, el paper comunicatiu del professor es caracteritza per validar les afirmacions i contribucions dels alumnes, sense introduir en el diàleg cap tipus d'incitació a la reflexió sobre els continguts matemàtics introduïts. La poca implicació del professor en les intervencions dels alumnes contribueix a una absència d'aptitud crítica per part dels alumnes. Aquesta absència és cada cop més accentuada envers les afirmacions que es fan a la classe, les argumentacions que les justifiquen, i les valoracions de les solucions trobades.

e) Model interrogatiu

El professor i els alumnes treballen conjuntament en la resolució d'un problema de forma que els alumnes fan propostes, aportacions o comentaris, generalment de forma dubitativa, al llarg de la resolució i el professor no es conforma amb les aportacions introduïdes pels alumnes i les posa en dubte (Godino i Llinares, 2000). D'aquesta manera, els alumnes han d'aprofundir i justificar les seves contribucions, arribant a coneixements i comprensió de significats bastant profunds.

En aquest model, el paper comunicatiu del professor es caracteritza per fer preguntes sobre el contingut de les intervencions dels alumnes o, simplement, posar en dubte aquestes intervencions. La finalitat d'aquesta actuació és incitar als alumnes a continuar fent aportacions noves o aprofundir en el significat del contingut de les que han fet. D'aquesta manera, els alumnes assumeixen la responsabilitat de respondre a les preguntes del professor i de continuar el diàleg. La classe serà més dinàmica i progressiva si els alumnes són capaços de respondre a les exigències del professor, aportant noves idees o modificant les ja aportades, i el professor persisteix en el seu paper de no conformar-se amb les respostes dels alumnes fins que comprenguin plenament les idees aportades. D'aquesta manera, tots plegats contribuiran a crear més oportunitats d'aprenentatge pels alumnes (Cobo i Fortuny, 2000).

El tipus de preguntes que fa el professor podran ser generals o podran dependre dels continguts matemàtics involucrats en la resolució del problema, per exemple: Estàs segur? Pots trobar exemples? Has dit que el radi val el doble que...? Com seria l'altura? O simplement repetint de forma interrogativa les afirmacions que introdueixen els alumnes.

L'alumne saps que gairebé qualsevol aportació, comentari o proposta que faci a la classe, els seus companys o el mateix professor la posaran en dubte, amb la finalitat que s'esforci en justificar-la i argumentar-la públicament, fins arribar a explicacions matemàticament correctes. Normalment les explicacions i argumentacions es consideren acceptables quan el professor les accepta i abandona les seves demandes.

La funció interrogativa del professor pot ser desenvolupada igualment per qualsevol company de l'estudiant que fa les aportacions.

Normalment aquest model d'interacció és més freqüent en grups-classe de pocs alumnes i molt interessats en aprendre.

f) Model expositiu

Godino i Llinares (2000) apunten la idea d'una forma tradicional d'interacció professor-alumnes, que la podríem caracteritzar de la forma següent.

- El professor presenta formalment els aspectes teòrics del contingut matemàtic que està desenvolupant, així com els algoritmes que resolen els tipus de problemes associats a aquest contingut. Posa exemples concrets sobre aquests problemes i explica com s'aplica l'algoritme de forma més o menys mecànica. A continuació proposa als alumnes exemples semblants de problemes.
- Els alumnes resolen individualment els problemes pas a pas, sense gairebé cap necessitat de reflexionar, només seguint l'algorisme "oficial".

- Per acabar, el mateix professor o un alumne resolt i explica públicament la resolució feta, que no ha de diferir de l'esquema inicial proposat pel professor.

La responsabilitat de la introducció d'informació nova i de la forma de presentar-la recau totalment en el professor. Mentrestant, els alumnes resten atents a les explicacions del professor i imiten la seva conducta quan resolen els problemes relacionats amb els procediments que el professor acaba d'explicar. Per tant, el paper comunicatiu dels alumnes és escoltar el que diu el professor, aplicar de forma repetitiva les seves explicacions, respondre a les preguntes que de vegades fa el professor, però de forma que les respostes siguin les que aquest espera, i en els pocs casos que l'alumne faci alguna pregunta, aquesta s'ha d'adaptar també a les expectatives del professor.

El professor procura mantenir el sentit de normalitat: bones formes, poc diàleg entre alumnes, que escoltin sempre en silenci mentre parla el professor. A la classe hi ha absència d'aptitud crítica cap a les aportacions que es fan i les argumentacions que les justifiquen, així com de les valoracions de les solucions trobades.

Les explicacions i argumentacions són considerades matemàticament correctes en funció de les expectatives del professor i s'han d'adaptar a les explicacions prèvies del professor.

CAPÍTOL 4

IDENTIFICACIÓ DELS CONTINGUTS MATEMÀTICS DELS PROBLEMES SELECCIONATS

4.1. Introducció

Dins de la temàtica pròpia de la resolució de problemes, hem triat problemes en la resolució dels quals no estiguessin implicats diferents continguts matemàtics, per dues raons principalment: perquè la tria diversificada dificultaria considerablement el programari que volem fer per adaptar-lo a l'entorn informàtic, i per un motiu més relacionat amb les noves tendències en la investigació en educació matemàtica, com és la de seguir les indicacions del International Group for the Psycology of Mathematics Education, que aconsella *"investigar sobre qüestions de contingut específic relacionades amb processos d'aprenentatge en el context de l'ensenyament de les matemàtiques"* (Balacheff, 1990, pàg. 136). D'acord amb aquestes idees, hem seleccionat tres problemes sobre càlcul i comparació d'àrees de figures planes que tenen dues característiques que els fan adients per a la seva implementació en un tutor informàtic com el que volem construir. Per una banda, és possible abordar la seva resolució de diferents formes i, per l'altra, són susceptibles de ser resolts combinant components gràfiques i deductives.

Altres raons per les quals hem considerat adients els temes geomètrics dins de la resolució de problemes són: la facilitat amb la qual aquests problemes poden adaptar-se al nivell dels alumnes de diferents edats i coneixements, moltes vegades amb senzilles modificacions d'enunciats; la facilitat de la geometria per aprofundir en els processos deductius, ja que l'aplicatiu es centrarà, principalment, en la validació i exigència de justificació de les diferents sentències que vagi introduint l'alumne. També, els problemes geomètrics faciliten la utilització de processos inductius, d'assaig i error, de visualització, de simbolització...

La comparació d'àrees té en la història de les matemàtiques un lloc destacat, sobretot abans de l'aparició dels mètodes infinitesimals per al càlcul d'àrees. Així, els matemàtics grecs es van centrar molt més en la comparació d'àrees de figures planes senzilles que en el càlcul de cadascuna d'elles per separat, debut a què el desenvolupament del concepte d'àrea –associat al concepte de nombre- va quedar relegat pel problema dels incommensurables.

La implementació del tutor informàtic que pretenem ens exigeix una identificació en profunditat de tots els continguts matemàtics involucrats en totes les possibles formes de resoldre cada problema. Farem aquesta identificació seguint el model de treball que té el seu fonament en la construcció de l'espai bàsic del problema, definit com el conjunt de possibilitats que té un resolutor expert de resoldre un problema (Cobo, 1998). La importància de la identificació de continguts matemàtics involucrats en la resolució de cada problema es farà evident quan, al capítol 5, haguem de fer una relació exhaustiva de totes les possibles accions que un alumne pugui fer en la resolució d'un problema per tal d'implementar, en cada moment, els missatges que el tutor informàtic li farà arribar.

Presentem tres problemes com a candidats a ser implementats en el tutor informàtic, que hem anomenat: problema del paral·lelogram, problema de la malla quadrada i problema del triangle. Han estat triats de forma que fossin adients per als nivells de segon cicle de l'ESO i de Batxillerat, ni massa difícils perquè els alumnes els consideressin impossibles de resoldre, ni massa fàcils perquè no fossin considerats veritables problemes.

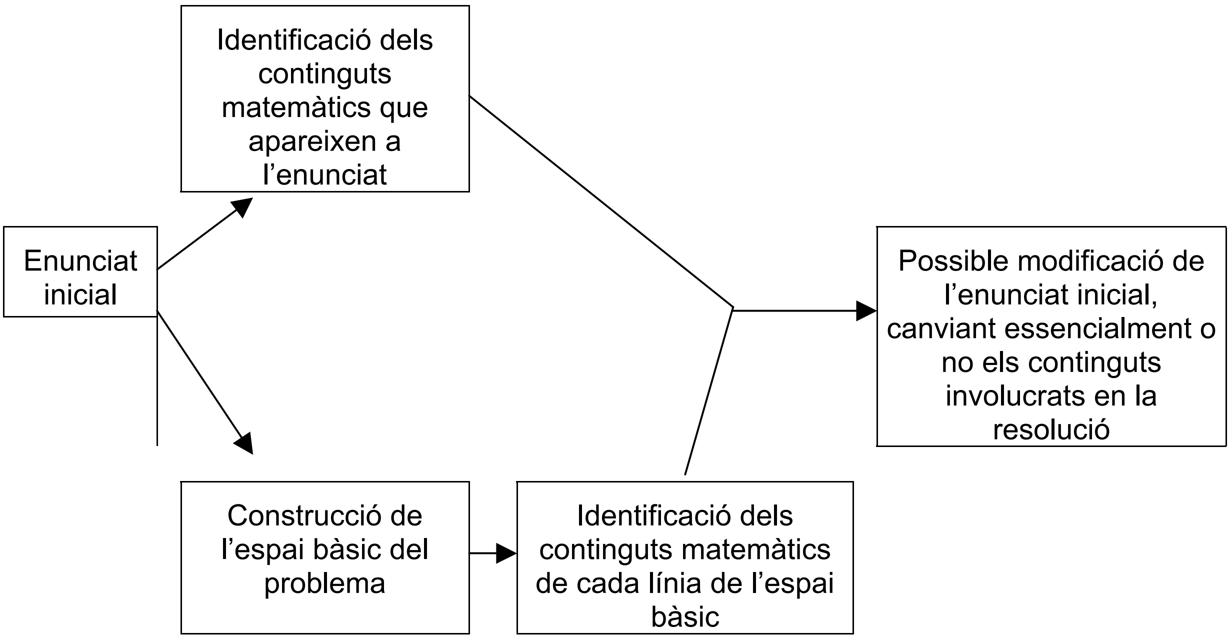
4.2. Model d'identificació dels continguts matemàtics involucrats en la resolució d'un problema de matemàtiques

L'esquema de treball que presentem a continuació està pensat per a identificar tots els possibles continguts matemàtics involucrats en la resolució d'un problema de matemàtiques (Cobo, 1998). Seguint aquest esquema establirem, per una banda, els coneixements mínims necessaris que han de tenir els alumnes per a resoldre el problema i, per l'altra, possibles modificacions de la presentació del problema per a inclinar la seva resolució cap a un camí o un altre, i per a generar altres problemes per particularització o per generalització d'alguns dels continguts implicats en la resolució del problema original.

L'esquema consta de tres fases, com es pot veure al quadre 4.2.1:

a) Partim d'un enunciat inicial del problema i identifiquem els continguts, sobre tot conceptuals, que hi apareixen explícitament.

b) En una segona fase tractem de resoldre el problema de diferents formes, és dir, identifiquem els possibles enfocaments que ens poden portar a una solució completa del problema (espai bàsic del problema). Amb això, aconseguirem delimitar tant les tècniques que s'utilitzen a l'execució de cada línia de l'espai bàsic com els conceptes implicats en cada una de les esmentades línies.



Quadre 4.2.1. Esquema per a identificar els continguts matemàtics involucrats en la resolució d'un problema de matemàtiques.

c) Per últim, en un intent de tornar cap enrere, podem modificar l'enunciat original —és a dir, la presentació del problema— sobre la base dels continguts identificats, per a inclinar, si ens interessa, la resolució del problema per un camí o un altre, o bé per a obtenir altres problemes, sigui generalitzant o particularitzant alguns dels continguts identificats.

Aquesta fase d'adaptació de l'enunciat del problema a les característiques dels alumnes als quals va dirigida la proposta d'un tutor informàtic és important per a obtenir problemes ni massa fàcils ni massa difícils.

4.3. Problema del paral·lelogram

Si M és un punt qualsevol de la diagonal AC del paral·lelogram ABCD, quina relació i ha entre les àrees dels triangles ratllats de la figura 4.3.1?

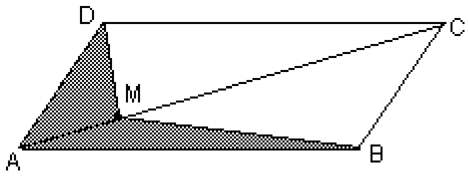


Figura 4.3.1

A l'enunciat d'aquest problema podem destacar dos aspectes. En primer lloc, la referència a conceptes concrets i senzills —si pensem en el tipus d'alumnes que resoldran aquest problema—, com són el de paral·lelogram i diagonal d'un paral·lelogram i, en segon lloc, la referència genèrica que es fa a la posició del punt M —un punt qualsevol de la diagonal de l'esmentat paral·lelogram—, malgrat que per facilitar la comprensió de l'enunciat optem por mostrar una posició concreta del punt M a la figura 4.3.1.

La referència que fem a l'enunciat del paral·lelogram concret ABCD de la figura 4.3.1 és una opció que comentarem al final d'aquest apartat.

La presentació de forma genèrica ens obliga a identificar i justificar la igualtat fent servir procediments que siguin independents de la situació del punt M sobre la diagonal.

4.3.1. Identificació dels continguts matemàtics implicats en la seva resolució

Hem identificat quatre enfocaments diferents per a resoldre aquest problema (Cobo, 1996 i 1998). Tots poden implementar-se directament, com s'observa a l'espai bàsic del problema del paral·lelogram (pàg. 61), línies 1, 2, 3 i 4, o a través d'un procés previ de consideració de casos particulars, límits o singulars que expliquem breument després d'analitzar cada un dels enfocaments de l'espai bàsic.

- L'enfocament identificat a la línia 1 suposa la utilització de la tècnica d'equivalència per complement, que porta implícita la descomposició del paral·lelogram ABCD en quatre —MFCG, EBFM, AEMI i IMGD (figura 4.3.2)— mitjançant dues rectes, r i s, paral·leles a cada un dels costats del paral·lelogram i que passin pel punt M.

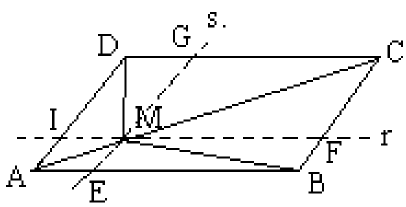


Figura 4.3.2

Basant-nos en el fet que la diagonal d'un paral·lelogram el divideix en dos triangles congruents (justificant-se aquest fet utilitzant criteris de congruència de triangles recolzats en la igualtat de segments paral·lels compresos entre rectes paral·leles i en les relacions dels angles que es formen en tallar rectes paral·leles per una secant), tenim que:

Àrea (AEM) + Àrea (EBM) + Àrea (BMF) + Àrea (FMC) = Àrea (AMI) + Àrea (IMD) + Àrea (MGD) + Àrea (MCG);

com sabem que:

Àrea (AEM) = Àrea (AMI); Àrea (EBM) = Àrea (BMF); Àrea (IMD) = Àrea (MGD); Àrea (MFC); Àrea (MCG),

podem concloure que:

Àrea (AEM) + Àrea (EBM) = Àrea (AMI) + Àrea (IMD)

o el que és igual:

Àrea (ABM) = Àrea (AMD).

- L'enfocament de la línia 2 redueix el problema del paral·lelogram a un altre equivalent que consisteix a considerar el triangle ABD (figura 4.3.3), en el qual AH és una de les seves mitjanes (ja què les diagonals d'un paral·lelogram es tallen en el punt mig) i M està sobre AH.

  La utilització conjunta de les tècniques d'aplicació de fórmules —per a justificar l'equivalència dels triangles ABH i AHD, que tenen la mateixa base i la mateixa altura, i la dels triangles MBH i MHD, per la mateixa raó—, junt amb la d'equivalència per complement ens permet deduir l'equivalència dels triangles ABM i AMD.

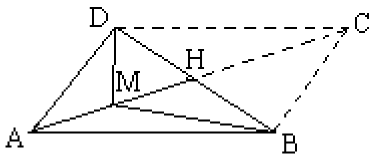


Figura 4.3.3

- L'enfocament que identifiquem a la línia 3 té a veure amb l'aplicació directa de la fórmula de l'àrea del triangle, la qual cosa suposa identificar que els triangles ABM i AMD tenen un costat comú —AM— i que les altures (h1 i h2, figura 4.3.4) corresponents a aquest costat —considerat com a base— són iguals. La justificació de la igualtat d'ambdues altures es pot fer provant que els triangles ABC i ACD són congruents.

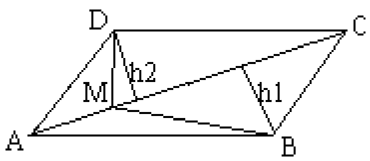


Figura 4.3.4

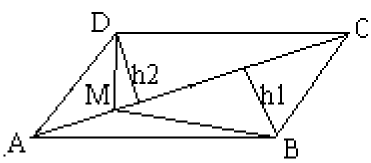


Figura 4.3.5

- L'aplicació de fórmules (línia 3) i la consideració de la tècnica d'equivalència per complement (línia 1) produeixen un nou enfocament —línia 4— que es fonamenta en l'equivalència dels triangles ABC i ACD (obtinguts per la divisió del paral·lelogram per una de les seves diagonals, figura 4.3.5) i, en l'equivalència dels triangles MBC i MCD, doncs tenen la mateixa base —MC— i la mateixa altura —h1 igual a h2—, amb la qual cosa justifiquem l'equivalència dels triangles ABM i AMD.

- Si reduïm el paral·lelogram a un quadrat —cas particular (figura 4.3.6)—, la forma de raonar la igualtat dels triangles ABM i AMD ens pot servir per a implementar qualsevol dels enfocaments (línies 1, 2, 3 i 4), excepte en el cas que el justifiquem de la següent forma: base (costat AB) per altura (h1) partit per 2 igual a base (costat AD = AB) per altura (h2 = h1) partit per 2, ja que aquesta forma no és generalitzable ni tan sols al cas del rectangle.

El cas particular del rectangle (figura 4.3.7) és similar al del paral·lelogram ja què per a la seva resolució es fan servir les mateixes tècniques que hem seguit a les línies 1, 2, 3 i 4 del paral·lelogram.

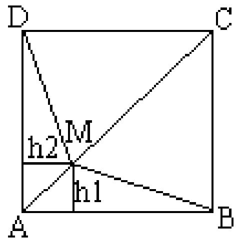


Figura 4.3.6

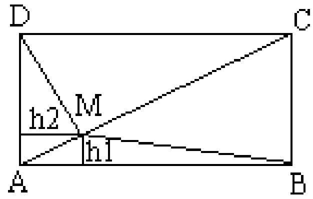


Figura 4.3.7

La consideració de casos particulars —quadrat i rectangle— de casos límit (si M està en A, les dues àrees valen zero; si M està en C, les dues àrees també són iguals perquè la diagonal divideix al quadrat i al rectangle en dos triangles iguals) i de casos singulars (si M està en H —centre del paral·lelogram—, les àrees són iguals perquè els quatre triangles formats per les diagonals del quadrat o del rectangle ho són) ens poden ajudar a conjecturar sobre l'equivalència dels triangles ABM i AMD.

Una nova consideració de casos particulars, límit i singulars sorgeix quan reduïm el problema del paral·lelogram a un altre d'equivalent (línia 2). En aquest cas, el fet de considerar triangles equilàters, isòsceles i variar el punt M al llarg de la mitjana AH, ens pot ajudar a conjecturar i utilitzar determinades tècniques (comparació de bases i altures, equivalència per complement...) per a identificar i justificar l'equivalència dels triangles ABM i AMD.

A la taula 4.3.1 mostrem un resum dels continguts matemàtics implicats en la resolució del problema del paral·lelogram.

Un cop identificats els continguts matemàtics implicats en la resolució d'aquest problema, passem a presentar possibles modificacions que hem tingut en compte per triar l'enunciat que finalment hem proposat.

Considerem diverses modificacions de l'enunciat, algunes d'elles van ser experimentades amb diferents parelles d'alumnes, com per exemple:

- la de substituir el paral·lelogram per un rectangle. Aquesta presentació ens semblava que facilitava massa el traçat de paral·leles (i, per tant la descomposició del rectangle) i el de les altures dels triangles;
- la possibilitat de donar una presentació purament verbal que fes referència tant a un paral·lelogram qualsevol com un punt qualsevol M de la diagonal, sense utilització de cap gràfic adjunt. Aquesta presentació la descartem per la tendència de molts alumnes a triar el punt M en un lloc concret —generalment al centre del paral·lelogram—, sense que tinguessin la necessitat de generalitzar, després, a un punt qualsevol.

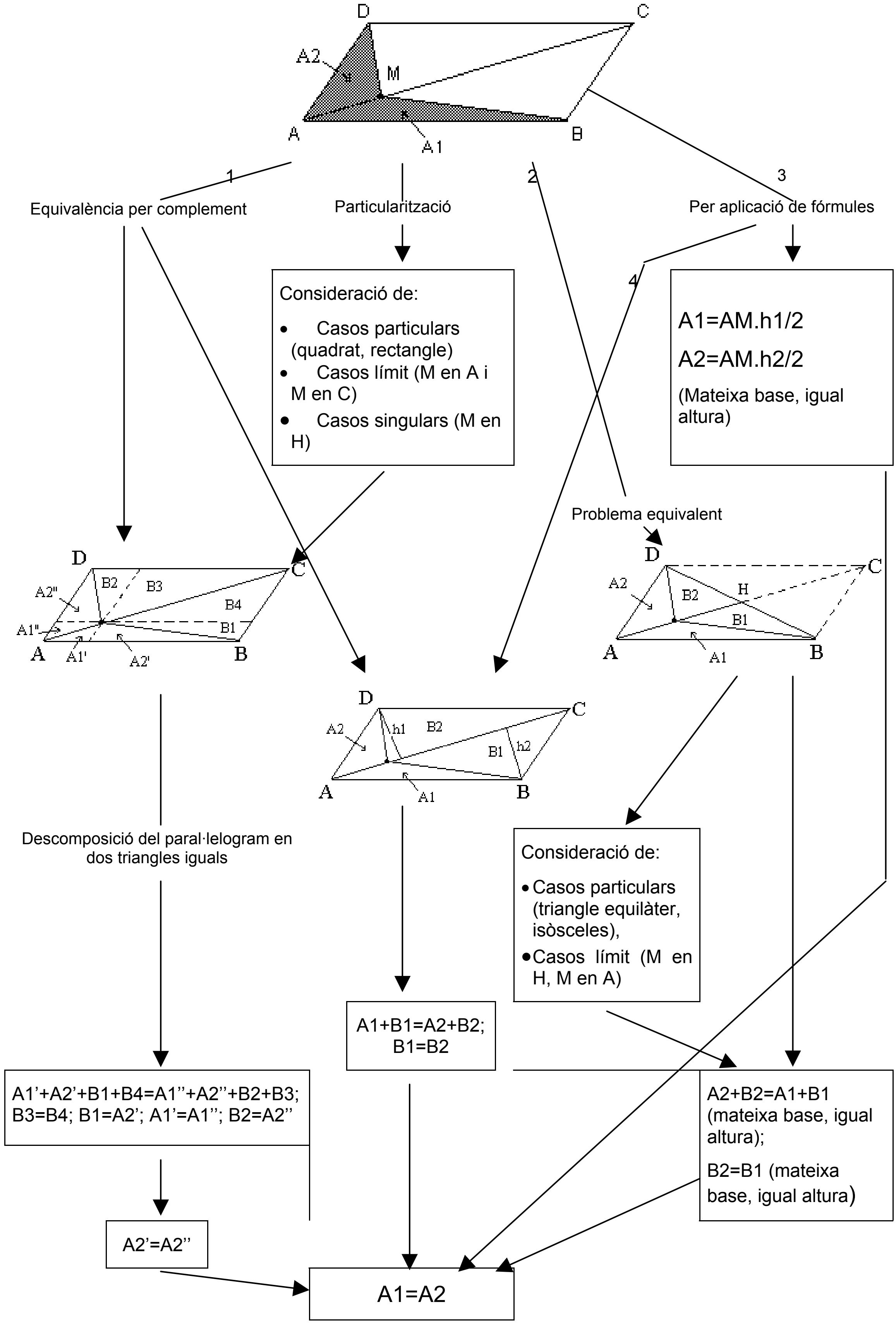
La presentació per la qual hem optat va ser la d'un paral·lelogram ABCD —del qual es va incloure la seva presentació gràfica— i la tria de M en un lloc arbitrari, però que no estigués en una situació límit (A o C) ni singular (centre del paral·lelogram) de la diagonal, i a més amb la condició que les altures sobre el costat AM (comú als dos triangles que es comparaven) caigués fora de l'esmentat segment.

	CONTINGUTS IMPLICATS EN LA RESOLUCIÓ DEL PROBLEMA DEL PARAL·LELOGRAM*
FETS I CONCEPTES	• Definició i elements de figures (paral·lelogram, triangle, diagonal, mediana, altura, etc.). • Equivalència de triangles. • Congruència de triangles. • Criteris de congruència de triangles. • Fórmula de l'àrea del triangle. • Les diagonals d'un paral·lelogram es tallen en el seu punt mig. • Igualtat de segments paral·lels compresos entre rectes paral·leles. • Divisió d'un paral·lelogram en dos triangles congruents, per una de les seves diagonals. • Relacions entre els angles determinats por rectes paral·leles tallades per una secant.
PROCEDIMENTS	• Aplicació de fórmules. • Aplicació de criteris de congruència. • Equivalència per complement. • Identificació i representació d'altures de triangles. • Descomposició del paral·lelogram. • Reducció a un problema equivalent. • Recerca de casos particulars, límit i singulars.

* Incloem els continguts implicats en tots els enfocaments identificats.

Taula 4.3.1. Resum dels continguts matemàtics implicats en la resolució del problema del paral·lelogram

ESPAI BÀSIC DEL PROBLEMA DEL PARAL·LELOGRAM



4.4. Problema de la malla quadrada

La zona ratllada de la figura té una unitat quadrada d'àrea. Calcula, en unitats quadrades, l'àrea del triangle (figura 4.4.1).

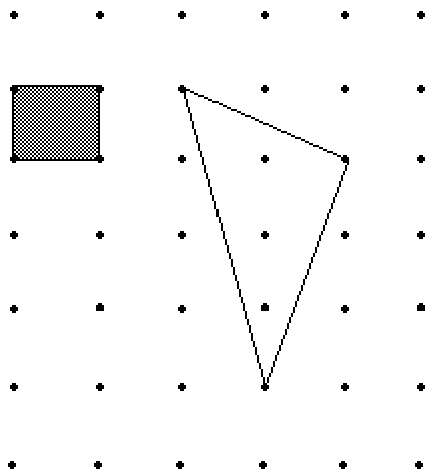


Figura 4.4.1

4.4.1. Identificació dels continguts matemàtics implicats en la seva resolució

En aquest problema de la malla quadrada assenyalem quatre enfocaments i identifiquem els coneixements necessaris per al seu desenvolupament (Cobo, 1996):

- El primer, que segueix la línia 1 -descomposició del triangle-, (veure l'espai bàsic del problema malla quadrada, pàg. 65) reduiria la resolució a la suma de les àrees de dos triangles en els quals es poden identificar les seves bases i altures mitjançant una comparació amb els costats de la quadrícula. Es pot argumentar que A (figura 4.4.2) és el punt mig d'un segment unitat utilitzant el pendent d'un d'aquests costats, que es pot mesurar en termes de quantes unitats puja o baixa per cada unitat que es desplaça cap a l'esquerra o dreta. Amb això, les bases d'ambdós triangles mesuren 3.5 unitats.

  Una variant d'aquesta descomposició -línia 2-, que faria més fàcil el càlcul de les àrees, exigiria una argumentació basada en la igualtat dels triangles ratllats de la figura 4.4.2.

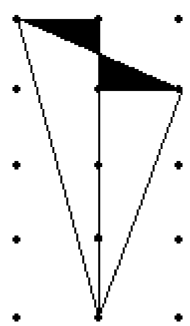


Figura 4.4.2

Per a implementar aquest enfocament, a més dels coneixements bàsics relacionats amb els elements del triangle, caldria saber dibuixar l'altura corresponent a qualsevol vèrtex d'un triangle i aspectes relacionats amb els casos d'igualtat de triangles.

- El segon, que segueix la línia 3 -superposició de figures-, (veure pàg. 65) està basat en la idea de considerar l'àrea del triangle donat com la resta de l'àrea del rectangle que l'envolta (S_R) -que es podria fer fins i tot comptant els quadrats o, si més no, com base per altura- menys les àrees dels tres triangles de les cantonades (S_I, S_{II} i S_{III}), les bases i les altures dels quals es determinarien tenint en compte que són triangles rectangles i els seus catets coincideixen exactament amb unitats senceres de l'entramat de punts (figura 4.4.3).

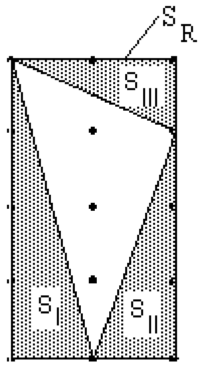


Figura 4.4.3

Aquesta línia exigeix saber, a més de la forma tradicional de l'àrea d'un triangle, el fet que dues altures d'un triangle rectangle coincideixen amb els seus catets.

- El tercer, que segueix la línia 4 -identificació d'angles i costats- (veure pàg. 65), és un enfocament algebraic ja que s'han de calcular els costats del triangle i, a partir d'ells, la seva àrea, fent servir coneixements relacionats amb trigonometria o simplement recordant la fórmula d'Heró.

  Així doncs, el desenvolupament d'aquesta línia passaria per l'aplicació del teorema de Pitàgoras per al càlcul dels costats i després pel coneixement de la fórmula d'Heró o de qualsevol altra fórmula deduïda a partir de l'aplicació dels teoremes dels sinus i cosinus.

- El quart, que segueix la línia 5 -tria d'uns eixos de coordenades- (veure pàg. 65), és un enfocament típic de la Geometria Analítica que té l'inconvenient inicial, per als alumnes d'aquestes edats, que han de fixar els eixos de coordenades en relació al triangle.

  A l'espai bàsic del problema de la malla quadrada només reflectim una de les diverses variants d'aquest enfocament analític, que és el que calcula l'àrea del triangle a partir de la base i l'altura expressades com distàncies entre punts i punt i recta respectivament. El coneixement del càlcul de determinants reduiria sensiblement els càlculs de distàncies que hem esmentat abans, ja que n'hi hauria prou amb aplicar la fórmula de l'àrea del triangle en funció de les coordenades dels seus vèrtexs, és a dir:

$$\text{Àrea del triangle} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

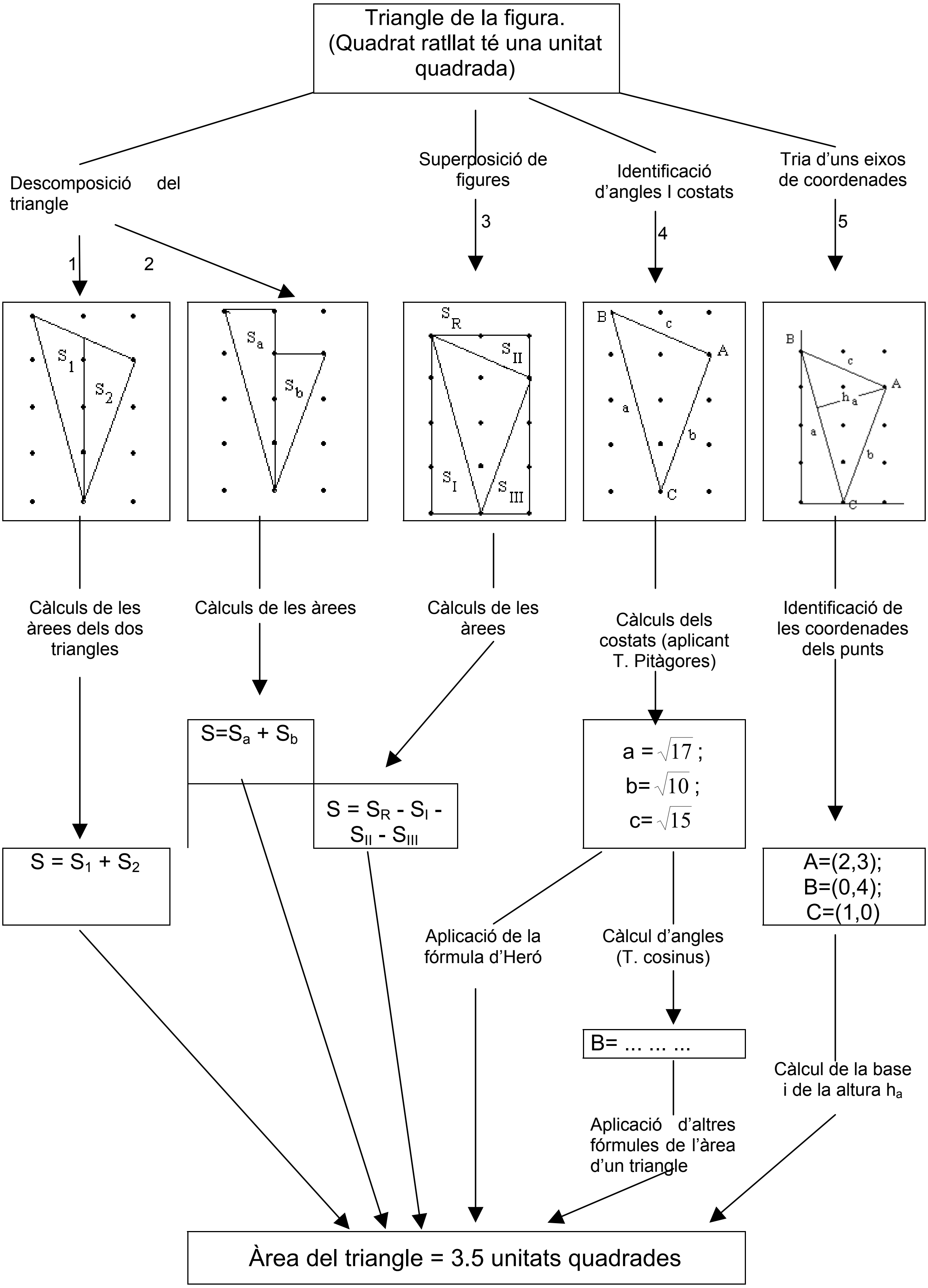
  Els alumnes hauran d'estar familiaritzats amb la fixació d'eixos de coordenades quan no se'ls donen i saber l'expressió de les distàncies entre dos punts i entre punt i recta per tal de poder aplicar la fórmula tradicional de l'àrea d'un triangle, o bé, tenir coneixements relacionats amb el desenvolupament de determinants d'ordre 3 i, a més, saber la fórmula de l'àrea del triangle en funció de les coordenades dels seus vèrtexs.

	CONTINGUTS IMPLICATS EN LA RESOLUCIÓ DEL PROBLEMA DE LA MALLA QUADRADA*
FETS I CONCEPTES	• Definició i elements de figures (quadrat, triangle, triangle rectangle, altura, etc.). • Equivalència de triangles. • Diferents fórmules de l'àrea del triangle, d'un quadrat, d'un rectangle.
PROCEDIMENTS	• Aplicació de fórmules d'àrees. • Aplicació de criteris d'equivalència. • Identificació i representació d'altures de triangles. • Càlcul d'angles i costats • Descomposició d'un triangle i d'un rectangle. • Aplicació del T. de Pitàgoras • Tria d'eixos de coordenades • Aplicació de teoremes trigonomètrics

* Incloem els continguts implicats en tots els enfocaments identificats.

Taula 4.4.1: Continguts matemàtics implicats en la resolució del problema de la malla quadrada

ESPAI BÀSIC DEL PROBLEMA DE LA MALLA QUADRADA



4.5. Problema del triangle

ABC és un triangle qualsevol i D un punt del costat AB que el divideix en dos segments que estan en proporció 2 a 1 (figura 4.5.1). Si DE i DF són segments paral·lels als costats AC i BC, respectivament, quina relació hi ha entre les àrees dels triangles DBE i FEC?

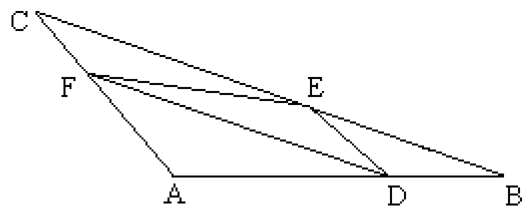


Figura 4.5.1

4.5.1. Identificació dels continguts matemàtics implicats en la seva resolució

L'enunciat es presenta de forma verbal amb una figura adjunta, que té la finalitat d'afavorir la seva comprensió. A més a més de conceptes com el de triangle, paral·lelisme, àrea d'un triangle, etc., a l'esmentat enunciat apareix un terme com és el de proporció, d'ús freqüent en la comparació d'àrees, que en els problemes anteriors no sortia explícitament i que els alumnes han d'interpretar per començar la resolució.

- L'enfocament que hem identificat de la forma: aplicació del Teorema de Tales (línia 1 de l'espai bàsic del problema del triangle, pàg. 69) es fonamenta a l'esmentat teorema, que es pot aplicar precisament perquè, segons l'enunciat, DE i AC són paral·leles i ens donen la proporció: $\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}} = \frac{2}{1}$, amb la qual cosa la raó $\frac{CE}{EB}$ és la mateixa (figura 4.5.1). Aquest coneixement ens porta a comparar les àrees dels triangles DBE i FEC per aplicació de la fórmula de l'àrea del triangle i comparació dels seus elements.

  Així: Àrea (DBE) = $\frac{BE.h1}{2}$; Àrea (FEC) = $\frac{EC.h2}{2}$, la relació entre CE i EB ens la dona el Teorema de Tales i només s'ha d'identificar la igualtat de h1 i h2 (figura 4.5.2) —altures sobre les bases EB i CE, respectivament— perquè són perpendiculars a dues rectes paral·leles —FD i CB—.

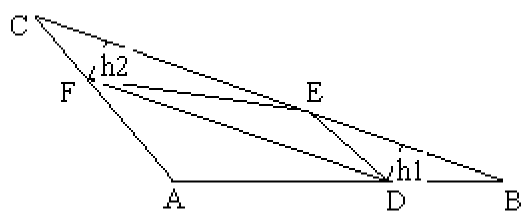


Figura 4.5.2

Així doncs, el coneixement del Teorema de Tales i la seva aplicació, la fórmula de l'àrea del triangle i la identificació de la igualtat de les altures dels dos triangles són imprescindibles per al desenvolupament d'aquest enfocament.

- L’enfocament que segueix la línia 2 (veure espai bàsic del problema del triangle, pàg. 69), malgrat l’hem derivat de l’aplicació del Teorema de Tales, perquè exigeix implícitament l’aplicació de l’esmentat teorema, és a dir, si CA i DE són paral·lels i AD és dues vegades DB, traçant paral·leles a CA (o DE) por D’ —que divideix al segment AD en dos iguals— obtenim E’ sobre CE. Si tracem per E i E’ paral·leles a AB obtenim F’ i F, respectivament. Així procedim fins a descompondre el triangle ABC en 9 triangles congruents al DBE (figura 4.5.3).

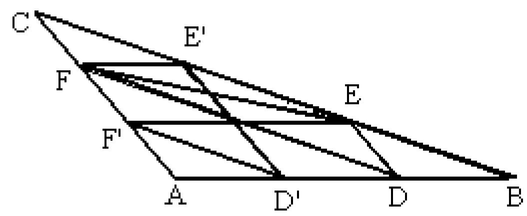


Figura 4.5.3

El paral·lelogram FDEC (figura 4.5.3) conté 4 triangles DBE. La diagonal FE el divideix en dos triangles congruents, per tant cadascun dels quals conté dues vegades al DBE.

El desenvolupament d’aquest enfocament, tot i que no explícitament, suposa l’aplicació del teorema de Tales, l’aplicació de criteris de congruència de triangles per a justificar la igualtat dels 9 que composen l’ABC, així com la de FDE i FEC obtinguts en dividir el paral·lelogram FDEC per la diagonal FE.

- La línia 3 (veure espai bàsic del problema del triangle, pàg. 69), que exigeix la identificació prèvia dels quatre triangles en què queda dividit l’ABC (figura 4.5.4) seguint les indicacions de l’enunciat, té el seu fonament en el fet que els triangles ABC, ADF i DBE són semblants, i en l’aplicació de la relació que hi ha entre la raó de les àrees de dues figures semblants i el quadrat de la raó de dos elements homòlegs de les esmentades figures.

  Aquesta relació ens permet establir les relacions:

  Àrea (ABC) = 9.Área (DBE) i Àrea (FAD) = 4. Àrea (DBE),

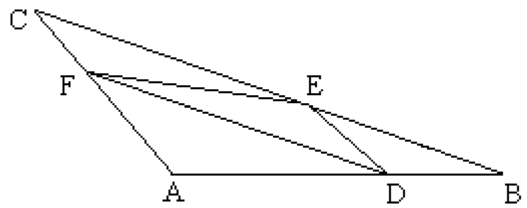


Figura 4.5.4

Amb la qual cosa, tindrem que:

Àrea (FDEC) = (9-4-1).Àrea (DBE).

I, per tant,

Àrea(FEC) = 2.Àrea (DBE).

El desenvolupament d’aquest enfocament exigeix, per tant, la identificació dels quatre triangles en els quals queda descompost l’ABC en seguir els passos de l’enunciat; el coneixement del concepte de semblança i dels criteris de semblança de triangles i la seva aplicació; el coneixement de la relació entre la raó de dues figures semblants i la de dos dels seus elements homòlegs i, per últim, l'aplicació de l'equivalència per complement.

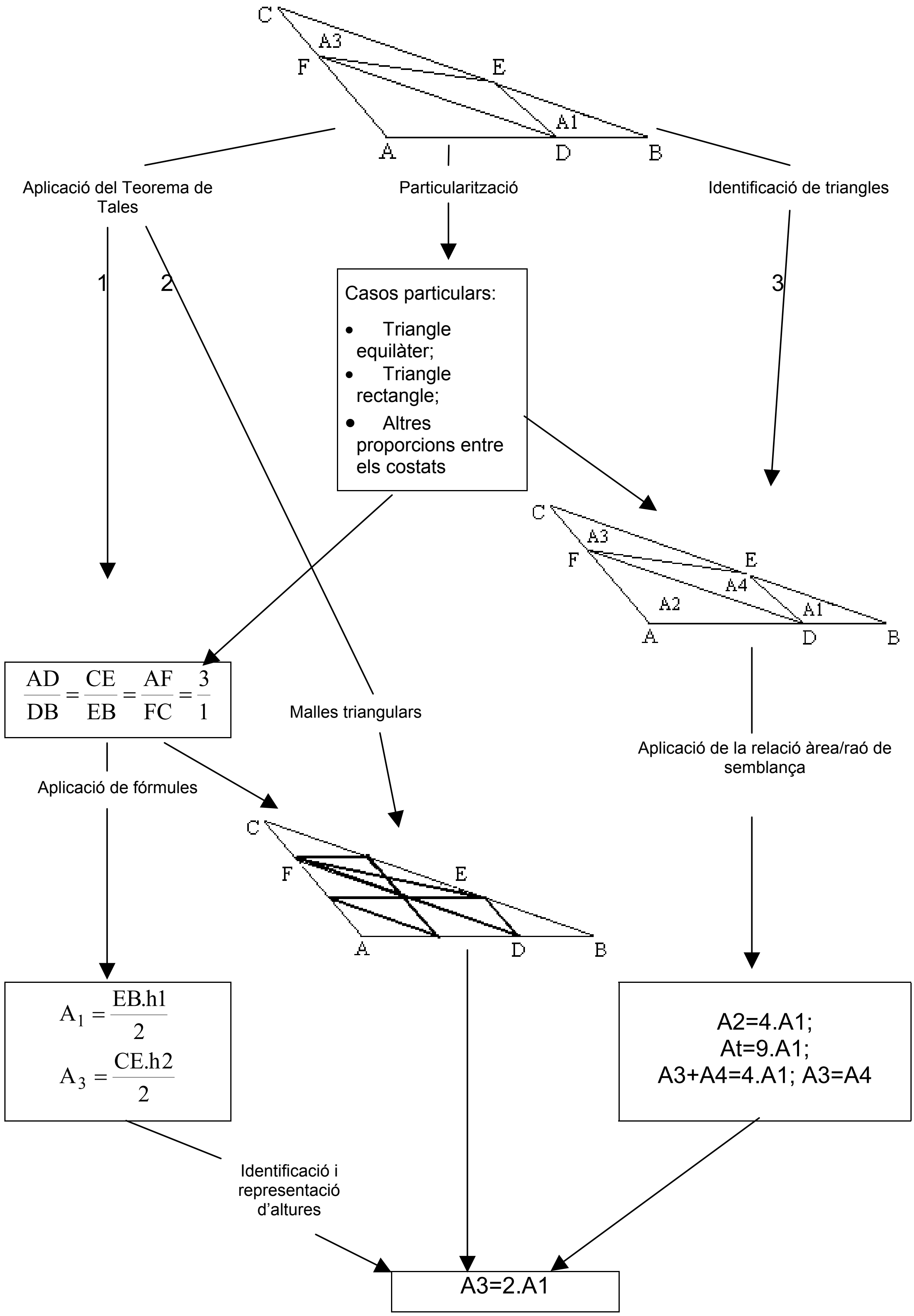
- Si reduïm el triangle ABC a un triangle equilàter, a un triangle rectangle, o proposem d'altres proporcions entre les longituds dels costats, la forma de raonar es redueix a les línies 1 i 3 de l'espai bàsic del problema. Amb la particularitat que després hem de generalitzar els procediments que utilitzem.

	CONTINGUTS IMPLICATS EN LA RESOLUCIÓ DEL PROBLEMA DEL TRIANGLE*
FETS I CONCEPTES	• Figures geomètriques (triangle, paral·lelogram, etc.) i els seus elements (paral·lelisme, diagonal, etc.). • Congruència de triangles. • Semblança de triangles. • Criteris de congruència de triangles. • Criteris de semblança de triangles. • Relacions entre els angles determinats per rectes paral·leles tallades per una secant. • Igualtat de segments paral·leles perpendiculars a dues rectes paral·leles i compresos entre elles. • Teorema de Tales. • Fórmula de l'àrea del triangle. • Relació entre la raó de les àrees de dues figures semblants i la raó de semblança. • Concepte de proporció.
PROCEDIMENTS	• Aplicació del Teorema de Tales. • Identificació i representació de les altures d'un triangle. • Aplicació de la relació entre la raó de les àrees de dues figures semblants i la raó de semblança. • Aplicació de criteris de semblança de triangles. • Equivalència per complement. • Utilització de malles triangulars (descomposició d'un triangle entre altres que es prenen per unitat). • Recerca de casos particulars.

* Incloem els continguts implicats en tots els enfocaments identificats.

Taula 4.5.1. Resum dels continguts matemàtics implicats en la resolució del problema del triangle

ESPAI BÀSIC DEL PROBLEMA DEL TRIANGLE



Vam considerar dues modificacions del problema que finalment no vam proposar. Per una part, vam pensar en la possibilitat de donar una proporció genèrica —per exemple $\frac{a}{b}$— entre els segments AD i DB, la qual cosa complica en excés la resolució. Per altra, la substitució de la comparació de les àrees dels dos triangles —DBE i FEC— per la del triangle DBE amb la del paral·lelogram FDEC, no suposa modificació alguna per a la seva resolució a efectes d'utilització de conceptes i procediments. Al final vam decidir fer una presentació amb una mica més de complicació a l'enunciat. En tots els casos la presentació amb una figura afegida és imprescindible.

CAPÍTOL 5

RECONEIXEMENT D'ACCIONS I IDENTIFICACIÓ DE MISSATGES EN LA RESOLUCIÓ DELS PROBLEMES DEL PARAL·LELOGRAM, DE LA MALLA QUADRADA I DEL TRIANGLE

5.1. Introducció

En aquest capítol hem elaborat, per cada problema, tot un sistema de missatges (ajudes, suggeriments, indicacions generals) per ajudar els alumnes en les diferents fases de la resolució del problema. Per simplificar, hem considerat que dividim el procés de resolució de cada problema en tres fases: familiarització, planificació/execució i verificació. Associada a cadascuna d'aquestes fases de la resolució d'un problema hem identificat missatges diferenciats en tres nivells o categories, segons siguin les referències explícites que facin als diferents continguts matemàtics:

- Nivell 0: Missatges generals que no inclouen continguts matemàtics implicats en la resolució del problema
- Nivell 1: Missatges que només contenen el nom dels continguts matemàtics involucrats
- Nivell 2: Missatges que contenen informacions sobre aquests continguts matemàtics.

Els missatges han estat elaborats amb la idea que, als nivells 0 i 1, fossin indicacions o suggeriments generals que permetin a cada alumne trobar la solució del problema sense que tingui la sensació que se l'ajuda massa. Els del nivell 2 són ajudes una mica més concretes, però hem procurat no dir mai a l'alumne que el problema l'hagi de resoldre de tal o qual forma, malgrat que, com hem comentat al capítol 3, de vegades és difícil ajudar l'alumne sense donar-li massa informació.

És normal que els missatges de les fases de familiarització i verificació de cada problema siguin molt semblants. Poden diferenciar-se en les referències concretes a continguts matemàtics, sobretot als nivells 1 i 2.

Hem utilitzat aquest conjunt de missatges per a cada problema que mostrem en aquest capítol per tal de seleccionar i d'implementar els que pot llençar el tutor informàtic en cada moment del procés de resolució, d'acord amb el que hem cregut oportú després de les discussions pertinents a l'equip de recerca que assessora la implementació del tutor informàtic.

Així doncs, un cop identificades i analitzades les possibles accions que l'alumne pugui fer, d'acord amb l'anàlisi dels continguts matemàtics de cada problema fetes al capítol 4, hem seleccionat els missatges que hem considerats més adients en cada moment del procés de resolució de cada problema, sempre tenint en compte els punts claus per a implementar el sistema de missatges: el sistema farà sortir un nou missatge per cada tres accions de l'alumne no reconegudes pel sistema; en cada moment de la resolució l'alumne podrà demanar un missatge d'ajuda; i, depenent de les fases de la resolució en les que es trobi l'alumne, els missatges sortiran o no de forma aleatòria d'entre un conjunt prèviament establert. A més, l'alumne ha de fer un 30% de les accions reconegudes per tal que el sistema validi el resultat final.

5.2. Relació de missatges corresponents a la resolució del problema del paral·lelogram

Podem trobar l'enunciat del problema del paral·lelogram a l'apartat 4.3 (pàg. 57).

A) Familiarització

Nivell 0

PA01: Tracta de comprendre bé les condicions del problema.
PA02: Identifica l'objectiu del problema.
PA03: Intenta comprendre totes les paraules de l'enunciat.
PA04: Torna a llegir a poc a poc l'enunciat del problema.
PA05: Expressa l'enunciat d'una altra manera.
PA06: Recorda tots els conceptes matemàtics que hi ha a l'enunciat o a la figura i intenta definir-los amb les teves pròpies paraules. Si no els tens clars mira el glossari.
PA07: Els conceptes associats a l'enunciat o a la figura et suggereixen alguna informació nova?
PA08: Tracta d'organitzar la informació que tens.
PA09: Esborra la representació gràfica que has carregat i intenta fer-ne una de nova sense fixar-te en l'anterior.
PA010: Pren nota de tot el vas fent durant la resolució que has començat.
PA011: Pots carregar una construcció de la figura de l'enunciat prement el botó 'carregar figura'.

Nivell 1

PA11: Recorda el que és un paral·lelogram.
PA12: Intenta explicar el que és la diagonal d'un paral·lelogram.
PA13: Mira de recordar el nombre d'altures que té un triangle i la forma de dibuixar-les (Dibuixa un triangle qualsevol i traça les seves altures).
PA14: Pensa sobre si saber la fórmula de l'àrea d'un triangle et pot ajudar o no a resoldre aquest problema.
PA15: Reflexiona sobre a quin punt de la diagonal hauria de ser el punt M segons l'enunciat del problema.
PA16: Segur que te'n recordes com són els segments paral·lels compresos entre paral·leles.
PA17: Consulta en algun llibre de matemàtiques, en una enciclopèdia o en el glossari el concepte de triangles equivalents.
PA18: Recorda les propietats de les diagonals d'un paral·lelogram.

Nivell 2

PA21: Un paral·lelogram té els costats paral·lels dos a dos.
PA22: La diagonal d'un paral·lelogram el divideix en dos triangles de la mateixa àrea (equivalents).
PA23: Un triangle té tres altures.
PA24: Cada altura d'un triangle és perpendicular a cadascun dels seus costats i a més ha de passar pel vèrtex oposat.
PA25: Reflexiona sobre el següent aspecte: per a resoldre aquest problema, el raonament que has de fer ha de ser independent de la posició on es trobi el punt M.
PA26: Les diagonals d'un paral·lelogram es tallen al seu punt mig.
PA27: Pren nota de tot el que vas fent durant la resolució que has començat.

B) Planificació/execució

Nivell 0

PB01: Pensa sobre el fet que M pugui estar en qualsevol punt de la diagonal, això et suggereix alguna cosa?
PB02: Pensa en un problema equivalent.
PB03: Mira d'imaginar-te un problema més senzill o un cas particular d'aquest problema.
PB04: Pensa en alguna conjectura. Tracta de justificar-la.
PB05: Intenta construir altres figures o altres rectes.
PB06: Busca problemes o situacions anàlogues a les d'aquest problema.
PB07: Si es pot, utilitza simetries.
PB08: Potser necessitis alguna mena de representació simbòlica.
PB09: Experimenta.
PB10: Tracta de dividir el problema en dos (crear dos problemes diferents).
PB11: Si ja tens un pla o has establert una conjectura busca relacions entre els elements de la figura. Analitza aquestes relacions.
PB12: Mira't la figura i tracta de conjecturar una relació entre les àrees dels triangles que es comparen. Pensa que després has de justificar aquesta conjectura.

Nivell 1

PB11: Podries pensar alguna forma de descompondre el paral·lelogram en triangles.
PB12: Reflexiona sobre el que et suggereixen les possibles descomposicions del paral·lelogram en triangles.
PB13: Tracta de trobar relacions entre els costats dels triangles les àrees dels quals vols comparar.
PB14: Tracta de trobar també relacions entre les altures dels triangles les àrees dels quals vols comparar.
PB15: Pensa en traçar paral·leles.
PB16: Identifica els triangles nous que s'han format en descompondre el paral·lelogram.
PB17: Imagina com compararies les àrees dels nous triangles que s'han format, en descompondre el paral·lelogram.
PB18: Pots situar el punt M en una altra posició diferent de la diagonal.
PB19: Si et sembla pots traçar les altures dels triangles AMD i ABM i reflexiona sobre aquestes preguntes:
Quina base del triangle agafaries?
Amb quina altura et quedaries?

Nivell 2

PB21: Podries pensar alguna forma de descompondre el paral·lelogram en triangles, per exemple, traçant paral·leles que passin pel punt M.
PB22: Reflexiona sobre la possibilitat de resoldre primer el problema que resulta de situar el punt M a la posició del vèrtex A. Pensa què faries després per a resoldre el problema que tens plantejat.
PB23: Pots agafar com a bases dels triangles que es comparen el costat comú AM. En aquest cas, Dibuixa les altures i pensa la relació que haurà entre les altures corresponents a aquest costat.
PB24: Reflexiona sobre la possibilitat de resoldre el problema considerant que et donen en lloc d'un paral·lelogram un quadrat o un rectangle. Pots aplicar els mateixos procediments per a resoldre el problema del paral·lelogram?
PB25: Si has substituït el paral·lelogram per un quadrat o un rectangle, imagina la manera de calcular les àrees dels triangles que et demanen. Si ja les tens calculades pensa de quina forma aquest procediment et serviria per a resoldre el problema inicial.

PB26: Si ja has comparat les àrees en el cas particular que el paral·lelogram sigui un quadrat, pensa de quina forma aquest procediment et serviria per a resoldre el problema inicial.
PB27: Pots situar el punt M en una altra posició diferent del de la diagonal, per exemple a la posició de C. Pensa què faries després per a resoldre el problema que tens plantejat.
PB28: Si tracem una de les mitjanes d'un triangle, compara les àrees dels dos triangles que es formen. Això et suggereix alguna cosa?

C) Verificació

Nivell 0

PC01: Mira de comprovar el resultat que has obtingut. Pensa en alguna forma de fer-ho.
PC02: Pensa si aquest resultat és coherent amb les condicions inicials del problema.
PC03: Tens confiança en el resultat que has obtingut? I en la solució obtinguda?
PC04: Reflexiona sobre la possibilitat de revisar la solució que has obtingut. Pensa com faries aquesta revisió.
PC05: Reflexiona com van sorgir les idees correctes que et van apropar a la solució.
PC06: Recorda quins van ser els punts que van canviar el rumb de la resolució i sobre les causes que els van originar.
PC07: Reflexiona sobre aquestes preguntes:
Al llarg de la resolució, has proposat vàries estratègies?
Les has examinat totes?
Et sembla que has desenvolupat la o les més adients?
PC08: Fes un repàs de tots els continguts matemàtics que has fet servir durant la resolució del problema i recupera el que et sembli valuós del que has fet.
PC09: Tracta d'identificar les teves possibles errades.
PC010: Repassa la construcció de la figura i tracta de completar-la.
PC011: Fes més detallades les deduccions per arribar al resultat final.
PC012: Et suggereixo que segueixis en ordre invers els passos de la solució que has trobat per a comprovar que no t'has equivocat.

Nivell 1

PC11: Comprova numèricament o geomètrica el resultat que has obtingut.
PC12: Repassa el procés que has seguit per a obtenir la solució.
PC13: Pensa que durant la resolució has pogut fer alguna errada de càlcul o en el procediment que has seguit.
PC14: Repassa tot el que has fet per a obtenir la solució i escriu les deduccions més importants a l'àrea de deduccions.
PC15: Reflexiona sobre les dificultats que has tingut per avançar quan desconeixies algun concepte matemàtic o quan persisties en alguna estratègia no adient.
PC16: Pensa sobre quins han estat els motius dels teus canvis de rumb.
PC17: Tracta de recordar què et va suggerir l'estratègia que has seguit per a resoldre el problema.

Nivell 2

PC21: Pensa si les idees que t'han portat a obtenir la solució t'han sorgit per associació amb les d'altres problemes similars... Explica quins problemes.
PC22: Els punts que t'han semblat claus en la teva resolució podrien ser:
Traçat de rectes paral·leles.
Consideració de casos particulars (quadrats, rectangles, punt M en diferents posicions, etc.).
Aplicació de fórmules.

Identificació d'un problema equivalent.
Altres...
PC23: Pensa en altres formes d'enfocar el problema.
PC24: Intenta proposar problemes semblants al que has resolt.

5.3. Implementació del sistema de missatges en el sistema informàtic d'acord amb totes les possibles accions de la resolució del problema del paral·lelogram

5.3.1. Estratègia 0 (construcció o carrega de la figura de l'enunciat)

Si l'alumne obre l'enunciat i no carrega la seva figura i, per tant, tracta de construir-la, les accions reconegudes pel sistema (totes de construcció gràfica, figura 5.3.1) serien les següents:

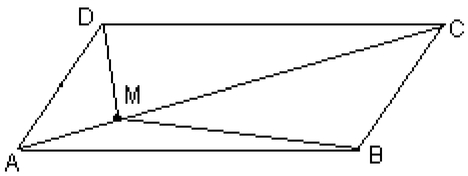


Figura 5.3.1

- Crea punts A, B i C
- Dibuixa segments AC i BC
- Dibuixa paral·lela al segment AB per C, de nom DC
- Dibuixa paral·lela al segment BC per A, de nom AD
- Crea punt d'intersecció entre DC i AD, de nom D
- Dibuixa segment AD (o BD)
- Dibuixa punt de nom M sobre el segment AC (o BD).

Per cada tres accions no reconegudes (accions que no siguin del llistat anterior) sortirà un dels següents missatges seguint l'ordre que mostrem a continuació:

1. Tracta de comprendre bé les condicions del problema
2. Identifica l'objectiu del problema
3. Intenta comprendre totes les paraules de l'enunciat
4. Expressa l'enunciat d'una altra manera
5. Recorda tots els conceptes matemàtics que hi ha a l'enunciat o a la figura i intenta definir-los amb les teves pròpies paraules. Si no els tens clars mira el glossari.
6. Pots carregar una construcció de la figura de l'enunciat prement el botó carregar figura.

Si l'alumne carrega la figura de l'enunciat, aleshores, per cada tres accions no reconegudes sortirà aleatòriament i successiva un dels següents missatges:

1. Els conceptes associats a l'enunciat o a la figura et suggereixen alguna informació nova?.
2. Tracta d'organitzar la informació que tens.
3. Esborra la representació gràfica que has carregat i intenta fer-ne una de nova sense fixar-te en l'anterior.
4. Mira de recordar el nombre d'altures que té un triangle i la forma de dibuixar-les.

5. Reflexiona en quin punt de la diagonal hauria de ser el punt M segons l'enunciat del problema.
6. La diagonal d'un paral·lelogram el divideix en dos triangles de la mateixa àrea (equivalents).
7. Reflexiona sobre el següent aspecte: per a resoldre aquest problema, el raonament que has de fer ha de ser independent de la posició on es trobi el punt M.
8. Pensa sobre el fet que M pugui estar en qualsevol punt de la diagonal, això et suggereix alguna cosa?
9. Pensa en un problema equivalent.
10. Mira d'imaginar-te un problema més senzill o un cas particular d'aquest problema.
11. Pensa en alguna conjectura. Per a tractar de justificar-la has de buscar relacions entre els elements de la figura. Analitza aquestes relacions.
12. Intenta construir altres figures o rectes.
13. Tracta de dividir el problema en dos (crear dos problemes diferents).

Si l'alumne fa una nova acció reconeguda (accions descrites en qualssevol dels sots-apartats d'aquest apartat 5.3) després de representar la figura de l'enunciat o de carregar-la. Aquesta acció hauria de ser del tipus gràfic o del tipus deductiu. El sistema reconeixerà l'acció i identificarà l'estratègia amb la qual està associada.

5.3.2. Estratègia 1 (equivalència per complement)

Si l'alumne dibuixa una línia paral·lela a un dels costats del paral·lelogram, el programa sabrà que intenta seguir l'estratègia que hem anomenat "equivalència per complement", dins de l'espai bàsic del problema del paral·lelogram (pàg. 61).

A partir de la figura de l'enunciat o altra similar que l'alumne faci, la relació d'accions que desenvolupen aquesta estratègia per arribar a la solució serien les següents (figura 5.3.2):

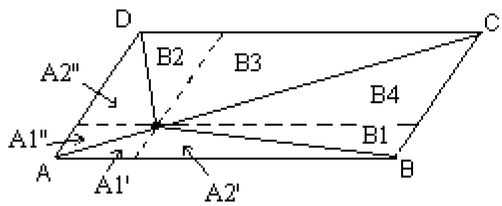


Figura 5.3.2

- Dibuixa la línia paral·lela a AD per M (acció gràfica)
- Dibuixa la línia paral·lela a AB per M (gràfica)
- Identifica els punts de tall de les dues paral·leles anteriors amb els costats del paral·lelogram i dels nous segments que es formen (en realitat aquí hi ha 8 accions gràfiques).
- Àrea ABC = Àrea ACD (acció deductiva, basada en la propietat de la diagonal d'un paral·lelogram)
- Àrea de B3 = Àrea de B4 (deductiva, seguim la nomenclatura de l'espai bàsic del problema, figura 5.3.2)
- Àrea A1' = Àrea A1'' (deductiva, per la mateixa propietat de la diagonal)
- Àrea A2'+ Àrea B1 = ÀreaA2''+ ÀreaB2 (deductiva)
- Àrea A2' = Àrea B1 (deductiva)
- Àrea A2'' = Àrea B2 (deductiva)

- Àrea A1''+Àrea A2'' = ÀreaA1' + ÀreaA2' (deductiva)
- Àrea ABM = Àrea AMD (acció deductiva final o resultat del problema).

Per cada tres accions no reconegudes sortirà un dels següents missatges seguint l'ordre que mostrem a continuació:

1. Identifica els triangles nous que s'han format.
2. Imagina com compararies les àrees dels nous triangles que s'han format.

Si s'esgoten aquests missatges, per cada tres accions noves no reconegudes (gràfiques o deductives), sortiran de forma aleatòria dos nous missatges (que no hagin sortit prèviament) d'entre els esmentats a l'estratègia 0.

Si encara no hi ha cap acció reconeguda, sortiran de forma aleatòria i successiva els missatges següents de canvi d'estratègia, un per cada tres accions no reconegudes:

1. Reflexiona sobre la possibilitat de resoldre el problema considerant que et donen en lloc d'un paral·lelogram un quadrat o un rectangle. Pots aplicar els mateixos procediments per a resoldre el problema del paral·lelogram?.
2. Pots situar el punt M en una altra posició diferent del de la diagonal, per exemple en la posició de C. Pensa què faries després per a resoldre el problema que tens plantejat.
3. Tracta de trobar relacions entre els costats dels triangles les àrees dels quals vols comparar.
4. Si et sembla pots traçar les altures dels triangles AMD i ABM i reflexiona sobre aquestes preguntes:
   Quina base del triangle agafaries?
   Amb quina altura et quedaries?

En el moment que hi hagi una nova acció reconeguda el sistema de missatges seguirà la línia de l'estratègia identificada en aquesta acció.

Si l'alumne expressa el resultat correcte i ha fet almenys el 30% de les accions corresponents a aquesta estratègia sortiran els missatges de verificació, si no ha arribat a aquest percentatge d'accions reconegudes sortirà el missatge:

1. El resultat que has trobat és correcte, però la justificació que has fet no és suficient. Intenta buscar relacions entre els elements de la figura que justifiquin la teva resposta.

5.3.3. Estratègia 2 (aplicació de fórmules)

Si l'alumne dibuixa les altures dels triangles ABM o AMD sobre la diagonal AC (accions gràfiques) o expressa igualtats entre les esmentades altures (accions deductives), el sistema ha de saber que segueix l'estratègia que hem anomenat "aplicació de fórmules", dins de l'espai bàsic del problema del paral·lelogram (pàg. 61).

A partir de la figura de l'enunciat o d'altra similar que l'alumne faci, la relació d'accions que desenvolupen aquesta estratègia per arribar a la solució serien les següents (figura 5.3.3):

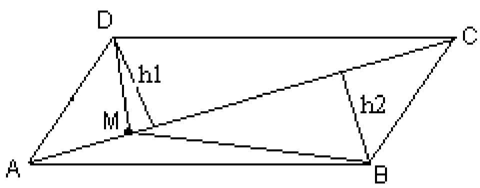


Figura 5.3.3

- Dibuixa la línia perpendicular a AC per B (acció gràfica).
- Dibuixa la línia perpendicular a AC per D (gràfica).
- Identificació dels punts de tall d'aquestes perpendiculars amb AC i dels segments que determinen, suposem que siguin h1 i h2 (aquestes són 4 accions gràfiques).
- Línia h1 = línia h2 (acció deductiva).
- Abans d'expressar que h1=h2, i per deduir aquesta igualtat l'alumne pot fer també l'acció d'igualar les àrees dels triangles ABC i ACD per la propietat que diu que la diagonal d'un paral·lelogram el divideix en dos triangles de la mateixa àrea.
- Àrea ABM = Àrea AMD (acció deductiva, resultat final).

Per cada tres accions no reconegudes sortirà un dels següents missatges seguint l'ordre que mostrem a continuació:

1. Tracta de trobar relacions entre els costats dels triangles les àrees dels quals vols comparar.
2. Tracta de trobar també relacions entre les altures dels triangles les àrees dels quals vols comparar.

Si s'esgoten aquests missatges, per cada tres accions noves no reconegudes (gràfiques o deductives), sortiran de forma aleatòria dos nous missatges (que no hagin sortit prèviament) d'entre els esmentats a l'estratègia 0.

Si encara no hi ha cap acció reconeguda, sortiran de forma aleatòria i successiva els missatges següents de canvi d'estratègia, un per cada tres accions no reconegudes

1. Podries pensar alguna forma de descompondre el paral·lelogram en triangles, per exemple, traçant paral·leles que passin pel punt M.
2. Reflexiona sobre la possibilitat de resoldre el problema considerant que et donen en lloc d'un paral·lelogram un quadrat o un rectangle. Pots aplicar els mateixos procediments per a resoldre el problema del paral·lelogram?
3. Pots situar el punt M en una altra posició diferent sobre la diagonal, per exemple en la posició de C. Pensa què faries després per a resoldre el problema que tens plantejat.

En el moment que hi hagi una nova acció reconeguda el sistema de missatges seguirà la línia de l'estratègia identificada en aquesta acció.

Si l'alumne expressa el resultat correcte i ha fet almenys el 30% de les accions corresponents a aquesta estratègia sortiran els missatges de verificació, si no ha fet aquest percentatge d'accions reconegudes sortirà el missatge:

1. El resultat que has trobat és correcte, però la justificació que has fet no és suficient. Intenta buscar relacions entre els elements de la figura que justifiquin la teva resposta.

5.3.4. Estratègia 3 (problema equivalent)

Si l'alumne dibuixa la diagonal BD del paral·lelogram, el sistema ha de saber que segueix l'estratègia que hem anomenat "problema equivalent", dins de l'espai bàsic del problema del paral·lelogram (pàg. 61).

A partir de la figura de l'enunciat o d'altra similar que l'alumne faci, la relació d'accions que desenvolupen aquesta estratègia per arribar a la solució serien les següents (figura 5.3.4):

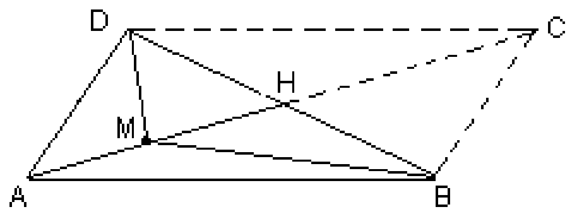


Figura 5.3.4

- Dibuixa la línia diagonal BD del paral·lelogram (acció gràfica).
- Identifica el punt de tall de les dues diagonals i dels segments que aquest punt determina amb els punts A, B i C del paral·lelogram i l'M (5 accions gràfiques).
- Línia BH = línia HD (per la propietat que les dues diagonals d'un paral·lelogram es tallen en el seu punt mig, acció deductiva).
- Dibuixa la línia perpendicular a DH per M (gràfica).
- Identifica el punt de tall d'aquesta perpendicular amb DH (gràfica).
- Dibuixa la línia perpendicular a DH per A (gràfica).
- Identifica el punt de tall d'aquesta perpendicular amb DH (gràfica).
- Àrea AHD = Àrea ABH (mateixa base i altura, deductiva).
- Àrea MBH = àrea MHD (deductiva).
- Àrea ABM = Àrea AMD (acció deductiva, resultat final).

Ací, la propietat sobre la que l'alumne ha d'expressar el seu coneixement és la que la mitjana d'un triangle el divideix en dos triangles equivalents.

Per cada tres accions no reconegudes sortirà un dels següents missatges seguint l'ordre que mostrem a continuació:

1. Identifica els nous triangles que s'han format.
2. Si tracem una de les mitjanes d'un triangle, compara les àrees dels dos triangles que es formen. Això et suggereix alguna cosa?

Si s'esgoten aquests missatges, per cada tres accions noves no reconegudes (gràfiques o deductives), sortiran de forma aleatòria dos nous missatges, que no hagin sortit prèviament, d'entre els esmentats a l'estratègia 0.

Si encara no hi ha cap acció reconeguda, sortiran de forma aleatòria i successiva els missatges següents de canvi d'estratègia), un per cada tres accions no reconegudes.

1. Podries pensar alguna forma de descompondre el paral·lelogram en triangles, per exemple, traçant paral·leles que passin pel punt M.
2. Reflexiona sobre la possibilitat de resoldre el problema considerant que et donen en lloc d'un paral·lelogram un quadrat o un rectangle. Pots aplicar els mateixos procediments per a resoldre el problema del paral·lelogram?
3. Pots situar el punt M en una altra posició diferent del de la diagonal, per exemple en la posició de C. Pensa què faries després per a resoldre el problema que tens plantejat.
4. Tracta de trobar relacions entre els costats dels triangles les àrees dels quals vols comparar".
5. Si et sembla pots traçar les altures dels triangles AMD i ABM i reflexiona sobre aquestes preguntes:

   Quina base del triangle agafaries?
   Amb quina altura et quedaries?

Si l'alumne expressa el resultat correcte i ha fet almenys el 30% de les accions corresponents a aquesta estratègia sortiran els missatges de verificació, si no ha fet aquest percentatge d'accions reconegudes sortirà el missatge:

1. El resultat que has trobat és correcte, però la justificació que has fet no és suficient. Intenta buscar relacions entre els elements de la figura que justifiquin la teva resposta.

5.3.5. Estratègia 4 (particularització sobre figures)

Si l'alumne dibuixa un quadrat en lloc d'un paral·lelogram, el sistema ha de saber que segueix l'estratègia que hem anomenat "particularització sobre figures", dins de l'espai bàsic del problema del paral·lelogram (pàg. 61).

A partir d'una figura que l'alumne hagi fet substituint el paral·lelogram de l'enunciat per un quadrat, la relació d'accions que desenvolupen aquesta estratègia per arribar a la solució serien les següents (figura 5.3.5):

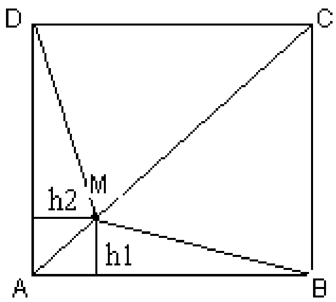


Figura 5.3.5

- Dibuixa de les línies perpendiculars a AB i a AD per M (dues accions gràfiques).
- Identifica els punts de tall d'aquestes perpendiculars amb el costat AB i AD, respectivament, i identifica els segments h1 i h2 (figura 5.3.3, quatre accions gràfiques).
- Línia h1 = línia h2 (acció deductiva).
- Àrea ABM = Àrea AMD (acció deductiva, resultat particular, que no és el final).

Després de fer aquesta aproximació, l'alumne haurà de seguir alguna de la resta d'estratègies per a obtenir una solució del problema proposat, és a dir, amb un paral·lelogram.

Per cada tres accions no reconegudes sortirà un dels següents missatges seguint l'ordre que mostrem a continuació:

1. Intenta comparar les àrees que et demana l'enunciat sobre aquesta figura.
2. Com són en aquest cas els triangles ABM i AMD.

Si l'alumne ha resolt el problema per al cas d'un rectangle o d'un quadrat, haurà de sortir el següent missatge:

3. Si ja has comparat les àrees en el cas particular que el paral·lelogram sigui un quadrat, pensa de quina forma aquest procediment et serviria per a resoldre el problema inicial.

Si s'esgoten aquests missatges, per cada tres accions noves no reconegudes (gràfiques o deductives), sortiran de forma aleatòria dos nous missatges, que no hagin sortit prèviament, d'entre els esmentats a l'estratègia 0.

Si encara no hi ha cap acció reconeguda, sortiran de forma aleatòria i successiva els missatges següents de canvi d'estratègia, un per cada tres accions no reconegudes.

1. Podries pensar alguna forma de descompondre el paral·lelogram en triangles, per exemple, traçant paral·leles que passin pel punt M.
2. Pots situar el punt M en una altra posició diferent del de la diagonal, per exemple en la posició de C. Pensa què faries després per a resoldre el problema que tens plantejat.
3. Tracta de trobar relacions entre els costats dels triangles les àrees dels quals vols comparar.
4. Si et sembla pots traçar les altures dels triangles AMD i ABM i reflexiona sobre aquestes preguntes:
   Quina base del triangle agafaries?
   Amb quina altura et quedaries?

Si l'alumne expressa el resultat correcte i ha fet almenys el 30% de les accions corresponents a aquesta estratègia sortiran els missatges de verificació, si no ha fet aquest percentatge d'accions reconegudes sortirà el missatge:

1. El resultat que has trobat és correcte, però la justificació que has fet no és suficient. Intenta buscar relacions entre els elements de la figura que justifiquin la teva resposta.

5.3.6. Estratègia 4' (casos límit i singulars)

Si dibuixa el punt M en el punt mig de la diagonal AC, en C o en A, el sistema ha de saber que l'alumne segueix l'estratègia que hem anomenat "particularització" -casos límit i singulars-, dins de l'espai bàsic del problema del paral·lelogram (pàg. 61).

A partir de la figura en la qual el punt M sigui a C o a A, l'alumne pot seguir qualsevol dels grups següents d'accions per apropar-se a una solució:

a)
- Dibuixa el punt M en A (acció gràfica)
- Àrea ABM = Àrea AMD = 0 (dues accions deductives que, malgrat que ho sembli, no donen el resultat final).

b)
- Dibuixa el punt M sobre C (construcció).
- Àrea ABC = Àrea ACD (aquesta acció deductiva es basa en la propietat de la diagonal d'un paral·lelogram).

c)
- Dibuixa la diagonal BD (acció gràfica).
- Identifica el punt de tall de les diagonals i l'anomena M (acció gràfica).
- Àrea ABM = Àrea AMD (deducció basada en la igualtat de les àrees dels triangles que es formen sobre les diagonals d'un paral·lelogram i que no és el resultat final. Aquí també podrien venir d'altres deduccions que serien correctes: àrea ABM = àrea BMC = àrea MCD = àrea AMD).

Després de fer alguna d'aquestes aproximacions, l'alumne haurà de seguir alguna de la resta d'estratègies per a obtenir una solució del problema proposat.

Per cada tres accions no reconegudes sortirà un dels següents missatges seguint l’ordre que mostrem a continuació:

1. Recorda les propietats de les diagonals d’un paral·lelogram.
2. Imagina, en aquest cas, la manera de calcular les àrees dels triangles ABM i AMD. Si ja les tens calculades pensa de quina forma aquest procediment et serviria per a resoldre el problema inicial.

Si s’esgoten aquests missatges, per cada tres accions noves no reconegudes (gràfiques o deductives), sortiran de forma aleatòria dos nous missatges (que no hagin sortit prèviament) d’entre els esmentats a l’estratègia 0.

Si encara no hi ha cap acció reconeguda, sortiran de forma aleatòria i successiva els missatges següents de canvi d’estratègia, un per cada tres accions no reconegudes.

1. Podries pensar alguna forma de descompondre el paral·lelogram en triangles, per exemple, traçant paral·leles que passin pel punt M.
2. Reflexiona sobre la possibilitat de resoldre el problema considerant que et donen en lloc d’un paral·lelogram un quadrat o un rectangle. Pots aplicar els mateixos procediments per a resoldre el problema del paral·lelogram?
3. Tracta de trobar relacions entre els costats dels triangles les àrees dels quals vols comparar.
4. Si et sembla pots traçar les altures dels triangles AMD i ABM i reflexiona sobre aquestes preguntes:
   Quina base del triangle agafaries?
   Amb quina altura et quedaries?

Si l’alumne expressa el resultat correcte i ha fet almenys el 30% de les accions corresponents a aquesta estratègia sortiran els missatges de verificació, si no ha fet aquest percentatge d’accions reconegudes sortirà el missatge:

1. El resultat que has trobat és correcte, però la justificació que has fet no és suficient. Intenta buscar relacions entre els elements de la figura que justifiquin la teva resposta.

5.3.7. Verificació

El sistema ha d’identificar si el resultat que proposa l’alumne és correcte.

Així doncs, si la resposta final de l’alumne és incorrecta aniran sortint els següents missatges aleatòriament fins que la resposta sigui correcta (acció deductiva):

1. Mira de comprovar el resultat que has obtingut.
2. Pensa si aquest resultat és coherent amb les condicions inicials del problema.
3. Fes un repàs de tots els continguts matemàtics que has fet servir durant la resolució del problema.
4. Tracta d'identificar les teves errades.
5. Pensa que durant la resolució has pogut fer alguna errada de càlcul o en el procediment que has seguit
6. Et suggereixo que segueixis en ordre invers els passos de la solució que has trobat per a identificar la teva errada.
7. Repassa el procés que has seguit per a obtenir la solució.

Si la resposta final de l’alumne és correcta sortirà de forma aleatòria un dels missatges següents.

1. Descriu com et van sorgir les idees correctes que t'han apropat a la solució.

2. Recorda i anota quins van ser els punts que van canviar el rumb de la resolució i sobre les causes que els van originar.
3. Contesta aquestes preguntes:
   Al llarg de la resolució, has proposat vàries estratègies?
   Les has examinat totes?
   Et sembla que has desenvolupat la o les més adients?
4. Tracta de descriure què et va suggerir l'estratègia que has seguit per a resoldre el problema.
5. Pensa si les idees que t'han portat a obtenir la solució t'han sorgit per associació amb un problema semblant. Explica quin problema.
6. Identifica els punts que t'han semblat claus en la teva resolució:
   Traçat de rectes paral·leles.
   Consideració de casos particulars (quadrats, rectangles, punt M en diferents posicions etc.)
   Aplicació de fórmules
   Identificació d'un problema equivalent.
   Altres...
7. Intenta proposar problemes semblants al que has resolt.
8. Repassa tot el que has fet per a obtenir la solució i escriu les deduccions més importants en l'àrea de deduccions.
9. Repassa la construcció de la figura i tracta de completar-la.
10. Fes més detallades les deduccions per arribar al resultat final.
11. Fes un repàs de tots els continguts matemàtics que has fet servir durant la resolució del problema per completar les deduccions.

Al final de tot el procés sortirà un missatge que doni per acabada la resolució.

1. Has resolt satisfactòriament aquest problema; vols intentar un altre?

5.4. Relació de missatges corresponents a la resolució del problema de la malla quadrada

Podem trobar l'enunciat del problema de la malla quadrada a l'apartat 4.4 (pàg. 62).

A) Familiarització

Nivell 0

MA01: Tracta de comprendre bé les condicions del problema.
MA02: Identifica l'objectiu del problema.
MA03: Intenta comprendre totes les paraules de l'enunciat.
MA04: Torna a llegir a poc a poc l'enunciat del problema.
MA05: Expressa l'enunciat d'una altra manera.
MA06: Recorda tots els conceptes matemàtics que hi ha a l'enunciat o a la figura i intenta definir-los amb les teves pròpies paraules. Si no els tens clars mira el glossari.
MA07: Els conceptes associats a l'enunciat o a la figura et suggereixen alguna informació nova.
MA08: Tracta d'organitzar la informació que tens.
MA09: Esborra la representació gràfica que has carregat i intenta fer-ne una de nova sense fixar-te en l'anterior.
MA010:Pren nota de tot el vas fent durant la resolució que has començat.
MA011:Pots carregar una construcció de la figura de l'enunciat prement el botó 'carregar figura'.

Nivell 1

MA11: Recorda el que és un triangle.
MA12: Intenta explicar el que entens per àrea d'un triangle.
MA13: Expressa d'una altra manera el significat de la frase: "calcula en unitats quadrades..."
MA14: Tracta de recordar el que és una malla quadrada.
MA15: Pensa si és veritat o no el fet que la distància entre dos punts de la malla ha de ser coneguda.
MA16: Mira quina posició respecte de la malla tenen els vèrtexs del triangle.
MA17: Recorda quantes altures té un triangle.
MA18: Dibuixa un triangle qualsevol i traça les seves altures.
MA19: Dibuixa les altures d'un triangle rectangle.
MA110:Recorda la fórmula de l'àrea d'un triangle.

Nivell 2

MA21: Reflexiona sobre si la zona ratllada de la figura ha de tenir o no un centímetre quadrat d'àrea.
MA22: Pensa en quines unitats s'expressarà el resultat d'aquest problema.
MA23: Un triangle té tres altures.
MA24: Cada altura d'un triangle és perpendicular a cadascun dels seus costats i a més ha de passar pel vèrtex oposat.
MA25: Pensa sobre la relació entre les altures d'un triangle rectangle i els seus catets.
MA26: L'àrea d'un triangle és el resultat de multiplicar la base per l'altura i fer la divisió per dos.
MA27: Pren nota de tot el que vas fent durant la resolució que has començat.

A) Planificació/execució.

Nivell 0

MB01: Pensa sobre el fet que el triangle estigui sobre una malla quadrada, això et suggereix alguna cosa?
MB02: Pensa en un problema equivalent.
MB03: Mira d'imaginar-te un problema més senzill o un cas particular d'aquest problema.
MB04: Pensa en alguna conjectura. Tracta de justificar-la.
MB05: Intenta construir rectes i altres figures sobre la figura de l'enunciat.
MB06: Busca problemes o situacions anàlogues a les d'aquest problema.
MB07: Si es pot, utilitza simetries.
MB08: Potser necessitis alguna mena de representació simbòlica.
MB09: Experimenta.
MB010:Tracta de dividir el problema en dos (crear dos problemes diferents).

Nivell 1

MB11: Podries pensar alguna forma de calcular la longitud de cada costat del triangle. Per això mira d'aplicar algun teorema.
MB12: Imagina que ja coneixes la longitud dels tres costats del triangle, mira de recordar alguna fórmula que els faci servir per a calcular l'àrea.
MB13: Indica diferents formes de descompondre el triangle. Imagina't com calcularies en cada cas les seves àrees.
MB14: Identifica els triangles nous que s'han format en descompondre el triangle.
MB15: Imagina com compararies les àrees dels nous triangles que s'han format en descompondre el triangle.
MB16: Tracta d'inscriure el triangle en una altra figura. Això et suggereix alguna cosa?

MB17: Pensa sobre la possibilitat de resoldre primer el problema que resulta de substituir el triangle que et proposem per un altre en el qual el triangle donat sigui rectangle.
MB18: Pots intentar referir els vèrtexs del triangle a uns eixos de coordenades triats de manera adient.
MB19: Pots identificar les coordenades dels vèrtexs respecte del sistema de coordenades que has traçat.

Nivell 2

MB21: Aprofita la malla per a inscriure el triangle que et donen en un rectangle de 8 unitats quadrades d'àrea.
MB22: Si inscrius el triangle en un rectangle, pensa com calcularies les àrees de cadascun dels triangles que es formen
MB23: Aplica el teorema de Pitàgoras per a calcular la longitud de cada costat del triangle, sabent que cadascun d'ells és la hipotenusa d'un triangle rectangle.
MB24: Possiblement podries dividir el triangle mitjançant una línia vertical que passi pel vèrtex inferior, t'ajudaria això?
MB25: Pensa si t'ajudaria el fet de traslladar el vèrtex superior dret una unitat cap a dalt i calcular l'àrea del triangle que resulta.

C) Verificació

Nivell 0

MC01: Mira de comprovar el resultat que has obtingut.
MC02: Pensa si aquest resultat és coherent amb les condicions inicials del problema.
MC03: Tens confiança en el resultat que has obtingut?, i en la solució obtinguda?
MC04: Reflexiona com van sorgir les idees correctes que et van apropar a la solució.
MC05: Recorda i escriu quins van ser els punts que van canviar el rumb de la resolució i sobre les causes que els van originar.
MC06: Reflexiona sobre aquestes preguntes:
Al llarg de la resolució, has proposat vàries estratègies?
Les has examinat totes?
Et sembla que has desenvolupat la o les més adients?
MC07: Fes un repàs de tots els continguts matemàtics que has fet servir durant la resolució del problema per a completar les deduccions.
MC08: Tracta d'identificar les teves possibles errades.

Nivell 1

MC11: Repassa el procés que has seguit per a obtenir la solució.
MC12: Comprova numèricament o geomètrica el resultat que has obtingut.
MC13: Pensa que durant la resolució has pogut fer alguna errada de càlcul o en el procediment que has seguit.
MC14: Reflexiona sobre les dificultats que has tingut per avançar quan desconeixies algun concepte matemàtic o quan persisties en alguna estratègia no adient.
MC15: Pensa sobre quins han estat els motius dels teus canvis de rumb.
MC16: Tracta de recordar què et va suggerir l'estratègia que has seguit per a resoldre el problema.

Nivell 2

MC21: Una forma aproximada de comprovar el resultat és descompondre el triangle en figures més petites i tractar de completar quadrats. Intenta-ho.
MC22: Et suggereixo que segueixis en ordre invers els passos de la solució que has trobat per a comprovar que no t'has equivocat.

MC23: Pensa si les idees que t'han portat a obtenir la solució t'han sorgit per associació amb les d'altres problemes similars o per les característiques de la malla quadrada...
MC24: Els punts que t'han semblat claus en la teva resolució podrien ser:
Saber la fórmula del àrea del triangle.
Saber inscriure unes figures en d'altres.
Descompondre triangles en altres l'àrea dels quals sigui més senzilla de calcular.
Identificar uns eixos de coordenades adients.
Saber les característiques de las malles quadrades...
MC25: Fes més detallades les deduccions per arribar al resultat final.
MC26: Intenta proposar problemes semblants al que has resolt.

5.5. Implementació del sistema de missatges al sistema informàtic d'acord amb totes les possibles accions de la resolució del problema de la malla quadrada

5.5.1. Estratègia 0

En el problema de la malla quadrada, debut a la dificultat que comporta fer la construcció de la figura associada a l'enunciat, quan l'alumne obri la finestra de l'enunciat, directament se li carregarà la seva figura en la finestra gràfica. En aquesta figura tots els punts de la malla tindrien un nom A, B, C... i els costats del triangle, igualment, haurien d'estar definits i anomenats, per exemple: MN, PQ...

Des d'aquest moment, per cada tres accions no reconegudes aniran sortint, de forma aleatòria, missatges d'entre els següents:

1. Tracta de comprendre bé les condicions del problema.
2. Identifica l'objectiu del problema.
3. Intenta comprendre totes les paraules de l'enunciat.
4. Expressa l'enunciat d'una altra manera.
5. Recorda tots els conceptes matemàtics que hi ha a l'enunciat o a la figura i intenta definir-los amb les teves pròpies paraules. Si no els tens clars mira el glossari.
6. Els conceptes associats a l'enunciat o a la figura et suggereixen alguna informació nova.
7. Tracta d'organitzar la informació que tens.
8. Torna a llegir a poc a poc l'enunciat del problema.
9. Mira d'imaginar-te un problema més senzill o un cas particular d'aquest problema.
10. Pensa en alguna conjectura. Per a tractar de justificar-la has de buscar relacions entre els elements de la figura. Analitza aquestes relacions.
11. Intenta dibuixar rectes o altres figures sobre la figura de l'enunciat.
12. Recorda el nombre d'altures que té un triangle i la forma de dibuixar-les.
13. Pensa en un problema equivalent.
14. Expressa d'una altra manera el significat de la frase: 'calcula <u>en unitats quadrades</u>...'.
15. Mira quina posició respecte de la malla tenen els vèrtexs del triangle.
16. Recorda la fórmula de l'àrea d'un triangl.
17. Pren nota de tot el que vas fent durant la resolució que has començat.
18. Pensa sobre el fet que el triangle estigui sobre una malla quadrada, això et suggereix alguna cosa?.
19. Busca problemes o situacions anàlogues a les d'aquest problema.

20. Tracta de dividir el problema en dos (crear dos problemes diferents).

L'alumne fa una nova acció reconeguda. Aquesta acció hauria de ser del tipus gràfic o del tipus deductiu. El programa reconeixerà l'acció i identificarà l'estratègia amb la qual està associada.

5.5.2. Estratègia 1 (descomposició del triangle)

Si l'alumne dibuixa una línia vertical que divideix el triangle en dos, el sistema sabrà que intenta seguir l'estratègia que hem anomenat "descomposició del triangle", dins de l'espai bàsic del problema de la malla quadrada (pàg. 65).
A partir de la figura de l'enunciat, la relació d'accions que desenvolupen aquesta estratègia per arribar a la solució serien les següents, no necessàriament en aquest ordre (figura 5.5.1):

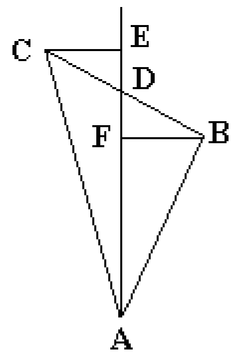


Figura 5.5.1

- Dibuixa la recta AE,(acció gràfica) (figura 5.5.1).
- Identifica el punt D (intersecció de CB amb AE) (acció gràfica).
- Dibuixa CE (perpendicular per C a AE) (acció gràfica).
- Identifica el punt E (intersecció de l'esmentada perpendicular amb AE) i el segment CE (acció gràfica).
- Dibuixa BF (perpendicular per B a AE) (acció gràfica).
- Identifica el punt F (intersecció de l'esmentada perpendicular amb AE) i el segment BF (acció gràfica).
- Expressa les igualtats: BF=CE=1, AD=3.5; AF=3, DE=0.5 (sis accions deductives)
- Expressa les igualtats: àrea FBD = àrea DEC=0.25; àrea ABF=1.5; àrea ABD= 1.75; àrea AEC=2; àrea ADC= 1.75 (acció deductiva).
- Àrea ABC =àrea ABD + àrea ADC =àrea ABF +àrea AEC (acció deductiva).
- Àrea ABC = 3.5 (acció deductiva, resultat final).

Si l'alumne arriba al resultat final, el sistema donarà per correcte aquest resultat si ha expressat o dibuixat almenys el 30% del total de les accions que identifiquen aquesta estratègia.

Un cop iniciada l'estratègia amb una acció reconeguda en la seva direcció, per cada tres accions no reconegudes sortiran successivament els següents missatges seguint l'ordre que mostrem a continuació:

1. Identifica els triangles nous que s'han format.
2. Imagina com calcularies les àrees dels nous triangles que s'han format.

Si l’alumne continua fent accions no reconegudes (gràfiques o deductives), sortiran de forma aleatòria dos nous missatges, que no hagin sortit prèviament, d’entre els esmentats a l’estratègia 0.

Si encara no hi ha cap acció reconeguda, sortiran de forma aleatòria i successiva els missatges següents:

1. Podries pensar alguna forma de calcular la longitud de cada costat del triangle. Per això mira d’aplicar algun teorema. Després mira de recordar alguna fórmula que els faci servir per a calcular l’àrea.
2. Tracta d’inscriure el triangle en una altra figura. Això et suggereix alguna cosa?.
3. Pensa sobre la possibilitat de resoldre primer el problema que resulta de substituir el problema que et proposem per un altre en el qual el triangle donat sigui rectangle.
4. Pots intentar referir els vèrtexs del triangle a uns eixos de coordenades triats de manera adient.

En el moment que hi hagi una nova acció reconeguda el sistema de missatges seguirà la línia de l’estratègia identificada en aquesta acció.

Si l’alumne expressa el resultat correcte i ha fet almenys el 30% de les accions corresponents a aquesta estratègia sortiran els missatges de verificació, si no ha arribat a aquest percentatge d’accions reconegudes sortirà el missatge:

1. El resultat que has trobat és correcte, però la justificació que has fet no és suficient. Intenta buscar relacions entre els elements de la figura que justifiquin la teva resposta.

5.5.3. Estratègia 2 (superposició de figures)

Si l’alumne dibuixa un rectangle circumscrit al triangle original, el sistema sabrà que segueix l’estratègia que hem “ superposició de figures”, dins de l’espai bàsic del problema de la malla quadrada (pàg. 65).

A partir de la figura de l’enunciat, la relació d’accions que desenvolupen aquesta estratègia per arribar a la solució serien les següents, no necessàriament en aquest ordre (figura 5.5.2):

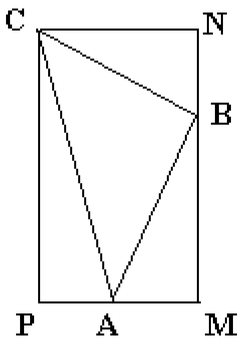


Figura 5.5.2

- Dibuixa el segment CN (acció gràfica).
- Dibuixa el segment MN i identifica els segments MB i BN (accions gràfiques).
- Dibuixa el segment MP i identifica els segments MA i AP (accions gràfiques).
- Dibuixa el segment CP (acció gràfica).

- Expressa les igualtats: àrea BNC=1; àrea AMB=1.5; àrea APC=2; àrea MNCP=8 (acció deductiva).
- Àrea ABC= àrea MNCP – àrea MBA – àrea BNC – àrea CPA (acció deductiva).
- Àrea ABC = 3.5 (acció deductiva, resultat final).

Si l'alumne arriba al resultat final, el sistema li donarà per correcte aquest resultat si ha expressat o dibuixat almenys el 30% del total de les accions que identifiquen aquesta estratègia.

Un cop iniciada l'estratègia amb una acció reconeguda en la seva direcció, per cada tres accions no reconegudes sortiran successivament els següents missatges seguint l'ordre que mostrem a continuació:

1. Identifica els triangles nous que s'han format.
2. Imagina com calcularies les àrees dels nous triangles i del triangle original.

Si continua fent accions no reconegudes, sortiran de forma aleatòria dos nous missatges, que no hagin sortit prèviament, d'entre els esmentats a l'estratègia 0.

Si l'alumne encara no fa cap acció reconeguda, sortiran de forma aleatòria i successiva els missatges que mostrem a continuació.

1. Podries pensar alguna forma de calcular la longitud de cada costat del triangle. Per això mira d'aplicar algun teorema. Després aplica alguna fórmula que faci servir els costats per a calcular l'àrea.
2. Indica diferents formes de descompondre el triangle. Imagina't com calcularies en cada cas les seves àrees.
3. Pensa sobre la possibilitat de resoldre primer el problema que resulta de substituir el problema que et proposem per un altre en el qual el triangle donat sigui rectangle.
4. Pots intentar referir els vèrtexs del triangle a uns eixos de coordenades triats de manera adient.

En el moment que hi hagi una nova acció reconeguda el sistema de missatges seguirà la línia de l'estratègia identificada en aquesta acció.

Si l'alumne expressa el resultat correcte i ha fet almenys el 30% de les accions corresponents a aquesta estratègia sortiran els missatges de verificació, si no ha arribat a aquest percentatge d'accions reconegudes sortirà el missatge:

1. El resultat que has trobat és correcte, però la justificació que has fet no és suficient. Intenta buscar relacions entre els elements de la figura que justifiquin la teva resposta.

5.5.4. Estratègia 3 (identificació d'angles i costats)

Si l'alumne dibuixa un triangle rectangle en el qual un dels costat del triangle original és la hipotenusa o si introdueix la deducció correcta de la mesura d'un costat, el sistema sabrà que segueix l'estratègia que hem anomenat "identificació d'angles i costats", dins de l'espai bàsic del problema de la malla quadrada (pàg. 65).

A partir de la figura de l'enunciat, la relació d'accions que desenvolupen aquesta estratègia per arribar a la solució serien les següents, no necessàriament en aquest ordre (veure figura 5.5.3):

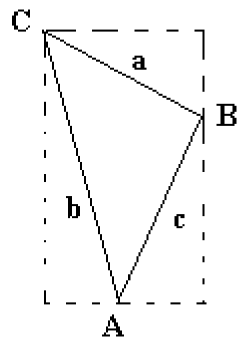


Figura 5.5.3

- Sense fer cap acció gràfica, l'alumne introdueix, com a deducció, alguna de les relacions: $a^2 = 2^2 + 1^2 = 5$ (Teorema de Pitàgoras); $c^2 = 3^2 + 1^2 = 10$ (Teorema de Pitàgoras); $b^2 = 4^2 + 1^2 = 17$ (Teorema de Pitàgoras) (accions deductives).
- Aplicació de la fórmula d'Heró (àrea ABC)^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) (Acció deductiva).
- Àrea ABC = 3.5 unitats quadrades (acció deductiva, resultat final).

Si l'alumne arriba al resultat final, perquè el sistema doni per correcte aquest resultat ha d'haver expressat o dibuixat almenys el 30% del total de les accions que identifiquen aquesta estratègia.

Un cop iniciada l'estratègia amb una acció reconeguda en la seva direcció, per cada tres accions no reconegudes, sortiran successivament els missatges:

1. Tracta de calcular quant mesuren tots els costats del triangle.

Si continua fent accions reconegudes dins d'aquesta línia (càlcul dels tres costats, etc.) no hi ha missatge nou.

Si l'alumne fa tres accions no reconegudes, però ja ha calculat la longitud dels tres costats sortirà el missatge:

2. Imagina ara com calcularies l'àrea del triangle si coneixes els seus costats.

Si continua fent accions no reconegudes, sortiran de forma aleatòria dos nous missatges (que no hagin sortit prèviament) d'entre els esmentats a l'estratègia 0.

Si encara no hi ha cap acció reconeguda, sortiran de forma aleatòria i successiva els missatges de canvi d'estratègia següents:

1. Indica diferents formes de descompondre el triangle. Imagina't com calcularies en cada cas les seves àrees.
2. Tracta d'inscriure el triangle en una altra figura. Això et suggereix alguna cosa?.
3. Pensa sobre la possibilitat de resoldre primer el problema que resulta de substituir el problema que et proposem per un altre en el qual el triangle donat sigui rectangle.
4. Pots intentar referir els vèrtexs del triangle a uns eixos de coordenades triats de manera adient.

En el moment que hi hagi una nova acció reconeguda el sistema de missatges seguirà la línia de l'estratègia identificada en aquesta acció.

Si l'alumne expressa el resultat correcte i ha fet almenys el 30% de les accions corresponents a aquesta estratègia sortiran els missatges de verificació. Si no ha arribat a aquest percentatge d'accions reconegudes sortirà el missatge:

1. El resultat que has trobat és correcte, però la justificació que has fet no és suficient. Intenta buscar relacions entre els elements de la figura que justifiquin la teva resposta.

5.5.5. Estratègia 4 (tria d'eixos de coordenades)

Si l'alumne dibuixa dues línies perpendiculars que simulin uns eixos de coordenades o representa una de les altures del triangle de l'enunciat, el sistema sabrà que segueix l'estratègia que hem anomenat "tria d'eixos de coordenades", dins de l'espai bàsic del problema de la malla quadrada (pàg. 65).

Malgrat que és prou improbable que un alumne implementi aquesta estratègia, a partir de la figura de l'enunciat, la relació d'accions que la desenvolupen serien les següents, no necessàriament en aquest ordre (figura 5.5.4).

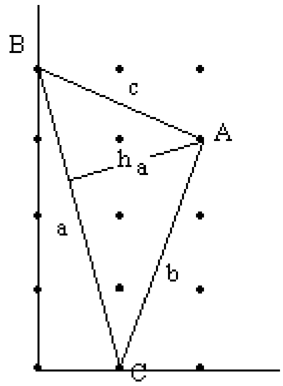


Figura 5.5.4

- Dibuixa una línia recta vertical, r, que passi per B, C o A (acció gràfica).
- Dibuixa una línia recta horitzontal, s, que passi per qualssevol tres punts horitzontals de la malla (acció gràfica).
- Intersecció de r i s, de nom O (acció gràfica).
- Dibuixa recta perpendicular al costat BC per A (o recta perpendicular al costat AC per B, o recta perpendicular a AB per C), de nom h (o i, o j, respectivament) (acció gràfica).
- Intersecció d'h amb el costat BC, de nom P (d'i amb AC, de nom Q, i de j amb AB, de nom R) (acció gràfica).
- Traçat del segment AP, de nom h_a (o del segment BQ, de nom h_b, o del segment CR, de nom h_c) (acció gràfica).
- Longitud de BC = 4.12; longitud AC = 3.16; longitud AB = 2.24; longitud h_a = 1.769; longitud h_c = 3.13; longitud h_b = 2.21 (accions deductives).
- Àrea ABC = 3.5 (acció deductiva, resultat final).

Si un cop iniciada l'estratègia amb una acció reconeguda en la seva direcció, per cada tres accions no reconegudes sortiran successivament els missatges:

1. Pots identificar les coordenades dels vèrtexs respecte del sistema de coordenades que has traçat.
2. Imagina ara com calcularies la base i l'altura del triangle.

Si l'alumne continua fent accions no reconegudes, sortiran de forma aleatòria dos nous missatges, que no hagin sortit prèviament, d'entre els esmentats a l'estratègia 0.

Si l'alumne encara no ha fet cap acció reconeguda, sortiran de forma aleatòria i successiva els missatges següents:

1. Podries pensar alguna forma de calcular la longitud de cada costat del triangle. Per això mira d'aplicar algun teorema. Després mira de recordar alguna fórmula que els fes servir per a calcular l'àrea.
2. Indica diferents formes de descompondre el triangle. Imagina't com calcularies en cada cas les seves àrees.
3. Tracta d'inscriure el triangle en una altra figura. Això et suggereix alguna cosa?.
4. Pensa sobre la possibilitat de resoldre primer el problema que resulta de substituir el problema que et proposem per un altre en el qual el triangle donat sigui rectangle.

En el moment que hi hagi una nova acció reconeguda el sistema de missatges seguirà la línia de l'estratègia identificada en aquesta acció.

Si l'alumne expressa el resultat correcte i ha fet almenys el 30% de les accions corresponents a aquesta estratègia sortiran els missatges de verificació. Si no ha arribat a aquest percentatge d'accions reconegudes sortirà el missatge:

1. El resultat que has trobat és correcte, però la justificació que has fet no és suficient. Intenta buscar relacions entre els elements de la figura que justifiquin la teva resposta.

5.5.6. Verificació

El sistema ha d'identificar si el resultat que proposa l'alumne és correcte.

Així doncs, si la resposta final de l'alumne és incorrecta aniran sortint els següents missatges aleatòriament fins que la resposta sigui correcta:

1. Mira de comprovar el resultat que has obtingut numèricament o geomètrica.
2. Pensa si aquest resultat és coherent amb les condicions inicials del problema.
3. Repassa el procés que has seguit per a obtenir la solució.
4. Fes un repàs de tots els continguts matemàtics que has fet servir durant la resolució del problema.
5. Identifica les teves possibles errades.
6. Una forma aproximada de comprovar el resultat és descompondre el triangle en figures més petites i tractar de completar quadrats. Intenta-ho.
7. Et suggereixo que segueixis en ordre invers els passos de la solució que has trobat per a comprovar per trobar la teva errada.

Si la resposta final de l'alumne és correcta sortirà de forma aleatòria un dels següents missatges:

1. Escriu sobre com es van sorgir les idees correctes que et van apropar a la solució.
2. Recorda i escriu quins van ser els punts que van canviar el rumb de la resolució i sobre les causes que els van originar.
3. Contesta aquestes preguntes:
   Al llarg de la resolució, has proposat vàries estratègies?
   Les has examinat totes?
   Et sembla que has desenvolupat la o les més adients?

4. Tracta de descriure què et va suggerir l’estratègia que has seguit per a resoldre el problema.
5. Pensa (i escriu) si les idees que t’han portat a obtenir la solució t’han sorgit per associació amb les d’altres problemes similars o per les característiques de la malla quadrada....
6. Els punts que t’han semblat claus en la teva resolució podrien ser:
   Saber la fórmula de l’àrea del triangle.
   Saber inscriure unes figures en d’altres.
   Descompondre triangles en altres l’àrea dels quals sigui més senzilla de calcular.
   Identificar uns eixos de coordenades adients.
   Saber les característiques de las malles quadrades...
7. Intenta proposar problemes semblants al que has resolt.
8. Repassa tot el que has fet per a obtenir la solució i escriu les deduccions més importants en l'àrea de deduccions.
9. Fes més detallades les deduccions per arribar al resultat final.
10. Fes un repàs de tots els continguts matemàtics que has fet servir durant la resolució del problema per completar les deduccions.

Al final de tot el procés sortirà un missatge que doni per acabada la resolució.

1. Has resolt satisfactòriament aquest problema; vols intentar un altre?.

5.6. Relació completa de missatges corresponents a la resolució del problema del triangle

Podem trobar l’enunciat del problema del triangle a l’apartat 4.5 (pàg. 66).

A) Familiarització

Nivell 0

PA01: Tracta de comprendre bé les condicions del problema.
PA02: Torna a llegir a poc a poc l’enunciat del problema.
PA03: Identifica l’objectiu del problema.
PA04: Expressa l’enunciat del problema amb les teves paraules.
PA05: Intenta comprendre totes les paraules de l’enunciat.
PA06: Recorda tots els conceptes matemàtics que hi ha a l’enunciat o a la figura i intenta definir-los amb les teves pròpies paraules. Si no els tens clars mira el glossari.
PA07: Els conceptes associats a l’enunciat o a la figura et suggereixen alguna informació nova.
PA08: Tracta d’organitzar la informació que tens.
PA09: Esborra la representació gràfica que has carregat i intenta fer una de nova sense fixar-te en l’anterior.
PA010: Pots carregar una construcció de la figura de l'enunciat prement el botó ‘carregar figura’.
PA011: Pren nota de tot el vas fent durant la resolució que has començat.

Nivell 1

PA11: Recorda què és un paral·lelogram.
PA12: Intenta explicar què és la diagonal d’un paral·lelogram.
PA13: Mira de recordar el nombre d’altures que té un triangle i la forma de dibuixar-les (Dibuixa un triangle qualsevol i traça les seves altures).

PA14: Reflexiona sobre el següent aspecte: per a resoldre aquest problema, el raonament que has de fer s'ha de basar en alguna propietat de la semblança de triangles.
PA15: Pensa si saber la fórmula de l'àrea d'un triangle et pot ajudar o no a resoldre aquest problema.
PA16: Reflexiona sobre la possibilitat que la relació 2 a 1 sigui una altra.
PA17: Pensa sobre el fet que el punt E pugui estar en un altre lloc sobre el costat BC, això et suggereix alguna cosa?
PA18: Segur que recordes com són els segments paral·lels compresos entre paral·leles.
PA19: Saps què són triangles equivalents?, i semblants? Si no te'n recordes consulta en algun llibre de matemàtiques, en alguna enciclopèdia o en el glossari.
PA110: Què diu el Teorema de Tales? Si no te'n recordes, consulta en algun llibre de matemàtiques, en alguna enciclopèdia o en el glossari.
PA111: Saps la relació que hi ha entre la raó de les àrees de dues figures semblants i la raó de semblança? Si no te'n recordes, consulta en algun llibre de matemàtiques, en alguna enciclopèdia o en el glossari.
PA112: Tracta d'identificar relacions entre els segments de la figura.
PA113: Imagina com compararies les àrees dels triangles de la figura.
PA114: Identifica tots els triangles que es formen a la figura de l'enunciat.
PA115: Imagina com compararies les àrees dels diferents triangles de la figura de l'enunciat.

Nivell 2

PA21: Un paral·lelogram té els costats paral·lels dos a dos.
PA22: La diagonal d'un paral·lelogram el divideix en dos triangles de la mateixa àrea (equivalents).
PA23: Un triangle té tres altures.
PA24: Cada altura d'un triangle és perpendicular a cadascun dels seus costats i, a més, ha de passar pel vèrtex oposat.
PA25: La fórmula de l'àrea d'un triangle és la meitat de la seva base per l'altura.
PA26: Dues figures són equivalents si tenen la mateixa àrea.
PA27: El Teorema de Tales diu: Si Dues rectes secants tallen un feix de rectes paral·leles, els segments que es formen són proporcionals.
PA28: La raó entre les àrees de dues figures semblants és igual al quadrat de la raó de semblança.
PA29: Traça paral·leles als costats.
PA210: Dos triangles són semblants si tenen els seus costats homòlegs proporcionals.

B) Planificació/execució

Nivell 0

PB01: Pensa sobre el fet que E pugui estar en qualsevol punt del costat BC, això et suggereix alguna cosa?
PB02: Pensa en un problema equivalent.
PB03: Mira d'imaginar-te un problema més senzill o un cas particular d'aquest problema.
PB04: Pensa en alguna conjectura. Tracta de justificar-la.
PB05: Intenta dibuixar rectes o segments sobre la figura de l'enunciat.
PB06: Busca problemes o situacions anàlogues a les d'aquest problema.
PB07: Potser necessitis alguna mena de representació simbòlica dels elements de la figura.

PB08: Experimenta.
PB09: Tracta de dividir el problema en dos (crear dos problemes diferents)
PB010: Si ja tens un pla o has establert una conjectura busca relacions entre els elements de la figura. Analitza aquestes relacions.
PB011: Mira la figura i tracta de conjecturar una relació entre les àrees dels triangles que es comparen. Pensa que després has de justificar aquesta conjectura.

Nivell 1

PB11: Tracta d'identificar les relacions entre els segments de la figura de l'enunciat.
PB12: Tracta de trobar relacions entre els costats dels triangles les àrees dels quals vols comparar.
PB13: Pensa en traçar paral·leles.
PB14: Pots traçar línies paral·leles als costats i formar nous triangles.
PB15: Identifica tots els triangles de la figura i intenta comparar les seves àrees.

Nivell 2

PB21: Pots dividir els costats del triangle en tres segments iguals i traçar rectes paral·leles als costats.
PB22: Reflexiona sobre la possibilitat de resoldre el problema considerant que et donen en lloc del triangle ABC un que sigui rectangle o un triangle equilàter. Pots aplicar els mateixos procediments per a resoldre el problema inicial?
PB23: Pots agafar com a bases dels triangles que es comparen els segments que determina el punt E sobre el costats BC. En aquest cas, dibuixa les altures i pensa la relació que haurà entre les altures corresponents a aquests costats.
PB24: Si has considerat el cas d'un triangle rectangle o equilàter, et sembla que pots aplicar els mateixos procediments per a resoldre el problema que t'hem plantejat.
PB25: Tracta de trobar relacions entre els costats dels triangles les àrees dels quals vols comparar, aplicant el Teorema de Tales.
PB26: Busca triangles en posició de Tales a la figura de l'enunciat i tracta d'aplicar la relació que hi ha entre la raó de semblança i la raó de les seves àrees.

C) Verificació

Nivell 0

PC01: Mira de comprovar el resultat que has obtingut numèricament o geomètrica.
PC02: Pensa si aquest resultat és coherent amb les condicions inicials del problema.
PC03: Tens confiança en el resultat que has obtingut?, i en la solució obtinguda?
PC04: Reflexiona sobre la possibilitat de revisar la solució que has obtingut. Pensa com faries aquesta revisió.
PC05: Reflexiona com es van sorgir les idees correctes que et van apropar a la solució.
PC06: Recorda quins van ser els punts que van canviar el rumb de la resolució i sobre les causes que els van originar.
PC07: Reflexiona sobre aquestes preguntes:
Al llarg de la resolució, has proposat vàries estratègies?
Les has examinat totes?
Et sembla que has desenvolupat la o les més adients?
PC08: Fes un repàs de tots els continguts matemàtics que has fet servir durant la resolució del problema i recupera el que et sembli valuós del què has fet.
PC09: Identifica les teves possibles errades.
PC010: Pensa que durant la resolució has pogut fer alguna errada de càlcul o en el procediment que has seguit.
PC011: Et suggereixo que segueixis en ordre invers els passos de la solució que has trobat per trobar la teva errada.

PC012:Tracta d'identificar les teves possibles errades.

Nivell 1

PC11: Comprova numèricament o geomètrica el resultat que has obtingut
PC12: Repassa el procés que has seguit per a obtenir la solució.
PC13: Pensa que durant la resolució has pogut fer alguna errada de càlcul o en el procediment que has seguit.
PC13: Reflexiona sobre les dificultats que has tingut per avançar quan desconeixies algun concepte matemàtic o quan persisties en alguna estratègia no adient.
PC14: Pensa sobre quins han estat els motius dels teus canvis de rumb.
PC15: Tracta de recordar què et va suggerir l'estratègia que has seguit per a resoldre el problema.
PC16: Tracta de justificar la teva resposta.

Nivell 2

PC21: Et suggereixo que segueixis en ordre invers els passos de la solució que has trobat per a comprovar que no t'has equivocat.
PC22: Pensa si les idees que t'han portat a obtenir la solució t'han sorgit per associació amb les d'altre problema similar...
PC23: Els punts que t'han semblat claus en la teva resolució podrien ser:
Traçat de rectes paral·leles.
Consideració de casos particulars (triangle rectangle, equilàter, punt E en diferents posicions, etc.).
Aplicació de fórmules.
Consideració de malles triangulars...
PC24: Pensa en altres formes d'enfocar el problema.
PC25: Intenta proposar problemes semblants al que has resolt.

5.7. Implementació del sistema de missatges en el sistema informàtic d'acord amb totes les possibles accions de la resolució del problema del triangle

5.7.1. Estratègia 0 (construcció o carrega de la figura de l'enunciat)

Si l'alumne obre l'enunciat i no carrega la seva figura, per tant, tracta de construir-la, les accions reconegudes pel sistema serien les següents (totes de construcció gràfica, figura 5.7.1):

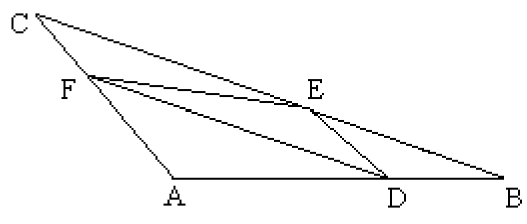


Figura 5.7.1

- Crea punts A, B i C.
- Dibuixa segments AC, BC i AB.
- Divideix el segment BC en tres parts iguals, de la forma tradicional, és a dir, traçant pel punt B una línia r qualsevol, marcant un punt B' sobre r amb el

compàs, i amb centre B', traçant un punt B'' sobre r a la mateixa distància de B...) i identifiquem el punt E.

- Dibuixa una paral·lela al segment AC per E, de nom DE.
- Crea punt d'intersecció d'AB amb DE, de nom D.
- Dibuixa una paral·lela al segment BC per D, de nom DF.
- Crea punt d'intersecció entre DF i AC, de nom F.
- Dibuixa segment EF.

Per cada tres accions no reconegudes, sortirà un missatge dels següents en aquest ordre:

1. Tracta de comprendre bé les condicions del problema.
2. Identifica l'objectiu del problema.
3. Intenta comprendre totes les paraules de l'enunciat.
4. "Expressa l'enunciat del problema en les teves paraules".
5. Recorda tots els conceptes matemàtics que hi ha a l'enunciat o a la figura i intenta definir-los amb les teves pròpies paraules. Si no els tens clars mira el glossari.
6. Pots carregar una construcció de la figura de l'enunciat prement el botó 'carregar figura".

L'alumne carrega la figura de l'enunciat. Per cada tres accions no reconegudes sortirà aleatòriament un dels següents missatges:

1. Els conceptes associats a l'enunciat o a la figura et suggereixen alguna informació nova?.
2. Tracta d'organitzar la informació que tens.
3. Esborra la representació gràfica que has carregat i intenta fer una de nova sense fixar-te en l'anterior.
4. Torna a llegir a poc a poc l'enunciat del problema.
5. Mira d'imaginar-te un problema més senzill o un cas particular d'aquest problema.
6. Pensa en alguna conjectura. Per a tractar de justificar-la has de buscar relacions entre els elements de la figura. Analitza aquestes relacions.
7. Intenta dibuixar rectes o segments sobre la figura de l'enunciat.
8. Potser necessitis alguna mena de representació simbòlica dels elements de la figura.
9. Reflexiona sobre la possibilitat que la relació 2 a 1 sigui una altra.
10. Pensa sobre el fet que el punt E pugui estar en un altre lloc sobre el costat BC, això et suggereix alguna cosa?.
11. La diagonal d'un paral·lelogram el divideix en dos triangles de la mateixa àrea (equivalents).
12. Reflexiona sobre el següent aspecte: per a resoldre aquest problema, el raonament que has de fer s'ha de basar en alguna propietat de la semblança de triangles.
13. Mira de recordar el nombre d'altures que té un triangle i la forma de dibuixar-les.
14. Pensa en un problema equivalent.

Si l'alumne fa una nova acció reconeguda després de representar la figura de l'enunciat o de carregar-la, aquesta acció hauria de ser del tipus gràfic o del tipus deductiu. El sistema reconeixerà l'acció i identificarà l'estratègia amb la qual està associada.

5.7.2. Estratègia 1 (aplicació del Teorema de Tales)

Si l'alumne fa alguna de les accions que descrivim a continuació, el sistema sabrà que intenta seguir l'estratègia que hem anomenat "aplicació del Teorema de Tales", dins de l'espai bàsic del problema del triangle (pàg. 69).

A partir de la figura de l'enunciat, la relació d'accions que desenvolupen aquesta estratègia per arribar a la solució serien les següents, no necessàriament en aquest ordre (figura 5.7.2).

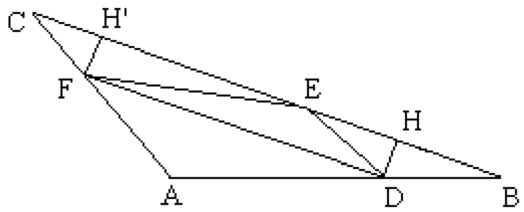


Figura 5.7.2

- Sense fer cap acció gràfica, l'alumne introdueix, com a deducció, alguna de les relacions: AD/DB=CE/EB=AF/FC=2/1=2 (accions deductives)
- Expressa alguna de les igualtats: BE=1, EC=2, EC=2*EB (accions deductives).
- Dibuixa la recta perpendicular "r" a EB per D (acció gràfica).
- Identifica el punt d'intersecció de "r" amb EB, de nom H (acció gràfica).
- Identifica el segment DH com l'altura sobre EB des de D en el triangle EBD (acció gràfica).
- Dibuixa la recta perpendicular "s" a EC pel punt F (acció gràfica).
- Identifica el punt d'intersecció de "s" amb EC, de nom H' (acció gràfica).
- Identifica el segment FH' com l'altura sobre EC des de F en el triangle EFC (acció gràfica).
- DH=FH' (acció deductiva)
- Àrea EDB = 2*Àrea EFC (deducció, resultat final).

Si l'alumne arriba al resultat final per tal que el sistema doni per correcte aquest resultat ha d'haver expressat o dibuixat almenys el 30% del total de les accions que identifiquen aquesta estratègia.

Un cop iniciada l'estratègia amb una acció reconeguda en la seva direcció, per cada tres accions no reconegudes sortiran successivament els següents missatges seguint l'ordre que mostrem a continuació:

1. Tracta d'identificar relacions entre els segments de la figura.
2. Identifica els triangles de la figura de l'enunciat i intenta comparar les seves àrees.

Si després d'aquests dos missatges l'alumne no fa cap acció reconeguda gràfica o deductiva, sortiran de forma aleatòria dos nous missatges, que no hagin sortit prèviament, d'entre els esmentats a l'estratègia 0.

Si encara no hi ha cap acció reconeguda, sortiran de forma aleatòria i successiva els missatges següents per tal de canviar d'estratègia:

1. Reflexiona sobre la possibilitat de resoldre el problema considerant que et donen en lloc del triangle ABC un que sigui rectangle o un triangle equilàter. Pots aplicar els mateixos procediments per a resoldre el problema inicial?

2. Pots dividir els costats del triangle en tres segments iguals i traçar rectes paral·leles als costats.
3. Busca triangles en posició de Tales a la figura de l'enunciat i tracta d'aplicar la relació que hi ha entre la raó de semblança de dos triangles i la relació entre les seves àrees.

En el moment que hi hagi una nova acció reconeguda el sistema de missatges seguirà la línia de l'estratègia identificada en aquesta acció.

Si l'alumne expressa el resultat correcte i ha fet almenys el 30% de les accions corresponents a aquesta estratègia sortiran els missatges de verificació. Si no ha arribat a aquest percentatge d'accions reconegudes sortirà el missatge:

1. El resultat que has trobat és correcte, però la justificació que has fet no és suficient. Intenta buscar relacions entre els elements de la figura que justifiquin la teva resposta.

5.7.3. Estratègia 2 (malles triangulars)

Si l'alumne fa alguna de les accions que descrivim a continuació, el sistema sabrà que segueix l'estratègia que hem anomenat "malles triangulars", dins de l'espai bàsic del problema del triangle (pàg. 69).

A partir de la figura de l'enunciat, la relació d'accions que desenvolupen aquesta estratègia per arribar a la solució serien les següents, no necessàriament en aquest ordre (figura 5.7.3):

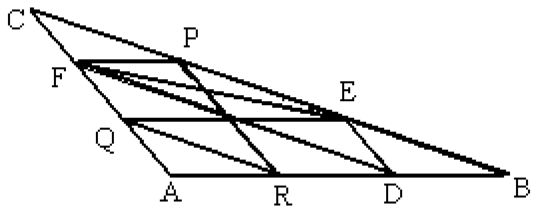


Figura 5.7.3

- Identifica els punts mitjos P, Q i R dels segments CE , AF i AD, respectivament (tres accions gràfiques).
- Dibuixa la recta paral·lela, "r", a AB per E (acció gràfica).
- Identifica punt d'intersecció, Q, de "r" amb CA (acció gràfica).
- Dibuixa la recta paral·lela, "s", a AC per P (acció gràfica).
- Identifica punt d'intersecció, R, de "s" amb BA (acció gràfica).
- Identifica punt d'intersecció, M, de "s" amb "r" (acció gràfica).
- Dibuixa els segments PF, EQ, PR, RQ i FD (cinc accions gràfiques).
- Expressa alguna de les igualtats: àrea PCF = àrea MPF = àrea MFQ = àrea RMQ = àrea RQA = àrea DMR = àrea DEM = àrea EPM = àrea BED (7 accions deductives).
- Expressa que àrea ECF = 2*àrea BED (acció deductiva final).

Si l'alumne arriba al resultat final per tal que el sistema doni per correcte aquest resultat ha d'haver expressat o dibuixat almenys el 30% del total de les accions que identifiquen aquesta estratègia.

Un cop iniciada l'estratègia amb una acció reconeguda en la seva direcció, per cada tres accions no reconegudes, sortiran successivament els missatges:

1. Troba el punt mig del segment CE i traça paral·leles als costats del triangle.
2. Si has traçat les paral·leles als costats, identifica tots els triangles que es formen.
3. Imagina com compararies les àrees dels triangles que s'han format.

Si després d'aquests dos missatges l'alumne no fa cap acció reconeguda, gràfica o deductiva, sortiran de forma aleatòria dos nous missatges, que no hagin sortit prèviament, d'entre els esmentats a l'estratègia 0.

Si encara no hi ha cap acció reconeguda, sortiran de forma aleatòria i successiva els missatges següents per tal de canviar d'estratègia:

1. Reflexiona sobre la possibilitat de resoldre el problema considerant que et donen en lloc del triangle ABC un que sigui rectangle o un triangle equilàter. Pots aplicar els mateixos procediments per a resoldre el problema inicial?
2. Pots agafar com a bases dels triangles que es comparen els segments que determina el punt E sobre el costats BC.
3. Tracta de trobar relacions entre els costats dels triangles les àrees dels quals vols comparar, aplicant el Teorema de Tales.
4. Busca triangles en posició de Tales a la figura de l'enunciat i tracta d'aplicar la relació que hi ha entre la raó de semblança de dos triangles i la relació entre les seves àrees.

En el moment que hi hagi una nova acció reconeguda el sistema de missatges seguirà la línia de l'estratègia identificada en aquesta acció.

Si l'alumne expressa el resultat correcte i ha fet almenys el 30% de les accions corresponents a aquesta estratègia sortiran els missatges de verificació. Si no ha arribat a aquest percentatge d'accions reconegudes sortirà el missatge:

1. El resultat que has trobat és correcte, però la justificació que has fet no és suficient. Intenta buscar relacions entre els elements de la figura que justifiquin la teva resposta.

5.7.4. Estratègia 3 (identificació de triangles)

Si l'alumne fa alguna de les accions que descrivim a continuació, el sistema sabrà que segueix l'estratègia que hem anomenat "identificació de triangles", dins de l'espai bàsic del problema del triangle (pàg. 69).

A partir de la figura de l'enunciat, la relació d'accions que desenvolupen aquesta estratègia per arribar a la solució serien les següents, no necessàriament en aquest ordre (figura 5.7.4):

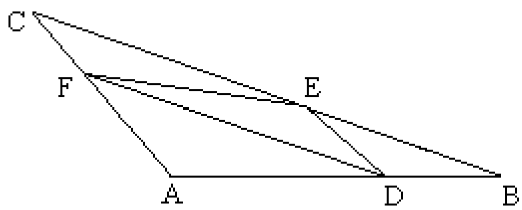


Figura 5.7.4

- Expressa qualsevol de les igualtats següents: $(AB/AD)^2 = (AC/AF)^2$ = àrea ABC/ àrea ADF= 9/4 (accions deductives).

- Expressa qualsevol de les igualtats següents: $(BA/BD)^2 = (BC/BE)^2 = (CA/CF)^2$ = àrea BCA/ àrea BED= 9/1=9 (accions deductives).
- Expressa alguna de les igualtats següents: àrea ADF=4*àreaDBE; àreaABC=9*àreaDBE; àreaECF+àreaDEF=4*àrea DBE; àrea DEF = àrea ECF. (accions deductives).
- Expressa que àrea ECF=2*àrea BED (acció deductiva, resultat final).

Si l'alumne arriba al resultat final per tal que el sistema doni per correcte aquest resultat ha d'haver expressat o dibuixat almenys el 30% del total de les accions que identifiquen aquesta estratègia.

Un cop iniciada l'estratègia amb una acció reconeguda en la seva direcció, per cada tres accions no reconegudes, sortiran successivament els missatges:

1. Identifica tots els triangles que es formen.
2. Imagina com compararies les àrees dels triangles que s'han format.

Si després d'aquests dos missatges l'alumne no fa cap acció reconeguda gràfica o deductiva, sortiran de forma aleatòria dos nous missatges (que no hagin sortit prèviament) d'entre els esmentats a l'estratègia 0.

Si encara no hi ha cap acció reconeguda, sortiran de forma aleatòria i successiva els missatges següents per tal de canviar d'estratègia (en el moment que hi hagi una nova acció reconeguda el sistema de missatges seguirà la línia de l'estratègia identificada en aquesta acció):

1. Reflexiona sobre la possibilitat de resoldre el problema considerant que et donen en lloc del triangle ABC un que sigui rectangle o un triangle equilàter. Pots aplicar els mateixos procediments per a resoldre el problema inicial?
2. Pots dividir els costats del triangle en tres segments iguals i traçar rectes paral·leles als costats.
3. Tracta de trobar relacions entre els costats dels triangles les àrees dels quals vols comparar, aplicant el Teorema de Tales.
4. Pots agafar com a bases dels triangles que es comparen els segments que determina el punt E sobre els costats BC.

En el moment que hi hagi una nova acció reconeguda el sistema de missatges seguirà la línia de l'estratègia identificada en aquesta acció.

Si l'alumne expressa el resultat correcte i ha fet almenys el 30% de les accions corresponents a aquesta estratègia sortiran els missatges de verificació, si no ha arribat a aquest percentatge d'accions reconegudes sortirà el missatge:

1. El resultat que has trobat és correcte, però la justificació que has fet no és suficient. Intenta buscar relacions entre els elements de la figura que justifiquin la teva resposta.

5.7.5. Verificació

El sistema ha d'identificar si el resultat que proposa l'alumne és correcte. Així doncs, si la resposta final de l'alumne és incorrecta aniran sortint els següents missatges aleatòriament fins que la resposta (acció deductiva) sigui correcta:

1. Mira de comprovar el resultat que has obtingut numèricament o geomètrica.
2. Pensa si aquest resultat és coherent amb les condicions inicials del problema.
3. Repassa el procés que has seguit per a obtenir la solució.

4. Fes un repàs de tots els continguts matemàtics que has fet servir durant la resolució del problema i recupera el que et sembli valuós del que has fet.
5. Tracta d'identificar les teves errades.
6. Pensa que durant la resolució has pogut fer alguna errada de càlcul o en el procediment que has seguit.
7. Et suggereixo que segueixis en ordre invers els passos de la solució que has trobat per trobar la teva errada.

Si la resposta final de l'alumne és correcta, però la seva argumentació no arriba al 30% de les sentències reconegudes pel sistema sortirà el missatge:

1. El resultat que has trobat és correcte, però la justificació que has fet no és suficient. Intenta buscar relacions entre els elements de la figura que justifiquin la teva resposta.

Si la resposta final de l'alumne és correcta sortirà de forma aleatòria un dels següents missatges amb la consigna que enviessin les seves respostes al fòrum del problema:

1. Tens confiança en el resultat que has obtingut?, i en la solució obtinguda?
2. Reflexiona com van sorgir les idees correctes que et van apropar a la solució.
3. Recorda quins van ser els punts que van canviar el rumb de la resolució i sobre les causes que els van originar.
4. Reflexiona sobre aquestes preguntes:
   Al llarg de la resolució, has proposat vàries estratègies?
   Les has examinat totes?
   Et sembla que has desenvolupat la o les més adients?.
5. Tracta de recordar què et va suggerir l'estratègia que has seguit per a resoldre el problema.
6. Pensa si les idees que t'han portat a obtenir la solució t'han sorgit per associació amb les d'altres problemes similars...".
7. Els punts que t'han semblat claus en la teva resolució podrien ser:
   Traçat de rectes paral·leles.
   Consideració de casos particulars (triangle rectangle, equilàter, punt E en diferents posicions, etc.
   Aplicació de fórmules.
   Consideració de malles triangulars...
8. Intenta proposar problemes semblants al que has resolt.

Al final de tot el procés sortirà un missatge que doni per acabada la resolució.

1. Has resolt satisfactòriament aquest problema; vols intentar un altre?

CAPÍTOL 6

ANTECEDENTS, DISSENY I FUNCIONAMENT DE L'AGENTGEOM

6.1. Introducció

En aquest capítol descrivim les funcionalitats que té el sistema tutorial multiagent que hem anomenat AgentGeom i que ha estat elaborat per un equip de recerca de la UAB format per dos informàtics i dos assessors pedagògics (Puertas, 2002; Cobo i altres, 2004; Cobo i Fortuny, 2004; Richard i altres, 2003 i 2004).

Com hem assenyalat al capítol 1, l'Agentgeom és un sistema tutorial que combina dues funcions bàsiques en qualsevol sistema educatiu: és obert i permet l'atenció a la diversitat, ja que es donen els mecanismes necessaris perquè el professor pugui ampliar la base de problemes.

Com hem pogut observar en la selecció de missatges del capítol 6, en el qual hem elaborat el guió previ a la implementació dels missatges per a cada problema, el professor pot gestionar el sistema, creant problemes, assignar-los als seus alumnes segons les seves característiques cognitives, examinar l'efectivitat dels seus processos de resolució i modificar el sistema de missatges que pot enviar a cada alumne en cada problema, segons l'estratègia que hagi triat.

Hem dissenyat el sistema AgentGeom de forma que sigui una aplicació portable a qualsevol entorn. Per aquest motiu l'hem desenvolupat sobre una arquitectura web i, fent servir els recursos més bàsics que ens proporciona aquest entorn, hem aconseguit que l'alumne pugui interactuar amb el sistema amb qualsevol ordinador connectat a la Xarxa i amb un navegador senzill. Així doncs, l'AgentGeom és una aplicació servidora, és a dir, es troba en una màquina servidora i molts alumnes, simultàniament, s'hi poden connectar mitjançant el protocol HTTP. Concretament, la seva adreça és http://intermat.uab.es/intermates/activitats/tfc/index.jsp En qualsevol cas, en Josep M. Fortuny (JosepMaria.Fortuny@uab.es), que actua com a administrador del sistema, és la persona que assigna nom d'usuari i contrasenya a qualsevol persona que vulgui accedir al sistema.

En el proper paràgraf fem una descripció general de la composició i de les relacions dels usuaris (alumnes i professor) amb l'AgentGeom. Després, el comparem amb un antecedent seu com és el projecte Baghera. A la resta de paràgrafs fem una descripció de les funcionalitats de l'AgentGeom i del seu funcionament, seguint les diferents pantalles que van apareixent segons els usuaris siguin un alumne o el seu professor.

6.2. Característiques generals de l'AgentGeom. Relació amb els seus usuaris

L'AgentGeom és un sistema tutorial artificial (figura 6.2.1) concebut com un sistema multi-agent híbrid que combina interfícies, utilitzades per persones com a usuaris del sistema (professors i alumnes), amb dos agents artificials: l'agent tutor, que té una arquitectura

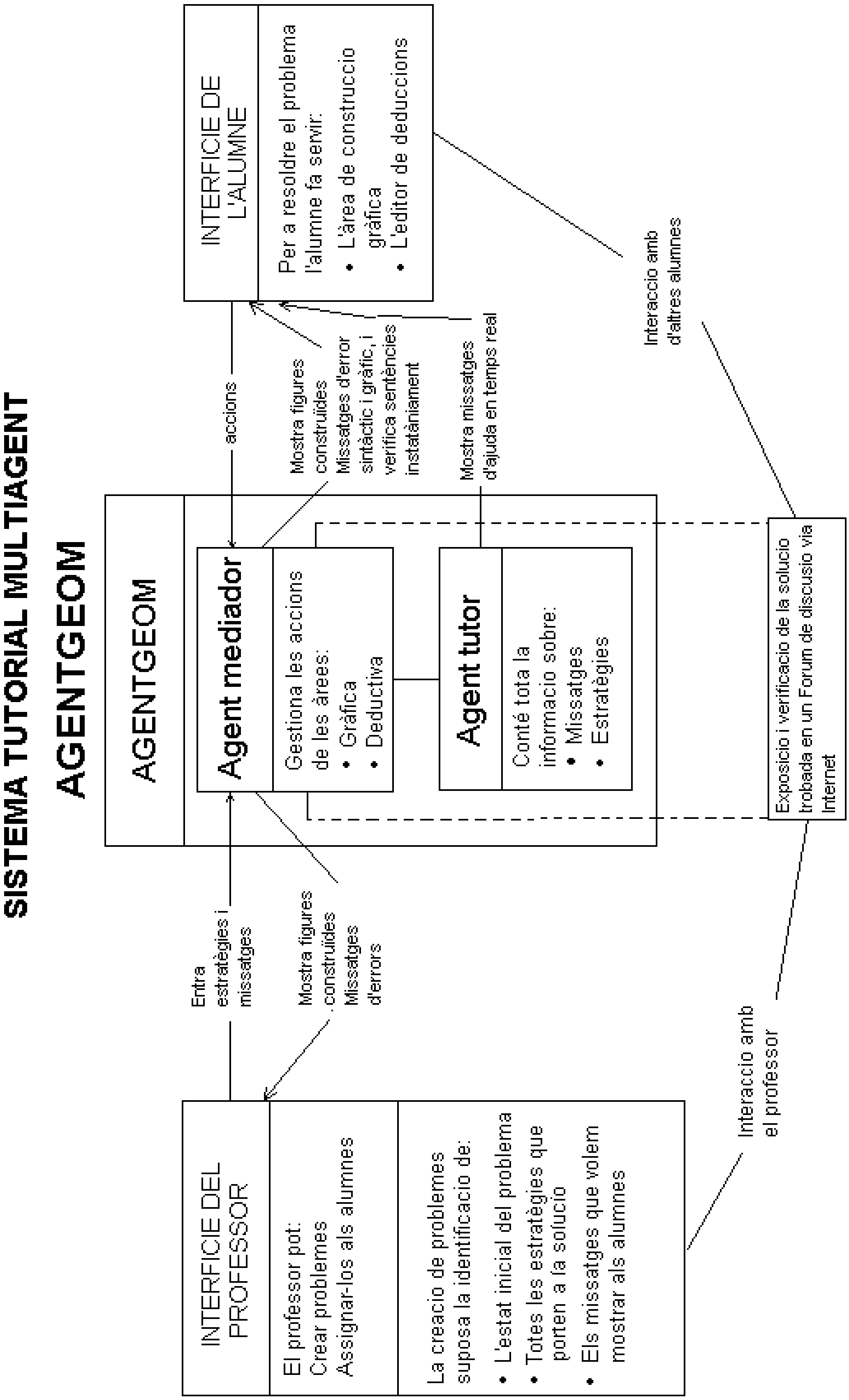


Figura 6.2.1. Esquema de la composició del sistema tutorial multiagent AgentGeom

principalment reactiva, i l'agent mediador, que rep les entrades de les interfícies de l'alumne i el professor.

Les interfícies són totes les eines de què disposen els usuaris per a interactuar amb els agents mediador i tutor. En el cas del professor (veure l'apartat 6.4.4), l'AgentGeom disposa d'eines de comunicació –diferents pantalles- que fan possible que el professor crei problemes i els assigni als seus alumnes.

La creació de problemes nous exigeix l'elaboració de tot un contingut pedagògic al voltant de cada problema, que comporta la identificació de totes les estratègies que resolguin el problema i els diferents missatges que el professor vulgui que es mostri als alumnes quan l'agent tutor consideri necessari, com vam fer al llarg del capítol 6 amb els problemes del paral·lelogram, de la malla quadrada i del triangle.

La interfície de l'alumne ofereix a l'alumne totes les eines per a resoldre el problema. Com mostrem als apartats 6.4.2 i 6.4.3, l'alumne disposa d'una àrea de construcció gràfica i d'un editor de deduccions. A l'àrea de construcció gràfica, l'alumne pot dibuixar figures fent servir els botons (primitives de construcció) per a dibuixar punts, línies rectes, circumferències, segments, paral·leles, perpendiculars, definir la intersecció de dos objectes, etc.

Amb l'editor de deduccions, l'alumne pot construir sentències sobre els objectes gràfics que ha creat, i que l'agent mediador validarà o no.

L'agent mediador rep les entrades de les interfícies del professor i dels alumnes, és a dir, processa totes les accions (gràfiques i deductives) del professor quan crea problemes nous i de l'alumne quan resol el problema, i les emmagatzema en una base de dades. Concretament, pel que fa a les accions geomètriques, l'agent mediador rep totes les primitives de construcció, calcula tots els elements nous derivats de les accions, emet missatges si hi ha errors en la construcció o en la identificació dels nous objectes gràfics i, si el procés acaba correctament, mostra la figura que s'ha dibuixat a l'àrea de construcció (veure l'apartat 6.4.2).

Pel que fa a l'editor de deduccions, l'agent mediador gestiona la construcció correcta de la sintaxi de les sentències, mostrant missatges d'error si no estan ben construïdes; determina si la sentència és veritable o falsa, fent servir el model de gràfic al qual està referida sempre la sentència; i mostra la validesa o no de la deducció introduïda (veure l'apartat 6.4.3.2).

L'agent tutor té per objectiu ajudar directament l'alumne en la resolució del problema. Per a això, l'agent tutor conté, en forma d'arbre, cadascuna de les estratègies corresponents a cada problema, també té diferents llistes de missatges. Una llista per cada estratègia i una llista especial de canvi d'estratègia. Així, l'agent tutor té tota la informació sobre estratègies i missatges, i només necessita un mecanisme per a saber quan i com mostrar els missatges a l'alumne. Aquest mecanisme comença quan l'agent mediador, que segueix la pista de totes les accions que realitza l'alumne, les passa a l'agent tutor, que les identifica dins del seu arbre d'estratègies. A continuació descrivim la forma de llençar els missatges que té l'agent tutor (figura 6.2.2).

L'alumne entra a l'AgentGeom i comença a fer accions, siguin deductives o gràfiques, des de la seva interfície.

La primera acció que fa l'alumne pot ser reconeguda per l'agent mediador, en el sentit que la consideri correcta o no reconeguda –acció que el sistema considera incorrecta (de fet és una acció objectivament incorrecta, excepte en casos molt excepcionals)-. L'agent mediador passa la informació a l'agent tutor.

Si l'acció que fa l'alumne és reconeguda, aleshores l'agent tutor la considera com l'última acció reconeguda (a efectes d'identificar l'estratègia que segueix l'alumne i, com a conseqüència, triar el missatge adient) i actualitza a zero el comptador d'accions no reconegudes, és a dir, no considera les anteriors possibles accions no reconegudes a efectes d'emetre missatges. Després, l'agent tutor torna al començament i espera que l'alumne faci una nova acció.

Si, pel contrari, l'acció que fa l'alumne l'agent mediador no la reconeix, aleshores el comptador d'accions incorrectes puja una unitat i espera una nova acció. Si el comptador d'accions incorrectes arriba a tenir el valor 3, aleshores l'agent tutor selecciona un missatge segons el següent criteri:

- Si no hi ha una última acció reconeguda, aleshores tria de manera aleatòria un missatge d'entre els disponibles (que no hagin sortit abans) que orientin a l'alumne cap a una nova estratègia general. Després de la tria, l'agent tutor mostra aquest missatge i espera una nova acció de l'alumne.
- Pel contrari, si hi ha una última acció reconeguda, aleshores, l'agent tutor selecciona el missatge que segueix l'ordre d'aquesta última acció reconeguda (que dependrà del moment en el qual es trobi la resolució i, per tant, el desenvolupament de missatges perquè la tria sigui aleatòria o no). A continuació, l'agent tutor mostra per pantalla el missatge triat. Si el conjunt de missatges relacionats amb l'última acció és buit, aleshores el sistema selecciona, de forma aleatòria, un nou missatge entre la resta dels que orientin l'alumne cap a una estratègia diferent de la que actualment seguia, el mostra a la pantalla i espera una nova acció de l'alumne.

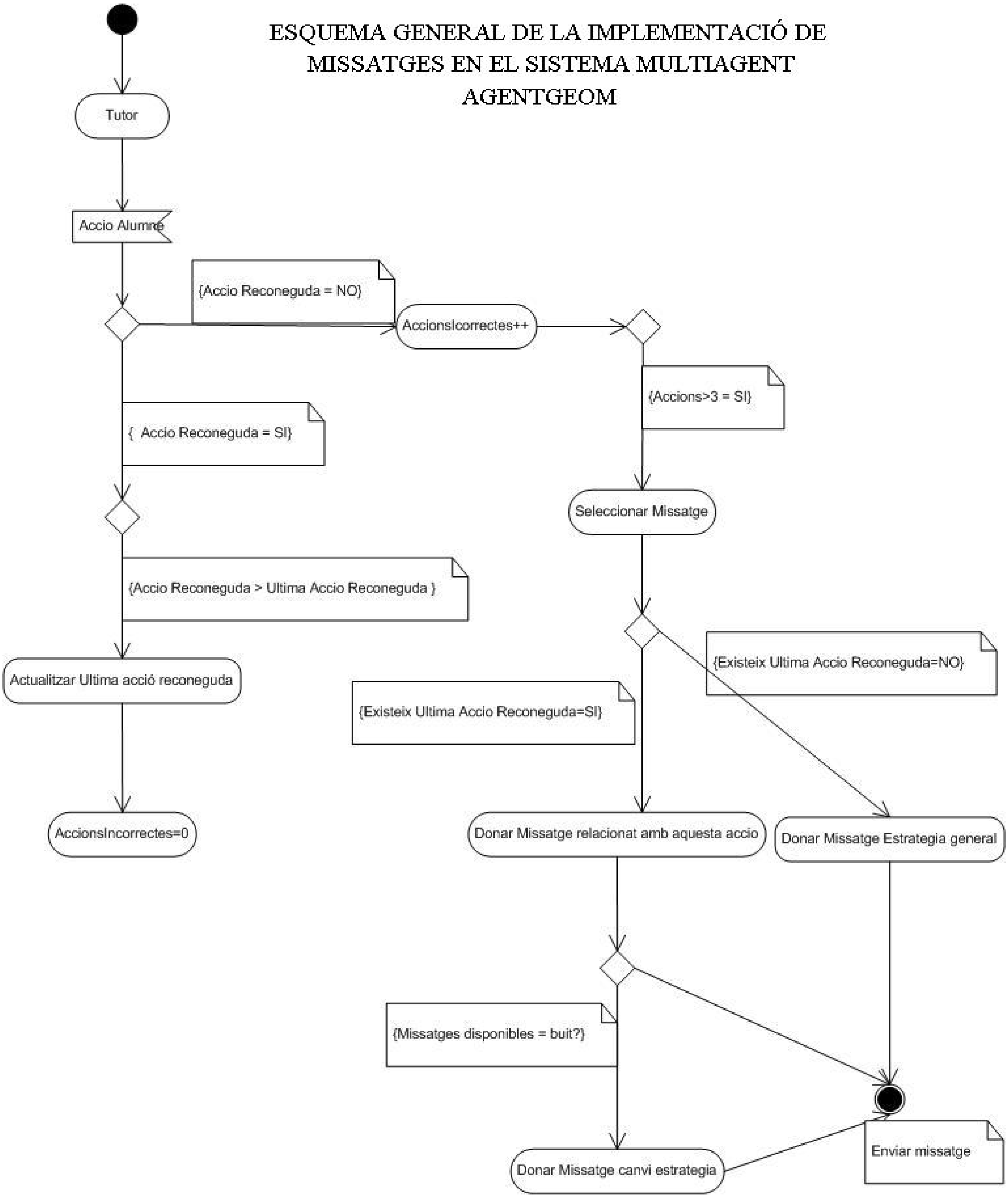


Figura 6.2.2. Esquema general d'implementació de missatges en el sistema multiagent AgentGeom

6.3. Antecedents del sistema multiagent AgentGeom. Semblances i diferències amb el Projecte Baghera.

L'AgentGeom té un antecedent immediat, que és el projecte Baghera, desenvolupat en el Laboratoire Leibniz (2003) de Grenoble i dirigit per l'investigador N. Balacheff. Com aquest, el nostre sistema multiagent incorpora tres principis que considerem bàsics en l'elaboració d'entorns assistits per ordinador: per una banda, la col·laboració entre agents humans i artificials, que supera el paradigma de dècades anteriors en les quals es considerava a l'ordinador com una màquina autònoma que concebia l'ensenyament només com a funció instruccional (Balacheff, 2000).

En segon lloc, la concepció de l'educació com el resultat de un procés complex que emergeix de les interaccions entre agents que tenen habilitats diferents i complementàries (Webber i altres, 2002).

I, per últim, ambdós projectes estan concebuts com sistemes multiagents de diagnòstic que són capaços d'identificar els coneixements dels alumnes després de les interaccions d'aquests amb el sistema i, per tant, han de ser capaços d'adaptar-se a les seves característiques cognitives i a l'evolució dels seus coneixements.

En canvi, hi ha diferències significatives entre ambdós projectes, concretament en dos aspectes que considerem també fonamentals i que fan del nostre projecte una proposta innovadora i pionera en l'elaboració d'entorns interactius web d'ensenyament i aprenentatge. Així, mentre el projecte Baghera és un entorn basat en la xarxa per a l'aprenentatge de la demostració geomètrica, fonamentat sobre els treballs de Balacheff (1999) i Luengo (1999), i aquest és el contingut bàsic de les propostes d'activitats que es fan als alumnes, el projecte AgentGeom utilitza com a objecte d'estudi, i com a base de les propostes de les seves activitats, a més de la demostració geomètrica, la resolució de problemes en general, i té els seus fonaments en les àmplies investigacions portades a terme pels investigadors de la Universitat Autònoma de Barcelona en relació a les interaccions que es produeixen entre alumnes quan resolen problemes en diferents contextos (Cobo i Fortuny, 2000; Fortuny, i Murillo, 1999; Meavilla, i Fortuny, 1999; Rodríguez, 2003; Richard, 2004a i 2004b).

A més, Baghera té un nivell d'interfície molt limitat pel que fa a la verificació, en temps real, de la realització de les activitats dels alumnes (Webber, i Pesty, 2002), deixant aquesta verificació pel final, és a dir, quan l'alumne ha acabat la seva proposta de demostració. Així, el projecte Baghera no segueix les indicacions de Bunt i Conati (2002) en el sentit que els entorns oberts d'aprenentatge poden millorar-se proporcionant, en temps real, suport als processos d'exploració, adaptats a les necessitats individuals de cada estudiant.

Seguint aquest principi, hem aconseguit que l'AgentGeom comprovi i verifiqui de forma instantània totes les accions realitzades pels alumnes, identificant el moment del procés de resolució en el qual es troba l'alumne i mostrant-li, sempre que el tutor humà el consideri oportú o quan l'alumne ho demani, missatges que orientin el seu procés i que li ajudin a obtenir una solució del problema, o a donar sentit al concepte de demostració matemàtica. Aquest sistema d'ajuda: diferenciat per a cada alumne en funció de l'evolució del seu procés de resolució, fet de forma directa i en temps real, i adaptat a les seves necessitats cognitives, donarà al nostre aplicatiu un caràcter d'emergència, entesa en el sentit que la seva conducta no pugui ser fàcilment predictible simplement fent una descripció de les unitats del sistema.

Una altra aportació del sistema és la possibilitat de servir de base per a discussions conjuntes, entre el professor i els alumnes o d'aquests entre sí sobre la tasca realitzada. Així, els alumnes poden iniciar un fòrum de debat durant la resolució del problema o al final de la mateixa. En aquest cas, l'AgentGeom facilita la discussió fent als alumnes una pregunta relacionada amb la verificació del problema resolt, que els alumnes han de respondre i penjar les respostes a l'esmentat fòrum.

6.4. Accés a l'AgentGeom

A continuació descrivim cadascuna de les funcions que té el sistema, mostrant les diferents pantalles que van apareixent quan ens anem introduint a l'AgentGeom, sigui com a usuaris alumnes o com a usuari professor.

6.4.1. Pantalla d'identificació de l'usuari

La primera pantalla que es presenta a l'usuari en entrar al sistema és la pantalla de identificació (figura 6.4.1). Com hem comentat a la introducció, per a poder entrar al sistema, l'usuari ha de tenir una clau d'usuari i una clau d'accés.

Un cop inserides les claus d'usuari i d'accés, s'ha de prémer al botó ACCEPTAR per a continuar. D'aquesta manera s'accedirà a l'aplicatiu específic per a cadascun dels tipus d'usuaris, segons les claus inserides.

Si la clau és incorrecta es tornarà a mostrar la mateixa pantalla. No es dóna informació sobre quins dels camps és l'incorrecte, per tenir una seguretat més gran.

A més, es pot triar l'idioma en el qual es mostrarà l'aplicació entre el castellà, el català i l'anglès. Malgrat que per defecte està seleccionat el català.

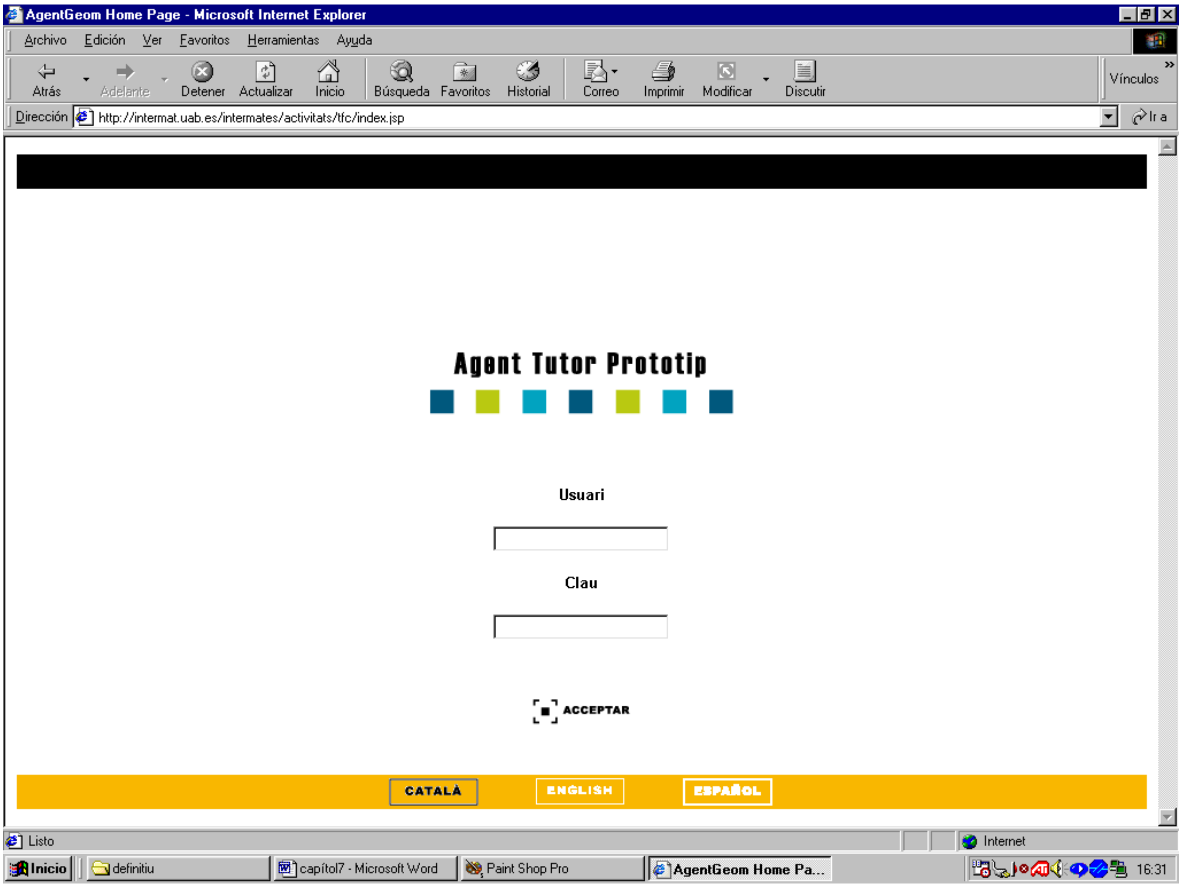


Figura 6.4.1. Pantalla d'identificació de l'usuari

Si les claus d'usuari i d'accés són les corresponents a un alumne, el sistema mostrarà la interfície corresponent a l'alumne.

6.4.2. Pantalla de selecció de problemes per part de l'alumne

Un cop entrat com a usuari alumne, la primera pantalla que mostra el sistema a l'alumne és la de selecció dels problemes que prèviament el professor ha confeccionat especialment per a ell (figura 6.4.2).

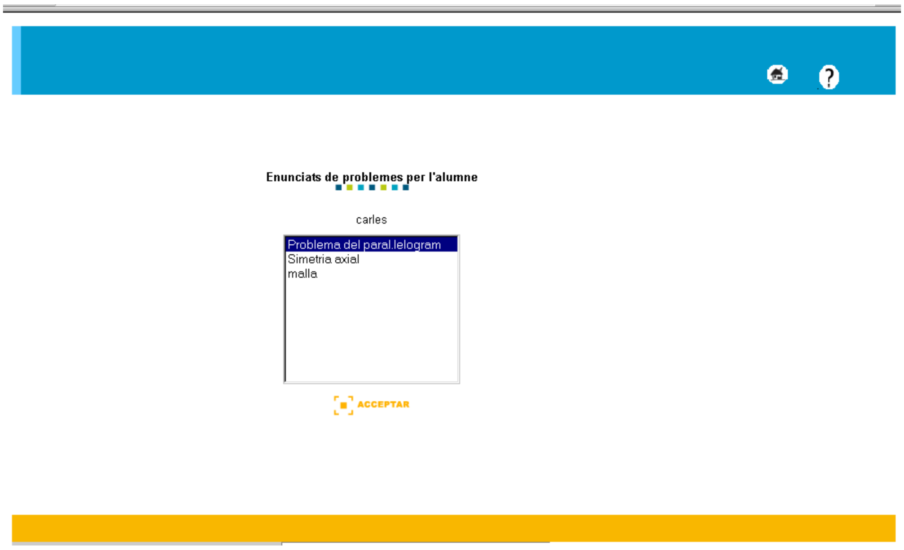


Figura 6.4.2. Pantalla de selecció del problema

Des d'aquí es pot tornar a la pantalla d'inici (icona casa) o accedir a una petita ajuda o, pel contrari, l'alumne podrà seleccionar el problema que vol resoldre i prémer el botó acceptar.

El botó  ens torna a la pantalla d'identificació de l'usuari, i el botó  obre una finestra en la qual l'alumne pot trobar tota la informació sobre el funcionament de les àrees gràfica i deductiva (figura 6.4.3).

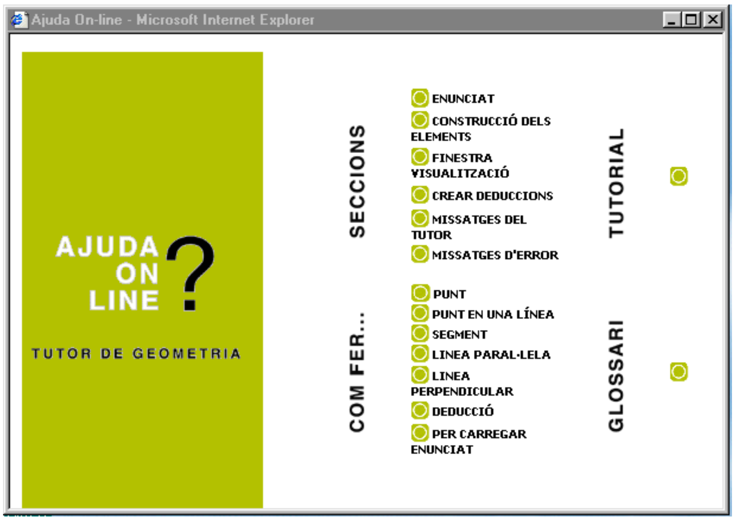


Figura 6.4.3. Finestra d'ajuda

6.4.3. Pantalla de l'àrea de treball de l'alumne

Un cop seleccionat el problema que l'alumne ha de resoldre, el sistema obre la pantalla de treball de l'alumne (figura 6.4.4) .

Aquesta àrea de treball està dividida en dues parts ben diferenciades. La de l'esquerra, emmarcada de color blau, és on l'alumne té la pissarra per a crear els elements geomètrics (rectangle blanc) i les eines necessàries per a crear-los (a sobre del marc blau). Aquesta part de l'àrea de treball de l'alumne l'anomenarem àrea de construcció gràfica.

La de la dreta, de color beige és on l'alumne pot escriure les sentències sobre les construccions gràfiques que l'agent mediador validarà o no. Aquesta part de l'àrea de treball de l'alumne l'anomenarem àrea de deduccions.

A més, a la part inferior de l'àrea de treball de l'alumne podem trobar la barra d'eines –barra de color marró que conté, entre d'altres, el botó d'informació del tutor, el botó de demanda de missatges, el botó que mostra l'enunciat de problema, etc.-, que descrivim a l'apartat 6.4.3.3.

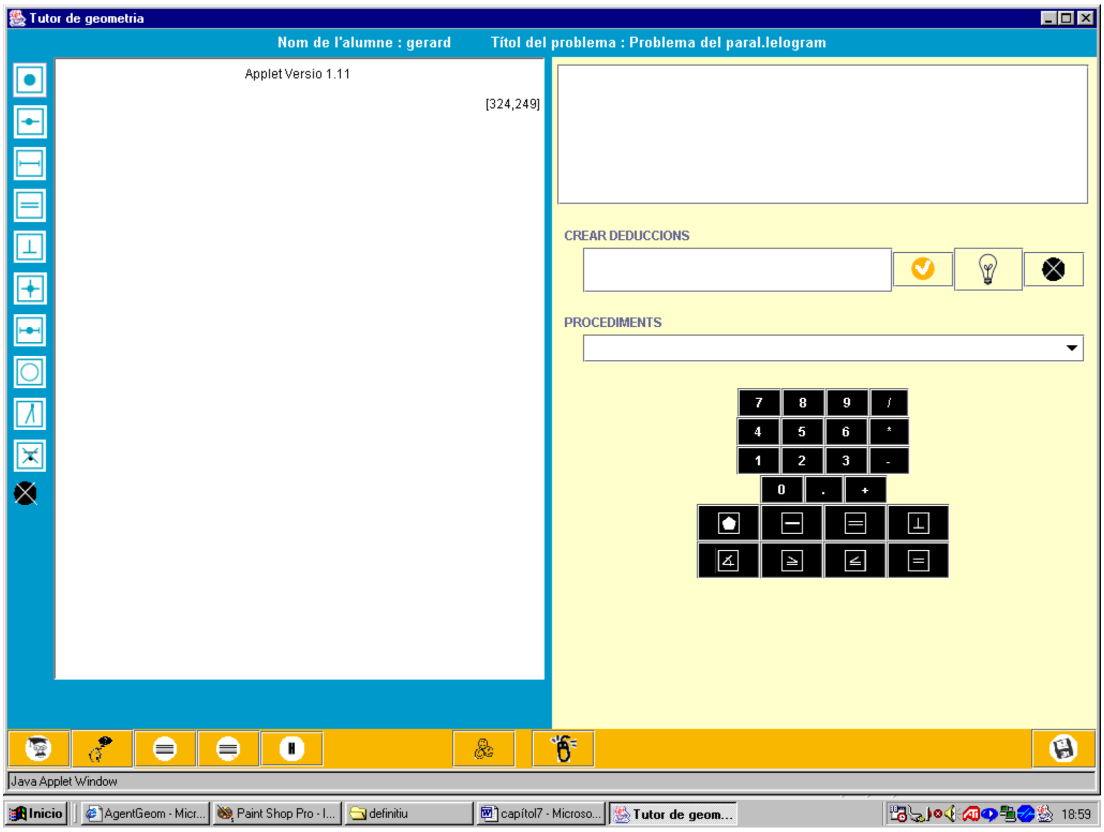


Figura 6.4.4. Pantalla de l'àrea de treball de l'alumne

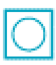
6.4.3.1.Àrea de construcció gràfica

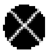
L'àrea de construcció gràfica conté tot una sèrie de botons que permeten a l'alumne construir objectes geomètrics bàsics. Aquests es visualitzen en la part central blanca –on diu: "Applet Versió 1.11 (figura 6.4.4)-, que anomenarem la pissarra de l'alumne.

Quan l'alumne prem algun dels botons d'aquesta àrea se li mostra una casella de text a sota de la pissarra on se li donen les instruccions per a crear aquest element, així com l'espai on omplir els paràmetres que necessiti (figura 6.4.5). Per a validar els paràmetres introduïts en la casella de text s'ha de polsar la tecla return.

Figura 6.4.5. Finestra de diàleg per a crear objectes geomètrics

A la taula 6.4.1. descrivim cadascun dels botons que composen l'àrea de construcció gràfica.

	Punt	Dibuixa un punt a la pissarra. Requereix la introducció del nom del punt seguit de la tecla return. A continuació l'alumne es pot moure per la superfície de la pissarra per a determinar la posició on vol situar el punt.
	Punt en una línia	Dibuixa un punt que volem situat en una línia. Requereix assenyalar una línia o segment ja creats a la pissarra, i a continuació s'ha de buscar la posició d'aquest punt en la línia, mitjançant una línia auxiliar. Finalment es demana el nom d'aquest nou punt.
	Segment	Dibuixa un segment entre dos punts. Es requereix assenyalar dos punts ja creats sobre la pissarra. A continuació s'ha d'introduir el nom del segment i prémer la tecla return.
	Paral·lela	Dibuixa una línia recta paral·lela a una altra ja existent a la pissarra. Requereix assenyalar una línia recta o segment i un punt. Després d'introduir el nom de la línia paral·lela es dibuixarà una línia recta paral·lela a l'anterior i que passi pel punt assenyalat. La línia paral·lela traçada arribarà fins als extrems de la pissarra.
	Perpendicular	Dibuixa una línia perpendicular a una altra donada i que passi per un punt. Es requereix assenyalar una línia o segment i un punt. Després d'introduir el nom de la línia perpendicular es dibuixarà damunt del punt i arribarà fins als extrems de la pissarra.
	Punt d'intersecció	Dibuixa un punt, que és intersecció de dues línies. Requereix assenyalar dues línies o segments. Un cop introduït el seu nom i premut el botó return es dibuixa un punt en la intersecció de les dues línies si aquesta intersecció es troba dins de la pissarra.
	Punt mig	Dibuixa el punt mig d'un segment. Requereix assenyalar segment. Posa el nom del punt, es dibuixarà enmig de la línia.
	Circumferència	Dibuixa una circumferència. Requereix assenyalar el punt que serà el centre, i un altre que delimitarà el radi de la circumferència.

	Compàs	Traslllada distàncies sobre una línia. Requereix assenyalar el punt que serà el centre del compàs. A continuació ens demana assenyalar un punt que amb l'inicial farà de radi del compàs. Finalment s'ha d'indicar quina línia de les que passen pel centre del compàs serà la que aquest tallarà. Després d'introduir el nom del punt que es crearà, apareixeran dos punts sobre la línia seleccionada, el primer amb el nom triat i el segon marcat amb una cometa (').
	Esborrar un objecte	Esborra només un objecte. Només s'ha prémer aquest botó, introduir el nom de l'objecte a esborrar i prémer la tecla return. No es poden esborrar punts que estiguin en alguna línia, primer s'ha d'esborrar aquesta línia.
	Esborrar la pissarra	Esborra tota la pissarra i també l'àrea de deduccions. Demana confirmació abans de procedir.

Taula 6.4.1. Botons de l'àrea de construcció gràfica

A més de tots aquests botons gràfics, l'alumne disposa, a l'àrea gràfica, d'un botó de cancel·lació, que en qualsevol moment li permet cancel·lar qualsevol creació d'objecte que hagi començat.

Amb tot això, les accions de l'alumne i reaccions de l'agent mediador de l'AgentGeom en la creació d'un objecte gràfic les podem resumir a la taula 6.4.2, en el qual mostrem que, en les construccions gràfiques, durant la resolució d'un problema, la creació d'un objecte (punt, recta, segment, paral·lela...) és una acció que l'alumne fa per iniciativa pròpia (acció proactiva). Aquesta acció, que es pot cancel·lar en qualsevol moment, pot tenir dues respostes per part de l'agent mediador.

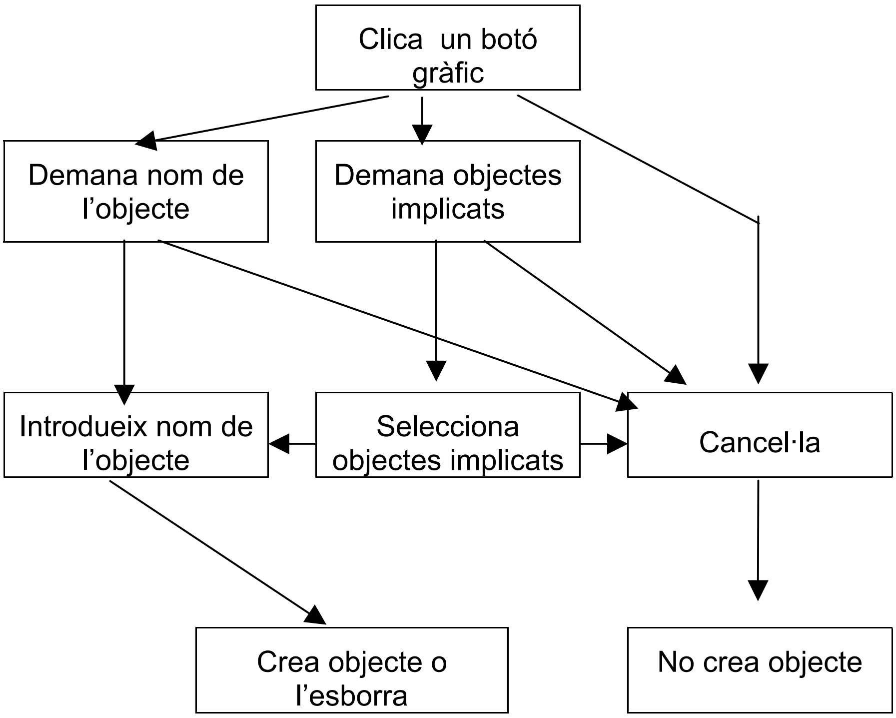
Una reacció proactiva pot ser o demanar el nom de l'objecte que es vol crear o bé demanar els objectes implicats en la seva construcció. En el primer cas, l'alumne introdueix el nom de l'objecte i el sistema dibuixa l'objecte en qüestió. En el segon cas, l'alumne introdueix el nom de l'objecte o objectes implicats i el sistema crea el nou objecte o esborra un ja existent.

6.4.3.2.Àrea de deduccions

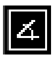
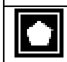
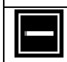
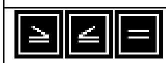
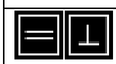
La part de la dreta de l'àrea de treball de l'alumne (figura 6.4.4) és la que hem anomenat àrea de deduccions. En la finestra més gran, la de dalt de tot, apareixen validades (en color negre) o no (en color vermell) totes les sentències que l'alumne va escrivint, en la següent finestra, sobre la figura que ha construït o està construint a l'àrea gràfica. En aquesta segona finestra, que l'hem anomenada finestra de crear deduccions, l'alumne escriurà les sentències deductives com si fossin regles, seguint una sintaxi molt senzilla que descrivim a continuació.

Perquè l'escriptura d'una sentència sigui correcta, la sintaxi ha de seguir un dels tres ordres següents: *Objecte, Nom, operador, Objecte, Nom; Objecte, Nom, operador, nombre; i Nombre, operador, nombre.*

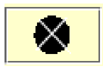
En la construcció de cada sentència ens poden ser útils tot un seguit de botons negres situats per sota de la finestra de procediments, la funcionalitat dels quals expliquem a la taula 6.4.3.



Taula 6.4.2. Accions de l’alumne i reaccions de l’agent mediador en la construcció d’un objecte gràfic.

	Objecte angle	A continuació d’aquest objecte s’ha d’escriure el nom de l’angle, mitjançant els punts que formen l’angle
	Objecte àrea	Després de l’objecte àrea s’han de posar els punts (vèrtexs) de la figura l’àrea de la qual és vol comparar. En lloc d’escriure els noms dels punts, també es poden assenyalar a la pissarra fins tancar una àrea.
	Objecte línia	Després de l’objecte línia s’ha de posar el nom de la línia o segment que volem comparar.
	Operadors: més gran, més petit o igual	Operadors aplicables a nombres i a objectes. Ens permeten saber si els nombres o objectes entrats en primer lloc són més grans o iguals, més petits o iguals, o iguals als entrats en segon lloc.
	Operadors paral·lela o perpendicular	Operadors aplicables només a objectes línia, i ens permeten saber si dues línies són o no paral·leles o perpendiculars.

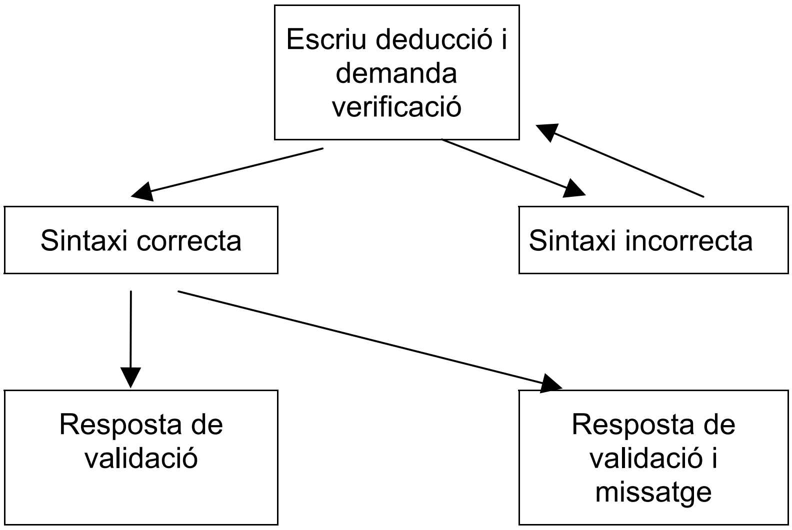
Taula 6.4.3. Botons d’objectes i operadors per a la construcció de les sentències deductives

Un cop introduïda la sentència per a validar-la només s’ha de prémer al botó . En qualsevol moment es pot esborrar la regla inserida amb el botó , situat al costat de la casella d’introduir regles.

Si pensem que la sentència introduïda és el resultat final del problema que estem resolent, només s'ha de prémer el botó i, igualment, el sistema validarà o no la nostra sentència.

A més, l'alumne pot reforçar la validació d'una sentència si tria una propietat o procediment de la llista que hi ha a la tercera finestra (finestra de procediments) d'aquesta àrea de deduccions. Aquesta propietat o procediment ha de fer certa la sentència escrita per l'alumne. En la finestra del tutor sortirà tant el resultat de la validació com si la regla segueix o no la propietat seleccionada per l'alumne.

Amb tot això, les accions de l'alumne i reaccions de l'agent mediador en la creació de sentències les podem resumir a la taula 6.4.4, en el qual mostrem que l'alumne escriu una sentència, d'acord amb les normes gramaticals que exigeix el sistema, i demanda validació. El sistema pot respondre amb una acció reactiva (validant o no la sentència) o reactiva i proactiva a la vegada: validant o no la sentència i llençant un missatge.



Taula 6.4.4. Accions de l'alumne i reaccions de l'agent mediador en la construcció de sentències deductives

6.4.3.3.Barra d'eines

En la part inferior de la finestra de l'àrea de treball de l'alumne es troba una barra d'eines (barra de color marró) amb diferents botons:

a) Aquest botó obre la finestra del Tutor.

En aquesta finestra es mostraran les sentències deductives que l'alumne vagi introduint al llarg de la resolució del problema i les seves validacions o no, i els missatges que el sistema li envia per a ajudar-lo en la seva resolució (figura 6.4.6).

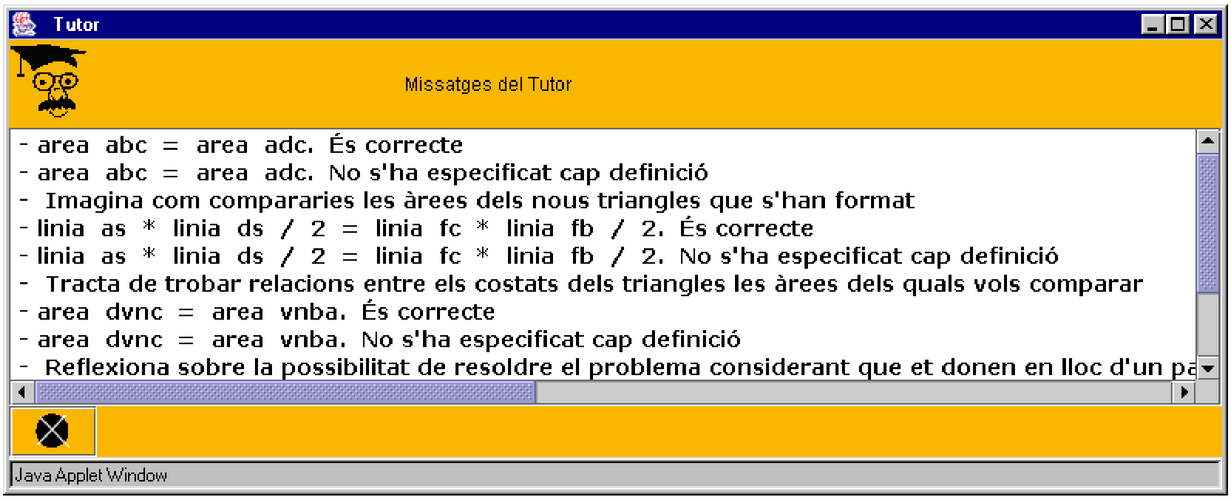
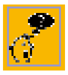


Figura 6.4.6. Finestra del Tutor

b)  Aquest botó serveix per a demanar un missatge nou.

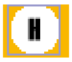
Quan l'alumne està bloquejat i no sap com continuar la resolució del problema, té la possibilitat de demanar un missatge que l'ajudi a desbloquejar la situació. Si prem aquest botó, l'AgentGeom obre la finestra del Tutor (figura 6.4.6) i, al final de tota la informació que conté, li mostra el missatge demanat.

c)  Aquest botó obre la finestra de l'enunciat del problema.

En aquesta finestra es mostra l'enunciat complet del problema que ha de intentar resoldre l'alumne i la figura o figures auxiliars (figura 6.4.7).

d)  Carrega una construcció inicial proposada pel professor si està disponible.

Aquest botó dóna la possibilitat a l'alumne de carregar la figura associada a l'enunciat del problema sobre la pissarra de l'àrea de construcció gràfica, sempre que professor així ho estimi oportú i prèviament l'hagi construït perquè estigui disponible.

e)  Aquest botó obre la finestra de l'historial de l'alumne.

Aquest botó obre la finestra de l'historial de l'alumne (figura 6.4.8), en la qual es mostren totes les accions que l'alumne ha realitzat, tant gràfiques com deductives, així com les reaccions del Tutor, sigui en forma de validacions o no de les sentències introduïdes per l'alumne o els missatges que el tutor envia a l'alumne, demanats o no per aquest, i si les accions són reconegudes o no pel sistema. A més podem veure la data i hora en les quals l'alumne ha estat resolent el problema. Aquest historial, completat amb la informació rebuda de l'enregistrament de tots els esdeveniments de pantalla realitzat pel programa Flash Cam, és la informació que fem servir al capítol 8 per a analitzar les actuacions dels alumnes en la resolució dels problemes.

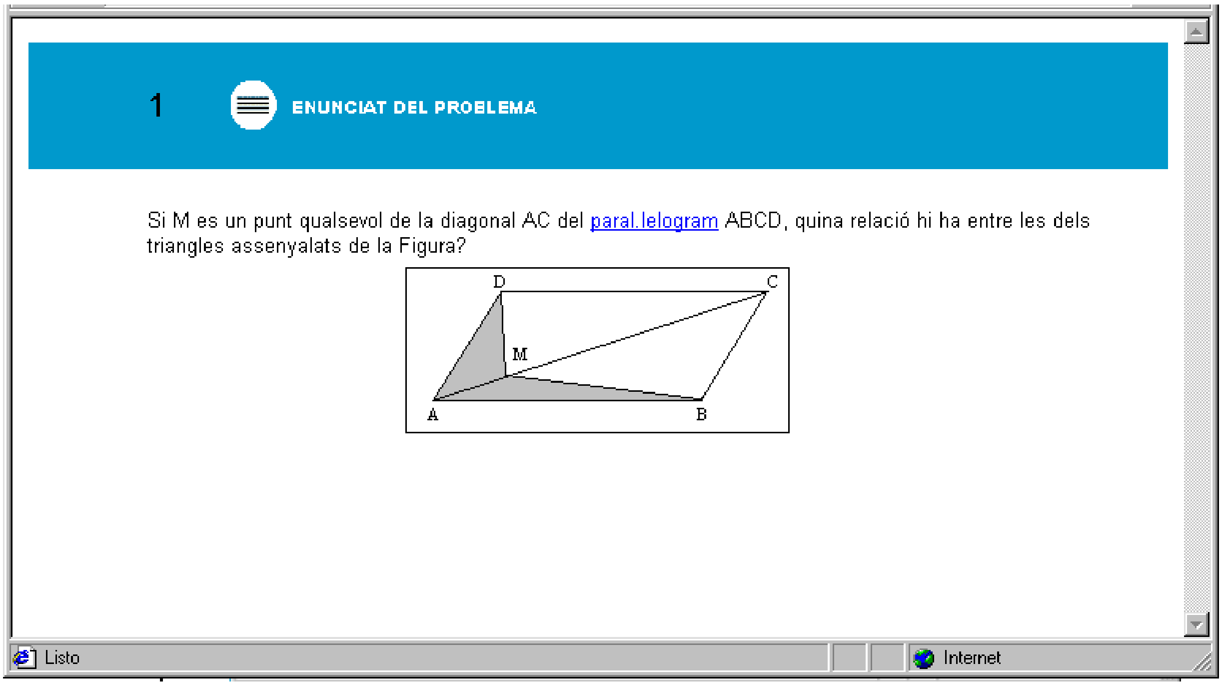
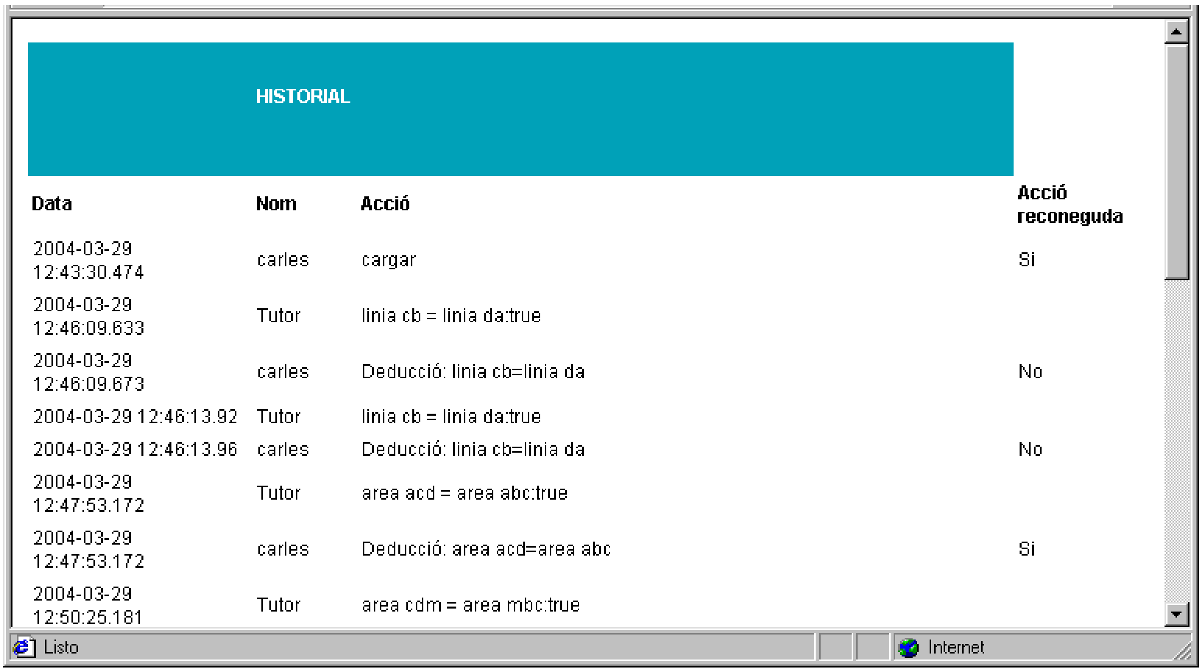


Figura 6.4.7. Finestra de l'enunciat del problema


HISTORIAL

Data	Nom	Acció	Acció reconeguda
2004-03-29 12:43:30.474	carles	cargar	Si
2004-03-29 12:46:09.633	Tutor	linia cb = linia da:true	
2004-03-29 12:46:09.673	carles	Deducció: linia cb=linia da	No
2004-03-29 12:46:13.92	Tutor	linia cb = linia da:true	
2004-03-29 12:46:13.96	carles	Deducció: linia cb=linia da	No
2004-03-29 12:47:53.172	Tutor	area acd = area abc:true	
2004-03-29 12:47:53.172	carles	Deducció: area acd=area abc	Si
2004-03-29 12:50:25.181	Tutor	area cdm = area mbc:true	

Listo
Internet

Figura 6.4.8. Finestra de l'historial de l'alumne

f) Comparteix els resultats en un fòrum amb d'altres alumnes.

Aquest botó obre una finestra des de la qual l'alumne podrà enviar al fòrum de debat amb els seus companys i amb professor les aportacions que ha fet en la resolució del problema que està resolent (figura 6.4.9). Normalment, els enviaments que fan els alumnes estan relacionats amb la fase de verificació de la resolució que ha fet del problema resolt perquè en aquesta fase, l'AgentGeom fa a l'alumne una pregunta relacionada amb reflexions sobre tot el procés que ha seguit, i el convida a enviar al fòrum la seva resposta.

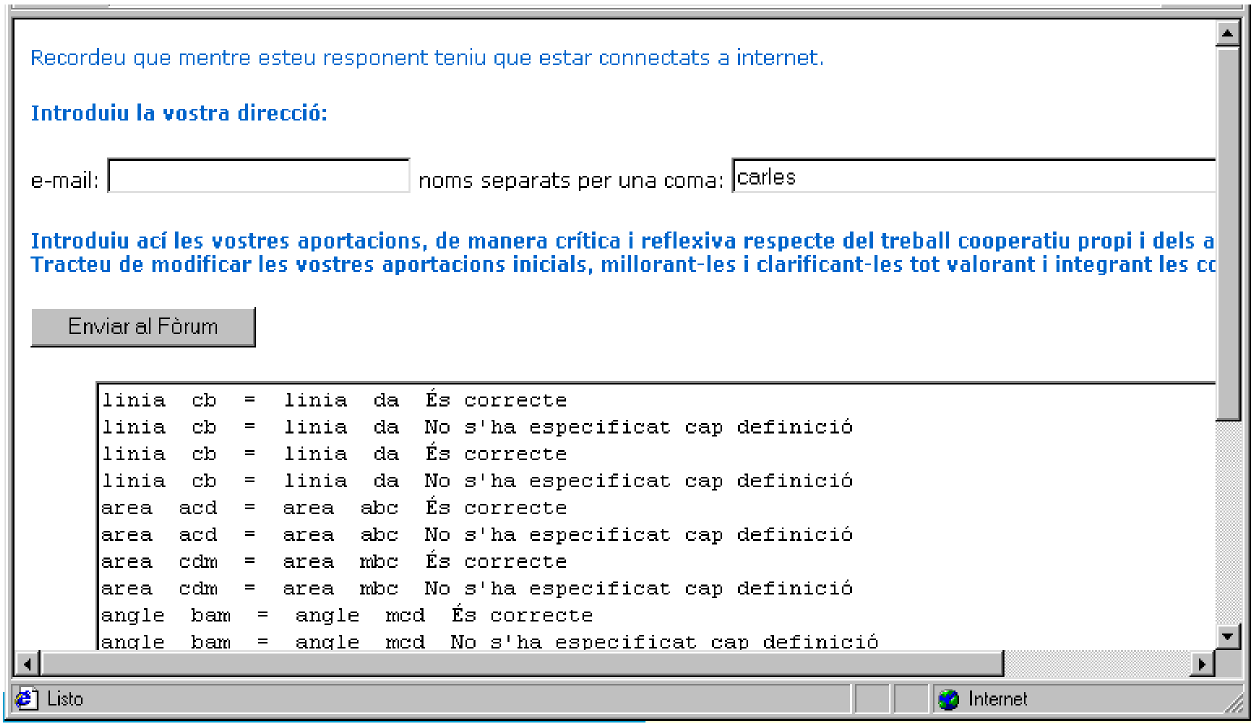


Figura 6.4.9. Finestra per a enviar al fòrum les aportacions que l'alumne ha fet sobre el problema que està resolent

g) Obre un saló de xat per a parlar amb altres alumnes.

h) Desa la sessió de l'alumne.

Tot el que l'alumne guardi serà carregat automàticament la següent vegada que l'alumne torni a entrar en el mateix problema.

6.4.4. Pantalla de l'àrea de treball del professor

En aquesta àrea el professor podrà editar problemes, crear-ne de nous, assignar-los als seus alumnes, visualitzar l'historial de cada alumne, etc.

La primera pantalla que surt en entrar a l'àrea de treball del professor és la que mostrem a la figura 6.4.10.

En aquesta pantalla, situada a dalt a l'esquerra, hi ha un menú desplegable on apareixen numerats tots els problemes disponibles per al professor. Si seleccionem un nombre, a la finestra del costat, retolada "Títol del problema", surt el nom que li hem posat al problema en qüestió. Al mateix temps, a la finestra retolada "Enunciat del problema" surt l'enunciat del problema que hem seleccionat. També al mateix temps, a la finestra gran de la dreta (de color blau fosc) –retolada "Imatge"-, surt una imatge.gif, que és la que representa la figura que té associat l'enunciat del problema.

Prement al botó "Nou" que hi ha al costat del menú desplegable queden en blanc tots els camps, de tal forma que en omplir-los podem crear un problema nou que apareixerà a la zona d'enunciat de l'alumne un cop assignat a aquest.

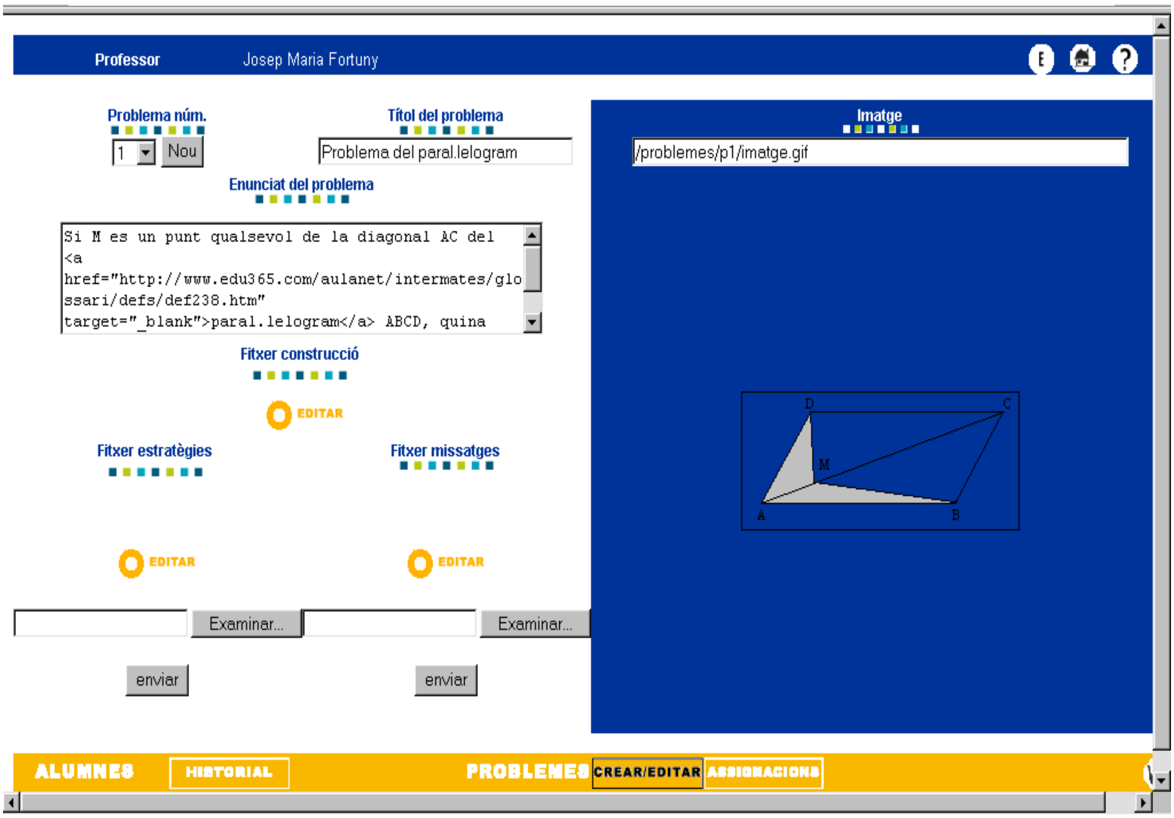


Figura 6.4.9. Pantalla de l'àrea de treball del professor

A la part superior dreta d'aquesta pantalla hi ha tres icones, dues d'elles –la icona de la casa i la de l'ajuda tenen la mateixa funció que en la pantalla de selecció del problema per part de l'alumne (veure l'apartat 6.4.2 i la figura 6.4.2). En canvi, ací apareix una nova icona  que permet visualitzar tots els missatges corresponents a totes les estratègies implementades del problema que hi ha seleccionat al menú desplegable, el nom del qual apareix a la finestra del "Títol del problema". A la figura 6.4.11 podem veure els missatges corresponents a les estratègies del problema del paral·lelogram.

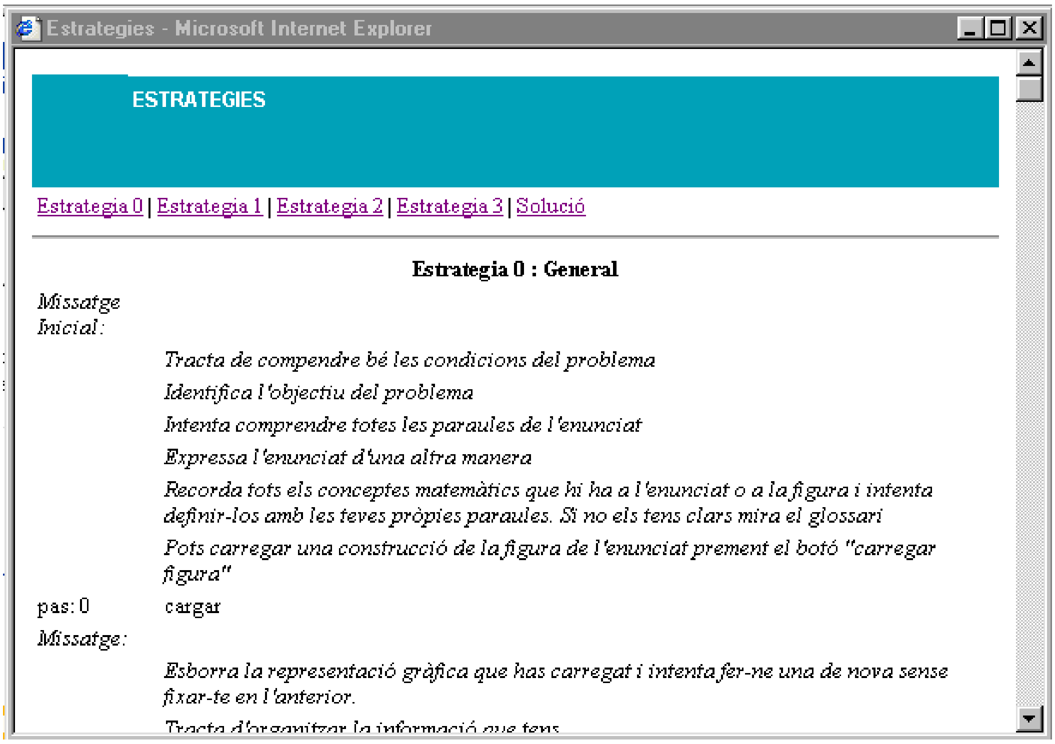


Figura 6.4.11. Sistema de missatges corresponents a les estratègies implementades del problema del paral·lelogram

6.4.4.1.Fitxer de construcció

Prement el botó "EDITAR" del fitxer de construcció de l'àrea de treball del professor (figura 6.4.10) accedim a una pantalla d'edició de construccions geomètriques (figura 6.4.12).

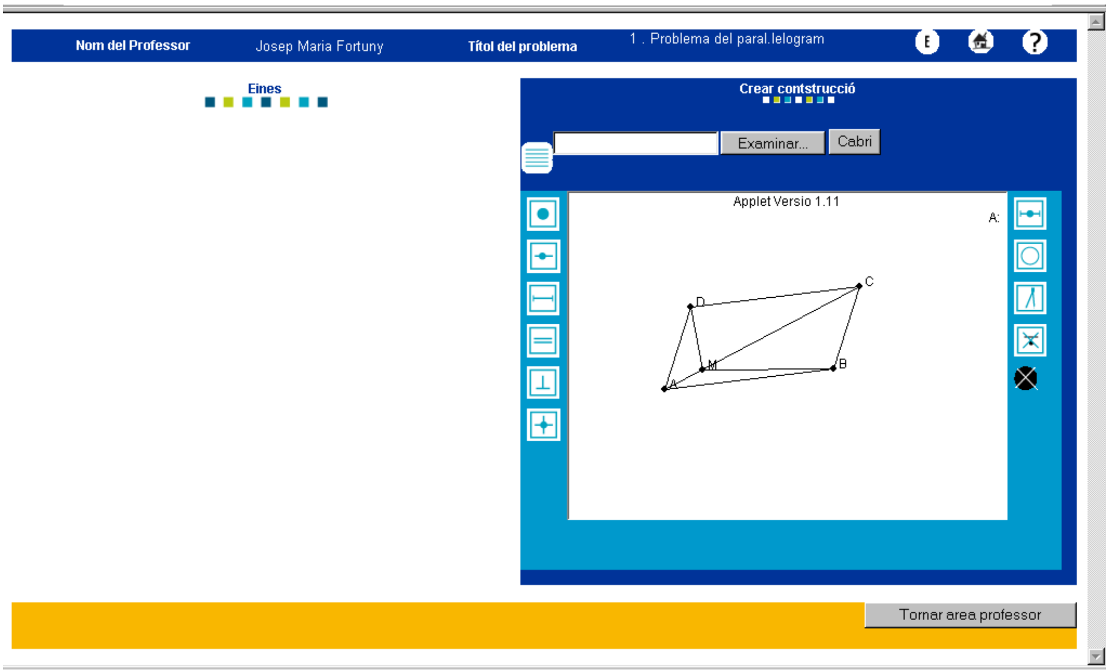


Figura 6.4.12. Àrea de construcció gràfica del professor

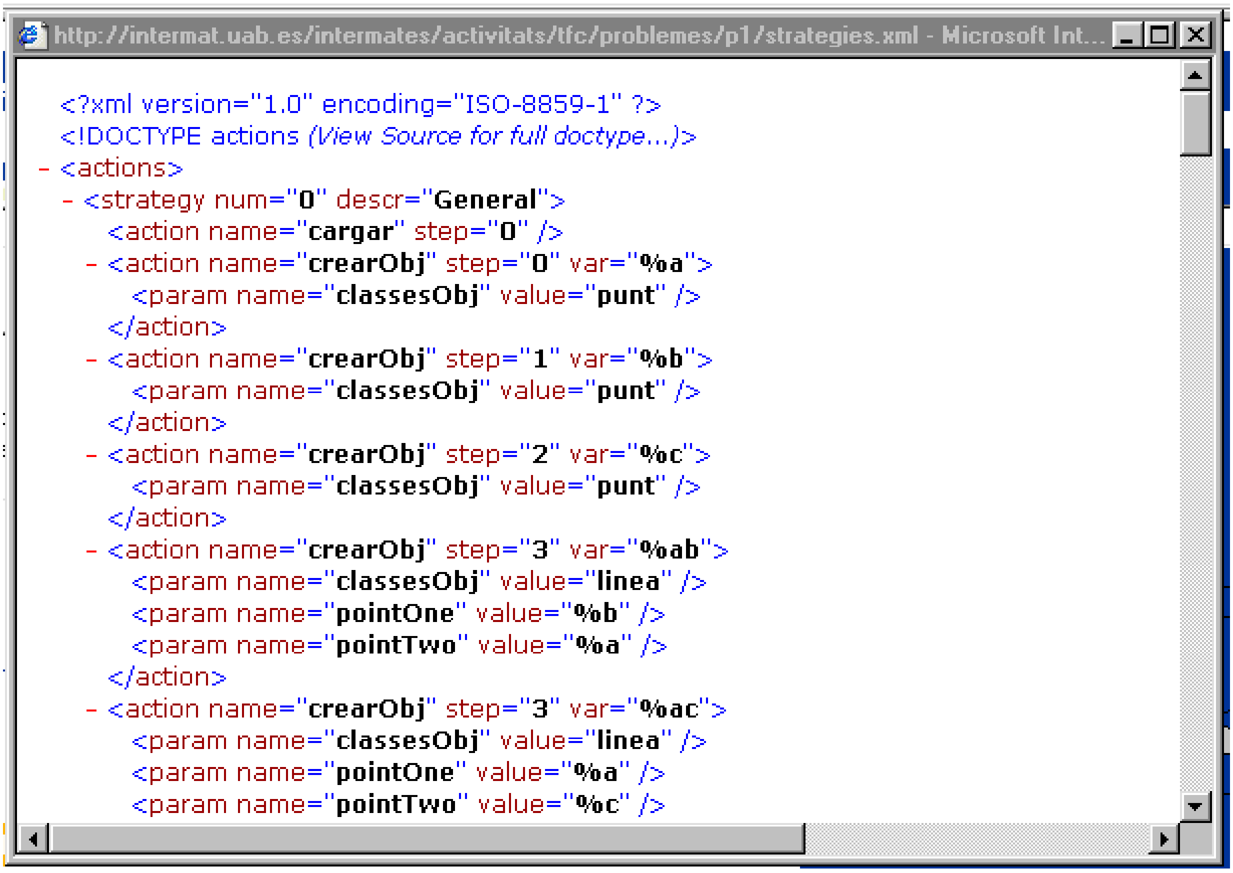
Aquesta pantalla de construccions gràfiques és similar a la que disposa l'alumne per a fer les seves construccions gràfiques (figura 6.4.4). Disposa de les mateixes icones de construcció, que funcionen de la mateixa forma. El seu funcionament es pot consultar en la Taula 6.4.1.

La finalitat d'aquesta pantalla gràfica és que el professor pugui crear les construccions que cregui necessàries per a ajudar l'alumne en el procés de resolució. Normalment es fa servir perquè l'alumne pugui carregar la figura que l'enunciat tingui associada, que el professor prèviament ha de construir i associar al problema corresponent. A més, en aquest cas, l'aplicació és capaç d'exportar fitxers cabri senzills al format de creació gràfica de l'AgentGeom.

6.4.4.2.Fitxer d'estratègies

Exporta fitxers XML que continguin la sintaxi correcta per a definir les estratègies de resolució de cada problema.

Aquests fitxers són interpretats per l'AgentGeom i permeten al tutor virtual conèixer l'estratègia de resolució del problema proposat. Amb aquest fitxer l'AgentGeom pot saber en quin moment del procés de resolució es troba l'alumne i decidir els missatges d'ajuda a enviar a l'alumne (figura 6.4.13).




```
<?xml version="1.0" encoding="ISO-8859-1" ?>
<!DOCTYPE actions (View Source for full doctype...)>
- <actions>
  - <strategy num="0" descr="General">
      <action name="cargar" step="0" />
    - <action name="crearObj" step="0" var="%a">
        <param name="classesObj" value="punt" />
      </action>
    - <action name="crearObj" step="1" var="%b">
        <param name="classesObj" value="punt" />
      </action>
    - <action name="crearObj" step="2" var="%c">
        <param name="classesObj" value="punt" />
      </action>
    - <action name="crearObj" step="3" var="%ab">
        <param name="classesObj" value="linea" />
        <param name="pointOne" value="%b" />
        <param name="pointTwo" value="%a" />
      </action>
    - <action name="crearObj" step="3" var="%ac">
        <param name="classesObj" value="linea" />
        <param name="pointOne" value="%a" />
        <param name="pointTwo" value="%c" />
```


Figura 6.4.13. Part del Fitxer XML d'estratègies de resolució del problema del paral·lelogram

6.4.4.3.Fitxer de missatges

Exporta fitxers XML que continguin la sintaxi correcta per a definir els missatges que el tutor anirà mostrant a l'alumne al llarg de la resolució de cada problema (figura 6.4.14). El funcionament de l'emissió de missatges que fa l'agent tutor l'hem mostrat a l'apartat 6.2.

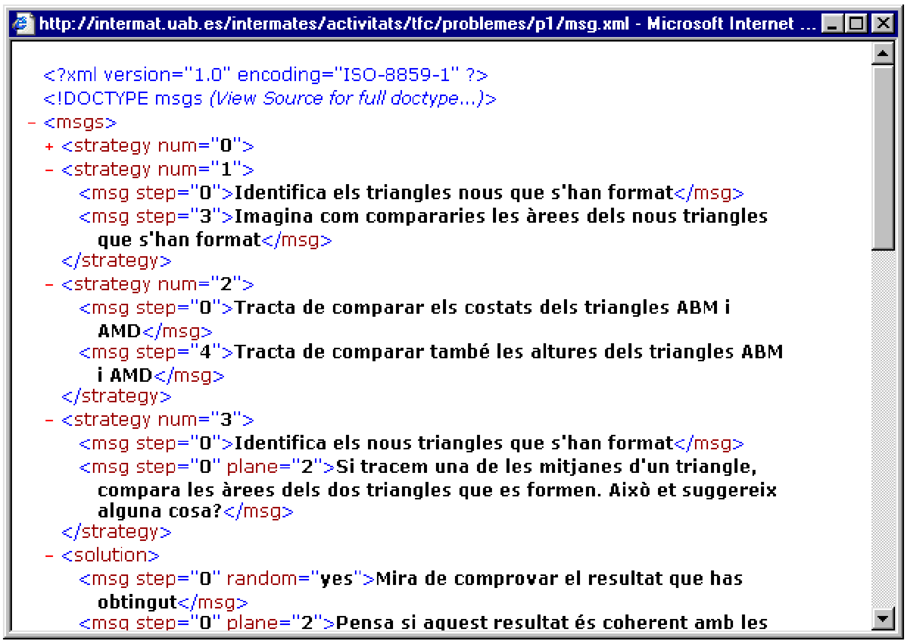


Figura 6.4.14. Part del Fitxer XML de missatges corresponents a la resolució del problema del paral·lelogram

En la barra d'eines de la part inferior de l'àrea de treball del professor (figura 6.4.10) hi ha dos botons que volem destacar: el d'assignació de problemes i el de l'historial de l'alumne.

6.4.4.4.Pàgina d'assignació de problemes

Prement el botó "ASSIGNACIONS" de la barra d'eines de l'àrea de treball del professor obrim una finestra com la que mostrem a la figura 6.4.15. Des d'aquesta pantalla el professor pot assignar cada un dels problemes als seus alumnes, només seleccionant l'alumne, el títol del problema i prémer el botó "ASSIGNAR". Immediatament sortirà, on diu "Assignacions", el nom de l'alumne i els problemes que té assignats. De la mateixa manera, podem esborrar l'assignació d'un problema a un alumne prement la icona esborrar (a sota del d'assignar).

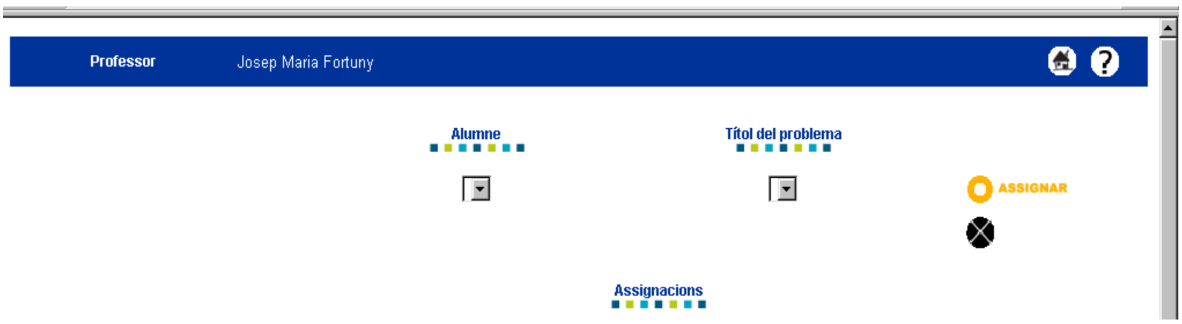
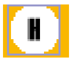


Figura 6.4.15. Finestra d'assignació de problemes

6.4.4.5.Pàgina de l'historial de l'alumne

Prement el botó "HISTORIAL" de la barra d'eines de l'àrea de treball del professor obrim una finestra com la que mostrem a la figura 6.4.16. Des d'aquesta pantalla el professor pot seleccionar un alumne i un problema que hagi resolt (o estigui resolent) aquest alumne, i visualitzarà el seu historial de resolució amb el mateix contingut que sortia en prémer al botó  de la pantalla treball de l'alumne (veure l'apartat 6.4.3.3, e, i la figura 6.4.8).

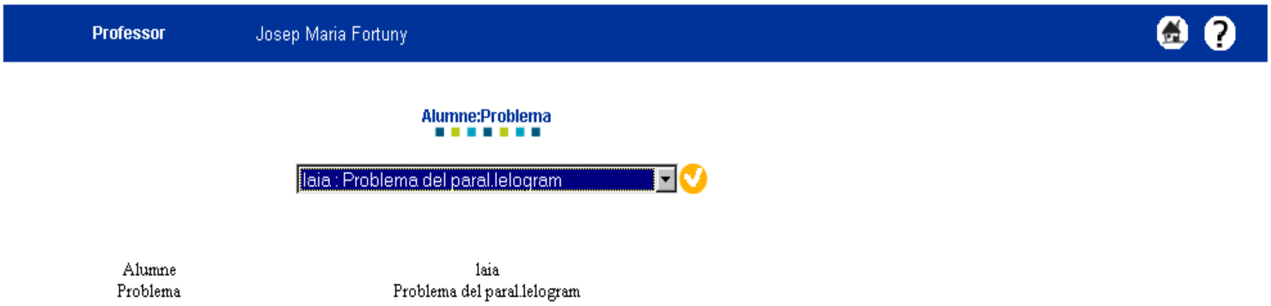


Figura 6.4.16. Finestra de selecció de l'historial de la resolució d'un problema per un alumne

CAPÍTOL 7

EXPERIMENTACIÓ AMB L'AGENTGEOM. IDENTIFICACIÓ D'INTERACCIONS ALUMNE-AGENT TUTOR

7.1. Introducció

En aquest capítol experimentem amb l'AgentGeom per a estudiar la seva aplicabilitat i efectivitat. Per això, mostrem de quina manera tres alumnes d'ensenyament secundari poden apropiar-se d'habilitats geomètriques a través de les interaccions amb l'AgentGeom quan resolen problemes de matemàtiques. Aquestes habilitats es refereixen no només a les competències estratègiques involucrades en la resolució de problemes, sinó també a l'aprenentatge de la demostració matemàtica en geometria. En aquesta experimentació analitzem l'evolució de les esmentades interaccions, tenint en compte els missatges estratègics de l'agent tutor en un procés argumentatiu que considera conjuntament les accions significatives de l'alumne, el significat de les proposicions associades amb el descobriment de conjectures i la realització de demostracions.

Per a fer les anàlisis que pretenem, prenem com a punt de partida els models d'interaccions de Cobo i Fortuny (2000), i de Kieran (2001), i la noció d'apropiació de Moschovich (2004). Les interaccions del primer model són compatibles amb la dialèctica de Lakatos (1984), en el sentit que poden relacionar la formulació d'una conjectura, el procés d'argumentació, l'organització del coneixement o la forma de raonar. Són de quatre tipus: *"guiades",* en les quals els requeriments i desafiaments d'un alumne obliguen el seu company a explicar els seus pensaments; *"alternatives"*, caracteritzades pel relleu en la successió dels papers comunicatius dels alumnes que, junt amb les contribucions que fa cadascun, contribueixen al progrés del procés de resolució; *"rellançament",* caracteritzades perquè la realització de preguntes i les aportacions d'informacions donen una orientació nova al diàleg; i *"cooperatives"*, en les quals els alumnes contribueixen per igual al desenvolupament del procés de resolució i comparteixen els significats de les aportacions que fan.

El segon model d'interaccions fa possible identificar, en un procés de resolució entre parelles d'alumnes, si la producció cognitiva i heurística és del mateix ordre, és a dir, si els interlocutors raonen sobre els mateixos objectes, contribueixen a la formulació o demostració de la mateixa conjectura, i si les seves iniciatives o les seves reaccions es separen en el procés argumentatiu.

Per altra banda, l'apropiació és un concepte neovygotskià que ha estat utilitzat per a descriure de quina forma l'aprenentatge és mediat per la interacció amb d'altres i de quina manera els alumnes aprenen quan els adults els guien i els ensenyen (Newman i altres, 1989; Rogoff, 1990; Wells, 1999; Radford, 2001; i Moschkovich, 2004). Aquesta perspectiva sociocultural que fem servir en aquesta experimentació considera dos aspectes de l'apropiació: un està relacionat amb el que els alumnes s'apropien i l'altre, amb la forma en què transformen activament aquestes apropiacions. Així doncs, descriurem com els alumnes s'apropien de formes de veure la demostració, com seqüències de sentències que són validades en base a una representació figural abstracta, com reaccionen als missatges de l'agent tutor, les formes d'utilització de les àrees gràfica i deductiva de l'AgentGeom i la seva influència en el desenvolupament del procés argumentatiu, etc.

El tipus d'interaccions que ens interessa són de naturalesa discursiva (intercanvis de missatges expressats en llenguatge natural o simbòlic) o gràfica (intercanvis de missatges expressats en el registre de les figures geomètriques) entre alumnes i l'AgenGeom. Així doncs, en aquest capítol mostrem de quina forma evolucionen les interaccions dels alumnes amb el sistema tutorial artificial AgentGeom des de la senzilla utilització del sistema com a eina gràfica fins a la utilització compartida de les àrees gràfica i deductiva en la generació de processos argumentatius.

Recordem que l''AgentGeom simula la conducta d'un tutor humà i té tres característiques bàsiques: autonomia, en el sentit que és capaç de comportaments qualificables d'espontanis, té una certa iniciativa proactiva, i proporciona als seus usuaris activitats i els ajuda a resoldre-les. A més, és un sistema tutorial que combina interfícies, utilitzades pels usuaris del sistema (professors i alumnes), amb dos agents artificials: l'agent tutor, que té una arquitectura principalment reactiva i que envia missatges d'ajuda a l'alumne, i l'agent mediador, que rep les entrades de les interfícies de l'alumne i del professor i valida les accions de l'alumne.

A través de la seva interfície de comunicació amb l'alumne, l'agent mediador permet la construcció de figures en un àrea gràfica, gestiona la construcció correcta de la sintaxi de les sentències que l'alumne introdueix a l'editor de deduccions, i determina i mostra si la sentència és correcta o incorrecta. De la mateixa manera, l'agent mediador facilita al professor, a través de la seva interfície, la creació de nous problemes, la seva assignació als alumnes que consideri, la proposta del sistema de missatges que l'agent tutor enviarà als alumnes durant la resolució de cada problema, i la possibilitat de repassar els historials de les resolucions que fan els alumnes per a observar si han avançat suficientment en la resolució del problema i per a comunicar-se amb ells quan estimi oportú.

7.2. Aspectes de l'anàlisi del procés cognitiu dels alumnes en la seva interacció amb l'agent tutor

Aquesta secció resumeix les bases de la micro-anàlisi dels processos de resolució i proporciona un marc teòric de referència de les interaccions entre l'alumne, l'agent tutor i l'àrea de treball, per a analitzar detalladament de quina forma l'apropiació es va produint durant aquestes interaccions, i com els alumnes són actius en l'apropiació d'habilitats de demostració.

7.2.1. Aspectes de la micro-anàlisi

Sent més precisos, els aspectes a tenir en compte seran els següents:

a) Estudiar la utilització de les àrees gràfica i deductiva, és a dir, les diferents fases en les quals l'alumne fa servir una i l'altra, mitjançant accions gràfiques (carrega la figura de l'enunciat, crea objectes, que poden ser punts, segments, paral·leles, perpendiculars, intersecció..., esborra objectes, anomena objectes, etc.), i deductives (escriu deduccions, demanda de verificació de deducció, demanda de verificació del resultat final, demanda d'esborrar deduccions, etc.). Així com les utilitzacions i progressions de coneixements en cada una d'aquestes fases i la seva evolució. Particularment, considerem aquest punt en la seva relació amb els punts següents.

b) Estudiar el caràcter proactiu o reactiu de les intervencions dels alumnes i la seva influència en el procés de resolució. Una acció és:

- Proactiva si és d'iniciativa pròpia de l'alumne i no espera cap informació de l'agent tutor que no sigui una resposta de validació a una acció deductiva o una resposta gràfica a una acció gràfica, excepte quan la demanda sigui d'un missatge.

- Reactiva si és reacció de l'alumne a un suggeriment (missatge) de l'agent tutor en la línia marcada per aquest missatge.

c) Estudiar la influència que els missatges de l'agent tutor han tingut en l'alumne, per exemple, si ha seguit els suggeriments de l'agent tutor i si d'aquest seguiment s'ha beneficiat l'alumne, o si, pel contrari, no n'ha fet cas i ha seguit les seves pròpies iniciatives. Aquesta influència ha estat examinada segons els tres nivells de missatges de l'agent tutor:

- Nivell 0: suggeriments o missatges generals que no inclouen continguts matemàtics implicats en la resolució del problema. Informacions que els alumnes poden trobar directament a la seva àrea de treball (reconeixements d'objectes, elements de la finestra de procediments...).
- Nivell 1: suggeriments o missatges que només contenen el nom dels continguts matemàtics involucrats.
- Nivell 2: suggeriments o missatges que contenen informacions sobre aquests continguts matemàtics.

L'objectiu últim per a l'alumne en la resolució del problema és exercir el significat dels seus coneixements perquè aquests romanguin coherent al final del procés de resolució, almenys en la lògica de la situació proposada. Aleshores, l'agent tutor pot orientar l'alumne perquè el que veu, el que diu o el que fa resti dins d'aquesta lògica. Malgrat això, per al nostre agent tutor, la lògica en qüestió està explícitament dirigida per l'espai bàsic del problema, ja que els missatges de l'agent tutor han estat concebuts en relació a aquest espai. Dit d'una altra forma, es tracta de focalitzar l'atenció de l'alumne, d'assegurar el significat d'una proposició ambigua o de verificar si l'alumne s'encamina cap l'objectiu previst. Donat el mètode que nosaltres hem utilitzat per a crear els missatges, es pot fàcilment admetre que l'alumne ha adquirit efectivament un coneixement al finalitzar el procés de resolució. Però per tal d'evitar que aquest coneixement sigui adquirit només durant la descripció discursiva o en la construcció d'una figura que resulta de l'àrea gràfica, demanem a l'alumne produir-la conjuntament amb inferències deductives basades en l'àrea gràfica.

7.2.2. Capes d'accions/interaccions

Si el progrés cognitiu de l'alumne ha de ser avaluat considerant el tractament de les dues àrees, aleshores ha de ser també avaluat integrant les interaccions de l'agent tutor amb l'alumne. Per això, considerem tres capes d'accions/interaccions que constitueixen el fonament de la nostra anàlisi: les *accions significatives* de l'alumne a través de la interfície, enregistrades pel sistema, el *discurs de l'alumne* i la *mediació del "medi social"* amb el tutor artificial.

Aquestes tres capes d'accions/interaccions estan connectades entre elles, és a dir, la informació que és en una capa pot necessàriament interpretar la informació que és en una altra capa. Per exemple, els continguts de les accions significatives poden haver-se d'explicar tenint en compte la interacció amb l'agent tutor, ja que una està mediada per les interaccions socials simulades; les accions significatives poden haver-se d'explicar per comparació amb el discurs de l'alumne, ja que aquest revela la seva estratègia i l'objectiu de les seves accions. Així, l'anàlisi està basada en la comprovació creuada d'aquestes tres capes.

a) Primera capa: les accions significatives o la utilització conjunta de l'àrea gràfica i l'àrea deductiva enfocades cap a el progrés cognitiu

Per a ser capaç de comunicar-se amb la interfície, l'alumne crea proposicions gràfiques (elements de figures: punts, segments, línies rectes, etc.) i proposicions deductives (escriu deduccions, demanda de verificació de deducció, demanda de verificació del resultat final, demanda d'esborrar deduccions, etc.) a través dels botons. El sistema transforma les proposicions gràfiques en proposicions deductives de forma que poden ser utilitzades com a premisses per a produir inferències, utilitzant un menú que conté les normes de deducció. Definim les accions significatives com aquelles que es refereixen a l'escriptura de les proposicions; la història d'aquestes accions estableixen l'extensió discursiu-gràfica de l'alumne (veure la capa següent).

Abans d'abordar la capa següent , hem de fer una precisió essencial sobre la història de les accions significatives de l'alumne. Aquestes accions són enregistrades pel sistema a la vegada que les intervencions de l'agent tutor, com en un joc (producció teatral). Això vol dir que el sistema reté, al mateix temps, les accions de l'alumne i els missatges de l'agent tutor en el seu ordre d'aparició (veure annexos1, 2 i 3). Això ens condueix a diferenciar, del discurs de l'alumne, el que Kieran (2001) anomena *"canal de comunicació": "l'anàlisi de la interactivitat tracta sobre com els participants d'una conversa es mouen entre diferents canals de comunicació (personals i interpresonals) i diferents nivells de parla (object-level i non-object-level). Observem que el canal personal de comunicació no s'ha de confondre amb el discurs privat. El discurs privat es refereix al pensament, mentre que el canal personal consisteix de totes les declaracions que un interlocutor sembla dirigir més a ell mateix que al seu company."* (pàg. 194).

Malgrat això, contrari a l'aproximació discursiva de Kieran i debut a la naturalesa geomètrica de l'activitat, integrem les proposicions gràfiques en l'estructura discursiva de les interaccions. Fins i tot, si les proposicions gràfiques són enregistrades discursivament pel sistema, elles preserven el seu status "gràfic" perquè l'alumne les crea en el registre semiòtic de representació de les figures. Conseqüentment, si totes les proposicions gràfiques (o discursives) pertanyen al canal de comunicació, certes proposicions gràfiques (o discursives) no poden referir-se al progrés cognitiu en el procés de resolució. En particular, les proposicions que pertanyen a un acte incomplet d'exploració, com quan l'alumne dibuixa una línia recta i l'esborra, sent aquesta acció un tipus "d'autorrefutació".

b) Segona capa: el discurs de l'alumne

En aquesta capa, ens interessem pel progrés cognitiu que sorgeix de l'extensió discursiu-gràfica de l'alumne, referida al moment de l'espai bàsic del problema en el qual es troba l'alumne, i considerant l'àrea deductiva, que fa possible la producció ben formada de les deduccions, com una part de l'extensió discursiu-gràfica que és raonament.

Quan la intervenció de l'alumne suposa un progrés cognitiu en l'extensió discusiu-gràfica -és a dir, introducció de procediments o nous continguts matemàtics, demandes d'informació i de validació a l'agent tutor...- diem que és del tipus progressiva. Pel contrari, si la intervenció de l'alumne no aporta cap informació nova en l'extensió discursiu-gràfica (esborrat d'objectes, accions gràfiques o deductives no acabades, etc.), diem que és del tipus circular o repetitiva.

c) Tercera capa: la mediació del "medi social"

En la nostra aproximació, els tipus de passos de l'alumne estan intrínsecament relacionats, per una banda, amb l'ús del llenguatge (gràfic i discursiu) i, per l'altra, amb les accions sobre la interfície. Així, l'alumne pot prendre la iniciativa en el procés de resolució, però també reaccionar a un suggeriment de l'agent tutor, relacionat amb un missatge o a la validació d'una sentència ben formada d'una acció significativa.

A més, l'agent tutor pot prendre part en un procés argumentatiu amb l'alumne per a assegurar la progressió de l'extensió discursiu-gràfica de l'alumne comparada amb l'espai bàsic del problema, tractant de reorientar l'alumne quan el desenvolupament de la seva estratègia es troba en un punt mort.

Malgrat que el medi sorgeix d'aquesta comunicació, estrictament parlant, com un medi adidàctic, segons el significat de Brousseau (1998), el sistema simula, de fet, un medi didàctic en el qual l'agent tutor ocupa certs deures típics de comunicació amb l'alumne.

7.3. Experimentació amb l'AgentGeom: apropiació d'habilitats geomètriques de demostració i estratègiques sobre resolució de problemes

Aquest estudi de casos descriu la forma en la qual els alumnes poden aprendre de l'AgentGeom participant en resolució conjunta d'un problema geomètric. Ells s'apropien d'aspectes matemàtics com són els que tenen a veure amb les estratègies heurístiques involucrades en la resolució del problema; els de concebre el que és una demostració matemàtica, apreciant quan la producció d'un seguit de sentències, que li fa visible el sistema, és ja suficient per a ser considerada com a solució; els relacionats amb la forma de redactar i validar les sentències que s'infereixen des de la representació figural de l'enunciat del problema; i els associats a les reaccions dels missatges de l'agent tutor, canviant, si cal, d'enfocament en la resolució del problema.

7.3.1. Tasques i condicions d'observació

En els paràgrafs següents resumim breument les característiques del problema que hem implementat i la forma de recollir les dades, que ens permetran identificar i analitzar les interaccions de l'alumne amb l'AgentGeom i els beneficis cognitius que es deriven d'aquestes interaccions.

Hem seleccionat un problema sobre càlcul i comparació d'àrees de figures planes que hem anomenat problema del paral·lelogram (figura 7.3.1) , i que té dues característiques que el fan adient per a la seva implementació en l'AgentGeom: per una banda, és possible abordar la seva resolució de diferents formes i, per l'altra, és susceptible de ser resolt combinant components gràfiques i deductives.

Si m[3] és un punt qualsevol de la diagonal ac del paral·lelogram abcd, quina relació hi ha entre les àrees dels triangles "abm" i "amd"?

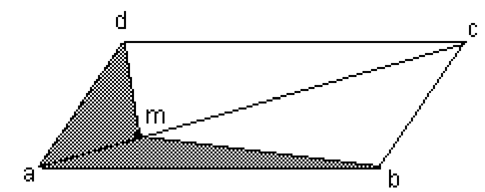


Figura 7.3.1

A partir de la construcció del seu espai bàsic (veure el capítol 4, pàg. 61), hem analitzat en profunditat les característiques d'aquest problema, identificant els continguts conceptuals i procedimentals involucrats en la seva resolució, així com totes les possibles accions gràfiques i deductives que un alumne pugui fer per arribar a solucionar el problema (veure el capítol 5, pàgs. 75-82).
En aquestes condicions, s'explica detalladament el funcionament de l'AgentGeom a cadascun dels alumnes que participen en l'experimentació, i se'ls demana que intentin resoldre el problema del paral·lelogram amb l'ajuda de l'agent tutor. Les dades d'aquesta resolució queden enregistrades a l'historial de l'alumne. A partir d'aquest historial i de les

[3] Fem servir lletres minúscules per a identificar els vèrtexs del paral·lelogram i dels triangles perquè així les hem implementat a l'àrea gràfica de l'AgentGeom.

transcripcions dels enregistraments de tots els esdeveniments de pantalla realitzades amb el software Flash Cam[4] obtenim els protocols escrits que mostrem als Annexos 1, 2 i 3, i que fem servir en la caracterització dels models d' interaccions.

7.3.2. El cas del Gerard

En els paràgrafs següents resumim les característiques d'un dels alumnes que participen en l'experimentació, al que hem anomenat Gerard.

El Gerard és un alumne de 16 anys que fa primer de primer curs de batxillerat en un institut d'educació secundària.

En Gerard no ha seguit cap aprenentatge específic sobre la resolució de problemes, pel contrari, l'ensenyament d'aquest tòpic sempre se li ha enfocat des d'un punt de vista de la resolució d'exercicis o problemes d'aplicació els continguts matemàtics dels quals acaben de ser explicats pel professor. La metodologia de treball que s'ha seguit en la classe a la qual pertany el Gerard combina fases expositives del professor amb una àmplia proposta de activitats que els alumnes realitzen en grups de dos o tres companys -poques vegades treballen individualment-, on tenen un ampli grau de llibertat per a comentar les activitats.

El Gerard i els seus companys fan servir amb certa freqüència l'ordinador a les classes -sempre treballant en grups petits-, realitzant activitats estructurades i guiades, i sempre associades als continguts matemàtics que es pretén ensenyar, per tant, no tenen experiència en enfrontar-se de forma individual i amb un alt grau d'autonomia a problemes més oberts i no directament relacionats amb la temàtica que segueixen a les classes.

Els continguts matemàtics del problema que proposem –sobre comparació d'àrees- han estat tractats en cursos de matemàtiques anteriors al que actualment es troba el Gerard, tot i que no de forma explícita i tampoc amb la finalitat concreta de resoldre aquests tipus de problemes. Així, dels cursos anteriors, el Gerard conserva coneixements procedimentals relacionats amb l'aplicació de fórmules per al càlcul d'àrees de figures planes, i coneixements suficients dels conceptes associats a les construccions geomètriques de l'àrea gràfica de l'AgentGeom (punt, rectes, segments, paral·leles, perpendiculars, etc.) i els que es fan servir en l'escriptura de les sentències deductives (àrea, relacions d'igualtat i desigualtat, longituds de segments, etc.). En canvi, el Gerard mai ha tingut cap aprenentatge específic dirigit a la comprensió de la demostració en matemàtiques i, per tant, no té habilitats argumentatives o deductives, que és precisament un dels beneficis cognitius que pot extreure de la seva relació amb l'AgentGeom.

7.3.3. El procés de resolució del problema del paral·lelogram del Gerard

A continuació analitzem el procés de resolució del Gerard quan interactua amb l'AgentGeom en la resolució del problema del paral·lelogram.

Per analitzar el procés de resolució dividim la seva transcripció (veure Annex 1) en episodis socials, que són intervals en els quals els alumnes culminen una fase del procés de resolució seguit per un resolutor expert, en el sentit de Schoenfeld (1985b); o interpreten l'enunciat o es beneficien d'una comprensió més gran de conceptes i procediments involucrats en la resolució del problema, gràcies a la seva confrontació amb l'agent tutor; o si ells implementen un enfocament que els condueix a la solució (Cobo i Fortuny, 2000).

En el procés de resolució del problema del paral·lelogram per part del Gerard, del qual mostrem un moment a la figura 7.3.2, hem identificat tres episodis socials, que hem anomenat tenim en compte la finalitat de les accions de l'alumne. Si es veu clara la finalitat que persegueix l'alumne estarem davant d'un episodi d'anàlisi. Si en un mateix episodi es

[4] http://www.nexusconcepts.com/flashcam/

combinen accions que semblen no tenir una finalitat clara amb d'altres que si que la tenen, l'anomenarem d'exploració/anàlisi. I, per últim, si el que persegueix l'alumne és provar una conjectura prèviament establerta, a l'episodi l'anomenarem d'implementació o de justificació.

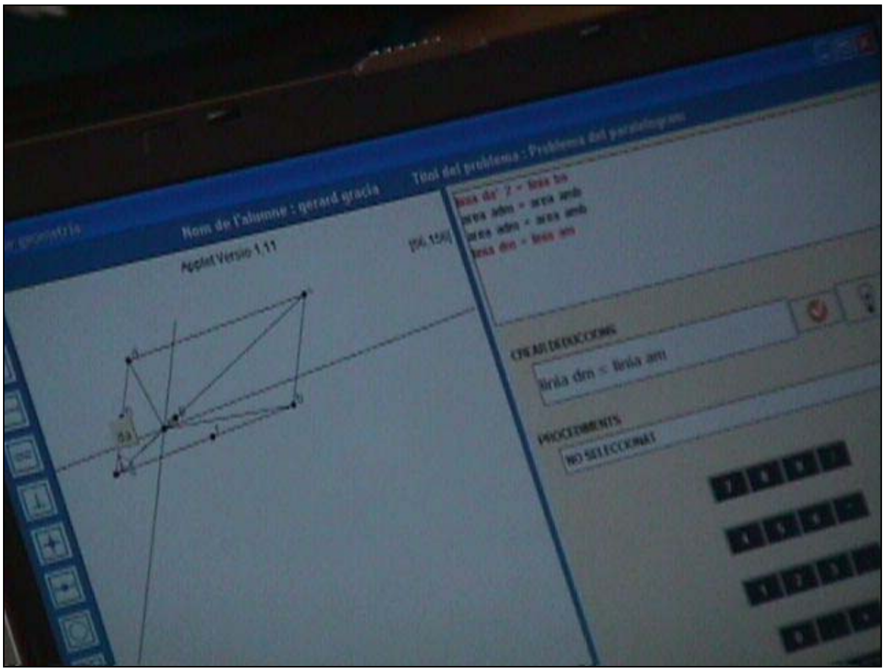


Figura 7.3.2. Pantalla de l'AgentGeom que mostra un moment de la resolució del problema del paral·lelogram per part del Gerard

7.3.3.1.Episodi d'exploració/anàlisi

A l'inici de la resolució del problema, després de llegir el seu enunciat, el Gerard intenta utilitzar l'única habilitat que té per abordar la resolució de problemes que involucren equivalències de triangles, com és la utilització de procediments relacionats amb la identificació de les seves altures amb la finalitat d'aplicar les fórmules que els permetin calcular les seves àrees. Amb aquesta intenció, el Gerard comença la resolució traçant dues rectes perpendiculars als costats "dc" i "ba" (figura 7.3.3), passant per "b" i "d", respectivament (accions 3 i 4), que esborra ràpidament al adonar-se que no corresponen a les altures de cap triangle.

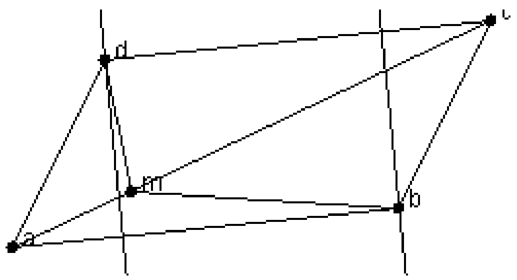


Figura 7.3.3. Traçat de línies auxiliars

2	Gerard	Carrega la figura.
3	Gerard	Crea perpendicular al segment dc passant pel punt b amb nom l.

4	Gerard	Crea perpendicular al segment ba passant pel punt d amb nom j.
5	Gerard	Esborra línia j.
6	Gerard	Esborra línia l.
7	Gerard	Crea perpendicular al segment ac passant pel punt d amb nom s (cancel·la).
8	Gerard	Crea perpendicular al segment ac passant pel punt d amb nom s.
9	Gerard	Crea intersecció al segment s al segment ac amb nom p.
10	Gerard	Crea línia passant pel punt p passant pel punt d amb nom pd.
11	Gerard	Esborra línia s.
12	Gerard	Mira els missatges del tutor: no n'hi ha.

Taula 7.3.1. Actuació del Gerard a l'episodi d'exploració/anàlisi del procés de resolució del problema del paral·lelogram

El traçat de la perpendicular al segment "ac" pel punt "d", i l'altura "pd" del triangle "amd" (accions 8, 9 i 10), introdueix al Gerard en una de les estratègies de resolució, que hem anomenat "aplicació de fórmules" (figura 7.3.4), de l'espai bàsic del problema del paral·lelogram, que exigeix les accions inicials del traçat de les altures dels triangles.

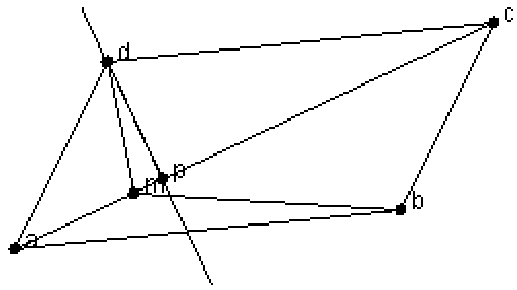


Figura 7.3.4

Així doncs, el Gerard està en el camí bo. Ha iniciat la resolució amb accions gràfiques progressives, que han estat reconegudes per l'agent tutor. Aquest també ha identificat l'estratègia que sembla que intenta seguir el Gerard. Per això, l'agent tutor no envia cap missatge. Aquesta actuació de l'agent tutor de mantenir-se en silenci, no mostrant ni tan sols missatges d'ànim o de validació de la estratègia que es segueix, en tant que l'alumne vagi fent accions reconegudes i es vagi endinsant per estratègies que porten a obtenir una solució del problema, ha estat discutida en el nostre equip i hem decidir mantenir-la perquè volíem construir un agent tutor poc intervencionista.

En les interaccions professor-alumne, cadascun dels interlocutors, sobre tot si fa temps que treballen plegats, saben interpretar les formes de comunicació no verbals. Ara l'agent tutor s'ha mantingut en silenci i el Gerard no ha sabut interpretar-ho, tot i que als alumnes que participen en l'experiència se'ls va explicar el funcionament de l'AgentGeom. Possiblement els alumnes i l'AgentGeom necessitin un període més ampli d'adaptació mútua per acabar de comprendre millor els seus processos comunicatius.

Així, després de mirar la finestra del Tutor i no veure cap missatge (acció 12), el Gerard comença a abandonar l'estratègia que semblava seguir, esborrant, en les accions següents, les línies que tenia fins ara. El Gerard ha perdut una oportunitat de beneficiar-se de la seva interacció amb l'agent tutor si hagués demanat un missatge. Si aquesta demanda s'hagués produït, l'orientació de l'agent tutor hagués estat en el sentit d'animar l'alumne a "identificar les altures dels triangles" i a "comparar els seus costat", amb la qual cosa la idea de comparació de triangles a partir de la comparació dels seus elements hagués estat una benefici assolit per l'alumne com a conseqüència de la seva interacció amb l'agent tutor. Ressaltem aquesta hipotètica actuació del Gerard per a manifestar la potencialitat de l'agent tutor.

Ara bé, la demanda del Gerard no s'ha produït, i el que cal preguntar-se és: per què el Gerard no ha demanat un missatge?, i, malgrat no haver-lo demanat, per què ha abandonat l'estratègia que havia començat?

Respecte a la primera pregunta, i tot i la insistència del professor abans d'iniciar l'experiència en què els alumnes demanin ajuda en moments claus, hem observat en l'actuació de tots els alumnes un cert repte implícit a abordar la resolució dels problemes amb la menor ajuda possible. Potser això justifiqui l'actuació del Gerard.

Les respostes al fet de per què el Gerard abandona l'estratègia poden ser moltes, i possiblement s'hagin de buscar en les característiques cognitives dels alumnes d'aquestes edats. Per exemple, els alumnes no estan acostumats a treballar amb altures que *"caiguin fora de la base del triangle",* com es mostra en Cobo (1998). O el fet de no conèixer cap dada numèrica i, per tant, en la seva lògica, no poder calcula l'àrea de cap triangle és un motiu que fa desistir molts alumnes d'aplicar la fórmula de l'àrea del triangle, i això els produeix una situació de bloqueig perquè, en la majoria dels casos, aquesta és la seva manera única d'abordar la resolució. No arriben a entendre que el que demana el problema és independent de la longitud dels costats de la figura que representa el paral·lelogram.

Resumint, a l'inici de la resolució, el Gerard ha interactuat amb la part gràfica de l'AgentGeom de forma proactiva, comportant les seves accions un progrés en el procés de resolució relacionat amb coneixements matemàtics que tenen a veure amb el traçat de perpendiculars i el reconeixement d'una de les altures d'un dels triangles implicats en la resolució. El Gerard no ha demanat cap missatge ni ha produït cap intercanvi deductiu, per tant, en aquest episodi no ha intervingut explícitament l'agent tutor.

7.3.3.2.Episodi d'anàlisi

Han passat més de sis minuts des que el Gerard abandonés l'estratègia d'aplicació de fórmules que exigia el traçat de les altures dels triangles. Durant aquesta estona de transició ha esborrat de la figura totes les línies i punts que havia trobat, i ha voltat per tota la pantalla de l'AgentGeom sense fer cap acció. Es troba perdut. No sap com continuar. L'obertura de la finestra de procediments i l'assenyalament de la paraula "mediatriu" (acció 23) marquen l'inici d'un nou episodi, que hem anomenat d'anàlisi i que portarà al Gerard a proposar una conjectura com a resultat del problema del paral·lelogram.

23. Gerard: [Obre la finestra de procediments i assenyala la línia de la mediatriu].

L'actuació del Gerard en aquest episodi està marcada per tres accions que considerem claus. La primera és la que hem assenyalat a l'acció 28, que desencadena tot un seguit d'accions gràfiques que tenen una finalitat concreta com és el traçat de la mediatriu al costat "da" (figura 7.3.5). L'agent tutor no reconeix cap d'aquestes accions. No formen part de cap estratègia de resolució. Aleshores l'agent tutor comença a reaccionar enviant al Gerard un primer missatge, que és la segona acció clau d'aquest episodi (acció 28).

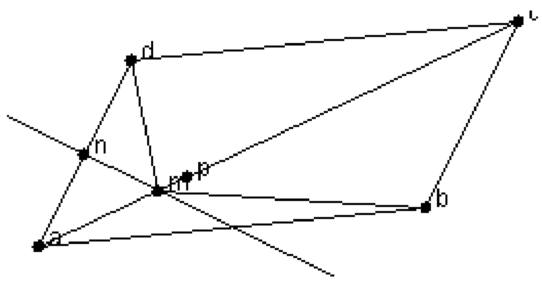


Figura 7.3.5

28. Agent Tutor: Tracta de trobar relacions entre els costats dels triangles les àrees dels quals vols comparar

L'agent tutor ha agafat l'última acció reconeguda -traçat de l'altura "pd" (acció 10)- i envia un missatge de nivell 1 per tal que el Gerard continuï per aquesta línia de l'espai bàsic, però el missatge és molt general i dona poca informació –és un missatge que només conté el nom del contingut matemàtic involucrat, en aquest cas els triangles que volem comparar, o sigui l'"abm" i l'"amd"-. La intenció que amaga és que l'alumne, comparant costats, arribi a adonar-se que el costat "am" és comú als dos triangles, i amb la comparació de les altures sobre aquest costat s'arribaria a una solució del problema.

El Gerard ara no està en les mateixes circumstàncies que quan va iniciar aquesta estratègia, sobre tot perquè ha esborrat totes les línies, malgrat això reacciona ràpidament fent servir per primer cop l'àrea deductiva per a comparar els costats "da" i "ba".

29. Gerard: línia da* 2 = línia ba

30. Agent Mediador: línia da* 2 = línia ba: falsa

Fins aquí, el Gerard ha respost als estímuls i accions de l'AgentGeom amb accions progressives malgrat que, en alguns casos, no han estat reconegudes per l'agent tutor (traçat de la mediatriu), i en d'altres les deduccions introduïdes han estat falses.

A partir d'ara la comunicació entre l'agent tutor i el Gerard comença a ser més fluïda. En aquest moment d'inici de la utilització de l'àrea deductiva, Gerard s'atreveix a demanar per primer cop un missatge (acció 34 de la taula 7.3.2). Aquest és el tercer punt clau d'aquest episodi perquè porta el Gerard a establir una conjectura. Considerant que el Gerard no ha sabut aprofitar el missatge anterior, l'agent tutor li contesta amb un missatge de nivell 2 que suposa un canvi d'estratègia (acció 35). Aquest missatge conté una primera part d'informació més general: "Podries pensar alguna forma de descompondre el paral·lelogram en triangles", que es concreta, al final, amb una informació més precisa: "traçant paral·leles que passin pel punt m ".

A partir de l'acció 38 (taula 7.3.2), el Gerard reacciona al missatge de l'agent tutor, combinant accions gràfiques i deductives. Les accions gràfiques responen directament al contingut del missatge, i les deductives són conseqüència de la visualització de la figura del paral·lelogram després d'haver traçat les paral·leles per "m" als costats "da" i "ba" (figura 7.3.6). El Gerard comença a aprofitar-se d'aquesta combinació discursiu-gràfica que dóna significat al procés argumentatiu (Richard, 2004b), i que hem considerat fonamental en la construcció de l'arquitectura de l'AgentGeom.

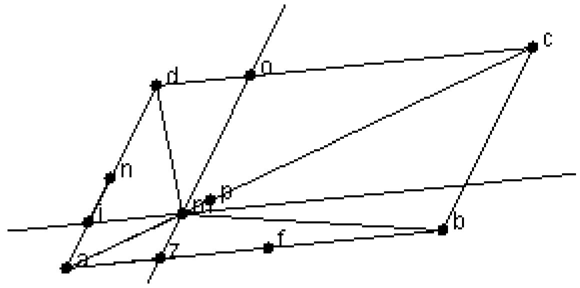


Figura 7.3.6

34	Gerard	[Demana un missatge a l'agent tutor].
35	Agent Tutor	Podries pensar alguna forma de descompondre el paral·lelogram en triangles, per exemple, traçant paral·leles que passin pel punt m.
36	Gerard	[Intenta esborrar el punt n].
37	Agent Mediador	Aquest punt forma part d'una o més línies.
38	Gerard	Crea paral·lela al segment da passant pel punt m amb nom A
39	Gerard	Crea paral·lela al segment ba passant pel punt m amb nom B
40	Gerard	Deducció: àrea adm = àrea amb.
41	Agent Mediador	àrea adm = àrea amb: correcta.
42	Gerard	Deducció final: àrea adm = àrea amb.
43	Agents Mediador i Tutor	àrea adm = àrea amb: correcta. Missatge: No tinc prou suport per a comprovar la solució.

Taula 7.3.2. Part de l'episodi d'anàlisi en la qual Gerard arriba a conjecturar el resultat del problema del paral·lelogram.

La combinació d'aquests intercanvis gràfics i deductius de naturalesa clarament progressiva culmina amb la conjectura del Gerard (accions 40 i 42 de la taula 7.3.2): les àrees dels triangles "amb" i "amd" són iguals.

L'AgentGeom li ha permès no tan sols establir aquesta conjectura, sinó que, a més, l'ha validada, i ha validat també la conjectura com a resultat final del problema (acció 43). Malgrat això, l'agent tutor no se'n dóna per satisfet i demana una justificació més fonamentada amb el missatge: "No tinc prou suport per a comprovar la solució".

Des d'aquest moment el Gerard sap que l'agent tutor posa al seu abast unes eines gràfiques i deductives, que en un moment donat li poden ajudar a trobar el resultat d'un problema, però que li exigeixen un procés argumentatiu al que fins ara no estava acostumat. Aquesta forma de gestionar el procés de resolució per part de l'agent tutor és coherent amb la idea de Polya (1975) sobre el fet que, en un moment determinat, un problema de trobar es pot transformar, com és el cas, en un problema de provar.

Com a resum de les característiques de la interacció en aquest episodi podem assenyalar: per una banda, l'evolució del comportament del Gerard, que ha passat de fer servir només l'àrea gràfica a combinar la utilització de les àrees gràfica i deductiva. Per l'altra, la capacitat reactiva del Gerard que reacciona a qualsevol estímul de l'AgentGeom, sigui a l'observació de la paraula mediatriu, al missatge proactiu de l'agent tutor sobre la comparació dels costats o al missatge reactiu del mateix agent tutor sobre el traçat de paral·leles. En tots els casos el Gerard segueix les indicacions de l'agent tutor fins arribar a establir la conjectura.

Per últim, una altra característica de l'esmentada interacció alumne-agent tutor és l'obligació que imposa el propi disseny del medi tecnològic que fa que el Gerard prengui consciència de la necessitat de provar la conjectura que ha establert. Així, el Gerard té l'oportunitat de generar un procés argumentatiu mitjançant una seqüència de sentències que l'agent mediador ha de validar. D'aquesta manera, el Gerard i l'AgentGeom contribueixen plegats a donar significat al concepte de demostració.

7.3.3.3.Episodi d'implementació (justificació)

Quan l'agent tutor informa al Gerard de la falta de suport argumentatiu de la seva conjectura, la seva finestra queda oberta, i el Gerard assenyala i fixa la seva atenció en un missatge anterior sobre la comparació dels costats dels triangles "abm" i "amd" (acció 28). Aquest missatge proactiu marca l'inici i l'evolució del procés argumentatiu que el Gerard tractarà de fer al llarg d'aquest episodi.

Si deixem de banda algunes errades gramaticals del Gerard en escriure les seves sentencies deductives i els missatges de rectificació de l'agent mediador, podem dir que aquest episodi es torna a caracteritzar per la combinació d'intercanvis gràfics i deductius. Ara, amb una diferència respecte de l'episodi anterior que és el fet que el Gerard, moltes vegades, escriu la sentència deductiva abans d'haver definit els objectes que hi intervenen, que els ha de crear a posteriori per tal que l'agent mediador entengui i validi, o no, les seves deduccions. Això fa que el l'activitat deductiva, recolzada lògicament en la construccions gràfiques, sigui el focus de l'actuació del Gerard en aquest episodi.

Si exceptuen l'acció 49 (taula 7.3.3), en la qual el Gerard fa servir el compàs per a traslladar el segment "ad" sobre el "ba" a partir del punt "a", obtenint el punt "f", i que no té cap incidència en l'evolució del procés de resolució, la resta de intercanvis gràfics que protagonitza el Gerard es caracteritzen per la identificació dels punts d'intersecció de les rectes paral·leles "A" i "B" (accions 38 i 39 de la taula 7.3.2) amb els costats del paral·lelogram "ba", "dc" i "da", respectivament, i la creació dels segments que determinen aquestes interseccions amb els vèrtexs del paral·lelogram. Aquestes accions, reconegudes pel sistema perquè formen part de la línia de l'espai bàsic "equivalència per complement", les combina el Gerard amb accions deductives, generalment falses, sobre comparació de segments. Aquesta combinació d'accions reconegudes i no reconegudes fa que en l'actuació del Gerard no s'arribin a tenir mai tres accions seguides no reconegudes i, per tant, l'agent tutor no hagi d'enviar cap missatge nou.

Igual que els intercanvis gràfics són sempre de la mateixa naturalesa –identificació de punts i traçat de segments-, en els intercanvis deductius hem observat una evolució significativa, que va des de la comparació senzilla de costats i de segments en general -accions 47, 48, 55 i 56 (taula 7.3.3)- a la comparació de segments (accions 57 i 58), per acabar comparant àrees com productes de segments (accions 65 i següents).

47	Gerard	Deducció: línia dm = línia am.
48	Agent Mediador	línia dm = línia am: falsa.
49	Gerard	Crea compàs al segment ba passant pel punt a passant pel punt d amb nom f.

...	...	... ...
55	Gerard	Deducció: línia ia = línia in.
56	Agent Mediador	línia ia = línia in: falsa.
57	Gerard	Deducció: línia ia * 4 = línia da (després de dubtar molt).
58	Agent Mediador	línia ia * 4 = línia da: falsa.
...	...	... ...
65	Gerard	Deducció: línia da * línia za = línia ba * línia ia.
66	Agent Mediador	línia da * línia za = línia ba * línia ia: correcta.
67	Gerard	Desa
68	Gerard	Deducció definitiva: línia da * línia za = línia ba * línia ia.
69	Agent Mediador	línia da * línia za = línia ba * línia ia: correcta.
70	Agent Tutor	Missatge: No és la solució correcta.

Taula 7.3.3. Part de l'episodi d'implementació en la qual es mostra l'evolució de les sentències deductives introduïdes pel Gerard.

Amb la validació de l'acció 66, el Gerard considera suficient l'argumentació i dóna per acabada la resolució, desant tot el procés de resolució al seu historial. L'agent mediador ha tingut la capacitat de validar el producte de segments que representen els costats de dos dels paral·lelograms que s'han formar amb el traçat de paral·leles (figura 7.3.6), però, malgrat això, no considera suficients els arguments del Gerard, que ha arribat a produir fins al 27 % d'accions reconegudes, però no el 30% que l'agent tutor l'exigeix.

Com a resum d'aquest episodi, podem dir que l'actuació del Gerard ha estat marcada per la comparació costats i segments, després de l'observació del corresponent missatge de l'episodi anterior, malgrat que ha hagut per la seva part una evolució significativa en aquesta comparació, passant de senzilles comparacions a d'altres en les quals intervenen productes de segments. Per altra banda, hem observat que, tot i la utilització combinada de les àrees gràfica i deductives, aquesta ha pres un major protagonisme, ja que les accions gràfiques han estat supeditades a la seva utilització a l'àrea deductiva.

7.3.3.4. Esquema de l'evolució del procés de resolució del problema del paral·lelogram del Gerard

A continuació mostrem un esquema general de l'actuació del Gerard en la seva interacció amb l'AgentGeom per a resoldre el problema del paral·lelogram. En aquest esquema hem diferenciat per a cada episodi les accions gràfiques de les deductives i d'altres, que hem anomenat generals (obrir i tancar finestres, mirar els seus continguts, assenyalar objectes, etc.).

EPISODIS	ACCIONS		
	GENERALS	GRÀFIQUES	DEDUCTIVES

LECTURA1

- Obre finestra de l’enunciat
- Llegir l’enunciat
- Tancar finestra

EXPLORACIÓ/ANÀLISI

- Carrega la figura de l’enunciat
- Perpendiculars (2)
- Esborra
- Perpendicular a ac per d
- Intersecció de línies
- Esborra objectes

LECTURA2

- Obre finestra de l’enunciat
- Llegir l’enunciat
- Tancar finestra

TRANSICIÓ

- Esborra objectes

ANÀLISI

- Obre finestra de procediments i mira la mediatriu

- Punt mig
- Perpendicular

Missatge no demanat: Tracta de comparar els costats dels triangles “abm” i “amd”

- Esborra objectes

- Deducció de comparació de costats
- Altres intents de deduccions

Demana missatge: Descompondre el paral·lelogram en triangles traçant paral·leles que passin per "m"

• Esborra punt • Paral·leles	• Deducció • Deducció final • Missatge: No tinc prop suport

PROBLEMA DE TROBAR

PROBLEMA DE PROVAR

IMPLEMENTACIÓ		
	• Creació de segments	• Comparació de costats • Comparació de productes de costats • Missatges de comprensió de deduccions • Missatge de no verificació de solució correcta.

7.3.3.5.Discussions i conclusions

Analitzem i discutim aquesta secció des d'una perspectiva vygotskyana en la que fem servir el mitjà tecnològic com a mediador físic en els processos comunicatius (Vygotsky, 1978, i Cole, 1996) i, a la vegada, com a sistema tutorial artificial, que simula la conducta humana.

Quan un alumne col·labora amb un sistema tutorial artificial per a resoldre plegats un problema, es generen canvis en l'aprenentatge de l'alumne. En la nostra recerca, aquests canvis els expressem en termes de noves apropiacions en la forma de produir sentències deductives i d'entendre el significat i la necessitat de les demostracions matemàtiques en la resolució de problemes de geometria que comparen àrees de superfícies planes. A més, aquests canvis s'evidencien mitjançant transformacions en les actuacions dels alumnes que evolucionen cap a un ús del procés argumentatiu basat en una utilització compartida de les àrees gràfica i deductiva del sistema tutorial artificial.

En el procés de resolució del problema del paral·lelogram per part del Gerard hem identificat tres tipus d'interaccions amb l'AgentGeom, les característiques de les quals mostrem resumides a la taula 7.3.4 i descrites amb més detall en els paràgrafs següents.

La primera, que correspon a l'episodi d'exploració/anàlisi, es caracteritza perquè l'alumne pren la iniciativa amb accions proactives que giren al voltant de la utilització de l'àrea gràfica de l'AgentGeom. Podríem dir que el Gerard fa servir l'àrea gràfica simplement com a eina de dibuix ja que desvincula les construccions gràfiques de les deductives (aquestes no les utilitza).

Interpretem que aquesta iniciativa "gràfica" del Gerard neix, per una banda, de la necessitat implícita de l'aplicació de la fórmula de l'àrea del triangle com a recurs únic en abordar la resolució del problema i, per l'altra, de la reproducció d'esquemes d'actuació de les resolucions de problemes amb paper i llapis, en les quals el Gerard no fa servir mai processos argumentatius com els que comporta la utilització de l'àrea deductiva.

Entenem que al llarg d'aquest episodi, el Gerard perd l'oportunitat d'aprofundir en l'estratègia que havia iniciat com a conseqüència de no saber interpretar les formes de comunicació no verbals, en aquest cas, el silenci de l'agent tutor, i de no haver demanat cap missatge que l'orientés en la resolució. Aquesta manca de compressió marca l'evolució del procés de resolució en aquest episodi, en el qual, els continguts matemàtics que el Gerard utilitza sempre giren al volten del traçat de perpendiculars i de segments relacionats amb l'altura del triangle. Considerem que, en aquestes circumstàncies, el Gerard no ha obtingut cap benefici cognitiu que puguem constatar.

FASES	QUAN ES PRODUEIX	ÀREES IMPLICA-DES	CONEIXEMENTS INVOLUCRATS	ORIGEN
PROACTIVA	Exploració/anàlisi	Gràfica i general	Gira al voltant del traçats de perpendiculars i segments relacionats amb altures.	Neix de forma implícita de la necessitat d'aplicar la fórmula de l'àrea del triangle
REACTIVA1	Anàlisi	Gràfica i deductiva	Traçat de mediatriu (punt mig i perpendicular). Comparació de longituds de segments Traçat de paral·leles	Observació de la mediatriu a la finestra de procediments. Missatge no demanat sobre comparació de costats Missatge demanat sobre traçat de paral·leles
REACTIVA2	Implementació	Gràfica i deductiva	Comparació de longituds i de productes de longituds de segments	Observació del missatge sobre comparació de costats.

Taula 7.3.4. Interaccions del procés de resolució del problema del paral·lelogram del Gerard

El segon tipus d'interacció es correspon amb l'episodi que hem anomenat d'anàlisi. Aquest episodi és essencialment reactiu perquè les accions que protagonitza el Gerard són induïdes per l'AgentGeom, sigui de manera indirecta, quan el Gerard observa en la finestra de procediments la paraula "mediatriu", o per demanda de missatge, en el cas del traçat de les paral·leles, o reaccionant directament al missatge que envia l'agent tutor sobre la comparació de costats.

És de destacar l'actuació de l'agent tutor pel que fa a l'emissió de missatges ja que, per a ajudar l'alumne a sortir de la situació de bloqueig en la que se troba després del missatge de la comparació de costats, selecciona, a demanda del Gerard, un de nou de canvi d'estratègia i d'un nivell d'informació superior, que ajuda l'alumne a sortir del bloqueig i a reconduir la situació cap a una altra en la qual els processos d'argumentació són realment els protagonistes.

Entenem que, en aquest episodi, el Gerard ha començat a beneficiar-se de la potencialitat de l'agent tutor que suposa la utilització conjunta de les àrees gràfica i deductiva en la producció d'un procés argumentatiu, que, de moment, l'ha fet arribar a establir una conjectura sobre el resultat del problema que pretén solucionar. Així, la resolució del problema es troba en una situació ideal per al Gerard. Sap el que vol fer –provar la conjectura-, i la manera de fer-ho, és a dir, mitjançant l'encadenament de sentències, malgrat que encara no sap el contingut d'aquestes.

Aquest aprenentatge sobre la idea de demostració matemàtica es fa evident en el tercer tipus de interacció del Gerard amb l'agent tutor, que es desenvolupa a l'episodi d'implementació.

Podem classificar l'episodi d'implementació com a reactiu perquè les accions del Gerard tenen el seu origen en l'observació del missatge sobre comparació de costats, i sobre aquest fet gira els continguts matemàtics de les seves accions –creació i comparació de segments i dels seus productes-.

L'agent tutor i el Gerard, cadascun en el seu paper, van contribuint al desenvolupament del procés de resolució. El Gerard va generant accions gràfiques reconegudes seguint l'estratègia "equivalència per complement", al mateix temps que va intercalant sentències deductives, moltes vegades falses. Mentrestant, l'agent tutor està en silenci, només l'agent mediador reacciona a les errades gramaticals de les sentències del Gerard. Ara el Gerard comença a entendre aquest comportament i no es bloqueja. Continua el desenvolupament de l'estratègia, cada cop amb més entusiasme, evidenciat per la necessitat del Gerard de produir noves sentències deductives sobre objectes que va creant, fins i tot abans de crear-los.

Interpretem que aquesta conducta del Gerard confirma les expectatives que teníem al finalitzar l'episodi anterior, en el sentit d'una integració encara més gran del raonament gràfic-deductiu en benefici del procés argumentatiu.

D'igual forma, entenem que l'evolució en la conducta del Gerard cap a una apropiació de la idea de demostració matemàtica ha estat conseqüència de la seva interacció amb l'agent tutor. En aquest sentit podem dir que ambdós han contribuït a la construcció del significat d'aquest concepte.

Per acabar direm que l'estudi que hem dirigit busca quines són les habilitats geomètriques que l'alumne pot adquirir i de quina manera pot activament transformar aquestes habilitats després de l'apropiat ajustament de missatges que hem esmentat a dalt.

7.3.4. El cas de l'Adrià

En els paràgrafs següents resumim les característiques cognitives i actitudinals de l'alumne de segon curs de batxillerat (17 anys) al que hem anomenat Adrià i que ha participat en l'experimentació amb l'AgentGeom.

Les característiques metodològiques i els continguts de les classes a les quals ha assistit l'Adrià són molt semblants a les que hem descrit a l'apartat 7.3.2 per al Gerard. També ha fet servir amb freqüència l'ordinador a les classes però sempre realitzant activitats estructurades i guiades, i associades als continguts matemàtics que es pretén ensenyar, per tant no té experiència en enfrontar-se de forma individual i amb un alt grau d'autonomia a problemes més oberts i no directament relacionats amb la temàtica que et segueix a la classe.

L'Adrià és un alumne intel·ligent, que a la seva capacitat va unir, durant l'ESO (fins als 16 any) molt d'interès i ganes d'estudiar, el que li va a portar a obtenir notes excel·lents a totes les assignatures, destacant, si més no, en matemàtiques per la seva rapidesa en entendre les explicacions del professor i per la seva creativitat.

En començar el batxillerat l'Adrià va canviar la seva actitud i es va anar deixant fins arribar al moment actual en el qual té moltes dificultats en superar les avaluacions trimestrals en moltes assignatures, entre elles les matemàtiques, sense dubte perquè ha perdut gairebé completament l'hàbit d'estudi. És molt probable, segons l'opinió dels seus professors, que la seva capacitat i la base tan sòlida de coneixements que té li ajudaran a superar el curs.

Dels cursos anteriors, i en relació als continguts matemàtics implicats en la comparació d'àrees, l'Adrià conserva coneixements procedimentals relacionats amb l'aplicació de fórmules per al càlcul d'àrees de figures planes, i coneixements suficients dels conceptes associats les construccions geomètriques de l'àrea gràfica de l'AgentGeom (punt, rectes, segments, paral·leles, perpendiculars, etc.) i els que es fan servir en l'escriptura de les sentències deductives (àrea, relacions d'igualtat i desigualtat, longituds de segments, etc.). En canvi, l'Adrià, com el Gerard, mai no ha tingut cap aprenentatge específic dirigit a la comprensió de la demostració en matemàtiques, si exceptuem els raonaments lògics relacionats amb la Geometria Analítica i l'Anàlisi Matemàtica que el professor els explica quan desenvolupen aquests temes en el present curs.

7.3.5. El procés de resolució del problema del paral·lelogram de l'Adrià

A continuació analitzem el procés de resolució de l'Adrià quan interactua amb l'AgentGeom en la resolució del problema del paral·lelogram, i observarem com l'Adrià es beneficia d'aquesta interacció, no tant pel que fa al desenvolupament estratègic del procés de resolució, sinó en la part final d'aquest procés, de la generació d'un procés argumentatiu que li porta a obtenir la solució d'una manera clara.

En el procés de resolució del problema del paral·lelogram per part de l'Adrià hem identificat tres episodis socials, que els hem anomenat d'exploració, d'anàlisi i d'implementació.

7.3.5.1.Episodi d'exploració

Després de llegir l'enunciat del problema i de carregar la seva figura, l'Adrià comença una fase del procés de resolució en la qual sembla no tenir clara la finalitat que persegueix a l'hora de triar el triangle adient, malgrat que ja deixa entreveure la idea del traçat de perpendiculars i d'aplicació de la fórmula de l'àrea del triangle (figura 7.3.7).

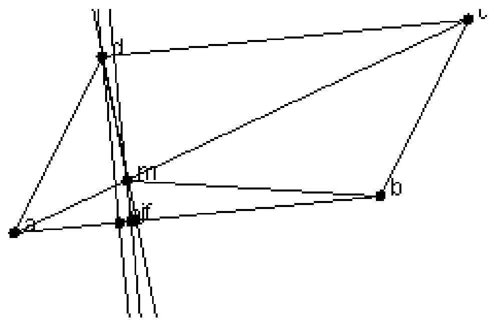


Figura 7.3.7

A part d'aquest intent d'aplicació de la fórmula de l'àrea del triangle, que es veu reflectida per quatre accions gràfiques i un intent d'acció deductiva (taula 7.3.5), que no arriba ni tan sols a verificar, aquest episodi es caracteritza per dos fets concrets: per una banda, la dificultat que té l'Adrià de seleccionar les primitives de construcció, és a dir, els botons de l'àrea de construcció i, per l'altra, el temps que dedica a reflexionar sobre la figura que està construint (més de cinc minuts).

3	Adrià	Crea perpendicular al segment dc passant pel punt d amb nom w.
4	Adrià	Crea intersecció al segment w al segment ba amb nom e.
5	Adrià	Crea paral·lela al segment dm passant pel punt m amb nom t.
6	Adrià	Crea intersecció al segment ba al segment t amb nom f.
7	Adrià	Intenta fer deducció: àrea ae*ed/2 (esborra).

Taula 7.3.5. Actuació de l'Adrià a l'episodi d'exploració del procés de resolució del problema del paral·lelogram

De manera que aquest episodi es caracteritza per una utilització proactiva gairebé exclusiva de l'àrea gràfica i per un primer intent d'aplicació de la fórmula de l'àrea del triangle, com l'únic recurs per solucionar el problema i, per tant, del traçat dels segments auxiliars corresponents: base i altura.

7.3.5.2. Episodi d'anàlisi

El procés reflexiu de l'episodi anterior porta a l'Adrià a identificar les bases i les altures dels triangles que vol comparar. Ara, l'Adrià té clar el que vol fer, que es manifesta amb les accions 7 (reproduïda en l'acció 27), 24 i 26 de la taula 7.3.6, en les quals considera els costats "da" i "ba" com a bases dels triangles "amd" i "abm", respectivament, i sobre elles traça les altures corresponents (figura 7.3.8).

7	Adrià	Crea perpendicular al segment ba passant pel punt m amb nom r.
8	Agent Tutor	Imagina com compararies les àrees dels nous triangles que s'han format.
9	Adrià	Crea intersecció al segment r al segment ba amb nom j.
... ...		
24	Adrià	Crea perpendicular al segment da passant pel punt m amb nom w.
25	Agent Tutor	Reflexiona sobre la possibilitat de resoldre el problema considerant que et donen en lloc d'un paral·lelogram un quadrat o un rectangle. Pots aplicar els mateixos procediments per a resoldre el problema del paral·lelogram?
26	Adrià	Crea intersecció al segment w al segment da amb nom e (mira tots els segments i línies).
27	Adrià	Crea perpendicular al segment ba passant pel punt m amb nom q.

Taula 7.3.6. Part de l'episodi d'anàlisi en la qual es mostra que l'Adrià no reacciona als missatges de l'agent tutor

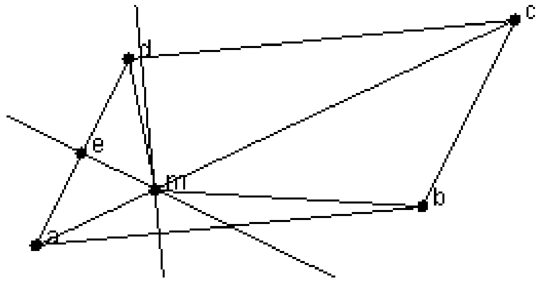


Figura 7.3.8

Molts alumnes aborden d'aquesta manera la resolució del problema del paral·lelogram (Cobo, 1998), fins que s'adonen que així no és possible comparar els elements dels dos triangles i, en conseqüència, no és un enfocament vàlid, excepte si considerem un cas particular com és el d'un quadrat en lloc d'un paral·lelogram (veure l'apartat 4.3.1). L'AgentGeom ha contribuït a què l'Adrià abandoni aquesta estratègia no validant la comparació de les altures. En una situació de paper i llapis, els alumnes d'aquestes edats solen actuar més en funció de la figura concreta sobre la qual treballen, establint relacions entre les bases i les altures, considerant les mesures concretes d'aquests elements.

A més de l'anterior, d'aquest episodi hem de ressaltar dos aspectes. El primer té a veure amb una fase de transició que hi ha entre les intervencions 9 i 24, durant la qual l'Adrià es dedica a esborrar totes les línies i punts que havia traçat fins aleshores, incloses les de les intervencions 7 i 9 (per això les ha de tornar a fer). En aquesta fase de transició, l'Adrià es torna a mirar l'enunciat del problema i mira la finestra del Tutor, on veu el missatge que l'agent tutor l'ha enviat en l'acció 8.

El segon aspecte a ressaltar, i que marca la forma d'actuar de l'Adrià i la seva relació amb l'AgentGeom, és el de no fer cap cas dels missatges que l'agent tutor li envia. L'Adrià té una idea clara i la porta a terme sense deixar-se influir pel que diu l'agent tutor. Amb aquesta actuació l'Adrià manifesta la seva autonomia i, sembla pels resultats obtinguts, el control del procés de resolució. Ens referim concretament al missatge de l'acció 8, en el qual l'agent tutor li apunta la possibilitat de comparar els nous triangles que s'han format com a conseqüència de les accions gràfiques de l'episodi anterior. Aquest missatge de nivell 1 no dóna a l'Adrià massa informació. El missatge de l'acció 25, qualificat com de nivell 2 i de canvi d'estratègia, sí que inclou informació suficient com per a produir els seus efectes en el comportament de l'Adrià, però aquest, en ambdós moments, està immers en un procés de traçat de perpendiculars (altures) que no abandona.

Interpretem que l'Adrià no considera el missatge de l'acció 25, tot i aportar una informació matemàtica important, pel fet que per desenvolupar-lo ha de tornar a fer una altra construcció gràfica, representant un quadrat o un rectangle que substitueixen al paral·lelogram. En canvi, ens podem preguntar per què no considera el primer missatge, si el veu un primer cop (acció 8) i el torna a mirar després? La resposta a aquesta pregunta podria ser que, en el primer moment, l'Adrià no atén el missatge perquè aquest surt quan està immers en el traçat de la perpendicular al costat "ba" per "m", i està clar que no vol abandonar l'estratègia que ha iniciat i, en el segon moment, perquè la visualització del missatge es produeix just després que hagi esborrat les línies auxiliars que li permetien identificar els triangles als quals es refereix el missatge, quedant-li una figura (figura 7.3.9) semblant a la de l'enunciat.

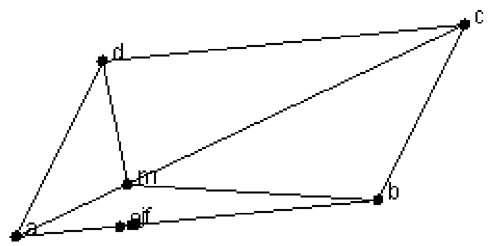


Figura 7.3.9

Resumint podem dir que aquest episodi es caracteritza perquè l'Adrià fa accions proactives només relacionades amb l'àrea gràfica de l'AgentGeom i, per tant, encara no ha pogut comprendre la veritable essència del sistema tutorial, que es manifesta com a conseqüència de la combinació deductiu-gràfica per a potenciar el procés argumentatiu. Podríem dir que l'Adrià, fins ara, ha fet servir l'AgentGeom com a eina de dibuix.

El segon punt a ressaltar és l'elevat grau d'autonomia de l'Adrià que li ha permès avançar en el procés de resolució sense haver de seguir els suggeriments de l'agent tutor. Aquest avenç es concreta en el següent episodi, en el qual l'Adrià acaba trobant l'estratègia adient, fruit dels processos d'exploració i anàlisi portats a terme fins aquest moment.

7.3.5.3.Episodi d'implementació

Immediatament després de creada la perpendicular al costat "ba" (figura 7.3.8) pel punt m (acció 27), l'Adrià s'adona que les altures sobre els costats "ba" i "da" no són les adients. Les esborra i comença a realitzar, sense dubtar i amb molta seguretat, dues accions (32 i 33) que li conduiran directament a la solució del problema.

32. Adrià: Crea perpendicular al segment ac passant pel punt b amb nom w (figura 7.3.10).
33. Adrià: Crea perpendicular al segment ac passant pel punt d amb nom q (no dubta).
34. Adrià: Intenta acció deductiva: àrea... (mira línia am, que no existeix).

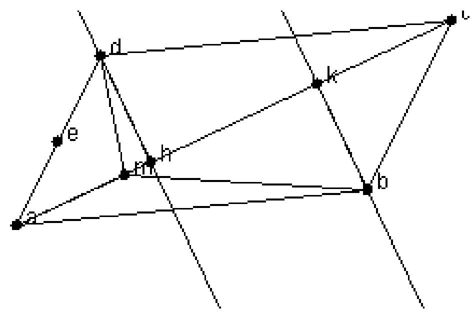


Figura 7.3.10

Ja des del començament (acció 34) i en la continuació (acció 41) d'aquest episodi (taula 7.3.7), l'Adrià fa l'intent de utilitzar l'àrea deductiva, però s'adona que els objectes gràfics que vol fer servir no estan tots definits. En aquestes circumstàncies, l'episodi evoluciona des de la creació dels objectes gràfics (base comuna, "am", i les altures, segments "kb" i "hd", figura 7.3.10), necessaris com a referents de les sentències deductives, fins a una utilització gairebé exclusiva de l'àrea deductiva per a formalitzar el procés argumentatiu. En aquesta evolució l'Adrià interactua amb molta freqüència amb l'agent mediador que, primer li corregeix aspectes relacionats amb la nomenclatura dels objectes que està definint i, després, li valida, en la majoria dels casos, les sentències deductives que va introduint (taula 7.3.7). És en aquesta relació amb l'agent mediador quan l'Adrià detecta una errada sintàctica que al programador se li havia passat per alt, ja que la sentència deductiva:

53. Adrià: Deducció: línia kb/2=línia hd/2
54. Agent Mediador: línia kb/2=línia hd/2:falsa

l'agent mediador la dóna falsa, sent correcta, i en canvi la dóna per correcta si abans i després del signe de la igualtat hi ha un espai en blanc. El mateix passa en un altre moment posterior.

44	Adrià	Deducció: àrea amb = línia am * línia kb/2
45	Agent Mediador	àrea amb = línia am * línia kb/2: correcta
		... ...
47	Adrià	Deducció: àrea amd = línia am * línia hd/2
48	Agent Mediador	àrea amd = línia am * línia hd/2: correcta
49	Adrià	Intenta fer deducció: àrea amd/línia hd/2 = àrea amb/línia kb/2
50	Agent Mediador	Les operacions aritmètiques s'han de fer sobre objectes del mateix tipus
		... ...
55	Adrià	Deducció: línia kb = línia hd
56	Agent Mediador	línia kb = línia hd: correcta
		... ...
59	Adrià	Deducció: línia am * línia kb = línia am * línia hd
60	Agent Mediador	línia am * línia kb = línia am * línia hd: correcta
61	Adrià	Deducció: àrea amd = àrea amb
62	Agent Mediador	Àrea amd = àrea amb: correcta
63	Adrià	Deducció final: àrea amd = àrea amb
64	Agent Mediador	àrea amd = àrea amb: correcta

Taula 7.3.7. Part de l'episodi d'implementació en la qual es mostra l'evolució de les sentències deductives introduïdes per l'Adrià

En el primer pas del seu descobriment, l'Adrià expressa les fórmules de les àrees dels triangles que vol comparar (accions 44 i 47, taula 7.3.7). Com que ambdues tenen la mateixa base "am", les aïlla i iguala les dues expressions que resulten (acció 49), en un procés semblant al que faria amb llapis i paper. Segurament l'Adrià hagués expressat la igualtat dels segments "kb" i "hd" per a concloure la igualtat de les dues àrees "amd" i "abm", però l'agent mediador li mostra la impossibilitat de fer operacions aritmètiques sobre objectes de diferent tipus (acció 50), i l'Adrià es veu en la necessitat de fer el seu procés argumentatiu d'una manera més directa: expressant la igualtat de les altures (acció 55) i, a partir d'ella, multiplicant per la mateixa base, concloure que les dues àrees són iguals.

Hem de ressaltar que, en aquest episodi, l'Adrià sembla que ha tingut una actuació decidida i encertada, ja que des de la primera acció gràfica (acció 33) ha tingut clar el que volia –traçat de les perpendiculars sobre el costat comú "am" i aplicació de la fórmula de l'àrea del triangle-, i l'ha portat a terme, amb deficiències de nomenament d'objectes o d'utilització d'objectes no creats en sentències deductives, que han estat corregides com a conseqüència del seu diàleg amb l'agent mediador. Aquesta actuació de l'Adrià la podem qualificar de molt reflexiva si ens fixem en dos aspectes: la durada de l'episodi –al voltant de 18 minuts-, aspecte que no queda reflectit en la seva transcripció, i el fet que la majoria de les sentències que ha produït siguin reconegudes per l'agent tutor, excepte les deficiències esmentades anteriorment i corregides per l'agent mediador.

Per la seva part, l'agent tutor ha identificat l'estratègia que ha seguit l'Adrià –anomenada "aplicació de fórmules" (veure l'apartat 4.3.1)- i ha romàs en silenci. L'Adrià no ha trobat a faltar l'agent tutor, possiblement perquè s'ha pensat molt les seves accions i ha trobat una estratègia correcta.

Així doncs, l'Adrià ha trobat una solució correcta que el sistema ha validat completament, és a dir, amb un percentatge suficient d'accions reconegudes.

Pel fet d'haver arribat a una solució i que el sistema l'hagi considerada vàlida i suficientment argumentada, l'agent tutor envia a l'Adrià un missatge de revisió del procés que ha seguit (acció 65), al qual respon l'Adrià (acció 66) de forma poc reflexiva i sense entendre massa el contingut de les preguntes. El tipus de respostes de l'Adrià, tot haver-les fet d'una forma molt ràpida, ens portarà a reconsiderar la formulació de la nomenclatura que fent servir en les preguntes, ja que és clar que l'Adrià no ha donat el mateix sentit que nosaltres al terme "estratègies"

65. Agent Tutor: Contesta aquestes preguntes:
    a) Al llarg de la resolució, has proposat vàries estratègies?
    b) Les has examinat totes?
    c) Et sembla que has examinat les més adients?
66. Adrià:
    a) Sí, ja que m'he trobat que una no l'ha entès el programa.
    b) Possiblement n'hi hagi d'altres derivades de les que he utilitzat o alguna altra de diferent (utilitzant angles...).
    c) Sí, diria que és la més ràpida.

Com a resum d'aquest episodi podem dir que l'actuació de l'Adrià s'ha caracteritzat pel traçat de les altures dels triangles, les àrees dels quals es vol comparar, sobre el costat comú "am". Aquesta utilització de l'àrea gràfica de l'AgentGeom ha estat compartida des del primer moment amb la producció de sentències deductives que han culminat amb la justificació de la igualtat de les àrees dels dos triangles. Malgrat la utilització combinada de les àrees gràfica i deductives, hem observat que aquesta ha pres un major protagonisme, ja que els objectes de l'àrea gràfica els ha creat explícitament per a ser utilitzats en les seves sentències deductives. La no intervenció de l'agent tutor ha estat fruit de l'actuació encertada de l'Adrià.

7.3.5.4.Conclusions

Aquest procés de resolució té tres característiques fonamentals que volem ressaltar: el caràcter proactiu de les accions de l'Adrià, l'evolució en la utilització de les àrees gràfica i deductiva i la consideració, gairebé exclusiva, de l'enfocament consistent en el traçat de les altures i aplicació de la fórmula de l'àrea del triangle.

Així doncs, l'actuació de l'Adrià s'ha caracteritzat per la seva autonomia que li ha permès avançar en el procés de resolució sense haver de seguir els suggeriments de l'agent tutor. Aquest avenç es concreta a l'episodi d'anàlisi, en el qual l'Adrià concreta la seva estratègia de traçat d'altures, malgrat que sobre diferents bases, i a l'episodi d'implementació, en el qual acaba trobant l'estratègia adient, considerant la base comuna, "am", i comparant les altures sobre aquesta base.

Aquesta autonomia manifestada per l'Adrià li ha portat a no fer cap cas dels missatges que li ha enviat l'agent tutor, el segon dels quals l'hagués permès apropar-se a la solució des d'un enfocament poc freqüent, si considerem els coneixements estratègics de l'Adrià, com és el de la consideració dels casos particulars d'un quadrat o d'un rectangle. Així, l'Adrià ha tingut clar, des del primer moment, el que volia i l'ha portat a la pràctica amb decisió, segurament perquè era l'únic recurs estratègic del qual disposava en aquest tipus de situacions.

Pel que fa a la utilització de les àrees gràfica i deductiva podem dir que hi ha una clara evolució en l'actuació de l'Adrià que va des d'un ús gairebé exclusiu de l'àrea gràfica en els dos primers episodis, en els quals fa servir l'AgentGeom com si fos una eina de dibuix gràfic, fins a una utilització conjunta i coordinada d'ambdues àrees, a l'episodi final, que el porta a l'obtenció i validació de la solució identificada com a "aplicació de fórmules" dins de l'espai bàsic del problema del paral·lelogram (apartat 4.3.1). Per tant, podem dir que, finalment, l'Adrià ha comprès l'essència del sistema tutorial, que es manifesta per la combinació deductiu-gràfica per a potenciar el procés argumentatiu.

7.3.6. El cas de l'Albert

L'Albert és el nom suposat d'un alumne de primer curs de batxillerat (16 anys) que no ha seguit cap aprenentatge específic sobre la resolució de problemes ni sobre la demostració en matemàtiques. L'ensenyament de la resolució de problemes sempre se li ha enfocat des d'un punt de vista de la resolució de exercicis o problemes d'aplicació els continguts dels quals acaben de ser explicats pel professor.

La metodologia de treball de l'Albert a les seves classes combina fases expositives del professor amb una àmplia proposta d'activitats que ell i els seus companys resolen en grups petits, amb un ampli grau de llibertat per a comentar les activitats. L'Albert i els seus companys fan servir esporàdicament l'ordinador, però, com l'Adrià i el Gerard, sempre treball en col·laboració amb els seus companys i fent activitats estructurades i guiades.

L'Albert és un alumne més aviat tímid que no ha tingut mai dificultats per a aprovar les matemàtiques i la resta d'assignatures, no tant pel que estudia sinó per la seva capacitat d'entendre i reflexionar sobre les coses que se li expliquen. Com els alumnes anteriors, conserva coneixements procedimentals relacionats amb l'aplicació de fórmules per al càlcul d'àrees planes, i coneixements suficients sobre els conceptes associats a les construccions geomètriques de l'àrea gràfica de l'AgentGeom i els que es fan servir en l'escriptura de les sentències deductives.

7.3.7. El procés de resolució del problema del paral·lelogram de l'Albert

En els següents paràgrafs analitzem, segons l'esquema de Cobo i altres (2004), el procés de resolució desenvolupat per l'Albert en la seva interacció amb l'AgentGeom. Aquest esquema d'anàlisi considera bàsicament tres aspectes: les formes de fer servir les àrees gràfica i deductiva de l'AgenGeom, la naturalesa de les accions de l'alumne -si són per iniciativa pròpia (proactives) o són dirigides pels missatges de l'agent tutor (reactives)-, i la influència dels missatges en la conducta de l'alumne.

En la implementació de missatges a l'AgentGeom hem diferenciat entre missatges de nivell 0, 1 i 2, segons siguin, respectivament, suggeriments generals que no incloguin ni cap contingut matemàtic ni cap referència, informacions que només continguin el nom dels continguts matemàtics involucrats, i suggeriments que continguin informació concreta dels continguts matemàtics involucrats en la resolució.

Hem dividit el procés de resolució en tres episodis, que hem anomenat, segons el seu contingut, de la forma: establiment d'una conjectura, traçat de rectes perpendiculars i traçat de rectes paral·leles.

7.3.7.1.L'establiment d'una conjectura

Immediatament després de llegir l'enunciat del problema i de carregar en la pantalla gràfica la figura adjunta a l'esmentat enunciat, l'Albert fa un intent erroni, corregit per l'agent mediador, d'escriure la igualtat de les àrees dels triangles "abm" i "amd" (accions 3 i 4, figura 7.3. 11).

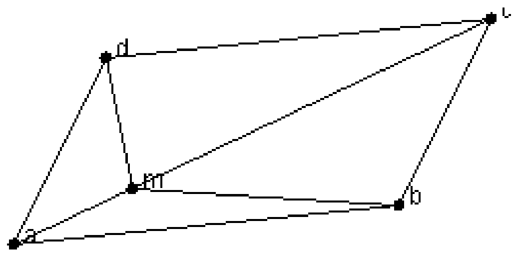


Figura 7.3.11

3. Albert: Deducció: àrea dab = àrea amb
4. Agent mediador: l'objecte "dab" no existeix.

L'Albert només començar la resolució del problema ha utilitzat l'editor de deduccions, per a escriure directament la conjectura (accions 5 i 6) que les àrees dels dos triangles que es pretenen comparar són iguals.

5. Albert: Deducció: àrea dam = àrea amb
6. Agent mediador: àrea dab = àrea amb: correcta

L'agent mediador no sols li ha permès establir aquesta conjectura, sinó que l'ha validada. L'Albert té dubtes d'introduir aquesta sentència com a deducció final. No ho fa perquè sap, per les explicacions prèvies, que l'agent tutor se la validarà però li exigirà una argumentació. Ara l'Albert sap el resultat final del problema, però ha d'argumentar-lo. Així doncs, en començar el seu procés de resolució ha transformat el problema del paral·lelogram, que es un problema de trobar, en un problema de demostrar, en la terminologia de Polya (1975).

L'Albert ha fet a l'inici del procés de resolució el que gairebé cap alumne fa, és a dir, utilitzar directament l'àrea deductiva de l'AgentGeom. Sembla que l'Albert ha sabut comprendre les avantatges que li proporciona el sistema i se n'ha aprofitat. A partir d'ara ha de començar a justificar la intuïció que ha tingut, basada només en l'observació de la figura de l'enunciat.

7.3.7.2.El traçat de rectes perpendiculars

A l'inici d'aquest episodi, l'Albert té dubtes i realitza accions sense una intencionalitat aparentment definida: torna a llegir l'enunciat, traça l'altra diagonal "db" del paral·lelogram, identifica el punt on es tallen les diagonals, torna a esborrar aquesta diagonal, assenyala línies, crea el segment "am", etc.

L'Albert ha iniciat la utilització de l'àrea gràfica. Sap que les seves sentències deductives han d'utilitzar objectes gràfics que estiguin construïts en aquesta àrea i, per tant, no podrà construir la seva argumentació si no comença a crear elements auxiliars que complementin la figura inicial.

L'acció 16 (taula 7.3.8) marca el l'inici de tot un seguit d'accions que semblen tenir una finalitat concreta: la expressió de les àrees dels triangles "abm" i "amd" en funció de les seves bases i altures.

16	Albert	Traça perpendicular a da per m amb nom pm.
17	Albert	Crea intersecció de la línia pm amb la ab de nom p.
18	Albert	Crea intersecció de la línia pm amb la da de nom q.
19	Agent Tutor	Missatge: Tracta de trobar també relacions entre les altures dels triangles les àrees dels quals vols comparar.
20	Albert	Traça la perpendicular a la línia ab pel punt m de nom alt2.
21	Albert	Intersecció de la línia alt2 amb la ab de nom (no acaba).
22	Albert	Clica la finestra del Tutor i li surt el mateix missatge anterior: Tracta de trobar també relacions entre les altures dels triangles les àrees dels quals vols comparar.
23	Albert	Intersecció de la línia alt2 amb la ab de nom r.
24	Albert	Traça segment des de q a m amb nom qm.
25	Agent Tutor	Missatge: Podries pensar alguna forma de descompondre el paral·lelogram en triangles, per exemple, traçant paral·leles que passin per m.
... ...		
29	Albert	Deducció: línia qm = línia mr.
30	Agent Mediador	línia qm = línia mr: falsa.
31	Albert	Deducció: línia qm = línia mr*2.
32	Agent Mediador	línia qm = línia mr*2: falsa.

Taula 7.3.8. Part de l'episodi en el qual l'Albert traça i compara rectes perpendiculars als costats dels triangles.

L'Albert ha començat a traçar perpendiculars (acció 16). Això posa en alerta a l'agent tutor sobre la possibilitat que traci les altures dels triangles, però les accions 16, 17 i 18 (taula 7.3.8, i figura 7.3.12), en les que l'Albert traça la perpendicular "pm" al costat "da" i identifica les seves interseccions els costats "da" i "ba", no estan en cap de les estratègies que resolen el problema. Per això, l'agent tutor respon a aquestes accions enviant un missatge de nivell 1 (acció 19).

La comunicació entre l'Albert i l'agent tutor comença a produir-se. Pel contingut del missatge, l'Albert pensa que és en el camí bo, però en realitat no ha sabut interpretar aquesta comunicació. El fet que l'agent tutor hagi respost amb un missatge ha d'interpretar-se com que les accions no segueixen cap estratègia que porti a la solució del problema, és a dir, són accions no reconegudes pel sistema. L'Albert continua amb la seva idea inicial de traçar les altures corresponents als costats "da" i "ba", per a poder-les comparar, com diu el missatge (accions 20, 23, 24…).

En les interaccions professor-alumne, cadascun dels interlocutors, sobre tot si treballen plegats amb freqüència, saben interpretar las formes de comunicació verbals o no verbals. Ara l'agent tutor ha respost amb un missatge a les accions gràfiques de l'Albert, que aquest no ha sabut interpretar, no ja el seu contingut, sinó la presència del missatge. Això confirma el que ja vam comentar a l'apartat 7.3.3.1, sobre el fet que els alumnes i l'AgentGeom necessitaven un període més gran de temps d'adaptació mútua per a acabar de comprendre els seus processos comunicatius.

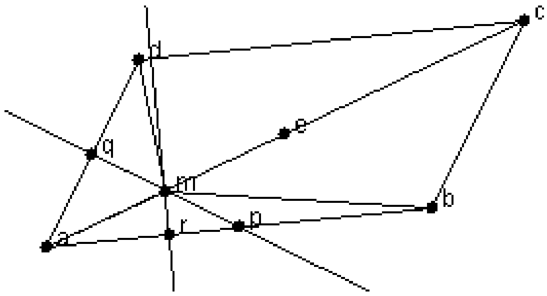


Figura 7.3.12

La persistència de l'Albert en el desenvolupament de l'estratègia que ha triat, fa que l'agent tutor li enviï un altre missatge (acció 25, taula 7.3.8), ara de nivell 2 i de canvi d'estratègia: "Podries pensar alguna forma de descompondre el paral·lelogram en triangles, per exemple, traçant paral·leles que passin per m". Aquest missatge és molt més concret i aporta una informació matemàtica considerable, malgrat que no decisiva, com hem tingut oportunitat de comprovar amb d'altres alumnes.

Al final d'aquest episodi, l'Albert compleix el seu objectiu de construir les altures sobre els costats "ba" i "da" dels triangles "abm" i "amd" per a arribar a comparar-les (accions 29 i 31 de la taula 7.3.8).

L'agent mediador no valida cap dels dos intents de comparació de l'Albert, i aquest comença a pensar en canviar d'estratègia mirant l'últim missatge de l'agent tutor.

Així doncs, podem resumir l'actuació de l'Albert en aquest episodi ressaltant els següents aspectes: en primer lloc, la seva persistència en desenvolupar fins al final l'estratègia que ha triat, animat, sense dubte, per la interpretació que fa del primer missatge que li envia l'agent tutor. En segon lloc, la naturalesa de les seves accions, que són proactives i que generen elements gràfics auxiliars per a la seva aplicació en sentències deductives. I, per últim, la desconsideració del segon missatge que li envia l'agent tutor fins que les sentències deductives que pretenen comparar les dues altures que ha traçat no són validades per l'agent mediador.

7.3.7.3. El traçat de rectes paral·leles

L'agent tutor sap que l'Albert no ha tingut en compte el seu últim missatge (acció 25, taula 7.3.8). No només no ha fet cap acció gràfica o deductiva en la direcció que li marca el missatge, sinó que les tres últimes accions no han estat reconegudes per l'agent tutor (acció 26, en la qual traça el segment "mr", la 29 i la 31). En aquestes circumstàncies l'agent tutor pot repetir el mateix missatge. És el que fa en l'acció 33, envia a l'Albert el suggeriment que descompongui el paral·lelogram en triangles traçant paral·leles que passin pel punt "m".

A partir d'aquest moment s'inicia un nou episodi del qual ressaltarem dues fases clarament diferenciades en el desenvolupament de l'estratègia que marca el traçat de rectes paral·leles als costats del paral·lelogram i que comentem a continuació.

Durant la primera fase, que abraça quasi 11 minuts, la resposta de l'Albert al missatge emès per l'agent tutor és immediata, possiblement perquè es troba en una situació de bloqueig. Les seves accions, que són clarament reactives a aquest missatge, ja que mira diverses vegades la finestra del Tutor per a veure si segueix correctament les seves indicacions, són totes de naturalesa gràfica: traçat de rectes paral·leles als costats del paral·lelogram, intersecció de les esmentades rectes amb els costats i identificació de tots els segments possibles de la figura que resulta. Són continus els diàlegs amb l'agent mediador, que no accepta sempre la nomenclatura que l'Albert assigna als objectes que va creant.

Durant tota aquesta fase del procés de resolució l'Albert s'ha oblidat d'utilitzar l'àrea deductiva. Sembla que estigui bloquejat. Aquest bloqueig el manifesta obsessionant-se en la creació de nous segments i línies (figura 7.3.13), algunes de les quals no són reconegudes per l'agent tutor, que acaba enviant-li un nou missatge (acció 53).

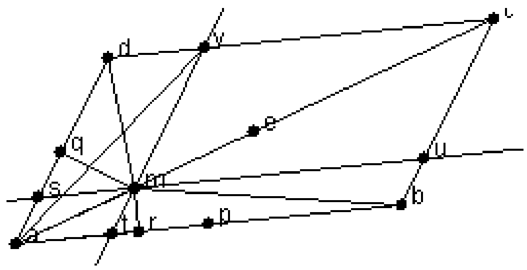


Figura 7.3.13

53. Agent tutor: Identifica els triangles nous que s'han format.

Aquest missatge és una insinuació a l'alumne perquè continuï amb l'estratègia que ha iniciat, i és el començament de la segona fase d'aquest episodi que conduirà a l'Albert a la justificació de la seva conjectura.

No és possible identificar triangles a l'àrea gràfica, ja que l'agent mediador els crea automàticament quan l'alumne fa el segment que tanca l'esmentat triangle, però l'Albert interpreta correctament el missatge i reacciona començant novament la creació de sentències deductives, intercalades amb algunes accions gràfiques que completen la figura que havia fet en la fase anterior. Les sentències deductives comparen les àrees de paral·lelograms que s'han format, de triangles i de sumes d'àrees de triangles. Algunes d'elles serien:

56. Albert: Deducció: àrea atdv = àrea asbu
60. Albert: Deducció: àrea atv = àrea sab
64. Albert: Deducció àrea smd = àrea mdv
66. Albert: Deducció àrea tbm = àrea bmu
68. Albert: Deducció àrea atv +àrea avd = àrea asb + àrea sub

Totes són validades per l'agent mediador.

Al final, l'Albert introdueix la sentència de la conjectura que havia establert al començament i l'agent mediador se la dóna per justificada, amb al voltant d'un 35 % d'accions reconegudes. L'AgentGeom dóna per bona una argumentació quan l'alumne supera el 30% de les accions gràfiques que desenvolupen l'estratègia que ha seguit, que són les accions reconegudes per aquesta estratègia, i sap diferenciar entre totes les accions validades, les que són reconegudes de les que no ho són. Aquestes últimes, per tant, no contribueixen a justificar la conjectura que l'alumne ha establert.

Resumint aquest episodi, podem dir que les accions de l'Albert han sigut dirigides pels missatges de l'agent tutor (accions reactives) i, per tant, podem considerar que, en aquest episodi, la interacció entre l'Albert i l'AgentGeom ha estat guiada per aquest. Aquesta direcció ha conduït a l'Albert a realitzar, primer, només accions gràfiques i, després, a combinar les accions gràfiques i les deductives per a desenvolupar el seu procés argumentatiu. L'Albert ha après de l'AgentGeom a fer-se una idea de demostració matemàtica com una seqüència de sentències relacionades amb la conjectura que vol demostrar.

7.3.7.4.Conclusions

Els noms que hem donat als episodis del procés de resolució que l'Albert ha portat a terme són prou il·lustratius de l'estratègia que ha seguit: "establiment de la conjectura" igualtat de les dues àrees que es pretenen comparar; "traçat de perpendiculars", amb la finalitat d'aplicar la fórmula de l'àrea del triangle o, si més no, de comparar les altures, per tal d'arribar a comparar les àrees; i "traçat de rectes paral·leles" als costats del paral·lelogram, amb la idea de comparar les àrees dels triangles nous que es formin. D'aquesta manera, l'Albert ha pogut finalment justificar la conjectura que havia establert al començament.

A més, les idees bàsiques més destacades d'aquest procés de resolució són les tres següents:

- L'Albert ha utilitzat directament, a l'inici del procés de resolució, l'àrea deductiva de l'AgentGeom per tal d'establir una conjectura. En aquest sentit, l'Albert ha aprofitat les avantatges que li proporciona el sistema. Així, l'agent mediador ha permès a l'Albert no només establir aquesta conjectura, sinó que se l'ha validada. Amb la qual cosa, a partir d'aquest moment l'Albert ha de començar a justificar la intuïció que ha tingut, que ha estat basada només en l'observació de la figura de l'enunciat.
- És també digne de ressaltar la persistència de l'Albert en desenvolupar fins al final l'estratègia que ha triat a l'episodi de "traçat de perpendiculars". Aquesta persistència ha estat animada per la interpretació errònia que fa del primer missatge que li envia l'agent tutor. Així, l'actuació de l'Albert en relació amb l'AgentGeom en aquest episodi es caracteritza per la naturalesa proactiva de les seves accions, que generen elements gràfics auxiliars per a la seva aplicació en sentències deductives, i la desconsideració del segon missatge que li envia l'agent tutor fins que les sentències deductives que pretenen comparar les dues altures que ha traçat no són validades per l'agent mediador.
- Pel contrari, les accions de l'Albert a l'últim episodi han estat dirigides pels missatges de l'agent tutor (accions reactives) i, per tant, la interacció entre l'Albert i l'AgentGeom ha estat guiada per aquest. Aquesta direcció ha conduït l'Albert a realitzar, al principi, només accions gràfiques i, després, a combinar les accions gràfiques i les deductives per a desenvolupar el seu procés argumentatiu. L'Albert ha après de l'AgentGeom a fer-se una idea de demostració matemàtica com una seqüència de sentències relacionades amb la conjectura que vol demostrar.

CAPÍTOL 8

CONCLUSIONS, APLICACIONS, i SUGGERIMENTS D'AMPLIACIÓ

8.1. Establiment de conclusions

Aquest treball consta de dues parts, d'acord amb els objectius que ens havíem proposat. En la primera, fem una anàlisi de la bibliografia al voltant de l'ensenyament de la resolució de problemes, que abraça el tractament del tema a l'ESO i en el Batxillerat, i una revisió bibliogràfica dels models instructius i les formes d'interactuar en l'ensenyament i l'aprenentatge de la resolució de problemes a l'aula. En la segona, hem fet diferents aportacions: la proposta de sistemes de missatges amb els quals el professor pot ajudar els seus alumnes en la resolució de problemes, la caracterització i implementació del sistema tutorial AgentGeom, i les anàlisis dels beneficis cognitius dels alumnes en la seva interacció amb l'AgentGeom.

Com a resum de la primera part d'aquest treball, direm que, en el tractament de la resolució de problemes a l'ESO, s'aborda un ampli ventall d'estratègies de resolució: distinció entre el que es coneix i el que és desconegut, diferenciació entre la informació útil i la supèrflua, estimació de possibles solucions, reducció de problemes complexos a d'altres de més senzills, demostració de propietats per mètodes inductius i deductius, formulació d'hipòtesis, recerca d'exemples i de contraexemples, aplicació d'algorismes de càlcul amb calculadores, i utilització del llenguatge algebraic. Però trobem a faltar referències explícites a reflexions sobre el procés que l'alumne segueix per a obtenir una solució, si exceptuem el cas de la comprovació de la validesa dels resultats. En canvi, en el Batxillerat els objectius generals de l'Àrea de Matemàtiques ja fan referència als hàbits relacionats amb la gestió dels processos de resolució i, concretament, a les discussions prèvies, a la comprovació i interpretació de les solucions, i a la conveniència de buscar diferents procediments en la resolució d'un problema per tal de triar el que optimi el procés de resolució.

Pel que fa a la revisió bibliogràfica de propostes metodològiques per a l'ensenyament de la resolució de problemes, hem diferenciat les que fan els investigadors que consideren l'ensenyament i l'aprenentatge de les estratègies involucrades en la resolució de problemes com a objectiu principal i, fins i tot, únic, de les que consideren que la resolució de problemes ha d'estar integrada en el currículum de matemàtiques, com un objectiu més. S'han de destacar per la seva rellevància les aportacions de Polya, les de Garofalo i Lester, i Schoenfeld, i l'enfocament de l'ensenyament de la resolució de problemes que fa el NCTM (veure el capítol 3). Altres investigadors descriuen les regularitats que es construeixen interactivament entre el professor i els alumnes en l'ensenyament de la resolució de problemes, que anomenen models interactius (extractiu, de discussió, de focalització, afirmatiu, interrogatiu, etc.), per arribar a establir un procés de negociació de significats.

Als següents apartats resumim la proposta d'un sistema de missatges, la caracterització del sistema tutorial AgentGeom, i les anàlisis dels beneficis cognitius dels alumnes en la seva interacció amb l'AgentGeom.

8.1.1. Sistemes de missatges

Hem elaborat per cada problema un sistema de missatges, que mostrem al capítol 5, per ajudar els alumnes en les diferents fases de la resolució del problema.

Hem dividit el procés de resolució de cada problema en tres fases: familiarització, planificació/execució i verificació. Associada a cadascuna d'aquestes fases, hem identificat missatges diferenciats en tres nivells o categories. Els de nivell 0, que són missatges o suggeriments generals que no inclouen continguts matemàtics implicats en la resolució del problema. Els de nivell 1, que són missatges que només contenen el nom dels continguts matemàtics involucrats. I els de nivell 2, que són missatges que contenen informacions concretes sobre aquests continguts matemàtics.

Hem utilitzat aquest conjunt de missatges com a base per a seleccionar els que hem implementat en el sistema tutorial, amb la finalitat que puguin ser mostrats als alumnes en cada moment del procés de resolució de problema.

Així doncs, un cop identificades i analitzades les possibles accions que l'alumne pugui fer, d'acord amb l'anàlisi dels continguts matemàtics de cada problema fets al capítol 4, hem seleccionat els missatges que considerem més adients en cada moment del procés de resolució de cada problema, sempre tenint en compte els punts claus per a implementar el sistema de missatges que són: el sistema farà sortir un nou missatge per cada tres accions de l'alumne no reconegudes pel sistema; l'alumne podrà demanar un missatge d'ajuda en cada moment de la resolució; i, depenent de les fases de la resolució en les quals es trobi l'alumne, els missatges sortiran o no de forma aleatòria d'entre un conjunt prèviament establert.

8.1.2. Característiques del sistema tutorial artificial AgentGeom

Hem descrit al capítol 6 les funcionalitats que té el sistema tutorial multiagent AgentGeom, elaborat pel nostre equip de recerca de la UAB. Resumim a continuació les més importants.
L'Agentgeom és un sistema tutorial que combina dues funcions bàsiques en qualsevol sistema educatiu: és obert i permet l'atenció a la diversitat, ja que es donen els mecanismes necessaris perquè el professor pugui ampliar la base de problemes. El professor pot gestionar el sistema: creant problemes, assignant-los als seus alumnes segons les seves característiques cognitives, examinant l'efectivitat dels seus processos de resolució, i modificant el sistema de missatges que pot enviar a cada alumne en cada moment del procés de resolució del problema, segons l'estratègia que hagi triat.

Hem dissenyat el sistema AgentGeom de forma que sigui una aplicació portable a qualsevol entorn. Per aquest motiu l'hem desenvolupat sobre una arquitectura web i, fent servir els recursos més bàsics que ens proporciona aquest entorn, hem aconseguit que l'alumne pugui interactuar amb el sistema des de qualsevol computadora connectada a la Xarxa i amb un navegador senzill. Així doncs, l'AgentGeom és una aplicació servidora, és a dir, es troba en una màquina servidora i molts alumnes, simultàniament, s'hi poden connectar mitjançant el protocol HTTP.

L'AgentGeom és un sistema tutorial artificial concebut com un sistema multiagent híbrid que combina interfícies, utilitzades per persones com a usuaris del sistema (professors i alumnes), amb dos agents artificials: l'agent tutor, que té una arquitectura principalment reactiva, i l'agent mediador, que rep les entrades de les interfícies dels alumnes i del professor.

Les interfícies són totes les eines de les quals disposen els usuaris per interactuar amb els agents mediador i tutor. En el cas del professor, l'AgentGeom disposa d'eines de comunicació –diferents pantalles- que fan possible que el professor creï problemes, els assigni als seus alumnes i pugui controlar l'historial de la resolució de cadascun dels seus alumnes en el moment que vulgui.

La creació de problemes nous exigeix l'elaboració de tot un contingut pedagògic al voltant de cada problema, que comporta la identificació de totes les estratègies que resolguin el problema i els diferents missatges que el professor vulgui que es mostrin als alumnes quan l'agent tutor l'estimi oportú.

La interfície de l'alumne li ofereix totes les eines per a resoldre el problema. Així, l'alumne disposa d'una àrea de construcció gràfica i d'un editor de deduccions. A l'àrea de construcció gràfica, l'alumne pot construir figures fent servir els botons (primitives de construcció) per a dibuixar punts, línies rectes i circumferències, segments, paral·leles, perpendiculars, definir la intersecció de dos objectes, utilitzar el compàs, etc.

Amb l'editor de deduccions, l'alumne pot escriure sentències, prenent com a referents els objectes gràfics que ha creat. L'agent mediador validarà o no les sentències que l'alumne escrigui.

L'agent mediador rep les entrades de les interfícies del professor i dels alumnes, és a dir, processa totes les accions (gràfiques i deductives) del professor quan crea problemes nous i de l'alumne quan resol el problema, i les emmagatzema en una base de dades. Concretament, pel que fa a les accions gràfiques, l'agent mediador rep totes les primitives de construcció, calcula tots els elements nous derivats de les accions, emet missatges si hi ha errors en la construcció o en la identificació dels nous objectes gràfics i, si el procés acaba correctament, mostra la figura que ha resultat a l'àrea de construcció.

Pel que fa a l'editor de deduccions, l'agent mediador gestiona la construcció correcta de la sintaxi de les sentències, mostrant missatges d'error si no estan ben construïdes; determina si les sentències són certes o falses, fent servir el model de gràfic al qual estan referides; i mostra la validesa o no de cada deducció introduïda.

L'agent tutor té per objectiu ajudar directament a l'alumne en la resolució del problema. Per això, l'agent tutor conté, en forma d'arbre, cadascuna de les estratègies corresponents a cada problema, també té diferents llistes de missatges: una llista per cada estratègia i una llista especial de canvi d'estratègia. Així, l'agent tutor té tota la informació sobre estratègies i missatges, i només necessita un mecanisme per saber quan i com mostrar els missatges a l'alumne. Aquest mecanisme comença quan l'agent mediador, que segueix la pista de totes les accions que realitza l'alumne, les passa a l'agent tutor, que les identifica dins del seu arbre d'estratègies.

Quan l'alumne introdueix el resultat final i ha fet més d'un 30% de les accions reconegudes, el sistema valida aquest resultat final.

8.1.3. Beneficis cognitius dels alumnes en la seva relació amb el sistema tutorial AgentGeom

Amb aquesta experiència hem aconseguit evidenciar que l'AgentGeom pot ser una eina auxiliar del professor, que li pot ajudar en les seves necessitats d'atendre a la diversificació d'alumnes amb la qual es troba cada dia. Contribueix a això la capacitat que té el professor, a través de l'AgentGeom, d'adaptar els problemes i els missatges a les característiques cognitives de cadascun dels seus alumnes.

Pel seu disseny, l'AgentGeom col·labora, de manera quasi autònoma, en el desenvolupament de les competències estratègiques dels alumnes en la resolució de problemes de matemàtiques, creant les condicions interactives necessàries perquè l'alumne pugui avançar en el procés de resolució. L'AgentGeom contribueix a aquest avenç fent suggeriments que orienten a l'alumne, però també proporcionant-li, en cada moment, només la informació estrictament necessària, de forma que sigui el propi alumne qui resolgui realment el problema.

A més, l'AgentGeom ajuda a generar noves habilitats relacionades amb els processos argumentatius en matemàtiques. Per això, hem dissenyat l'AgentGeom de forma que té dues àrees –gràfica i deductiva-, la utilització conjunta de les quals permet als alumnes crear objectes matemàtics genèrics, és a dir, desvinculats de les mesures concretes dels seus elements, per a fer-los servir en les sentències deductives, que han de ser escrites seguint les normes pròpies del llenguatge matemàtic, i que han de tenir per referents els objectes prèviament creats. Amb tot això i amb el fet que l'AgentGeom no pot donar per bones les simples conjectures o les respostes no suficientment argumentades i, per tant, exigeix un nombre mínim de sentències que han de ser validades pel sistema, aconseguim que els alumnes desenvolupin la seva capacitat d'abstracció i s'apropiïn de la idea de demostració matemàtica.

Dels processos de resolució portats a terme pels alumnes en la seva interacció amb l'AgentGeom, mostrem, a continuació, molt resumides, les interaccions més significatives, per la influència que han tingut al llarg dels esmentats processos.

- Moltes vegades, les interpretacions errònies de les formes de comunicació no verbals fan que els alumnes perdin l'oportunitat d'aprofundir en estratègies que havien començat a desenvolupar. Això passa en els processos comunicatius presencials –professor i alumnes o entre alumnes-, i també en la interacció dels alumnes amb l'AgentGeom, com en el cas de l'episodi d'anàlisi de la resolució que porta a terme el Gerard. En aquest cas, el silenci de l'agent tutor i el fet que l'alumne no hagi demanat cap missatge d'ajuda el porten a abandonar l'estratègia que havia iniciat.

- Pel que fa a la utilització de les àrees gràfica i deductiva, podem dir que hi ha una clara evolució en l'actuació dels alumnes que va des d'un ús gairebé exclusiu de l'àrea gràfica en els primers episodis, en els quals fan servir l'AgentGeom com si fos una eina de dibuix gràfic, fins a una utilització conjunta i coordinada d'ambdues àrees als episodis finals. Això els porta, en el cas de l'Adrià, a l'obtenció i validació de la solució identificada com a "aplicació de fórmules" dins de l'espai bàsic del problema del paral·lelogram i, en el cas del Gerard, a establir una conjectura sobre el resultat del problema que pretén solucionar. D'aquesta manera, la resolució del problema es troba en una situació ideal per al Gerard: sap el que vol fer –provar la conjectura-, i la manera de fer-ho, és a dir, mitjançant l'encadenament de sentències, malgrat que encara no sap el contingut d'aquestes. Així, en aquests dos casos, podem dir que els alumnes han comprès l'essència del sistema tutorial, que es manifesta per la combinació deductiu-gràfica per a potenciar el procés argumentatiu.

- En canvi, L'Albert ha utilitzat directament, a l'inici del procés de resolució, l'àrea deductiva de l'AgentGeom per tal d'establir una conjectura. En aquest sentit, també s'ha aprofitat de les avantatges que li proporciona el sistema, ja que l'agent mediador ha permès a l'Albert no només establir aquesta conjectura, sinó que se l'ha validada. Amb la qual cosa, a partir d'aquest moment, l'Albert ha de començar a justificar la intuïció que ha tingut, basada només en l'observació de la figura de l'enunciat. En la resta de la seva resolució, la utilització que fa de la combinació de les àrees gràfica i deductiva és semblant a la dels seus companys.

- La conducta d'alguns alumnes davant l'AgentGeom és caracteritza per la seva autonomia, que els permet avançar en el procés de resolució sense haver de seguir els suggeriments de l'agent tutor. Aquest és el cas de l'Adrià que, durant l'episodi d'anàlisi del seu procés de resolució, concreta la seva estratègia de traçat d'altures, malgrat que sobre diferents bases, i, a l'episodi d'implementació, acaba trobant l'estratègia adient, considerant la base comuna, "am", i comparant les altures sobre aquesta base.

8.2. Especificacions de les aplicacions del projecte en el sistema educatiu

Al llarg dels diferents capítols d'aquesta memòria hem anat descrivint moltes de les aplicacions que aquest projecte pot tenir en el sistema educatiu actual. A continuació, resumim les que considerem més importants.

En alguns moments, tots els que ens dediquem a l'ensenyament ens hem trobat en situacions complexes on intervenien molts factors o, dit d'una altra manera, molts móns: el món professional i personal dels docents, el món institucional del Departament d'Educació, les situacions de malaltia dels alumnes, les absències dels alumnes, les situacions humanes de les seves famílies, etc. Cadascuna d'aquestes realitats tenen uns interessos, cultures i modes d'actuar propis, específics i ben diferenciats. Apropar-nos a aquest univers tan divers, des del món de l'educació secundària, i donar eines que ajudin a solucionar, en la mesura que sigui possible, situacions problemàtiques ha estat un dels nostres objectius amb aquest projecte. Així, el sistema tutorial multiagent AgentGeom tracta de proporcionar eines informàtiques als alumnes de l'educació secundària i, entre ells, als que tenen necessitats educatives específiques. En aquest sentit, l'AgentGeom pot oferir un servei social de suport a les aules i d'atenció als usuaris, gairebé de manera personalitzada.

Aquest treball mostra que l'elaboració d'eines informàtiques, en general, i la construcció d'un sistema multiagent intel·ligent que guiï i ajudi l'alumne en la resolució de problemes de matemàtiques, en particular, s'han de fonamentar en un estudi sistemàtic i rigorós tant de la metodologia que segueix el professor en situacions semblants com en la recerca de l'entorn més adient que simuli, el més fidelment possible, les eines que l'alumne té normalment al seu abast (llapis, paper, eines de dibuix, etc.), millorant-les, ressaltant-les i aprofitant, en cada moment, les parts positives dels mitjans informàtics.

De la mateixa manera, aquest treball evidencia la importància que té l'anàlisi de la comunicació entre el professorat i els seus alumnes en contextos d'ensenyament i aprenentatge de les matemàtiques, en la classe i a distància. A més, mitjançant l'aprofundiment en els processos comunicatius, es pot aconseguir utilitzar el tipus de missatge adient en cada moment, o donar informacions i orientacions addicionals sobre els continguts matemàtics de forma que orientin a l'alumne, però no més del que necessita, la qual cosa facilita el seu procés d'aprenentatge. En aquesta línia, els sistemes de missatges que hem elaborat han estat útils en la implementació del sistema tutorial AgentGeom, però també es poden aprofitar en els processos d'ensenyament i aprenentatge presencials a l'aula.

8.3. Reflexiones sobre possibles ampliacions

Considerem que el sistema tutorial AgentGeom aporta elements nous en l'elaboració i aplicació d'entorns interactius web d'ensenyament i d'aprenentatge de la resolució de problemes respecte dels referents més immediats, com hem tingut oportunitat de comentar a l'apartat 6.3. Malgrat això, hi ha tres aspectes, en certa forma relacionats, en els quals s'han d'aprofundir per tal de millorar la seva aplicabilitat. Ens referim, concretament, a la facilitat d'implementació de nous problemes per part del professor, a la disposició de bateries de problemes que abracin totes les estratègies implicades en la resolució del tipus de problemes que hem considerat i d'altres més generals de tipus geomètric, i a la necessitat d'implementar un sistema que avaluï els processos de resolució portats a terme pels alumnes.

Pel que fa a la creació per part del professor de nous problemes per assignar-los als seus alumnes segons els seus coneixements, el sistema ja ofereix aquesta possibilitat, com hem manifestat al llarg d'aquesta memòria, però la implementació exigeix al professor, per una banda, coneixements informàtics que normalment no estan al seu abast i, per l'altra, molt temps per tal de poder analitzar els nous problemes, com hem fet nosaltres al capítol 4. La primera qüestió és feina dels informàtics que poden elaborar una interfície que faciliti molt més la implementació de nous problemes. La segona té a veure amb el fet que el professor disposi de tot un ventall de problemes geomètrics que es puguin resoldre fent servir una, dues o més estratègies, barrejades o no en un mateix problema, a diferents nivells de dificultat. Amb tot això i amb sistemes de missatges semblants als que hem proposat al capítol 5, el professor podria, sense massa dificultat ni molta feina, confeccionar itineraris de problemes pels quals cada alumne pogués circular segons les seves característiques cognitives i els seus avenços individuals.

Independentment de les qüestions informàtiques, l'assessorament pedagògic per a la implementació d'un sistema d'avaluació dels processos de resolució dels alumnes a l'AgentGeom, no contemplat tampoc en aquest treball, comportaria tot un estudi previ sobre l'avaluació dels diferents continguts implicats en la resolució de problemes que servís d'argumentació teòrica i pràctica del sistema a implementar.

BIBLIOGRAFIA

ABRANTES, P. (1996). El papel de la resolución de problemas en un contexto de innovación curricular. *UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 8, Abril-1996, 7-18.

AÏMEUR, E., FRASSON, C., i DUFORT, H. (2000). Cooperative Learning Strategies for Intelligent Tutoring Systems. *Applied Artificial Intelligence*, 14: 465-489.

BALACHEFF, N. (1990). Future perspectives for research in the Psychology of Mathematics Education. En *Mathematics and Cognition*. P. Nesher and J. Kilpatrick (ed.). Cambridge University Press.

BALACHEFF, N. (1999). Apprendre la preuve. En: Salattin, J. Szczeciniarz, J.J. (eds). *Le concept de preuve à la lumière de l'Intelligencie Artificielle*, pp. 197-236. Paris: PUF.

BALACHEFF, N. (2000) Teaching, an emergent property of eLearning environments. En *Proceedings of the International Conference on Intelligent Tutoring Systems 2000*, Nice. Retreived at http://www-didactique.imag.fr/Balacheff/TextesDivers/IST2000.html.

BAROODY, A. J. i GINSBURG, H. P. (1986). The Relationship Between Initial Meaningful and Mechanical Knowledge of Arithmetic. En J. Hiebert (ed.). *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics,* editat per James Hiebert, 75-112. Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

BRUNER, J.S. (1989). *The Culture of Education*. Harvard University Press. [Edició en castellà: La educación, puerta de la cultura. Visor, Madrid, 1997].

BUNT, A. i CONATI, C. (2002). Assessing Effective Exploration in Open Learning Environments using Bayesian Networks. Lab. Leibniz, UJF, Grenoble

CALLEJO, M. L. (1994). *Un club matemático para la diversidad*. Narcea, S. A. de Ediciones. Madrid.

CARRILLO, J. (1998). La Resolución de Problemas en la Enseñanza Secundaria. Ejemplificaciones del para qué. *Epsilon*, 40, 15-26.

CARRILLO, J. i CONTRERAS, L.C. (eds.) (2000). *Resolución de problemas en los albores del siglo XXI: una visión internacional desde múltiples perspectivas y niveles educativos*. Huelva: Hergué.

COBB, P. i BAUERSFELD (1995). *The emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures.* N. J. Lawrence Erlbaum Associates.

COBO, P. (1995). Efectos de la utilización de gráficos en la traducción algebraica de problemas verbales. Estudio del caso de problemas verbales que combinan estructura semántica de cambio y de comparación. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*. Núm. 4. Abril. 63-75.

COBO, P. (1996). Análisis de las actuaciones de los alumnos de 3º de BUP en la resolución de problemas que comparan áreas de figuras geométricas. *Enseñanza de las Ciencias*. Vol. 14/ núm 2, 195-207.

COBO, P. (1998). Análisis de los procesos cognitivos y de las interacciones sociales entre alumnos (16-17) en la resolución de problemas que comparan áreas de superficies planas. Un estudio de casos. Tesi doctoral inèdita. Universitat Autònoma de Barcelona.

COBO, P. (2004). Experiencias sobre enseñanza de resolución de problemas de matemáticas. En *La actividad matemática en el aula. Homenaje a Paulo Abrantes* Joaquim Giménez, Leonor Santos, Joao Pedro da Ponte (coords.), 127-136. Ed. Graó. Barcelona.

COBO, P. i FORTUNY, J. M. (2000). Social interactions and cognitive effects in contexts of area-comparison problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 42*, 115-140.

COBO, P. i FORTUNY, J. M. (2004). Influencia de la tutorización en la mejora de las competencias de los alumnos en la resolución de problemas de matemáticas. XVI Simposio Iberoamericano de Enseñanza Matemática: "Matemáticas para el siglo XXI". Castellón. España.

COBO, P., FORTUNY, J. M., PUERTAS, E. i RICHARD, P. H. (2004). AgentGeom: A Multiagent System for Pedagogical Support in a Geometric Proof Problem. En premsa.

Cole, M. (1996). *Cultural Psychology. A one and future discipline*. Harvard University Press.

DEPARTAMENT D'ENSENYAMENT (1992): DECRET 96/1992, de 28 d'abril. *DOGC Núm. 2181 - 13/05/1992.*

DEPARTAMENT D'ENSENYAMENT (1996): DECRET 82/1996, de 5 de març. *DOGC Núm. 2181 - 13/03/1996.*

DEPARTAMENT D'ENSENYAMENT (2002a): DECRET 179/2002, de 25 de juny. *DOGC núm. 3670 - 04/07/2002*

DEPARTAMENT D'ENSENYAMENT (2002b): DECRET 182/2002, de 25 de juny.*DOGC núm. 3674 - 10/07/2002*

FERNANDEZ, M. L., HADAWAY, N. i WILSON J. W. (1994). Problem solving: Managing It All. *Mathematics Teacher*, 87, 3, 195-199.

FORMAN, E. (1989). The Role of Peer Interaction in the Social Construction of mathematical Knowledge. *International Journal of Education Research*, 13, 55-70.

FORTUNY J.M., i MURILLO, J. (1999): Un modelo de utilización de una red electrónica como soporte instruccional en la enseñanza de la geometría en la E.S.O. Revista de educación. Vol 1.

GAROFALO, J. i LESTER, F. K. (1985). Metacognition. Cognitive Monitoring and Mathematical Performance. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, 163-176.

GODINO, J. i LLINARES, S. (2000) El interaccionismo simbólico en Educación Matemática. *Educación Matemática*, Vol. 12, núm. 1, 70-92. Grupo Editorial Iberoamericana. México

GÓMEZ, I. (2000). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*. Narcea. S. A. Ediciones. Madrid.

GOOS, M. i GALBRAITH, P. (1996). Do it this way! Metacognitive Strategies in Collaborative Mathematical Problem Solving. *Educational Studies in Mathematics* 30: 229-260.

GUZMÁN, M. DE (1986): *Para pensar mejor*. Labor. Barcelona.

HIRABAYASHI, I. i SHIGEMATSU, K. (1987): Metacognition: The Role of the "Inner Teacher" (2). Actes de la 11 Conferència Internacional del PME, Montreal, Bergeron, J. C.; Herscovis, N; Kieran, C. (Eds.), Montreal, 243-249.

KAPA, E. (2001). A Metacognitive Support During the Process of Problem Solving in a Computerized Environment. *Educational Studies in Mathematics*, 47: 317-336.

KIERAN, C. (2001). The Mathematical Discourse of 13-year-old Partnered Problem Solving and Its Relation to the Mathematics that Emerges. *Educational Studies in Mathematics, 42*, 115-140.

KILPATRICK, J. (1985): A retrospective Account of the Past Twenty-five Years of Research on Teaching Mathematical Problem Solving. En Silver, E. A. ed. *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives*, 1-15. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

KROLL, D. MANSINGLIA, J. i MAU, S. (1992). Grading Cooperative Problem Solving. *Mathematics Teacher*. Vol. 85, nº 8, November. pp. 619-627.

KRULIK, S. i RUDNICK, J. A. (1987). *Problem Solving. A Handbook for Teachers*. Allyn and Bacon, Inc.

LABORATOIRE IEIBNIZ (2003). Baghera Assessment Project: Designing an hybrid and emergent educational society. In Soury-Lavergne S. (ed.), *Rapport pour la commission européenne, Programme IST, Les Cahiers du Laboratoire Leibniz nº 81*, Grenoble.

LAFORTUNE, L. i ST-PIERRE, L. (1994): *Metacognition et affectivité*. Col. Théories et practiques dans l'enseignement, Les Editions Logiques, Montreal.

LAKATOS, I. (1984). *Preuves et réfutations. Essai sur la logique de la découverte mathématique*. Paris: Hermann.

LAMBDIN, D. V. (1993). Monitoring Moves and Roles in Cooperative Mathematical Problem Solving. *Focus on Learning Problems in Mathematics*. Spring & Summer Editions. Vol. 15, numbers 2, 3, pp. 48-64.

LESTER, F. K. Jr. (1985). Methodological Considerations In Research on Mathematical Problem-Solving Instruction. En E. A. Silver (Eds.), *Teaching and Learning Mathematical Problem-Solving: Multiple Research Perspectives*, editat per Edward A. Silver, 41-69. Hillsdale, N. J.:Lawrence Erlbaum Associates.

LESTER, F. K. Jr. (1994). Musings about mathematical problem-solving research: 1970-1994. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25, 660-675.

LÉVY, P. (1994). *L'intelligence collective - Pour une anthropologie du cyberspace*. París: La Découverte.

LUENGO, V. (1999). *A Semi-empirical Agent for Learning Mathematical Prof*. Artificial Intelligence in Education. SP Lajoie and M. Vivet (eds). IOS Press.

MASON, J., BURTON, L., i STACEY, K. (1988). *Pensar matemáticamente*. Ministerio de Educación y Ciencia y Ed. Labor. Barcelona.

MAYER, R. (1986). *Pensamiento, resolución de problemas y cognición*. Ed. Paidos. Barcelona:Paidos. [Ed. or. 1983].

MCLEOD, D. B. (1992): Research on Affect in Mathematics Education: A Reconceptualization. En: *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, D. A. Grouws (Ed.), McMillan, Nova York, 575-598.

MEAVILLA, V. i FORTUNY, JM. (1999) Interacciones verbales y enseñanza-aprendizaje del algebra lineal, *UNO, . Revista de Didáctica de las Matemáticas*. Núm. 21. 81-104.

MERCER, N. (1997). *La construcción guiada del conocimiento. El habla de profesores y alumnos.* Ed. Paidós. Barcelona [Ed. or. 1995].

MOSCHKOVICH, J. (2004) Appropriating mathematical practices: a case study of learning to use and explore functions through interaction with a tutor. *Educational Studies in Mathematics* 55: 49–80.

NCTM (1989). *Principles Standards of School of Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics. Reston VA.

NCTM (2000). *Principles Standards of School of Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics. Reston VA.

NEWMAN, D., GRIFFIN, P. i COLE, M.: (1989): *The Construction Zone:Working for Cognitive Change in School*, Cambridge University Press, Cambridge.

O'DAFFER, P. (1995). *Problem Solving: Tips for Teachers*. NCTM, Reston.

PIFARRÉ, M. i SANUY, J. (2001). La enseñanza de estrategias de resolución de problemas matemáticos en la ESO: un ejemplo concreto. *Enseñanza de las Ciencias*, 19 (2), 297-308.

POLYA, G. (1975). *Como plantear y resolver problemas.* Ed. Trillas, México. [Ed. or. 1945].

PUERTAS, E. (2002). Disseny i implementació d'un tutor intel·ligent: Aplicació en la resolució de problemes de geometria. Projecte fi de carrera UAB. Inèdit.

PUIG, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Ed. Comares. Granada.

PUIG, L. i CERDÁN, F. (1988): *Problemas aritméticos escolares*. Ed. Síntesis, S. A. Madrid.

RADFORD, L.: (2001), Signs and meanings in students emergent algebraic thinking: A semiotic analysis', *Educational Studies in Mathematics* 42(3), 237–268.

RICHARD, P. R. (2004a). *Modélisation du comportement en situation de validation*. Berne: Peter Lang.

RICHARD, P. R. (2004b). L'inférence Figureurale: un pas de raisonnement discursivo-graphique. *Educational Studies in Mathematics*. In press.

RICHARD, P. R., FORTUNY, J. M., COBO, P. i AÏMEUR, E. (2003). Stratégie argumentative et système tutoriel pour l'apprentissage interactif de la géométrie. In *Actes de l'EMF-2003 (Espace mathématique francophone)*, Tozeur.

RICHARD, P. R., FORTUNY, J. M., COBO, P. i PUERTAS, E. (2004). Pedagogical support in the Solving and Proving of a Geometry Problem trough Interactions with an Agent Tutor. *E-Learning-2004*. Washington, DC. USA.

RODRIGUÉZ, R. (2003). L'aprenentatge de les matemàtiques com a participació en una pràctica d'una comunitat virtual. Tesi doctoral inèdita. Universitat Autònoma de Barcelona.

ROGOFF, B.: 1990, *Apprenticeship in Thinking: Cognitive Development in Social Context* Oxford University Press, NY.

SCHOENFELD, A. H. (1985a). Sugerencias para la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. En *La Enseñanza de la matemática a debate*. pp. 31-65 Ed. Servicio de Publicaciones del M.E.C. Madrid.

SCHOENFELD, A. H. (1985b). *Mathematical Problem Solving*. Academic Press, Inc. Orlando.

SCHOENFELD, A. H. (1987). What's all the fuss about metacognition?. En A. H. Scoenfeld (Ed.). *Cognitive science and mathematics education* , Hillsdal, NJ: Lawrence Erlbaum, 189-215.

SCHOENFELD, A. H. (1992): Learning To Think Mathematecally: problem Solving, Metacognition, and Sense-Making in Mathematics. En *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, D. A. Grouws (Ed.), McMillan, Nova York, 334-389.

SIERPINSKA, A. i LERMAN (1996). Epistemologies of Mathematics and of Mathematics education. *International Handbook of Mathematics Education*. Bishop et al. Eds. Kluwer Academic Publishers, pp 827-876.

SÍGALES, C. (2001). El Potencial interactiu dels entorns virtuals d'ensenyament i aprennetatge en l'educació a distancia. *X trobada Internacional d'Educació a Distancia*. Guadalajara (México).

SOUTHWELL, B. (2004). Investigating Problemem Solving. Document presentat a l'ICME-10 (International Congress on Mathematical Education). Denmark-2004.

STACEY, K. (1992). Mathematical Problem solving in Groups: Are Two Heads Better Than One?. *Journal of Mathematical Behavoir*. 11, pp. 261-275.

STACEY, K. i GROVES, S. (1999): *Resolver Problemas: Estrategias. Unidades para desarrollar el razonamiento matemático.* Narcea, S.A. Ediciones. Madrid.

VILA, A. (2001). *Resolució de problemes de matemàtiques: identificació, origen I formació dels sistemes de creences en l'alumnat . Alguns efectes sobre l'abordatge dels problemes*. Tesi doctoral inèdita. Universitat Autònoma de Barcelona.

VOIGT, J. (1985). Paterns and routines in classroom interaction. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, vol. 6, nº 1, pp. 69-118.

VOIGT, J. (1994): Negotiation of Mathematical Meaning and Learning Mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 26: 275-298.

VOIGT, J. (1995). Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms. En P. Cobb I H. Bauersfeld (Eds.), pp.163-199.

VYGOTSKY, L.S.: 1978, Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes, in M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner and E. Souberman (eds.), Harvard University Press, Cambridge, MA.

WEBB, N. M. (1989). Peer Interaction and Learning in Small Groups. *International Journal of Education Research*, 13, 21-39.

WEBB, N. M. (1991). Task-Related Verbal Interaction and Mathematics Learning in Small Groups. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 22, 5, pp. 366-389.

WEBER, K. (2004): Describing problem-solving processes undergraduates when constructing proofs. Document presentat a l'ICME-10 (International Congress on Mathematical Education). Denmark-2004.

WEBBER, C., BERSIA, L., PESTY, S., i BALACHEFF, N. (2002). The Baghera project: a multi-agent architecture for human learning. In *Proceedings of the Workshop Multi-Agent Architectures for Distributed Learning Environments (AIED2001)*, 12-17, San Antonio.

WEBBER, C. i PESTY, S. (2002). Emergent Diagnosis via Coalition Formation Lab. Leiniz, UJF, Grenoble.

WELLS, G.: 1999, Dialogic Inquiry: Toward a Sociocultural Practice and Theory of *Education*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.

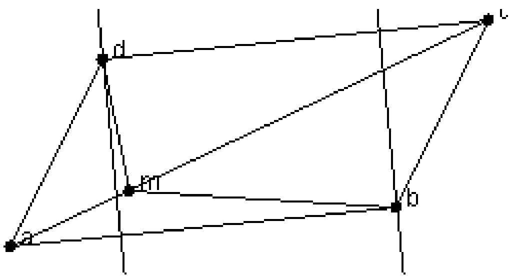
WOOD, T. (1994). Patterns of interaction and the culture of the mathematics classroon. En S. Lerman (Ed.). Culture Perspectives on the mathematics Classroom, pp. 149-168. Dordrecht, NL: Kluwer Academic Publ.

YACKEL, E., COBB, P. i WOOD, T. (1991). Small-group Interactions as a Source of Learning Opportunities in Second-Grade Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 22, n. 5, pp. 390-408.

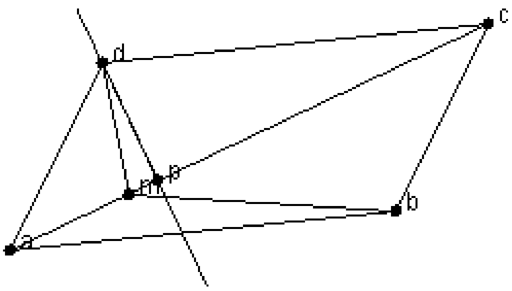
ANNEXOS

Annex 1. Historial del procés de resolució del problema del paral·lelogram desenvolupat pel Gerard

	Nom	Acció
		HISTORIAL
1	Gerard	Lectura de l'enunciat
2	Gerard	Carrega la figura
3	Gerard	Crea perpendicular al segment dc passant pel punt b amb nom l
4	Gerard	Crea perpendicular al segment ba passant pel punt d amb nom j

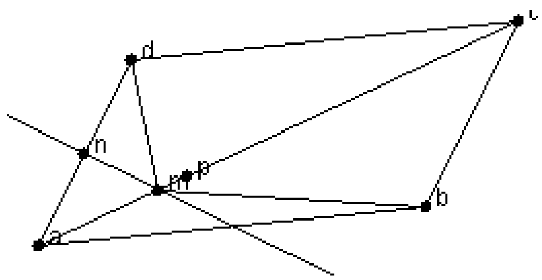


5	Gerard	Esborra línia j
6	Gerard	Esborra línia l
7	Gerard	Crea perpendicular al segment ac passant pel punt d amb nom s (cancel·la)
8	Gerard	Crea perpendicular al segment ac passant pel punt d amb nom s



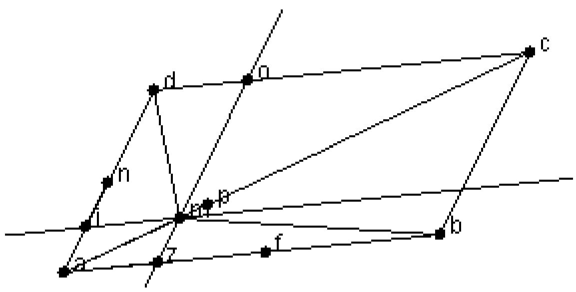
9	Gerard	Crea intersecció al segment s al segment ac amb nom p
10	Gerard	Crea línia passant pel punt p passant pel punt d amb

		nom pd
11	Gerard	Esborra línia s
12	Gerard	Mira els missatges del tutor: no n'hi ha
13	Gerard	Torna a mirar l'enunciat
14	Gerard	Intenta escriure deduccions
15	Gerard	Esborra deducció
16	Gerard	Intenta esborrar objecte (cancel·la)
17	Gerard	Intenta esborrar objecte pd (cancel·la)
18	Gerard	Obre la finestra de procediments
19	Gerard	Intenta esborrar objecte
20	Gerard	Esborra segment pd
21	Gerard	Intenta esborrar el punt p
22	Agent Mediador	Missatge: aquest punt forma part d'una o més línies
23	Gerard	Obre la finestra de procediments i assenyala la línia de la mediatriu
24	Gerard	Crea el punt mig del segment da i li dóna el nom m2
25	Agent Mediador	Missatge: el punt no pot tenir més d'un caràcter
26	Gerard	Crear punt mig al segment da amb nom n
27	Gerard	Crear perpendicular al segment da passant pel punt n amb nom l



28	Agent Tutor	Tracta de trobar relacions entre els costats dels triangles les àrees dels quals vols comparar.
29	Gerard	Deducció: línia da* 2 = línia ba
30	Agent Mediador	línia da* 2 = línia ba: falsa
31	Gerard	Esborra deducció
32	Gerard	Intenta esborrar línia l (posa ll)
33	Agent	Missatge: l'objecte ll no existeix

	Mediador	
34	Gerard	Demana missatge
35	Agent Tutor	Podries pensar alguna forma de descompondre el paral·lelogram en triangles, per exemple, traçant paral·leles que passin pel punt m.
36	Gerard	Intenta esborrar el punt n
37	Agent Mediador	Missatge: aquest punt forma part d'una o més línies
38	Gerard	Crea paral·lela al segment da passant pel punt m amb nom A
39	Gerard	Crea paral·lela al segment ba passant pel punt m amb nom B
40	Gerard	Deducció: àrea adm = àrea amb
41	Agent Mediador	àrea adm = àrea amb: correcta
42	Gerard	Deducció final: àrea adm = àrea amb
43	Agent Mediador	àrea adm = àrea amb: correcta
44	Agent Tutor	Missatge: No tinc prou suport per a comprovar la solució.
45	Gerard	Deducció: línia dm = línia am (s'adona que línia am no existeix)
46	Gerard	Crea línia passant pel punt a passant pel punt m amb nom am
47	Gerard	Deducció: línia dm = línia am
48	Agent Mediador	línia dm = línia am: correcta
49	Gerard	Crea compàs al segment ba passant pel punt a passant pel punt d amb nom f
50	Gerard	Crea intersecció al segment B al segment da amb nom i
51	Gerard	Crea segment ai

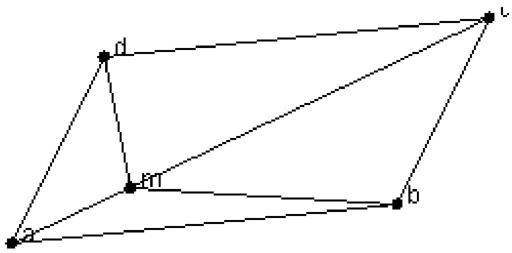


52	Agent Mediador	Missatge: ja existeix un objecte amb aquest nom

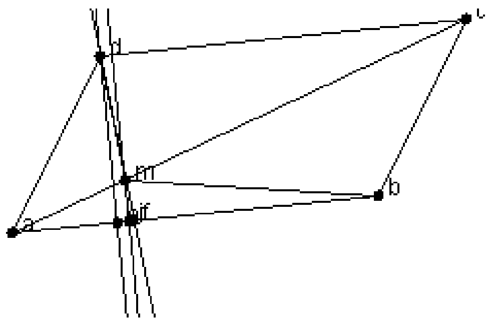
53	Gerard	Crea línia passant pel punt a passant pel punt i amb nom ia
54	Gerard	Crear línia passant pel punt n passant pel punt i amb nom in (molta estona mirant els segments dels costats).
55	Gerard	Deducció: línia ia = línia in
56	Agent Mediador	línia ia = línia in: falsa
57	Gerard	Deducció: línia ia * 4 = línia da (desprès de dubtar molt)
58	Agent Mediador	línia ia * 4 = línia da: falsa
59	Gerard	Crear intersecció al segment A al segment ba amb nom z
60	Gerard	Intenta deduir: línia da = (no escriu res)
61	Gerard	Crear intersecció al segment dc al segment A amb nom o
62	Gerard	Torna a l'àrea de deduccions: línia da * línia za= línia ba * línia ia
63	Agent Mediador	L'objecte za no existeix
64	Gerard	Crea línia passant pel punt a passant pel punt z amb nom za
65	Gerard	línia da * línia za= línia ba * línia ia
66	Agent Mediador	línia da * línia za = línia ba * línia ia: correcta
67	Gerard	Desa
68	Gerard	Deducció definitiva: línia da * línia za = línia ba * línia ia
69	Agent Mediador	línia da * línia za = línia ba * línia ia: correcta
70	Agent Tutor	Missatge: No és la solució correcta

Annex 2. Historial del procés de resolució del problema del paral·lelogram desenvolupat per l'Adrià

		HISTORIAL
	Nom	**Acció**
1	Adrià	Llegeix l'enunciat
2	Adrià	Carrega

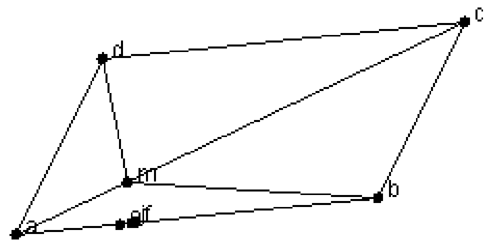


3	Adrià	Crea perpendicular al segment dc passant pel punt d amb nom w
4	Adrià	Crea intersecció al segment w al segment ba amb nom e
5	Adrià	Crea paral·lela al segment dm passant pel punt m amb nom t
6	Adrià	Crea intersecció al segment ba al segment t amb nom f
7	Adrià	Intenta fer deducció: àrea ae*ed/2 (esborra)
8	Adrià	Crea perpendicular al segment ba passant pel punt m amb nom r
9	Agent Tutor	Imagina com compararies les àrees dels nous triangles que s'han format
10	Adrià	Crea intersecció al segment r al segment ba amb nom j

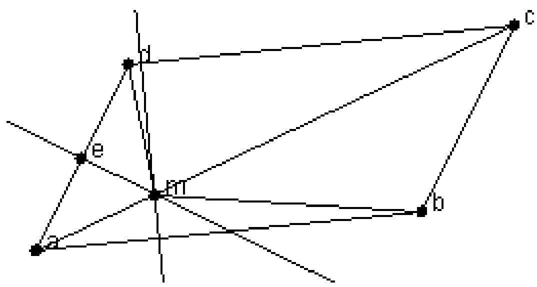


11	Adrià	Esborra línia t
12	Adrià	Esborra línia r
13	Adrià	Esborra punt f

14	Agent Mediador	Aquest punt forma part d'una o més línies
15	Adrià	Continua assenyalant tots els punt acumulats sobre la línia ba (pensa sobre la forma de esborrar-los)
16	Adrià	Clica el Tutor i li mostra l'únic missatge que hi ha.
17	Adrià	Mira l'enunciat
18	Adrià	Esborra línia w (continua assenyalant els punts de ba).

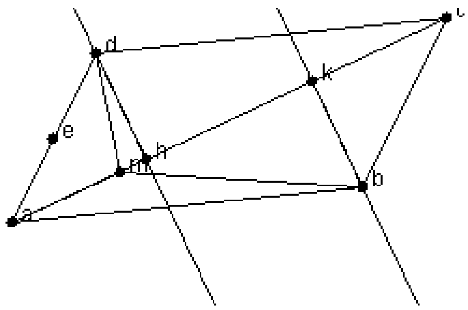


19	Adrià	Esborra línia ab
20	Agent Mediador	L'objecte no existeix
21	Adrià	Esborra línia ba
22	Adrià	Esborra punt f
23	Adrià	Crea línia passant pel punt b passant pel punt a amb nom ba (Li torna a quedar la figura de l'enunciat).
24	Adrià	Crea perpendicular al segment da passant pel punt m amb nom w
25	Agent Tutor	Reflexiona sobre la possibilitat de resoldre el problema considerant que et donen en lloc d'un paral·lelogram un quadrat o un rectangle. Pots aplicar els mateixos procediments per a resoldre el problema del paral·lelogram?
26	Adrià	Crea intersecció al segment w al segment da amb nom e (mira tots els segments i línies).
27	Adrià	Crea perpendicular al segment ba passant pel punt m amb nom q.



28	Adrià	Esborra línia w
29	Adrià	Esborra línia q
30	Adrià	Esborra punt e

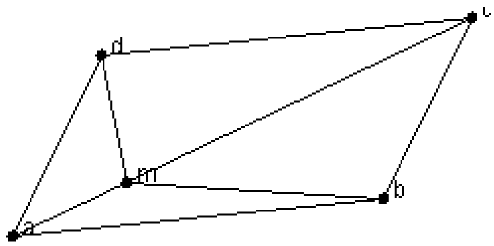
31	Agent Mediador	Aquest punt forma part d'una o més línees
32	Adrià	Crea perpendicular al segment ac passant pel punt b amb nom w
33	Adrià	Crea perpendicular al segment ac passant pel punt d amb nom q (no dubta).

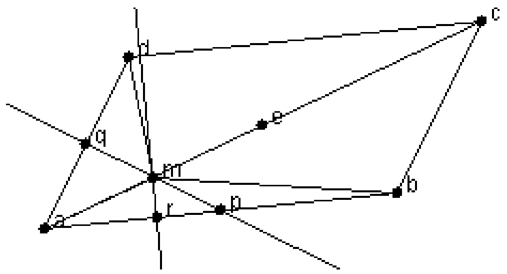


34	Adrià	Intenta acció deductiva àrea... (mira línia am que no existeix).
35	Adrià	Crea intersecció segment ac al segment q amb nom f.
36	Agent Mediador	Ja existeix un objecte amb aquest nom.
37	Adrià	Crea intersecció al segment ac al segment q amb nom h
38	Adrià	Crea intersecció al segment ac al segment q amb nom j
39	Agent Mediador	Ja existeix un objecte amb aquest nom.
40	Adrià	Crea intersecció al segment w al segment ac amb nom k
41	Adrià	Continua l'acció deductiva: àrea amb = am * kb (s'adona que no existeix ni am ni kb).
42	Adrià	Crea línia passant pel punt m passant pel punt a amb nom am
43	Adrià	Crea línia passant pel punt b passant pel punt k amb nom kb
44	Adrià	Deducció: àrea amb = línia am * línia kb/2
45	Agent Mediador	àrea amb = línia am * línia kb/2: correcta
46	Adrià	Crea línia passant pel punt h passant pel punt d amb nom hd
47	Adrià	Deducció: àrea amd = línia am * línia hd/2
48	Agent Mediador	àrea amd = línia am * línia hd/2: correcta
49	Adrià	Intenta fer deducció: àrea amd/línia hd/2 = àrea amb/línia kb/2
50	Agent	Les operacions aritmètiques s'han de fer sobre objectes del

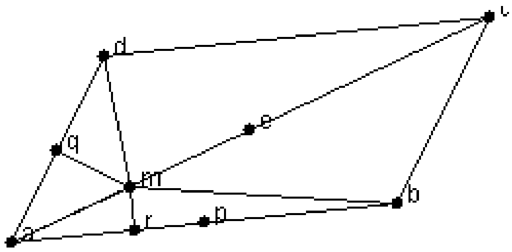
	Mediador	mateix tipus
51	Adrià	Intenta esborrar deducció.
52	Adrià	Esborra deducció
53	Adrià	Deducció: línia kb/2=línia hd/2
54	Agent Mediador	línia kb/2=línia hd/2: falsa
55	Adrià	Deducció: línia kb = línia hd
56	Agent Mediador	línia kb = línia hd: correcta
57	Adrià	Deducció: línia am * línia kb = línia am * línia hd
58	Agent Mediador	línia am * línia kb=línia am * línia hd: falsa
59	Adrià	Deducció: línia am * línia kb = línia am * línia hd
60	Agent Mediador	línia am * línia kb = línia am * línia hd: correcta
61	Adrià	Deducció: àrea amd = àrea amb
62	Agent Mediador	Àrea amd = àrea amb: correcta
63	Adrià	Deducció final: àrea amd = àrea amb
64	Agent Mediador	Àrea amd = àrea amb: correcta
65	Agent Tutor	Contesta aquestes preguntes: a) Al llarg de la resolució, has proposat vàries estratègies? b) Les has examinat totes? c) Et sembla que has examinat les més adients?
66	Adrià	a) Sí, ja que m'he trobat que una no l'ha entès el programa. b) Possiblement n'hi hagi d'altres derivades de les que he utilitzat o alguna altra de diferent (utilitzant angles...). c) Sí, diria que és la més ràpida.

Annex 3. Historial del procés de resolució del problema del paral·lelogram desenvolupat per l'Albert

		HISTORIAL
	Nom	**Acció**
1	Albert	Carrega la figura
		
2	Albert	Lectura de l'enunciat
3	Albert	Deducció: àrea dab = àrea amb
4	Agent Mediador	Missatge: l'objecte dab no existeix
5	Albert	Deducció: area dam = area amb
6	Agent Mediador	àrea dab = àrea amb: true
7	Albert	Traça segment de b a d amb nom db
8	Albert	Intersecció línia db amb línia ac de nom e
9	Albert	Lectura de l'enunciat
10	Albert	Intenta deducció final però no s'acaba de decidir
11	Albert	Mira el botó de tornar a carregar l'enunciat, no el carrega
12	Albert	Esborra línia db
13	Albert	Esborra la línia de deduccions
14	Albert	Va assenyalant línies i segments (observa que no està definit el segment am)
15	Albert	Crea segment de a fins a m amb nom am
16	Albert	Traça perpendicular a da per m amb nom pm

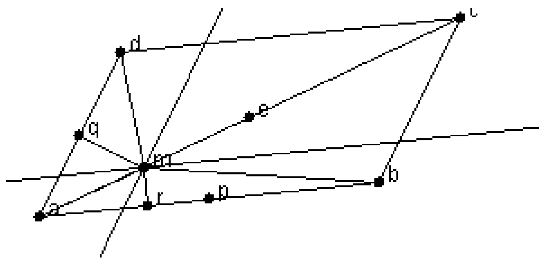


17	Albert	Crea intersecció de la línia pm amb la ab de nom p
18	Albert	Crea intersecció de la línia pm amb la da de nom q
19	Agent Tutor	Missatge: Tracta de trobar també relacions entre les altures dels triangles les àrees dels quals vols comparar.
20	Albert	Traça la perpendicular a la línia ab pel punt m de nom alt2
21	Albert	Intersecció de la línia alt2 amb la ab de nom (no acaba)
22	Albert	Clica la finestra del Tutor i li surt el mateix missatge anterior: Tracta de trobar també relacions entre les altures dels triangles les àrees dels quals vols comparar.
23	Albert	Intersecció de la línia alt2 amb la ab de nom r
24	Albert	Traça segment des de q a m amb nom qm
25	Agent Tutor	Missatge: Podries pensar alguna forma de descompondre el paral·lelogram en triangles, per exemple, traçant paral·leles que passin per M
26	Albert	Traça sement des de m a r amb nom mr
27	Albert	Esborra pm
28	Albert	Esborra alt2
29	Albert	Deducció: línia qm = línia mr

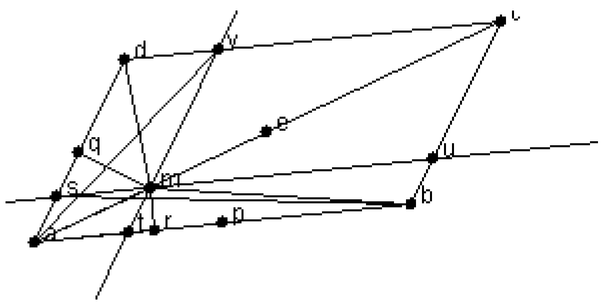


30	Agent Mediador	línia qm = línia mr: false
31	Albert	Deducció: línia qm = línia mr*2
32	Agent Mediador	línia qm = línia mr*2: falsa.
33	Agent	Torna a repetir el mateix missatge anterior: Podries

	Tutor	pensar alguna forma de descompondre el paral·lelogram en triangles, per exemple, traçant paral·leles que passin per M
34	Albert	Traça perpendicular a ac per b amb nom par1
35	Albert	Esborra par1
36	Albert	Traça paral·lela a ac per b amb nom par1
37	Albert	Traça paral·lela a ac per d amb nom (no acaba)
38	Albert	Clica el tutor per a comprovar si fa el que diu el missatge, s'adona que no està fent les coses com aquest diu
39	Albert	Esborra par1
40	Albert	Traça paral·lela a ad per m amb nom par1
41	Albert	Traça paral·lela a ab per m amb nom par2



42	Albert	Torna a clicar el tutor per a veure el missatge
43	Albert	Intersecció de les línies par2 i da amb nom (cancel·la)
44	Albert	Intersecció de les línies ba i part1 amb nom t
45	Albert	Segment des de a a t amb at
46	Agent Mediador	Missatge: ja existeix un objecte amb aquest nom
47	Albert	Fa intents de buscar-lo a la figura
48	Albert	Traça segment des de a a t amb nom r
49	Agent Mediador	Torna a sortir el mateix missatge: ja existeix un objecte amb aquest nom
50	Albert	Intersecció... (cancel·la)



51	Albert	Segment des de a fins a t amb nom att
52	Albert	Intersecció de les línies par2 i da amb nom s
53	Agent Tutor	Missatge: Identifica els triangles nous que s'han format
54	Albert	Intersecció de les línies cb i par2 amb nom u
55	Albert	Intersecció de les línies dc i par1 amb nom v
56	Albert	Deducció: area atdv = area asbu
57	Agent Mediador	àrea atdv = àrea asbu: correcta
58	Albert	Va mirant segments línies i vèrtexs...
59	Albert	Traça segment des de a a v amb nom z
60	Albert	Deducció: àrea atv = àrea sab
61	Agent Mediador	àrea atv = àrea sap: correcta
62	Albert	Deducció: àrea atv + àrea atd = àrea asb + àrea sub (no la valida)
63	Albert	Traça el segment des de s fins a b amb nom sb
64	Albert	Deducció: àrea smd = àrea mdv
65	Agent Mediador	àrea smd = àrea mdv: correcta
66	Albert	Deducció: àrea tbm = àrea bmu
67	Agent Mediador	àrea tbm = àrea bmu: correcta
68	Albert	Deducció: àrea atv + àrea avd = àreaasb + àrea sub
69	Agent Mediador	àrea atv + àrea avd = àrea asb + àrea sub: correcta
70	Albert	Deducció final: àrea abm = àrea amd
71	Agent Mediador	àrea abm = àrea amd: correcta
72	Agent Tutor	Identifica els punts que t'han semblat claus en la teva resolució.
73	Albert	Igualtat d'àrees, aplicació de fórmules i traçat de rectes paral·leles