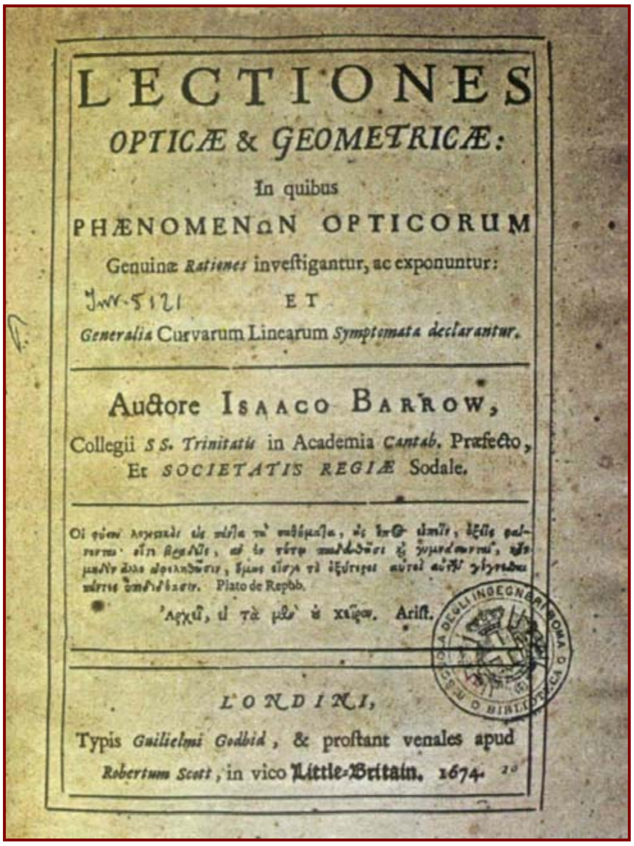
La Historia de la Matemática como recurso didáctico e instrumento de integración cultural de la Matemática

HISTORIA DE LA MATEMÁTICA PARA EL BACHILLERATO

ORÍGENES Y EVOLUCIÓN HISTÓRICA DEL CÁLCULO INFINITESIMAL

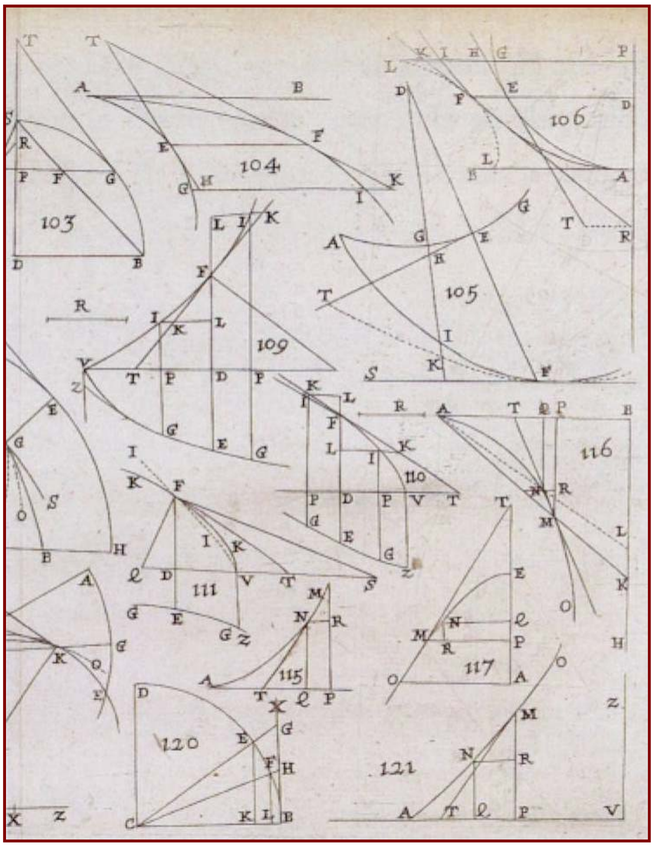


LECTIONES
OPTICÆ & GEOMETRICÆ:
In quibus
PHÆNOMENΩN OPTICORUM
Genuinæ Rationes investigantur, ac exponuntur:
ET
Generalia Curvarum Linearum Symptomata declarantur.

Auctore ISAACO BARROW,
Collegii SS. Trinitatis in Academia Cantab. Præfecto,
Et SOCIETATIS REGIÆ Sodale.

Plato de Repub.
Ἀρχὴ, δὲ τὰ μὲν ὡ χείρων. Arist.

LONDINI,
Typis Gulielmi Godbid, & prostant venales apud
Robertum Scott, in vico Little-Britain. 1674.



Pedro Miguel González Urbaneja

pgonzale@pie.xtec.es

ORÍGENES Y EVOLUCIÓN HISTÓRICA DEL CÁLCULO INFINITESIMAL

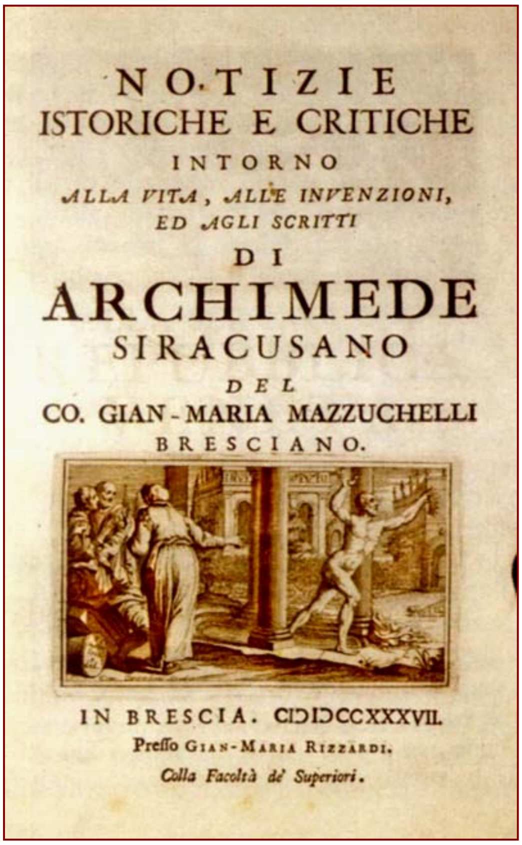
Dicen que la divinidad se enojó contra quien divulgó la doctrina de Pitágoras, pereciendo como un impío en el mar por sacrílego al haber revelado la doctrina de los números irracionales y la inconmensurabilidad.
Jámblico. *Vida Pitagórica*. XXXIV, 247.

Los matemáticos actualmente no precisan del infinito en sus estudios, ni lo emplean en ellos, sino que conciben la existencia de una magnitud finita tan grande como se quiera.
Aristóteles. *Física*, Libro III, Cap.7, 208a.

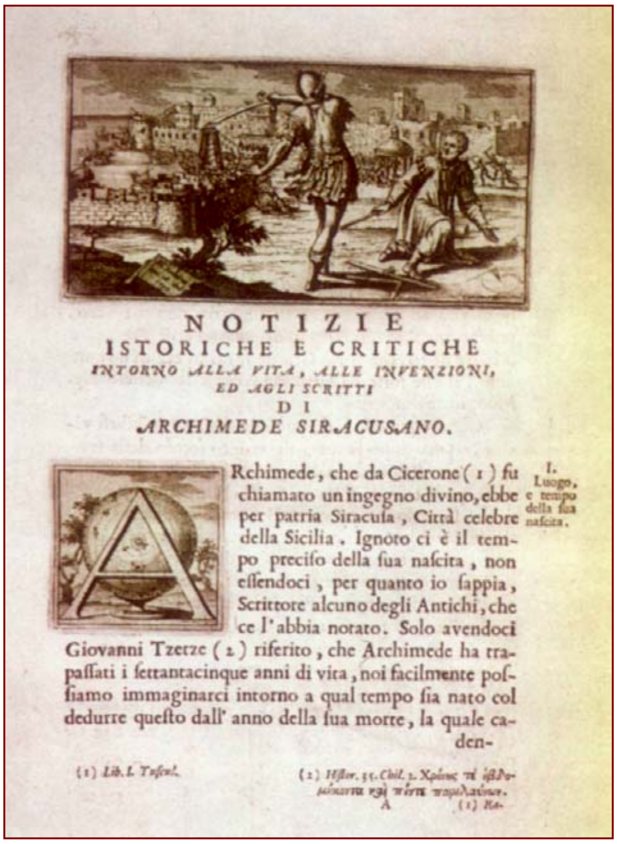
Había más imaginación en la cabeza de Arquímedes que en la de Homero.
Voltaire. *Diccionario filosófico*.

Para encontrar todas las propiedades de las líneas curvas basta con saber la relación que tienen todos sus puntos con los de las líneas rectas
Descartes. *La Geometría,* G.AT.VI. 412.

Isaac Barrow fue el primer inventor del Calculo Infinitesimal. Newton adquirió las principales ideas del mismo a través de su comunicación personal con Barrow.
M.Child. (I. Barrow. *Geometrical lectures*. Chicago. Open court, 1916. Prefacio, p. VII).


NOTIZIE
ISTORICHE E CRITICHE
INTORNO
ALLA VITA, ALLE INVENZIONI,
ED AGLI SCRITTI
DI
ARCHIMEDE
SIRACUSANO
DEL
CO. GIAN-MARIA MAZZUCHELLI
BRESCIANO.

IN BRESCIA. CIϽIϽCCXXXVII.
Presso Gian-Maria Rizzardi.
Colla Facoltà de' Superiori.


NOTIZIE
ISTORICHE E CRITICHE
INTORNO ALLA VITA, ALLE INVENZIONI,
ED AGLI SCRITTI
DI
ARCHIMEDE SIRACUSANO.

ARchimede, che da Cicerone (1) fu chiamato un ingegno divino, ebbe per patria Siracusa, Città celebre della Sicilia. Ignoto ci è il tempo preciso della sua nascita, non essendoci, per quanto io sappia, Scrittore alcuno degli Antichi, che ce l'abbia notato. Solo avendoci Giovanni Tzetze (2) riferito, che Archimede ha trapassati i settantacinque anni di vita, noi facilmente possiamo immaginarci intorno a qual tempo sia nato col dedurre questo dall' anno della sua morte, la quale caden-

I. Luogo, e tempo della sua nascita.

(1) Lib. I. Tuscul.

(2) Histor. 35. Chil. 2.

A

Pedro Miguel González Urbaneja

pgonzale@pie.xtec.es

ORÍGENES Y EVOLUCIÓN HISTÓRICA DEL CÁLCULO INFINITESIMAL

Introducción: de Pitágoras y Arquímedes a Newton y Leibniz. 7
Citas memorables sobre la Historia del Cálculo Infinitesimal. 16
Los primeros problemas infinitesimales en el mundo griego. 19
La aparición de las magnitudes inconmensurables. 19
Las cuestiones infinitesimales en los filósofos preplatónicos. 21
Las lúnulas de Hipócrates. 21
Las paradojas de Zenón de Elea. 24
El método de compresión: Antifón y Bryson. 25
El Atomismo de Demócrito. 26
Los problemas infinitesimales en la Academia de Platón. 27
Los inconmensurables en la Academia platónica. 27
La *Teoría de la Proporción* y el *Método de Exhaución* de Eudoxo. 28
Las cuestiones infinitesimales en *La Física* de Aristóteles. 34
Los inconmensurables y la estructura euclídea de la Geometría griega. 36
Cuadraturas y cubaturas en Euclides. El Libro XII de *Los Elementos*. 39
Los métodos infinitesimales de Arquímedes antecedentes del Cálculo Integral. 41
La obra matemática de Arquímedes. 41
El método mecánico de Arquímedes. 55
La Cuadratura del segmento parabólico. 55
La Cubatura de la Esfera. 56
Análisis crítico del Método mecánico de Arquímedes. 59
El método de exhaución en Arquímedes. 63
El método de compresión. La Cuadratura de la Espiral. 63
El método de aproximación. La Cuadratura de la Parábola. 68
Las cuestiones infinitesimales en la Edad Media. Oresme. 79
Los problemas de Cálculo Integral: cuadraturas y cubaturas. 89
La cuadratura básica $\int_0^a x^k dx$ 89
Los Indivisibles de Cavalieri. 91
Las cuadraturas aritméticas de Fermat y Pascal. 100
La integración aritmética de Wallis. 106
Los Indivisibles e Infinitesimales de Roberval. 110
Las cuadraturas y cubaturas trigonométricas de Roberval. 115
El método exponencial de la progresión geométrica de Fermat. 119
Cuadratura de hipérbolas generalizadas de Fermat. 119
Cuadratura de parábolas generalizadas de Fermat. 122
Los problemas de Cálculo Diferencial: extremos y tangentes. 125
Los métodos de «*adigualdad*» de Fermat sobre máximos y mínimos. 125
Los métodos de «*adigualdad*» de Fermat sobre tangentes. 156
La tangente a la parábola y la tangente a la elipse. 159
El método de tangentes como derivación del método de extremos. 165
La tangente a través de la normal. El *Méthode expliquée*. 170
La *Doctrinam Tangentium*. 177
Curvas algebraicas. La tangente a la cisoide. 179
Curvas mecánicas. La tangente a la cicloide. 182
El Método del círculo de Descartes para las normales a una curva. 188
Los métodos cinemáticos de Roberval. 205
Los métodos diferenciales de Barrow. 208
El Teorema Fundamental del Cálculo. 218
Epílogo: el descubrimiento del Cálculo Infinitesimal de Newton y Leibniz. 225
Cronología del Cálculo Infinitesimal. 229
Bibliografía. 233
Índice de ilustraciones y cuadros textuales. 241

Introducción: de Pitágoras y Arquímedes a Newton y Leibniz

El Cálculo Infinitesimal es un cuerpo abstracto de conceptos fundamentales para toda ciencia en los que subyacen infinidad de cuestiones metafísicas sobre la naturaleza de la realidad, pero ante todo y como su propio nombre indica, el Cálculo Infinitesimal es un instrumento de cálculo por excelencia. Por ambas razones el Cálculo Infinitesimal es una de las grandes creaciones del pensamiento científico donde se aborda desde la Matemática el problema del infinito.

Es indiscutible que Newton y Leibniz son los verdaderos creadores del Cálculo Infinitesimal, pero estos dos grandes genios del pensamiento se encontraron un terreno muy abonado por una numerosa serie de matemáticos (Arquímedes, Oresme, Kepler, Cavalieri, Torricelli, Fermat, Pascal, Roberval, Wallis, Barrow, ...), que habían desarrollado, en la resolución de ciertos problemas, multitud de métodos y técnicas infinitesimales, de las que Newton y Leibniz destilaron el algoritmo universal que constituye el Cálculo Infinitesimal. El objeto de este trabajo es precisamente la búsqueda de las raíces históricas del Cálculo Infinitesimal, estudiando con cierto detalle el devenir histórico de estas técnicas precedentes, cuyo conocimiento permite establecer cual era la situación de la que partieron Newton y Leibniz.

Así pues, este trabajo sobre la génesis del Cálculo Infinitesimal cubre la etapa histórica comprendida entre los incipientes conceptos de la antigüedad griega y el propio descubrimiento del Cálculo por Newton y Leibniz. En el primer capítulo se estudian los primeros problemas infinitesimales en el mundo griego con la aparición de las magnitudes inconmensurables –que provoca la primera crisis de fundamentos de la Historia de la Matemática–, las lúnulas de Hipócrates, las paradojas de Zenón de Elea, los métodos sofistas de Antifón y Bryson, el Atomismo de Demócrito y la solución de la Academia platónica con la *Teoría de la Proporción* y el *Método de Exhaución* de Eudoxo y su repercusión sobre la Física de Aristóteles y sobre la estructuración euclídea de la Geometría griega en *Los Elementos*. Se dedica todo un capítulo a los problemas infinitesimales de Arquímedes sobre cuadraturas y cubaturas que anticipan el Calculo Integral, con su *método mecánico* de descubrimiento –antecedente directo de los indivisibles e infinitesimales del siglo XVII– y su demostrativo *método de exhaución* –que es el antecedente directo de los límites de la aritmetización del Análisis del siglo XIX. Continuamos con la aportación medieval al tema de lo Infinitesimal, en particular los importantes trabajos de Oresme, que propician una inflexión radical sobre la consideración conceptual del infinito, lo que junto a la recuperación y asimilación del legado clásico prepara, a partir del Renacimiento, un ambiente intelectual propicio que favorece el desarrollo de multitud de nuevas técnicas infinitesimales que describimos en los dos capítulos siguientes, clasificadas en dos tipos de problemas:

- Cuadraturas y cubaturas de Cavalieri, Fermat, Pascal, Wallis, Roberval, ..., mediante Indivisibles e Infinitesimales.
- Extremos y tangentes. Los métodos de «*adigualdad*» de Fermat, métodos geométricos de Descartes, métodos cinemáticos de Roberval y métodos diferenciales de Barrow.

Para cada tipo de problema, la exposición tiene lugar, en general, cronológicamente. Por eso se describe primero la historia de las cuadraturas –que corresponden a nuestro Cálculo Integral– y después los extremos y tangentes –que corresponden a nuestro Cálculo Diferencial–, en una secuencia inversa a la del desarrollo académico del Cálculo Infinitesimal. En todo momento se intenta analizar la influencia de cada particular método o técnica sobre el descubrimiento final del Cálculo Infinitesimal por Newton y Leibniz, sobre lo que se abunda en el epílogo.

A lo largo de los diversos capítulos se aborda la dimensión cultural de los problemas infinitesimales a base de comentar ciertos aspectos históricos, filosóficos, sociológicos que tuvieron incidencia sobre los diversos desarrollos infinitesimales. Además, la naturaleza de lo infinitesimal nos ha obligado a considerar ciertas cuestiones metafísicas involucradas en los diversos temas, en las que se especula sobre el diverso estatuto ontológico que han ido teniendo los entes sobre los que se aplican las diversas técnicas y métodos infinitesimales

El material que se ha utilizado en la elaboración de este trabajo está reseñado en la bibliografía. Para el estudio de muchos de los problemas infinitesimales se ha podido disponer de bastantes obras originales fundamentales de los matemáticos artífices del Cálculo Infinitesimal. Cuando así ha sido, se ha procurado una escrupulosa fidelidad cuando se traduce al autor y se interpretan los problemas que trata con el auxilio de la consulta y el cotejo de las impresiones que numerosos historiadores de la Matemática han dado en sus publicaciones y artículos científicos, y se intenta realizar una síntesis coherente.

En los albores de la Matemática racional ya se encuentran huellas de los métodos infinitesimales como explicación de los fenómenos de cambio y movimiento que manifiesta el permanente flujo de las cosas y la curiosidad sobre la constitución última de la materia, que favorece la reflexión sobre el carácter continuo o discreto de los entes geométricos, es decir, la infinita divisibilidad de los segmentos *versus* los átomos indivisibles como última esencia de la realidad.

El descubrimiento de la existencia de magnitudes inconmensurables, en la Escuela Pitagórica, y las inquietantes paradojas de Zenón de Elea provocaron la aparición del «*horror al infinito*» en la cultura griega y en particular una profunda crisis de fundamentos en el ámbito de la Matemática.

La emergencia de los irracionales impide que todas las magnitudes geométricas puedan ser medidas mediante números. De este modo, quedaban invalidadas todas las pruebas de los teoremas de la Geometría pitagórica que utilizaban proporciones. Para conjurar la crisis de fundamentos había que soslayar el concepto infinitesimal de número irracional. Eudoxo de Cnido, de la Academia platónica, resolvió de forma rigurosa el abismo entre finito e infinito. Al introducir la idea de «*tan pequeño como se quiera*», equivalente a nuestro proceso de paso al límite, Eudoxo descubre, con su nueva teoría de magnitudes, un subterfugio a los problemas planteados por el infinito y lo inconmensurable, mediante un inteligente instrumento geométrico –la *Teoría de la Proporción*– que desarrolla en tres fases: una definición –igualdad de razones–, un axioma *–axioma de Eudoxo–Arquímedes* o *axioma de continuidad*– y un método *–el método de exhaución–*. La solución de Eudoxo fue un excelente triunfo matemático, pero provocó que la Filosofía platónica impusiera un férreo rigor lógico como supremo valor de la Matemática, lo que propició la codificación axiomático-deductiva de la Geometría griega elemental en la compilación enciclopédica de *Los Elementos* de Euclides, que establece un rígido modelo de exposición y demostración en casi toda la Matemática griega.

La *Teoría de la Proporción*, mediante la que la Academia platónica resuelve de forma rigurosa la crisis de los inconmensurables, ejerce una gran influencia en la concepción que Aristóteles y el *Liceo* tienen acerca del infinito, y en particular sobre en la *Teoría de la Potencia y el Acto* del Libro III de la *Física*, donde el filósofo estagirita expone su concepción sobre el infinito, la continuidad, la divisibilidad de magnitudes y el movimiento.

En la mente de Arquímedes, el método de exhaución, conjugado con su genial y heurístico método mecánico de descubrimiento *–método de la palanca–*, que Arquímedes describe en su obra *El método relativo a los teoremas mecánicos*, se convierte en un poderoso instrumento infinitesimal rigurosamente lógico que le permite alumbrar intuitivamente y convalidar apodícticamente numerosos resultados sobre cuadraturas, cubaturas y centros de gravedad, que hoy obtenemos con nuestros perfeccionados y rigurosos algoritmos infinitesimales, y con los que Arquímedes, supera *Los Elementos* de Euclides y amplía de forma considerable el patrimonio matemático de su época.

Ahora bien, el respeto absoluto al paradigma estilístico euclídeo recorta de forma muy considerable las posibilidades de expresión y oculta la vía del descubrimiento –el *ars inveniendi* de Galileo–, quedando de manifiesto en exclusiva la vía apodíctica –el *ars disserendi*–. El Análisis geométrico griego –que Proclo atribuye a Hipócrates de Quíos, aunque es descrito por Platón en *La República* y por Pappus en *La Colección Matemática*– era una fecunda heurística geométrica, el instrumento fundamental de investigación y creación matemática; pero, alcanzada tras el Análisis la Síntesis, en presencia de la demostración sintética cualquier Análisis era superfluo y como tal se suprimía de los grandes tratados. De esta forma, los griegos ocultaban la forma y el camino utilizados en la obtención de sus magníficos resultados matemáticos. Esto sucede en las grandes obras clásicas de los más importantes matemáticos griegos, como *Los Elementos* de Euclides o *Las Cónicas* de Apolonio y también en las obras de Arquímedes, que no dan ni la más ligera indicación de cómo se habían descubierto los magníficos resultados que describen.

Los matemáticos de los siglos XVI y XVII acogen con entusiasmo las obras clásicas griegas, que tras la recuperación del legado griego estaban a su disposición, pero preocupados porque el estilo sintético de exposición de la Geometría griega, y en particular de las obras de Arquímedes, privaba a los investigadores de la forma en que habían sido descubiertos los resultados, todos los matemáticos manifiestan, junto a su admiración, una cierta perplejidad y extrañeza, ante la lectura de los clásicos. En particular, al ignorar la forma en que Arquímedes había obtenido sus impresionantes resultados sobre cuadraturas y cubaturas, los estudiosos más importantes –Fermat, Descartes, Torricelli, Wallis, ...–, cultivan la sospecha de que Arquímedes tenía a su disposición un método de descubrimiento que, al no quedar patente al leer sus escritos, de manera premeditada habría ocultado para la posteridad. Incluso Barrow, que había realizado una edición de algunas obras de Arquímedes, en 1675, estaba convencido de que Arquímedes se habría auxiliado del Álgebra, a la que manejaría de incógnito.

Las fantasías de los matemáticos del siglo XVII en torno a Arquímedes eran ciertas sólo en parte. Arquímedes poseía, en efecto, un original método de investigación, que comunicó a su amigo Eratóstenes, a la sazón director de la Biblioteca de Alejandría, mediante el que usando ciertos procedimientos de la Mecánica no del todo rigurosos, según el propio Arquímedes, vislumbraba sus brillantes resultados matemáticos. Pero fueron las vicisitudes históricas y no su voluntad, quien ocultó su método mecánico, ya que la obra enviada a Eratóstenes –*EL MÉTODO*–, y a través de él a toda la comunidad científica alejandrina, se perdió y no se descubrió hasta 1906, gracias a la perspicacia escrutadora y a la diligencia paleográfica e investigadora del gran helenista danés J.L. Heiberg que tras múltiples avatares diplomáticos y científicos, realizando un encomiable ejercicio de arqueología matemática, fue capaz de exhumar, para los estudiosos e historiadores, la obra de Arquímedes de un palimpsesto griego del siglo XIV.

Puesto que en *EL MÉTODO*, Arquímedes plasma de forma heurística la vía mecánica que aplicaba para sus descubrimientos y que había omitido en todas sus memorias científicas, el valor de esta obra es inconmensurable, ya no sólo desde el punto de vista científico o como documento histórico, sino sobre todo desde el punto de vista del proceso heurístico, que le da un carácter radicalmente singular en todo el ámbito de la Geometría griega. Aunque esta obra sólo fue conocida a partir de comienzos del siglo XX, ha estado presente en la Historia de la Ciencia como una «*variable oculta*». Una vez conocido *EL MÉTODO*, la relectura de las otras obras de Arquímedes sugiere el planteamiento de diversas cuestiones epistemológicas acerca de la relación entre los procesos de descubrimiento–invención y los métodos de exposición–demostración. En cualquier caso, hay que reconocer la decisiva incidencia de la obra de Arquímedes en la conformación de los cimientos tanto de la nueva Física como del Cálculo Infinitesimal, a partir del Renacimiento.

Quizá es Descartes el que con mayor claridad manifiesta la insatisfacción de una curiosidad frustrada por la ocultación de los métodos de descubrimiento de la Geometría griega. Así, por ejemplo, en la Regla IV de las *Reglas para la dirección del espíritu*, Descartes escribe (AT.X.375–378):

> «[...] *Vemos con toda claridad que los antiguos geómetras se han servido de cierto análisis, que extendían a la resolución de todos los problemas, si bien privaron de él a la posteridad* [...]. *Cuando por primera vez me dediqué a las disciplinas matemáticas, de inmediato leí por completo la mayor parte de lo que suelen enseñar sus autores, y cultivé preferentemente la Aritmética y la Geometría*, [...], *pero no caían en mis manos autores que me satisficieran plenamente*, [...], *leía cosas acerca de los números que yo comprobaba, habiendo hecho cálculos, ser verdaderas; y lo mismo respecto de las figuras*; [...]. *Pero por qué esto era así, y cómo eran halladas, no parecían mostrarlo suficientemente a la mente*, [...]. *Pero como después pensase por qué sucedía que antiguamente los primeros creadores de la Filosofía no quisieran admitir para el estudio de la sabiduría a nadie que no supiese* "*Mathesis*", [...], *tuve la sospecha de que ellos conocían cierta* "*Mathesis*" *muy diferente de la Matemática vulgar de nuestro tiempo*. [...]. *Y ciertamente me parece que vestigios de esta verdadera* "*Mathesis*" *aparecen en Pappus y Diofanto,* [...]. *Y fácilmente creería que después fue ocultada, por cierta audacia perniciosa, por los mismos escritores; pues así como es cierto que lo han hecho muchos artistas con sus inventos, así ellos temieron quizá que, siendo*

tan fácil y sencilla, se envileciese después de divulgada; y para que les admirásemos prefirieron presentarnos en su lugar, como productos de su método, algunas verdades estériles deducidas con sutileza, en vez de enseñarnos el método mismo que hubiera hecho desaparecer por completo la admiración. Ha habido, finalmente, algunos hombres de gran talento que se han esforzado en este siglo por resucitarla; pues aquel arte no parece ser otra cosa, que lo que con nombre extraño llaman Álgebra [...].»

Como señala Descartes, en la pléyade de geómetras griegos, Pappus fue una excepción, porque desarrolló una singular metodología en la forma de exposición, al codificar todo un cuerpo de tratados analíticos de solución de problemas en el llamado *Tesoro del Análisis* del Libro VII de *La Colección Matemática*. En estos tratados se procede a la reducción de un problema dado a un problema equivalente cuya solución era ya conocida, por ejemplo uno de los tratados más importantes *Los Datos* de Euclides, es en esencia, *Los Elementos*, pero reformulados de una forma que patentiza el camino que sigue la investigación matemática. Desgraciadamente, la obra de Pappus fue ignorada o desconocida por los escritores árabes, intermediarios en el tránsito a occidente de la cultura clásica griega, y permaneció oculta en manuscritos griegos originales que vieron de nuevo la luz en los siglos XVI y XVII, bajo el nuevo espíritu humanista de Commandino, Vieta, Fermat y otros muchos, que se propusieron la traducción, recuperación y restauración de las obras antiguas. Si Descartes hubiera conocido *EL MÉTODO*, la excepción que hace con Pappus la hubiera extendido con toda razón, tal vez, a Arquímedes, ya que estos matemáticos son los únicos en toda la Geometría griega que dan a conocer la vía heurística de los descubrimientos, vía analítica en el caso de Pappus y también vía mecánica en el de Arquímedes.

La Matemática del siglo XVII presenta una inflexión radical respecto a la Matemática clásica griega. El paradigma estilístico y demostrativo que impuso la filosofía platónica, cuyo exponente más representativo es la obra de Euclides *Los Elementos*, es reemplazado por el principio de que lo que importa es la consecución de nuevos resultados, aunque sea sin expresión rigurosa. Se trata de crear y descubrir, se impone el lema «*primero inventar, después demostrar*». La Matemática griega es ponderada por su alto grado de rigor y es la fuente de formación y de inspiración de los matemáticos, pero se abandonan y critican sus métodos porque no son heurísticos. En efecto, el camuflaje permanente del infinito convierte a casi toda la Matemática griega en Geometría y el tratamiento absolutamente riguroso de los problemas infinitesimales requiere un subterfugio: *el método de exhaución* de Eudoxo, que obliga a tratar cada problema de forma particular, dependiendo de su estructura geométrica concreta, además de precisar un método complementario para prever los resultados. Por eso en el siglo XVII, tras la recuperación, reconstrucción, divulgación y asimilación del legado clásico, se impuso un nuevo clima psicológico y una nueva actitud hacia los problemas matemáticos, que permitió el desarrollo de multitud de nuevas técnicas infinitesimales, ya que era general el deseo de encontrar nuevos métodos para resolver rápidamente los problemas que las nuevas condiciones sociales planteaban, métodos que permitieran obtener de forma directa los resultados, aunque fuera a costa del rigor.

Las especulaciones de la Escolástica medieval sobre el infinito y el continuo habían propiciado que los matemáticos posteriores no fueran refractarios a la utilización de las técnicas infinitesimales. El Álgebra simbólica de Vieta, Fermat y Descartes, aplicado al material del Análisis geométrico recuperado de los antiguos, facilitó el desarrollo de técnicas formales que permitieron métodos de rápido descubrimiento más que demostraciones rigurosas. Finalmente la representación algebraica de curvas, vía la Geometría Analítica de Fermat y Descartes, facilitó la rápida y sencilla formulación para la investigación de multitud de problemas de áreas, volúmenes, rectificación, centros de gravedad, tangentes, máximos y mínimos, etc. Con esta rica miscelánea de ingredientes matemáticos –problemas arquimedianos, técnicas algebraicas de Cálculo, Geometría Analítica y sobre todo el libre uso del concepto intuitivo de infinito–, el siglo XVII produjo una impresionante profusión de nuevos resultados, a base de nuevas técnicas y métodos infinitesimales, que provocaron una progresiva aritmetización de problemas que en la antigüedad habían tenido un enfoque estrictamente geométrico.

En particular, respecto del Cálculo Infinitesimal, se abre al comienzo del siglo XVII una etapa empírica, que cubre los dos primeros tercios de este siglo, en los que manejando unos elementos con un estatuto ontológico no muy bien definido *–indivisibles, infinitamente pequeños, incrementos evanescentes, cantidades despreciables*, etc.–, se desarrollan multitud de técnicas y métodos infinitesimales, que contribuyen a resolver de forma sorprendente antiguos y nuevos problemas, bajo la acción de profundas intuiciones, que supliendo la falta de rigor, evitan las contradicciones y el absurdo donde podía haber llevado tanto desenfreno conceptual, y que conducen, bajo una visión de generalización y unificación, a la destilación de un algoritmo universal, al descubrimiento simultáneo del Cálculo Infinitesimal por parte de Newton y Leibniz.

Bajo esta situación, resulta que los matemáticos que desarrollan el germen del Cálculo Integral, bebiendo en las fuentes de los grandes tratados conocidos de Arquímedes –que ahora ya tenían a su disposición–, donde el método de exhaución presidía todo el desarrollo con un implacable rigor, al intentar soslayar la rigidez de la exhaución mediante artificios geométricos que les condujeran a procedimientos heurísticos de rápido descubrimiento, se aproximan de forma sorprendente a la técnica del *método mecánico* de *EL MÉTODO* de Arquímedes. Esto es particularmente cierto en el caso de B.Pascal –que aplica ingeniosamente su *método de la balanza*, llamada *balanza de Arquímedes* en los famosos problemas sobre la cicloide–, y sobre todo, en el caso de Cavalieri, con sus indivisibles. Aunque el siglo XVII no pudo disponer de *EL MÉTODO* de Arquímedes, el cúmulo de analogías con éste es evidente, lo que hace comprensible el que muchos matemáticos de esta época estuvieran convencidos, de que Arquímedes disponía de un método singular y casi milagroso de descubrimiento.

A comienzos del siglo XVII aparecen métodos infinitesimales que modifican y simplifican los métodos de Arquímedes, sobre todo en Stevin y Luca Valerio, que intentan metodizar las técnicas arquimedianas obviando la necesidad de la doble reducción al absurdo del método de exhaución, pero manteniendo el rigor en la demostración, apareciendo de forma latente consideraciones sobre límites basadas en la incipiente Teoría de Números.

En Kepler, la influencia pitagórico-platónica, así como las especulaciones escolásticas sobre la naturaleza del infinito, le dirigen e influyen en su modificación de los métodos de Arquímedes, pero parece no tener muy claro la distinción entre pruebas por exhaución, por ideas, o más bien intuiciones sobre límites o por consideraciones infinitesimales o de indivisibles, aunque generalmente considera áreas y volúmenes compuestos de elementos infinitesimales de la misma dimensión, de manera que por algún procedimiento *ad hoc* realiza la cuadratura o cubatura. A propósito de determinar las proporciones idóneas de los barriles de vino, Kepler consigue –en su obra *Nova Stereometria doliorum vinariorum* de 1615–, por una parte, una multitud de cubaturas de innumerables nuevos cuerpos que Kepler creó, que influyeron durante más de cincuenta años sobre las construcciones infinitesimales posteriores, y por otra, resuelve numerosos problemas de máximos y mínimos, basándose en la elaboración de tablas numéricas de volúmenes según distintas dimensiones.

Con Kepler tiene lugar la ruptura con el escrupuloso rigor de los griegos, salvando de forma más o menos inconsistente la barrera entre lo rectilíneo y lo curvilíneo, lo finito y lo infinito, lo discreto y lo continuo, que había obligado a los helenos, con su espíritu de rigor, a utilizar la doble reducción al absurdo. En efecto, apoyándose en el «*Principio de continuidad*» de Nicolas de Cusa, Kepler salta la barrera y realiza subrepticiamente el paso al límite, identificando descaradamente una curva con una suma de segmentos infinitamente pequeños, un circulo con la yuxtaposición de infinitos triángulos infinitamente pequeños con base infinitamente pequeña sobre la circunferencia y tercer vértice en el centro, etc.

El enfoque de Cavalieri es muy diferente de la forma de Kepler de salvar la continuidad. A la noción de infinitamente pequeño de la misma dimensión opone el indivisible de una dimensión menor, que excluye lo infinitamente pequeño. De esta forma, Cavalieri soslaya la dificultad lógica del paso al límite y resuelve los problemas con más simplicidad y mayor generalidad que la exhaución arquimediana. Para Cavalieri un área estaba formado por un número infinito de líneas paralelas o *indivisibles*, que al sumarlos con los recursos algebraicos de que disponía, podía, por una parte, ratificar los resultados clásicos –lo que daría seguridad a su método–, y por otra, obtener cuadraturas y cubaturas no conocidas por los antiguos. Cavalieri resuelve de forma todavía geométrica problemas equivalentes a las cuadraturas $\int x^n dx$, con n=1,2,3,4,5,6,9, lo que viene a ser el primer *Teorema general del Cálculo*. Por eso se considera a Cavalieri como el primer hito importante en la línea histórica que conduce desde el *método mecánico* de Arquímedes al algoritmo infinitesimal que descubrieron Newton y Leibniz. Hay cierta similitud en cuanto a la concepción del continuo entre el *método mecánico* de Arquímedes y la aplicación del *Principio de Cavalieri* con el que el matemático italiano obtiene, por ejemplo, el área de la elipse a partir del área del círculo y el volumen del cono a partir del volumen de la pirámide. La intención de Cavalieri era aunar en una única actuación matemática el descubrimiento y la prueba, es decir, romper con la dualidad heurística-apodíctica de la Geometría griega. No obstante, Cavalieri no está muy seguro del rigor de su trabajo y en esto sí que se diferencia de Arquímedes, quien tenía muy claro y así lo manifiesta en el preámbulo de *EL MÉTODO* que «*la investigación obtenida por este método no implica verdadera demostración*», por eso ha de confirmar rigurosamente lo que descubre mediante el método de exhaución.

El método de los indivisibles ganó adeptos con el tratamiento que le dio Torricelli. Bajo su enfoque, a pesar de la imprecisión geométrica del «*fluir de los indivisibles*», estas entidades geométricas influyeron en la concepción de Newton sobre momentos y fluxiones y en la noción de diferencial de Leibniz, y además han pervivido a la creación del Cálculo por ambos. El análisis de la obra de Torricelli *De Dimensione Parabolae* arroja un profundo conocimiento de los métodos antiguos y modernos. Entre las 21 demostraciones de la cuadratura de la parábola hay pruebas a la manera de los antiguos, otras del tipo de las de Valerio que le acercan a los límites –aunque geométricamente– y otras por indivisibles. En el uso de éstos, muestra más perspicacia que Cavalieri, tanto por la forma de tratarlos como por los importantes nuevos resultados que obtiene. Además, al utilizar indivisibles curvilíneos –cilíndricos en el caso de un sólido hiperbólico infinito–, Torricelli va mucho más allá que Cavalieri. A propósito de este ejemplo y el de la rectificación de la espiral logarítmica, Torricelli cree ser el primero en haber descubierto que una figura con alguna dimensión infinita puede tener una magnitud –longitud, área o volumen– finita, pero probablemente fue precedido por Fermat –con su cálculo de áreas bajo hipérbolas generalizadas– y desde luego por Oresme y otros filósofos escolásticos.

El punto de vista de Sant-Vincent, de la escuela holandesa, es bastante diferente al de los italianos Cavalieri y Torricelli, tanto en conceptos como en método, acercándose al de Stevin y Valerio. Saint-Vicent recoge de éstos la idea de substituir la doble reducción al absurdo que aplicaban los antiguos en los problemas de exhaución por una única y directa demostración, pero si Stevin y Valerio, así como Arquímedes, subdividían una figura, por ejemplo en rectángulos, o inscribían polígonos de creciente número de lados, aproximando hasta que el error fuese menor que una cierta cantidad, Saint-Vincent –en su *Opus Geometricum*– influenciado por las discusiones escolásticas, utiliza infinitos rectángulos infinitamente pequeños hasta «*agotar*» la figura, permitiéndose una subdivisión continua hasta el infinito y considerando polígonos de infinitos lados inscritos en un círculo, creyendo que podía alcanzar el infinito actual en la línea de N. de Cusa, de ahí lo justificado que es llamar a este método «*exhaución*» nombre que el mismo acuñó –y que resulta más ajustado que para el método de los antiguos–. Con esta concepción no es extraño que cayera en el grave error de creer que había logrado la cuadratura del círculo. No obstante, el elemento infinitesimal que Saint-Vincent utiliza está más próximo al infinitamente pequeño de la subdivisión continua, que al indivisible estático de Cavalieri, de modo que a pesar de la falta de claridad y de rigor, Saint-Vincent dirigió su creación en un sentido histórico positivo, es decir, hacia la doctrina de los límites, aunque se mantuvo todavía en un estadio geométrico.

Con el grupo de matemáticos franceses –Roberval, Fermat, Pascal y Descartes–, tiene lugar una cierta ruptura conceptual y metodológica. Se conserva el fuerte interés por la Geometría de Arquímedes, pero la orientación estrictamente geométrica de los indivisibles de Cavalieri y Torricelli es sustituida, gracias a la incipiente *Teoría de Números* –que inicia y desarrolla el propio Fermat–, por una progresiva aritmetización, que usaba de forma implícita los límites, lo cual se favorece al reemplazar el *indivisible* fijo, geométrico y estático por el *infinitamente pequeño* de la subdivisión continua. Con todo ello, aparecen las *integraciones aritméticas* que se aproximan a nuestra integral definida.

Es quizá en el caso de Roberval donde más diáfanamente se advierte esta transición, hasta el punto de que realmente utiliza infinitamente pequeños homogéneos, pero da la impresión de que lo que maneja son indivisibles heterogéneos, al obtener los resultados mediante razones de figuras que compara, lo cual introduce una cierta confusión. Por otra parte Roberval amplía el elenco de elementos infinitesimales al utilizar no solo rectángulos o paralalepípedos, sino también triángulos y tubos cilíndricos infinitesimales. Roberval regresa a la concepción pitagórica de la composición aritmética de los elementos geométricos, para permitirse, por ejemplo, despreciar un cuadrado frente a un cubo, lo que desde un punto de vista aritmético supondría una intuición de límites así como una anticipación de la evanescencia de los infinitesimales de orden superior en el Cálculo Diferencial de Leibniz. Roberval resuelve la cuadratura básica $\int x^n dx$ y se acerca a nuestro Cálculo Integral con sus numerosos resultados equivalentes a integrales definidas de funciones algebraicas y trigonométricas, en especial con el estudio exhaustivo que hizo de cuadraturas y cubaturas a propósito de la cicloide.

Fermat poseía una extraordinaria erudición matemática, que incluía un profundo conocimiento de toda la Matemática griega –en particular las obras de Diofanto, Apolonio, Arquímedes y Pappus– y un soberbio dominio del Análisis Algebraico del *Arte Analítica* de Vieta, de cuya conjugación emergen sus estudios sobre *Teoría de Números* y la invención de su Geometría Analítica. A su vez de ambas doctrinas matemáticas surgen sus brillantes artificios infinitesimales que hacen de Fermat el matemático que más contribuyó, sin duda alguna, al nacimiento del nuevo Cálculo que desarrollarían Newton y Leibniz. Los métodos que Fermat aplica a un considerable conjunto de problemas de cuadraturas, cubaturas, máximos y mínimos, tangentes, rectificaciones, centros de gravedad, etc. suponen una auténtica revolución en las técnicas del Cálculo Diferencial e Integral que anteceden al descubrimiento de Newton y Leibniz. En sus cuadraturas aparecen varios de los aspectos conceptuales esenciales de la integral definida, en particular el equivalente al límite de una suma de infinitas áreas de rectángulos infinitamente pequeños. Y en sus originales y prácticos métodos de extremos y tangentes, brota por primera vez el «*cociente incremental*» que define nuestra derivada. Aunque en el tema de extremos y su primera aplicación a las tangentes, Fermat se mantiene en un ámbito algebraico sin cruzar la frontera entre lo finito y lo infinitesimal, es indiscutible que desde el punto de vista de lo formal Fermat da un paso trascendental hacia la algoritmización de la diferenciación de Newton y Leibniz.

Los dos representantes más señeros de la escuela inglesa Wallis y Barrow, son dos de los matemáticos que más influyeron sobre Newton, quizá por la proximidad en el espacio geográfico y temporal. Sin embargo y a pesar de ello, los trabajos de Wallis y Barrow son casi antagónicos, no sólo porque partían de concepciones diferentes sino sobre todo por la diferencia de método y estilo. Esto significa que Newton, con su reconocida genialidad, fue capaz de captar lo que de fructífero había en ambos trabajos para construir sobre ello su magnífico instrumento algorítmico.

Al corriente del Álgebra literal de Vieta, los métodos analíticos cartesianos, los orientados hacia los límites de los matemáticos de los Países Bajos (Stevin, Saint-Vincent, ...) y franceses (Fermat, Pascal y Roberval), Wallis inicia una potente aritmetización de las técnicas del Cálculo –en particular de los indivisibles– de modo que al adentrarse en la exploración del infinito es, entre los predecesores del Cálculo, quien más se acerca a la idea de límite, hasta llegar a aplicarla de forma subrepticiamente intuitiva con una habilidad inusitada, que llega a resolver la cuadratura básica de Cavalieri para exponentes racionales mediante una interpolación, e incluso extiende la validez a exponentes irracionales.

Los trabajos de Barrow en contraste con los de Wallis suponen una rémora en el camino de la aritmetización. Barrow trabajó en un lenguaje casi estrictamente geométrico–sintético, en el que fue capaz de desarrollar importantes descubrimientos que son equivalentes geométricos a numerosos teoremas del Cálculo Infinitesimal –trazado de la tangente de una curva implícita mediante su consideración como límite geométrico de la secante, a través del *Triángulo característico*; comportamiento de la derivación y la integración frente a las operaciones aritméticas; problemas de máximos y mínimos; métodos de «*integración por partes* y *cambios de variable*»; reglas para la diferenciación e integración de funciones potenciales, circulares, logarítmicas y exponenciales; carácter inverso de la integración y la diferenciación; teoremas sobre rectificación de curvas y centros de gravedad; etc.

El excesivo abuso de la intuición inmediata de las magnitudes geométricas y la violación del principio de homogeneidad espacial dimensional con los indivisibles, provocaba que no hubiera en el ambiente matemático un consenso acerca del valor demostrativo de los métodos utilizados. Algunos concebían el método de los indivisibles como simplemente heurístico y creían necesaria una demostración por exhaución –punto de vista arquimediano–. En general se consideraba que los resultados obtenidos mediante indivisibles podían justificarse fácilmente con la exhaución, pero no era necesario porque concebían el nuevo método inventivo no más que como un lenguaje diferente, un estilo distinto de expresar unos mismos conceptos. Saben que los resultados son correctos porque saben y pueden probarlos rigurosamente mediante los métodos de Arquímedes. Vamos a reproducir algunas frases representativas de lo que se acaba de exponer:

J.KEPLER (*Nova Stereometria Doliorum Vinariorum* de 1615):

> «[...]. *Podríamos obtener demostraciones perfectas de los libros de Arquímedes, a nosotros no nos repele la espinosa lectura de ellos.*»

P.FERMAT (*De aequationum localium* ... *in quadrandis infinitis parabolis et hiperbolis* "*Tratado sobre cuadratura*" de 1658):

> «[...]. *Basta hacer esta observación* [sobre las condiciones para poder aplicar el método de Arquímedes] *una vez para no obligarse a recordar y a insistir constantemente sobre un artificio bien conocido de todos los geómetras*. [...]. *Así alcanzamos la conclusión, que podría ser fácilmente confirmada por una más prolija prueba llevada a cabo a la manera de Arquímedes*. [...].»

B.CAVALIERI (*Geometría Indivisibilibus Continuorum* ...) de 1635:

> «[...]. *Se podría demostrar todo esto utilizando las técnicas arquimedianas, pero supondría un gran esfuerzo*.»

B.PASCAL *(Lettre à Carcavi* de 1658):

> «[...]. *He querido hacer esta advertencia para mostrar que todo lo que está demostrado por las verdaderas reglas de los indivisibles, se demostrará también con el rigor y a la manera de los antiguos* [como Arquímedes] *y que así ambos métodos no difieren más que en la manera de hablar*. [...].*Y por eso no tendré ningún reparo en usar este lenguaje de indivisibles hablando de la suma de líneas y de la suma de planos, aunque la suma de ordenadas no parezca ser algo geométrico a los que no entienden la doctrina de los indivisibles y creen que es pecar contra la Geometría* [...].»

I.BARROW (*Lectiones Geometricae* de 1670):

> «[...]. *Se podría alargar mediante un discurso apagógico* [mediante la doble reducción al absurdo del método de exhaución], *pero ¿para qué tanto esfuerzo*?»

J.WALLIS (*Arithmetica Infinitorum* de 1656):

> «[...]. *Este procedimiento es altamente heterodoxo, pero puede verificarse mediante el bien conocido método apagógico de figuras inscritas y circunscritas, lo que es*

superfluo, porque la frecuente iteración produce náusea en el lector. Cualquiera ducho en Matemáticas puede realizar tal prueba.»

C.HUYGENS (*Horologium Oscillatorium* de 1673):

«[...]. *No es de gran interés el que demos una demostración absoluta, después de haber visto que una perfecta demostración puede ser dada. Concedo que debería aparecer en una forma clara, ingeniosa y elegante, como en todos los trabajos de Arquímedes. Pero lo primero y más importante es el método de descubrimiento mismo.*»

Las frases transcritas son muy significativas para comprender la enorme influencia de Arquímedes sobre los matemáticos del siglo XVII, pero sirven sobre todo para mostrar la primacía de la argumentación heurística sobre la apodíctica, de la ponderación del método de descubrimiento por encima de la expresión rigurosa.

El método de lo indivisibles recibió ciertas críticas dirigidas contra su propia naturaleza, debido al problema que plantean sobre la estructura del continuo, toda vez que contradecían la doctrina aristotélica del continuo, como divisible en partes del mismo tipo que la magnitud original, divisibles de nuevo indefinidamente. Por eso Fermat, Roberval, Wallis y otros, recogen estas críticas e intentan modificar los procedimientos de Cavalieri, para evitar los errores de dimensionalidad, manifestando que no se toman segmentos para la suma de todas las ordenadas, sino rectángulos de anchura infinitesimal –*infinitesimales*–, lo que desde el punto de vista del rigor no representa un gran progreso, pero salva, mejor que peor, la homogeneidad. Con ello se abre la segunda etapa del Cálculo Infinitesimal, sustituyendo los «*indivisibles*» por los «*infinitamente pequeños*» de igual dimensión geométrica espacial que la figura a la que pertenecen. Como no se sabe muy bien lo que es una magnitud infinitesimal ni lo que debe entenderse por una suma de infinitos sumandos, el rigor brilla por su ausencia, pero como contrapartida la fecundidad de los nuevos métodos fue asombrosa.

El Cálculo Infinitesimal del siglo XVII, anterior a Newton y Leibniz, estuvo esencialmente vinculado a la investigación sobre curvas. Se insistió inicialmente en las curvas conocidas por los griegos –las cónicas de Menecmo y Apolonio, la cuadratriz de Hipias y Dinostrato, la concoide de Nicomedes, la cisoide de Diocles, la hippopede de Eudoxo, la espiral de Arquímedes, etc.), pero en seguida esta colección se vio complementada por multitud de nuevas curvas, entre las que sobresalen las parábolas, hipérbolas y espirales generalizadas o de orden superior –llamadas de Fermat–, el caracol de Pascal, el folium de Descartes, la curva de Lamé, la espiral logarítmica, la kappa-curva, la curva tangentoidal, y ante todo la reina de todas las curvas: la cicloide.

Contrariamente al punto de vista estático que fue casi exclusivo –salvo quizá en el estudio de la espiral de Arquímedes– en el tratamiento de las curvas en Grecia, en el siglo XVII se abre paso en seguida el punto de vista cinemático, de manera que desde el principio los problemas de diferenciación se presentan no sólo a propósito de tangentes sino también de velocidades. Particularmente el estudio de la espiral logarítmica y de la cicloide contribuyen a la simbiosis de los métodos geométricos con los cinemáticos. En efecto, una curva se puede considerar como la trayectoria de un punto en movimiento y la tangente como la recta que pasa por dos posiciones consecutivas. La idea de dirección instantánea del movimiento, el principio de la composición de movimientos y más precisamente de la composición de velocidades permite a Torricelli, Roberval y otros, disponer de un método general de obtención de tangentes –para curvas que se pueden definir cinemáticamente–, que va a influir de forma considerable en la forma geométrica del cálculo de Barrow, y sobre todo en el cálculo de las fluxiones de Newton y en sus aplicaciones geométricas.

Y todo ello a pesar de Descartes que trataba desdeñosamente de mecánicas a las curvas no algebraicas, y pretendía su exclusión de la Geometría. Para curvas algebraicas, Descartes idea un método de obtención de tangentes –*el método del círculo*–, basado en consideraciones sobre raíces dobles, bajo un punto de vista en absoluto diferencial, independiente del concepto de límite y que es el de la Geometría Algebraica. La actividad matemática de Descartes ocupa un segundo plano dentro del desarrollo de su Filosofía –*La Geometría* aparece en 1637 como uno de los apéndices de su *Discurso del Método*–; y a pesar de la gran influencia que tuvo la difusión de sus métodos analíticos, Descartes no contribuyó de forma efectiva al desarrollo de las técnicas infinitesimales, aunque se sirviera de algunos de sus conceptos y métodos, por ejemplo, en el estudio de algunas cuestiones físicas –la presión de los fluidos o la caída de los cuerpos– en las que al igual que en la gestación de la Geometría Analítica recogió la influencia de la Escolástica y particularmente de Oresme, y también en la resolución de cuestiones que le sugirió el padre Mersenne acerca de cuadraturas, cubaturas y centros de gravedad, cuando aplica los métodos de Arquímedes, Stevin, Kepler y Cavalieri. Pero Descartes siempre consideró que estos métodos no eran lo suficientemente rigurosos como para ser publicados.

Los métodos algebraicos coexisten con los métodos cinemático–diferenciales de Roberval, Fermat y Barrow. Se empieza a considerar que las curvas definidas cinemáticamente son como las demás, no hay por qué hacer distinción, todas pueden estudiarse por los mismos métodos. La variable tiempo en los trabajos de Barrow se convierte en una variable independiente universal de la que dependerá la variación simultánea de varias magnitudes, como base de un Cálculo Infinitesimal de tendencia geométrica, ideas que son el punto de partida de Newton, para quien sus fluyentes son las distintas magnitudes funciones de un tiempo, que es un parámetro universal, mientras sus fluxiones son las derivadas respecto al tiempo, lo que supone la culminación de los métodos cinemáticos.

Otro aspecto decisivo del Cálculo del siglo XVII es que se empieza a intentar una clasificación de los problemas. Los problemas de diferenciación aparecen bajo tres aspectos: velocidades, tangentes y máximos y mínimos. Fermat unifica los tres aspectos e inicia el argumento diferencial de incrementar la variable independiente y valorando el correspondiente incremento de la función considerar por primera vez –aunque manteniéndose en el terreno de lo operativo y algebraico– el cociente incremental que definirá la primera derivada. Por ello Laplace y la mayor parte de los matemáticos franceses consideran a Fermat como el verdadero descubridor del Cálculo Diferencial. Coordinados los aspectos vinculados a la primera derivada, hay que decir que los relativos a la segunda derivada tardarán bastante más en unificarse, lo que llevará a cabo Huygens a propósito de las evolutas y del radio de curvatura de una curva.

Respecto al Cálculo Integral se estudiaban desde la época clásica griega –sobre todo por parte de Arquímedes, los problemas de cuadraturas, cubaturas y centros de gravedad. El siglo XVII ampliará considerablemente el número de cuadraturas y cubaturas en relación con la ingente cantidad de nuevas curvas que se definen y añade la rectificación de curvas y el cálculo de superficies de revolución –en la antigüedad sólo Arquímedes había tratado los casos particulares de la rectificación de la circunferencia en *Sobre la medida del círculo* y la superficie de la esfera en *Sobre la esfera y el cilindro*–. Se emprendería una clasificación de los problemas según la naturaleza de la integral subyacente. Para áreas y volúmenes el paso fundamental lo da Cavalieri con sus indivisibles, mediante los cuales advierte que muchos de los problemas resueltos por Arquímedes se reducen a la cuadratura de x^n, para $n=1,2$. Sigue inmediatamente el intento de generalizar la cuadratura de Cavalieri para n racional distinto de –1 (para $n=-1$, la llamada cuadratura de la hipérbola de Apolonio se tardaría bastante más tiempo en resolver–, con una profusión de brillantes resultados sobre cuadraturas de hipérbolas y parábolas generalizadas, algunas obtenidas por indivisibles o infinitesimales –Roberval, Pascal, ...–, otras mediante cuadraturas aritméticas –que se basaban en el modelo de la cuadratura de la espiral por Arquímedes– por medio de diversas fórmulas para la suma de las potencias de los primeros enteros obtenidas por consideraciones sobre números poligonales en el caso de Fermat o sobre el triángulo aritmético en el trabajo de Pascal; otras obtenidas empíricamente a base de una buena dosis de inducción incompleta, que permitiría a Wallis obtener la cuadratura de $x^{n/m}$, y, finalmente, otras por originales métodos como el de la progresión geométrica de Fermat.

De esta forma todos los problemas sobre áreas y volúmenes podían reducirse a cuadraturas. Dos problemas se consideraban equivalentes cuando dependían de la misma cuadratura. Por ejemplo Cavalieri demuestra que el problema del volumen de la pirámide y el de la cuadratura de la parábola son equivalentes porque ambos dependen de la cuadratura de x^2. Se disponía por tanto de una forma de clasificar los problemas según el grado de la dificultad de la cuadratura a que daban lugar.

Si a esto le añadimos que tanto Pascal como Barrow, obtienen mediante consideraciones geométricas resultados asimilables a los métodos de integración por partes e *integración por cambios de variable*, resulta que los matemáticos del momento pueden resolver ya infinidad de problemas que se reducen a cuadraturas elementales. Todo ello al inmenso precio de dar la espalda al pasado y aceptar el buscar la justificación de los métodos nuevos en la fecundidad de los resultados y no en el argumento riguroso.

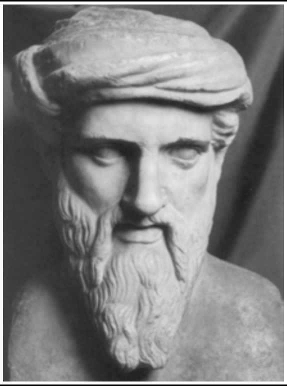
Pero todavía quedaban por resolver los arduos problemas de la cuadratura del círculo y de la hipérbola de Apolonio, a lo que se enfocan ciertos trabajos de Saint-Vincent, Mercator, Wallis, Gregory y Newton, mediante procedimientos de interpolación indefinida de funciones circulares y logarítmicas, que pronto darán lugar con Newton y Leibniz a los métodos generales de desarrollo en serie. Entre los algoritmos infinitos obtenidos sobresalen los sensacionales descubrimientos de la serie de Mercator para el logaritmo en relación con la cuadratura de la hipérbola, así como el desarrollo de Wallis de $\pi/2$ en producto infinito y el desarrollo de la serie binomial de Newton, ambos en relación con la cuadratura del círculo.

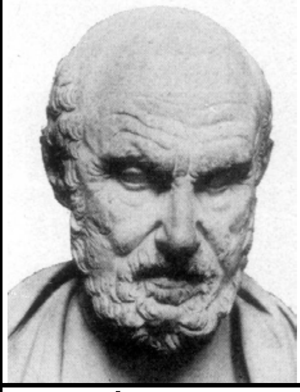
Los problemas de la rectificación de curvas se resolvieron más tardíamente. Históricamente la primera curva rectificada después del círculo fue la espiral logarítmica –llamada por Torricelli espiral geométrica para distinguirla de la espiral de Arquímedes, que sería la espiral aritmética–. El problema fue resuelto por medios cinemáticos hacia 1640 por Roberval y Torricelli. Neil resuelve hacia 1658 la rectificación de la parábola semi-cúbica $kx^2=y^3$, llamada parábola de Neil, mientras Roberval y Wren consiguen rectificar la cicloide hacia 1659. Por las mismas fechas Pascal obtiene la igualdad de la longitud de la espiral de Arquímedes con la de una parábola en *Egalité des lignes spirale et parabolique* de *Les Lettres de A. de Dettonville*. Respondiendo a estos éxitos de Wren y Pascal, Fermat escribe hacia 1659 un tratado general sobre rectificación, *De linearum curvarum cum lineis rectis comparatione dissertatio geometrica*, en el que al aplicar el material desarrollado en sus cuadraturas y con base en la parábola de Neil, obtiene la rectificación de una familia infinita de curvas. Varios matemáticos reducen la rectificación de la parábola a la cuadratura de la hipérbola, ejemplo importante porque aparece como caso particular según el cual la rectificación de la curva $y=f(x)$ se corresponde con la cuadratura de la curva $y=[1+f'(x)^2]^{1/2}$, de manera que el problema de la rectificación forma una transición geométrica natural entre la diferenciación que presupone y la integración a la que se reduce, contribuyendo a vincular así los dos tipos fundamentales de problemas del Cálculo Infinitesimal: las tangentes del Cálculo Diferencial y las cuadraturas del Cálculo Integral.

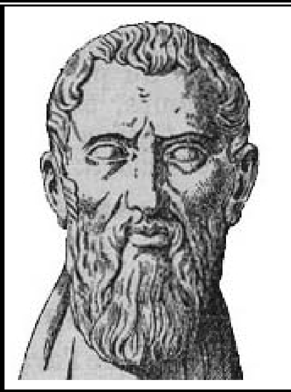
Precisamente el descubrimiento de que tales problemas –las cuadraturas y las tangentes– son en cierto modo inversos uno del otro, cuestión vislumbrada por Barrow –aunque, oscurecida un tanto por el abstruso lenguaje geométrico y sintético que utilizaba, le impidió advertir que había descubierto la clave del Cálculo Infinitesimal, el instrumento esencial para realizar las cuadraturas mediante la operación inversa del cálculo de la tangente, es decir, la antiderivación–, en la mente de Newton y Leibniz fraguó de tal forma, que constituyó un componente esencial en la sistematización del Cálculo por ambos, al destilar de la rica miscelánea de técnicas infinitesimales anteriores un poderoso algoritmo instrumental para el cálculo sistemático de áreas y tangentes.

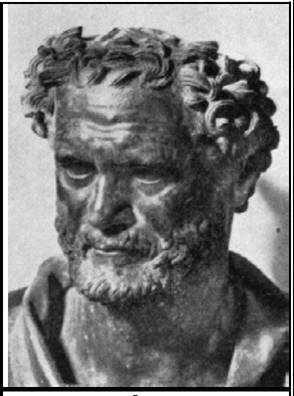
Así termina este trabajo en el que de forma interdisciplinar se investiga desde la Matemática el pasado histórico de uno de los instrumentos científicos más potentes que se ha elaborado en la historia del pensamiento, a propósito de una de las cuestiones que más ha inquietado el espíritu del hombre: el infinito.

LOS FILÓSOFOS Y MATEMÁTICOS QUE MÁS PARTICIPARON EN EL NACIMIENTO DEL CÁLCULO INFINITESIMAL

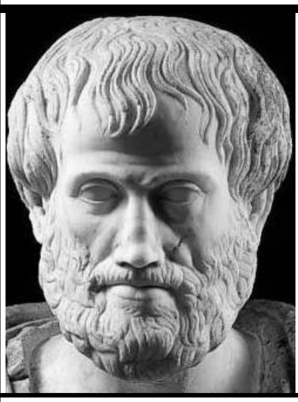

PITÁGORAS


HIPÓCRATES

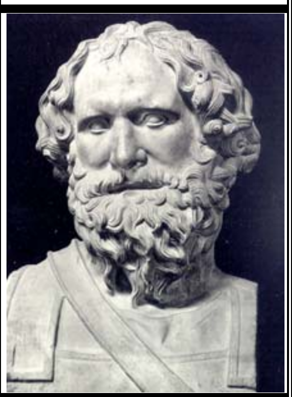

ZENÓN


DEMÓCRITO

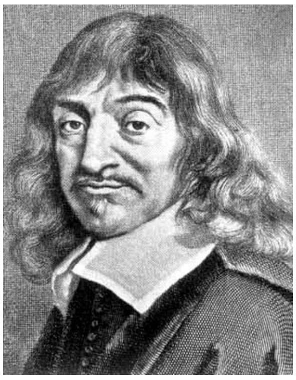

EUDOXO


ARISTÓTELES


EUCLIDES


ARQUÍMEDES


CAVALIERI

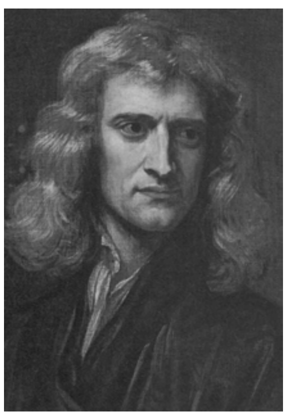

DESCARTES


FERMAT


PASCAL


WALLIS


BARROW


NEWTON


LEIBNIZ

CITAS MEMORABLES SOBRE LA HISTORIA DEL CÁLCULO INFINITESIMAL

1. «*Dicen que la divinidad se enojó contra quien divulgó la doctrina de Pitágoras, pereciendo como un impío en el mar por sacrílego al haber revelado la doctrina de los números irracionales y la inconmensurabilidad.*»
   Jámblico. *Vida Pitagórica*. XXXIV, 247.

2. «*Viendo en ello* [en la ocultación de las magnitudes inconmensurables] *menos una debilidad humana que una necedad propia de puercos de cría, sentí vergüenza no sólo de mí mismo, sino de toda la raza helena* [...].»
   Platón. *Leyes*, 819e.

3. «*Sumando siempre algo al finito, sobrepasaremos todo finito; igualmente restándole algo, vendremos a caer por debajo de todo finito.*»
   Aristóteles. *Física*, Libro VIII, Cap.10, 266b.

4. «*Los matemáticos actualmente no precisan del infinito en sus estudios, ni lo emplean en ellos, sino que conciben la existencia de una magnitud finita tan grande como se quiera* [...].»
   Aristóteles. *Física*, Libro III, Cap.7, 208a.

5. «*No es digno de llamarse hombre aquel que desconoce que la diagonal de un cuadrado es inconmensurable con el lado.*»
   Sophie German. *Mémoire sur les Vibrations des surfaces élastiques* (1816).

6. «*Eudoxo construyó una profunda teoría que aparece descrita en el Libro V de Los Elementos de Euclides, y que es considerada por muchos matemáticos modernos como el logro más depurado de las Matemáticas griegas. Esta teoría es sorprendentemente moderna en espíritu, y puede ser considerada como el principio de la moderna teoría de números irracionales, que ha revolucionado el Análisis Matemático y ha tenido mucha influencia en la filosofía reciente.*»
   G.H. Hardy. *Apología de un matemático.* Nivola. Madrid, 1999. pp.98–99.

7. «*Había más imaginación en la cabeza de Arquímedes que en la de Homero.*»
   Voltaire. *Diccionario filosófico*.

8. «*Arquímedes es el más científico de todos los griegos, el sabio más profundo de toda la antigüedad clásica* [...]. *La Geometría estática de Euclides se convierte en Geometría cinética con Arquímedes, quien llenó la sima platónica abierta ente la razón pura y la experiencia, y, apoyándose en ésta, descubrió métodos generales para calcular las áreas de las figuras curvilíneas y los volúmenes de cuerpos limitados por superficies curvas.*»
   F.Vera. *Breve Historia de la Geometría*. Losada. B. Aires. 1963. Cap. 4. pp.64-65

9. «*Dice Plutarco que los inventos fueron para Arquímedes como juegos de Geometría*. [...] *Arquímedes es, acaso, el hombre de ciencia que ha llegado a la más alta cima de la abstracción. [...] Arquímedes puso los cimientos del Cálculo integral*. [...] *En su trabajo EL MÉTODO, analizó los vínculos entre el descubrimiento y la demostración de las verdades matemáticas, dejando la más amplia libertad para aquél y exigiendo el máximo rigor lógico para ésta.*»
   F.Vera. Arquímedes (en *Científicos griegos*). Aguilar, Madrid, 1970. pp.11-13.

10. «*Todo lo que varía, se sepa medir o no, lo podemos imaginar como una cantidad continua representada por un segmento rectilíneo.*»
    Oresme. *Tractatus de Latitudinibus Formarum*, 1362.

CITAS MEMORABLES SOBRE LA HISTORIA DEL CÁLCULO INFINITESIMAL

11. «*Los geómetras antiguos empleaban en sus demostraciones un método diferente al seguido en la fase inventiva y procedían así, entre otras razones, para ocultar el secreto del arte.* [...]. *Entre todos los trabajos que se refieren a las disciplinas matemáticas, parece que el primer lugar puede ser reivindicado por los descubrimientos de Arquímedes, que confunden a las almas por el milagro de su sutilidad.*»
    Torricelli. *Opera Geometrica*. Florencia, 1644. Proemio.

12. «[...]. *Así alcanzamos la conclusión* [sobre la cuadratura de parábolas generalizadas*, que podría ser fácilmente confirmada por una más prolija prueba llevada a cabo a la manera de Arquímedes*. [...].»
    P.Fermat. *Tratado sobre cuadratura*,1658.

13. «*Para encontrar todas las propiedades de las líneas curvas basta con saber la relación que tienen todos sus puntos con los de las líneas rectas*, [...] *y conocer la manera de trazar otras líneas que las corten en todos esos puntos en ángulo recto*. [...] *Y me atrevo a decir que éste* [el trazado de las rectas normales a una curva] *es el problema más útil y más general no sólo que yo conozca, sino aun que yo haya anhelado jamás conocer en Geometría.*»
    Descartes. *La Geometría,* G.AT.VI. 412–413.

14. «*Lo que ha inmortalizado el nombre de este gran hombre* [Descartes]*, es la aplicación que ha sabido hacer del Álgebra a la Geometría, una idea de las más vastas y felices que haya tenido el espíritu humano, y que será siempre la llave de los más profundos descubrimientos no solamente en la Geometría, sino en todas las ciencias físico-matemáticas.*»
    D'Alembert. *Discours Préliminaire de l'Encyclopédie* (Orbis, 1984, pp.84–85).

15. «[...]. *Todo lo que está demostrado por las verdaderas reglas de los indivisibles, se demostrará también con el rigor y a la manera de los antiguos* [como Arquímedes].»
    B.Pascal. *Lettre à Carcavi*, 1658.

16. «*Al no poder imaginar qué ingenio mortal pueda llegar a tanto mediante la virtud del razonamiento, estoy seguro que Arquímedes se vio ayudado por el Álgebra, a la que conocía en secreto y que ocultaba de forma estudiada.*»
    I.Barrow. *Archimedis Opera*. Londres,1675.

17. «[...]. *Este procedimiento es altamente heterodoxo, pero puede verificarse mediante el bien conocido método apagógico de figuras inscritas y circunscritas* [mediante el método de exhaución].»
    J.Wallis. *Arithmetica Infinitorum*,1656.

18. «[...]. *No es de gran interés el que demos una demostración absoluta, después de haber visto que una perfecta demostración puede ser dada. Concedo que debería aparecer* la demostración de las cuadraturas] *en una forma clara, ingeniosa y elegante, como en todos los trabajos de Arquímedes. Pero lo primero y más importante es el método de descubrimiento mismo.*»
    C.Huygens. *Horologium oscillatorium*, 1673.

19. «*Isaac Barrow fue el primer inventor del Calculo Infinitesimal. Newton adquirió las principales ideas del mismo a través de su comunicación personal con Barrow.*»
    M.Child. (I. Barrow. *Geometrical lectures*. Chicago. Open court, 1916. Prefacio, p. VII).

20. «[...] *Fermat fue uno de los grandes genios de Francia y uno de los matemáticos más extraordinarios de todos los tiempos.*»
    R. Paintandre, Profesor de Matemáticas del Licée *P. Fermat* de Toulouse, 22/6/1957.

Los primeros problemas infinitesimales en el mundo griego

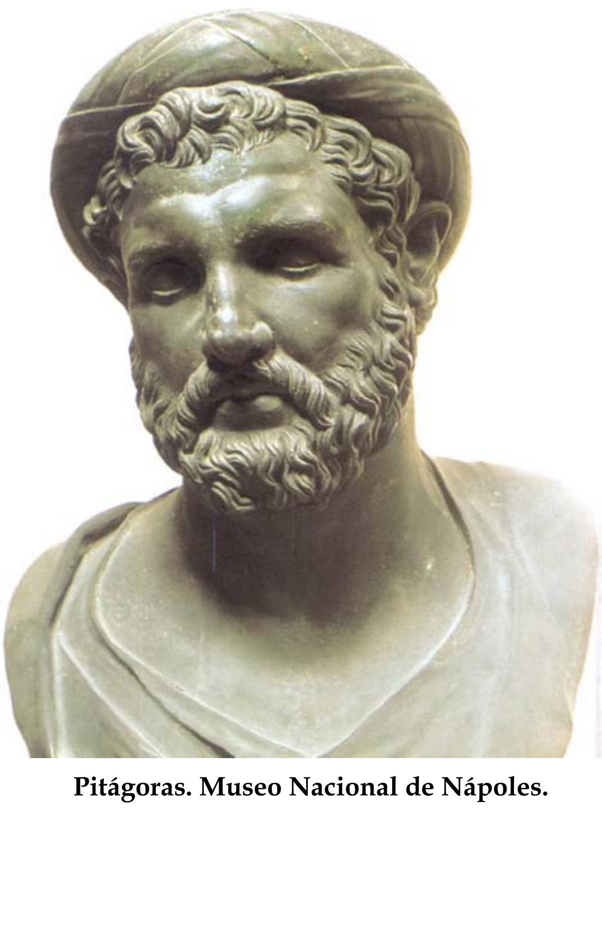
La aparición de las magnitudes inconmensurables

Desde los albores de la aparición de la Matemática racional se encuentran rastros de los métodos infinitesimales. Las reflexiones provocadas por el cambio y el movimiento que surgen en las primeras manifestaciones del pensamiento crítico, conducen a concepciones de índole infinitesimal, al intentar construir doctrinas de pensamiento matemático abstracto sugeridas por el permanente fluir de las cosas que manifiesta el mundo natural circundante. De esta forma aparece el problema de la continuidad de los entes geométricos, la divisibilidad de los segmentos «*ad infinitum*», o la existencia atomística de partes intrínsecamente indivisibles.

La idea de que dos magnitudes, y más concretamente dos segmentos, tienen siempre una parte alícuota común, es decir que son *conmensurables*, es si duda una etapa primigenia inevitable en el desarrollo del pensamiento matemático y por supuesto en el ámbito artesanal por necesidades de la medida siempre aproximada de longitudes.

La grandeza sublime del *Teorema de Pitágoras* –aplicado a la diagonal y el lado de un cuadrado– y la mágica belleza del *Pentagrama místico* pitagórico –generador de la *sección áurea* como razón entre la diagonal y el lado del pentágono regular (*Euclides*, XIII.6)– fueron dos de los tópicos más relevantes de la Escuela Pitagórica, pero se convirtieron en dos caballos de Troya para la Geometría griega, porque llevaban en su interior el germen de la profunda crisis de la comunidad pitagórica donde aparecieron. Los pitagóricos demuestran que el lado y la diagonal de un mismo cuadrado no admiten ninguna medida común, y lo mismo respecto de un pentágono regular. En ambas figuras, si un número entero representa el lado, ningún otro número entero puede representar la diagonal. Ambos segmentos son *inconmensurables*. No se pueden conocer numéricamente juntos. Si el descubrimiento hubiera sido a través de la diagonal del cuadrado, $\sqrt{2}$ sería la primigenia magnitud inconmensurable de la historia, mientras que, si hubiera sido a través de la diagonal del pentágono regular, habría sido $\sqrt{5}$, ya que *el número de oro* es $\phi=(1+\sqrt{5})/2$.

LOS INCONMENSURABLES QUIEBRAN LA FILOSOFÍA PITAGÓRICA



Pitágoras. Museo Nacional de Nápoles.

Aunque Proclo en su famoso *Comentario al Libro I de Los Elementos de Euclides* atribuye al propio Pitágoras el primer reconocimiento de inconmensurables, la tradición lo atribuye al pitagórico Hipasos de Metaponto, hacia el 480 a.C.

Las concepciones pitagóricas establecían que toda la naturaleza estaba regida por un orden matemático y acuñaban el término *Cosmos* para describir un universo armonioso y ordenado por unas leyes cognoscibles, inteligible por el hombre a través de número, «*esencia de todas las cosas*» y principio generador en el macrocosmos y el microcosmos. Con esta cosmovisión se puede entender la magnitud de la conmoción que debió suponer para el Pitagorismo la aparición del inconmensurable, ya que no sólo quiebra lo inmediato, es decir, la Aritmética y la Geometría –el Pitagorismo había establecido una exacta identificación entre número y magnitud, entre el pensamiento aritmético y la realidad natural concreta–, sino también la Ciencia en general y la Filosofía, al resquebrajarse sus cimientos aritméticos que eran principios racionales basados en el número entero.

El descubrimiento de los inconmensurables es un reto lanzado por la naturaleza a la Aritmética que refuta la creencia pitagórica en la omnipotencia de los números.

La súbita emergencia de la inconmensurabilidad sometió el pensamiento pitagórico a un doble desafío, uno filosófico, ya que la irracionalidad atentaba contra el sincretismo aritmético-físico que establecía la preeminencia del número como esencia del Cosmos y otro matemático ya que, por una parte, a partir de entonces en Geometría era imposible medir siempre con exactitud, y por otra los inconmensurables exigían la reconstrucción de todas las pruebas pitagóricas de los teoremas que utilizaban proporciones.

En la Matemática actual las razones inconmensurables se expresan mediante números irracionales. Los babilonios y los egipcios habían trabajado con tales números, a base de aproximaciones, aunque sin la conciencia de la falta de exactitud, es decir, sin la constancia de la diferencia radical entre razones conmensurables e inconmensurables. En cambio para los griegos la palabra número significa «*número entero positivo*»; una fracción a/b indicaría no un número racional sino una relación entre los números enteros a y b, «*la razón*» entre a y b. En sentido actual sería un par ordenado de números.

Para los pitagóricos dos razones a/b, c/d, se dice que son «*proporcionales*»,

a/b=c/d, cuando existen enteros p,q,m,n, tales que a=mp, b=mq, c=np, d=nq;

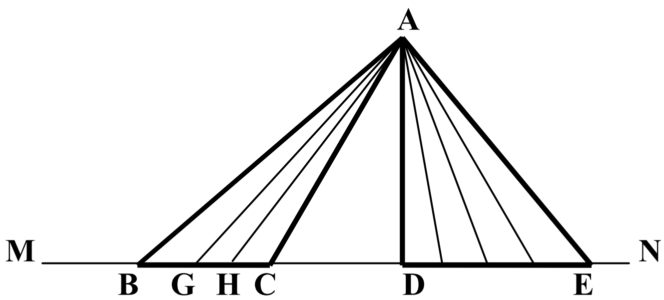
por ejemplo: 12/15=16/20, porque 12 contiene cuatro de las cinco partes de 15, al igual que 16 contiene cuatro de las cinco partes de 20.

A partir de esta base se desarrolló inicialmente la *Teoría pitagórica de la proporción*. La visión de número como tamaño se aplicó a las magnitudes geométricas: longitudes, áreas y volúmenes, en la creencia de que dos segmentos de línea eran siempre conmensurables, es decir que existía una unidad común de la que ambos serían múltiplos. De esta forma la doctrina de razones enteras y proporciones se podía extender a longitudes, áreas y volúmenes de figuras simples como segmentos, rectángulos y paralelepípedos.

Con el descubrimiento de los inconmensurables quedaban afectadas y debían ser reconstruidas todas las pruebas pitagóricas de los teoremas que utilizaran proporciones. Por ejemplo para demostrar la Proposición VI.1 de *Los Elementos* de Euclides:

«*Los triángulos que tienen la misma altura, son entre sí como sus bases*»,

los primeros pitagóricos actuarían de la siguiente manera:



Sean los triángulos ABC y ADE, con bases BC y DE sobre la recta MN. BC y DE tendrán alguna unidad común de medida; sea GH contenido p veces en BC y q veces en DE. Marquemos los puntos de división sobre BC y DE y unámoslos con el vértice A.

Los triángulos ABC y ADE quedan divididos respectivamente en p y q triángulos menores, que según la Proposición I.38 de *Los Elementos* («*los triángulos que tienen igual base y altura son equivalentes*») tienen el mismo área. Por tanto la razón de los triángulos ABC/ADE = p/q = BC/DE, como se quería probar.

Es evidente que la aparición de magnitudes inconmensurables invalida la prueba geométrica exhibida en esta proposición y en todas las pruebas pitagóricas en las que haya que comparar razones de magnitudes geométricas.

Se comprende que el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables produjera un escándalo lógico en todo el ámbito pitagórico, ya que exigía una revisión a fondo de los fundamentos de su Matemática y su Filosofía. A esta titánica empresa se enfocará la importante labor de Eudoxo de Cnido de la Academia platónica, que resolverá de forma brillante y rigurosa, aunque provisional –durante más de dos mil años–, la antinomia radical entre finito e infinito. Al renunciar a la exactitud aritmética y trascender lo empírico, la Geometría griega soslayará la presencia temible e inexorable del infinito mediante la construcción geométrica

El descubrimiento de la inconmensurabilidad marca un hito en la Historia de la Geometría, porque no es algo empírico, sino puramente teórico –es un acto intelectual puro–. Su aparición señaló el momento más dramático no sólo de la Geometría pitagórica sino de toda la Geometría griega, pero fue la causa de su grandeza ante la emergencia de la demostración, uno de los componentes esenciales del *milagro griego* en Matemáticas.

Las cuestiones infinitesimales en los filósofos preplatónicos

Las lúnulas de Hipócrates

Hipócrates de Quíos (hacia el 450 a.C.) consigue la primera cuadratura rigurosa de una figura curvilínea en la Historia de la Matemática.

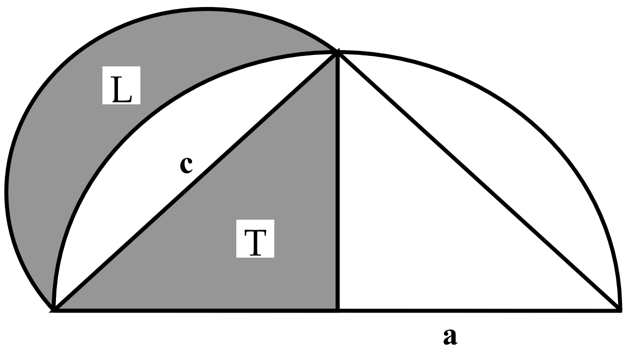
Proclo de Licia en su *Comentario al Libro I de los Elementos de Euclides*, siguiendo al historiador de la Matemática del Liceo, Eudemo de Rodas (hacia el 335 a.C.), informa que Hipócrates escribió unos *Elementos de Geometría* –la primera concatenación lógica de las proposiciones en un *corpus* racional– ahora perdidos, donde habría tratado, quizá a propósito del intento de resolver el famoso problema de la cuadratura del círculo, la cuadratura de las *lúnulas* –figuras planas limitadas por arcos de círculo de radios diferentes– y en donde aparecería el famoso teorema (*Euclides*, XII.2):

> «*Los círculos están entre sí como los cuadrados de sus diámetros*»

teorema que generalizando permite enunciar para segmentos semejantes (que subtienden ángulos iguales) de círculo:

> «*Segmentos semejantes de círculo están entre sí en la misma razón que los cuadrados construidos sobre sus bases*»

resultados que serán considerados reiteradamente por Eudoxo, Euclides y Arquímedes, y cuya importancia histórica es considerable, ya que permiten demostrar que ciertas áreas limitadas por líneas curvas –ciertas *lúnulas*–, son conmensurables con áreas limitadas por líneas rectas, es decir permiten realizar la cuadratura de lúnulas.



LAS LÚNULAS DE HIPÓCRATES

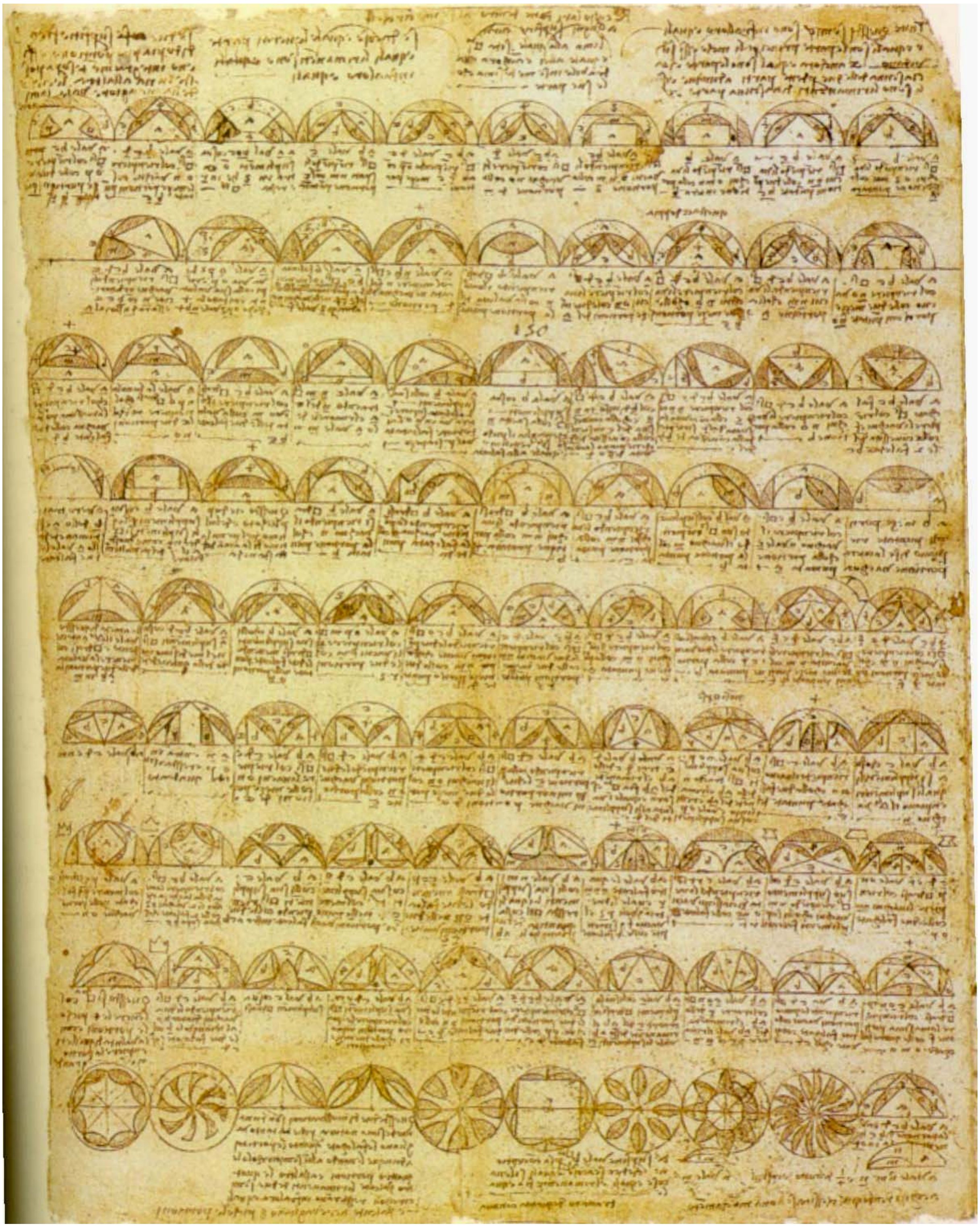
A = Semicírculo de radio a
D = Cuadrante de radio a
C = Semicírculo de diámetro c
T = Triángulo
L = Lúnula

$$\frac{A}{C} = \frac{(2a)^2}{c^2}\left\{\begin{matrix}\textit{Euclides}.\text{XII.2}\\ \textit{Euclides}\ \text{I.47}\end{matrix}\right\} = 2$$

(A = 2C ; C = D ; L = T)

Al utilizar crecientemente lúnulas de mayor tamaño, Hipócrates intentaría vanamente resolver el problema de la cuadratura del círculo. No sabemos si Hipócrates estaba convencido de haber resuelto el problema; es posible que así sea, porque recibiría la dura acusación de Aristóteles de haber incurrido en paralogismo.

LAS LÚNULAS DE HIPÓCRATES
EN LOS CUADERNOS DE LEONARDO DA VINCI



Estudios de Leonardo (hacia 1515) sobre las *Lúnulas de Hipócrates*. Códice Atlántico (f. 455r).

El sorprendente descubrimiento realizado por Hipócrates de Quíos acerca de la cuadratura de lúnulas impresionó considerablemente la mente de Leonardo. La posibilidad de que se puedan calcular ciertas áreas curvilíneas circulares, es decir, construir cuadrados equivalentes a ellas, fascinó de tal modo a Leonardo da Vinci, que le indujo a realizar en numerosos escritos multitud de estudios sobre lúnulas con la intención de perseguir la cuadratura del círculo.

LA CONTINUIDAD EN ANAXÁGORAS DE CLAZOMENE

Pericles visita a Anaxágoras en prisión.

La ilustración es un grabado que representa a Anaxágoras visitado por Pericles –que había sido discípulo suyo– en la prisión.

En la línea del rastreo del infinito el gran filósofo experto en Geometría, Anaxágoras de Clazomene establece una aguda definición de lo que llamamos el «*Axioma de continuidad*»:

> **«*En lo pequeño no existe lo extremadamente pequeño, sino algo cada vez más pequeño,... De igual modo en lo grande siempre hay algo más grande,...*»**

A Anaxágoras se le atribuye (según Plutarco) el mérito de haber sido el primer matemático que estudió el problema de la *cuadratura del círculo*, mientras estaba en prisión acusado de impiedad por sus creencias cosmológicas.

LOS TRABAJOS MATEMÁTICOS DE HIPÓCRATES DE QUÍOS

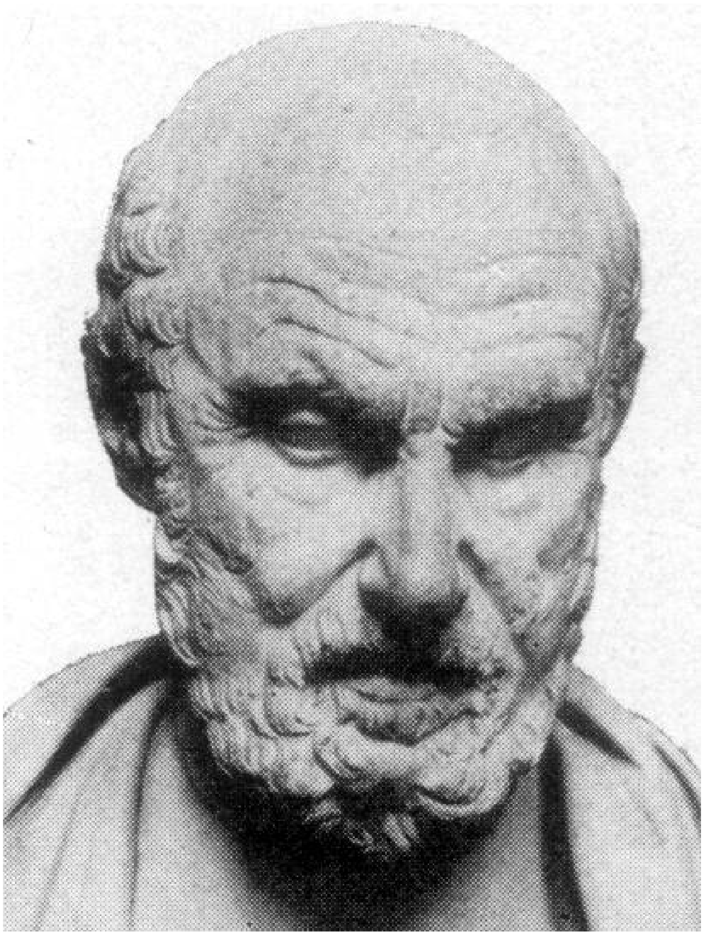
Según Proclo en su *Comentario al Libro I de los Elementos de Euclides*:

> **«*Hipócrates de Quíos es el inventor de la cuadratura de la lúnula y fue el primero que compuso Elementos*.»**

Hipócrates es, en cierto sentido, un pionero en la Historia de la Matemática, ya que inició la utilización de letras en las figuras geométricas para atemperar la excesiva retórica del discurso matemático, aplicó el *Método de Análisis* e ideó el método de demostración por *reducción al absurdo* que tanta influencia tendría sobre el *método de exhaución* de Eudoxo.

Hipócrates también estudió el problema de las proporciones continuas, es decir de la interpolación de dos medias entre dos magnitudes dadas, advirtiendo la relación de este problema con la resolución de la *duplicación del cubo*.

Se dice que Hipócrates es el primer matemático profesional de la historia, porque más allá de su ferviente afición a la Matemática, se ganaba la vida con esta ciencia. Siempre agradeció que un abordaje de piratas en el mediterráneo cambiara su destino de comerciante por el de matemático.



Hipócrates de Quíos.

Las paradojas de Zenón de Elea

La Escuela de Elea agudiza el sentido crítico como principio sistemático de elaboración científica y reacciona contra el fisicismo de los jonios y el misticismo de los pitagóricos. Los argumentos de Zenón de Elea –discípulo de Parménides de Elea y fundador de la dialéctica–, son, además de paradojas, agudas críticas contra el atomismo geométrico de los pitagóricos, que concebían los cuerpos como yuxtaposición de puntos, el tiempo como sucesión de instantes y el movimiento como adición de pasos de un punto a otro. Con su reflexión idealista, Zenón defendía las teorías de su maestro sobre la ilusoria experiencia sensible, sosteniendo la inmutabilidad de las cosas a pesar de la apariencia de cambio.

Las aporías de Zenón frustran el intento pitagórico de trasladar la estructura de la Aritmética a la Geometría que pretendía establecer un paralelismo entre el concepto numérico y la representación geométrica. El carácter discreto de la serie natural de números, que sirvió como modelo atomista, no podía reflejar la naturaleza de la continuidad del espacio. La pluralidad discontinua, ya sea la de los puntos aritméticos de Pitágoras o la de los átomos extensos de Demócrito, no se podía conciliar con la realidad continua del espacio en el que los cuerpos se mueven. Aparece una oposición esencial entre la naturaleza discreta del número y la naturaleza continua y homogénea del espacio. No se puede hacer corresponder el infinito numerable de los instantes sucesivos con el infinito no numerable de los puntos del continuo. Lo irracional exige no sólo la infinitud numérica sino la infinita divisibilidad.

Las paradojas de Zenón ponen en tela de juicio los principios de la Geometría, aunque sin proporcionar alternativa, apareciendo nuevos problemas de fundamentación de la Matemática. En particular como consecuencia de la crítica filosófica de Zenón a la Matemática, se arraiga la convicción de que la Geometría debía desarrollarse independientemente de la Aritmética. El devenir de la Geometría griega al margen del Algebra fue el efecto más inmediato.

Frente al ser eternamente inmutable e inmóvil de la escuela de Elea, Heráclito de Efeso contrapone el ser cambiante en transición continua entre el pasado y el devenir. Como influencia sobre la Matemática la línea no será una yuxtaposición de puntos cercanos sino el fluir continuo de un punto móvil.

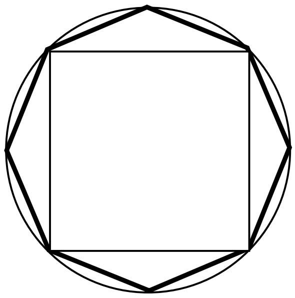
La tempestad provocada por el descubrimiento pitagórico de los irracionales y la inquietud que introdujeron en el mundo griego las paradojas de Zenón contra la pluraridad y el movimiento, precipitó una profunda crisis en la Matemática que trajo consigo el «*horror al infinito*», que introduce el supremo rigor lógico impuesto por la escuela platónica, cuyo exponente más representativo será Eudoxo de Cnido. La crisis trajo consigo un refinamiento geométrico. Como reacción al lenguaje ingenuo de los pitagóricos, mezcla de brillantes ideas matemáticas, actitudes místicas y aforismos religiosos, se impondrá el severo rigor de *Los Elementos* de Euclides donde quedan compiladas las doctrinas geométricas de la Academia de Platón.

Zenón y la Escuela de Elea.
Fragmento de un fresco de la Biblioteca de El Escorial de P.Tibaldi. 1586.

El método de compresión: Antifón y Bryson

Las conclusiones de Hipócrates sobre lúnulas animarían a muchos de sus sucesores a alimentar la esperanza quimérica de conseguir la cuadratura del círculo. Son legión los matemáticos que ensayaron la resolución del problema. Mencionemos simplemente a dos de ellos, Antifón de Atenas (hacia el 430 a.C.) y a Bryson de Heraclea (hacia el 400 a.C.), por la incidencia que tienen sus desarrollos sobre las cuestiones infinitesimales posteriores.

Antifón, llamado el sofista, es contemporáneo de Sócrates. Debemos a Aristóteles (*Física*, Libro I, Cap.2, 185a) y a la *Física* de Simplicio, lo que sabemos sobre el método de Antifón.



Dado un círculo, Antifón parte de un polígono regular, por ejemplo un triángulo o un cuadrado, inscrito en él. Sobre cada lado del polígono construye un triángulo isósceles, obteniendo un polígono regular de doble número de lados, y repite la operación continuamente.

Simplicio continúa el relato del método con estas palabras:

> «A*ntifón piensa que de esta manera el área* [del círculo] *podría ser cuadrada, ya que después de un número de veces* [de realizar la operación de duplicar los lados del polígono] *tendremos un polígono inscrito en el círculo, cuyos lados, debido a su pequeñez, coincidirán con la circunferencia del círculo. Y puesto que para todo polígono podemos construir un cuadrado equivalente* [*Euclides*, I.14], [...], *estamos en disposición de conseguir un cuadrado igual al círculo*.»

Eudemo, discípulo de Aristóteles, aduce que el principio infringido por Antifón es que las magnitudes son divisibles sin límite. Siendo el área del círculo divisible sin límite, el proceso descrito por Antifón nunca alcanzará todo el área, por tanto los lados del polígono inscrito se acercan *en potencia* a la circunferencia, pero nunca ocuparán *en acto* la posición de la misma. A pesar de su discurso matemático falaz, Antifón ocupa una posición honorable en la pléyade de geómetras griegos, porque su método supone un gran avance hacia la idea de «*acercarse con tanta aproximación como se quiera*», lo que junto con la idea de agotar el círculo con polígonos inscritos de un número creciente de lados, está en la base del riguroso *Método de Exhaución* que introducirá enseguida Eudoxo de Cnido. Además, la construcción de Antifón tiene un valor práctico, como ilustraría más tarde Arquímedes en la Proposición II de *Sobre la Medida del Círculo*, donde calculando el perímetro de un polígono inscrito (y otro circunscrito) de 96 lados, construido a la manera de Antifón, partiendo de un triángulo equilátero inscrito, obtiene una excelente acotación del valor de π.

Bryson, que fue discípulo de Sócrates, da un paso más allá que Antifón, al considerar no sólo polígonos inscritos sino también circunscritos, dando una prueba, calificada por Aristóteles como sofística (*Lógica*, *Analítica Posterior*, Libro I, Cap.9, 76a): «[...] *estas pruebas son semejantes al método que seguía Bryson para la cuadratura del circulo.*»

Bryson inscribe y circunscribe polígonos regulares en torno a un círculo y va duplicando el número de lados de manera que el área de los polígonos se acercan cada vez más a la del círculo. Bryson arguye que en un momento dado los polígonos inscritos y circunscritos se acercan hasta tal punto que sólo podría haber un polígono de área intermedia entre ellos, el cual necesariamente debería coincidir en su área con la del círculo. El argumento se basa en que «*las cosas que son respectivamente mayores y menores que las mismas cosas son iguales*». Al aplicar este principio resulta: «*el polígono intermedio es mayor que todos los inscritos y menor que todos los circunscritos; y también el círculo cumple esta condición; por tanto el polígono intermedio y el círculo son iguales.*»

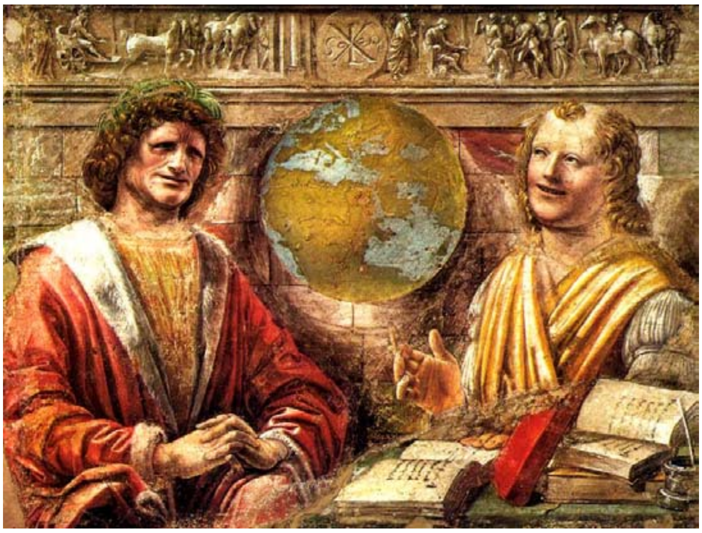
El método no es válido en absoluto, pero tuvo la virtud de idear «*la compresión*», entre dos figuras conocidas, de la figura a cuadrar, que junto con la exhaución, con tanto éxito aplicaría Arquímedes en sus brillantes cuadraturas y cubaturas.

El Atomismo de Demócrito

El fundador, junto con Leucipo, del atomismo físico, Demócrito de Abdera, que escribió algunas obras Matemáticas, *Sobre la Geometría*, *Sobre los Irracionales*, se interesó por problemas matemáticos en donde, de alguna forma, subyacían planteamientos infinitesimales. Arquímedes atribuye a Demócrito el descubrimiento y la demostración –aunque no rigurosa– del volumen de la pirámide y del cono como la tercera parte de los correspondientes prisma y cilindro respectivos –de igual base y altura–. Bajo un atomismo geométrico de corte pitagórico, pero con mentalidad de físico, Demócrito considera estos sólidos como si estuvieran formados por innumerables capas paralelas. En el caso del cilindro o prisma las capas son iguales, pero para el cono o la pirámide el tamaño irá disminuyendo gradualmente de capa en capa hasta llegar a un punto. Por eso Demócrito, según relata Plutarco (en *Sobre las nociones comunes*), hace una reflexión que prefigura la labor constructiva de Arquímedes en *El Método* y la de Cavalieri en la *Geometria Indivisibilibus Continuorum*:

> «*Si un cono es cortado por planos paralelos a la base, ¿cómo son las secciones, iguales o desiguales? Pues si son desiguales el cono será irregular como si tuviera muchas incisiones a modo de escalera; pero si son iguales, las secciones serán idénticas y el cono tendrá la propiedad del cilindro, estando formado por círculos iguales y no desiguales, lo cual es completamente absurdo.*»

Vemos cómo los filósofos van introduciendo unos interrogantes, que iniciarán una titánica lucha para intentar resolver los problemas más profundos de las Matemáticas, aquellos que otean el infinito al intentar explicar la composición de los entes geométricos. Pero parece que Demócrito no intenta ir más allá en la metafísica de la cuestión, y aunque no lo sabemos con certeza, seguramente concluiría que dos sólidos compuestos de iguales secciones paralelas a iguales distancias de sus bases deben tener el mismo volumen, lo cual es un caso particular que anticipa el famoso *Principio de Cavalieri*. De aquí deduciría el resultado del volumen de la pirámide (*Euclides*, XII.7) como un tercio del prisma triangular de igual base y altura, al dividir el prisma en tres pirámides triangulares de igual base y altura. Para el volumen del cono (*Euclides*, XII.10), como un tercio del cilindro de igual base y altura, el resultado se obtendría considerando las pirámides de base los polígonos de creciente número de lados, inscritos en el círculo base del cono y aplicando una argumentación inductiva, en la que nuevamente aparecerá el fantasma del infinito.



Demócrito es el primer defensor de una teoría atómica de la realidad natural pero también de un atomismo geométrico que inicia una línea de pensamiento matemático precursora de los Indivisibles de Cavalieri. Es un matemático admirado por Arquímedes, quien le atribuye los teoremas sobre el volumen de la pirámide y el cono.

En las ilustraciones: Cuadro de la Pinacoteca de Brera (Milán) que representa a Demócrito con Heráclito y un sello con la efigie de Demócrito.

Los problemas infinitesimales en la Academia de Platón

Los inconmensurables en la Academia platónica

Los Diálogos de Platón informan que la comunidad matemática griega se vio gravemente sofocada por un descubrimiento que refutaba los fundamentos de su doctrina y que prácticamente demolía la base de la fe pitagórica en los números enteros como «*esencia de todas las cosas*».

Platón. Museo Pío Clementino. Vaticano.

En algunos de *los Diálogos* de Platón se advierte la influencia del descubrimiento de los irracionales sobre la Educación y la Filosofía platónica de la ciencia.

Teodoro de Cirene, a quien Platón reconoce como maestro, demuestra la irracionalidad de las raíces cuadradas de los números naturales que no son cuadrados perfectos desde el 3 al 17, ambos incluidos (diálogo entre Sócrates y Teeteto, Platón, *Teeteto*, 147d). En este *Diálogo* de Platón, Teeteto, además de ponderar a Teodoro como «*geómetra, astrónomo, calculador, músico y maestro en todo lo relativo a la educación*», da unas orientaciones hacia la continuación de su trabajo matemático relativo a los inconmensurables. Por eso se atribuye a Teeteto –según Proclo y Pappus– gran parte del contenido del Libro X de *Los Elementos* de Euclides que trata la clasificación y estudio en forma geométrica de las propiedades de cierto grupo de expresiones irracionales cuadráticas.

En el Libro VII de *Las Leyes* Platón reprueba con acritud –en boca de un ateniense que dialoga con el extranjero Clinias– la ocultación a los jóvenes griegos, en su educación, de la distinción entre magnitudes conmensurables e inconmensurables tachándola de «*ignorancia vergonzosa y ridícula*». Platón opina con una retórica exageración (*Leyes*, 819e–821a):

> «[...] *Se me ha revelado muy tardíamente nuestra habitual deficiencia en este campo de cosas; me quedé enormemente sorprendido y, viendo en ello* [en la citada ocultación] *menos una debilidad humana que una necedad propia de puercos de cría, sentí vergüenza no sólo de mí mismo, sino de toda la raza helena*». [...] *Son temas en los que la ignorancia es una deshonra*, *mientras que su conocimiento, como verdades elementales que son, no es ninguna proeza*. [...] *son ciencias en las que deben aprender los jóvenes*, *porque ellas no ofrecen ni inconvenientes ni dificultades.* [...] *Será bueno que, por el momento, se incluyan como estudios obligatorios en nuestras leyes, a fin de que no haya en ellas lagunas*. [...]»

También en el *Menón* (82b-85b) insiste Platón sobre el tema a propósito del problema de la *Duplicación del cuadrado*. Curiosamente Platón utiliza el problema para sustentar la doctrina de la reminiscencia. Sócrates y un esclavo mantienen una conversación, en la que mediante una concatenación de preguntas de aquél, entrelazadas heurísticamente con las respuestas de éste, se resuelve el problema. Las primeras respuestas del esclavo, son de índole aritmética, pero resultando la imaginación aritmética inexacta, Sócrates reconducirá el diálogo, induciendo un tratamiento exclusivamente geométrico.

La *Teoría de la Proporción* y el *Método de Exhaución* de Eudoxo

El descubrimiento de la inconmensurabilidad imprimió a la Matemática griega un cambio radical de rumbo. La imposibilidad de calcular exactamente la diagonal del cuadrado en función del lado fue la primera manifestación de la incalculabilidad aritmética de ciertas medidas que pronto se hizo notar en otras muchas, ya que los inconmensurables aparecían por doquier en otros muchos campos de la Geometría, por ejemplo, en la relación entre lado y altura del triángulo equilátero o entre la circunferencia y el diámetro –que comenta Aristóteles en su *Metafísica*, 983a–. El fenómeno trajo la primera crisis de fundamentos en la Historia de la Matemática, que resuelta en la Academia de Platón transformaría esta ciencia en una magnífica obra de ingeniería geométrico-deductiva plasmada en *Los Elementos* de Euclides.

El descubrimiento de las magnitudes inconmensurables exigía, pues, una necesaria revisión de ciertos fundamentos de la Matemática pitagórica, ya que a partir de entonces las magnitudes geométricas no podían ser medidas mediante números. El inevitable carácter continuo que tienen impide que se puedan someter a las manipulaciones algebraicas como a los números. De modo que los griegos del siglo IV a.C. eran conscientes de la existencia de magnitudes geométricas que nosotros llamamos i*rracionales*, pero no las concebían como números.

Eudoxo de Cnido es uno de los matemáticos más importantes de la Academia platónica, que al Introducir la idea de «*tan pequeño como se quiera*», antecedente de nuestro proceso de «*paso al límite*», encuentra una escapatoria a los problemas planteados por el infinito y lo inconmensurable, mediante un recurso genial que desarrolla en tres estadios:

- una definición: igualdad de razones, *Euclides*, Definición V.5,
- un axioma: axiomade *Eudoxo-Arquímedes* o *de continuidad*, *Euclides* Definición V.4,
- un método: *el Método de Exhaución*, *Euclides*, Proposición X.1.

1. **Imagen atribuida a la efigie de Eudoxo, aunque no es seguro que sea tal porque también se atribuye a Ptolomeo. La confusión puede provenir de la importante dedicación de ambos matemáticos a la Astronomía.**
2. **Tratado de las esferas de Eudoxo. Papiro egipcio del Siglo II d.C. Museo de Louvre. París.**

Como lo inexpresable era la razón entre dos cantidades inconmensurables, Eudoxo elimina la dificultad definiendo no la razón misma, sino la igualdad de razones de la siguiente forma (Definición V.5 de *Los Elementos* de Euclides):

> «*Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda magnitud, que una tercera magnitud con una cuarta magnitud, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera exceden a la par, sean iguales a la par o sean inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente.*»

Es decir si a,b son dos magnitudes geométricas del mismo tipo y c,d son también del mismo tipo (aunque no necesariamente del mismo tipo que a y b), Eudoxo define que las razones

a/b y c/d son proporcionales: a/b=c/d,

cuando para cualquier par de enteros positivos n y m, se tiene:

$na>mb$ y $nc>md$ ó $na=mb$ y $nc=md$, ó $na<mb$ y $nc<md$.

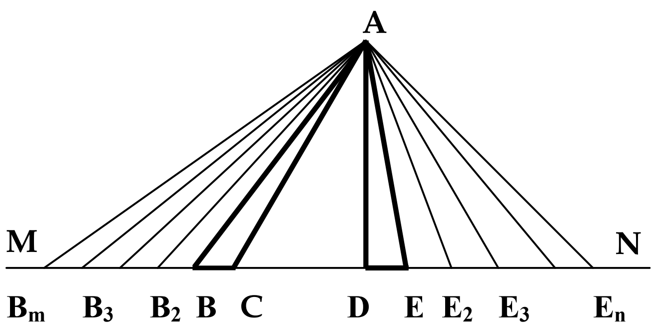
La definición de Eudoxo de proporción generaliza la noción pitagórica de proporcionalidad de razones de enteros:

1. **Si a/b = c/d en sentido pitagórico, existen enteros p,q,m,n positivos , tales que a=mp, b=mq, c=np, d=nq.**
   Sean h, k, enteros positivos cualesquiera. Se tiene:
   $ha\ (>,=,<)\ kb \Rightarrow hmp\ (>,=,<)\ kmq \Rightarrow hp\ (>,=,<)\ kq \Rightarrow hnp\ (>,=,<)\ knq \Rightarrow hc\ (>,=,<)\ kd$.
   Por tanto se ha demostrado que a/b = c/d sentido de Eudoxo.

2. **Si a/b = c/d en sentido de Eudoxo, donde a,b,c,d, son enteros positivos. Existen enteros, r,s, tales que: ra = sb, y por tanto: rc = sd.**
   Sea h=mcd(r,s), entonces: r=qh, s=ph, donde mcd(q,p)=1. Ahora se verifica:
   $$ra = sb \Rightarrow qha = phb \Rightarrow qa = pb \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \textit{Teorema de Euclides} \\ \textit{Elementos, VII.30} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} a = p\alpha \\ b = q\beta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha=\beta=m \Rightarrow \left\{\begin{matrix} a = pm \\ b = qm \end{matrix}\right\}$$
   $$rc = sd \Rightarrow qhc = phd \Rightarrow qc = pd \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \textit{Teorema de Euclides} \\ \textit{Elementos, VII.30} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} c = p\chi \\ b = q\delta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \chi=\delta=n \Rightarrow \left\{\begin{matrix} c = pn \\ d = qn \end{matrix}\right\}$$
   Por tanto se ha demostrado que a/b = c/d en sentido pitagórico.

Veamos con esta nueva definición de Eudoxo de proporcionalidad la demostración rigurosa de la Proposición VI.1 de *Los Elementos* de Euclides «*Los triángulos que tienen la misma altura, son entre sí como sus bases*», que se citó en un apartado anterior:

Sobre la recta CB, tracemos a partir de B, m-1 segmentos iguales a CB y unamos los puntos de división $B_2,B_3,...,B_m$ con el vértice A. De forma similar tracemos a partir de E n-1 segmentos iguales a DE y unamos los puntos de división $E_2,E_3,...,E_n$ con el vértice A.



Se tiene B_mC=m(BC), AB_mC=m(ABC), E_nD=n(ED), AE_nD=n(AED). Ahora según la Proposición I.38 de *Los Elementos* y su consecuencia: «*de triángulos que tienen la misma altura tiene mayor área el que tiene mayor base*», se deduce que el triángulo AB_mC es mayor, igual o menor que el triángulo AE_nD según que m(BC) sea mayor, igual o menor que n(DE), por tanto según la definición de Eudoxo de proporción se tiene la tesis de la proposición ABC/ADE=BC/DE.

Se observa que no se menciona la naturaleza conmensurable o inconmensurable de las magnitudes geométricas; la definición de Eudoxo se aplica a ambos casos.

Esta prueba de la Proposición VI.1 de *Los Elementos* es una buena muestra de cómo a partir de la definición de Eudoxo las magnitudes geométricas pueden compararse a través de razones; y es sobre esta base que Eudoxo procedió a la demostración rigurosa de los resultados pitagóricos sobre proporciones, así como de los teoremas de Hipócrates y Demócrito sobre áreas de círculos y volúmenes de pirámides y conos que aparecen en el Libro XII de *Los Elementos* de Euclides.

Eudoxo prescinde del número irracional y opera con magnitudes que se pueden hacer menores que otras arbitrariamente prefijadas para lo que introduce lo que hoy llamamos el «*axioma de Eudoxo-Arquímedes*» o «*axioma de continuidad*», que aparece inocuamente como una definición en *Los Elementos* de Euclides (Definición V.4) :

> «*Se dice que dos magnitudes tienen razón cuando se puede multiplicar una de ellas de modo que supere a la otra.*»

La asunción de Euclides fue considerada por Arquímedes como un principio o postulado, de ahí el nombre con el que ha pasado a la literatura Matemática. La importancia del axioma la ha remarcado Hilbert, en su obra *Los principios fundamentales de la Geometría*, donde le asigna un papel fundamental en la estructura de la Geometría. Arquímedes lo enuncia en el postulado V del Libro I de su obra *Sobre la Esfera y el Cilindro*.

> «*Dadas dos líneas, dos superficies o dos sólidos desiguales, si el exceso de una de estas figuras sobre la otra se añade a sí mismo un cierto número de veces, se puede superar una u otra de las figuras que se comparan entre sí.*»

Arquímedes repite el enunciado en la carta a Dositeo, que acompaña a su obra *Sobre la Cuadratura de la Parábola*:

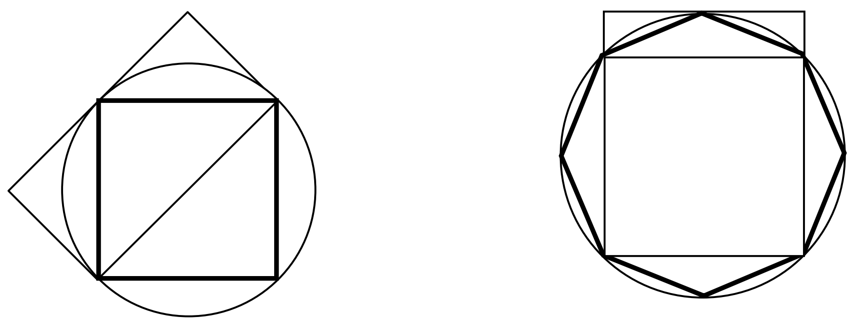
> «[...] *Para demostrar este teorema he utilizado el siguiente lema: Si la diferencia entre dos magnitudes se añade sucesivamente a sí misma, llegará a ser mayor que un área dada. Los geómetras anteriores a mí* [Eudoxo, ...] *también se han apoyado en este lema para demostrar que los círculos son entre sí como la razón duplicada* [el cuadrado] *de sus diámetros y las esferas como la razón triplicada* [el cubo]*; que una pirámide equivale a un tercio de un prisma de la misma base y altura que la pirámide y un cono igual al tercio del cilindro de igual base y altura que el cono*, [...].»

Vemos como Arquímedes advirtió que el principio no debe ser una definición ni un teorema, sino un axioma, en el que, al igual que él mismo, se habría apoyado Eudoxo para abordar las cuestiones infinitesimales.

En la Geometría griega se considera que las figuras curvilíneas como círculos o segmentos de parábola tienen áreas que son magnitudes geométricas del mismo tipo que las figuras poligonales. Dada una figura curvilínea A, para determinar su área a(A) se buscará una sucesión de polígonos $\{P_1,P_2,...,P_n,...\}$, que aproximen progresivamente el área de A. El *Método de Exhaución* se ideará para sustituir con absoluto rigor en la demostración de la magnitud de un área o volumen a la idea vaga e intuitiva de que el área de A es *el límite* de las áreas de los polígonos $\{P_1,P_2,...,P_n,...\}$. El *horror al infinito* evitaba pasar al límite. En vez de ello se intenta demostrar que se puede encontrar un polígono en la sucesión $\{P_1, P_2, ..., P_n, ...\}$ cuyo área difiera del área de la figura A en una cantidad menor que otra prefijada. Simbólicamente dado $\varepsilon>0$ se debe encontrar un polígono P_n tal que la diferencia $a(A) - a(P_n)$ sea menor que ε para n suficientemente grande. A este respecto cumple un papel fundamental la Proposición X.1 de *Los Elementos* que Euclides demuestra aplicando el axioma de Eudoxo-Arquímedes:

> «*Dadas dos magnitudes desiguales, si de la mayor se resta una magnitud mayor que su mitad y de lo que queda otra magnitud mayor que su mitad y se repite continuamente este proceso, quedará una magnitud menor que la menor de las magnitudes dadas.*»

Este enunciado que es conocido por algunos historiadores como «*Principio de Eudoxo*» abre las puertas al «*Método de Exhaución*», con el que Eudoxo demuestra rigurosamente los teoremas sobre el círculo, así como sobre la pirámide y el cono, que habían sido enunciados por Hipócrates y Demócrito, respectivamente, y que aparecerán en *Los Elementos* de Euclides en las Proposiciones XII.2, XII.5 y XII.10.



El Principio de Eudoxo permite estimar el error que se comete en cada paso del método de Antifón. En efecto, es fácil ver que, inscribiendo un cuadrado en un círculo, la diferencia entre ambos es menor que la mitad del área del círculo. Si ahora se considera el octógono inscrito, se puede ver que la diferencia entre cada segmento circular (determinado por el cuadrado y el círculo) y el triángulo isósceles descrito anteriormente que determina dos lados del octógono, es menor que la mitad del segmento circular. Partiendo de un círculo y un cuadrado (por pequeño que sea), continuando el proceso anterior, se resta reiteradamente a una cantidad otra cantidad superior a su mitad (en primer lugar al círculo se le resta el cuadrado, en segundo lugar a los segmentos circulares resultantes los triángulos isósceles que determinan el octógono, y así sucesivamente); aplicando el *Principio de Eudoxo* suficientemente, alcanzaremos un polígono inscrito, cuya diferencia con el círculo es menor que el cuadrado pequeño prefijado.

Simbólicamente, dado un círculo C y un número $\varepsilon>0$ se puede encontrar un polígono regular P inscrito en C tal que $a(C) - a(P)<\varepsilon$ («*Lema de exhaución del círculo*»).

Este resultado permite demostrar rigurosamente mediante el típico argumento de la doble reducción al absurdo el ya aludido teorema de Hipócrates (*Elementos* XII.2)

> «*Los círculos son entre sí como los cuadrados de sus diámetros*.»

En efecto, sean C y D círculos de diámetros c y d; el teorema enuncia que $a(C)/a(D)=c^2/d^2$. La demostración consiste en probar que cualquiera de las desigualdades conduce a contradicción.

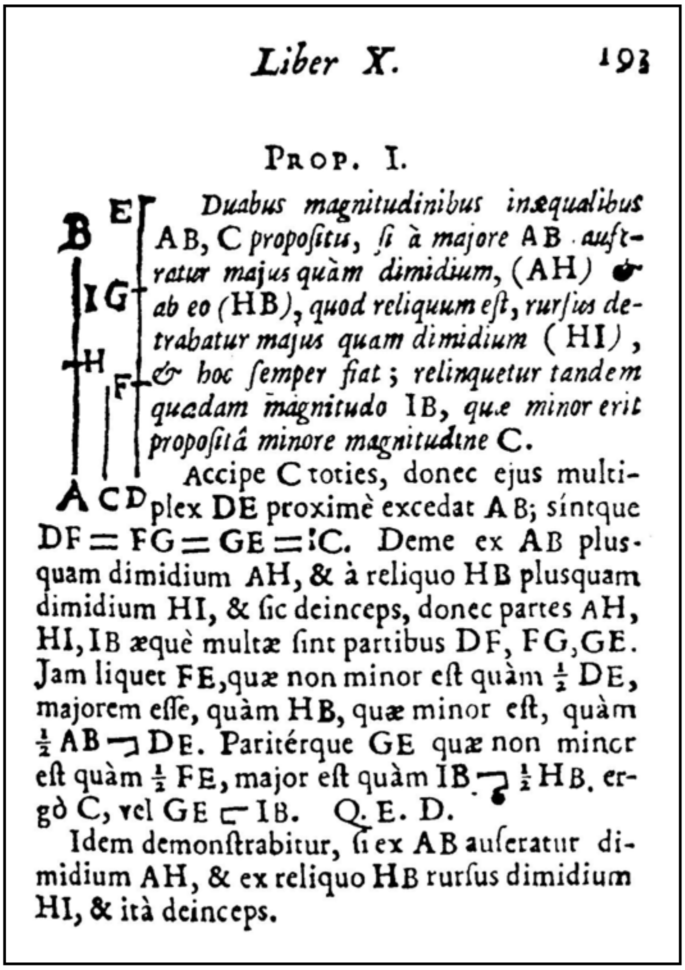
Supongamos que en vez de la igualdad se verifica $a(C)/a(D)<c^2/d^2$. Entonces $a(D)>[a(C)\cdot d^2]/c^2=h$. Sea $\varepsilon=a(D) - h$. Según el resultado anterior se puede encontrar un polígono Q inscrito en el círculo D tal que $a(D) - a(Q)< \varepsilon=a(D) - h$. Por tanto $a(Q)>h$. Sea P el polígono regular semejante a Q, inscrito en el círculo C. Ahora bien, según la Proposición XII.1 de *Los Elementos* («*los polígonos semejantes inscritos en círculos son entre sí como los cuadrados de los diámetros*»), $a(P)/a(Q)= c^2/d^2=a(C)/h$. Se tiene $h/a(Q)=a(C)/a(P)>1$. Por tanto $h>a(Q)$ lo cual es una contradicción. Luego no es cierto que $a(C)/a(D)< c^2/d^2$.

Intercambiando los papeles entre los círculos se demuestra análogamente que no es cierto que $a(C)/a(D)>c^2/d^2$. De donde concluimos que la igualdad es cierta.

Aplicando también el lema de exhaución del círculo mediante polígonos inscritos, se puede demostrar, asimismo, mediante una doble reducción al absurdo, que al igual que para el prisma el volumen del cilindro es el producto del área de su base por su altura.

Habiéndose convertido el infinito en tabú, por el misterio que le envolvía, es reprimido o se le camufla a través del *Axioma de continuidad*, el *Principio de Eudoxo* y *el Método de Exhaución*, procedimientos que según hemos visto son la traducción geométrica de la operación de paso al límite. Aceptando de una vez por todas el *Axioma de continuidad*, los griegos ya no tendrán que recurrir en cada construcción, como Antifón y Bryson, a una nueva evidencia intuitiva. El *Método de Exhaución* de Eudoxo proporciona al desarrollo matemático una consistencia lógica absoluta, transformando en rigurosos los argumentos infinitesimales simplemente plausibles de sus antecesores.

Sobre el nombre de *Método de Exhaución* conviene observar que es bastante inapropiado porque nunca se llega a agotar, con los polígonos que van aproximando, la figura cuya magnitud se quiere estudiar. Es más, la exhaución paradójicamente pretende resolver rigurosamente el problema de la inexhaustividad del infinito. De hecho el nombre del método no lo utilizaron los griegos, sino que es una desafortunada acuñación introducida en el siglo XVII por Gregory de Saint Vincent, pero su uso se ha hecho habitual en la literatura Matemática, aunque alguno de los más importantes estudiosos de Arquímedes, como E.J.Dijksterhuis se resisten a llamarlo así y prefieren denominarle el *método indirecto del proceso infinito*.



Liber X. 193

PROP. I.

Duabus magnitudinibus inæqualibus AB, C *propositis, si à majore* AB *auferatur majus quàm dimidium,* (AH) *& ab eo* (HB)*, quod reliquum est, rursus detrahatur majus quam dimidium* (HI)*, & hoc semper fiat; relinquetur tandem quædam magnitudo* IB*, quæ minor erit propositâ minore magnitudine* C.

Accipe C toties, donec ejus multiplex DE proximè excedat AB; síntque DF = FG = GE = C. Deme ex AB plusquam dimidium AH, & à reliquo HB plusquam dimidium HI, & sic deinceps, donec partes AH, HI, IB æquè multæ sint partibus DF, FG, GE. Jam liquet FE, quæ non minor est quàm ½ DE, majorem esse, quàm HB, quæ minor est, quàm ½ AB $\sqsupset$ DE. Paritérque GE quæ non minor est quàm ½ FE, major est quàm IB $\sqsupset$ ½ HB. ergò C, vel GE $\sqsubset$ IB. Q.E.D.

Idem demonstrabitur, si ex AB auferatur dimidium AH, & ex reliquo HB rursus dimidium HI, & ità deinceps.

La Proposición X.1 de *Los Elementos* de Euclides (edición de I. Barrow, Londres, 1678).

La Proposición I del Libro X es una de las más importantes de *Los Elementos* de Euclides. En ella se demuestra el *Principio de Eudoxo* que es la base preliminar del *Método de Exhaución* –instrumento fundamental de la Geometría griega para la resolución de los problemas infinitesimales de cuadraturas y cubaturas–.

El Método de Exhaución preside la obtención de los resultados euclídeos del Libro XII sobre círculos, esferas, pirámides, cilindros y conos. Arquímedes atribuyó la obtención de muchos de estos resultados a Demócrito y las demostraciones rigurosas de los correspondientes teoremas a Eudoxo, de quien Euclides adaptaría el material para la redacción de Los Elementos.

El propio Arquímedes aplicaría con gran brillantez y pericia el *Método de Exhaución* en las obras *Sobre la Cuadratura de la Parábola*, *Sobre la Esfera y el Cilindro*, y otras para demostrar sus famosas cuadraturas y cubaturas que había descubierto mediante su original *método mecánico*.

LOS PROBLEMAS INFINITESIMALES EN LA ACADEMIA DE PLATÓN

Platón dando una lección de Geometría a sus discípulos en *La Academia de Atenas* (Mosaico procedente de Pompeya. Mansión de Siminio Estéfano, siglo I a.C. Museo Arqueológico, Nápoles). Según otras interpretaciones, este mosaico podría representar a los Siete Sabios de Grecia.

Con la fundación en 387 a.C. de *La Academia de Atenas*, Platón crea el centro más importante de especulación matemática y filosófica de la Antigüedad.

Una de las principales contribuciones de la Academia platónica a la Matemática nace de su profunda comprensión del problema de los inconmensurables y su consiguiente sustitución de las concepciones aritméticas del Pitagorismo original por presupuestos geométricos.

Sin duda alguna, la mayor aportación de la Academia platónica a las cuestiones infinitesimales, y una de las más importantes en la Matemática en general, fue la brillante solución que le dio Eudoxo –el más importante de sus matemáticos– a la correspondiente crisis de fundamentos, con la *Teoría de la Proporción* que pasó al Libro V de *Los Elementos* de Euclides, uno de los más importantes de toda la obra euclídea. Sobre ello afirma uno de los grandes matemáticos del siglo XX, G.H. Hardy en su famosa obra *Apología de un matemático* (Nivola. Madrid, 1999. pp.98–99):

> **«*Eudoxo construyó una profunda teoría que aparece descrita en el Libro V de Los Elementos de Euclides, y que es considerada por muchos matemáticos modernos como el logro más depurado de las Matemáticas griegas. Esta teoría es sorprendentemente moderna en espíritu, y puede ser considerada como el principio de la moderna teoría de números irracionales, que ha revolucionado el Análisis Matemático y ha tenido mucha influencia en la filosofía reciente.*»**

Realmente el trabajo de Eudoxo ha sido uno de los más influyentes en la Historia de la Matemática. Por una parte, su definición de igualdad de razones –que guarda una gran similitud con *las cortaduras* que utilizó Dedekind en el siglo XIX para la fundamentación del conjunto de los números reales–, permitió salvaguardar el legado pitagórico mediante la reconstrucción de las pruebas de los teorema pitagóricos que involucraban proporciones, y por otra, s*u Método de Exhaución* se convirtió en un instrumento fundamental en la Geometría griega para la resolución a los problemas infinitesimales, que al emplear un sistema indirecto de prueba, no requiere un proceso explícito de paso al límite. En efecto, con el *Método de Exhaución* de Eudoxo, tanto Euclides –en el Libro XII de *Los Elementos*– como Arquímedes –en las obras *Sobre la Cuadratura de la Parábola*, *Sobre la Esfera y el Cilindro*, y otras– pudieron alcanzar, con todo rigor, los mismos resultados sobre cuadraturas y cubaturas que cuando se efectúan investigaciones propiamente infinitesimales mediante la potencialidad aritmética del uso de los límites.

Las cuestiones infinitesimales en *La Física* de Aristóteles

Los inconmensurables inauguran en el mundo griego los problemas infinitesimales asociados a la continuidad de los entes geométricos, que enfrentan la infinita divisibilidad de los segmentos con la existencia de indivisibles. Estos asuntos fueron objeto de polémica sobre la constitución de la materia y la estructura del continuo entre los filósofos de la *Academia* posteriores a Platón y los pensadores del *Liceo* de Aristóteles. Mientras la *Academia* dirigida por Xenócrates, defendía los indivisibles fijos, el Liceo, dirigido por Aristóteles, en sus especulaciones sobre la naturaleza del infinito, la existencia de indivisibles o infinitesimales, mantenía la continua divisibilidad de los entes geométricos. Para Aristóteles «e*l continuo es infinitamente divisible*» (*Física*, Libro III, Cap.7, 207b).

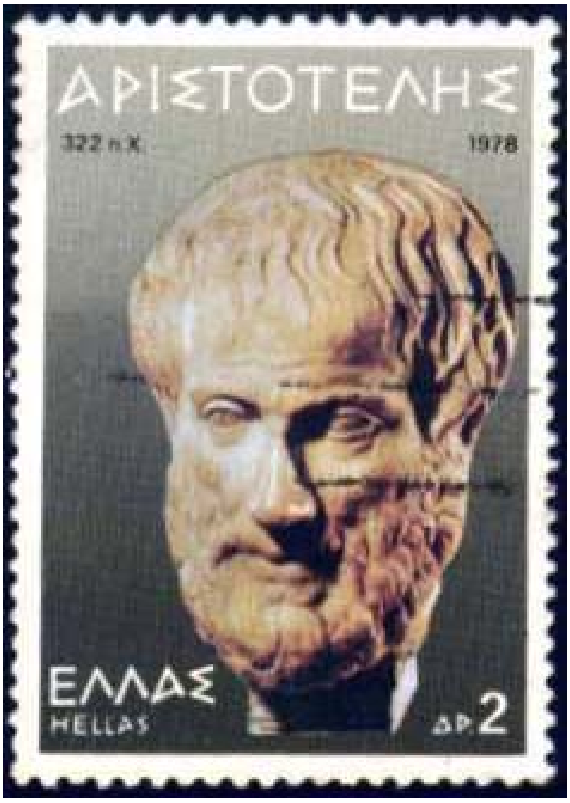
Estas concepciones de Aristóteles arrancan de la crítica a las concepciones pitagóricas que expone en el Libro I de *La Metafísica* (985b, 986a). El misticismo numérico de los pitagóricos describía las formas geométricas mediante números como parte de su doctrina acerca de que *todas las cosas son números* y por tanto la base de la naturaleza es numérica porque los cuerpos sólidos se componen de superficies, las superficies de planos, los planos de líneas y las líneas de puntos, y, en su concepción geométrica del número, los pitagóricos identificaban puntos y unidades. La concepción pitagórica sobre la generación de figuras geométricas es criticada por Aristóteles en el Libro VII de *La Metafísica* (1036b): «L*a continuidad es la materia de las figuras geométricas y el número el elemento formal*», de modo que para él «*una línea es lo que se extiende entre dos puntos*» más bien que «*dos puntos colocados uno al lado del otro constituyen en sí una línea*». Esto es la teoría del flujo que rechaza la existencia atomística de partes intrínsecamente indivisibles al defender la divisibilidad de los segmentos *ad infinitum.*

Aristóteles considera toda magnitud finita, pero, como admite la infinita divisibilidad, rechaza el atomismo geométrico. La antinomia entre rechazo o admisión del infinito es resuelta acuñando los términos «*actual*» y «*potencial»*. Un infinito «*en acto*», es decir, un todo constituido de una infinidad actual de cosas dadas, no puede ser pensado como inteligible; sin embargo si se puede pensar en una magnitud creciente por encima «*en potencia*» de todo límite, o en una serie de magnitudes cada vez más pequeñas que «*en potencia*» pueden hacerse más pequeñas que cualquier magnitud. Pero estas magnitudes, que no están dadas como una infinidad acabada, siendo susceptibles de prolongación «*tanto como se quiera*», puede decirse que son infinitas «*en potencia*». No obstante la doctrina aristotélica se hace confusa, por razones metafísicas, cuando se aplica al número, porque afirma el infinito extensivo del número, pero niega su divisibilidad indefinida. En efecto, hay un pasaje de la *Física* donde sintéticamente Aristóteles aplica la *Teoría de la potencia y el acto*, pero donde manifiesta el confusionismo aludido (*Física*, Libro III, Cap.7, 207a):

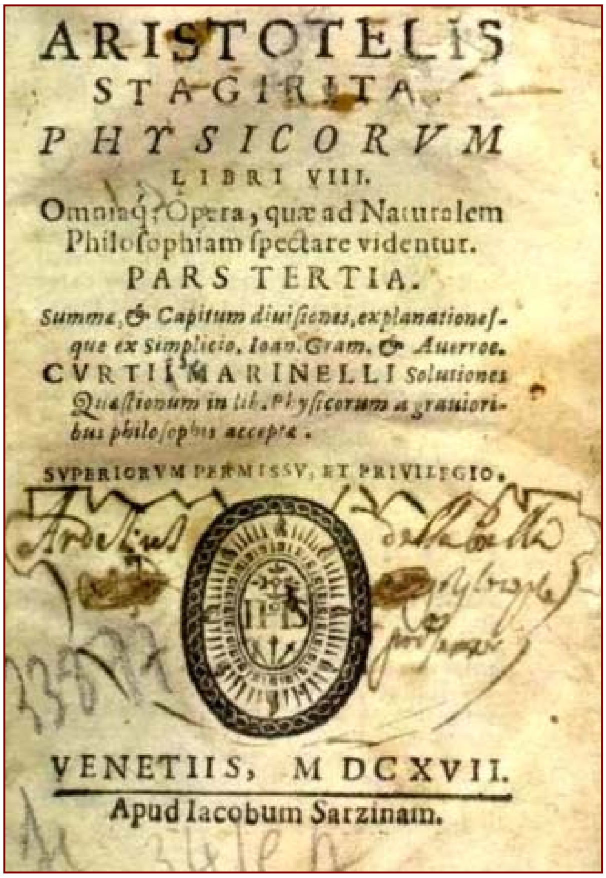
> «*El número, en un proceso de disminución hacia el mínimo, tiene un término; mientras, en un proceso de aumento, siempre se ve excedida cualquier cantidad que se tome. En las magnitudes, en cambio, ocurre todo lo contrario; pues en un proceso que tienda al mínimo, queda excedida negativamente toda magnitud; mientras que en un proceso de aumento no existe una magnitud infinita.* [...]. *En un proceso hacia el más, el número es siempre inteligible, ya que la magnitud se puede dividir indefinidamente por la mitad. Por esta razón existe el infinito en potencia, pero de ninguna manera en acto*.»

La aplicación del infinito potencial a la división de un segmento de recta conducirá a los Infinitesimales, mientras que la aplicación de un infinito actual a la división de un segmento de recta en un número infinito de puntos introduce los Indivisibles, que sobre todo con Cavalieri se convirtieron en un poderoso soporte heurístico del Cálculo infinitesimal.

La polémica entre la *Academia* y el *Liceo* tuvo una gran repercusión ulterior en el desarrollo conceptual de la Matemática, inaugurando la dualidad Infinitesimales–Indivisibles, que establece la tradición cinemática representada por Arquímedes, Oresme, Galileo, Torricelli, Roberval, Barrow y Newton frente a la tradición atomística representada por Demócrito, Kepler, Cavalieri, Fermat, Pascal, Huygens y Leibniz.



Sellos con la efigie de Aristóteles. El primero reproduce un busto atribuido a Lisipo que se exhibe en el Kunsthistorisches Museum de Viena. El segundo representa un busto que se conserva en el Museo del Louvre.



ARISTOTELIS
STAGIRITAE
PHYSICORVM
LIBRI VIII.
Omniaq; Opera, quæ ad Naturalem Philosophiam spectare videntur.
PARS TERTIA.
Summæ, & Capitum diuisiones, explanationesque ex Simplicio, Ioan. Gram. & Auerroe.
CVRTII MARINELLI Solutiones Quæstionum in lib. Physicorum a grauioribus philosophis acceptæ.
SVPERIORVM PERMISSV, ET PRIVILEGIO.
VENETIIS, M DCXVII.
Apud Iacobum Sarzinam.

Portada del Libro VIII de *La Física* de Aristóteles. Venecia, 1617.

La *Teoría de la Proporción* de Eudoxo tiene una gran influencia en la concepción que Aristóteles y *El Liceo* tienen sobre el infinito. De hecho en la *Física* donde expone su concepción sobre el infinito, la continuidad, la divisibilidad de magnitudes y el movimiento, Aristóteles conjuga el *Axioma de continuidad* con el *Principio de Eudoxo* cuando indica que al adicionar continuamente a una cantidad finita se sobrepasará toda otra cantidad finita y al sustraer continuamente de una cantidad se llegará a una cantidad menor que cualquier otra (*Física*, Libro VIII, Cap.10, 266b) :

> ***«Sumando siempre algo al finito, se sobrepasará todo finito; igualmente restándole algo, vendremos a caer por debajo de todo finito.»***

He aquí una descripción del infinito potencial en la Matemática, basado en la idea de «*tan grande o tan pequeño como se quiera*» del *Método de Exhaución* de Eudoxo, que destierra el infinito actual de la Matemática y que servirá ulteriormente de base a la noción de límite del Cálculo Infinitesimal. En palabras de Aristóteles (*Física*, Libro III, Cap.7, 208a) :

> ***«Los matemáticos actualmente no precisan del infinito en sus estudios, ni lo emplean en ellos, sino que conciben la existencia de una magnitud finita tan grande como se quiera.»***

Para Aristóteles el infinito es como una ilusión del pensamiento que siempre puede traspasar en potencia un límite prefijado, pero distingue la cuestión del infinitamente grande y el infinitamente pequeño en las magnitudes y en los números.

En su exploración del infinito parece que para Aristóteles lo discreto y lo finito son objeto de la ciencia, reservando para la metafísica la virtualidad del continuo y del infinito.

Los inconmensurables y la estructura euclídea de la Geometría griega

Una de las consecuencias más importantes de la crisis de fundamentos que provoca en la Matemática griega la aparición de los inconmensurables es de índole metodológico. La Academia platónica impone el supremo rigor lógico por encima de cualquier otro valor, lo que cristaliza en la sistematización axiomático-deductiva de la geometría griega elemental en la compilación enciclopédica de *Los Elementos* de Euclides, estableciendo un severo modelo de exposición y demostración en Matemáticas, que presidirá casi toda la producción Matemática posterior, o por lo menos la que nos ha llegado en los grandes tratados clásicos.

La solución de la crisis de los irracionales con la teoría de magnitudes de Eudoxo que quedó plasmada en el Libro V de *Los Elementos* de Euclides, constituyendo a partir de entonces la médula de la Geometría griega, fue un magnífico éxito científico, pero tomó una excesiva forma geométrico-deductiva bajo la filosofía platónica. Cierto que en ese momento la crisis no podía solventarse con la definición de número irracional, ya que ello hubiera precisado un desarrollo considerable de las técnicas de la Aritmética de la computación, lo que no podía darse en un ambiente científico dominado por el idealismo platónico, que despreciando el estudio de la dimensión sensible de la realidad, rechazaba de forma elitista las aplicaciones prácticas por considerarlas corruptoras y degradantes. Si los científicos griegos no idearon un sistema de numeración manejable, mal podían prestar atención a las cuestiones calculísticas, que, además, eran objeto de una actividad, que llamaban *Logística*, de rango intelectual inferior a la Aritmética, de modo análogo a como de las aplicaciones prácticas de la Geometría se ocupaba una actividad inferior que llamaban *Geodesia*.

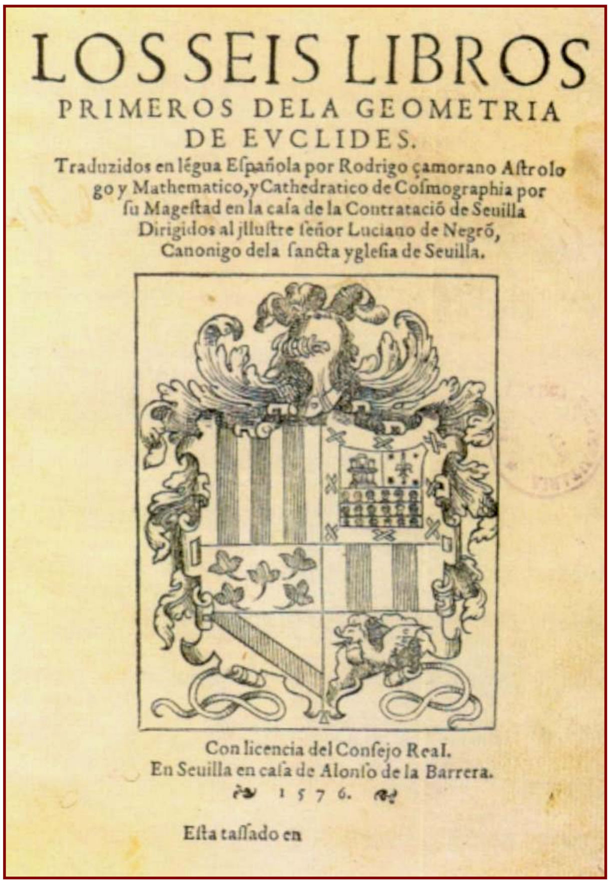
Así pues, lo inconmensurable impuso la omnipresencia de la Geometría en la Matemática griega. Al limitar la Aritmética al estudio de los enteros –y siempre en forma geométrica– se impidieron desarrollos de tipo algebraico, de modo que el Algebra se hizo retórica y geométrica, con toda ausencia de un aparato simbólico y algorítmico. Esta realidad produjo un doble efecto a tener en cuenta para entender el desarrollo de la Geometría griega.

Por una parte, los limitados conceptos numéricos de los griegos no permitían asignar a las figuras geométricas números que midieran sus áreas o sus volúmenes y por tanto tenían que calcular directamente con las figuras, que se trataban como magnitudes. Para llevar a cabo la cuadratura o cubatura de una figura –en nuestro lenguaje, el volumen–, los griegos debían encontrar la razón de la figura y otra figura previamente conocida, por ejemplo la razón entre un segmento de parábola y un triángulo inscrito, como hace Arquímedes en *Sobre la Cuadratura de la Parábola* o en la Proposición I de *El Método*. Es por ello por lo que los griegos desarrollaron, como se ha visto, una muy perfeccionada teoría de magnitudes y proporciones, sobre todo por parte de Eudoxo.

Por otra parte esta limitación algebraica hizo imposible la introducción de nuevas curvas por medio de ecuaciones. Las curvas se obtenían constructivamente mediante lugares geométricos o intersección de superficies y también a través de relaciones de áreas o longitudes, que daban la propiedad de definición de la curva, lo que Apolonio llamaba el «*Symptoma*» de la curva. De esta forma, el elenco de curvas que manejaron los griegos hubo de ser necesariamente muy limitado (*las cónicas* de Menecmo y Apolonio, *la espiral* de Arquímedes, *la cuadratriz* de Hipias o Dinóstrato, *la cisoide* de Diocles, *la hipopede* de Eudoxo, *la concoide* de Nicomedes, y pocas más).

Además, de acuerdo con el punto de vista de la Filosofía eleática, la Geometría griega, con la excepción de la de Arquímedes, adquirió un carácter estático, como secuela del papel escaso que tuvo en la ciencia griega los conceptos de movimiento y variación continua de cantidades. Así por ejemplo, para Euclides, un círculo no es el resultado de un movimiento de giro de un segmento en torno a uno de sus extremos, sino el conjunto de todos los puntos que equidistan de un punto fijo. El concepto se expresa así en lenguaje eleático, mediante la descripción de la esencia y no mediante la descripción del fenómeno de la generación del círculo, es decir en términos ontológicos y no en términos físicos. Los griegos sólo estudiaron el movimiento uniforme –circular o lineal– y no discutieron los fenómenos de cambio o variabilidad en términos cuantitativos. En este sentido puede decirse que la ausencia de una auténtica Cinemática provocó que no se abordara la diferenciación.

LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES Y LA ESTRUCTURA DE LA GEOMETRÍA GRIEGA



LOS SEIS LIBROS PRIMEROS DELA GEOMETRIA DE EVCLIDES.

Traduzidos en légua Española por Rodrigo çamorano Astrologo y Mathematico, y Cathedratico de Cosmographia por su Mageſtad en la caſa de la Contratació de Seuilla Dirigidos al jlluſtre ſeñor Luciano de Negrō, Canonigo dela ſancta yglesia de Seuilla.

Con licencia del Conſejo Real.
En Seuilla en caſa de Alonſo de la Barrera.
1576.

Eſta taſſado en

1. **Primera edición en español de *Los Elementos* de Euclides.**
2. **Euclides a los pies de la Geometría. Colección Cambó de Barcelona.**

La crisis de los inconmensurables marcó una inflexión radical en la evolución histórica de la Matemática griega, ya que puso fin al sueño filosófico pitagórico acerca del número como esencia del universo, abrió el abismo entre lo discreto y lo continuo, entre lo finito y lo infinito, eliminó de la Geometría la posibilidad de medir siempre con exactitud, privilegió la Geometría sobre la Aritmética y el Álgebra y fue lo que imprimió a la Matemática griega una orientación geométrico-deductiva plasmada en la compilación enciclopédica de Los Elementos de Euclides.

La necesidad de reconstruir las pruebas geométricas de los teoremas pitagóricos que involucraban proporciones, a base de fundamentarlas en un nuevo rigor, produce, como reacción ante la crisis, la aparición de *Los Elementos* de Euclides, donde la Matemática elemental de los griegos queda rígidamente estructurada con el severo rigor que impone el método axiomático. Así pues, uno de los objetivos principales de *Los Elementos* de Euclides debió ser la recopilación de la Geometría griega elemental en un Corpus geométrico, organizado de forma lógico-deductiva, que debía normativizar la forma definitiva en que debía de quedar el conocimiento matemático después de la aparición de los inconmensurables. En este sentido, el Libro V contiene el instrumento para llevar a cabo el programa euclídeo – *La Teoría de la Proporción* de Eudoxo– y por eso es uno de los más importantes de esta Biblia matemática.

La revisión de los fundamentos traerá como secuela el desarrollo de la Geometría independiente de la Aritmética, la ausencia de un Álgebra en sentido algorítmico y simbólico y por tanto un enfoque exclusivamente geométrico de toda la Matemática griega.

El sintético estilo euclídeo de exposición y demostración, que establece un severo e impecable rigor como supremo valor lógico y que oculta la vía heurística del descubrimiento alcanzado por vía analítica o mecánica, se impondrá como paradigma normativo en los más importantes tratados de la Matemática griega, en particular *Las Cónicas* de Apolonio y *Las Obras* de Arquímedes.

Pero el respeto absoluto al paradigma estilístico euclídeo cercena considerablemente las posibilidades de expresión y oculta la vía del descubrimiento: «*el ars inveniendi*», quedando de manifiesto en exclusiva la vía apodíctica: «*el ars disserendi*». Así sucede, por ejemplo, con el *Método de exhaución* que es sólo un método de demostración de lo que se ha descubierto *a priori* mediante los diversos procedimientos inventivos. Precisamente la Geometría Analítica y con base en ella el Cálculo Infinitesimal son instrumentos que irán emergiendo a lo largo de la Historia de la Matemática, persiguiendo el alumbramiento de métodos que permitan fundir en un sólo acto el descubrimiento y la demostración.

PITÁGORAS, PLATÓN Y EUCLIDES
EN LA *ESCUELA DE ATENAS* DE RAFAEL

El origen de la Matemática griega –y en particular el inicio de las cuestiones infinitesimales– se desarrolla en tres estadios fundamentales, cuyas figuras principales son Pitágoras, Platón y Euclides. Cada uno de ellos aporta una singularidad esencial. Pitágoras es el instaurador de la tradición matemática griega y el artífice de la fundamentación filosófica e ideológica de la Matemática. Platón es la figura central en todos los sentidos; su actividad es la que confiere un estatuto gnoseológico y ontológico a la Geometría griega. Además, creó un entorno académico donde se potenciaron hasta el paroxismo los estudios geométricos. Euclides es el sistematizador de todos los conocimientos precedentes. Su obra, *Los Elementos*, se convierte en canónica, y como tal marca una pauta a lo largo de veintidós siglos. La tradición matemática de la Escuela Pitagórica es recogida por Platón para ponerla en manos de Euclides, que en la compilación de *Los Elementos* creará un modelo geométrico estructural paradigmático.

El descubrimiento de los inconmensurables tiene lugar en la Escuela de Pitágoras, acarreando una crisis de fundamentos en la matemática pitagórica que es resuelta por Eudoxo, en la Academia de Platón, mediante unos instrumentos que conformarán la estructura de la Geometría griega elemental plasmada por Euclides en *Los Elementos*.

La incidencia histórica del descubrimiento pitagórico de los inconmensurables y de la solución de Eudoxo, de la Academia platónica, a la consiguiente crisis de fundamentos de la Matemática griega que se resuelve en *Los Elementos* de Euclides:

- **Geometría al margen de la Aritmética y del Álgebra.**
- **Conversión de toda la Matemática griega en Geometría.**
- **Limitación operacional que impide asignar a las figuras geométricas números que midan sus longitudes, áreas y volúmenes.**
- ***Álgebra Geométrica*. *Aplicación de las áreas* (Libro II de *Los Elementos* de Euclides).**
- ***Teoría de la Proporción* de Eudoxo (Libros V, VI de *Los Elementos* de Euclides).**
- **Inauguración en la Matemática griega de los problemas infinitesimales.**
- **Aparición de la idea de «*tan pequeño como se quiera*» del *Método de Exhaución* que produce resultados infinitesimales análogos al ulterior *cálculo de límites*.**
- **Horror al infinito en la cultura griega.**
- ***Teoría de la Potencia el acto. Hilemorfismo* de Aristóteles.**
- **Énfasis en el rigor como supremo valor de la Matemática.**
- **Estilo sintético-apodíctico de exposición (*ars disserendi*) que oculta la vía heurística del descubrimiento (*ars inveniendi*) alcanzado por vía analítica o mecánica.**
- **Compilación de la Geometría griega elemental en *Los Elementos* de Euclides.**
- **El estilo axiomático deductivo de *Los Elementos* de Euclides se convierte en paradigma canónico de exposición y demostración (Obras de Arquímedes, Cónicas de Apolonio, ...)**

Cuadraturas y cubaturas en Euclides. El Libro XII de *Los Elementos*

Euclides recopila en *Los Elementos* gran parte de la Matemática elemental elaborada por los matemáticos anteriores –en particular la doctrina pitagórica y la fundamentación de Eudoxo de las cuestiones infinitesimales– y por él mismo y lo hace a base de seleccionar y estructurar rígidamente los conocimientos matemáticos mediante el método axiomático, en el que una vez establecidos los axiomas y postulados, como verdades evidentes, para demostrar los resultados ya no se emplea la intuición sino el rigor deductivo.

A fin de saber de conocer los presupuestos geométricos sobre los que se basaría Arquímedes para la obtención de sus brillantes resultados infinitesimales, conviene, a modo de resumen de lo anterior, relacionar sucintamente la parte de *Los Elementos* que interesa a la cuestión infinitesimal.

Ya se ha mencionado que Euclides trata en el Libro V de *Los Elementos* la *Teoría general de la Proporción*, y en particular enuncia lo que hemos llamado «*Axioma de Eudoxo-Arquímedes*» o «*Axioma de continuidad*»:

- Definición V.4. *Se dice que dos magnitudes tienen razón cuando se puede multiplicar una de ellas de modo que supere a la otra*.

También define, como se ha visto, la igualdad de razones:

- Definición V.5. *Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda magnitud, que una tercera magnitud con una cuarta magnitud, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera exceden a la par, sean iguales a la par o sean inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente*.

Desarrollada en el Libro V la *Teoría de la Proporción*, Euclides la aplica en el Libro VI para demostrar teoremas relativos a razones y proporciones que se presentan al estudiar triángulos, paralelogramos y otros polígonos semejantes.

En el Libro X Euclides estudia en forma geométrica las propiedades de cierto grupo de expresiones irracionales que hoy denominamos irracionales cuadráticos. Euclides demuestra también en este Libro lo que hemos llamado «*Principio de Eudoxo*», que es la antesala del *Método de exhaución*:

- Proposición X.1. *Dadas dos magnitudes desiguales, si de la mayor se resta una magnitud mayor que su mitad y de lo que queda otra magnitud mayor que su mitad y se repite continuamente este proceso, quedará una magnitud menor que la menor de las magnitudes dadas.*

Pero interesa particularmente el Libro XII de *Los Elementos*, con sus 18 proposiciones, donde Euclides utiliza, de forma impecable, la doble reducción al absurdo del *Método de Exhaución* de Eudoxo, para obtener el volumen de pirámides, conos, cilindros y esferas. Euclides se prodiga en el cálculo de cuadraturas y cubaturas, aplicando el método de exhaución en cuatro casos:

- Proporcionalidad entre círculos y los cuadrados construidos sobre sus diámetros.
- Proporcionalidad entre esferas y los cubos construidos sobre sus diámetros.
- Equivalencia entre la pirámide y la tercera parte del prisma de igual base y altura.
- Equivalencia entre el cono y la tercera parte del cilindro de igual base y altura.

Transcribimos en el cuadro siguiente la relación completa de Los enunciados de las proposiciones del Libro XII de *Los Elementos*, donde aparecen los resultados aludidos sobre cuadraturas y cubaturas:

Cuadraturas y cubaturas en el Libro XII de *Los Elementos* de Euclides

- **Proposición XII.1. Los polígonos semejantes inscritos en círculos son entre sí como los cuadrados de los diámetros.**
- **Proposición XII.2. Los círculos son entre sí como los cuadrados de sus diámetros [*Teorema de Hipócrates*, primera aplicación del *método de exhaución* de Eudoxo establecido en X.1, que evita el paso al límite].**
- **Proposición XII.3. Toda pirámide triangular se descompone en dos pirámides triangulares equivalentes, semejantes entre sí y a la pirámide entera, y en dos prismas equivalentes que son mayores que la mitad de la pirámide entera.**
- **Proposición XII.4. Si dos pirámides triangulares de la misma altura se descomponen en dos pirámides equivalentes y semejantes a ellas y en dos prismas equivalentes; entonces las bases de las pirámides están en la misma razón que los prismas**
- **Proposición XII.5. Las pirámides triangulares que tienen la misma altura son entre sí como sus bases.**
- **Proposición XII.6. Las pirámides que tienen la misma altura y tienen polígonos como base son entre sí como sus bases.**
- **Proposición XII.7. Todo prisma triangular se descompone en tres pirámides triangulares equivalentes.**
  - **Corolario. Una pirámide es equivalente a la tercera parte del prisma de la misma base y altura.**
- **Proposición XII.8. Las pirámides triangulares semejantes son entre sí como las razones triplicadas de sus lados correspondientes.**
  - **Corolario: La pirámides que tienen como bases polígonos semejantes son entre sí como las razones triplicadas de sus lados correspondientes.**
- **Proposición XII.9. En las pirámides triangulares equivalentes, las bases son inversamente proporcionales a las alturas; y las pirámides cuyas bases son inversamente proporcionales a las alturas son equivalentes.**
- **Proposición XII.10. Todo cono es la tercera parte del cilindro que tiene la misma base y la misma altura.**
- **Proposición XII.11. Los conos y cilindros que tienen la misma altura son entre sí como sus bases.**
- **Proposición XII.12. Los conos y cilindros semejantes son entre sí como las razones triplicadas de los diámetros de sus bases.**
- **Proposición XII.13. Si un cilindro se corta por un plano paralelo a sus bases, entonces, el cilindro es al cilindro como el eje es al eje.**
- **Proposición XII.14. Los conos y cilindros de bases iguales son entre sí como sus alturas.**
- **Proposición XII.15. En conos y cilindros equivalentes las bases son inversamente proporcionales a las alturas; y los conos y cilindros cuyas bases son inversamente proporcionales a las alturas son equivalentes.**
- **Proposición XII.16. Dados dos círculos con el mismo centro, inscribir en el círculo mayor un polígono equilátero y de un número par de lados que no toque el círculo menor.**
- **Proposición XII.17. Dadas dos esferas con el mismo centro, inscribir en la esfera mayor un poliedro que no toque la superficie de la esfera menor.**
  - **Corolario: Poliedros semejantes inscritos en esferas son entre sí como las razones triplicadas de los diámetros de éstas.**
- **Proposición XII.18. Las esferas son entre sí como las razones triplicadas de sus respectivos diámetros.**

Los métodos de Arquímedes antecedentes del Cálculo Integral

La obra matemática de Arquímedes

El pensamiento y la obra de Arquímedes han ejercido siempre una irresistible atracción, por su genialidad y originalidad, que hacen de su legado un manantial de savia singular para muchos caminos de la Ciencia y especialmente de la Matemática, donde se le considera uno de sus cultivadores más grandes de todos los tiempos. Arquímedes es reconocido, con sorprendente unanimidad, como el más importante de los matemáticos de la antigüedad. Sus principales obras fueron impresas y traducidas al latín por vez primera entre 1503 y 1588, ejerciendo una decisiva influencia sobre la especulación científica de esa época. En la centuria siguiente Stevin, Galileo, Cavalieri, Kepler, Torricelli, Fermat, Wallis y Barrow reconocerán la inmensa deuda con el «*sobrehumano Arquímede*s», cuya obra, pródiga en asombrosos resultados y modelo de exposición rigurosa, constituyó un sólido punto de partida tanto para la configuración de la nueva física como para la invención del cálculo infinitesimal.

Euclides y Arquímedes, las dos figuras más importantes de la Matemática griega, se sitúan en el siglo III a. C. Si a Euclides le cabe el gran mérito de la compilación, ordenación y sistematización de la Geometría griega elemental en sus *Elementos*, así como la instauración de un estilo de presentación, a Arquímedes se le considera como el investigador por excelencia. La obra de Euclides establece un férreo paradigma de exposición y de demostración en Matemáticas, una especie de norma académica de obligado respeto para todo matemático. Sin embargo Arquímedes, aunque se atiene al estándar geométrico euclídeo establecido para la exposición, a base de fijar con antelación las hipótesis que postula, previo a la demostración cuidadosamente rigurosa de las proposiciones que enuncia, tiene una actuación matemática que enlaza más directamente con el genio creador del siglo IV a.C. representado por Eudoxo, ya que el propósito fundamental de Arquímedes no es de índole metodológica, como el caso de Euclides, sino el aporte de nuevos resultados, la magnificación del acervo matemático. Por eso sus escritos son brillantes memorias científicas originales en las que se da por sabido todo lo descubierto con anterioridad.

Arquímedes era hijo del astrónomo Fidias y por tanto es probable que su primera formación proviniera de su padre; pero enseguida se traslada de su ciudad natal, Siracusa, a Alejandría, que por entonces era el más importante centro de estudios del Mediterráneo y el núcleo de la cultura helenística. Con sus dos instituciones, El Museo y La Biblioteca, Alejandría era un foco de atracción para todos los estudiosos del momento, no sólo por disponer de prácticamente todo el material bibliográfico conocido o por albergar a los más importantes científicos y eruditos, sino también por el mecenazgo que oficialmente ejercía la dinastía del fundador Ptolomeo I Soter. Así pues, Arquímedes al llegar a Alejandría, debió encontrar un ambiente científico polarizado hacia las Matemáticas, que habiendo recibido un enorme impulso gracias a la figura de Euclides, estaban imbuidas del modelo de racionalidad geométrica fundado por él, y mantenido por sus epígonos, los cuales se lo transmitirían en sus enseñanzas a Arquímedes.

Sorprende que Arquímedes, con su vocación estudiosa e investigadora, no permaneciera en Alejandría, donde tenía un emporio científico institucional a su disposición. Se puede conjeturar que fue la llamada de Hierón –rey de Siracusa, con quien Arquímedes estaba emparentado–, empeñado en favorecer la cultura en su tierra natal, lo que le indujo a regresar a su patria. Sin embargo los motivos que impelieron a Arquímedes a abandonar Alejandría pueden ser de índole más profunda aún que el propio patriotismo, enraizados en su propia personalidad como científico. La ciencia alejandrina estaba muy mediatizada por la influencia ideológica del platonismo. Con casi la única excepción de la Medicina, la cultura helenística desarrolló una ciencia sustancialmente teórica y abstracta, que, complacida en su idealidad en los métodos y en los contenidos, permaneció ligada al modelo teórico de la Matemática pura, rechazando de forma elitista las aplicaciones prácticas por considerarlas corruptoras y degradantes y despreciando el estudio de la dimensión sensible de la realidad. Plutarco describe esta filosofía en un párrafo de su obra *Vida de Marcelo* (XIV):

> «[...] *Platón se indispuso e indignó contra ellos* [contra Arquitas de Tarento y Eudoxo de Cnido], *porque degradaban y echaban a perder lo más excelente de la Geometría con trasladarla de lo incorpóreo e intelectual a lo sensible y emplearla en los cuerpos que son objeto de oficios toscos y manuales*.»

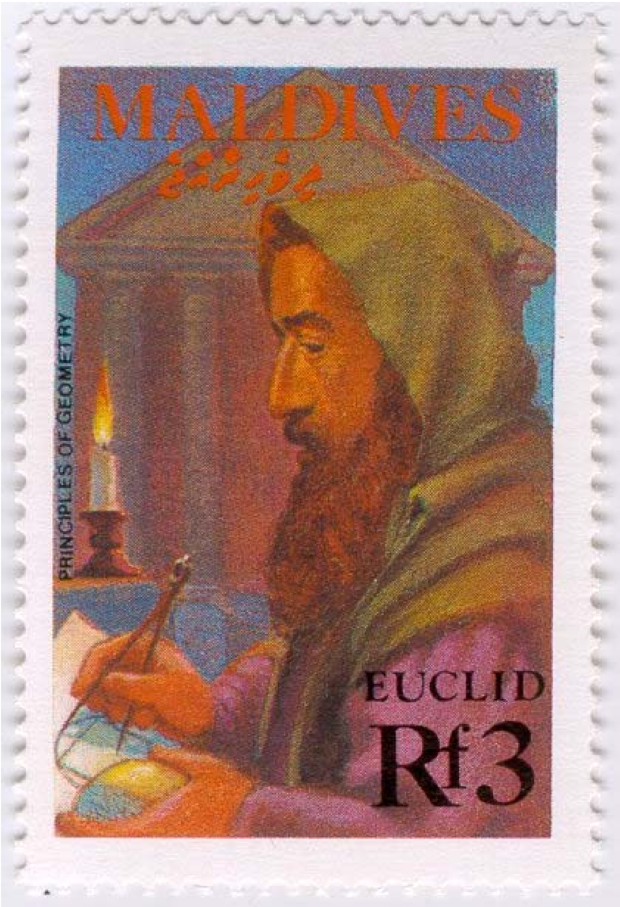
Es posible que fueran estos presupuestos ideológicos los que indujeran a Arquímedes a abandonar Alejandría, consciente de que allí su espíritu científico no iba a tener un ámbito adecuado. En efecto, la actividad investigadora de Arquímedes fue profundamente original y diferente de la ciencia alejandrina, porque al fundir los aspectos científicos con los técnicos, logró alcanzar una síntesis armónica que, elevándose a las más altas cotas del rigor, produjo extraordinarios resultados al complementar la investigación teórica con las aplicaciones prácticas. Arquímedes se enfrentó contra todos los prejuicios platónicos y en aras de la realidad no dudó en extraer de la Mecánica y de la Geometría del mundo sensible –en el que no hay puntos sin extensión ni líneas sin grosor y en el que todo es material–, los elementos y recursos físicos que, contando, midiendo e incluso pesando y no haciendo metafísica, como los platónicos epígonos de Euclides, conducen por abstracción al conocimiento lógico.

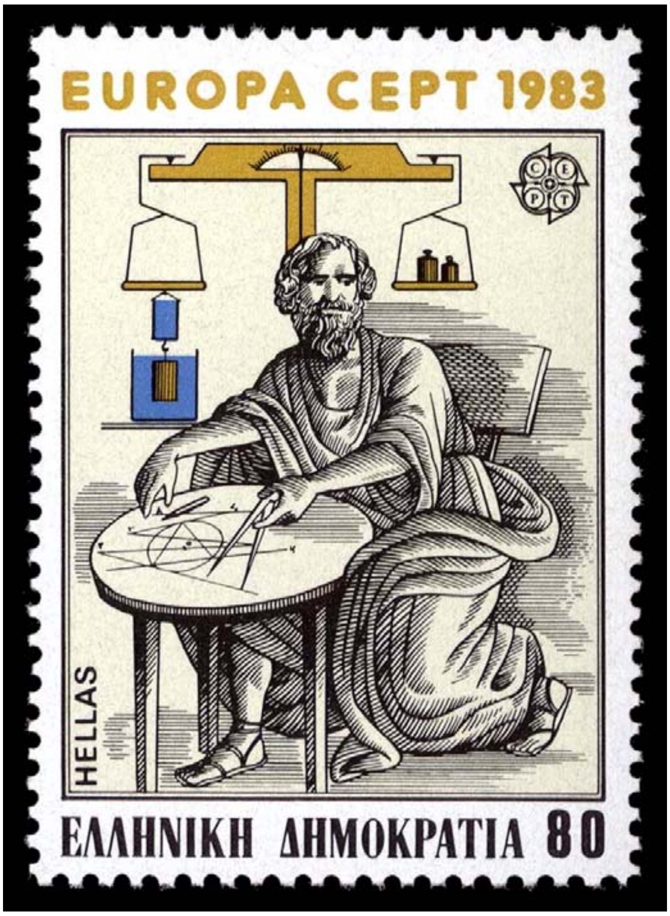
El abismo que el idealismo de Platón había establecido entre la teoría y la práctica fue salvado por Arquímedes con la aplicación de la técnica y de instrumentos geométricos más allá de la Geometría que permitía la regla y el compás platónicos; por ejemplo al prescindir de los cánones euclídeos e introducir una de las curvas más importantes de la Matemática como la Espiral llamada de Arquímedes. Así pues, En su actividad investigadora, Arquímedes no descarta ningún procedimiento técnico extraído del mundo físico o geométrico sino que aprovecha cuanto habían desdeñado o proscrito los que le precedieron –lo infinitesimal, lo mecánico, lo operativo–, y todo lo que le ofrece la realidad, por irregular y corpórea que sea, como elementos de una investigación objetiva precedente, a la que sigue, bajo un espíritu de rigor euclidiano, la convalidación apodíctica de todo cuanto en la fase inventiva anterior ha intuido.

Arquímedes lleva por tanto una doble actividad como matemático, la inventiva y la demostrativa, pero en sus grandes tratados clásicos sólo da cuenta de la segunda, produciendo una gran admiración sus magníficos resultados matemáticos, pero también una gran perplejidad, ante la ocultación del camino seguido en la investigación. Sólo en una obra, *El Método relativo a los teoremas mecánicos* –cuyo largo título indicaremos por *EL MÉTODO*– , Arquímedes, de una forma totalmente diferente a los esquemas metodológicos alejandrinos, con una brillante conjunción de la Mecánica y la Geometría, revela de forma heurística, en una comunicación a Eratóstenes, las vías y los procedimientos mecánicos que utilizaba en sus descubrimientos matemáticos. Desgraciadamente la obra de Arquímedes desapareció, siendo recuperada por J.L. Heiberg en 1906, de modo que aunque se intuía que Arquímedes utilizaba un método singularmente original en su investigación, permaneció oculto durante siglos.

A pesar de que Arquímedes desarrolló su ingente labor investigadora lejos de Alejandría, no permaneció totalmente aislado, sino que, convencido de la importancia de sus descubrimientos, se comunicaba con los sabios alejandrinos. Es posible que Arquímedes viera como una necesidad la aprobación por parte de los científicos del Museo de sus resultados matemáticos. Quizá por ello también, después de realizar sus descubrimientos con su original método mecánico, como obedeciendo a la ciencia oficial, Arquímedes realizaba una impecable demostración mediante el método de exhaución. No es probable que Arquímedes hiciera esto por la persistencia en él de la influencia platónica; antes bien, parece que él mismo, como manifiesta en el Preámbulo de *EL MÉTODO*, sentía necesario confirmar sus intuiciones mecánicas con una demostración rigurosa. Así, por una parte, su obra queda perfectamente engarzada en la rígida tradición de la Geometría griega; y por otra, sus descubrimientos pudieron ser conocidos y ponderados por el resto del mundo científico helénico y a través suyo permanecer para la posteridad.

EUCLIDES Y ARQUÍMEDES
EL MAESTRO Y EL INVESTIGADOR





Euclides y Arquímedes son las dos figuras más relevantes de la Matemática griega.

Euclides es el compilador de la Geometría griega elemental y el creador de un estilo de exposición en *Los Elementos*, de modo que con independencia de sus aportes originales, en lenguaje actual diríamos que Euclides es un gran maestro y su obra fundamental un Libro de Texto.

Como contrapunto, Arquímedes es el científico investigador por antonomasia que aunque en la exposición se atiene al canon estilístico euclídeo al establecer *a priori* las hipótesis que postula previo a la rigurosa demostración de las proposiciones que enuncia, lo que más fascina de este sabio es la brillante creatividad de la fase inventiva que precede a la demostrativa, en la se sustrae a los prejuicios del idealismo platónico vigente –que marca la obra euclídea– y utiliza los recursos de la realidad física, aunque muy consciente en todo caso del grado de rigor que subyace en esta fase primitiva de la elaboración matemática teórica.

Arquímedes compartía con Euclides la potencia demostrativa, pero en la genialidad de la invención superó con creces a todos sus coetáneos y antecesores, magnificando de forma muy considerable el patrimonio matemático griego con múltiples cuestiones y problemas geométricos nuevos. Arquímedes crea en dos estadios de actividad científica, con dos métodos diferentes que se complementan, el primero intuitivo donde se descubre y se inventa, el segundo apodíctico donde se convalida lo intuido demostrándolo de forma rigurosamente deductiva según el modelo euclidiano.

***Los Elementos* de Euclides debieron tener una misión escolar y académica en la docencia del Museo de Alejandría y por tanto la obra tiene un valor metodológico fundamental que se ha prolongado en la escuela hasta hace muy pocas décadas. El propósito de la obra de Arquímedes es bien distinto. Sus escritos, que constituyen una magnifica contribución científica, no son compilaciones sino brillantes memorias científicas originales en las que se da por sabido todo lo descubierto con anterioridad, lo cual se explica porque en general las obras de Arquímedes están dirigidas a matemáticos de Alejandría. El hecho de que sus obras tengan un destinatario explica un rasgo fundamental de la mismas: un científico se dirige a otro científico, al que considera situado en su propio nivel intelectual y de conocimientos; por ello no se siente obligado a demorarse –como Euclides– en aclaraciones de carácter didáctico.**

El estilo de Arquímedes es extraordinariamente conciso, emplea las palabras necesarias para la plena inteligibilidad y precisión del razonamiento y no se entrega nunca a expansiones retóricas.

ARQUIMEDES SEGÚN EL HISTORIADOR DE LA CIENCIA F.VERA

F.VERA: *Breve Historia de la Geometría*. Losada. Buenos Aires. 1963. Cap. IV. pp.64-65.

Arquímedes es el más científico de todos los griegos, el sabio más profundo de toda la antigüedad clásica y el único que no prestó oídos a los cantos de sirena de los filósofos para sólo atender a lo que veía con los ojos de la cara y con los de la inteligencia y coordinar armoniosamente ambas visiones: la exterior para contemplar la naturaleza y descubrir sus leyes, y la interior para hacer progresar la Matemática, tomando como punto de partida los datos suministrados por la visión material, pues el primero que el mundo exterior es el profundo hontanar del que mana todo conocimiento.

[...] Hombre completo y ciudadano ejemplar, Arquímedes es el primero que en la Historia de la Técnica puede recibir el título de ingeniero en la acepción actual de esta profesión, y como matemático en general y geómetra en particular, su nombre está en las cimas más altas.

[...] A Euclides lo podían leer todos sus contemporáneos cultos y seguir paso a paso sus demostraciones; pero a Arquímedes no, porque era necesario tener ya una formación matemática; Euclides sistematiza genialmente todo lo que se sabía a él, pero en sus *Elementos* hay poca aportación personal, mientras que Arquímedes es todo él original, desde las ideas hasta los métodos, perfectamente heterodoxos para la época. La Geometría estática de Euclides se convierte en Geometría cinética con Arquímedes, quien llenó la sima platónica abierta ente la razón pura y la experiencia, y, apoyándose en ésta, descubrió métodos generales para calcular las áreas de las figuras curvilíneas y los volúmenes de cuerpos limitados por superficies curvas, que aplicó al círculo, segmento parabólico, espirales, segmento esférico, cilindro, cono, esfera, elipsoide, hiperboloide, paraboloide, etc.

F.VERA: Arquímedes (en *Científicos griegos*). Aguilar, Madrid, 1970. pp.11-13.

Dice Plutarco que los inventos fueron para Arquímedes «como juegos de Geometría».

[...] Arquímedes es, acaso, el hombre de ciencia que ha llegado a la más alta cima de la abstracción, y, según Plutarco, la muerte le acechaba, en uno de sus momentos de éxtasis.

[...] Euclides y Arquímedes representan una orientación distinta de la ciencia llamada exacta por antonomasia. Euclides se preocupa por ordenar, sistematizar y completar la labor de sus antecesores, mientras que Arquímedes se plantea problemas nuevos, cuya solución le obliga a prescindir de los métodos conocidos e inventar otros, acudiendo incluso a recursos físicos : audacia herética para los epígonos de Euclides, cuya autoridad era indiscutible en Alejandría.

[...] Hombre antes que intelectual y ciudadano antes que sabio, Arquímedes no se encerró en la torre de marfil de sus lucubraciones, ni permaneció al margen de la cosa pública.

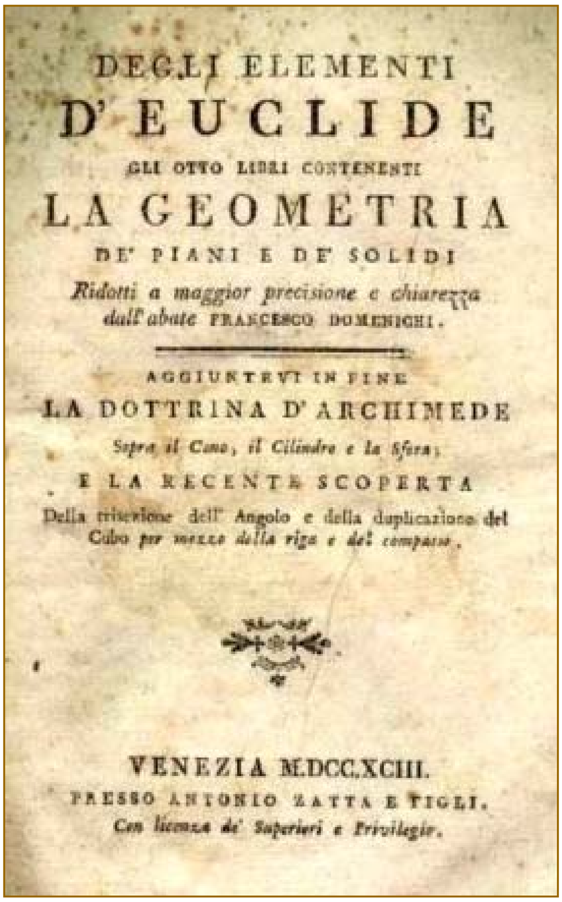
[...] El abismo platónico entre teoría y práctica no existió para Arquímedes, que supo aplicar la Técnica al resultado de su meditaciones, ni tampoco existió para él la restricción de la regla y el compás como únicos instrumentos de la actividad matemática, al prescindir de los cánones euclídeos.

[...] Las obras de Arquímedes no son compilaciones, sino verdaderas monografías en el sentido actual del término, tanto por su extensión, siempre breve, como por su intensidad, siempre grande, por lo cual puede decirse que fue un hombre moderno.

[...] Arquímedes inventó la curva espiral que lleva su nombre, determinó con rigor científico la razón de la circunferencia al diámetro mediante cálculos aproximados y encontró el área del segmento parabólico haciendo pesadas teóricas.

[...] El gran siracusano echó los cimientos del Cálculo integral; determinó el centro de gravedad del segmento parabólico; estableció el concepto riguroso de momento estático; calculo las áreas y volúmenes de cuerpos limitados por superficies curvas, y, en su trabajo *EL MÉTODO*, analizó los vínculos entre el descubrimiento y la demostración de las verdades matemáticas, dejando la más amplia libertad par aquél y exigiendo el rigor lógico para ésta.

EL LIBRO XII DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES Y LA INFLUENCIA DE EUCLIDES SOBRE ARQUÍMEDES



DEGLI ELEMENTI
D'EUCLIDE
GLI OTTO LIBRI CONTENENTI
LA GEOMETRIA
DE' PIANI E DE' SOLIDI
Ridotti a maggior precisione e chiarezza
dall'abate FRANCESCO DOMENICHI.

AGGIUNTEVI IN FINE
LA DOTTRINA D'ARCHIMEDE
Sopra il Cono, il Cilindro e la Sfera;
E LA RECENTE SCOPERTA
Della trisezione dell' Angolo e della duplicazione del Cubo *per mezzo della riga e del compasso.*

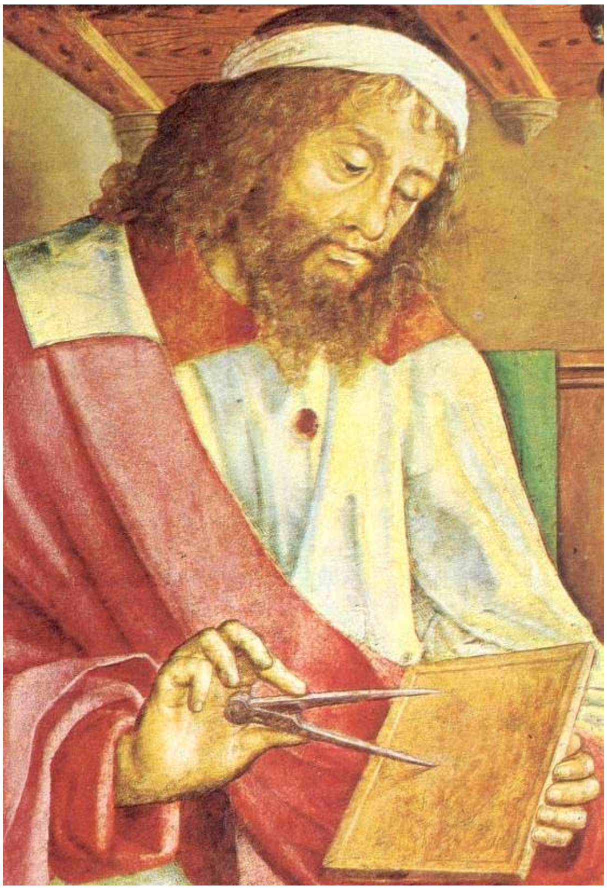
VENEZIA MDCCXCIII.
PRESSO ANTONIO ZATTA E FIGLI.
Con licenza de' Superiori e Privilegio.

Los Elementos de Euclides en la edición de F. Domenichi, Venecia (1793). Esta versión contiene también obras de Arquímedes, como apunta su largo título: _Degli Elementi d'Euclide gli otto libri contenenti la Geometria de' piani e de' solidi... Aggiuntavi in fine la dottrina d'Archimede_. En concreto, esta edición tiene los Libros de Euclides, a excepción de los aritméticos (VII, VIII, IX), el X y el XIII, y también los teoremas de Arquímedes sobre la esfera, el cilindro y el cono.

El Método de Exhaución preside la obtención de los resultados euclídeos del Libro XII sobre círculos, esferas, pirámides, cilindros y conos. Arquímedes atribuyó la obtención de muchos de estos resultados a Demócrito y las demostraciones rigurosas de los correspondientes teoremas a Eudoxo, de quien Euclides adaptaría el material para la redacción de Los Elementos.

En su famosa obra _Sobre la Esfera y el Cilindro_, Arquímedes demostrará de forma impecable, mediante el _Método de Exhaución_, resultados obtenidos mediante el _Método Mecánico,_ sobre estas figuras y el cono, y en particular, la legendaria propiedad de la razón de 2 a 3 entre la esfera y el cilindro circunscrito, tanto en superficie total como en volumen, presente como epitafio en su tumba de Siracusa.

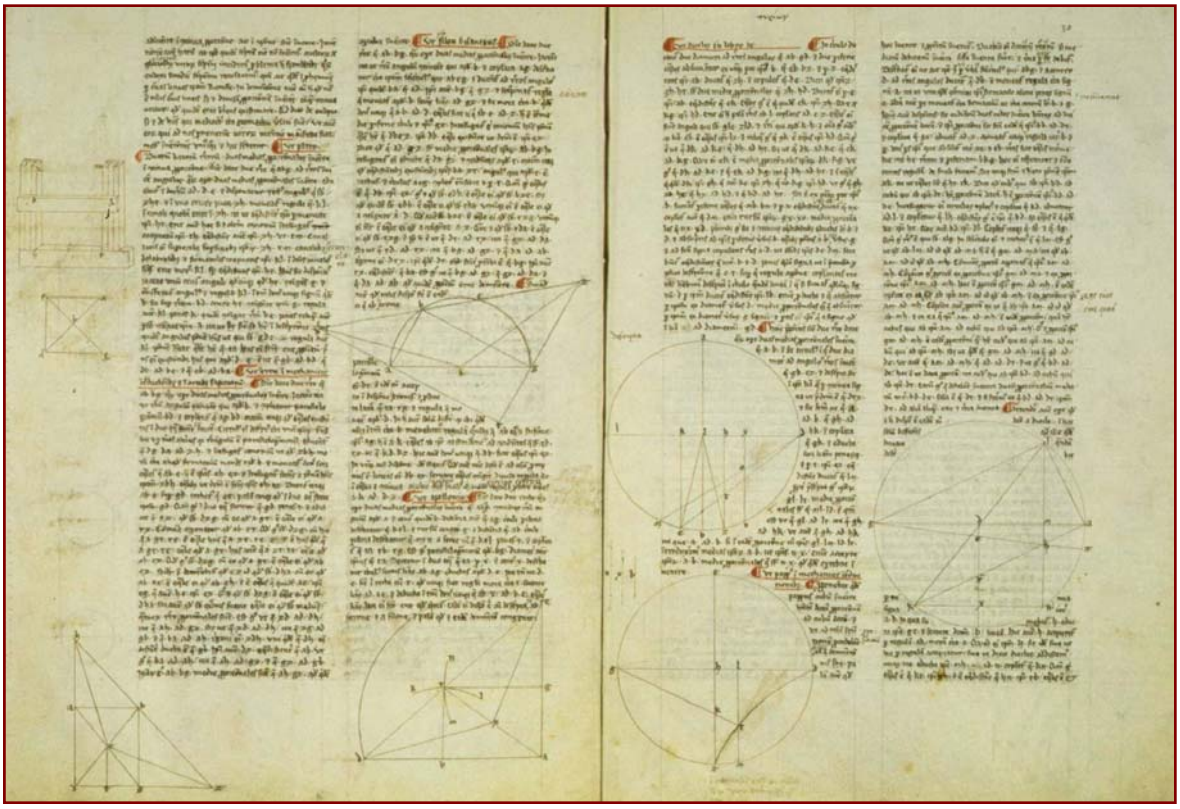
La Proposición XII.2 de _Los Elementos_ dice que la razón del área de un círculo al cuadrado del diámetro es siempre la misma, un hecho de gran importancia que introducía una constante vinculada a todos los círculos y que, sin embargo, Euclides, de acuerdo con su proceder estrictamente geométrico, no reparó en su cuantificación. A este asunto dedicará Arquímedes todo un libro: _Sobre la Medida del Círculo_, donde obtiene una magnífica acotación del número π, que amplía los resultados de Euclides.



Euclide immaginato. J. van Ghent (siglo XV).

Arquímedes geómetra con vestimenta oriental.
Colección Municipal de la imprenta Bertarelli de Milán.

LOS MANUSCRITOS DE LAS OBRAS DE ARQUÍMEDES



1. **Página de la traducción al latín, de W. de Moerbeke de las *Obras* de Arquímedes con *comentarios* de Eutocius (en un manuscrito de 1269 de la colección vaticana, *Ottob. lat. 1850 fol. 37 recto math05 NS.52*), que muestra la solución al problema clásico de la *duplicación del cubo* en una parte del *Comentario* de Eutocius a la obra de Arquímedes *Sobre la Esfera y el Cilindro.***

2. **Página de la traducción al latín (hacia 1458) de J. de Cremona de las *Obras* de Arquímedes con *comentarios* de Eutocius –que fue un encargo de papa Nicolás V– (en un manuscrito de la colección vaticana, *Urb. lat. 261 fol. 44 verso - 45 recto math02 NS.17*), que muestra el comienzo del tratado *Sobre Conoides y Esferoides*.**

Hasta el hallazgo de J.L.Heiberg, en 1906, del palimpsesto que contenía *EL MÉTODO*, la fuente primigenia de las Obras de Arquímedes era un manuscrito griego de Constantinopla del siglo IX que llegó a Europa Occidental a través de la corte normanda de Palermo y fue utilizado para las traducciones de W. de Moerbeke y de J. de Cremona. Esta última versión fue revisada por Regiomontano en 1468 y se convirtió en la versión estándar hasta que fue finalmente impresa en Basilea, en 1544. En España se conservan al menos dos ejemplares de esta *edición princeps*, una en la Biblioteca del Monasterio de El Escorial y otra en la Universidad de Valladolid.

Los escritos de Arquímedes son densas memorias científicas en las que se asumen, sin mencionarlos explícitamente, todos los resultados matemáticos concebidos anteriormente. Todos los escritos de Arquímedes son originales que transcienden considerablemente la Matemática anterior y tienen la estructura euclídea de empezar postulando las hipótesis, a las que siguen las proposiciones impecablemente demostradas, con una ocultación –salvo precisamente en *EL MÉTODO*–, que parece deliberada, del proceso inventivo.

Arquímedes afrontaba y resolvía problemas que iban más allá de la Geometría tradicional, y lo hacía sin el rigor suntuoso de sus colegas alejandrinos, aplicando a las cuestiones geométricas razonamientos análogos a los empleados en las cuestiones mecánicas. En los contenidos trascendió de forma considerable *Los Elementos* de Euclides. Así, por ejemplo, consiguió obtener la primera cuadratura de la parábola, comunicando a los científicos de Alejandría el procedimiento mecánico del que se sirvió para descubrir el resultado, así como la demostración rigurosa, en su tratado *Sobre la Cuadratura de la Parábola*, en cuyo preámbulo dirigido a Dositeo, Arquímedes escribe:

> «[...] *Pero ninguno de mis predecesores, que yo sepa, ha buscado la cuadratura del segmento comprendido por una recta y una sección de cono rectángulo, problema cuya solución he encontrado* [...].»

Efectivamente, la cuadratura de la parábola es el primer ejemplo histórico de la obtención de un área limitada por curvas y rectas.

Análogamente Arquímedes tiene conciencia de la originalidad e importancia de los resultados sobre la esfera, el cilindro y el cono, en donde no sólo considera los volúmenes de estas figuras, sino que va más allá del Libro XII de *Los Elementos* de Euclides, al estudiar también las superficies, llegando a obtener la cuadratura de la esfera. En el preámbulo de su obra *Sobre la Esfera y el Cilindro*, Arquímedes dice:

> «[...] *Aunque estas propiedades eran inherentes a las figuras a que acabo de referirme* [la esfera y el cilindro], *no habían sido conocidas por quienes me han precedido en el estudio de la Geometría* [...].»

En *Sobre el Equilibrio de los Planos* Arquímedes estudia las leyes del equilibrio de la palanca. Esta obra de Matemática aplicada, construida con el rigor habitual, nos permite asegurar que desde un principio Arquímedes se inhibió de los escrúpulos del idealismo y el purismo platónicos, que censuraba toda aplicación práctica a la Matemática. Arquímedes, al contrario, quiebra los esquemas ideológicos vigentes del euclidianismo platónico que ligan la ciencia exacta con la reflexión abstracta y trasciende los límites de la teoría pura al vincular estrechamente la investigación teórica con sus aplicaciones prácticas

Asimismo, en su tratado *Sobre la Medida del Círculo,* Arquímedes va mucho más allá de la Geometría de Euclides, ya que no sólo trata el área del círculo que Euclides –en la Proposición XII.2 de *Los Elementos*– había establecido –con base en Eudoxo– que era proporcional al cuadrado del diámetro, sino que al considerar la circunferencia obtiene un valor aproximado del número π.

También en *Sobre las Espirales* Arquímedes inventa, construye y estudia una nueva curva, la espiral, que todavía lleva su nombre, resolviendo entre otros el problema de cuadrar la porción limitada por las espiras de la curva.

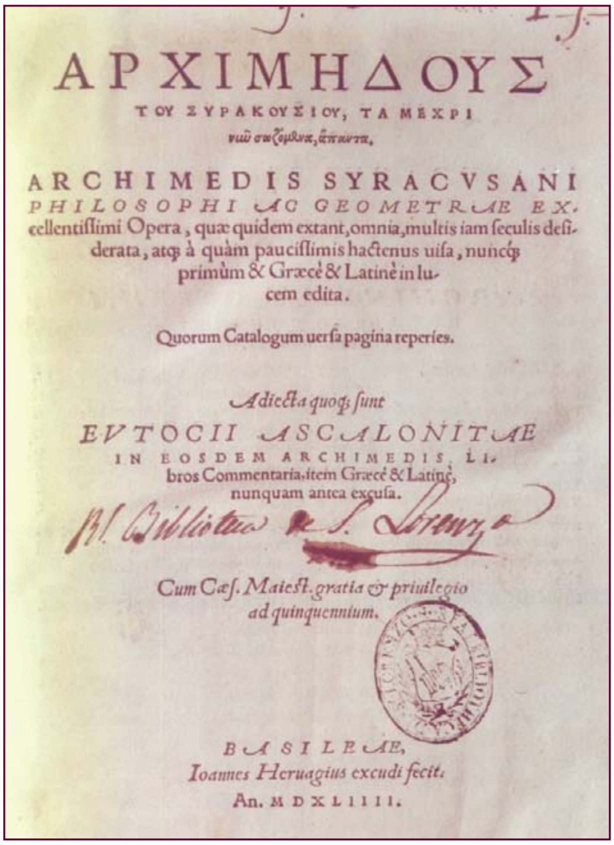
Finalmente en *Sobre Conoides y Esferoides*, Arquímedes estudia sólidos de revolución, de los que nadie se había ocupado con anterioridad.

Exceptuando ciertas obras menores (*El Stomachion*, *El Libro de los Lemas* y *El Problema de los bueyes*), en los restantes tratados Arquímedes demuestra importantes resultados sobre la determinación de áreas, volúmenes y centros de gravedad, que actualmente se obtienen con el Cálculo Integral. En el siguiente cuadro se describen muy sucintamente el contenido de las obras de Arquímedes sobre cuestiones infinitesimales:

LAS PRINCIPALES OBRAS DE ARQUÍMEDES CON SUS RESULTADOS MATEMÁTICOS MÁS IMPORTANTES SOBRE CUESTIONES INFINITESIMALES

1. ***Sobre la Esfera y el Cilindro*:**
   Resultados sobre la esfera, el cono y el cilindro, en particular la legendaria propiedad de la razón de 2 a 3 entre la esfera y el cilindro circunscrito, tanto en superficie total como en volumen.
2. ***Sobre la Medida del Círculo*:**
   Resultados sobre la equivalencia entre el círculo y el triángulo de base la circunferencia del círculo y altura el radio (es decir, reducción de la cuadratura del círculo a la rectificación de la circunferencia), y cálculo aproximado de la razón entre la circunferencia y el diámetro (valor aproximado del número π).
3. ***Sobre Conoides y Esferoides*:**
   Resultados sobre la razón entre segmentos de elipsoides, paraboloides e hiperboloides de revolución y los conos de igual base y eje.
4. ***Sobre las Espirales*:**
   Resultados sobre el área encerrada por las espiras de «*La Espiral de Arquímedes*» y rectificación de un arco de la circunferencia mediante esta curva.
5. ***Sobre el Equilibrio de los Planos*:**
   Resultados sobre el centro de gravedad de figuras poligonales, del segmento de parábola y del trapecio parabólico. Aunque es un tratado de Estática, formalmente sigue la línea euclídea con definiciones, postulados y demostraciones en los que además de conceptos geométricos se utilizan el peso y el centro de gravedad de figuras. En este escrito Arquímedes formula la famosa «*Ley de la palanca*».
6. ***Sobre la Cuadratura de la Parábola*:**
   Resultados sobre la cuadratura de un segmento de parábola, primero mediante recursos de estática extraídos de Sobre el Equilibrio de los Planos y después mediante consideraciones geométricas.
7. ***Sobre los Cuerpos Flotantes*:**
   Resultados sobre la posición de equilibrio de un segmento de paraboloide de revolución parcialmente sumergido en un fluido. En este tratado, elaborado también a la manera euclídea, aparece el famoso «*Principio de Arquímedes*» de la Hidrostática.
8. ***El Método sobre los teoremas mecánicos:***
   Arquímedes pone de manifiesto el procedimiento heurístico seguido en el descubrimiento de los resultados matemáticos.

ALGUNAS PÁGINAS DE OBRAS DE ARQUÍMEDES EN *ARQUÍMEDES OPERA OMNIA* (BASILEA, 1544).


ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ
ΤΟΥ ΣΥΡΑΚΟΥΣΙΟΥ, ΤΑ ΜΕΧΡΙ
νῦν σωζόμενα, ἅπαντα.

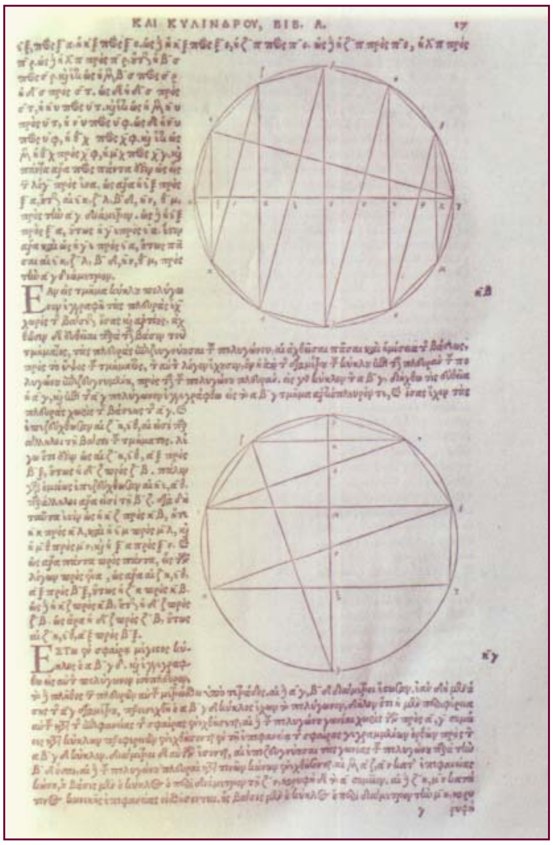
ARCHIMEDIS SYRACVSANI PHILOSOPHI AC GEOMETRAE EXcellentissimi Opera, quæ quidem extant, omnia, multis iam seculis desiderata, atque à quàm paucissimis hactenus uisa, nuncque primùm & Græcè & Latinè in lucem edita.

Quorum Catalogum uersa pagina reperies.

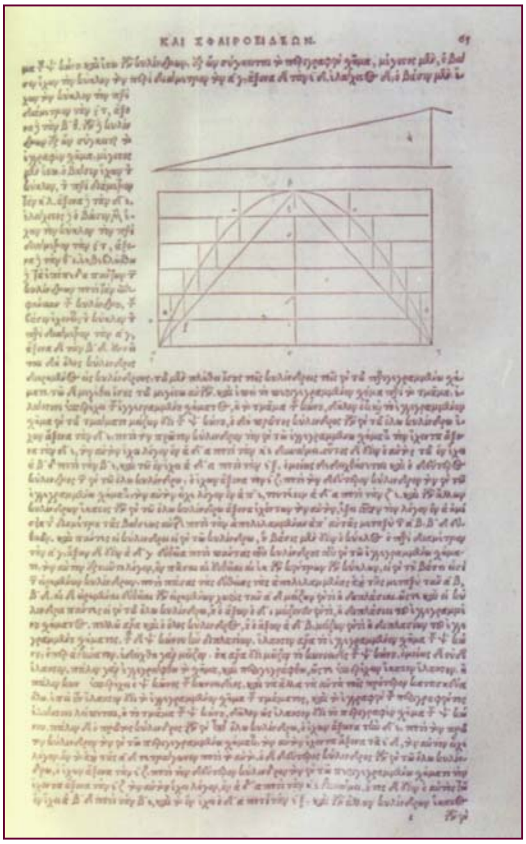
Adiecta quoque sunt EVTOCII ASCALONITAE IN EOSDEM ARCHIMEDIS Libros Commentaria, item Græcè & Latinè, nunquam antea excusa.

Cum Cæs. Maiest. gratia & priuilegio ad quinquennium.

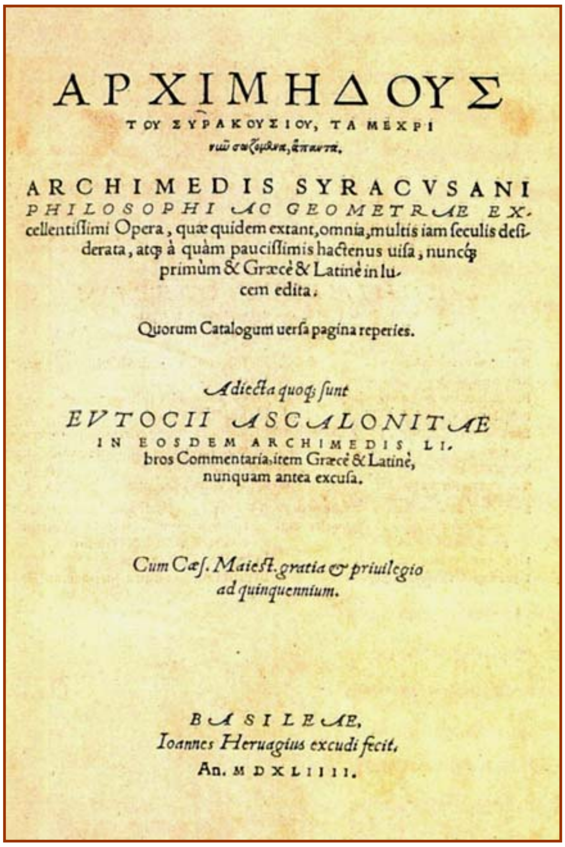
BASILEAE, Ioannes Heruagius excudi fecit. An. MDXLIIII.



1. Portada de *Archimedis Opera Omnia*, Basilea, 1544. Ejemplar de la Biblioteca del Monasterio de El Escorial. Esta edición forma parte de la *Edición Princeps* de las Obras de Arquímedes.
2. Página de *Sobre la Medida del Círculo.*
3. Página de *Sobre las Espirales.*
4. Página de *Sobre la Cuadratura de la Parábola.*



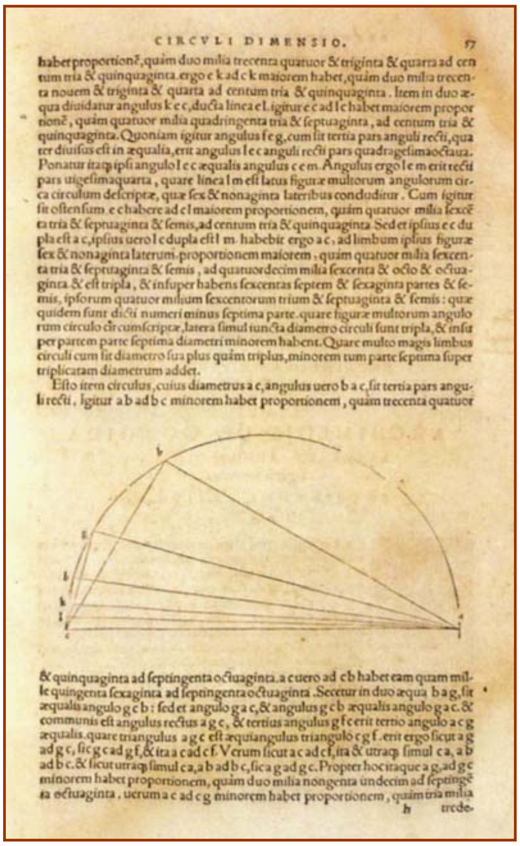
ALGUNAS PÁGINAS DE OBRAS DE ARQUÍMEDES EN *ARQUÍMEDES OPERA OMNIA* (BASILEA, 1544).



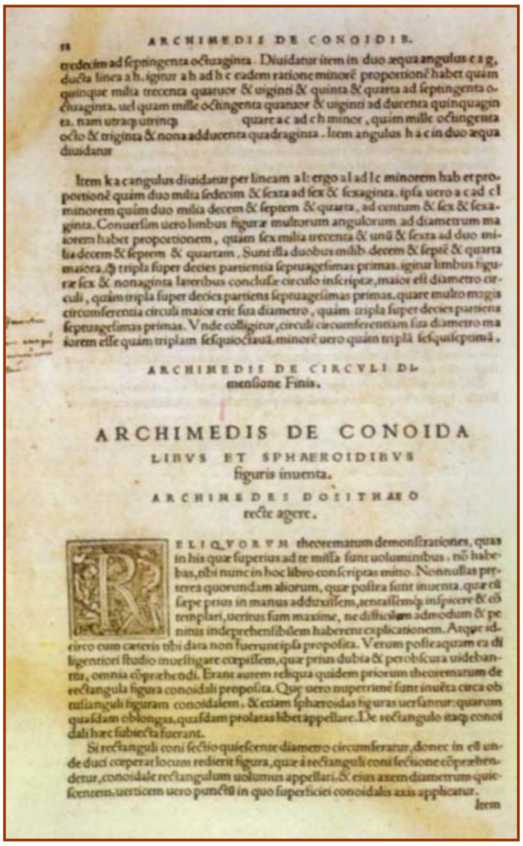
ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ
ΤΟΥ ΣΥΡΑΚΟΥΣΙΟΥ, ΤΑ ΜΕΧΡΙ
νῦν σωζόμενα, ἅπαντα.
ARCHIMEDIS SYRACVSANI
PHILOSOPHI AC GEOMETRAE EXcellentissimi Opera, quæ quidem extant, omnia, multis iam seculis desiderata, atque à quàm paucissimis hactenus uisa, nuncque primùm & Græcè & Latinè in lucem edita.
Quorum Catalogum uersa pagina reperies.
Adiecta quoque sunt
EVTOCII ASCALONITAE
IN EOSDEM ARCHIMEDIS LIbros Commentaria, item Græcè & Latinè, nunquam antea excusa.
Cum Cæs. Maiest. gratia & priuilegio ad quinquennium.
BASILEAE,
Ioannes Heruagius excudi fecit.
An. M D X L I I I I.

DE AEQVEPONDERANTIBVS LIB. I.
ARCHIMEDIS PLANORVM AEQVEPONDERANTIVM INVENTA, VEL CENtra grauitatis planorum.

1. Portada de *Archimedis Opera Omnia*, Basilea, 1544. Ejemplar de la Universidad de Valladolid.
2. Página de *Sobre el Equilibrio de los Planos.*
3. Página de *Sobre la Medida del Círculo.*
4. Página de *Sobre Conoides y Esferoides*



CIRCVLI DIMENSIO.



ARCHIMEDIS DE CONOIDIB.
ARCHIMEDIS DE CIRCVLI DImensione Finis.
ARCHIMEDIS DE CONOIDALIBVS ET SPHAEROIDIBVS figuris inuenta.
ARCHIMEDES DOSITHAEO recte agere.

Arquímedes demuestra los resultados matemáticos relacionados anteriormente mediante el método de exhaución de Eudoxo que confiere un rigor lógico impecable al argumento matemático pero tiene ciertas servidumbres. En primer lugar suele resultar bastante engorroso el establecimiento de las desigualdades básicas que se necesitan para iniciar una doble reducción al absurdo, lo que hace onerosa la lectura de las obras de Arquímedes, pero lo más grave es que este método obliga a conocer previamente el resultado a demostrar, es decir carece de valor heurístico, no sirve para encontrar nuevas verdades sino sólo para demostrar aquellas de las cuales ya se tiene un conocimiento previo. El método de exhaución es pues un método de demostración y no de descubrimiento, precisando ser complementado *a priori* con otro método, ya sea analítico o mecánico, para descubrir los resultados.

Siendo esto así, surge de forma natural la pregunta acerca de cómo conocía y obtenía Arquímedes los magníficos resultados que luego demostraba con un rigor absoluto, porque en ninguna de las obras citadas en el apartado anterior Arquímedes sugiere lo más mínimo al respecto. Cabe decir que en los casos sencillos, Arquímedes puede haber llegado intuitivamente a los resultados por vía inductiva. Por ejemplo, relacionando un polígono con el cuadrado construido sobre el diámetro de su círculo circunscrito, sabiendo que las áreas de dos polígonos regulares de igual número de lados están en razón como los cuadrados correspondientes aludidos (*Euclides*, XII.1), razonando inductivamente resulta plausible que la misma razón se mantenga para los propios círculos (*Euclides*, XII.2). Así se aventuraría un resultado –ya conocido por Hipócrates de Quíos–, que el método de exhaución –aplicado por Eudoxo– confirmaría plenamente *a posteriori*.

Pero el alcance de la intuición tiene sus límites:

- ¿Cómo se puede intuir que «*la superficie de la esfera es cuatro veces un círculo máximo*»?
- ¿Cómo se puede inducir que «*el área de la primera vuelta de la espiral es un tercio del primer círculo*»?
- ¿Cómo se puede augurar que «*el área de un segmento parabólico es cuatro tercios del área del triángulo inscrito de la misma base y altura sobre el eje*»?
- ¿Cómo se puede vaticinar que «*el volumen del segmento de paraboloide de revolución es tres medios el del cono de igual base y altura*»?

Ante estos sorprendentes descubrimientos, no es extraño que muchos matemáticos creyeran que Arquímedes disponía de un método milagroso que aplicaba en sus investigaciones.

Cuando en el Renacimiento y siglos posteriores tiene lugar la recuperación, reconstrucción y divulgación del legado clásico griego y en particular se difunde un entusiasta interés por las obras de Arquímedes, todos los estudiosos, impresionados por estos trabajos, se formulan las anteriores preguntas, sintetizadas en la formulación de la siguiente:

¿Cómo había alcanzado Arquímedes sus impresionantes resultados sobre cuadraturas y cubaturas, que luego demostraba rigurosamente mediante el método de exhaución?

Como bien señaló Galileo, en la práctica de la investigación científica y en particular en la investigación matemática siempre existe un dualismo metódico, dos momentos distintos y consecutivos en el proceder, la fase de la invención, intuitiva, no rigurosa y cargada de hipótesis, sugerencias, analogías, argumentos plausibles y razonamientos informales, es el «*ars inveniendi*» o vía del descubrimiento; y la fase apodíctica, donde se impone el rigor, el «*ars disserendi*» o vía de la demostración. De ambas vías que son complementarias en la investigación científica, ¿dónde está en Arquímedes el primer camino?

Ignorada por todos la forma en que Arquímedes había alcanzado sus descubrimientos, muchos matemáticos albergaron la sospecha de que Arquímedes disponía de un método que aplicaba en sus investigaciones, una vía de descubrimiento que no surge ante el lector de sus obras y que parece haber ocultado premeditadamente para la posteridad, «*por audacia perniciosa*», como diría Descartes en la *Regla* IV de sus *Reglas para la dirección del Espíritu*.

Así por ejemplo Torricelli manifiesta en el Proemio de su *Opera Geometrica* (Florencia, 1644):

> «*Los geómetras antiguos empleaban en sus demostraciones un método diferente al seguido en la fase inventiva y procedían así, entre otras razones, para ocultar el secreto del arte*.»

También Wallis, que tuvo a su cuidado una edición de las Obras de Arquímedes, publicada en Oxford en 1676, escribía:

> «*Al parecer Arquímedes ocultó adrede las huellas de su investigación, como si hubiera sepultado para la posteridad el secreto de su método de investigación*.»

Asimismo, Barrow, que se encargó también de una edición en latín de las Obras de Arquímedes, que se publicó en Londres en 1675, se manifestaba en estos términos:

> «*Al no poder imaginar qué ingenio mortal pueda llegar a tanto mediante la virtud del razonamiento, estoy seguro que Arquímedes se vio ayudado por el Álgebra, a la que conocía en secreto y que ocultaba de forma estudiada*.»

Efectivamente Arquímedes poseía un método de investigación, que plasmó en su obra *EL MÉTODO*, en la que mediante procedimientos reconocidos por él mismo como no rigurosos, descubría sus famosos teoremas matemáticos. Pero fueron, como veremos, los avatares históricos y no su voluntad, quien lo dejó oculto para la posteridad. En palabras de E. Rufini (en *Il Metodo d'Archimede e le origine dell'analisi infinitesimale nell'antichità*, Feltrinelli, 1926, p.91):

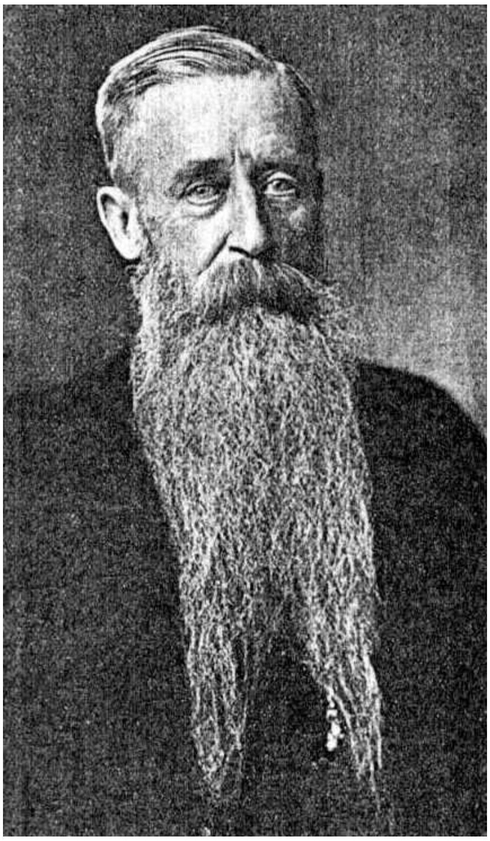
> «[....] *La obra escasamente estudiada y quizá poco comprendida por los propios griegos, cayó fatalmente en un completo olvido*.»

EL MÉTODO es una obra singular de Arquímedes, porque en ella se decide a revelar a la comunidad matemática alejandrina, en carta dirigida a Eratóstenes, la vía de investigación de cuestiones matemáticas por medio de la mecánica, un método que Arquímedes utilizaba en sus descubrimientos y que había omitido en todos los restantes escritos científicos. La combinación de Geometría y Estática que Arquímedes había hecho en *Sobre el Equilibrio de los Planos* y en *Sobre los Cuerpos Flotantes* para establecer rigurosamente ciertas propiedades relacionadas con el equilibrio de ciertos cuerpos geométricos, la realiza de nuevo en *EL MÉTODO* para descubrir e investigar resultados, que, obtenidos de forma mecánico-geométrica, demostrará de forma rigurosa en sus tratados científicos.

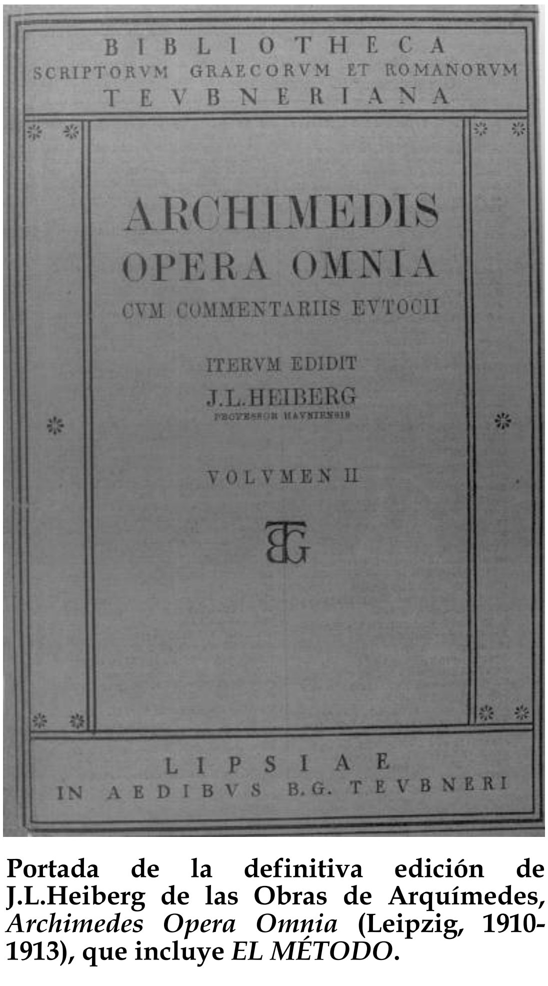
EL MÉTODO de Arquímedes es un magnífico informe científico sobre un método de investigación y de argumentación plausible en Geometría, ilustrado con algunos ejemplos, unos conocidos y otros nuevos, donde Arquímedes da muestras de una pericia y de una imaginación teórica inefables, así como de una intuición que se mueve con un increíble instintivo olfato matemático. En realidad *EL MÉTODO* es una memoria científica muy elaborada, bastante singular por su carácter metodológico dentro del conjunto de los grandes tratados de la Geometría griega, pero es fácil tomarlo por un escrito más de Arquímedes, estructurado con el mismo rigor. Claro está que el propio Arquímedes lo desmiente cuando manifiesta a Eratóstenes en el preámbulo de *EL MÉTODO*:

> «[...] *He creído oportuno exponerte por escrito y desarrollar en este mismo libro las particularidades de un método, por medio del cual te será posible iniciar la investigación de ciertas cuestiones matemáticas por medio de la mecánica. Estoy convencido, además, de que dicho método no será menos útil para demostrar los propios teoremas. Pues algunos de los que primero se me hicieron patentes mecánicamente, recibieron luego demostración geométricamente, habida cuenta de que la investigación hecha por este método no comporta demostración* [...].»

LA RECONSTRUCCIÓN DEL *MÉTODO* DE ARQUÍMEDES POR HEIBERG



1. **Imagen venerable de Johan Ludving Heiberg (1854-1928).**
2. **Página 41[r] del palimpsesto encontrado por Heiberg con la obra *EL MÉTODO,* donde Arquímedes describe la vía heurística de sus magníficos descubrimientos matemáticos.**



BIBLIOTHECA
SCRIPTORVM GRAECORVM ET ROMANORVM
TEVBNERIANA

ARCHIMEDIS
OPERA OMNIA
CVM COMMENTARIIS EVTOCII

ITERVM EDIDIT
J.L.HEIBERG
PROFESSOR HAVNIENSIS

VOLVMEN II

LIPSIAE
IN AEDIBVS B.G. TEVBNERI

Portada de la definitiva edición de J.L.Heiberg de las Obras de Arquímedes, *Archimedes Opera Omnia* (Leipzig, 1910-1913), que incluye *EL MÉTODO*.

El gran helenista e historiador de la Matemática J.L Heiberg exhumó, en circunstancias casi novelescas, en 1906, de un palimpsesto medieval conservado en la biblioteca del Priorato del Phanar del Patriarcado griego del Santo Sepulcro de Jerusalén, en Constantinopla, la obra de Arquímedes *EL MÉTODO,* reproduciendo en el artículo *Eine neue Archimedeshandschrift* (en la revista *Hermes*, vol.XLII, Berlín, 1907) el folio 41[r].

El documento era un eucologio de los siglos XII al XIV con textos litúrgicos escritos en un manuscrito que contenía fragmentos de Obras de Arquímedes. Por fortuna, el amanuense no raspó la escritura original sino que se limitó a lavarla escribiendo después encima.

Tras una titánica labor de arqueología matemática, J.L.Heiberg consiguió transcribir, letra a letra, el contenido del texto arquimediano, situado en la escritura inferior, reconstruir figuras semiborradas y restablecer el orden secuencial de las hojas que había sido muy alterado.

El contenido del palimpsesto que fue utilizado por J.L.Heiberg para la edición de sus *Archimedis Opera Omnia*, de 1910-1913, es considerado por los historiadores de la Matemática Zeuthen, Reinach, E.Rufini, Ver Eecke, Vera y Babini como el descubrimiento más importante de los tiempos modernos para el conocimiento de la Historia de la Geometría griega en general y del genio de Arquímedes en particular.

Es decir, *EL MÉTODO*, al utilizar consideraciones mecánicas, desarrolla sugerencias que descubren resultados por analogía que ilustran el arte de la invención con una argumentación científica informal que establece una pauta de discurso matemático dirigida a mostrar el carácter plausible de unas conclusiones que serán enseguida convalidadas en la forma demostrativa vigente, es decir, mediante el método de exhaución. Pero no sólo esto, porque la propia confirmación del resultado mediante rigurosa demostración se ve también favorecida por la forma de descubrirlo, ya que como señala también Arquímedes:

> «[...] *pues es más fácil, después de haber adquirido por ese método cierto conocimiento de las cuestiones objeto de investigación, dar luego la demostración, que investigar sin ningún conocimiento previo*.»

Los resultados que Arquímedes obtiene en *EL MÉTODO* y que desarrolla en forma de proposiciones son los siguientes :

1. Determinación por el método mecánico de la cuadratura del segmento parabólico, obteniendo que el área del mismo es cuatro tercios del triángulo de igual base y altura.
2. Determinación por el método mecánico de la equivalencia de la esfera con el cuádruple del cono (resp. con los dos tercios del cilindro) de base el círculo máximo de la esfera y de altura el radio (resp. el diámetro), de donde felizmente intuye que la superficie de la esfera equivale a cuatro de sus círculos máximos, ya que, como todo círculo equivale al triángulo cuya base es igual a la circunferencia y la altura es igual al radio, se debe suponer que toda esfera equivale a un cono cuya base es equivalente a la superficie de la esfera y cuya altura es igual al radio.
3. Determinación por el método mecánico de análogas equivalencias que en la Proposición, entre un elipsoide de revolución, un cono y un cilindro.
4. Determinación por el método mecánico de la equivalencia entre un segmento de paraboloide de revolución, de base perpendicular al eje, y los tres medios del cono de igual base y eje que el segmento.
5. Determinación por el método mecánico del centro de gravedad de un segmento de paraboloide de revolución.
6. Determinación por el método mecánico del centro de gravedad de un hemisferio.
7. Determinación por el método mecánico de la razón entre un segmento esférico y el cono de igual base y altura.
8. Determinación por el método mecánico de la razón entre un segmento de elipsoide de revolución y el cono de igual base y altura.
9. Determinación por el método mecánico del centro de gravedad de un segmento esférico.
10. Determinación por el método mecánico del centro de gravedad de un segmento de elipsoide de revolución.
11. Determinación por el método mecánico del volumen y centro de gravedad de un segmento de hiperboloide de revolución.
12. 13. Determinación por el método mecánico de la equivalencia de la uña cilíndrica y la sexta parte de todo el prisma circunscrito al cilindro.
14. Determinación mecánico-geométrica del volumen de la uña cilíndrica.
15. Determinación geométrica (por el método de exhaución) del volumen de la uña cilíndrica.
16. Determinación mecánica de la equivalencia de la bóveda cilíndrica y los dos tercios del cubo correspondiente.

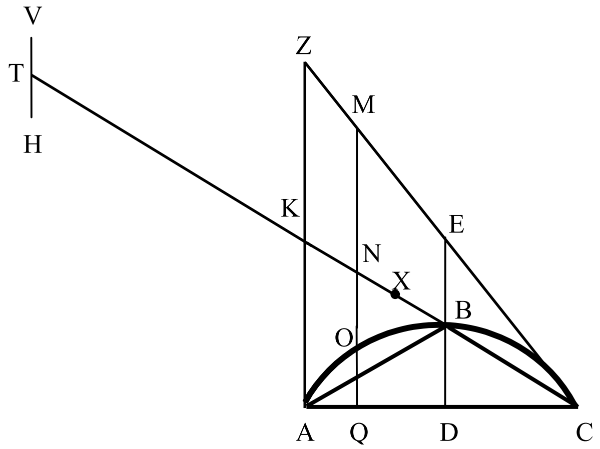
De las 16 proposiciones de *EL MÉTODO* veremos, a continuación, las dos primeras– la cuadratura del segmento parabólico y la cubatura de la esfera– que, además, son las más significativas.

El *método mecánico* de Arquímedes

PROPOSICIÓN I: La Cuadratura del segmento parabólico

Sea ABC un segmento parabólico comprendido entre la recta AC y la sección ABC de un cono rectángulo (parábola); divídase AC por la mitad en D y trácese la recta DBE paralela al diámetro de la parábola, y uniendo B con A y B con C, trácense las rectas AB y BC. El segmento parabólico ABC es cuatro tercios del triángulo ABC.

Trácense por los puntos A y C la recta AZ paralela a DBE y la CZ tangente al segmento parabólico en C; prolónguese CB hasta T y sea KT igual a CK. Considérese CT como una palanca, siendo K su punto medio, y sea MQ una recta paralela a ED.



Puesto que CBA es una parábola y que CZ es tangente a ella «*la subtangente relativa a un punto de la parábola es doble de la abcisa de este punto*», es decir EB es igual a BD.

De la semejanza de los triángulos ZKC, MNC y EBC, así como KAC, NQC Y BDC se deduce [*Euclides VI.4*] las igualdades de segmentos:

MN = NQ y ZK = KA al ser EB=BD.

Aplicando una relación conocida que Arquímedes había demostrado en la Proposición V de *Sobre la Cuadratura de la Parábola* resulta que CA/AQ =MQ/QO, y siendo semejantes los triángulos ACK y QCN se tiene: CA/AQ = CK/ KN, pero al ser iguales los segmentos CK y TK, resulta la igualdad de razones TK/KN = MQ/QO, relación geométrica básica para aplicar el método mecánico de la palanca.

En efecto, puesto que el punto N es el centro de gravedad de la recta MQ, por ser MN igual que NQ, si tomamos la recta VH igual a QO de manera que su centro de gravedad sea el punto T, es decir, de modo que sea VT igual que TH, la recta VTH estará en equilibrio con la recta MQ «*que permanece en su lugar»*, por estar TN dividida por el punto K en partes que están en razón inversa a los pesos VH y MQ [*Sobre el Equilibrio de los Planos* I.6], y por lo tanto K es el centro de gravedad del conjunto de ambos pesos.

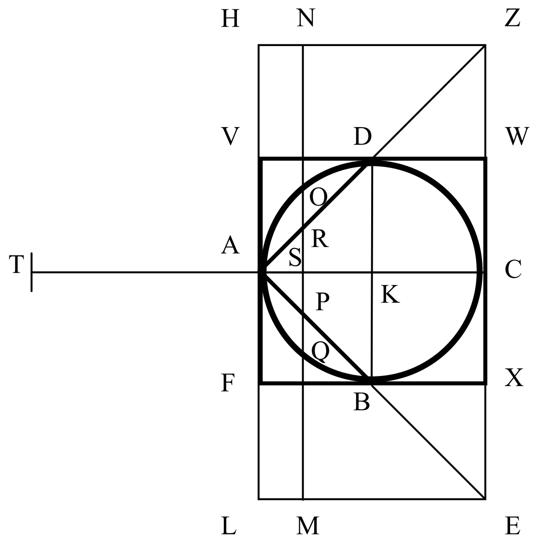
Análogamente si en el triángulo AZC se trazan tantas paralelas como se quiera a ED, éstas, «*permaneciendo en su lugar*», estarán en equilibrio con los segmentos determinados sobre ellas por segmento parabólico y trasladados al punto T, de manera que el centro de gravedad de unas y otros será K.

Ahora bien, las rectas trazadas en el triángulo AZC «*componen*» el propio triángulo y los segmentos rectilíneos obtenidos en segmento parabólico del mismo modo que OQ «*componen*» el segmento parabólico ABC; por lo tanto el triángulo AZC, «*permaneciendo en su lugar*», estará en equilibrio, respecto del punto K, con el segmento parabólico trasladado hasta tener su centro de gravedad en T, de manera que el centro de gravedad del conjunto de ambos será el punto K.

Divídase ahora CK por el punto X de manera que sea CK sea el triple de KX, el punto X será entonces el centro de gravedad del triángulo AZC [*Sobre el Equilibrio de los Planos* I.14], y puesto que el triángulo AZC, «*permaneciendo en su lugar»* está en equilibrio, respecto del punto K, con el segmento parabólico ABC, trasladado con centro de gravedad en T, y que X es el centro de gravedad del triángulo AZC, se verifica, por consiguiente, que la razón del triángulo AZC al segmento parabólico ABC colocado alrededor del centro T es igual a la razón de TK a KX. Ahora bien, siendo TK triple de KX, el triángulo AZC será triple del segmento parabólico ABC. Además, el triángulo AZC es cuádruple del triángulo ABC, ya que ZK es igual que KA y KA es doble de BD al ser AD igual que DC, luego el segmento parabólico ABC equivale a cuatro tercios del triángulo ABC.

PROPOSICIÓN II: La Cubatura de la Esfera

Toda esfera es cuádruple del cono cuya base sea igual al círculo máximo de la esfera y cuya altura sea igual al radio de la esfera; a su vez el cilindro cuya base sea igual al círculo máximo de la esfera y cuya altura sea igual al diámetro de la esfera, es igual a vez y media la esfera.



Sea una esfera cuyo círculo máximo sea ABCD, siendo AC y BD dos diámetros perpendiculares. Sea también en la esfera un círculo de diámetro BD, perpendicular al círculo ABCD; y a partir de ese círculo constrúyase un cono que tenga por vértice el punto A. Prolongada la superficie del cono, córtese éste por un plano que pase por C y sea paralelo a la base, que dará un círculo perpendicular a AC, cuyo diámetro será la recta EZ. Constrúyase después a partir de este círculo un cilindro de eje igual a AC y sean EL y ZH generatrices del mismo. Prolónguese CA y tómese en su prolongación una recta AT igual a ella, y considérese CT como una palanca cuyo punto medio sea A. Trácese una paralela cualquiera MN a BD, que corte al círculo ABCD en Q y O, al diámetro AC en S, a la recta AE en P y a la recta AZ en R. Levántese sobre la recta MN un plano perpendicular a AC, que cortará al cilindro según el círculo de diámetro MN, a la esfera ABCD según el círculo de diámetro QO y al cono AEZ según el círculo de diámetro PR.

De la geometría de la figura Arquímedes va obteniendo:
$AQ^2 = AC \cdot AS$ [*Euclides* III.31], $AQ^2 = QS^2 + SP^2$ [*Euclides*, I.47].
$MS \cdot SP = AC \cdot AS = AQ^2 = QS^2 + SP^2$. $AT/AS = MS/SP = MS^2/ MS \cdot SP = MS^2/(QS^2 + SP^2)$.
Sean ahora c(MN), c(QO), c(PR) los círculos de diámetro MN, QO, PR, respectivamente.

$$\frac{AT}{AS} = \frac{MS^2}{QS^2 + SP^2} = \frac{MN^2}{QO^2 + PR^2} = \frac{c\ (MN)}{c\ (QO) + c(PR)}$$ [*Euclides*, XII.2] ,

relación geométrica básica para emprender el método mecánico de la palanca: el círculo c(MN) del cilindro, «*permaneciendo en su lugar*» estará en equilibrio respecto del punto A (fulcro de la palanca) con los círculos c(QO), c(PR) trasladados y colocados sobre el punto T, de tal manera que el centro de gravedad de cada uno de ellos sea T.

Realizando el mismo proceso para todas las paralelas MN a EZ y los círculos que se obtienen sobre la esfera, el cilindro y el cono, resulta que «*llenados*» con tales círculos el cilindro, la esfera y el cono, el cilindro, «*permaneciendo en su lugar*», estará en equilibrio, respecto del punto A, con la esfera y el cono juntos, trasladados y colocados sobre la palanca en el punto T, de manera que el centro de gravedad de cada uno de ellos sea T. De aquí aplicando la Ley de la Palanca [*Sobre el Equilibrio de los Planos* I.6 y I.7] resulta que: «*la razón del cilindro a la esfera y el cono juntos, será la misma que la razón de* AT *a* AK».

Desarrollando simbólicamente los cálculos que Arquímedes describe retóricamente, sean:
e = esfera ABCD.
c = cilindro de diámetro EZ y generatrices EL, ZH.
d = cilindro de diámetro BD y generatrices XF, WV.
a = cono cuya sección es el triángulo AEZ.
b = cono cuya sección es el triángulo ABD.

Aplicando el método mecánico Arquímedes muestra que $c = 2(e+a)$.

Pero como según *Euclides* XII.10 se verifica que $d=3b$ y $c = 3a$, se tiene: $a = 2e$.

Ahora de *Euclides* XII.12 resulta: $a = 8b$ y de *Euclides* XII.14 se obtiene: $c = 2d$.

Combinando los resultados se obtiene finalmente: $e = 4b$, $d=(3/2)\ e$.

LA CUADRATURA DE UN SEGMENTO PARABÓLICO Y LA CUBATURA DE LA ESFERA EN *ARCHIMEDIS OPERA OMNIA* DE J.L. HEIBERG.

434 ΠΡΟΣ ΕΡΑΤΟΣΘΕΝΗΝ ΕΦΟΔΟΣ.

τοῦ ἄξονος διαιρεθέντος | οὕτως, ὥστε τὸ πρὸς τῇ κορυφῇ τμῆ|μα τριπλάσιον εἶναι τοῦ λοιποῦ.

Χρη|σόμεθα δὲ καὶ [ἐν τῷ προγεγραμ|μένῳ Κωνοειδῶν] τῷδε τῷ θεωρή|ματι· Ἐὰν ὁποσαοῦν μεγέθη ἄλ|λοις μεγέθεσιν ἴσοις τὸ πλῆθος | κατὰ δύο τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον τὰ ὁ|μοίως τεταγμένα, ᾖ δὲ τὰ πρῶτα | 57r col. 1 μεγέθη πρὸς ἄλλα μεγέθη ἐν λόγοις ὁποιοισοῦν, ἢ τὰ | πάντα ἤ τινα αὐτῶν, καὶ τὰ ὕστε|ρον μεγέθη πρὸς ἄλλα μεγέθη τὰ ὁμόλογα ἐν | τοῖς αὐτοῖς λόγοις ᾖ, πάντα τὰ | πρῶτα μεγέθη πρὸς πάντα τὰ | λεγόμενα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, | ὃν ἔχει πάντα τὰ ὕστερον πρὸς | πάντα τὰ λεγόμενα. 1)

α΄.

Ἔστω | τμῆμα τὸ ΑΒΓ περιεχόμενον | ὑπὸ εὐθείας τῆς ΑΓ καὶ ὀρθο|γωνίου κώνου τομῆς τῆς ΑΒΓ, | καὶ τετμήσθω δίχα ἡ ΑΓ τῷ Δ, | καὶ παρὰ τὴν διάμετρον ἤχθω ἡ | ΔΒΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, | ΒΓ.

λέγω, ὅτι ἐπίτριτόν ἐστιν τὸ ΑΒΓ | τμῆμα τοῦ ΑΒΓ τριγώνου.

ἤχθω|σαν ἀπὸ τῶν Α, Γ σημείων ἡ μὲν | ΑΖ παρὰ τὴν ΔΒΕ, ἡ δὲ ΓΖ ἐπιψαύ|ουσα τῆς τομῆς, καὶ ἐκ- 64r col. 1 βεβλήσ|⟨θω ἡ ΓΒ ἐπὶ τὸ Κ, καὶ κείσθω τῇ ΓΚ | ἴση ἡ ΚΘ⟩. νοείσθω ζυγὸς ὁ ΓΘ καὶ | μέσον αὐτοῦ τὸ Κ καὶ τῇ ΕΔ πα|ράλληλος τυχοῦσα ἡ ΜΞ.

α΄] Hero, Metr. p. 80, 17 sqq. (ἐν τῷ Ἐφοδικῷ); 84, 11 sqq.

3 ἐν — Κωνοειδῶν] deleo. 4 τῷ] om. 5 ἴσοις] ἴσα. 7 πρὸς ἄλλα μεγέθη] om. λόγοις] τόποις. 9 ἄλλα μεγέθη] om. 13 α΄] om.

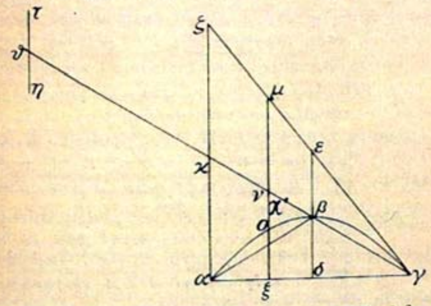
1) Demonstratur De conoid. et sphaeroid. 1. sed uerba lin. 3 ἐν τῷ προγεγραμμένῳ Κωνοειδῶν et forma neglegentiore et collocatione praua interpolata esse monstrantur; e margine irrepserunt.

AD ERATOSTHENEM METHODUS. 435

11. Utemur autem hac quoque propositione:[1]) si quotlibet magnitudines ad alias magnitudines numero aequales binae ad binas, quae eodem loco positae sunt, eandem rationem habent, et priores magnitudines ad alias magnitudines quaslibet rationes habent aut omnes aut aliquot earum, posteriores autem magnitudines ad alias magnitudines, quae eodem loco positae sunt, easdem rationes habent, omnes magnitudines priores ad omnes, quae cum iis in proportione sunt, eandem rationem habent, quam omnes posteriores ad omnes, quae cum iis in proportione sunt.

I.

Sit segmentum ΑΒΓ comprehensum recta ΑΓ sectioneque coni rectanguli ΑΒΓ, et ΑΓ in Δ in duas partes aequales



secetur, diametro autem parallela ducatur ΔΒΕ, et ducantur ΑΒ, ΒΓ.

Dico, segmentum ΑΒΓ tertia parte maius esse triangulo ΑΒΓ.

A punctis Α, Γ ducantur ΑΖ rectae ΔΒΕ parallela, ΓΖ autem sectionem contingens, et ΓΒ ad Κ producatur, ponaturque $ΚΘ = ΓΚ$. recta ΓΘ libra fingatur punctumque eius medium Κ, et ΜΞ recta aliqua rectae ΕΔ parallela.

28*

Los dos ejemplos más ilustrativos de la aplicación del *método mecánico* de Arquímedes al cálculo de cuadraturas y cubaturas de figuras son precisamente las dos primeras proposiciones de *EL MÉTODO*, referentes a la *cuadratura de un segmento parabólico* y a la *cubatura de la esfera*, parte de las cuales se reproducen extraídas de *Archimedis Opera Omnia* de J.L. Heiberg.

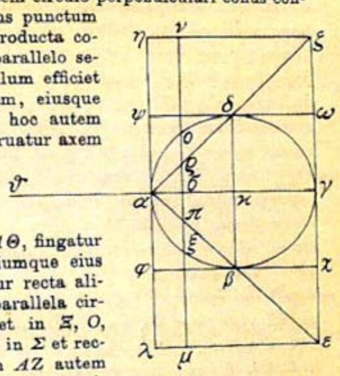
440 ΠΡΟΣ ΕΡΑΤΟΣΘΕΝΗΝ ΕΦΟΔΟΣ.

λαις οὖ|σαι, ἔστω δὲ κύκλος ἐν τῇ σφαί|ρᾳ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ ὀρθὸς | πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, καὶ ἀπὸ | τοῦ ὀρθοῦ κύκλου τούτου κῶνος ἀναγε|γράφθω κορυφὴν ἔχων τὸ Α ση|μεῖον, καὶ ἐκβληθείσης τῆς ἐπιφα|νείας αὐτοῦ τετμήσθω ὁ κῶνος ἐπι|πέδῳ διὰ τοῦ Γ παρὰ τὴν βάσιν· | ⟨ποιήσει δὴ κύκλον ὀρθὸν 71v col. 2 πρὸς⟩ | τὴν ΑΓ, καὶ διάμετρος αὐτοῦ ἡ ΕΖ. | ἀπὸ δὲ τοῦ κύκλου τούτου κύλινδρος | ἀναγεγράφθω ἄξονα ἔχων τῇ | ΑΓ ἴσον, πλευραὶ δὲ ἔστωσαν τοῦ κυλίν-|δρου αἱ ΕΔ, ΖΗ· καὶ ἐκβεβλήσθω | ἡ ΓΑ, καὶ κείσθω αὐτῇ ἴση ἡ ΑΘ, καὶ | νοείσθω ζυγὸς ὁ ΓΘ, μέσον δὲ αὐ|τοῦ τὸ Α, καὶ ἤχθω τις παράλληλος ὑ|πάρχουσα τῇ ΒΔ ἡ ΜΝ, τεμνέτω | δὲ αὕτη τὸν μὲν ΑΒΓΔ κύκλον κατὰ | τὰ Ξ, Ο, τὴν δὲ ΑΓ διάμετρον κατὰ τὸ Σ, | τὴν δὲ ΑΕ εὐθεῖαν κατὰ τὸ Π, τὴν | δὲ ΑΖ κατὰ τὸ Ρ, καὶ ἀπὸ τῆς ΜΝ | εὐθείας ἐπίπεδον ἀνεστάτω | ὀρθὸν πρὸς τὴν ΑΓ· ποιήσει δὴ τοῦ|το ἐν μὲν τῷ κυλίνδρῳ τομὴν | ⟨κύκλον, οὗ ἔσται διάμετρος ἡ 66r col. 1 ΜΝ, | ἐν δὲ τῇ ΑΒΓΔ σφαίρᾳ⟩ | κύκλον, οὗ ἔσται διάμετρος ἡ ΞΟ, ἐν | δὲ τῷ ΑΕΖ κώνῳ κύκλον, οὗ ἔσται δι|άμετρος ἡ ΠΡ.

καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶν τὸ | ὑπὸ ΓΑ, ΑΣ τῷ ὑπὸ ΜΣ, ΣΠ· ἴση γὰρ | ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΣΜ, ἡ δὲ ΑΣ τῇ ΠΣ· τῷ δὲ | ὑπὸ ΓΑ, ΑΣ ἴσον ἐστὶν τὸ ἀπὸ ΑΞ, του-|τέστιν τὰ ἀπὸ ΞΣ, ΣΠ, ἴσον ἄρα τὸ ὑ|πὸ τῶν ΜΣ, ΣΠ τοῖς ἀπὸ τῶν ΞΣ, ΣΠ. | καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως ἡ | ΜΣ πρὸς ΣΠ, ἴση δὲ ἡ ΓΑ τῇ ΑΘ, ὡς ἄρα | ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, ἡ ΜΣ πρὸς ΣΠ, τουτέστι τὸ ἀπὸ | ΜΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΣ, ΣΠ. τῷ δὲ ὑπὸ ΜΣ, | ΣΠ ἴσα ἐδείχθη τὰ ἀπὸ ΞΣ, ΣΠ· ὡς ἄρα | ἡ ΑΘ πρὸς ΑΣ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΜΣ πρὸς τὰ |

AD ERATOSTHENEM METHODUS. 441

metri autem ΑΓ, ΒΔ inter se perpendiculares, et in sphaera circulus sit circum diametrum ΒΔ ad circulum ΑΒΓΔ perpendicularis, in hoc autem circulo perpendiculari conus construatur uerticem habens punctum Α, et superficie eius producta conus per Γ plano basi parallelo secetur; hoc igitur circulum efficiet ad ΑΓ perpendicularem, eiusque diametrus erit ΕΖ. in hoc autem circulo cylindrus construatur axem habens rectae ΑΓ aequalem, lateraque cylindri sint ΕΔ, ΖΗ; et producatur ΓΑ, eique aequalis ponatur ΑΘ, fingatur autem ΓΘ libra mediumque eius punctum Α, et ducatur recta aliqua ΜΝ rectae ΒΔ parallela circulumque ΑΒΓΔ secet in Ξ, Ο, diametrum autem ΑΓ in Σ et rectam ΑΕ in Π, rectam ΑΖ autem in Ρ, et in recta ΜΝ planum erigatur ad ΑΓ perpendiculare; hoc igitur sectionem efficiet in cylindro circulum, cuius diametrus erit ΜΝ, in sphaera autem ΑΒΓΔ circulum, cuius diametrus erit ΞΟ, in cono ΑΕΖ autem circulum, cuius diametrus erit ΠΡ.



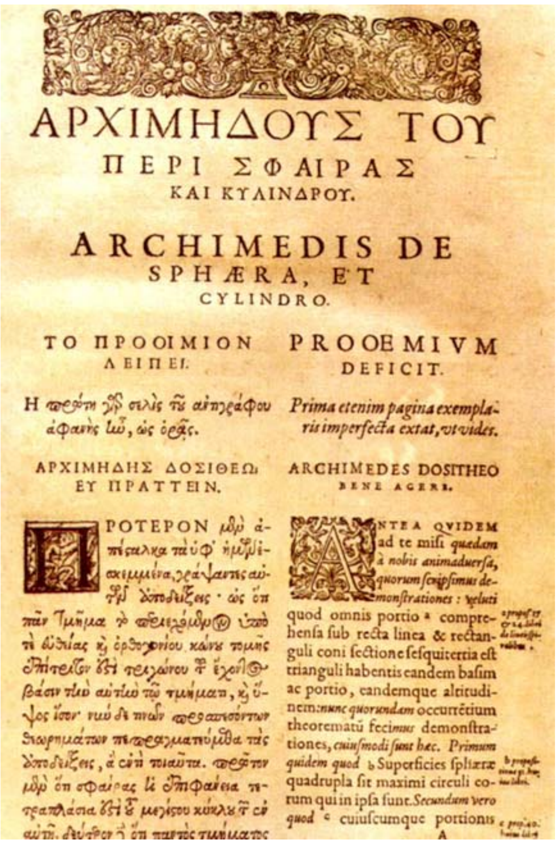
et quoniam $ΓΑ \times ΑΣ = ΜΣ \times ΣΠ$ (nam $ΑΓ = ΣΜ$, $ΑΣ = ΠΣ$ [Eucl. VI, 4]), et $ΓΑ \times ΑΣ = ΑΞ^2$ [Eucl. VI, 8 coroll.] $= ΞΣ^2 + ΣΠ^2$ [Eucl. I, 47], erit

$$ΜΣ \times ΣΠ = ΞΣ^2 + ΣΠ^2.$$

et quoniam est $ΓΑ : ΑΣ = ΜΣ : ΣΠ$, et $ΓΑ = ΑΘ$, erit

1 οὖσαι] οὔσαις. 8 κύκλου] om. 11 ζυγὸς] ὁ ζυγός. 20 τῷ] τὸ. 21 διάμετρος] ἡ διάμετρος. 23 γὰρ] bis. 24 τῷ] Reinach, τὸ. 25 ὑπὸ] ἀπὸ. 29 τῷ] τὸ.

LA ESFERA Y EL CILINDRO EN LA TUMBA DE ARQUÍMEDES EN SIRACUSA



ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΤΟΥ
ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΣ
ΚΑΙ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ.

ARCHIMEDIS DE
SPHÆRA, ET
CYLINDRO.

ΤΟ ΠΡΟΟΙΜΙΟΝ ΛΕΙΠΕΙ.

PROOEMIVM DEFICIT.

Prima etenim pagina exemplaris imperfecta extat, vt vides.

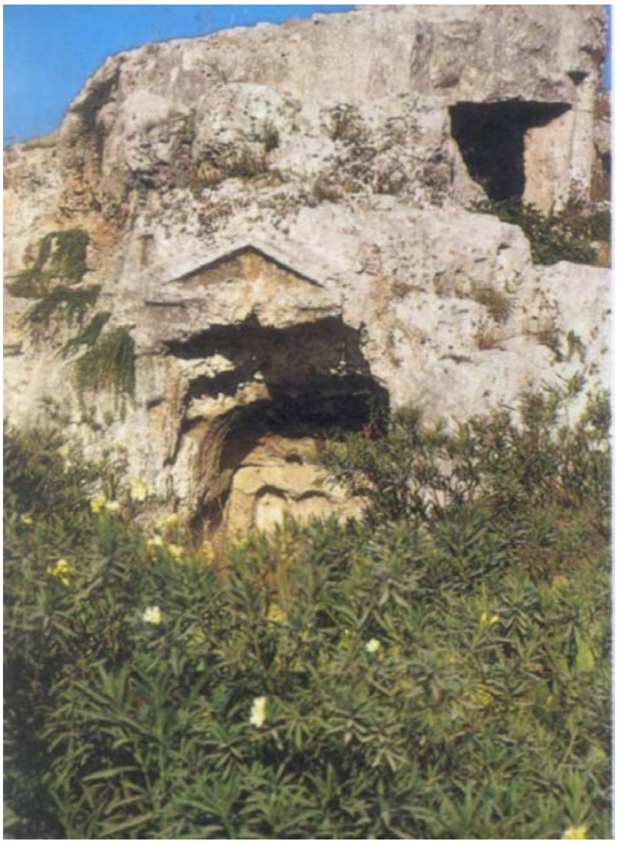
ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ ΔΟΣΙΘΕΩι ΕΥ ΠΡΑΤΤΕΙΝ.

ARCHIMEDES DOSITHEO BENE AGERE.

ΠΡΟΤΕΡΟΝ μὲν ἀπέσταλκα...

ANTEA QVIDEM ad te misi quedam à nobis animaduersa, quorum scripsimus demonstrationes: veluti quod omnis portio ª comprehensa sub recta linea & rectanguli coni sectione sesquitertia est trianguli habentis eandem basim ac portio, candemque altitudinem: nunc quorundam occurrẽtium theorematũ fecimus demonstrationes, cuiusmodi sunt hæc. Primum quidem quod ᵇ Superficies sphæræ quadrupla sit maximi circuli eorum qui in ipsa sunt. Secundum vero quod ᶜ cuiuscumque portionis

Primera página de la obra de Arquímedes *Sobre la Esfera y el Cilindro*. Museo Municipal de Trieste.



La tradicionalmente llamada «*tumba de Arquímedes*», situada en Siracusa, en las cercanías de Acradina.

la obra de Arquímedes *Sobre la Esfera y el Cilindro* se considera la continuación natural del Libro XII de *Los Elementos* de Euclides. Ambas tratan de las figuras esferas, cilindros y conos, pero Arquímedes trasciende de forma considerable los resultados de Euclides, al demostrar aquí, de forma impecable, mediante el método de exhaución, nuevos y fundamentales teoremas sobre el volumen y la superficie de la esfera, que Arquímedes había obtenido mediante el *Principio de la Palanca* del Método Mecánico.

Euclides se había limitado a dar la proporcionalidad entre dos esferas y los cubos construidos sobre sus diámetros (XII.18). Arquímedes no sólo da las razones entre la esfera, el segmento esférico y el sector esférico y ciertos conos, sino también la razón entre la superficie de la esfera y del casquete esférico y ciertos círculos.

Los trabajos geométricos desarrollados por Arquímedes en esta obra son probablemente los considerados más importantes por el científico, hasta el punto que exhortó a sus deudos a que se grabara en su tumba las figuras de un cilindro circunscrito a una esfera junto con un epigrama que describiese la relación que las vincula, que son sencillas proporciones que debieron impresionar al propio Arquímedes:

- «*La esfera y el cilindro circunscrito a ella están en la relación de 2 a 3, tanto en volumen como en superficie total.*»
- «*los volúmenes de un cono, una semiesfera y un cilindro de la misma altura y radio están en la razón* 1:2:3.»

Según testimonio de Plutarco, confirmado por Cicerón, el deseo de Arquímedes fue cumplido, lo que contribuyó a convertir en legendario el famoso resultado matemático arquimediano. Efectivamente, según referencia de Plutarco (Marcelo, XVII):

> «[...] *Habiendo sido autor de muchos y excelentes inventos, dícese haber encargado a sus amigos y parientes que después de su muerte colocasen sobre su sepulcro un cilindro con una esfera inscrita, poniendo en la inscripción la cantidad en que en esos dos sólidos el continente supera al contenido.*»

La tumba de Arquímedes fue hallada por Cicerón gracias a la identificación de la inscripción., como describe en sus *Tusculanorum disputationum*, V:

> «[...] *Arquímedes, cuyo sepulcro ignorado por los siracusanos, rodeado de zarzas y espesos matorrales, hasta el punto de haberse perdido todo rastro de él, yo descubrí siendo cuestor de Siracusa. Yo conocía ciertos versos senarios, que eran copia de los de un epigrama que había sido inscrito en su monumento, los cuales declaraban que había en su sepulcro una esfera con un cilindro.* »

La inscripción geométrica en la tumba de Arquímedes constituye el primer epitafio científico de la historia, y ha contribuido a mitificar la relación obtenida por Arquímedes entre la esfera y el cilindro circunscrito.

Análisis crítico del *Método mecánico* de Arquímedes

EL MÉTODO de Arquímedes es un tratado donde se resuelven unos cuantos problemas geométricos mediante consideraciones mecánicas, con importantes resultados obtenidos por deducciones informales, que destilan un método de descubrimiento al servicio de un desarrollo sustancial del conocimiento matemático.

Es interesante hacer un análisis de la estructura interna del proceso discursivo de Arquímedes en EL MÉTODO, a través de un planteamiento abstracto de las diversas fases del método mecánico, a fin de que, aunque Arquímedes reconozca que:

> «[....] *la investigación hecha por este método no comporta demostración* [....].»

intentar dilucidar la cota de rigor que subyace en cada una de esas fases.

La esencia del método mecánico se deduce de cualquiera de los problemas que Arquímedes trata. Se pueden considerar tres fases. En una primera fase, puramente geométrica, seleccionados los objetos geométricos pertinentes, se procede a la comparación de secciones del cuerpo cuyo volumen es objeto de investigación, con otras secciones de cuerpos ya conocidos. Sea determinar el volumen de un sólido S, cuyas secciones s, determinadas por un sistema de planos paralelos, son comparadas con las secciones t, de un sólido conocido T. Arquímedes fija la posición de los extremos y punto de apoyo de una palanca y obtiene, en virtud de las propiedades geométricas conocidas de S y T, una relación geométrica:

$s/t = k/h$,

siendo h la distancia fija del extremo de la palanca al punto de apoyo y k la distancia de la sección t –de su centro de gravedad– al punto de apoyo.

A continuación se entra en la segunda fase del método, la fase mecánica, en la que aplicando consideraciones estáticas que Arquímedes había desarrollado en su tratado *Sobre el Equilibrio de los Plano*", establece que la sección t del sólido T, «*permaneciendo en su lugar*», equilibra, respecto del fulcro de la palanca, a la sección s del sólido S, trasladada a una posición de forma que su centro de gravedad sea un extremo de la palanca.

Hasta aquí el desarrollo lógico e intuitivo seguido por Arquímedes es totalmente riguroso, ya que es consecuencia lógica de los postulados admitidos y de los teoremas demostrados en otros tratados. Pero Arquímedes entra ahora en una tercera fase en la que dice que las secciones s y t llenan o componen, respectivamente, los sólidos S y T, de manera que repitiendo la operación anterior para todas las secciones paralelas, el sólido T «*permaneciendo en su lugar*», equilibrará, respecto del fulcro de la palanca, al sólido S trasladado a una posición de forma que su centro de gravedad sea un extremo de la palanca. Por tanto, conociendo el centro de gravedad de las figuras y el volumen de una de ellas, su posición de equilibrio permitirá encontrar el volumen de la otra.

Si en lugar de sólidos se consideran figuras planas, el proceso es similar considerando un sistema de rectas paralelas, que determinan sobre las figuras unas cuerdas que llenan o componen las figuras.

Está claro que la clave del método mecánico de Arquímedes estriba en el proceso que tiene lugar en la tercera fase y que él mismo llama con gran acierto «*composición*», mediante el cual como buen griego soslaya y camufla la presencia del infinito.

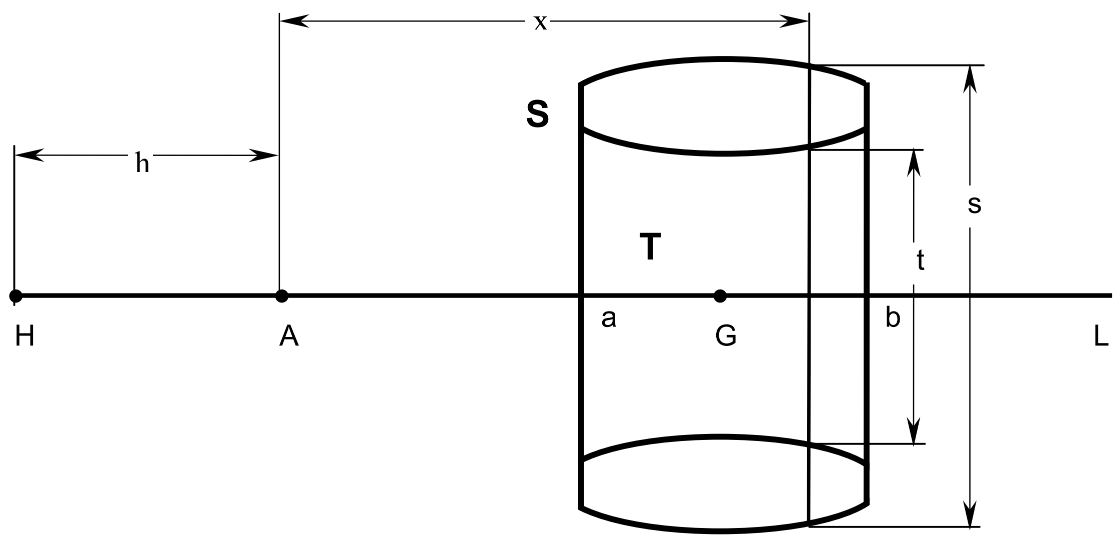
Para el caso de la cubatura de sólidos consideremos nuevamente los sólidos anteriores S y T. Consideremos el lado de la palanca en el que el sólido T «*ha permanecido en su lugar*», Arquímedes dice que las secciones t de T llenan o componen T, pero esto, además de no tener ninguna base matemática, ya que no se deduce de ningún postulado ni teorema, no tiene base material alguna, pues las secciones t que son superficies no pueden componer ni llenar de manera alguna ningún sólido (por ejemplo los círculos no pueden llenar un cilindro), pues ello violaría la «*ley de la homogeneidad*». No obstante, el error lógico de la consideración de Arquímedes se ve atemperado intuitivamente por el hecho de que el sólido

T no se ha desplazado, está «*en su lugar*». Sin embargo las secciones s que componen el sólido S, se han movido paralelamente a su posición inicial hasta coincidir sus centros en el otro extremo de la palanca, de manera que todas quedan colocadas en un mismo plano que debería equilibrar a un sólido, lo cual lógica e intuitivamente es absurdo.

Sin embargo Arquímedes, con un esfuerzo de intuición ideal, imagina que las secciones s del sólido S, trasladadas, recomponen y reconstruyen el sólido del cual eran sus componentes, como si los elementos geométricos que se desplazan no fueran en realidad elementos planos, sino elementos sólidos de cierto espesor capaces de recomponer el sólido del que proceden. Tratándose de una intuición ideal que no casa con la intuición sensible de la experiencia y con el sentido común, Arquímedes tiene muy en cuenta que estos resultados sólo tienen «*cierta apariencia de verdad*» y el método «*no comporta demostración*».

Aunque resulte anacrónico es interesante hacer un análisis y valoración del método mecánico de Arquímedes a la luz de nuestro Cálculo Integral, sobre todo porque con ello se comprende cómo con métodos tan poco ortodoxos pudo Arquímedes obtener resultados absolutamente correctos.

Considerando el caso plano, sean S y T dos figuras planas situadas a lo largo del mismo intervalo de un eje horizontal L . Dada el área a(T) y el centro de gravedad G de T, se quiere hallar el área a(S) de S.



Podemos interpretar las dos figuras planas como láminas de densidad unidad, compuestas de un número infinitamente grande de elementos geométricos elementales –segmentos de línea o rectángulos de anchura infinitesimal, es decir indivisibles o infinitesimales, respectivamente, que dirían los matemáticos del siglo XVII–, perpendiculares al eje L.

Tomemos el eje L como una palanca con el punto de apoyo en A y supongamos que podemos encontrar una constante h tal que cada línea vertical, a una distancia x de A, determina en las figuras S y T segmentos de línea de longitudes s y t, respectivamente, tales que se verifica:

$s/t = x/h$ (1) .

La ley de la palanca implica entonces que el segmento desplazado al punto H, que está a una distancia h de A, equilibra al segmento t, mantenido «*en su lugar*». De ello deduce Arquímedes que si la figura S se desplaza de forma que llegue a tener su centro de gravedad en H, equilibrará a la figura T mantenida «*en su lugar*», es decir que se tiene:

$a(S)/g(T) = a(T)/h$ (2) ,

siendo g(T) la distancia del punto A al centro de gravedad G de T y asumiendo que cada figura actúa como una masa puntual situada en su centro de gravedad. Conocidos entonces el área a(T) y las distancias h y g(T), aplicando (2) se obtendrá el área a(S).

El punto crucial del desarrollo anterior estriba en el tránsito lógico de (1) a (2), es decir en la forma de demostrar que (1) implica (2), deducción que Arquímedes no realiza sino que lo asume. El paso de (1) a (2) es resuelto fácilmente mediante Cálculo Integral. En efecto, sean s(x) y t(x) las secciones de las figuras S y T a la distancia x del fulcro de la palanca A; tenemos para las áreas S y T, y para el centro de gravedad de T, las siguientes expresiones:

$$a(S)=\int_a^b s(x)\,dx\ ,\ a(T)=\int_a^b t(x)\,dx\ ,\ g(T)=\frac{1}{a(T)}\int_a^b x\,t(x)\,dx\ .$$

Ahora bien, de la igualdad (1) se deduce: s(x)=x·t(x)/h, de donde se obtiene:

$$a(S)=\int_a^b s(x)\,dx=\frac{1}{h}\int_a^b x\,t(x)\,dx\ ,$$

es decir: a(S)= g(T)·a(T)·(1/h), expresión equivalente a (2).

Así pues, en términos de integrales, el efecto del método mecánico de *EL MÉTODO* es expresar una integral que hay que calcular para hallar el área de una figura S, en términos de otras integrales, el área y el centro de gravedad de otra figura conocida T.

J.Babini en su introducción a su versión de *EL MÉTODO*, describe muy significativamente que al pensar en el proceso discursivo que tiene lugar al realizar una integral definida, se puede explicar la aparente paradoja de cómo Arquímedes pudo lograr con método tan poco riguroso un resultado correcto. Escribe J.Babini (Eudeba, 1996, p.24):

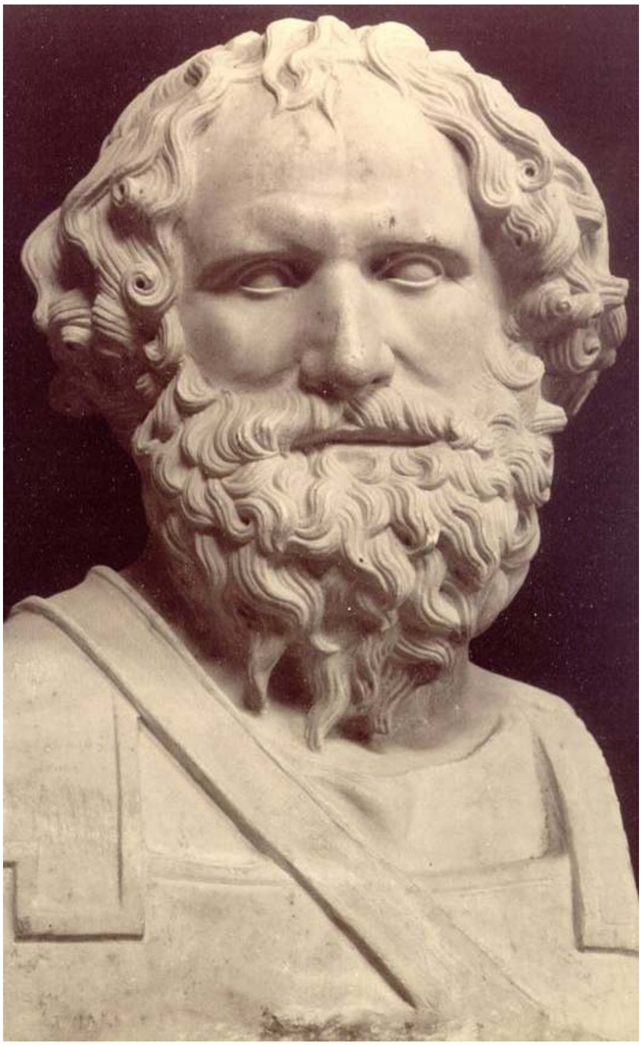
> «[...] *El cálculo actual de cuadraturas y cubaturas, así como la determinación de centros de gravedad, se realiza mediante el cálculo de integrales definidas, que pueden considerarse como límites de sumas, cuyos sumandos son productos de dos factores: la función integrando que en nuestro ejemplo está dada por la sección, y un incremento o diferencial que corresponderá a la distancia entre dos secciones consecutivas. Ahora bien, el resultado de la integral depende exclusivamente de la forma y propiedades de la función integrando, no desempeñando el otro factor sino el papel pasivo destinado a mantener la homogeneidad; es pues, explicable que Arquímedes, al despreciar en absoluto la homogeneidad y atender únicamente a las propiedades de la sección, expresada en su proporción de equilibrio, logre resultados correctos*.»

Parece pues que el método mecánico de *EL MÉTODO* es una etapa intermedia entre el momento realmente creador que Arquímedes oculta y la etapa final, rigurosamente deductiva, en la que mediante el *Método de Exhaución* Arquímedes demuestra sus magníficos tratados geométricos. Pero estas etapas están íntimamente vinculadas, porque, como bien señala Arquímedes en el Preámbulo:

> «[...] *Estoy convencido, además, de que dicho método no será menos útil para demostrar los propios teoremas. Pues algunos de los que primero se me hicieron patentes mecánicamente, recibieron luego demostración geométricamente* [...] *pues es más fácil, después de haber adquirido por ese método cierto conocimiento de las cuestiones objeto de investigación, dar luego la demostración, que investigar sin ningún conocimiento previo* [...].»

En definitiva el método mecánico de Arquímedes es una genial combinación de consideraciones geométricas y mecánicas, en las que en esencia subyacen ciertos procedimientos de nuestro Cálculo Integral.

ARQUÍMEDES, UN SABIO ENTRE LA HISTORIA Y LA LEYENDA



Busto de Arquímedes. Museo Nacional de Nápoles. Es uno de los iconos más conocidos de Arquímedes.

Arquímedes ha sido un personaje célebre, curioso y famoso por sus méritos científicos, por sus excentricidades y por los originales inventos que le atribuyeron los historiadores de las guerras púnicas y los escritores más eximios de la antigüedad. Su figura histórica fue embellecida hasta la hagiografía o deformada por la imaginación popular y por la tradición legendaria ulterior, que la revestiría con anécdotas muchas de ellas inverosímiles que llegaban a impregnar al personaje de una aureola casi sobrenatural.

Así por ejemplo Silio Itálico escribe sobre Arquímedes en el poema *Punica*, dedicado a la segunda guerra púnica:

> «*Había, pues, en Siracusa, un hombre que, sin estar favorecido por una gran fortuna, se elevó por su genio por encima de la esfera de la humanidad y de la gloria inmortal de esa ciudad. Todos los secretos del universo le eran conocidos. Sabía cuando los oscuros rayos del sol naciente presagiaban la tempestad, si la tierra estaba fija o suspendida por su eje, por qué el mar extendido sobre el globo se mantenía encadenado a su superficie, cuáles eran las causas de la agitación de las olas y de las diferentes fases de la luna, qué ley seguía el océano en el flujo y reflujo de las mareas. Fama tenía de haber contado las arenas de la tierra; él, que supo poner a flote una galera con el esfuerzo de una sola mujer; él, que hizo subir rocas amontonadas en contra de la pendiente del terreno*».

Sobre ciertas actitudes excéntricas de Arquímedes a las que le llevarían su actividad creativa, tenemos un testimonio de Plutarco (Marcelo, XVII):

> «*Halagado y entretenido de continuo por una sirena doméstica y familiar, se olvidaba del alimento y no cuidaba de su persona y llevado por la fuerza a ungirse y bañarse, formaba figuras geométricas en el mismo hogar, y después de ungido tiraba líneas con el dedo, estando verdaderamente fuera de sí, y como poseído de las musas, por el sumo placer que en estas ocupaciones hallaba.*»

Sobre el carácter especulativo en la invención así como riguroso y claro en la demostración, Plutarco platoniza a Arquímedes al escribir (Marcelo, XVII):

> «*En cuanto a Arquímedes , fue tanto su juicio, tan grande su ingenio y tal su riqueza en teoremas, que sobre aquellos objetos que le habían dado el nombre y gloria de una inteligencia sobrehumana, no permitió dejar nada escrito; y es que tenía por innoble y ministerial toda ocupación en la mecánica y todo arte aplicado a nuestros usos, y ponía únicamente su deseo de sobresalir en aquellas cosas que llevan consigo lo bello y excelente, sin mezcla de nada servil, diversas y separadas de los demás, pero que hacen que se entable contienda entre la demostración y la materia; de parte de la una, por lo grande y lo bello, y de parte de la otra, por la exactitud y por el maravilloso poder; pues es imposible encontrar en toda la Geometría cuestiones más difíciles y más importantes explicadas con términos más sencillos ni más comprensibles; lo cual unos creen debe atribuirse a la sublimidad de su ingenio, y otros, a un excesivo trabajo,* **[...].**

A pesar de estas manifestaciones de Plutarco, muchos de los trabajos de Arquímedes están vinculados a la experiencia, de modo que muchas de sus investigaciones y descubrimientos resultan de la necesidad de resolver problemas prácticos. De hecho a Arquímedes se le conoce como el físico e ingeniero más famoso de la antigüedad por la cantidad de máquinas e ingenios asombrosos que se le atribuyen, algunos de los cuales parecían subvertir las propias leyes de la naturaleza. A título de ejemplo mencionemos el tornillo hidráulico llamado también «*cóclea*», una ingeniosa máquina construida por Arquímedes a la que Galileo calificó como «*maravillosa y milagrosa*», que permite elevar el agua de forma rápida venciendo la resistencia gravitatoria. Fue utilizada para extraer agua de los ríos para convertir en fértiles tierras yermas, así como para desaguar las tierras más bajas, donde se originaban pestes por el estancamiento de las aguas. En el Renacimiento, Leonardo vuelve a estudiar y reproducir el instrumento de Arquímedes, y en sus escritos atestigua su profunda admiración por la sabiduría geométrica y técnica del siracusano, hasta el punto que los coetáneos de Leonardo calificaban su ingenio de arquimediano.

El método de exhaución en Arquímedes

El método de exhaución aplicado por Arquímedes en la demostración de los resultados obtenidos por vía mecánica es aplicado de diversas formas que pueden clasificarse en dos tipos fundamentales: *el método de compresión* y *el método de aproximación*.

Veamos sucesivamente el aspecto formal de ambos métodos y una ilustración práctica mediante sendos ejemplos: el método de compresión aplicado a la cuadratura de la espiral y el de aproximación aplicado a la cuadratura de la parábola

El método de compresión. La Cuadratura de la Espiral

El método de compresión de Arquímedes se aplica de la siguiente forma:

Dada una magnitud geométrica A, ya sea longitud, área o volumen, se quiere demostrar que es igual a otra magnitud B conocida. Basándose en la geometría de la figura A, se construyen dos sucesiones de figuras geométricas: $\{I_n\}$ monótona creciente (inscritas en A) y $\{C_n\}$ monótona decreciente (circunscritas a A) tales que:

$I_n<A<C_n$ para todo n (1) ,

entonces se demuestra:

1. La diferencia $C_n–I_n$ se puede hacer *tan pequeña como se quiera* para n suficientemente grande, es decir, en nuestro lenguaje:

   para todo $\varepsilon >0$ existe N tal que para todo $n>N$, $C_n–I_n < \varepsilon$ (2)

2. Para todo n, $I_n<B<C_n$ (3)

A partir de (1), (2) y (3) se demuestra fácilmente que A=B. En efecto:

a. Supongamos A>B. Tomando ε=A–B, podemos encontrar un n tal que $C_n–I_n < \varepsilon$=A–B, pero según (1) $A<C_n$, luego $A–I_n<A–B$, por tanto se verificaría $B<I_n$, lo que está en contradicción con (3).

b. Supongamos A<B. Tomando ε=B–A, podemos encontrar un n tal que $C_n–I_n < \varepsilon$=B-A, pero según (1) $I_n<A$, luego $C_n–A<B–A$, por tanto se verificaría $C_n<B$, lo que está en contradicción con (3).

En consecuencia, al no ser A<B ni B<A, debe ser A=B.

La aplicación del método de compresión no es uniforme, sino que difiere de un ejemplo a otro dependiendo de la magnitud conocida B, con la que se compara la desconocida A y no hay ninguna regla general válida en todo caso. No obstante, una vez que se han demostrado las desigualdades (1) y (3), el proceso demostrativo subsiguiente es automático; sin embargo, Arquímedes realiza el proceso para cada caso particular basándose en la geometría de las figuras.

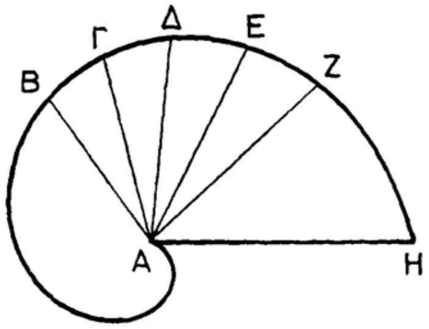
Arquímedes aplica el método de compresión en las proposiciones 1 de *Sobre la Medida del Círculo*; 22, 26, 28, 30 de *Sobre Conoides y Esferoides*; 24, 25 de *Sobre las Espirales;* 16 de *Sobre la Cuadratura de la Parábola* y 15 de *El método sobre a los teoremas mecánicos*.

Uno de los ejemplos mas significativos de la aplicación del método de compresión es la cuadratura de la primera vuelta de la espiral que Arquímedes consigue en la Proposición 24 de *Sobre las Espirales*.

Arquímedes dedica toda una obra, *Sobre las Espirales*, al estudio de la curva que lleva su nombre. La introduce, en la Definición I, en términos de composición de movimientos:

> «*Si una línea recta trazada en un plano gira un número cualquiera de veces con movimiento uniforme, permaneciendo fijo uno de sus extremos, y vuelve a la posición inicial, mientras que, sobre la línea en rotación, un punto se mueve uniformemente como ella a partir del extremo fijo, el punto describirá una espiral en el plano.*»

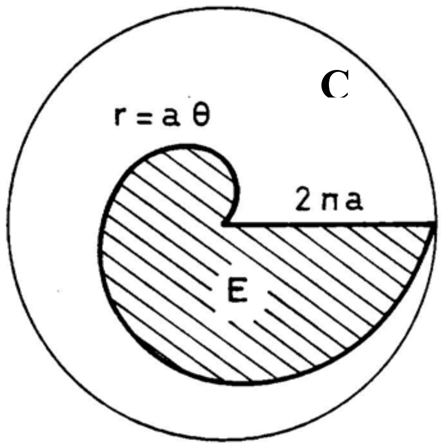
A lo largo del tratado *Sobre las Espirales*, Arquímedes va obteniendo las cuadraturas de diversas áreas relacionadas con la espiral.



En las definiciones 4, 5 y 7, respectivamente, Arquímedes define respecto de la primera vuelta de la espiral, *la primera recta* –que une el punto inicial con el final–, *el primer área* E –la región determinada por la curva y la primera recta– y *el primer círculo* C –con centro en el origen de la espiral y radio la primera recta–. Tras diversas proposiciones y corolarios, Arquímedes acaba demostrando el siguiente resultado fundamental:

PROPOSICION 24

«*El área comprendida entre la espiral descrita en la primera vuelta y la primera de las rectas en posición inicial de giro, es equivalente a un tercio del primer círculo.*»



Es decir, se tiene: a(E) = (1/3)a(C) (4).

En la prueba de (4) Arquímedes utiliza resultados previos a las definiciones, que obtiene en la proposición 10, y que son equivalentes a las habituales fórmulas para la suma de enteros consecutivos y sus cuadrados, que a la postre le llevarán a ciertas desigualdades necesarias para emprender la exhaución. Transcribamos la Proposición 10:

PROPOSICION 10

«*Si varias líneas en número cualquiera que sucesivamente se superan unas a otras en una misma magnitud se colocan unas a continuación de las otras, siendo el exceso igual a la más pequeña, y se dispone del mismo número de otras líneas iguales a la mayor de las anteriores, los cuadrados construidos sobre estas ultimas, juntamente con el cuadrado de la mayor y el rectángulo delimitado por la menor y una línea formada por todas las que se superan igualmente, valen el triple de todos los cuadrados construidos sobre éstas.*»

Despojando esta proposición de su carácter geométrico y traduciendo el lenguaje retórico a expresión algebraica, se encuentra una progresión geométrica: a, 2a,3a, ... , na, para la cual Arquímedes demuestra la relación:

$$(a^2n^2+a^2n^2+ \cdots +a^2n^2) + a^2n^2 + a(a+2a+ \cdots +na) = 3[a^2+(2a)^2+ \cdots +(na)^2]$$

resultado equivalente a la fórmula para la suma de los n primeros cuadrados de enteros

$$1^2+2^2+ \cdots +n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (5) .$$

Prosigue Arquímedes con el Corolario de la Proposición 10:

COROLARIO

«*De aquí resulta que la suma de los cuadrados construidos sobre las líneas iguales a la mayor es menor que el triple de los construidos sobre las líneas que se superan sucesivamente en la misma magnitud, porque la primera suma sería triple de la segunda si se le añadiese la primera de esas magnitudes y mayor que el triple de la segunda si se resta de ésta el triple del cuadrado de la línea mayor, porque lo aumentado a la primera suma es mayor que el triple del cuadrado de la línea mayor. Por consiguiente, si se construyen figuras semejantes sobre las líneas que se superan unas a otras en la misma magnitud, y sobre las iguales a la mayor, la suma de las figuras construidas sobre éstas será menor que el triple de las construidas sobre las líneas desiguales, y la primera suma será mayor que el triple de la segunda si se resta de ésta el triple de la figura construida sobre la línea mayor, porque estas figuras por ser semejantes tienen la misma razón que los cuadrados de los que con anterioridad hemos hablado* [Euclides, VI.20].»

Nuevamente al despojar el Corolario de Arquímedes de su ganga geométrica, y expresarlo en lenguaje algebraico, se puede escribir:

$$1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2 < \frac{n^3}{3} < 1^2+2^2+\cdots+n^2 \quad (6)\ ,$$

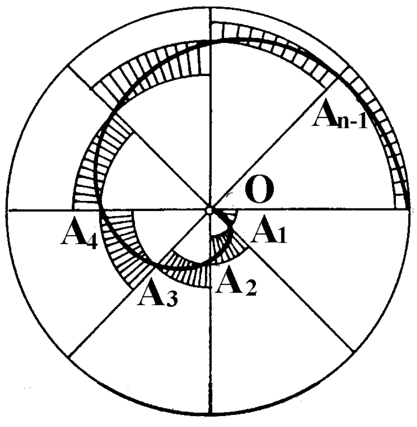
resultado que se podría obtener al expresar (5) en la forma:

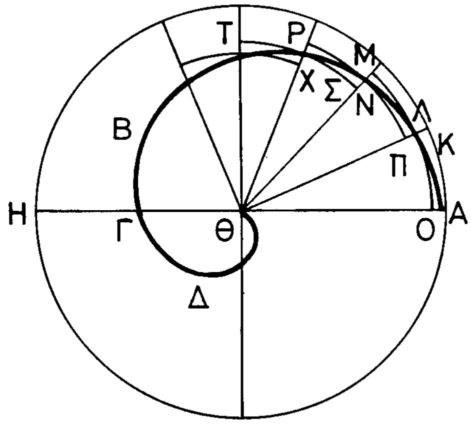
$$1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}\ .$$

A partir de aquí, Arquímedes prepara el terreno para resolver el problema considerando las habituales figuras –en este caso sectores circulares– inscritas y circunscritas, y lo hace en la Proposición 21 y siguientes, y finalmente en la Proposición 24 aplica impecablemente el método de exhaución para obtener con todo rigor el resultado.

Interpretando el razonamiento de Arquímedes en lenguaje aritmético se tendrá:

Con referencia a la figura siguiente (similar a la figura contigua, utilizada por Arquímedes en la Proposición 21 de *Sobre las Espirales*), se divide el círculo C en n sectores, que intersecan a la espiral en los puntos O, A_1 , A_2, ... A_n.





Escribiendo OA_1 = c, resulta:

OA_1=c, OA_2=2c, ... OA_n=nc.

Se tiene, entonces, que la región espiral E contiene una región P, formada por sectores circulares inscritos P_i, de radios o, c, ... , (n–1)c, y está contenida en una región Q, formada por sectores circulares circunscritos Q_i, de radios c, 2c, ... , nc.

Trivialmente las áreas de P, E, Q, verifican: a(P) < a(E) < a(Q).

Además, la cantidad a(Q)–a(P) es igual al área de un sector circular y por tanto puede hacerse tan pequeña como se quiera tomando n suficientemente grande, de modo que, conociendo previamente el resultado (4) de la cuadratura, éste se demostrará con todo rigor mediante la doble reducción al absurdo del método de exhaución.

En efecto, supongamos $a(E) < (1/3)a(C)$, escojamos n suficientemente grande para que se verifique:

$$a(Q) - a(P) < (1/3)\, a(C) - a(E),$$

como a(P) es menor que a(E), se tiene:

$$a(Q) < (1/3)a(C) \quad (7)\ .$$

Ahora bien, la razón de las áreas de sectores circulares semejantes es igual a la razón de los cuadrados de sus radios (*Euclides*, XII.2), es decir:

$$\frac{a(Q)}{a(C)} = \frac{(ic)^2}{(nc)^2} \qquad i = 1, 2, \ \ldots, n \qquad (8)$$

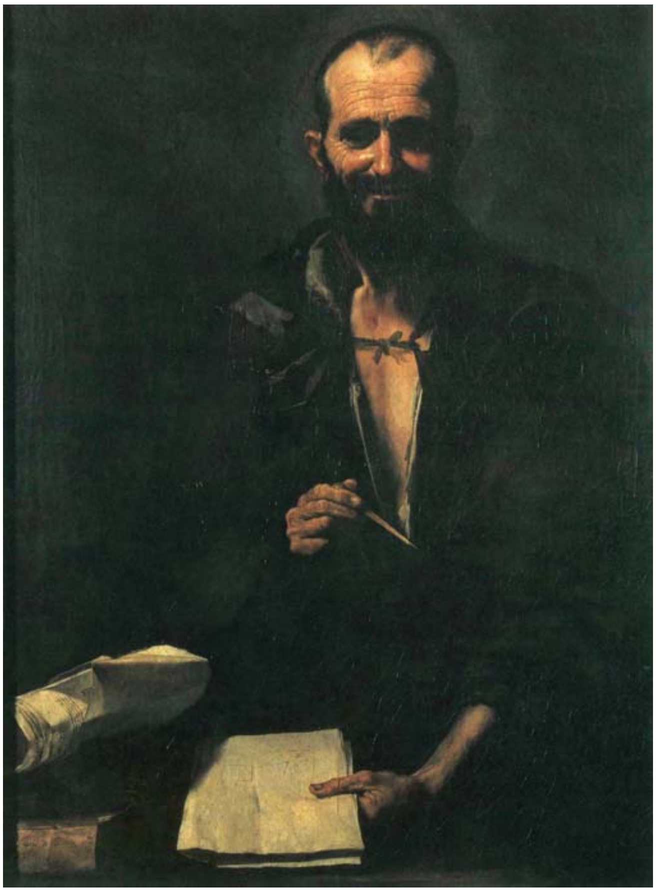
donde C son los sectores del círculo C circunscrito a la espiral. A partir de (8) aplicando las propiedades de la suma de proporciones (*Euclides*, 5.12) se obtiene:

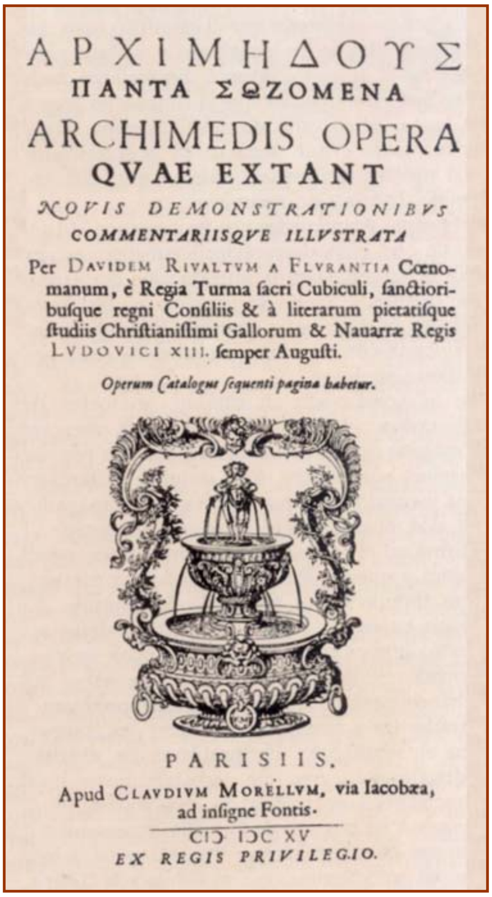
$$\frac{a(Q)}{a(C)} = \frac{c^2 + (2c)^2 + \cdots + (nc)^2}{n(nc)^2} = \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3} > \frac{1}{3} \qquad (9)\ ,$$

la última desigualdad siendo consecuencia de (6).

A partir de (9) se obtiene el resultado $a(Q) > (1/3)a(C)$, contradictorio con (7), luego no puede suceder que a(E) sea menor que un tercio de a(C).

De forma análoga se aborda el supuesto $a(E) > (1/3)a(C)$.

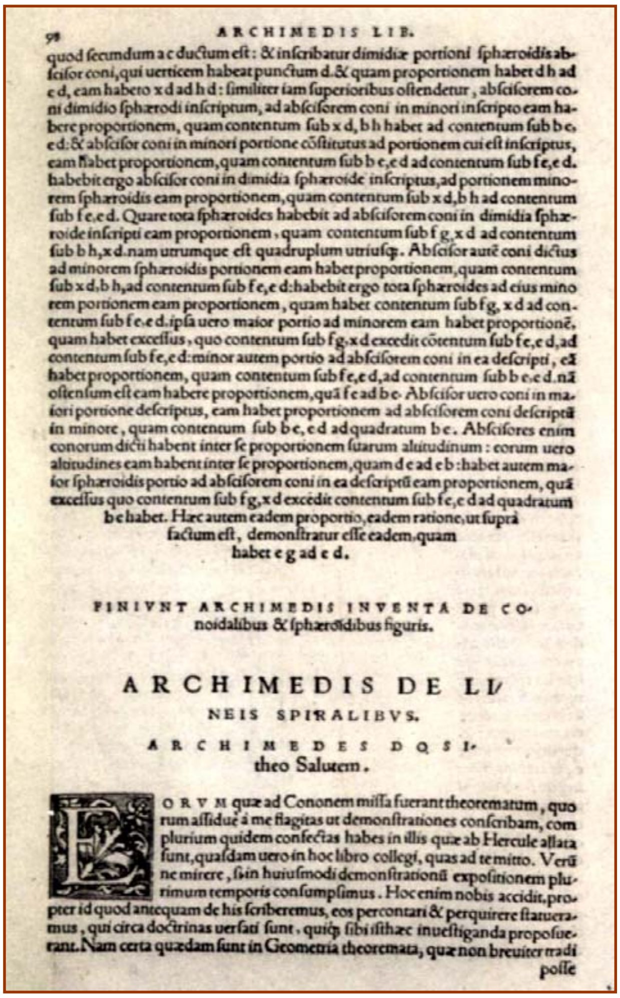




ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ
ΠΑΝΤΑ ΣΩΖΟΜΕΝΑ
ARCHIMEDIS OPERA
QVAE EXTANT
NOVIS DEMONSTRATIONIBVS
COMMENTARIISQVE ILLVSTRATA
Per DAVIDEM RIVALTVM A FLVRANTIA Cœnomanum, è Regia Turma sacri Cubiculi, sanctioribusque regni Consiliis & à literarum pietatisque studiis Christianissimi Gallorum & Nauarræ Regis LVDOVICI XIII. semper Augusti.
Operum Catalogus sequenti pagina habetur.
PARISIIS,
Apud CLAVDIVM MORELLVM, via Iacobæa, ad insigne Fontis.
CIϽ IϽC XV
EX REGIS PRIVILEGIO.

1. **Arquímedes pintado por Ribera en 1630. Museo del Prado (Madrid).**
2. **Portada de la edición de las Obras de Arquímedes realizada por D.Rivault en 1615.**

EL TRATADO DE ARQUÍMEDES *SOBRE LAS ESPIRALES*



98 ARCHIMEDIS LIB.

quod secundum a c ductum est: & inscribatur dimidiæ portioni sphæroidis abscisor coni, qui uerticem habeat punctum d. & quam proportionem habet d h ad e d, eam habeto x d ad h d: similiter iam superioribus ostendetur, abscisorem coni dimidio sphæroidi inscriptum, ad abscisorem coni in minori inscripto eam habere proportionem, quam contentum sub x d, b h habet ad contentum sub b e, e d: & abscisor coni in minori portione cõstitutus ad portionem cui est inscriptus, eam habet proportionem, quam contentum sub b e, e d ad contentum sub f e, e d. habebit ergo abscisor coni in dimidia sphæroide inscriptus, ad portionem minorem sphæroidis eam proportionem, quam contentum sub x d, b h ad contentum sub f e, e d. Quare tota sphæroides habebit ad abscisorem coni in dimidia sphæroide inscripti eam proportionem, quam contentum sub f g, x d ad contentum sub b h, x d. nam utrumque est quadruplum utriusq;. Abscisor autẽ coni dictus ad minorem sphæroidis portionem eam habet proportionem, quam contentum sub x d, b h, ad contentum sub f e, e d: habebit ergo tota sphæroides ad eius minorem portionem eam proportionem, quam habet contentum sub f g, x d ad contentum sub f e, e d. ipsa uero maior portio ad minorem eam habet proportionẽ, quam habet excessus, quo contentum sub f g, x d excedit cõtentum sub f e, e d, ad contentum sub f e, e d: minor autem portio ad abscisorem coni in ea descripti, eã habet proportionem, quam contentum sub f e, e d, ad contentum sub b e, e d. nã ostensum est eam habere proportionem, quã f e ad b e. Abscisor uero coni in maiori portione descriptus, eam habet proportionem ad abscisorem coni descripti in minore, quam contentum sub b e, e d ad quadratum b e. Abscisores enim conorum dicti habent inter se proportionem suarum altitudinum: eorum uero altitudines eam habent inter se proportionem, quam d e ad e b: habet autem maior sphæroidis portio ad abscisorem coni in ea descripti eam proportionem, quã excessus quo contentum sub f g, x d excedit contentum sub f e, e d ad quadratum b e habet. Hæc autem eadem proportio, eadem ratione, ut supra factum est, demonstratur esse eadem, quam habet e g ad e d.

FINIVNT ARCHIMEDIS INVENTA DE CONOIDALIBUS & SPHÆROIDIBUS FIGURIS.

ARCHIMEDIS DE LINEIS SPIRALIBVS.

ARCHIMEDES DOSITHEO SALUTEM.

EORVM quæ ad Cononem missa fuerant theorematum, quorum assiduè à me flagitas ut demonstrationes conscribam, complurium quidem confectas habes in illis quæ ab Hercule allata sunt, quasdam uero in hoc libro collegi, quas ad te mitto. Verũ ne mirere, si in huiusmodi demonstrationũ expositionem plurimum temporis consumpsimus. Hoc enim nobis accidit, propter id quod antequam de his scriberemus, eos percontari & perquirere statueramus, qui circa doctrinas uersati sunt, quiq; sibi ista hæc inuestiganda proposuerant. Nam certa quædam sunt in Geometria theoremata, quæ non breuiter tradi posse

DE LINEIS SPIRALIBVS. 115

centro ad ipsam ductam. Potest igitur ab a educi a f ad t n extra actam, ita ut media inter t n extra actam, & circumferentiam quæ sit r s, habeat ad t r eam proportionem, quam t a ad a l. Secet autem a f circulum in puncto r, Et lineam spiralem in puncto q. Et permutatim, eãdem habebit proportionẽ r s ad t a, quam t r ad a l. Sed ipsa t r ad a l minorem proportiõem habet, q̃ t r circũferentia ad duplam circumferentiæ circuli t m n. nam t r linea recta, minor est t r circũferẽtia. Recta uero a l maior est, q̃ dupla circũferentiæ circuli t m n. Minorẽ ergo habet proportionem r s ad a r, q̃ t r circũferẽtia ad duplã circumferẽtiæ circuli t m n. Tota igitur s a ad a r minorem habet proportionem, quàm t r circumferentia cum circumferentia circuli t m n bis sumpta, ad circumferentiam circuli t m n bis sumptã. Quam autem proportionem habent dictæ circũferentiæ, eam habet q a ad a t. hoc enim ostensum est. Minorem ergo proportionem habebit s a ad a r, quàm q a ad t a. quod esse non potest. nõ est igitur a f plus quàm dupla circumferentiæ circuli t m n. Similiter autem ostendetur, quod neq; minor, quàm dupla illius esse potest. Quare constat duplam esse. Ostendendum quoq; si lineam spiralem in quacunque reuolutione descriptã, recta quædam contigerit in termino illius, & ab initio lineæ spiralis ducatur super lineam quæ est reuolutionis initium, linea recta ad angulos rectos, ipsa coincidet contingenti, & multiplex est circumferentiæ circuli secundum reuolutionem numeri nominati eodem numero, & ipsa multiplex nominata.

SI lineam spiralem in prima reuolutione descriptam linea recta contingat, non in termino ipsius, & à puncto cõtactus ad initium lineæ spiralis recta ducatur, & initio lineæ spiralis posito centro describatur circulus secundum interuallum lineæ ductæ, ab initio autem lineæ spiralis quædam recta ducatur super lineam reuolutionis initium ad angulos rectos constituta, ipsa cum contingente concurret. Et linea inter huiusmodi concursum & initium lineæ spiralis media, æqualis est circumferentiæ circuli descripti, quæ inter punctum contactus & sectionis põctum comprehenditur, in quo puncto circulus descriptus secat lineam initium reuolutionis, cum in præcedentium parte circumferentia sumatur à põcto quod situm est in reuolutionis initio. Esto linea spiralis, in qua a b c d in prima reuolutione 21

Páginas de la obra de Arquímedes *Sobre las Espirales* de un ejemplar de la Universidad de Valladolid de *Archimedis Opera Omnia* (Basilea, 1544).

El tratado de Arquímedes *Sobre las Espirales* está dedicado al estudio de una curva llamada *Espiral de Arquímedes*, que el científico de Siracusa define de forma cinemática. Está catalogado como la obra más importante de Arquímedes sobre Geometría Plana. No es una obra fácil de entender y de hecho no es bien interpretada hasta después del Renacimiento. Quizá el primero en hacerlo con certeza es Cavalieri, quien por sus importantes estudios sobre la curva arquimediana fue considerado por Galileo como un «*émulo de Arquímedes*».

La cuadratura de la espiral de Arquímedes constituye uno de los ejemplos más representativos de la aplicación del método de exhaución de los griegos a los problemas de cuadraturas. Además, este trabajo de Arquímedes tuvo una influencia decisiva en los métodos de cuadratura aritmética del siglo XVII, en especial los de Fermat y Pascal, basados en la generalización a potencias superiores de las desigualdades numéricas obtenidas por Arquímedes a partir de resultados geométricos equivalentes a las fórmulas para la suma de enteros y sus cuadrados.

Puede decirse, además, en cierto modo, que la memoria *Sobre las Espirales* es el tratado más antiguo sobre Cálculo Diferencial, ya que Arquímedes presta atención a la determinación de las tangentes, y ello desde el mismo prólogo en el que escribe:

> «*Si una recta es tangente a la espiral en su extremo obtenido en último lugar, y si, sobre la recta que ha girado y vuelto a su lugar, se alza en su extremo fijo una perpendicular hasta que se encuentre con la tangente, digo que la recta así llevada hasta ese encuentro es igual a la circunferencia del* [primer] *círculo*. »

Como vemos *Sobre las Espirales* tiene que ver también con las investigaciones teóricas de Arquímedes sobre la rectificación de la circunferencia del círculo.

El método de aproximación. La Cuadratura de la Parábola.

El método de exhaución de Arquímedes en la modalidad de aproximación se aplica de la siguiente forma:

Dada una magnitud geométrica A, ya sea longitud, área o volumen, se quiere demostrar que es igual a otra magnitud B conocida. Basándose en la geometría de la figura A se construye una sucesión $s_1, s_2, \ldots, s_n$ de magnitudes tales que:

1. $S_n = s_1 + s_2 + \cdots + s_n$ sea tal que la diferencia $A - S_n$ se pueda hacer *tan pequeña como se quiera* para n suficientemente grande, y lo mismo respecto de s_n (de hecho, esto es consecuencia de lo anterior). Es decir en nuestro lenguaje:

   para todo $\varepsilon > 0$ existe N tal que para todo $n > N$, $A - S_n < \varepsilon$, $s_n < \varepsilon$.
2. Para todo n se satisface la relación $s_1 + s_2 + \cdots + s_n + R_n = B$, donde $R_n < s_n$.

A partir de 1 y 2 se demuestra que $A = B$. En efecto, de no ser así, sería $A > B$ o $A < B$.

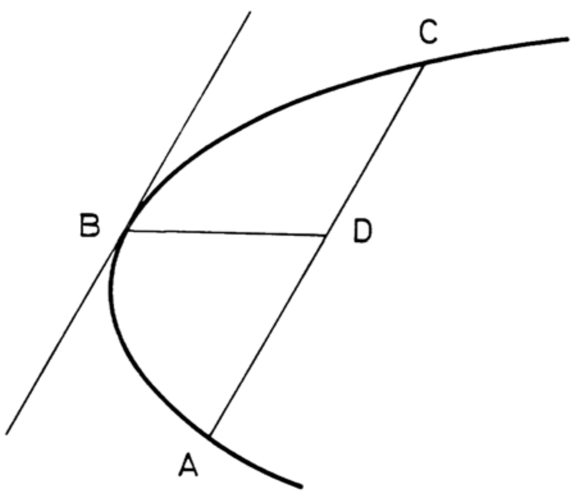
a. Supongamos $A > B$. Tomando $\varepsilon = A - B$, podemos encontrar un n tal que $A - S_n < \varepsilon = A - B$, luego $B < S_n$, lo que está en contradicción con 2.

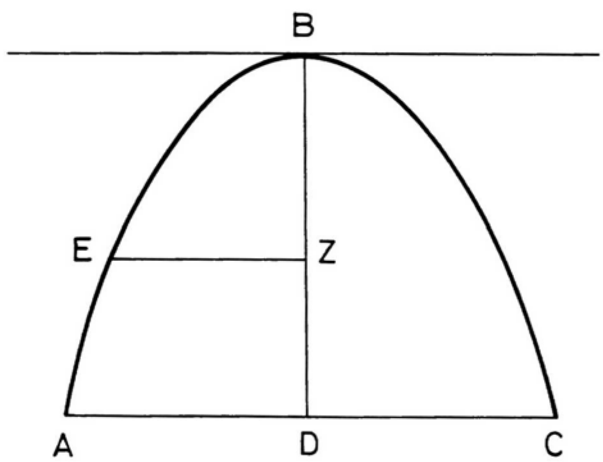
b. Supongamos que $A < B$. Tomando $\varepsilon = B - A$, podemos encontrar un n tal que $s_n < \varepsilon = B - A$, pero según 2, $B - S_n = R_n < s_n < \varepsilon = B - A$, por tanto se verificaría $A < S_n$, lo que está en contradicción con 1.

En consecuencia, al no ser $A < B$ ni $B < A$ debe ser $A = B$.

Arquímedes utiliza este método de aproximación en las Proposiciones 20-24 de su obra *Sobre la Cuadratura de la Parábola*, siendo la sucesión $s_1, s_2, \ldots, s_n$ una progresión geométrica descendente de razón 1/4 y el resultado 1 consecuencia del «*Principio de Eudoxo*» (Proposición X.1 de *Los Elementos* de Euclides).

Arquímedes comienza el tratado *Sobre la Cuadratura de la Parábola* con un preámbulo dirigido a Dositeo que termina diciendo que los teoremas están precedidos de unas proposiciones elementales sobre las secciones cónicas cuya demostración supone conocida. Según definiciones dadas por el propio Arquímedes, en un segmento de parábola ABC la base es la recta AC que une sus extremos, la altura es la mayor de las perpendiculares trazadas desde los puntos de la curva a la base y el vértice B es el punto de intersección de la altura y la parábola.





De la Proposición 1 se obtienen los siguientes resultados elementales:

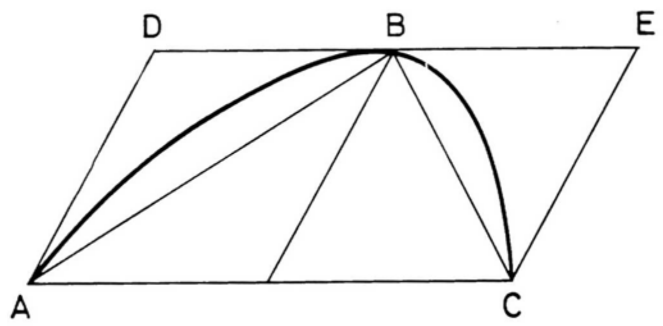
a. La tangente a la parábola en el vértice B del segmento es paralela a la base AC.

b. La recta a través del vértice B del segmento, paralela al eje de la parábola, interseca la base AC en su punto medio D.

De la Proposición 3 se obtiene la propiedad de caracterización de los puntos de la parábola:

c. Siendo la recta BD paralela al eje y las rectas AD y EZ paralelas a la tangente en el punto B se verifica:

$$\frac{AD^2}{EZ^2} = \frac{BD}{BZ}$$



Se llama triángulo inscrito al segmento de parábola al triángulo ABC que tiene su misma base y su misma altura.

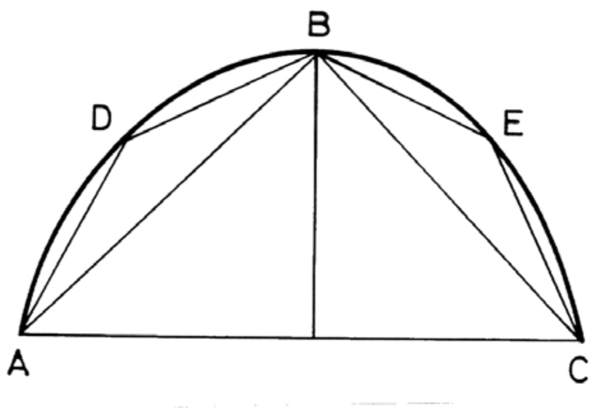
Arquímedes demostrará en la Proposición 24 –mediante el *método de exhaución por aproximación*– que el área del segmento parabólico es los cuatro tercios del área del triángulo inscrito. Para lo cual va preparando el camino en las proposiciones anteriores. Así en la Proposición 20 Arquímedes establece:

PROPOSICION 20

«*El triángulo inscrito en un segmento parabólico de igual base y altura es mayor que la mitad del segmento*.»

En efecto: hay un paralelogramo natural ADEC circunscrito al segmento parabólico ABC que tiene como dos lados opuestos la base AC y la tangente DE en el vértice B, siendo los otros dos las rectas AD, CE paralelas al eje. Ya que el área del triángulo inscrito ABC es la mitad del área de este paralelogramo, el área de este triángulo es mayor que la mitad del área del segmento parabólico.

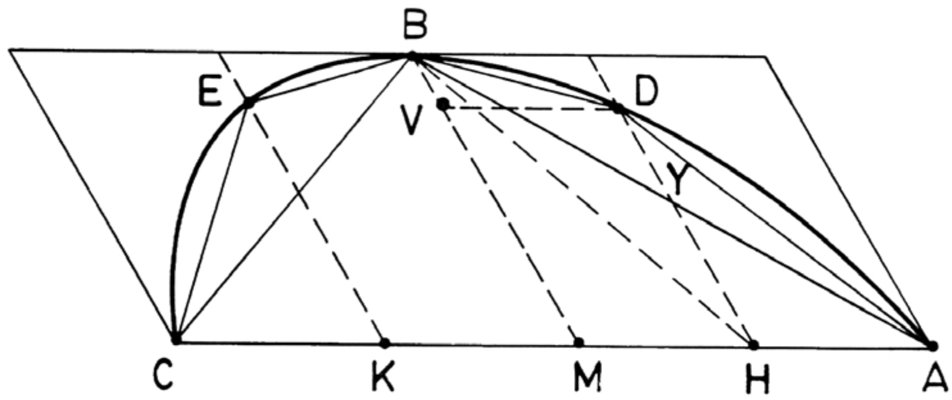
Consideremos ahora los segmentos parabólicos con bases AB y BC y vértices respectivos D y E; razonando de forma análoga se sigue que las áreas de los triángulos inscritos ADB y BEC serán menores que la mitad de las áreas de los correspondientes segmentos. Continuando este proceso iremos obteniendo una sucesión de polígonos inscritos en el segmento parabólico ABC en las condiciones requeridas para aplicar el método de aproximación. En efecto, ya que el área total de los triángulos inscritos es mayor que la mitad de los segmentos, se deduce aplicando el «*Principio de Eudoxo*» lo que Arquímedes enuncia como corolario de la Proposición 20:



COROLARIO

«*Demostrado esto* [la Proposición 20] *es claro que se puede inscribir en el segmento un polígono tal que la suma de los segmentos exteriores a él sea menor que un área dada.*»

Vamos a ver que la suma de las áreas de los triángulos ADB y CEB es la cuarta parte del área del triángulo ABC. Sean H el punto medio de AM, Y el punto de intersección de DH y AB, V el punto de intersección de BM y la recta paralela a AC por el punto D. Se tiene:



$$\frac{BM}{BV} = \frac{MA^2}{DV^2} = \frac{MA^2}{HM^2} = 4.$$

Luego BM=4BV, o sea DH=3BV.

Pero YH=(1/2)BM=2BV, por tanto YH=2DY.

Ahora aplicando que «*la razón entre las áreas de dos triángulos que tienen la misma base es igual a la razón entre sus alturas*» [*Euclides* VI.1] se obtiene:

a(ADB)=(1/2)a(BHA)=(1/4)a(ABM).

Análogamente se obtiene:

a(BEC)=(1/4)a(CMB).

Al combinar ambos resultados se tiene:

a(ADB)+a(BEC)=(1/4)a(ABM)+(1/4)a(CMB)= (1/4)ABC.

El resultado obtenido lo desarrolla Arquímedes en la Proposición 21:

PROPOSICION 21

«*Si en un segmento parabólico se inscribe un triángulo de la misma base y altura, y en cada segmento lateral que resulta se inscribe otro triángulo de la misma base y altura que él, el primer triángulo es ocho veces mayor que cada uno de los otros.*»

De forma análoga se demostraría que la suma de las áreas de los triángulos inscritos añadidos en cada paso es un cuarto de la suma de las áreas de los triángulos añadidos en el paso anterior.
Si ahora llamamos s_o=a(ABC), s_1=a(ADB)+a(CEB), y asísucesivamente para las áreas de los triángulos obtenidos en los siguientes pasos, y llamamos P_n el polígono inscrito en el segmento de parábola obtenido después de n pasos, su área será:

$$a(P_n) = s_0 + \frac{s_0}{4} + \frac{s_0}{4^2} + \cdots \frac{s_0}{4^n},$$

de modo que si llamamos P al segmento parabólico ABC, el corolario de la Proposición 20 se podrá enunciar simbólicamente así:

Dado $\varepsilon>0$, $a(P)-a(P_n)< \varepsilon$ para n suficientemente grande,

que es la condición 1 para aplicar el método de aproximación.

A continuación Arquímedes demuestra la siguiente proposición

PROPOSICION 23

«*Dado un número cualquiera de áreas tales que, colocadas unas a continuación de las otras, cada una sea cuádruple de la siguiente, su suma añadida al tercio de la menor es igual al cuádruple del tercio de la mayor.*»

Este resultado que Arquímedes demuestra retóricamente es equivalente a la identidad elemental

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^n} = \frac{4}{3}$$

que se demuestra fácilmente observando que

$$\frac{1}{4^n} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^n} = \frac{4}{3 \cdot 4^n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{n-1}}$$

y aplicando la fórmula de la suma de los términos de una progresión geométrica.

Multiplicando por s_o la relación obtenida por Arquímedes y llamando R_n a la cantidad

$R_n = (1/3)(1/4^3)s_o$,

se obtiene la relación:

$s_o+s_1+s_2+ \ldots. +s_n+R_n=B=(4/3)s_o$,

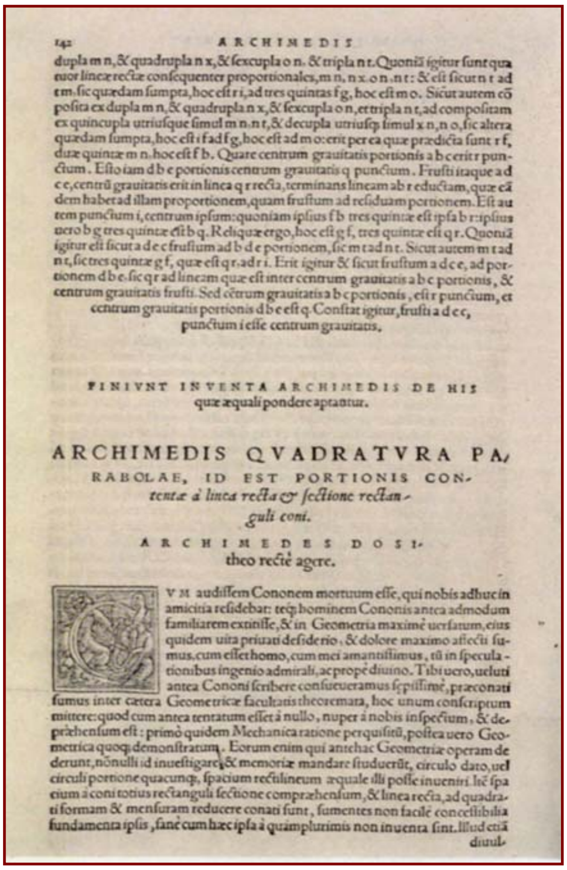
que es la condición 2 para aplicar el método de aproximación.

Tras estos desarrollos estamos en condiciones de aplicar el desarrollo teórico sobre el método de aproximación del comienzo de este apartado para obtener como Arquímedes (en la Proposición 24) el resultado de la cuadratura del segmento de parábola

PROPOSICION 24

«*El área de un segmento parabólico es igual al cuádruple del tercio de la del triángulo de la misma base y de la misma altura que el segmento.*»

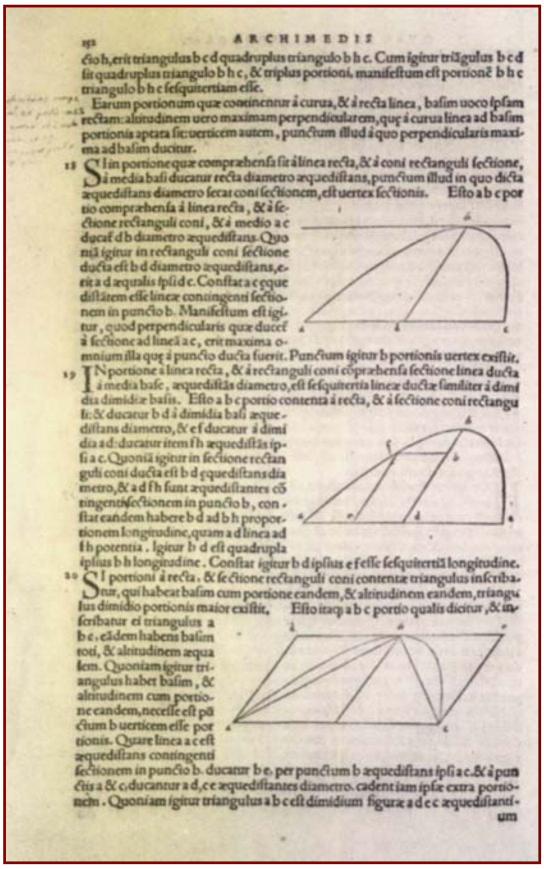
LA OBRA DE ARQUÍMEDES *SOBRE LA CUADRATURA DE LA PARÁBOLA*


142 ARCHIMEDIS

FINIVNT INVENTA ARCHIMEDIS DE HIS quæ æquali pondere aptantur.

ARCHIMEDIS QVADRATVRA PARABOLAE, ID EST PORTIONIS CONtentæ à linea recta & sectione rectanguli coni.

ARCHIMEDES DOSITHEO rectè agere.

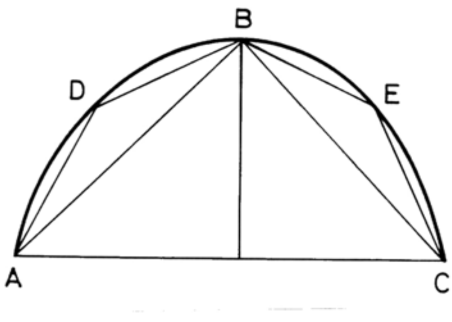

ARCHIMEDIS

Páginas de la obra de Arquímedes *Sobre la Cuadratura de la Parábola* de un ejemplar de la Universidad de Valladolid de *Archimedis Opera Omnia* (Basilea, 1544).

En este tratado Arquímedes consigue cuadrar por vez primera una figura limitada por líneas no todas rectas ni todas curvas, a base de construir un polígono equivalente a la parábola, primero por vía mecánica –que ya había desarrollado en EL MÉTODO– y después por vía geométrica.

R.Taton escribe sobre Arquímedes en su *Historia general de las Ciencias* (Orbis. Barcelona, 1988. Vol.2. Libro II, Cap.II.2. p.356–357):

> ***Dos hechos hay que observar en esta inducción* [de la Física y la Técnica sobre la Matemática] *que Arquímedes utiliza* [en EL MÉTODO] *para una gran cantidad de cuadraturas y cubaturas. El primero es el empleo de la estática para conseguir descubrimientos geométricos; Arquímedes no tiene ningún prejuicio de purista, y aprovecha toda analogía fecunda entre dos dominios científicos distintos. El segundo hecho es la asimilación de un área a una suma de segmentos rectilíneos; la de un volumen, a una suma de secciones planas, y la de un continuo en general, a la suma de una infinidad de indivisibles. Cuando Cavalieri vuelve a tomar, en el siglo XVII, este mismo camino, el método no resultará menos fecundo. Pero el sutil italiano será siempre, hasta cierto punto, prisionero de su propia conquista, y no logrará completar su análisis intuitivo con una síntesis rigurosa. Su predecesor griego había dado airosamente ese paso difícil, hecho en el cual se encierra una prueba de la magnitud de su genio.* [...].**
>
> ***En la Cuadratura de la Parábola, Arquímedes elimina una tras otra las dos dificultades. En la primera demostración conserva la misma figura de la carta a Eratóstenes, pero no descompone el segmento de parábola en un número infinito de segmentos rectilíneos, sino que le inscribe y circunscribe dos series de trapecios. Calcando el razonamiento de su método de descubrimiento, muestra entonces apelando a la exhaución de Eudoxo, que el segmento no es ni superior ni inferior a la tercera parte de la superficie del triángulo. Esta demostración rigurosa sigur, empero, basándose en los principios de la estática y no le satisface plenamente. Entonces da una demostración puramente geométrica, siguiendo paso a paso la dada por Eudoxo en la cubatura de la pirámide:***



ACB es un segmento de parábola, C es el punto en que la tangente es paralela a AB; D, el punto en que es paralela a AC; E, el punto en que es paralela a BC. Los triángulos ADC y CEB, que son equivalentes, tienen, cada uno de ellos, un área igual a 1/8 de la del triángulo ACB. La serie $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots$ ***tiene, como límite, 4/3 (empleando el lenguaje moderno). Arquímedes demuestra que el segmento no puede ser ni inferior ni superior a los 4/3 de la superficie del triángulo ABC.***

El *método de exhaución* en Arquímedes según J.Babini

ARQUIMEDES: *El Método*. Introducción y notas de J. Babini.
Eudeba, Buenos Aires, 1966, pp.14-17.

A comienzo del siglo IV a.C. la matemática tenía mas de un siglo de existencia. Nacida a la sombra de la metafísica pitagórica fundada en la omnipresencia y omnipotencia del numero («*el numero es la esencia de todas las cosas*»), ya había andado mucho. Sin embargo, pronto mostró su incompatibilidad con aquella metafísica, pues se demostró que no había numero (racional) para expresar la relación entre elementos tan simples como la diagonal y el lado de un cuadrado, o el lado de un triángulo equilátero y el diámetro de su circunferencia circunscrita, y así sucesivamente. Este hecho planteaba a los pitagóricos una tremenda alternativa: de mantener su metafísica, mutilaban la geometría; de mantener la geometría anulaban su metafísica. Mientras los pitagóricos se debatían en esta cuestión, los matemáticos encararon el problema desde el punto de vista técnico, y uno de ellos, Eudoxo de Cnido, encuentra una escapatoria. La solución de Eudoxo comprende una definición, un principio y un método. La definición de Eudoxo evita la dificultad que había presentado la razón entre cantidades inconmensurables, por carecer los griegos del concepto de nuestro «*numero irracional*», definiendo, no esa razón, sino la igualdad de razones; es decir, la proporción, de una manera tal de soslayar esa carencia. Para ello, mediante desigualdades y números enteros, logra definir la proporcionalidad, sean conmensurables o no las cantidades proporcionales. Esta definición de la proporcionalidad [Euclides V.5] es la que luego servirá de base a la teoría de la semejanza que aparece en los *Elementos* de Euclides [Libro VI].

El principio de Eudoxo establece la condición para que dos cantidades tengan razón. Ese «*principio*», que figura entre las definiciones del libro V de los *Elementos* [Euclides V.4], establece como tal condición que «*existe razón entre dos cantidades cuando un múltiplo de la menor supera a la mayor*», expresión en la que vuelven a aparecer números enteros y una desigualdad. Ahora bien, en su libro de la Esfera y del Cilindro [y también en la carta a Dositeo que antecede a la obra *Sobre la Cuadratura de la Parábola*] Arquímedes incluye esa proporción entre los postulados [Postulado I.5], ya que no obstante la gran evidencia que el «*principio*» revela, su perspicacia matemática le advierte que no se trata de una definición, sino de una proposición de la cual debe partirse, es decir, de un postulado. La existencia de «*geometrías no arquimedianas*» demostradas este siglo que ni cumplen con ese postulado, muestran claramente cuan acertada fue la ubicación que Arquímedes asignó a este «*principio*». en la construcción geométrica. Hoy, ese postulado es el importante «*Postulado de Continuidad*», a veces llamado «*Postulado de Arquímedes*» o «*Postulado de Eudoxo–Arquímedes*», en vista de su origen.

Tal postulado desempeña un papel fundamental en el «*método de exhaución*». Este método ideado por Eudoxo y aplicado por éste por primera vez, es el que en la geometría griega suple los actuales métodos infinitesimales. La primera observación importante que se formula es que no se trata de un método de descubrimiento sino de demostración, es decir, que supone conocido de alguna manera el resultado y ofrece un procedimiento riguroso para demostrarlo. De paso observemos como, ya en la época de Eudoxo, la matemática reflejaba su característica fundamental de poner el acento en el proceso deductivo, en la demostración, y no en el resultado.

Conocido, pues, de antemano el resultado, la demostración por el método de Eudoxo de que, por ejemplo, una cierta figura A es equivalente a una cierta figura B, consiste en una doble reducción al absurdo, probando que los supuesto de ser A mayor o menor que B conducen a contradicciones, de manera que no queda otra alternativa que A sea equivalente a B. Y es en esta demostración que juega su papel el postulado anterior, ya que la demostración exige que se pueda descomponer la figura en partes tales que una de ellas sea inferior a una figura dada, y esto se logra precisamente en virtud el postulado. Esta descomposición de la figura en partes cada vez más pequeña fue la causa por la cual un matemático renacentista dio al método el nombre de «*método de exhaución*», aunque en verdad tal descomposición «*no agota*» la figura, sino que solo llega la punto en que cierta figura es menor que una figura dada.

El método de exhaución, aplicado por Euclides en los *Elementos* en la demostración de unos pocos teoremas se convierte en manos de Arquímedes en el método riguroso con el cual determina sus muchísimas cuadraturas y cubaturas que hoy se logran más fácilmente mediante los métodos infinitesimales.

Así como el «*Principio de Eudoxo*», convertido por Arquímedes en postulado, es nuestro actual «*Postulado de Continuidad*», indispensable en el Análisis Infinitesimal, el método de exhaución es la traducción geométrica de la operación de «*paso al límite*», característica de los métodos infinitesimales. Así como en el método de exhaución se trata de llegar a una figura menor que una figura prefijada, la definición de límite exige precisar un valor menor que una cantidad prefijada.

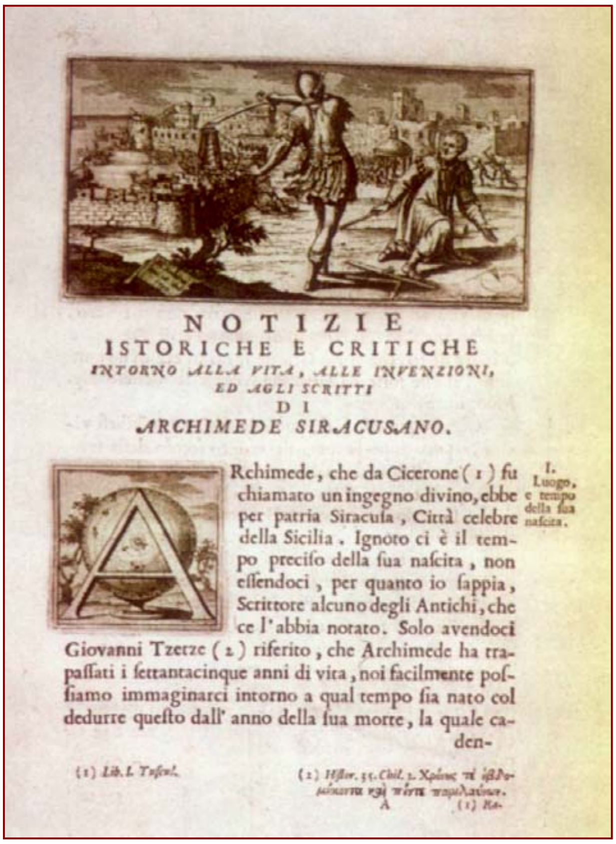
De ahí que no ha de extrañar que se advierta en los escritos de Arquímedes una estrecha analogía con los métodos infinitesimales de hoy, que permiten calcular las cuadraturas y las cubaturas de Arquímedes mediante integrales definidas. Estas integrales que los recursos del Calculo Integral proporcionan fácilmente, comportan por su definición el concepto de límite aplicado a ciertas sumas. Ahora bien, estas sumas aparecen en sus escritos como material previo a la determinación de las cuadraturas o las cubaturas.

Dibujo a plumilla de un busto tradicionalmente atribuido a Arquímedes del Museo Capitolino de Roma.

LA OBRA CRÍTICA DE MAZZUCHELLI SOBRE ARQUÍMEDES


NOTIZIE
ISTORICHE E CRITICHE
INTORNO
ALLA VITA, ALLE INVENZIONI,
ED AGLI SCRITTI
DI
ARCHIMEDE
SIRACUSANO
DEL
CO. GIAN-MARIA MAZZUCHELLI
BRESCIANO.

IN BRESCIA. CIƆIƆCCXXXVII.
Presso Gian-Maria Rizzardi.
Colla Facoltà de' Superiori.


NOTIZIE
ISTORICHE E CRITICHE
INTORNO ALLA VITA, ALLE INVENZIONI,
ED AGLI SCRITTI
DI
ARCHIMEDE SIRACUSANO.

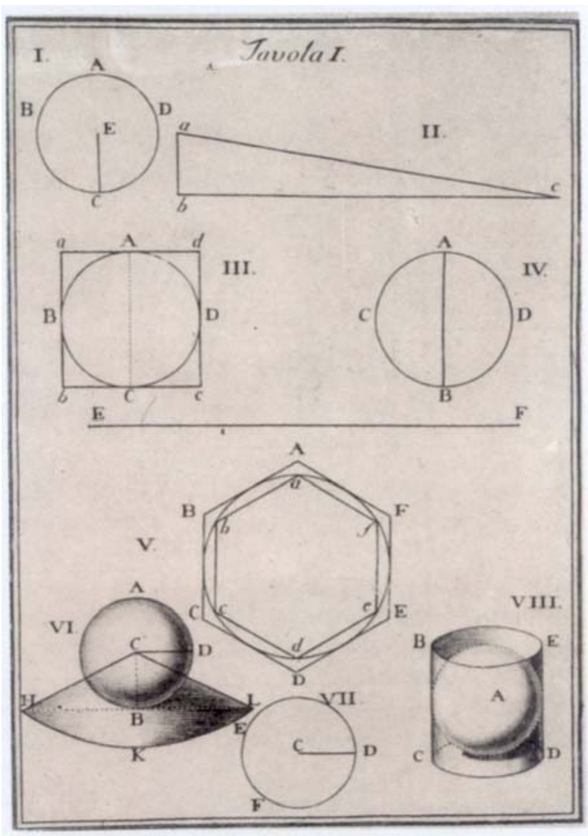
Archimede, che da Cicerone (1) fu chiamato un ingegno divino, ebbe per patria Siracusa, Città celebre della Sicilia. Ignoto ci è il tempo preciso della sua nascita, non essendoci, per quanto io sappia, Scrittore alcuno degli Antichi, che ce l'abbia notato. Solo avendoci Giovanni Tzetze (2) riferito, che Archimede ha trapassati i settantacinque anni di vita, noi facilmente possiamo immaginarci intorno a qual tempo sia nato col dedurre questo dall' anno della sua morte, la quale caden-

I. Luogo, e tempo della sua nascita.

(1) Lib. I. Tuscul.

La obra crítica de Mazzuchelli sobre Arquímedes (Brescia, 1737). Biblioteca Municipal de Mantua.

1. Portada de la obra crítica de Mazzuchelli con la escena del «*Eureka*».
2. Página inicial de obra crítica de Mazzuchelli con una escena de la muerte de Arquímedes por un soldado romano, en la toma de Siracusa por el cónsul Marcelo.
3. Grabado de la obra crítica de Mazzuchelli que reproduce algunos estudios geométricos de Arquímedes: la cuadratura del círculo, la relación entre la circunferencia y el diámetro, y la esfera y el cilindro.

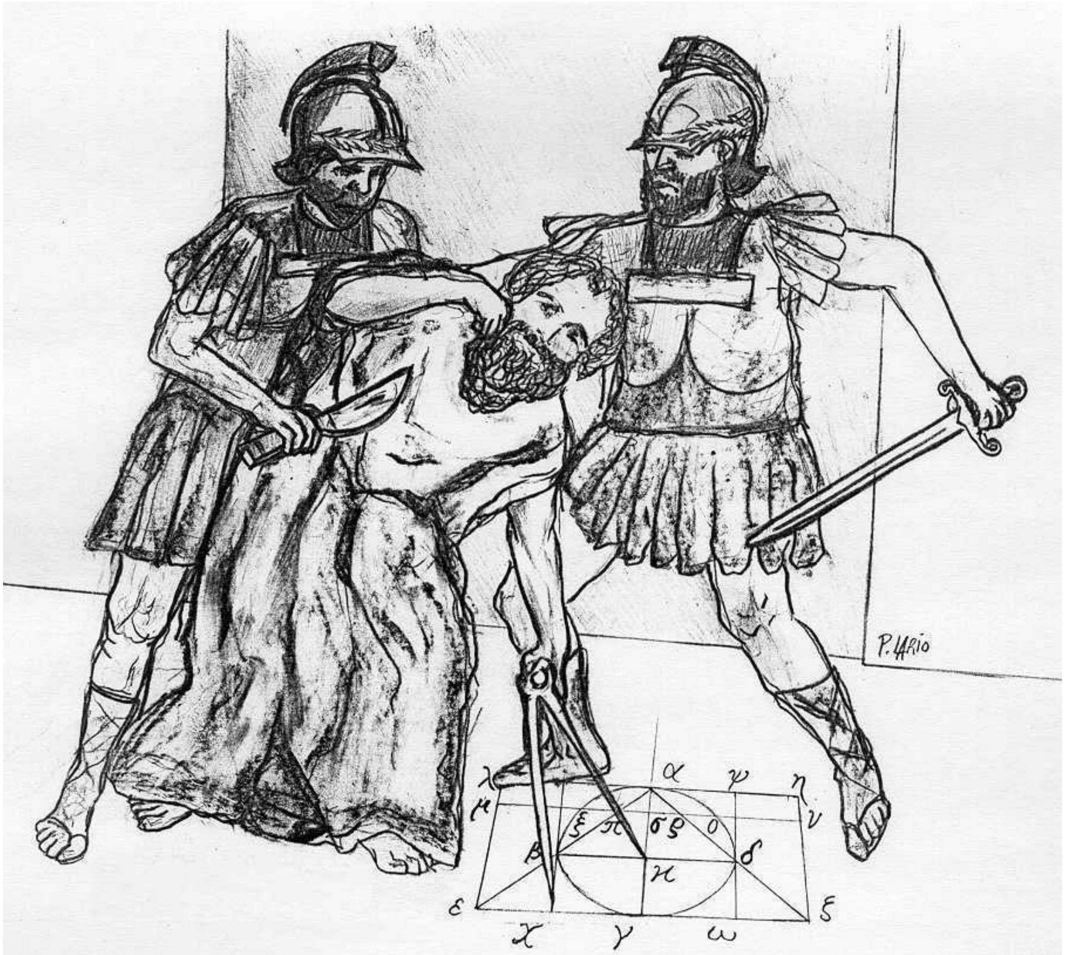


Este tratado, de un gran valor histórico e iconográfico, intenta ordenar las múltiples informaciones, muchas de ellas legendarias sobre los episodios más o menos inverosímiles de la vida y la obra de Arquímedes, en relación con su brillante actividad científica y técnica.

La propia portada ilustra la escena urbana del «*Eureka*» de un Arquímedes pletórico de alegría ante la intuición del descubrimiento hidrostático, a propósito de la anécdota más conocida de Arquímedes que es la del «*fraude de la corona de oro del rey Hierón*», simplemente mencionada por Plutarco, pero extensamente relatada por Vitrubio –en su obra *De Architectura*, IX, Pref,9–10–, para quien la forma de descubrir el engaño cometido contra el rey, constituye la más sutil y genial de las intuiciones de Arquímedes.

El sabio de Siracusa introduce el llamado «*Principio de Arquímedes*» de la Hidrostática en su obra *Sobre los Cuerpos Flotantes* :«*Todo cuerpo sumergido en un líquido experimenta un empuje hacia arriba igual al peso del líquido desalojado*». Con los desarrollos matemáticos introducidos en este tratado, Arquímedes contribuyó de forma poderosa al ulterior desarrollo de la arquitectura naval.

LA ÉPICA MUERTE DE ARQUÍMEDES



Recreación libre, realizada por Pedro Lario (2000), del grabado sobre la muerte de Arquímedes que se conserva en la Biblioteca del Monasterio de San Lorenzo del Escorial. La figura geométrica corresponde a la utilizada por Arquímedes para la cuadratura de la esfera en *EL MÉTODO*.

La biografía histórica y la literatura ha descrito la figura de Arquímedes como el paradigma del ingeniero de la antigüedad, que pone su genio y su ingenio, como técnico, al servicio del patriotismo que exige la difícil situación política y militar de su tierra, con una actuación épica que alcanza a dar la vida por la patria. Tal vez por esto la Historia del Arte ha sido muy generoso con Arquímedes al tomar su figura y su historia personal, en particular sus últimos momentos, como tema artístico en los más diversos estilos, lo que se refleja en la abundante iconografía arquimediana.

Arquímedes murió en el año 212 a.C. en la caída de Siracusa en manos del cónsul romano, Marcelo, durante la segunda guerra púnica, tras un prolongado cerco de tres años, en el que el sabio participó brillantemente como defensor, ingeniando espectaculares artilugios militares, que causando el terror al enemigo, prolongarían de forma muy considerable la de otro modo inminente toma de la ciudad.

La muerte de Arquímedes ha sido descrita en diversas narraciones por parte de numerosos historiadores y literatos (Plutarco, Valerio Máximo, Tito Livio, Silio Itálico, Giorgio Valla, Zonarás, Tzetzes, Cicerón, etc.) siempre rodeada de una atmósfera novelesca épica. Veamos el relato de Plutarco (Marcelo, XIX):

> **«[...]** *Lo que principalmente afligió a Marcelo* **[tras la conquista de Siracusa]** *fue lo que ocurrió con Arquímedes: hallábase éste casualmente entregado al examen de cierta figura matemática, y fijos en ella su ánimo y su vista, no sintió la invasión de los romanos ni la toma de la ciudad. Presentósele repentinamente un soldado, dándole orden de que le siguiera a casa de Marcelo; pero él no quiso antes de resolver el problema y llevarlo hasta la demostración; con lo que, irritado el soldado, desenvainó la espada y le dio muerte. Otros dicen que ya el romano se le presentó con la espada desenvainada en actitud de matarle, y que al verle le rogó y suplicó se esperara un poco, para no dejar imperfecto y oscuro lo que estaba investigando; de lo que el soldado no hizo caso y le pasó con la espada. Todavía hay acerca de esto otra relación, diciéndose que Arquímedes llevaba a Marcelo algunos instrumentos matemáticos, como cuadrantes, esferas y ángulos, con los que manifestaba a la vista la magnitud del sol, y que dando con él los soldados, como creyesen que dentro llevaba oro, le mataron. Fuese como fuese, lo que no puede dudarse es que Marcelo lo sintió mucho, que al soldado que le mató de su propia mano le mandó retirarse de su presencia como abominable, y que habiendo hecho buscar a sus deudos, los trató con el mayor respeto y distinción.***»**

La capacidad abstractiva de Arquímedes, absorto siempre en sus especulaciones geométricas, le inhibió la atención sobre el evento más dramático que vivió su patria en toda su historia. Cualquiera que sea la versión auténtica, todos los historiadores coinciden en que Marcelo quería proteger a Arquímedes, es decir que la admiración del militar hacia el sabio, convertía la hostilidad que debía tener hacia su enemigo principal en magnanimidad. Así desapareció el más grande de todos los sabios del mundo antiguo, víctima, como muchos, de la violencia que trae los desastres de la guerra.

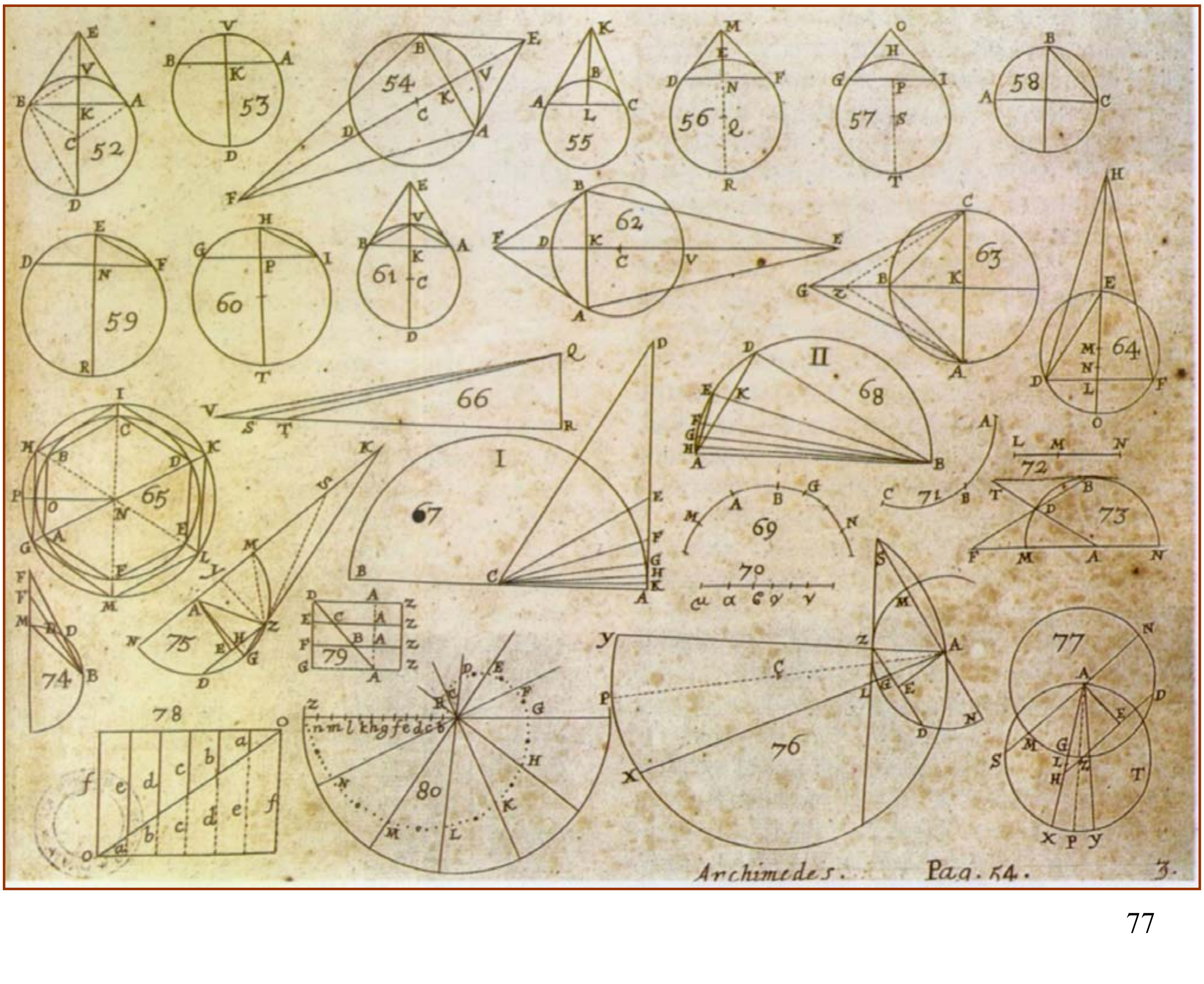
ARQUÍMEDES PRECEDENTE DEL CÁLCULO INTEGRAL

Mediante su brillante método mecánico, Arquímedes realiza una investigación preliminar que ratifica con absoluto rigor mediante el método de exhaución. Con ello anticipa infinidad de resultados sobre cuadraturas, cubaturas, que forman parte de la doctrina de nuestro Cálculo Integral, y que actualmente obtenemos mediante los recursos analíticos del cálculo algebraico y de la aplicación de los límites, que descubren y demuestran simultáneamente. Pero las rigurosas demostraciones de Arquímedes deben implicar bajo una forma estrictamente geométrica –la del Algebra Geométrica de los Libros II y VI de *Los Elementos* de Euclides– todos esos medios infinitesimales modernos. Todo ello ubica a Arquímedes en antesala histórica del Cálculo Integral. Por eso como afirma E.Rufini (*Il Metodo d'Archimede e le origine dell'analisi infinitesimale nell'antichità*, p.187):

> ***«Arquímedes anticipa nuestro Cálculo Integral, tanto en el tiempo como en la seguridad de los procedimientos y en la genialidad de los artificios no superados por los precursores del siglo XVII.»***

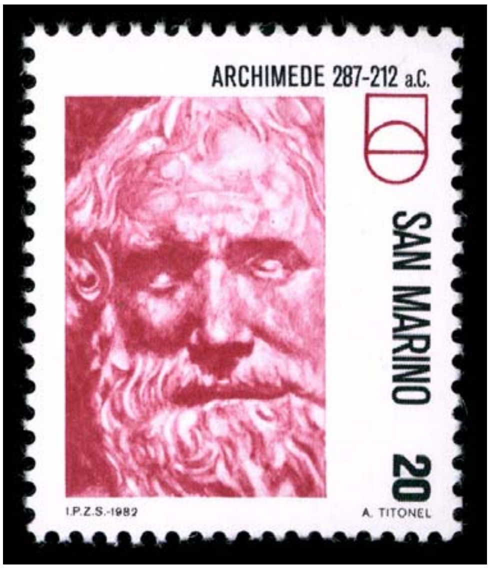
En suma, la influencia de Arquímedes ha sido decisiva en la génesis del Cálculo Infinitesimal. Los impresionantes problemas de cuadraturas y cubaturas, resueltos mediante el método mecánico son el antecedente directo –aunque oculto– de los indivisibles e infinitesimales del siglo XVII que anticipan el Calculo Integral, mientras que el método demostrativo de exhaución es el antecedente directo de los límites de la aritmetización del Análisis del siglo XIX.

1. Portada de la edición de Maurólico (1685) de las Obras de Arquímedes. Biblioteca de la Universidad de Pavía.
2. Página 54 de esta edición con numerosas ilustraciones de los desarrollos geométricos de los teoremas.



ICONOGRAFÍA ARQUIMEDIANA EN LOS SELLOS DE CORREOS

1. Sello de correo italiano de 1983 que reproduce el busto de Arquímedes del Museo Nacional de Nápoles, junto a un tornillo hidráulico ideado por Arquímedes.
2. Sello de correo nicaragüense que representa la famosa *Ley de la Palanca* de Arquímedes, considerada como una de «*las diez fórmulas que cambiaron la faz de la tierra*»
3. Sello de correo de San Marino de 1982 que representa un fragmento del busto de Arquímedes del Museo Nacional de Nápoles.
4. Sello de correo de la antigua Alemania Oriental de 1973 que reproduce el cuadro sobre Arquímedes del pintor italiano D.Fetti (*Gemäldegalerie Alte Meister*,Dresde, Alemania).
5. Sello de correo español de 1963 que reproduce el cuadro del pintor español Ribera (1630) sobre Arquímedes (Museo del Prado, Madrid).



Las cuestiones infinitesimales en la Edad Media. Oresme

Las especulaciones de los filósofos del Liceo fueron la base para la Filosofía escolástica en sus elucubraciones, discusiones y disputas medievales sobre el infinito, la naturaleza del continuo y los indivisibles, aunque desde un punto de vista más filosófico que matemático, llegando a plantear con sagacidad sutiles dificultades lógicas que no se resolvieron hasta bien entrado el siglo XIX.

El estudio del cambio y el movimiento fue un tópico de la especulación filosófica medieval, desarrollada sobre todo en las Universidades. A ello contribuyó considerablemente las traducciones latinas de *La Física* de Aristóteles y de los trabajos de Arquímedes sobre Estática.

El punto de vista más aristotélico sobre la ciencia del siglo XIII lo ostenta Jordanus Nemorarius (hacia 1225), ponderado como fundador de la escuela medieval de mecánica. En su obra *De Triangulis* apreciamos ciertas sorprendentes definiciones:

> «*La continuidad es la imposibilidad de distinguir los puntos límites unida a la posibilidad de establecer un límite*. [...]. *El punto es lo que establece la continuidad simple*, [...].»

Son definiciones que con todas sus deficiencias de estilo, dificultades y contradicciones, demuestran cómo la Matemática infinitesimal iba abriéndose camino entre los escolásticos.

Durante el siglo XIV las Universidades de Oxford y de París desarrollaron abundantes estudios sobre el cambio y el movimiento, de donde surgen las primeras cuestiones de índole infinitesimal, diferentes a las de la Geometría griega. En Oxford los filósofos del Colegio de Merton –epónimo de un grupo de maestros entre los que sobresalen R.Swineshead, W.Heytesbury, J.Dumbleton– comparan movimientos uniformes y movimientos uniformemente acelerados, estudian la tasa uniforme de cambio y desarrollan hacia 1330, de forma retórica, la famosa «*Regla de Merton*»:

> «*Si un cuerpo se mueve con movimiento uniformemente acelerado, la distancia recorrida será la misma que la recorrida, en el mismo tiempo, con movimiento uniforme y a una velocidad igual a la de la mitad del tiempo* [velocidad media entre las velocidades inicial y final del recorrido].»

T. Brawardine conocido por su eminencia en Filosofía y Matemáticas como «*Doctor Profundis*», escribe, hacia 1325, una Geometría que recuerda algunos aspectos de *Sobre la medida del círculo de Arquímedes*. Su tendencia filosófica resalta en sus obras *Geometrica speculativa* y *Tractatus de continuo*, donde especula sobre el continuo, el infinito y el ángulo de contingencia. En torno al continuo, Brawardine distingue el continuo fijo –«*continuum permanens*»–, que se manifiesta en las líneas, superficies y volúmenes, del continuo progresivo –«*continuum succesivum*»– que acontece en el tiempo y el movimiento. En las obras aludidas aparecen reflexiones que se sintetizan en algunas frases:

> «[...]. *Lo indivisible es lo que no puede dividirse nunca. El punto es lo indivisible determinado por su posición*. [...]. *En el tiempo lo indivisible es el instante*. [...] *El movimiento es lo continuo sucesivo medido en el tiempo*.»

Brawardine distingue dos tipos de magnitud infinita, una infinita «*a secas*», que no tiene fin, y otra tal que para cada magnitud finita siempre existe otra mayor, sin pararse nunca. Muchos historiadores aprecian en esta distinción la raíz del intuicionismo moderno e incluso la analogía con el infinito y transfinito de Cantor. Sobre el continuo y el indivisible, Brawardine insiste en que una magnitud continua no puede estar formada por un número finito de magnitudes indivisibles, sino que incluye un número infinito de indivisibles, pero no están constituidas por estos átomos matemáticos, sino que cada continuo está formado por un número infinito de elementos continuos de la misma naturaleza; así por ejemplo, un segmento, área o volumen está compuesto por infinitos segmentos, áreas o volúmenes.

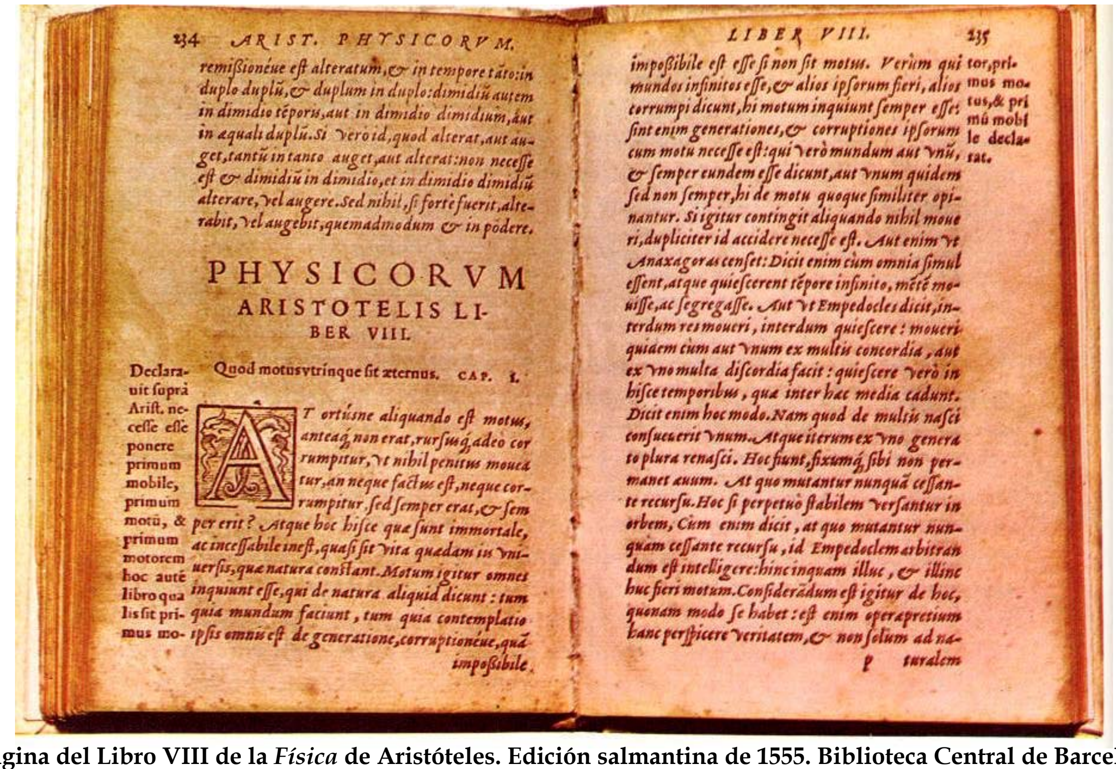
LA FÍSICA DE ARISTÓTELES
Y LAS CUESTIONES INFINITESIMALES EN LA EDAD MEDIA

Aristóteles enseñando Filosofía, en un manuscrito medieval. Monasterio de El Escorial. Madrid.

El interés por las cuestiones infinitesimales en el Medioevo aparece en el ámbito del estudio del cambio y el movimiento que fue un tópico de la especulación filosófica medieval, desarrollada ante todo en las Universidades, a partir de las traducciones latinas de *La Física* de Aristóteles, que fue la punta de lanza de la recuperación en la Edad Media de la Filosofía griega, en general.

La Filosofía escolástica debatió ampliamente sobre el concepto de «*forma*» – en el sentido de la «*cualidad*» aristotélica, como los atributos de los fenómenos naturales de intensidad medible, la cuantificación de cuya variación nos aporta valiosa información. En particular, en el estudio del movimiento, como investigación de las variaciones de las intensidades de las formas –cantidades continuas–, en este caso distancias a partir de otras –*en función de*– como el tiempo –paradigma del continuo– se alcanzaron resultados muy importantes como el «*Teorema de Merton*», sobre el valor medio de una forma cuya velocidad de cambio es constante.

Toda una prolija reflexión filosófica, de origen aristotélico, tiene lugar sobre el continuo, el infinito y el indivisible, a lo largo del siglo XIV, en las Universidades de Oxford y de París, que al desarrollar abundantes estudios sobre el cambio y el movimiento, inician las primeras cuestiones infinitesimales diferentes a las de la Geometría griega y van atemperando «*el horror al infinito*» que caracterizó a ésta.



Página del Libro VIII de la *Física* de Aristóteles. Edición salmantina de 1555. Biblioteca Central de Barcelona.

La Filosofía escolástica discutió largamente sobre el concepto de «*forma*» –con un significado más o menos equivalente a la «*cualidad*» aristotélica, es decir, atributos que admiten variación en intensidad–, aplicado al estudio de la naturaleza, en el sentido de fenómeno natural de intensidad medible, es decir, estudiando la cuantificación de las formas variables. Se estudian las variaciones de las intensidades de las cantidades continuas, tales como la distancia de un punto móvil con relación a un punto fijo, a partir de otras cantidades como el tiempo, que se convierte en el prototipo de continuo. Aunque las discusiones fueron largas y prolijas, se consiguieron importantes resultados, como el aludido «*Teorema de Merton*», relativo al valor medio de una forma cuya velocidad de cambio es constante.

Nicolás de Oresme recoge y desarrolla ampliamente el tema de la llamada «*latitud de las formas*» en su obra *Tractatus de latitudinibus formarum*, escrito hacia 1362, a modo de resumen de su obra más importante *Tractatus de figurationem potentiarum et mensurarum*. En la primera de estas obras Oresme escribe:

> [...]. *La dimensión de los fenómenos está sometida a múltiples variaciones y dicha multiplicidad es difícilmente discernible si su estudio no se remite al estudio de figuras geométricas.* [...]. *Todo lo que varía, se sepa medir o no, lo podemos imaginar como una cantidad continua representada por un segmento rectilíneo*. [...].

He aquí la importante novedad de Oresme, la noción de gráfico como elemento descriptivo de una cualidad para facilitar la comprensión de la variación de un fenómeno, lo que él llama la representación gráfica de «*las intensidades de la cualidades*», germen de nuestra representación gráfica de funciones en un sistema de coordenadas introducido *a priori*, uno de los aspectos esenciales de la Geometría Analítica. La representación gráfica en sí no es lo nuevo pues las figuras geométricas y los mapas son ejemplos antiguos de representaciones gráficas. La innovación de Oresme estriba en que ya no se mantiene la homogeneidad entre la representación que es un segmento y la magnitud representada que es tiempo o intensidad.

Elegido un punto origen en una recta horizontal, Oresme llama «*longitudo*» (longitud) a nuestra abscisa, que es el tiempo o el espacio, y eleva una perpendicular, la «*latitudo*» (latitud), nuestra ordenada, que es proporcional a la intensidad o amplitud del fenómeno, ya sea velocidad, calor u otros. La diferencia entre dos ordenadas sucesivas se llama grado de la amplitud («*excessus graduum*») y es una medida de la variabilidad. Si el «*excessus graduum*» varía los puntos extremos de las ordenadas ya no se situarán sobre una recta sino sobre una curva. La cualidad, forma o propiedad es representada de acuerdo con la variación de la intensidad respecto del tiempo. Pero esta variación no se refleja como en la Geometría Analítica por la curva descrita por los puntos de longitud y latitud dadas, sino por la figura total, es decir el área que determina esa curva, el eje de las longitudes y las intensidades inicial y final, que Oresme llama simplemente «*figura*».

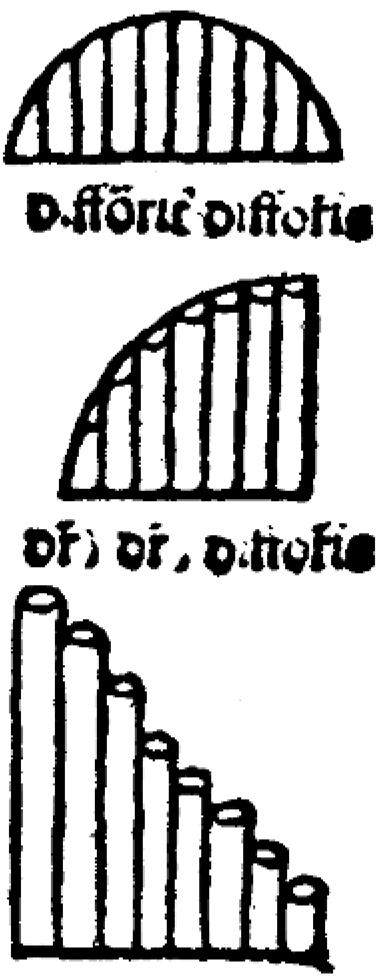
En la obra de Oresme hay un estudio matemático de las figuras planas que producen las representaciones gráficas de las *cualidades*. Oresme considera varios géneros de formas que darán lugar a otras tantas formas de representación geométrica. En primer lugar las formas uniformes («*qualitas uniformes*») correspondientes a nuestras funciones constantes y cuya representación gráfica da un rectángulo. Siguen las formas uniformemente diformes («*uniformitis difformis*»), que se corresponden con nuestras funciones afines y cuya representación gráfica es un trapecio.

Oresme define estas últimas en forma de proporción de la siguiente manera:

> «*La cualidad uniformemente diforme es aquella para la que, siendo dados tres puntos cualesquiera, la razón de la distancia del primero al segundo a la distancia del segundo al tercero es igual a la razón del exceso de intensidad del primero sobre el segundo al exceso de intensidad del segundo sobre el tercero*.»

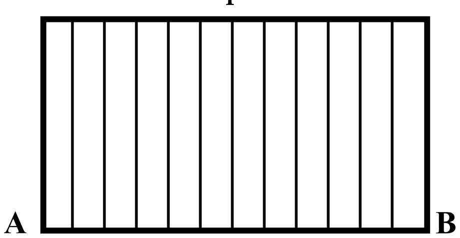
Finalmente Oresme define el tercer género de formas, las formas diformemente diformes («*difformitis diformis*») como las que no corresponden a los géneros anteriores.

LA *LATITUD DE LAS FORMAS* DE ORESME

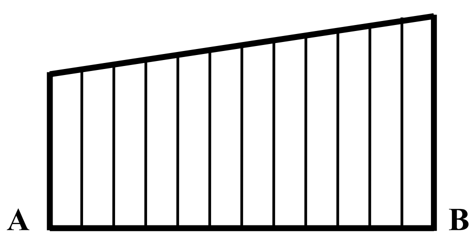


Página de una edición de 1505 de la obra de Oresme *Tractatus de latitudinibus formarum*, donde aparecen los diversas formas geométricas correspondientes a las representaciones gráficas de «*las intensidades de las cualidades*».

Oresme introduce la noción de gráfico para facilitar la comprensión de la variación de un fenómeno natural de intensidad medible. Al estudiar la cuantificación de las formas variables, Oresme realiza la primera aproximación histórica al concepto de función –y su representación gráfica– como un dinámico instrumento matemático que conecta los entes geométricos que se utilizan para describir la evolución de un fenómeno. De este modo, Oresme empieza a desarrollar una herramienta, –el concepto de función– de una utilidad esencial para desentrañar las leyes de la naturaleza.



aequalitas uniformes



uniformitis difformis

Representación gráfica de «*las intensidades de las cualidades*» de las formas geométricas más sencillas de Oresme:

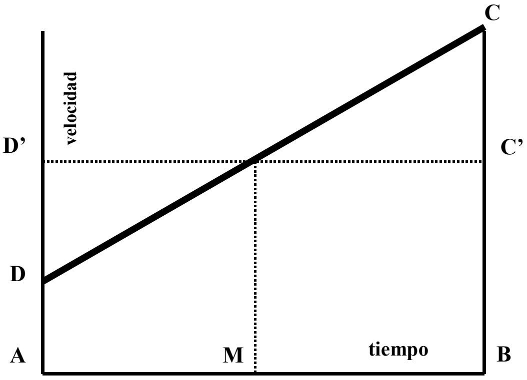
1. **Las formas uniformes –«*qualitas uniformes*»– corresponden a funciones constantes y su representación gráfica es un rectángulo.**
2. **Las formas uniformemente diformes –«*uniformitis difformis*»–, que se corresponden con nuestras funciones afines y su representación gráfica es un trapecio.**

LAS LEYES DEL MOVIMIENTO DE ORESME

Nicolás de Oresme aplica la Teoría de *latitud de las formas* al estudio del movimiento mediante lo que se le considera un auténtico anticipador de la Cinemática de Galileo.

Con el fin de describir el movimiento rectilíneo, Oresme introduce la idea de representar gráficamente la velocidad instantánea del móvil en función del tiempo. Sobre una recta horizontal lleva graduaciones de segmentos equivalentes al tiempo y sobre ellas eleva segmentos perpendiculares de longitudes equivalentes a la velocidad del móvil en los instantes correspondientes. Así obtiene el diagrama velocidad-tiempo del cual a Oresme le interesa la porción de plano barrido por las perpendiculares sucesivas. A través de la generalización del examen de casos particulares simples, Oresme llega a la conclusión de que el área barrida por las perpendiculares sucesivas elevadas sobre cada graduación de un intervalo de tiempo equivale a la distancia recorrida por el móvil durante ese intervalo de tiempo –*Principio de Oresme*–. Este postulado es la base de sus descubrimientos sobre el movimiento uniformemente acelerado.

Para este tipo de movimiento, que es el caso más importante, el crecimiento de la velocidad del móvil es proporcional a la duración durante la cual se produce tal crecimiento. La representación gráfica de la velocidad en función del tiempo en el sentido de Oresme, es decir, la porción de plano barrido por las perpendiculares sucesivas –los segmentos de velocidad– resulta ser un trapecio determinado por la recta formada por los puntos superiores de tales perpendiculares, la recta de longitudes y los segmentos de las latitudes extremas.

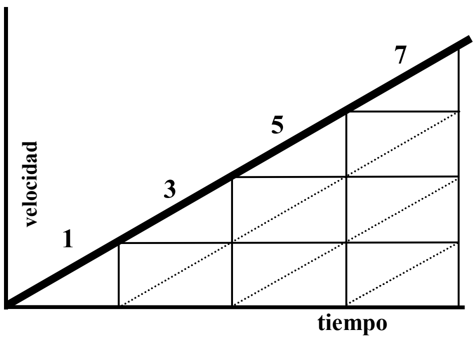


Ya que según el *Principio de Oresme*, el área del trapecio ABCD equivale a la distancia recorrida en el intervalo de tiempo AB, y puesto que el área de este trapecio es igual a la del rectángulo ABC'D', deduce Oresme que la distancia recorrida por el móvil con movimiento uniformemente acelerado en el intervalo de tiempo AB, es la misma que la que recorrería con movimiento uniforme de velocidad igual a la que tiene en el instante medio M. Así pues, Oresme obtiene una verificación geométrica del famoso «*Teorema de Merton*» del grupo de filósofos que adoptaron el epónimo de *Colegio de Merton*.

Claro está que una demostración rigurosa exige los recursos del Cálculo Integral. Es posible que lo asumiera como una generalización inmediata del caso de la velocidad uniforme, o tal vez en la línea de la «*composición*» *de Arquímedes* y de los futuros «*Indivisibles*» de Cavalieri considerase el área como la yuxtaposición de los segmentos verticales, o en la línea de los posteriores desarrollos infinitesimales de Roberval pensase el área como formada por rectángulos muy finos de altura una velocidad constante actuando durante un instante muy pequeño, con toda la problemática que esto acarrea en cuanto a la composición del continuo.

Los resultados de Oresme puede que no sean rigurosos a nuestros ojos –el concepto de rigor en Matemáticas es privativo del paradigma de cada época– pero hasta la invención de la Geometría Analítica por parte de Fermat y Descartes y hasta el desarrollo del Cálculo por Cavalieri, Fermat, Pascal y finalmente Newton y Leibniz, la Cinemática no tendrá mejores demostraciones del movimiento uniformemente acelerado que las de Oresme.

Prosiguiendo sus estudios, Oresme considera un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado en el que la velocidad inicial es cero. Subdividiendo el intervalo AB en un cierto número de partes iguales, resulta que las áreas de los trapecios alzados sobre los intervalos están en las proporciones 1,3,5,7,... De acuerdo con el *Principio* lo mismo sucederá con las distancias recorridas en estos intervalos. Oresme escribe:



«*Ahora bien, como ha señalado el gran matemático griego Pitágoras* [la suma de números triangulares consecutivos es un número cuadrado]*: se tiene*:

***1=1=1 vez 1* [=2^2]**

***1+3=4=2 veces 2* [=2^2]**

***1+3+5=9=3 veces 3* [=3^2]**

***1+3+5+7=16=4 veces 4* [=4^2]**

....

***se obtiene siempre un número cuadrado. Por este medio se pueden obtener las razones mutuas de las cantidades* [áreas] *totales.*»**

Vemos, pues, que la representación gráfica, como instrumento básico de la Geometría Analítica ha empezado a dar su fruto: Oresme ha establecido la ley fundamental del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. La distancia recorrida es proporcional al cuadrado del tiempo.

Oresme sugiere incluso una extensión a tres dimensiones de la«*latitud de las formas*», que en nuestro lenguaje sería la representación gráfica de una función de dos variables mediante un volumen formado por todas las ordenadas de valor dado por una regla levantadas sobre los puntos de un plano horizontal.

Es interesante analizar en qué sentido Oresme desarrolló Geometría Analítica y Cálculo Infinitesimal. La consideración de coordenadas cartesianas, denominadas por Oresme longitud y latitud, no es en realidad una innovación. Apolonio y otros matemáticos y geógrafos griegos habían utilizado algún sistema de coordenadas. La verdadera innovación de Oresme es la representación gráfica de una cantidad variable mediante coordenadas, aunque se limitara a las funciones afines, y en este aspecto el trabajo de Oresme se desarrolla en el sentido positivo de la Geometría Analítica. Pero Oresme no recorre el otro sentido de la Geometría Analítica, es decir no desarrolla el principio de que toda curva plana puede ser representada, con respecto a un sistema de coordenadas, como una función de una variable. Oresme está más bien interesado por las cuestiones de la variación de las formas –es decir, por los aspectos diferenciales– así como por la variación del área bajo la curva –es decir, los aspectos integrales–, más que por el estudio analítico de la curva. En este sentido podemos decir que Oresme se acercó más al Cálculo Infinitesimal que a la Geometría Analítica.

Pero hay otros aspectos en relación con el concepto de función y con los máximos y mínimos, que sitúan a Oresme en la línea de lo Infinitesimal. Conceptualmente hay una diferencia esencial entre la representación de una trayectoria bajo la forma de una curva y la representación que hace Oresme de las variaciones de la intensidad de un fenómeno respecto al tiempo. Es de aquí, al generalizar, de donde surge el concepto de función, el instrumento matemático más dinámico, que conecta los entes geométricos, describiendo el devenir de un ser que se transforma en otro. El concepto de función permite alcanzar así la síntesis dialéctica entre las antagónicas concepciones de la realidad, la estática concepción eleática y la dinámica concepción heraclitiana, por eso se ha convertido en el instrumento más adecuado para desentrañar las leyes de la naturaleza.

Abundando en cuestiones infinitesimales y moviéndose en un nivel intuitivo, Oresme advierte que en una figura curva, por ejemplo un semicírculo construido sobre la longitud, es decir, sobre el eje de abscisas, las latitudes que corresponden a los puntos donde la curva empieza a ascender crecen de forma rápida. Pero este aumento, medido por el llamado grado de la amplitud (*excessus graduum*), va continuamente disminuyendo a medida que ascendemos, es decir a medida que nos acercamos al máximo, en cuyo entorno desaparece casi totalmente. Parece advertirse en esta argumentación una intuitiva observación en torno al problema de la tangente y a la correspondiente condición necesaria de extremo, embrión de las consideraciones de Fermat sobre máximos y mínimos y antes, de Kepler, tal como aparecen en su obra *Nova stereometria doliorum vinariorum* de 1615:

> «*Cerca de un máximo los decrementos son al principio imperceptibles*.»

En resumen, Nicolás de Oresme introduce al menos implícitamente cinco ideas innovadoras:

a) La medida de diversas variables físicas por medio de segmentos.

b) Algún tipo de relación funcional entre variables.

c) Una aproximación a la introducción de las coordenadas mediante la representación gráfica de relaciones funcionales

d) La constancia de la disminución de la variación en las proximidades de un extremo.

e) Una especie de integración o sumación continua para calcular la distancia como el área bajo el grafo velocidad-tiempo.

LA CONTRIBUCIÓN DE ORESME AL DESARROLLO DE LO INFINITESIMAL EN EL MEDIEVO

N.Oresme en su pupitre junto a una esfera armilar. Siglo XV. Biblioteca Nacional. París.

Ilustración de su obra en francés *Les gloses du traité du ciel et du monde*, que es un comentario a la traducción que hizo de la obra de Aristóteles D*e Caelo*.

Nicolás de Oresme fue el científico medieval que más contribuyó al desarrollo de las cuestiones infinitesimales con la consideración de la «*latitud de las formas*» en su obra *Tractatus de latitudinibus formarum*.

Las aportaciones de Oresme cubren muchos aspectos del ulterior Calculo Infinitesimal, desde el concepto de función y su representación gráfica en un sistema de coordenadas, hasta la constatación intuitiva de la condición necesaria para un extremo, y desde la medida de variables físicas por medio de segmentos, a modo de coordenadas que se vinculan mediante relaciones funcionales que permiten cuantificar la variación de un fenómeno, hasta la obtención de la distancia recorrida como una especie de sumación continua de ordenadas bajo el diagrama velocidad–tiempo equivalente a una especie de integración de una función, que Oresme considera en su estudio del movimiento.

Oresme apunta, pues, incipientes pero muy importantes cuestiones tanto de Geometría Analítica como de Calculo Integral. En Geometría Analítica Oresme representa el segundo estadio histórico de introducción de un sistema de coordenadas –el primero es Apolonio que considera las coordenadas *a posteriori*– y, además, Oresme las introduce *a priori* para representar el gráfico de la curva respecto de ellas. En Cálculo Infinitesimal, ciertos aspectos de Cavalieri, Torricelli, Fermat, Roberval, Pascal, Barrow, e incluso Newton y Leibniz, son en parte tributarios de Oresme.

Aunque rudimentarias y primitivas, las ideas de Oresme tienen un valor embrionario por el papel decisivo que jugaron en la inflexión radical que experimenta la Matemática –y en particular los problemas infinitesimales– respecto de la clásica griega a partir del Renacimiento.

La maduración de estas incipientes ideas jugaron un papel decisivo en el advenimiento de las técnicas del Cálculo del siglo XVII y desde luego influyeron decisivamente sobre Galileo, que en su obra *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, de 1638, sistematizó los desarrollos medievales en una nueva ciencia de la Mecánica.

Los filósofos y matemáticos del siglo XIV manifestaron su fascinación por las series infinitas. Como consecuencia de la superación del «*horror al infinito*» de los griegos, la Escolástica de la baja Edad Media recurría con frecuencia en sus especulaciones al infinito, tanto en sentido potencial como actual. Esta amplitud de miras permitió desarrollar la importante innovación de los algoritmos infinitos. En este sentido, los Escolásticos son pioneros, toda vez que en la antigüedad sólo se desarrollaron algunos algoritmos reiterados, y en cuanto a series propiamente sólo Arquímedes en su *Sobre la Cuadratura de la Parábola* se aproximó al tema, manejando la progresión geométrica indefinida:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^n}+\cdots=\frac{4}{3}\ ,$$

aunque sin extender de forma actual (en sentido aristotélico) la suma hasta el infinito, ya que no lo requiere así el método de exhaución, ideado precisamente para obviar la dificultad del infinito.

La aplicación concreta de las series tuvo lugar a propósito de ciertos problemas sobre la «*latitud de las formas*», en los que se consideraban movimientos arbitrarios, regidos por lo que llamaban una «*ley artificial*», y en los que los espacios recorridos presuponen la determinación de la suma de una serie convergente. Es preciso señalar que el manejo de las series infinitas en este periodo, no tuvo lugar como las utilizamos hoy en el Cálculo, sino de forma retórica con casi total ausencia de símbolos. Los resultados fueron hallados mediante la argumentación verbal o geométricamente a través de la representación de la forma, más que por consideraciones aritméticas basada en la idea de límite

R.Swineshead, de la Escuela de Merton, escribió hacia 1345 su *Liber Calculationum*, por la que se le apodó «*Calculator*», en la que además de la Regla de Merton, aludida anteriormente, considera y resuelve el siguiente problema de ley artificial:

> «*Si a lo largo de la primera mitad de un cierto intervalo de tiempo, una forma se mantiene con cierta intensidad; a lo largo del siguiente cuarto de intervalo la forma se mantiene al doble de dicha intensidad; a lo largo del siguiente octavo de intervalo la forma se mantiene al triple de la intensidad, y así* "*ad infinitum*", *entonces la intensidad media durante todo el intervalo será la intensidad de la forma durante el segundo intervalo* [el doble de la intensidad inicial].»

Se trata de una serie de movimientos uniformes tales que los intervalos sucesivos de tiempo forman una progresión geométrica de primer término y razón 1/2, mientras que las intensidades de la forma son los términos de una progresión aritmética de primer término y razón 1. El resultado es equivalente (tomando como unidad el intervalo de tiempo y la intensidad inicial de la forma) a la suma de la serie aritmético-geométrica:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots=2\ .$$

Calculator dio una prolija y confusa argumentación verbal para llegar al resultado, mientras que Oresme lo demostró de manera mucho más inteligible y sencilla a través de procedimientos gráficos.

Uno de los resultados más importantes de Oresme sobre series lo describe de forma retórica de la siguiente forma:

> «*Si de una cierta cantidad se sustrae una parte alicuota* [una k-ésima parte] *y del primer resto se sustrae la misma parte alícuota, y del segundo resto se sustrae la misma parte alicuota y así "ad infinitum", tal cantidad será consumida exactamente, ni más ni menos, por tal modo de sustración*.»

En lenguaje literal siendo a la cantidad de la que se parte, al sustraer la parte alícuota a/k resulta a(1-1/k); sustrayendo a esta cantidad su k-ésima parte resulta la cantidad $a(1-1/k)^2$; y así se sigue, en cada sustracción se multiplica el resto anterior por la cantidad (1-1/k), por tanto el resultado es equivalente a la suma de la serie:

$$\frac{a}{k}+\frac{a}{k}\cdot\left(1-\frac{1}{k}\right)+\frac{a}{k}\cdot\left(1-\frac{1}{k}\right)^2+\cdots+\frac{a}{k}\cdot\left(1-\frac{1}{k}\right)^n+\cdots=a \ ,$$

que generaliza el resultado de la progresión geométrica utilizada por Arquímedes.

Oresme dio otros muchos resultados sobre series, pero sin duda el resultado más interesante y original es la primera demostración en la Historia de la Matemática de la divergencia de la serie armónica:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots \ .$$

Oresme agrupa los sucesivos términos de la serie poniendo el primer término 1/2 en el primer grupo, los dos términos siguientes 1/3 y 1/4 en el segundo grupo, los cuatro términos que siguen en el tercer grupo, y así sucesivamente el grupo p-ésimo contendrá 2^{p-1} términos. Oresme argumentará entonces que existiendo un número infinito de grupos y siendo la suma de los términos de cada grupo mayor o igual que 1/2, sumando una cantidad suficiente de términos se podrá superar todo número prefijado.

Resumiendo, como consecuencia de las especulaciones filosóficas medievales sobre el infinito y el continuo a propósito de la «*latitud de las formas*», se desarrolló una actividad matemática en el terreno de lo infinitesimal, que provocó el que se atemperara el «*horror al infinito*» de los griegos. Por eso las contribuciones medievales no fueron una extensión de los desarrollos clásicos sino más bien una exploración de nuevos caminos en la Matemática, con resultados muy originales y totalmente novedosos en el terreno de la Cinemática, en la consideración intuitiva del concepto de función y en el tratamiento de las series infinitas, resultados que tienen un mérito enorme porque sus cultivadores no tenían a su disposición un desarrollo geométrico considerable ni un aparato algebraico que facilitara las operaciones. Aun así la aparición de un ambiente propicio al uso y abuso de lo intuitivo en relación con el infinito, influiría de forma muy positiva sobre el magnífico desarrollo de los métodos y técnicas infinitesimales del siglo XVII.

Los problemas de Cálculo Integral: cuadraturas y cubaturas

La cuadratura básica $\int_0^a x^k\,dx$

Se puede decir que las técnicas para las cuadraturas del siglo XVII están enfocadas esencialmente al establecimiento de la cuadratura de las parábolas generalizadas –que llamaremos la cuadratura básica $\int_0^a x^k\,dx$ –, mediante artificios aritmético-infinitesimales y en particular de indivisibles, motivados por los intentos de atemperar la prolijidad del rigor del clásico método griego de exhaución.

Sabemos que Arquímedes, tanto en la cuadratura de la espiral como en la segunda demostración que da de la cuadratura de la parábola, utiliza resultados equivalentes a nuestras fórmulas para la suma de enteros y sus cuadrados:

$$1+2+\cdots+n = \frac{n}{2}(n+1),\quad 1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

Mediante estas fórmulas, Arquímedes obtiene resultados equivalentes a nuestras integrales:

$$\int_0^a x\,dx = a^2/2\ ,\quad \int_0^a x^2\,dx = a^3/3\ ,$$

las cuales hoy establecemos mediante los límites:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \frac{1}{2}\quad ,\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3} = \frac{1}{3}$$

Lo que no sabemos es si Arquímedes era consciente de los lazos de parentesco existentes entre los diversos problemas que resuelve, relaciones que nosotros expresaríamos diciendo que la misma integral aparece en muchos lugares bajo aspectos geométricos diferentes.

Asimismo, Cavalieri con su original método de los indivisibles conseguirá realizar la famosa cuadratura para los enteros k=1,2,3,4,5,6 y 9.

Después de 1635 –fecha de la publicación de los resultados de Cavalieri–, los matemáticos se afanan en generalizar el resultado y Fermat, Roberval, Pascal, Wallis y otros matemáticos dan pruebas más o menos rigurosas, para el cálculo del área bajo la parábola generalizada $y=x^k$ (k entero positivo). Algunas de las pruebas se basan en fórmulas para la suma de las primeras potencias de enteros –que sustituirán al argumento intuitivo de los indivisibles– y que conducen a las desigualdades:

$$1^k+2^k+\cdots+(n-1)^k < \frac{n^{k+1}}{k+1} < 1^k+2^k+\cdots+n^k$$

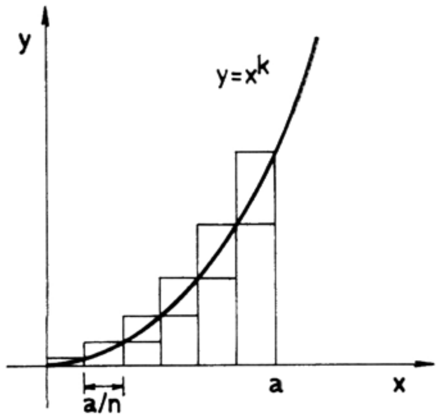
(generalización del mismo resultado de Arquímedes para k=2), de las que nosotros precisamente deducimos el límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}\quad ,$$

que es utilizado implícitamente, disfrazado como siempre a través de la doble reducción al absurdo, que todos saben que es lo único que puede concluir con rigor el argumento, pero ninguno sigue fielmente todos los pasos que en rigor hay que dar, como hacía Arquímedes, sino que se quedan en el umbral de la exhaución, comentando que es de dominio público el camino a seguir.

Así para obtener la cuadratura $\int_o^a x^k dx = \frac{a^{k+1}}{k+1}$

dividen el intervalo [o,a] en n subintervalos de longitud a/n, construyendo a continuación los habituales rectángulos inscritos P_n y circunscritos Q_n, teniendo todos por base a/n y altura la determinada por la correspondiente ordenada, de manera que se obtiene para la suma de las áreas:



$$a(P_n) = \frac{a^{k+1}}{n^{k+1}} [1^k+2^k+ \cdots +(n-1)^k]$$

$$a(Q_n) = \frac{a^{k+1}}{n^{k+1}} [1^k+2^k+ \cdots +n^k]$$

Si S es el área limitada por la curva $y=x^k$ en el segmento [o,a], fácilmente se obtienen los elementos para aplicar *el método de compresión* de Arquímedes:

$a(P_n) < a(S) < a(Q_n)$

1. $a(Q_n) – a(P_n) = a^{k+1}/n$, para todo n

2. $a(P_n) < [a^{k+1}/(k+1)] < a(Q_n)$ para todo n

que son las desigualdades básicas para iniciar la doble reducción al absurdo que les conduzca al resultado conjeturado:

«El área limitada por curva $y=x^k$ en el segmento [o,a] es $a^{k+1}/(k+1)$»,

es decir: $\int_0^a x^k dx = \frac{a^{k+1}}{k+1}$.

Los Indivisibles de Cavalieri

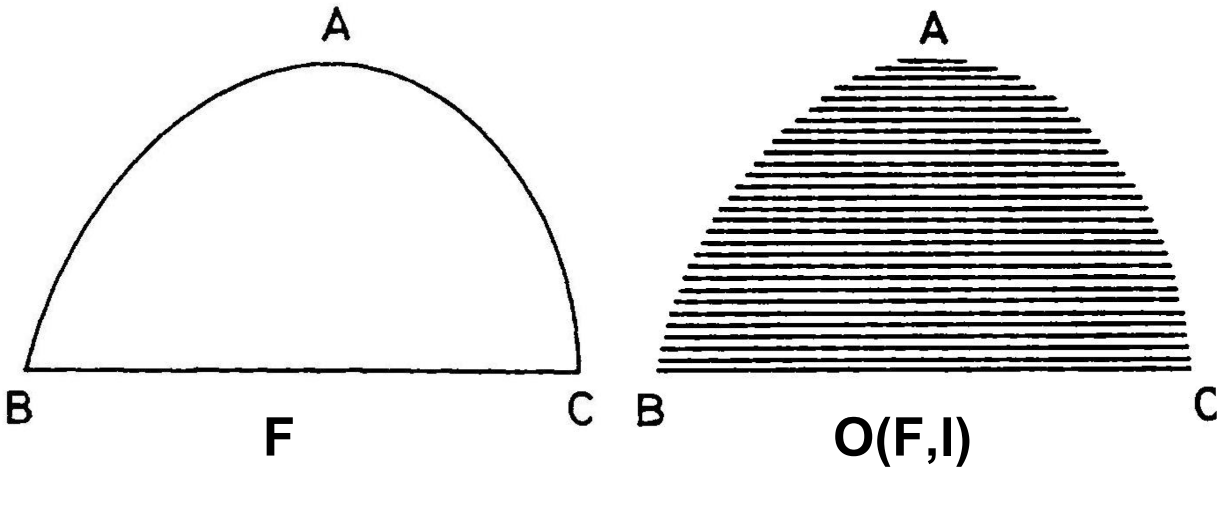
Cavalieri, el más destacado de los discípulos de Galileo, publica en 1635 su famosa obra *Geometria Indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (*Geometría de los continuos por indivisibles presentada por métodos nuevos*). También sobre Indivisibles publica en 1647 *Exercitationes geometricae sex* (seis ejercicios geométricos).

La *Geometria* de Cavalieri se compone de siete libros. El Libro I trata de la geometría elemental de figuras planas y sólidas, estudiando especialmente sólidos de rotación, cilindros y conos generales (teniendo una curva cerrada cualquiera por directriz), así como las secciones de estos sólidos. En el Libro II Cavalieri desarrolla el primer método de indivisibles, el «*método colectivo*» y demuestra algunos teoremas generales sobre colecciones de indivisibles. En los Libros III, IV y V aplica los teoremas anteriores a cuadraturas y cubaturas de figuras relacionadas con las secciones cónicas. El libro VI está dedicado a la cuadratura de la espiral, pero también obtiene resultados sobre paraboloides y esferoides. Finaliza la *Geometria* presentando un nuevo método de indivisibles, el «*método distributivo*».

Las *Exercitationes* se componen de seis libros. En el Libro I Cavalieri ofrece una visión reducida y simplificada del «*método colectivo*». En el Libro II realiza una nueva presentación del «*método distributivo*». El Libro III recoge las reacciones de Cavalieri a las duras críticas de Güldin. EL Libro IV generaliza el «*método colectivo*» de indivisibles, aplicándose a curvas algebraicas de grado superior a dos, obteniendo un resultado equivalente a la cuadratura básica:

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

El concepto fundamental de la teoría de Cavalieri es el de «*Omnes lineae*» («*todas las líneas*» o «*colección de líneas*» de una figura dada), que es introducido en la definición II.1 de la *Geometria Indivisibilibus*:



«*Dada una figura plana, se consideran dos planos perpendiculares al plano de la figura, entre los que ésta esté exactamente contenida. Si uno de los dos planos se mueve paralelamente hacia el otro hasta coincidir con él, entonces las líneas que durante el movimiento forma la intersección entre el plano móvil y la figura dada, consideradas en conjunto, se llaman* "*Omnes lineae*" ["Todas las líneas"»] *de la figura, tomada una de ellas como* "*regula*" ["directriz"].»

Es decir, dada la figura plana F=ABC, la recta BC determina una dirección que tomaremos como «*regula*». «*Todas las líneas*» o *Indivisibles* de la figura ABC, O(F,l) respecto de la *regula* BC, representa el conjunto de cuerdas de la figura ABC, paralelas a BC.

El propósito de Cavalieri introduciendo su método de Indivisibles era proporcionar unos medios de obtener cuadraturas y cubaturas, que superaran la pesadez e insuficiencia del método de exhaución de Arquímedes, es decir, que consiguieran los resultados y las pruebas al mismo tiempo, fundiendo en un solo acto lo heurístico y lo apodíctico. El método de Cavalieri sería nuevo, pero las ideas básicas de lo que debe entenderse por cuadratura o cubatura descansan completamente en la teoría griega clásica de magnitudes, que se describe en el Libro V de *Los Elementos* de Euclides.

Como se sabe, la limitación operacional de la Matemática griega impedía la asignación de valores numéricos que midieran el área o volumen de las figuras geométricas, de modo que se calculaba directamente con éstas, que de esta forma se trataban como magnitudes. Las cuadraturas o cubaturas de las figuras las realizaban los griegos a base de comparar mediante razones la figura en cuestión con otra figura previamente conocida.

Cavalieri no sólo asumió la doctrina griega clásica de magnitudes, sino que se propuso ampliar el conjunto de magnitudes, extendiendo la teoría de magnitudes de Eudoxo, para incluir en ella cada conjunto de «*Todas las líneas*» de una figura dada, creando así una nueva categoría de magnitudes que le permite realizar los cálculos a los que le conducen sus cuadraturas, directamente con propias nuevas magnitudes, es decir, con «*Todas las líneas*» de una figura dada. Por eso Cavalieri dedica una buena parte del Libro II de la *Geometria Indivisibilibus* a intentar justificar que efectivamente «*Todas las líneas*» pueden ser tratadas como cualquier otra magnitud geométrica; en particular debe demostrar que la razón entre dos *colecciones de líneas* existe, es decir que las nuevas magnitudes cumplen el *Axioma de Eudoxo-Arquímedes* –definición V.4 de *Los Elementos de Euclides*–. A partir de aquí Cavalieri ya puede plantearse establecer la relación entre las cuadraturas y las colecciones de líneas, lo que hace en uno de los teoremas fundamentales de la *Geometria Indivisibilibus,* el II.3:

> «*La razón entre dos figuras es igual a la razón entre sus colecciones de líneas, tomadas respecto de la misma "regula"*.»

Es decir, dadas dos figuras planas F y G, se verifica: F/G = O(F,l)/O(G,l) .

Pero esta relación entraña como condición preliminar que la razón entre dos colecciones de líneas exista, es decir, que las colecciones de líneas cumplan la definición V.4 de Euclides sobre magnitudes, lo cual conceptualmente no es trivial toda vez que las colecciones de líneas se componen de infinitas líneas. Queda así planteada una duda en la que subyace el eterno problema del infinito, duda que permanece latente en la mente de Cavalieri y que manifiesta de forma constante en su correspondencia con Galileo. Cavalieri quiere autoconvencerse de la certeza de la existencia de razón entre colecciones de líneas, al manifestar que ya que éstas tienen la propiedad de que pueden sumarse y restarse (y de forma implícita asumiendo que pueden ordenarse) deben poder compararse, es decir, deben tener una razón, al igual que sucede con las magnitudes griegas. Pero no considera el argumento concluyente sino simplemente plausible, por lo que se decide a demostrarlo en el Teorema II.1 de la *Geometria*:

> «*Las colecciones de líneas de figuras planas son magnitudes que tienen razón unas con otras.*»

En el curso de la demostración de Cavalieri aparece un proceso infinito –al tomar el máximo de una colección infinita de números, que podría ser infinito–, lo que Cavalieri no advierte o soslaya.

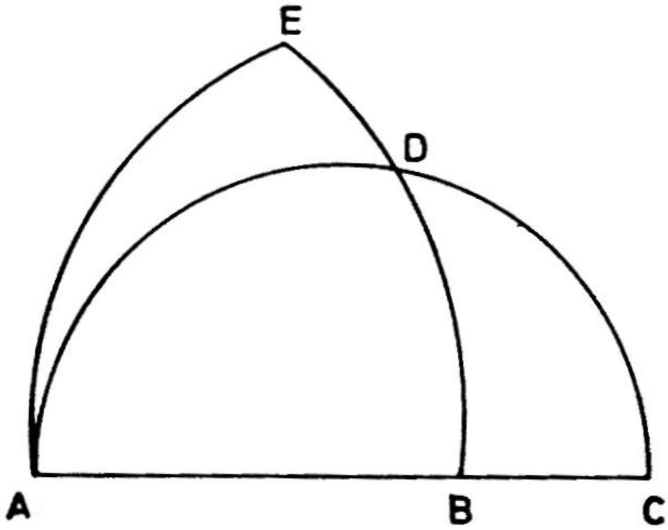
Otro Teorema previo al II.3, donde también se advierte la debilidad de los fundamentos de los métodos de Cavalieri es el II.2:

«*Si dos figuras son iguales también lo son sus colecciones de líneas.*»

Es decir:

$$F = G \text{ implica } O(F,I) = O(G,I) \text{ .}$$

Cavalieri ilustra la prueba de este Teorema con un gráfico similar al de la figura adjunta, en la que AEB=ADC. Superponiendo AEB sobre ADC las dos figuras tienen ADB como parte común. Superponiendo ahora las partes residuales nuevamente habrá una parte común. Este proceso de superposición se puede continuar hasta que las sucesivas partes residuales hayan sido situadas unas sobre otras, lo cual será posible porque al ser las dos figuras iguales se descompondrán en partes congruentes dos a dos, que darán colecciones de líneas iguales dos a dos, de manera que aplicando el carácter aditivo de las colecciones de líneas, se obtendrá que las dos figuras tendrán iguales colecciones de líneas.



Como antes, Cavalieri parece no advertir con claridad que en su argumentación a través del proceso de superposición puede haber involucrado un proceso infinito (por ejemplo tratándose de un círculo y un cuadrado), lo cual introduciría en la aditividad sumas infinitas. Ya que según parece uno de los propósitos del método de Cavalieri, como el de los griegos, era evitar el infinito, en particular los infinitesimales y las sumas infinitas, el discurso argumental de Cavalieri tiene serios puntos débiles.

Con los elementos desarrollados, algún postulado y ciertas asunciones, Cavalieri emprende la demostración del importante teorema II.3, que se traduce en la igualdad de razones:

$$F/G = O(F,I)/O(G,I) \text{ .}$$

Para ello aplica la definición de Eudoxo de igualdad de razones (definición V.5 de *Los Elementos* de Euclides). De acuerdo con la definición de Eudoxo, Cavalieri debe demostrar que dadas dos figuras F y G

$$F + F + \cdots^{m}\cdots + F \gtreqless G + G + \cdots^{n}\cdots + G$$

implica:

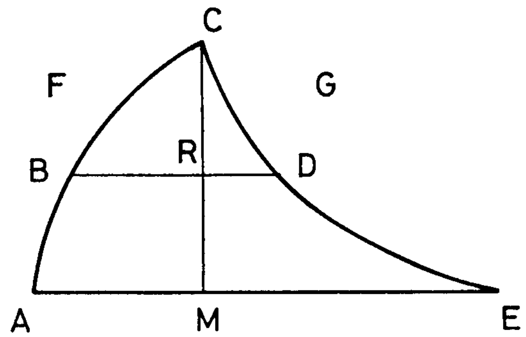
$$O(F,I) + O(F,I) + \cdots^{m}\cdots + O(F,I) \gtreqless O(G,I) + O(G,I) + \cdots^{n}\cdots + O(G,I)$$

lo que realiza fácilmente aplicando los resultados anteriores.

El Teorema II.3 encierra la idea básica y central de toda la teoría de Cavalieri. Por medio de este resultado, reduce el problema de obtener la razón entre dos áreas a hallar la razón entre sus *colecciones de líneas*. Con gran ingenio Cavalieri calculará estas últimas razones, para lo que utiliza como uno de sus instrumentos más útiles lo que se conoce como el *Principio de Cavalieri*, el Teorema II.4:

«*Si dos figuras planas tienen la misma altura y si las secciones determinadas por líneas paralelas a las bases y a igual distancia de ellas están siempre en la misma razón, entonces las figuras planas también están en esta misma razón*.»

Cavalieri ilustra su teorema con una figura similar a la siguiente:



Si dos figuras planas ACM y MCE, cumplen que para cada línea BD paralela a la base AE (*regula*), las secciones BR y RD –que llama líneas correspondientes por estar a igual distancia de la base–, verifican la relación:

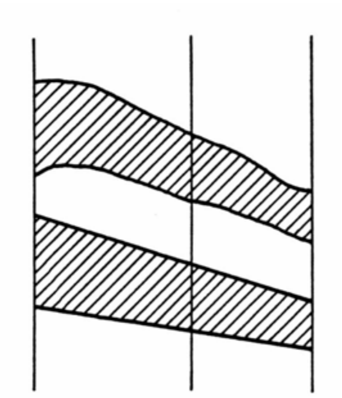
BR/RD = AM/ME ,

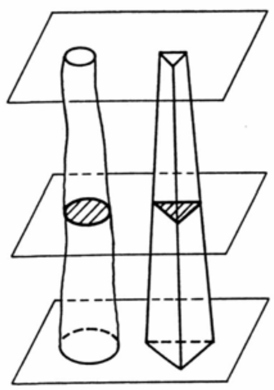
entonces se cumple:

ACM/MCE = AM/ME .

Cavalieri generaliza a dimensión tres los resultados que había obtenido para figuras planas, de modo que se podrá enunciar un teorema análogo al II.4:

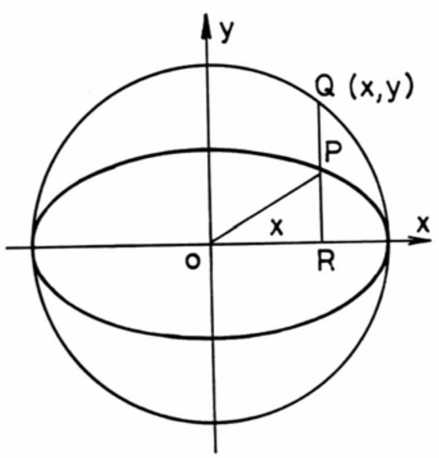
«*Si dos sólidos tienen la misma altura y si las secciones determinadas por planos paralelos a las bases y a igual distancia de ellas están siempre en la misma razón, entonces los volúmenes de los sólidos están en esa misma razón*.»





Las dos figuras adjuntas ilustran de forma sencilla el *Teorema de Cavalieri* en el caso particular de secciones iguales.

El Teorema de Cavalieri permite calcular por ejemplo el área de la elipse a partir del área del círculo y el volumen de un cono a partir del volumen de una pirámide.



Sea una elipse E de semiejes a y b (a>b). Sea C un círculo concéntrico con la elipse y radio la longitud del eje mayor a de la elipse Tomando como «*regula*» la dirección del eje de ordenadas, comparando los indivisibles de la elipse con los del círculo, obtenemos de las ecuaciones de las curvas:

RP/RQ = b/a ,

de donde resulta según el «*Principio de Cavalieri*»:

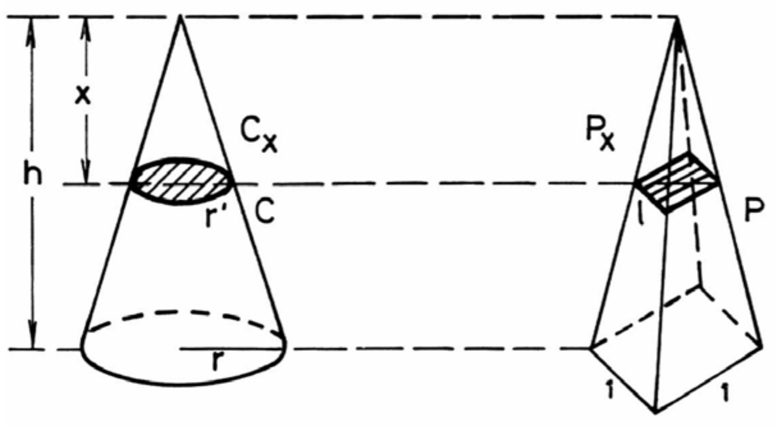
a(E)/a(C) = b/a ,

por tanto: a(E) = (b/a)·a(C) = πab .

Si dos pirámides tienen la misma base y la misma altura, por razones de semejanza las secciones situadas a la misma altura tienen la misma área; así que, de acuerdo con el «*Principio de Cavalieri*», las dos pirámides tienen el mismo volumen. Los griegos utilizaron este resultado para demostrar que el volumen de la pirámide es un tercio de la base por la altura (*Euclides*, XII.7). Arquímedes atribuyó el descubrimiento a Demócrito y la demostración a Eudoxo.

A partir del volumen de la pirámide se puede obtener fácilmente el volumen del cono, por aplicación del *Principio de Cavalieri* .

En efecto, sea un cono C con radio de la base r y altura h. Comparemos en cono C con una pirámide P con base el cuadrado unidad y altura h.



Sean C_x, P_x, las secciones respectivas del cono y pirámide a una distancia x del vértice.

Por semejanza resulta:

$L/1 = x/h = r'/r$,

de donde se obtiene:

$a(C_x) = \pi r^2 x^2/h^2$, $a(P_x) = x^2/h^2$,

es decir:

$a(C_x) = \pi r^2 a(P_x)$,

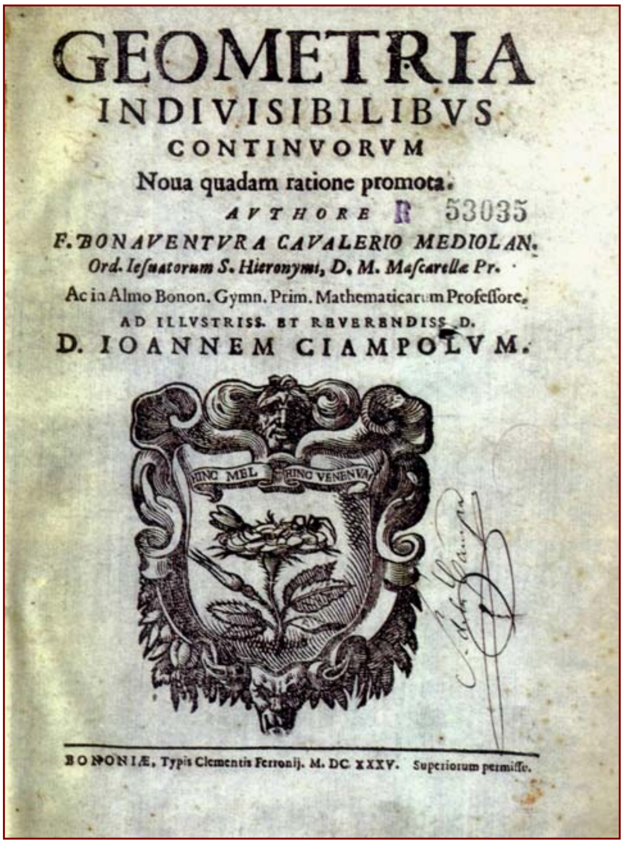
por tanto del *Principio de Cavalieri* se obtiene:

$v(C) = \pi r^2 \cdot v(P) = \pi r^2 h/3$.

Como se ve, sorprende la estrecha analogía entre la aplicación del «*Principio de Cavalieri*» y el método mecánico del *MÉTODO* de Arquímedes. Ambos participan de puntos de vista muy próximos sobre los indivisibles en la composición de las figuras planas o sólidas para la búsqueda de los resultados de su cuadratura o cubatura. La analogía está en las primeras fases, pues desde luego Cavalieri ya no necesita recurrir al recurso de la palanca para sumar sus indivisibles; el Álgebra le facilita esta operación y además le da unas posibilidades de generalización imposibles de lograr en la Geometría arquimediana.

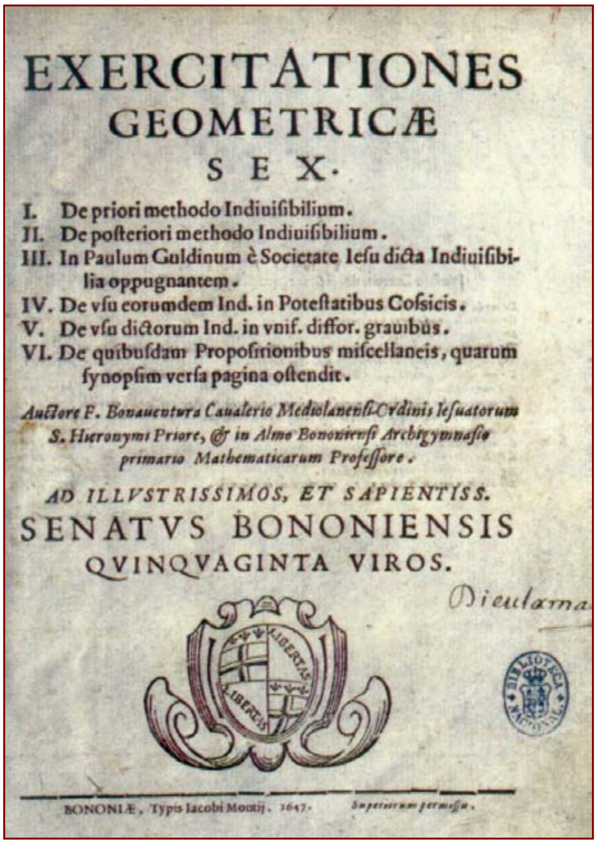
El «*Principio de Cavalieri*» tiene como efecto práctico ocultar el papel que juega en los cálculos de áreas y volúmenes el proceso del paso al límite. Es decir al igual que Arquímedes con la «*composición*» de su método mecánico, Cavalieri con su Principio evita los problemas del infinito, soslayando, como Arquímedes, las dificultades lógicas del paso al límite, que substituye por la intuición geométrica.

Cavalieri al igual que Arquímedes se cuida muy bien de no explicar claramente la naturaleza del elemento infinitesimal que utiliza en su método, el indivisible. En efecto, con su atomismo matemático parece convencerse a sí mismo de que su método es independiente de las doctrinas sobre la naturaleza del continuo. De hecho, considera pragmáticamente que como la noción de infinito no aparece en las conclusiones no necesita aclarar su naturaleza. Y en efecto, igual que en Arquímedes, el infinito en la forma en que es camuflado, no participa explícitamente en el discurso de Cavalieri, porque su argumentación está centrada en la comparación o correspondencia entre los indivisibles de dos configuraciones, como bien queda de manifiesto en lo que todavía hoy llamamos *Principio de Cavalieri*, lo que le lleva a obtener, como a los griegos, razones más que valores concretos de un área o volumen. Pero como los otros matemáticos del siglo XVII, Cavalieri considera su método simplemente como un instrumento geométrico para evitar el método de exhaución, de modo que el rigor no le preocupa demasiado. Parece ser que Cavalieri, como Arquímedes, no estuvo especialmente interesado en las cuestiones metafísicas acerca de la naturaleza del continuo, aunque pudo no ser así, ya que al esperar la aprobación de su maestro Galileo sobre estas cuestiones, dilató cuanto pudo la publicación de sus principales obras.



GEOMETRIA
INDIVISIBILIBVS
CONTINVORVM
Noua quadam ratione promota.
AVTHORE
F. BONAVENTVRA CAVALERIO MEDIOLAN.
Ord. Iesuatorum S. Hieronymi, D. M. Mascarellæ Pr.
Ac in Almo Bonon. Gymn. Prim. Mathematicarum Professore.
AD ILLVSTRISS. ET REVERENDISS. D.
D. IOANNEM CIAMPOLVM.

BONONIÆ, Typis Clementis Ferronij. M. DC XXXV. Superiorum permissu.



EXERCITATIONES
GEOMETRICÆ
SEX.
I. De priori methodo Indiuisibilium.
II. De posteriori methodo Indiuisibilium.
III. In Paulum Guldinum è Societate Iesu dicta Indiuisibilia oppugnantem.
IV. De vsu eorumdem Ind. in Potestatibus Cossicis.
V. De vsu dictorum Ind. in vnif. diffor. grauibus.
VI. De quibusdam Propositionibus miscellaneis, quarum synopsim versa pagina ostendit.
Auctore F. Bonauentura Caualerio Mediolanensi Ordinis Iesuatorum S. Hieronymi Priore, & in Almo Bononiensi Archigymnasio primario Mathematicarum Professore.
AD ILLVSTRISSIMOS, ET SAPIENTISS.
SENATVS BONONIENSIS
QVINQVAGINTA VIROS.

BONONIÆ, Typis Iacobi Montij. 1647. Superiorum permissu.

1. Portada de la primera edición de *Geometría Indivisibilibus Continuorum* de Cavalieri (Bolonia, 1635).
2. Portada de la primera edición de *Exercitationes geometricae sex* de Cavalieri (Bolonia, 1647).

Ejemplares de la Biblioteca Nacional de España

Cavalieri introduce para cada figura el indivisible de una dimensión menor, que excluye lo infinitamente pequeño y permite soslayar las dificultades lógicas del paso al límite, que substituye por la intuición geométrica, mientras se acerca, gracias a la incipiente Álgebra, a las ventajas de los métodos infinitesimales, de simplicidad y mayor generalidad frente a la complejidad y particularidad del método de exhaución de Arquímedes.

Con los Indivisibles, Cavalieri introduce una especie de atomismo geométrico que le aleja del infinito potencial de Aristóteles y le acerca a las bases metodológicas del *Método Mecánico* de Arquímedes. De forma similar a cómo Arquímedes llena sus figuras, Cavalieri considera las áreas formadas por la yuxtaposición de segmentos, que al considerarlos en conjunto, los llama «*Omnes lineae*» y demuestra que a estas *colecciones de líneas* les puede asignar la categoría de magnitudes de acuerdo con la *Teoría de la Proporción* de Eudoxo del Libro V de *Los Elementos* de Euclides. En este sentido Cavalieri se mantiene todavía próximo a los procedimientos sintéticos de la Geometría griega incapaces debido al insuficiente desarrollo algorítmico del Álgebra simbólica de asignar a las figuras números que midieran sus áreas o sus volúmenes, por tanto Cavalieri, como los griegos, todavía tenía que calcular directamente con las figuras, que se trataban como magnitudes.

Cavalieri compara el área de dos figuras –por ejemplo el área de un círculo y una elipse– a base de comparar los correspondientes conjuntos de «*Todas las líneas*» –tal como, por ejemplo, había comparado Arquímedes el área del segmento parabólico con el área de un triángulo–, y lo hace mediante el famoso el *Principio de Cavalieri:* «*La razón entre dos figuras es igual a la razón entre sus colecciones de líneas, tomadas respecto de la misma "regula"*», artificio de sorprendente parecido con el *Método* mecánico de Arquímedes, con el que de forma ingeniosa Cavalieri reduce el problema de obtener la razón entre dos áreas a hallar la razón entre sus *colecciones de líneas*.

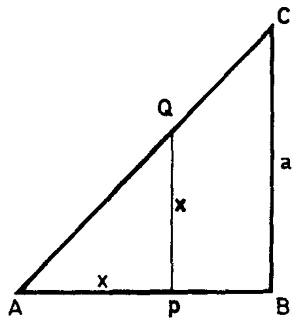
Cavalieri extiende sus conceptos al cálculo de volúmenes de sólidos desarrollando una *Teoría de Indivisibles* con el objetivo de evitar la presencia ostensible del infinito que queda ocultado a través de la correspondencia entre los indivisibles de las figuras que compara. Pero un análisis a conciencia de sus métodos nos advierten de la presencia subrepticia del infinito actual, de ahí que adolezcan de rigor.

De hecho la pretensión de Cavalieri con su método de Indivisibles parece ser acercar el descubrimiento y la demostración, hasta fundirlos en un sólo acto matemático que encuentra los resultados y prueba su validez. Por eso en su propósito, Cavalieri se acerca a la heurística del *Método Mecánico* de Arquímedes pero se aleja de la apodíctica de su *Método de exhaución*, único argumento, hasta ese momento histórico, que permite convalidar demostrativamente –con todo rigor– los resultados geométricos descubiertos por las diversas vías y procedimientos.

Cavalieri generaliza sus *Omnes lineae* definiendo otros *Omnes-conceptos*, como por ejemplo *todos los cuadrados de líneas* de una figura dada F, O(F,l^2) y en general *todos las potencias de líneas* de una figura dada F, O(F,l^n), obteniendo al aplicarlos a una figura triangular resultados equivalentes a nuestras cuadraturas:

$$\int_o^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1} \quad , \quad n = 1,2,3,4,5,6,9 \ .$$

Para facilitar la exposición utilizaremos una notación más actual y de mayor operatividad que la utilizada por Cavalieri.

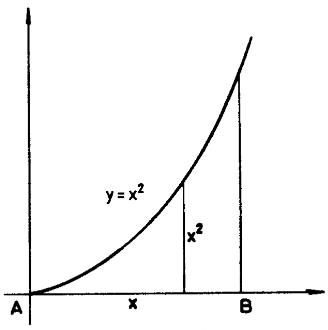


Si T es el triángulo ABC de la figura, designaremos *todas las potencias de líneas* de T, O(T,l^n), en la forma $\sum_A^B x^n$.

De acuerdo con los conceptos desarrollados por Cavalieri, escribiremos para el área del triángulo

$$T=ABC \ , \ a(T) = \sum_A^B x$$

Ahora si P es una pirámide con vértice en A y base cuadrada de lado BC, la sección a una distancia x del vértice tiene área x^2. Al Concebir la pirámide como compuesta de todas las secciones cuadradas, es decir, de *todos los cuadrados de líneas* del triángulo ABC, podremos escribir para su volumen: $v(P) = \sum_A^B x^2$

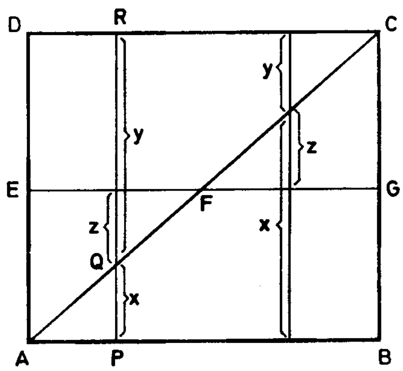


Dada la parábola de la figura, siendo x^2 las ordenadas a una distancia x del vértice, resulta que la suma de *todos los cuadrados de líneas* del triángulo ABC representa también el área bajo la parábola.

Sea ahora Q el sólido obtenido por la rotación de la parábola anterior alrededor de AB. La sección a una distancia x del vértice vale πx^4, por tanto podremos escribir para su volumen:

$$v(Q) = \sum_A^B \pi x^4 = \pi \sum_A^B x^4$$

Estos ejemplos son significativos de la forma en que una gran cantidad de problemas de áreas y volúmenes pueden ser resueltos en términos de *todas las potencias de líneas* de un triángulo.



Para interpretar la aplicación del método de Cavalieri al cálculo de estas áreas y volúmenes, consideremos el cuadrado ABCD (Figura 11) de lado a y dividámoslo en dos triángulos iguales trazando la diagonal. Sean x e y las longitudes de las secciones PQ y QR de los triángulos. Siendo x+y=a, resulta:

$$\sum_A^B a = \sum_A^B (x+y) = \sum_A^B x + \sum_A^B y = 2\sum_A^B x \ ,$$

ya que como los triángulos son congruentes, por simetría se tiene: $\sum_A^B x = \sum_A^B y$. Así pues se deduce:

$\sum_A^B x = \frac{1}{2}\sum_A^B a = \frac{1}{2}a^2$, toda vez que $\sum_A^B a$ representa el área del cuadrado de lado a.

Este resultado $\sum_A^B x = \frac{1}{2}a^2$ es equivalente a la cuadratura básica $\int_o^a x\,dx = a^2/2$.

Para calcular $\sum_A^B x^2$, tomaremos en la figura anterior x = (a/2) – z, y = (a/2) + z ,

y aplicaremos que debido a la simetría se tiene $\sum_A^B x^2 = \sum_A^B y^2$. Así se obtiene:

$$\sum_A^B a^2 = \sum_A^B (x+y)^2 = \sum_A^B x^2 + 2\sum_A^B xy + \sum_A^B y^2 = 2\sum_A^B x^2 + 2\sum_A^B xy = 2\sum_A^B x^2 + 2\sum_A^B \left[(a^2/4) - z^2\right].$$

Haciendo operaciones resulta: $\sum_A^B a^2 = 4\sum_A^B x^2 - 4\sum_A^B z^2$, donde $\sum_A^B z^2$ representa *todos los cuadrados de líneas* de los dos triángulos congruentes AEF y CFG. Ahora bien, *todos los cuadrados de líneas* de uno de esos triángulos equivale, como se vio anteriormente, al volumen de una pirámide con dimensiones la mitad de las de la pirámide cuyo volumen es representado por $\sum_A^B x^2$. Por tanto podemos escribir: $\sum_A^B z^2 = 2 \cdot \frac{1}{8}\sum_A^B x^2 = \frac{1}{4}\sum_A^B x^2$,

que al sustituirlo en la expresión anterior nos da: $\sum_A^B x^2 = \frac{1}{3}\sum_A^B a^2 = \frac{1}{3}a^3$

Ya que $\sum_A^B a^2$ representa el volumen de un cubo de lado a.

El último resultado es equivalente a la cuadratura básica $\int_o^a x^2\,dx = a^3/3$.

Vemos entonces que en particular para n=2, mediante *todos los cuadrados de líneas,* Cavalieri obtiene los resultados clásicos del volumen de la pirámide y de la cuadratura de la parábola, que por una parte dan seguridad a su método y por otra advierten que ambos problemas, geométricamente distintos, corresponden a la misma cuadratura, es decir, avanzando sobre Arquímedes, Cavalieri inicia una cierta clasificación de los problemas, según la naturaleza de la integral subyacente –diríamos en lenguaje actual–.

Pero Cavalieri va más allá también porque de forma análoga, aunque naturalmente con creciente complejidad calculística, va obteniendo los diversos resultados equivalentes a las cuadraturas:

$$\int_o^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}, \text{ para n=3,4,5,6,9 },$$

lo que de alguna forma permite afirmar que Cavalieri, trascendiendo la concreción de cada problema geométrico, inicia un importante proceso de generalización de resultados.

En cuanto al rigor, ya se comentó que Cavalieri nunca estuvo muy seguro de la ortodoxia del procedimiento de considerar una figura como compuesta de *todas las líneas*, de modo que abundando en los intentos de justificarlo llega a comparar su actuación con la consideración de un libro como compuesto de todas sus hojas, o un paño de tela como compuesto por todos sus hilos. En cualquier caso, de forma semejante que Arquímedes, Cavalieri no aclaró nunca la naturaleza de sus indivisibles y la cuestión acerca de si éstos componían o no el continuo. Con gran sentido práctico Cavalieri comenta en las *Exercitationes*:

«*El rigor es asunto de los filósofos más que de los matemáticos.*»

LA INFLUENCIA DE CAVALIERI EN LA HISTORIA DEL CÁLCULO INTEGRAL


LIBER VII. 485

ipſi, SV, quod, & de cæteris quibuſcunq; ipſi, AD, parallelis in vtraque figura liquidò apparet. Quod verò pars vnius figuræ, vt, BZ&, congruat neceſſariò parti figuræ, CßA, & non toti, dum ſit ſuperpoſitio tali lege, quali dictum eſt, ſic demonſtrabitur. Cum enim ductis quibuſcunq; ipſi, AD, parallelis conceptæ in figuris ipſarum portiones, quæ erant ſibi in directum, adhuc poſt ſuperpoſitionem maneant ſibi in directum, illæ verò ante ſuperpoſitionem eſſent ex hypoteſi æquales, ergo poſt ſuperpoſitionem portiones parallelarum ipſi, AD, in figuris ſuperpoſitis conceptæ erũt pariter æquales, vt ex.g. QR, ST, ſimul ſumptæ æquabuntur ipſi, SV, ergo niſi vtræque, QR, ST, congruant toti, SV, congruente parte alicui parti, vt, ST, ipſi, ST, erit, QR, æqualis ipſi, TV, &, QR, quidem erit in reſiduo figuræ, BZ&, ſuperpoſitæ, TV, verò in reſiduo figuræ, CßA, cui ſit ſuperpoſitio. Eodem modo oſtendemus cuicunq; parallelæ ipſi, AD, conceptæ in reſiduo, figuræ, BZ&, ſuperpoſitæ, quod ſit, HR597, reſpondere in directum æqualem rectam lineam, quæ erit in reſiduo figuræ, CßA, cui ſit ſuperpoſitio, ergo ſuperpoſitione hac lege facta, cum ſupereſt aliquid de figura ſuperpoſita, quod non cadat ſuper figuram, cui ſit ſuperpoſitio, neceſſe eſt reliquæ figuræ aliquid etiam ſupereſſe, ſuper quod nihil ſit ſuperpoſitum. Cum autem vnicuiq; rectæ lineæ parallelę, AD, concepta in reſiduo, vel reſiduis (quia poſſunt eſſe plures figuræ reſiduæ) figuræ, BZ&, ſiue, CRΓ, ſuperpoſitæ, reſpondeat in directum in reſiduo, vel reſiduis figuræ; CßA, alia recta linea, manifeſtum eſt has reſiduas figuras, ſiue reſiduarum aggregata, eſſe in eiſdem parallelis, cum ergo reſidua figura, HR597,

La influencia de Cavalieri ha sido decisiva en la elaboración de los diversos conceptos y técnicas del Cálculo del siglo XVII, durante el cual es el autor más citado después de Arquímedes.

Cavalieri consiguió la cuadratura de parábolas generales $y=x^n$ que constituye el primer teorema general del Cálculo Infinitesimal y la piedra de toque para la eclosión de multitud de métodos infinitesimales. La cuadratura básica de Cavalieri $\int x^n dx$, resumía muchos resultados clásicos y resolvía otros muchos desconocidos; por ello se considera que es el primer eslabón importante, después de Arquímedes, en la cadena que condujo desde el método mecánico del *MÉTODO*, al algoritmo infinitesimal que descubrieron Newton y Leibniz.

A pesar del insuficiente rigor de la vaguedad geométrica del fluir de los indivisibles, estos entes infinitesimales no sólo llegarían a influir en la concepción de Newton sobre momentos y fluxiones y en la noción de diferencial de Leibniz, sino que han sobrevivido a la creación del Cálculo por ambos.

Página del Libro VII de la segunda edición de la *Geometría Indivisibilibus Continuorum* ... de Cavalieri (Bolonia, 1653) de un ejemplar de la Biblioteca del Real Instituto y Observatorio de la Armada de San Fernando (Cádiz).

Aparece al comienzo de la página unas figuras que ilustran el cálculo de cuadraturas de Cavalieri mediante la comparación de secciones.

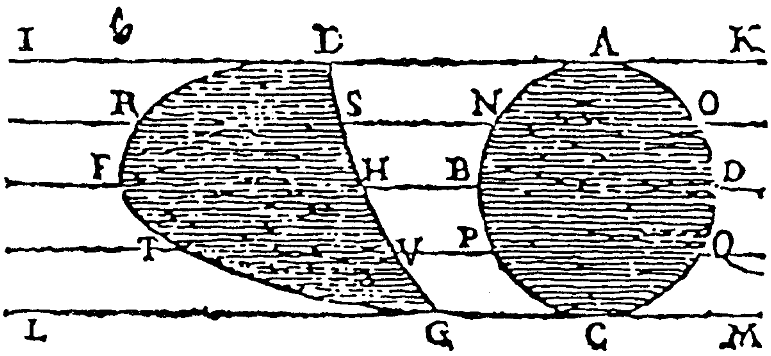


Figura del Libro I de las *Exercitationes* utilizada para ilustrar el Principio de Cavalieri.

Las cuadraturas aritméticas de Fermat y Pascal

El modelo de Arquímedes de la cuadratura de la espiral es utilizado por Fermat y Pascal para realizar sus cuadraturas aritméticas, obteniendo un resultado equivalente a la cuadratura básica $\int_o^a x^k\, dx$, a base de extender las desigualdades que Arquímedes utilizó para aplicar *el método de exhaución por compresión*. La base para estos desarrollos son las fórmulas recurrentes para la suma de potencias de enteros, fundamentadas, en el caso de Fermat, en las propiedades de los números poligonales, que obtiene inspirándose en los apéndices de *La Aritmética* de Diofanto, y en el caso de Pascal en las propiedades del *Triángulo aritmético de Tartaglia*.

Los métodos de cuadratura aritmética de Fermat y Pascal están, pues, enfocados a buscar fórmulas para la suma de potencias de los primeros enteros, con la finalidad de justificar el límite $\underset{n\to\infty}{\text{Lím}} \dfrac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}} = \dfrac{1}{k+1}$

o las desigualdades $1^k+2^k+\cdots+(n-1)^k < \dfrac{n^{k+1}}{k+1} < 1^k+2^k+\cdots+n^k$

Para ello utilizan resultados de la incipiente teoría de números que justifican con argumentos inductivos.

Fermat utiliza resultados sobre números poligonales para establecer en una carta que envía al Padre Mersenne en septiembre de 1636 la fórmula siguiente (sin demostrarla explícitamente):

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{i(i+1)+\cdots+(i+k\text{-}1)}{k!} = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots\cdot(n+k)}{(k+1)!}.$$

De aquí al escribir $i(i+1)\cdots(i+k\text{-}1) = i^k+a_1 i^{k-1}+\cdots+a_{k-1}i$,

siendo los coeficientes constantes que dependen de k, se obtiene:

$$\frac{1}{k!}\left[\sum_{i=1}^{i=n} i^k + a_1\sum_{i=1}^{i=n} i^{k-1} +\cdots+ a_{k-1}\sum_{i=1}^{i=n} i\right] = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}{(k+1)!},$$

de donde resulta la fórmula recurrente para el cálculo de la suma de potencias de enteros en función de la suma de potencias inferiores:

$$\sum_{i=1}^{i=n} i^k = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}{k+1} - \left[a_1\sum_{i=1}^{i=n} i^{k-1} +\cdots+ a_{k-1}\sum_{i=1}^{i=n} i\right]$$

A partir de esta fórmula se deduce fácilmente de forma inductiva:

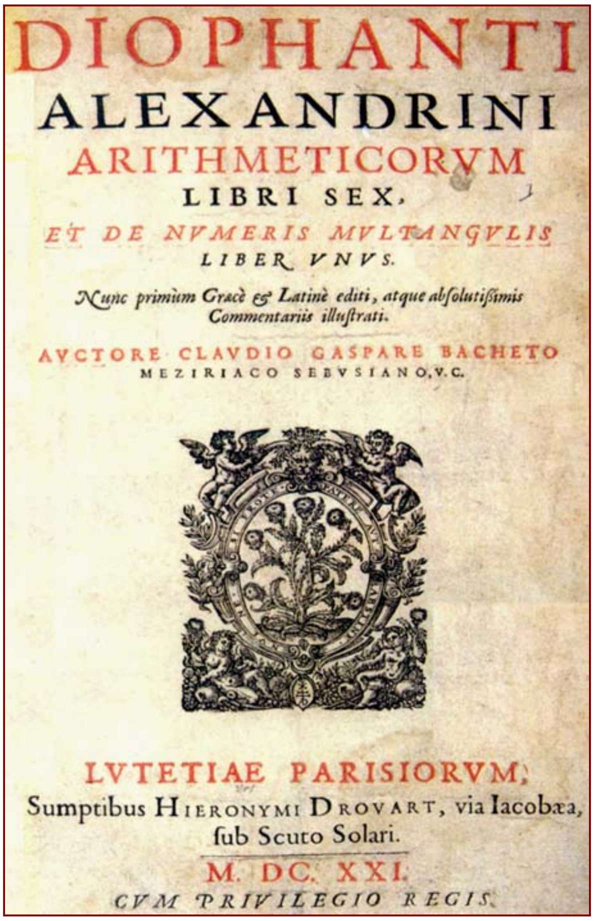
$$\sum_{i=1}^{i=n} i^k = \frac{n^{k+1}}{k+1} + \text{potencias inferiores de n},$$

de donde se puede establecer el límite de la cuadratura básica

$$\underset{n\to\infty}{\text{Lím}} \frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$$

Fermat inicialmente utiliza las fórmulas para realizar la cuadratura de la familia infinita de espirales generalizadas $r=\theta^n$, pero inmediatamente advierte que, con una evidente transformación a una referencia rectangular, puede realizar la cuadratura de otra familia infinita de curvas, las parábolas generalizadas $y=ax^n$.

LA INFLUENCIA DE DIOFANTO SOBRE DE FERMAT



DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
Nunc primùm Græcè & Latinè editi, atque absolutissimis Commentariis illustrati.
AVCTORE CLAVDIO GASPARE BACHETO MEZIRIACO SEBVSIANO, V.C.

LVTETIAE PARISIORVM,
Sumptibus HIERONYMI DROVART, via Iacobæa, sub Scuto Solari.
M. DC. XXI.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

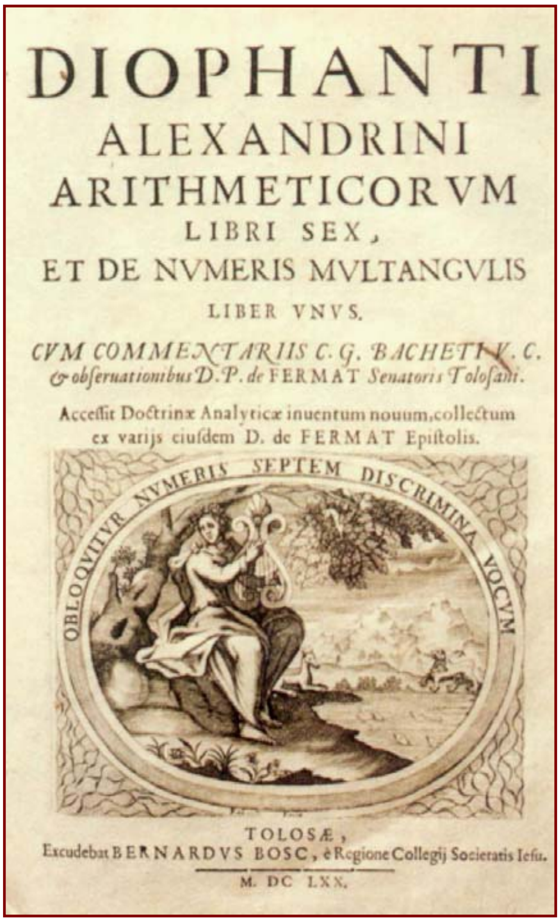
1. **Portada del Libro I de *La Aritmética* de Diofanto (*Diophanti Alexandrini Arithmeticorum Libri Sex et de Numeris multangulis*). Edición de G. Bachet de Meziriac, publicada en París en 1621.**

2 y 3. *La Aritmética de* Diofanto. Edición de 1670 de Samuel de Fermat con las observaciones de su padre Pierre de Fermat.

G.Bachet de Meziriac publicó en 1621 la obra de Diofanto y un apéndice sobre los números poligonales, con unas interesantes apostillas sobre ellos, que inspiraron los bellos descubrimientos de Fermat sobre lo que después se llamaría *Teoría de Números.* En el margen de uno de los ejemplares Fermat dejó constancia de una buena parte de sus descubrimientos matemáticos.

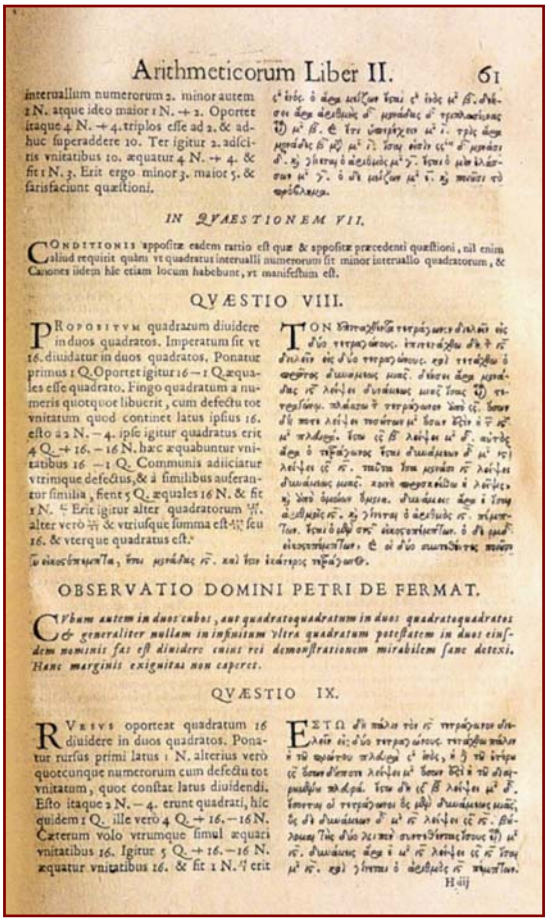
El problema octavo del Libro II: «*Descompóngase un cuadrado dado en suma de dos cuadrados*», es decir, resolver la ecuación pitagórica: $x^2+y^2=a^2$ ha dado lugar a uno de los problemas más celebres de toda la Historia de la Matemática, recientemente resuelto, el «*Gran Teorema de Fermat*»: «*La ecuación* $x^n+y^n=z^n$ *no tiene soluciones enteras para ningún valor de* n, *excepto para* n=2». El teorema fue propuesto por Fermat en una nota marginal manuscrita en un ejemplar que poseía de la edición de Bachet, escribiendo: «... *He encontrado una demostración realmente admirable, pero el margen del libro es muy pequeño para ponerla.*»

La nota de Fermat fue descubierta póstumamente y la original ahora está perdida. Por fortuna, su hijo Samuel de Fermat la incluyó en su edición de *La Aritmética* de Diofanto de 1670 con el título «*OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT*».



DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C. & obseruationibus D. P. de FERMAT Senatoris Tolosani.
Accessit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum ex varijs eiusdem D. de FERMAT Epistolis.

TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSC, è Regione Collegij Societatis Iesu.
M. DC. LXX.



Arithmeticorum Liber II. 61

interuallum numerorum 2. minor autem 1 N. atque ideo maior 1 N. + 2. Oportet itaque 4 N. + 4. triplos esse ad 2. & adhuc superaddere 10. Ter igitur 2. adscitis vnitatibus 10. æquatur 4 N. + 4. & fit 1 N. 3. Erit ergo minor 3. maior 5. & satisfaciunt quæstioni.

IN QVAESTIONEM VII.

CONDITIONIS appositæ eadem ratio est quæ & appositæ præcedenti quæstioni, nil enim aliud requirit quàm vt quadratus interualli numerorum sit minor interuallo quadratorum, & Canones iidem hic etiam locum habebunt, vt manifestum est.

QVÆSTIO VIII.

PROPOSITVM quadratum diuidere in duos quadratos. Imperatum sit vt 16. diuidatur in duos quadratos. Ponatur primus 1 Q. Oportet igitur 16 − 1 Q. æquales esse quadrato. Fingo quadratum à numeris quotquot libuerit, cum defectu tot vnitatum quod continet latus ipsius 16. esto à 2 N. − 4. ipse igitur quadratus erit 4 Q. + 16. − 16 N. hæc æquabuntur vnitatibus 16 − 1 Q. Communis adiiciatur vtrimque defectus, & à similibus auferantur similia, fient 5 Q. æquales 16 N. & fit 1 N. $\frac{16}{5}$ Erit igitur alter quadratorum $\frac{256}{25}$. alter verò $\frac{144}{25}$ & vtriusque summa est $\frac{400}{25}$ seu 16. & vterque quadratus est.

OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

CVbum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos & generaliter nullam in infinitum vltra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est diuidere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

QVÆSTIO IX.

RVRSVS oporteat quadratum 16 diuidere in duos quadratos. Ponatur rursus primi latus 1 N. alterius verò quotcunque numerorum cum defectu tot vnitatum, quot constat latus diuidendi. Esto itaque 2 N. − 4. erunt quadrati, hic quidem 1 Q. ille verò 4 Q. + 16. − 16 N. Cæterum volo vtrumque simul æquari vnitatibus 16. Igitur 5 Q. + 16. − 16 N. æquatur vnitatibus 16. & fit 1 N. $\frac{16}{5}$ erit

H iij

LA MATEMÁTICA GRIEGA
Y LAS CUADRATURAS ARITMÉTICAS DE FERMAT

La lectura de la obra de Diofanto inspiró los desarrollos de Fermat sobre Teoría de Números; el estudio de las obras de Apolonio, Pappus y Vieta da origen a su Geometría Analítica y de ambas, al conectar con los trabajos sobre cuadraturas y cubaturas de Arquímedes, alumbra numerosas técnicas infinitesimales que hacen de Fermat el matemático que más se acercó a los fundamentos del Cálculo Infinitesimal que desarrollarían Newton y Leibniz.

Fermat trasciende el infinitesimal geométrico e instaura lo infinitesimal en el terreno de lo numérico, y ello a pesar de Aristóteles que había desterrado lo infinitamente pequeño de la Aritmética. De esta forma el enfoque estrictamente geométrico de los indivisibles de Cavalieri es reemplazado por Fermat, gracias a su incipiente Teoría de Números, por una progresiva aritmetización, que conducía al uso implícito de los límites, favorecido también por la sustitución del indivisible fijo y estático por el infinitamente pequeño de la subdivisión continua, aproximándose con sus integraciones aritméticas a nuestra integral definida. La legitimidad de lo infinitesimal en la Aritmética queda asegurada por la heurística algorítmica de la nueva Geometría Analítica ya que el puente de doble sentido que se establecía entre Geometría y Álgebra, permitía hacer corresponder infinitesimales numéricos a los infinitesimales geométricos, y a partir de ahí utilizar todas las técnicas algebraicas para facilitar la sumaciones que planteaban sus cuadraturas aritméticas de las parábolas generalizadas $y=x^n$.

Además, la asociación a una curva de una ecuación, que Fermat, con gran acierto, denomina *propiedad específica de la curva*, porque describe sus propiedades básicas, le facilita el tratamiento aritmético y algebraico de problemas que Cavalieri había atacado con Geometría sintética.

Retrato de Fermat como consejero del parlamento de Toulouse (atribuido a Antoine Durand). Académie des Sciences et Belles Lettres de Toulouse.

Fermat ha sido uno de los grandes genios de la cultura francesa, una de las figuras mas apasionantes de la Historia de la Ciencia y uno de los matemáticos mas extraordinarios de todos los tiempos.

La obra matemática de Fermat está en el origen de casi todos los descubrimientos matemáticos del siglo XVII, época capital para el desarrollo de la Matemática, ya que en ella aparecen disciplinas matemáticas con sello propio como el Cálculo Infinitesimal, la Geometría Analítica, el Cálculo de Probabilidades, la Teoría de Números, etc. Pues bien, puede decirse que precediendo en la raíz a Descartes, Pascal, Barrow, Leibniz, Newton, etc., Fermat ha dado el golpe inicial indispensable para que todas estas teorías se empezaran a desarrollar.

Fermat es el inspirador de los fundamentos técnicos del Cálculo Infinitesimal en sus dos vertientes, Diferencial e Integral, es pionero junto con B.Pascal en la invención de la Teoría de la Probabilidad, es el creador de la Teoría de Números y codescubridor junto con Descartes de la Geometría Analítica, a base de aplicar el Álgebra simbólica de Vieta sobre el Análisis Geométrico de los antiguos.

Pascal descubre en 1654 una fórmula recurrente para la suma de las k-ésimas potencias de enteros, que es más explícita que la fórmula de Fermat. Pascal establece la fórmula a base de estudiar las propiedades de los números del triángulo aritmético. La fórmula aparece en su obra *Potestatum Numericarum Summa* donde indica que puede ser aplicada a la cuadratura de curvas. Traduciendo simbólicamente el lenguaje retórico de Pascal la fórmula se expresaría en la forma:

$$\binom{k+1}{k}\sum_{i=1}^{i=n} i^k + \binom{k+1}{k-1}\sum_{i=1}^{i=n} i^{k-1} + \cdots + \binom{k+1}{1}\sum_{i=1}^{i=n} i = (n+1)^{k+1} - n - 1 \; .$$

La fórmula de Pascal puede obtenerse aplicando la fórmula binomial en la forma siguiente:

$$(n+1)^{k+1} - 1 = \sum_{i=1}^{i=n}\left[(i+1)^{k+1} - i^{k+1}\right] = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{r=0}^{r=k}\binom{k+1}{r} i^r$$

A partir de la fórmula de Pascal, inductivamente, se puede probar que

$$\sum_{i=1}^{i=n} i^k = \frac{n^{k+1}}{k+1} + \frac{n^k}{2} + \text{potencias inferiores de } n \; .$$

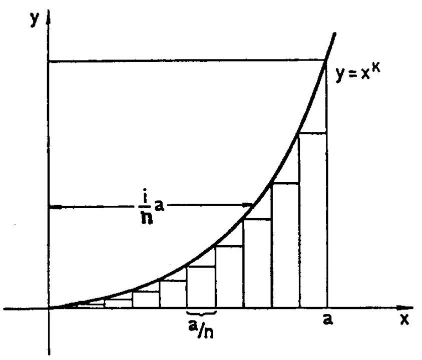
de donde a su vez se puede obtener fácilmente las desigualdades habituales:

$$1^k + 2^k + \cdots + (n-1)^k < \frac{n^{k+1}}{k+1} < 1^k + 2^k + \cdots + n^k \; .$$

Es muy interesante el comentario que hace Pascal tras establecer su fórmula:

> «*Toda persona que esté familiarizada con la doctrina de los indivisibles, puede advertir que los resultados anteriores pueden ser utilizados para la determinación de áreas curvilíneas. Nada es más fácil, en efecto, que obtener inmediatamente la cuadratura de todo tipo de parábolas,* [...] *Si entonces extendemos a cantidades continuas los resultados encontrados para números, seríamos capaces de establecer las siguientes reglas: la suma de un cierto número de líneas es al cuadrado de la mayor, como 1 es a 2. La suma de los cuadrados es al cubo de la mayor como 1 es a 3,* [...] *, la suma de las potencias de un número determinado de líneas es a la potencia de grado siguiente al de la mayor como la unidad es al exponente de esta última potencia*.»

La idea de Pascal sería abreviar el método de exhaución de la siguiente forma:

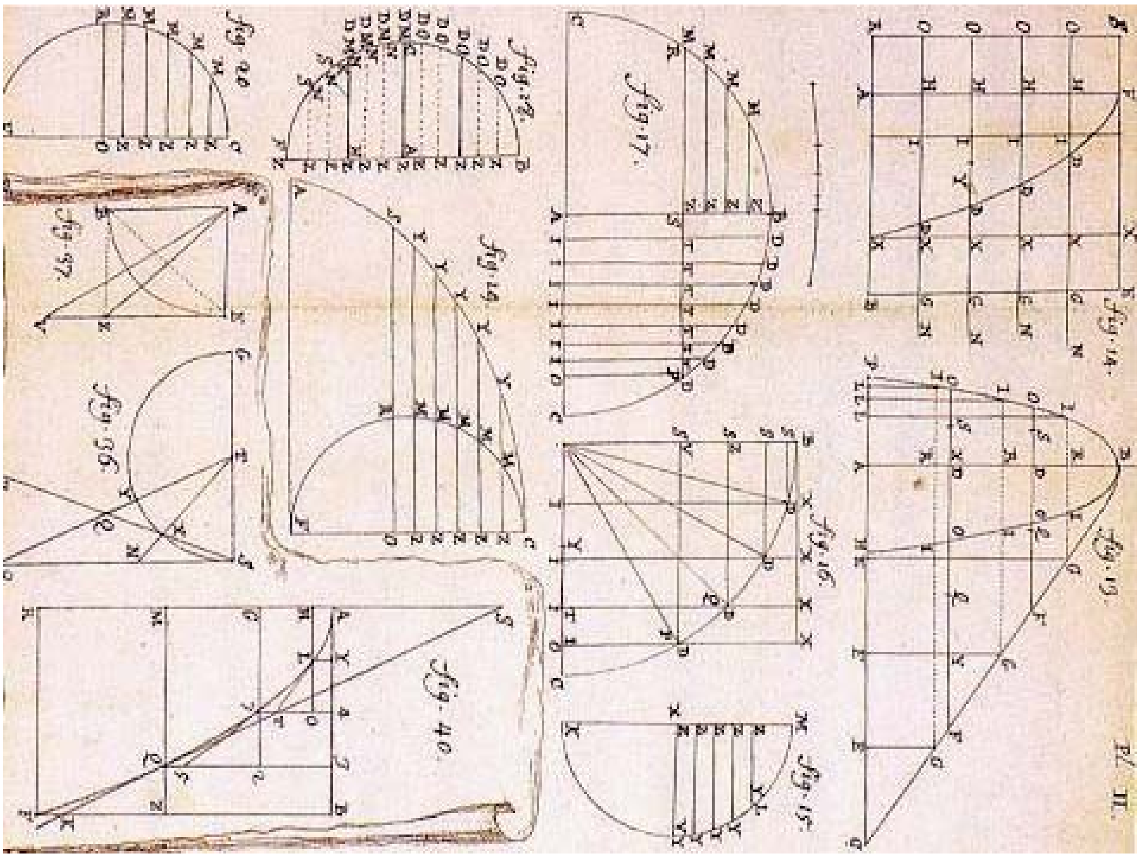


De acuerdo con la fórmula para $\sum_{i=1}^{i=n} i^k$ las potencias inferiores de n serían *despreciables* frente al primer término $n^{k+1}/(k+1)$. Si como es habitual, el área bajo la parábola $y=x^k$ se divide en una cantidad n (suficientemente grande) de *cuasi-rectángulos*, resultado de la subdivisión del intervalo [o,a] en subintervalos de longitud a/n, el área a(S) bajo la curva será :

$$a(S) = \left[(a/n)^k + (2a/n)^k + \cdots + (na/n)^k\right] \cdot (a/n) = (a/n)^{k+1}\sum_{i=1}^{i=n} i^k \cong \frac{(na/n)^{k+1}}{k+1} = \frac{a^{k+1}}{k+1} \; ,$$

es decir, se obtiene el resultado de la cuadratura básica: $\int_o^a x^k dx = \dfrac{a^{k+1}}{k+1}$.

LA CONTRIBUCIÓN DE PASCAL AL CÁLCULO INTEGRAL

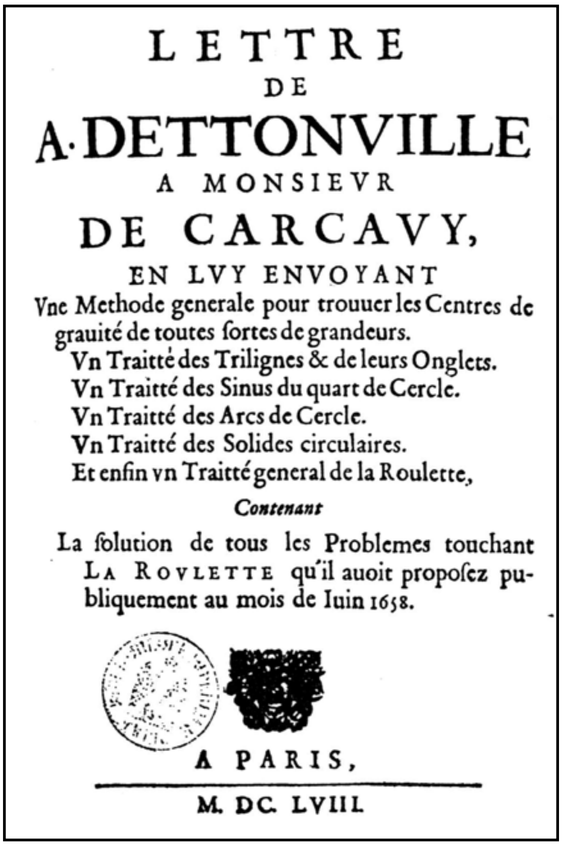


Figuras del *Traité de la Roulette* de Pascal, de 1665. Biblioteca de la Universidad de Sevilla.

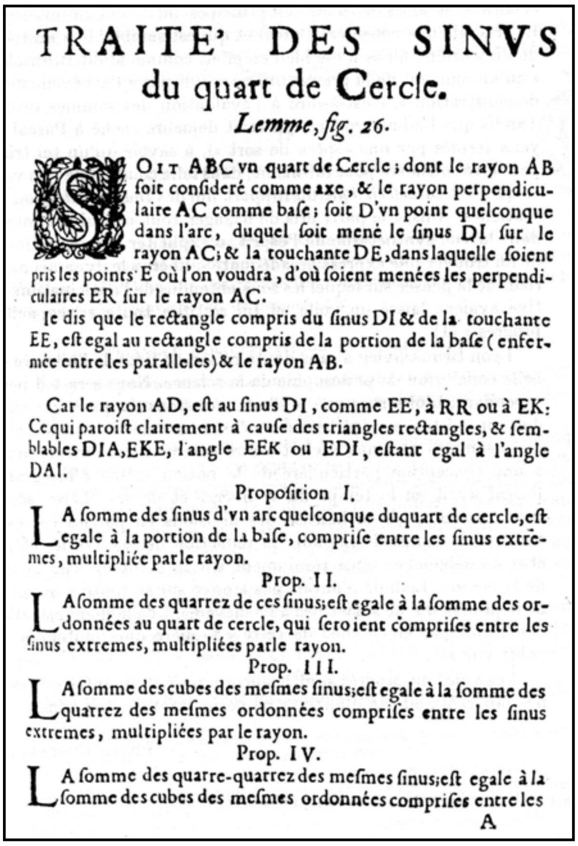
Pascal aplica ingeniosamente su método de la balanza –llamada balanza de Arquímedes– en los famosos problemas sobre la cicloide, que se convirtió en la época en la más importante de las curvas, sobre la que se ponía a prueba la potencia de los nuevos métodos infinitesimales que iban apareciendo en el panorama matemático de mediados del siglo XVII. La cicloide –*Roulette o Trochoïde*– fue objeto de diversos desafíos y debates que se abren con una circular que Pascal lanza en junio de 1658, poniendo en concurso un cierto numero de cuestiones referentes a la curva, cuyas soluciones el mismo daría a conocer al principio de 1659.

Sello emitido en 1962 para conmemorar el tercer centenario de la muerte de Pascal.

LA CONTRIBUCIÓN DE PASCAL AL CÁLCULO INTEGRAL



LETTRE
DE
A. DETTONVILLE
A MONSIEVR
DE CARCAVY,
EN LVY ENVOYANT
Vne Methode generale pour trouuer les Centres de grauité de toutes ſortes de grandeurs.
Vn Traitté des Trilignes & de leurs Onglets.
Vn Traitté des Sinus du quart de Cercle.
Vn Traitté des Arcs de Cercle.
Vn Traitté des Solides circulaires.
Et enfin vn Traitté general de la Roulette,
Contenant
La ſolution de tous les Problemes touchant LA ROVLETTE qu'il auoit propoſez publiquement au mois de Iuin 1658.
A PARIS,
M. DC. LVIII.



TRAITE' DES SINVS
du quart de Cercle.
Lemme, fig. 26.

SOIT ABC vn quart de Cercle; dont le rayon AB ſoit conſideré comme axe, & le rayon perpendiculaire AC comme baſe; ſoit D vn point quelconque dans l'arc, duquel ſoit mené le ſinus DI ſur le rayon AC; & la touchante DE, dans laquelle ſoient pris les points E où l'on voudra, d'où ſoient menées les perpendiculaires ER ſur le rayon AC.

Ie dis que le rectangle compris du ſinus DI & de la touchante EE, eſt egal au rectangle compris de la portion de la baſe (enfermée entre les paralleles) & le rayon AB.

Car le rayon AD, eſt au ſinus DI, comme EE, à RR ou à EK: Ce qui paroiſt clairement à cauſe des triangles rectangles, & ſemblables DIA, EKE, l'angle EEK ou EDI, eſtant egal à l'angle DAI.

Propoſition I.

LA ſomme des ſinus d'vn arc quelconque du quart de cercle, eſt egale à la portion de la baſe, compriſe entre les ſinus extremes, multipliée par le rayon.

Prop. II.

LA ſomme des quarrez de ces ſinus; eſt egale à la ſomme des ordonnées au quart de cercle, qui ſeroient compriſes entre les ſinus extremes, multipliées par le rayon.

Prop. III.

LA ſomme des cubes des meſmes ſinus; eſt egale à la ſomme des quarrez des meſmes ordonnées compriſes entre les ſinus extremes, multipliées par le rayon.

Prop. IV.

LA ſomme des quarre-quarrez des meſmes ſinus; eſt egale à la ſomme des cubes des meſmes ordonnées compriſes entre les
A

1. Página del título de la primera recopilación de los escritos de Pascal sobre la cicloide (diciembre de 1658).
2. Primera página del *Traité des sinus du quart de cercle* de Pascal.

Bajo el nombre de *Lettres de Dettonville*, Pascal publicó en diciembre de 1658 sus famosas epístolas científicas con métodos y resultados de Cálculo Integral, bajo la forma de nueve fascículos con paginación separada.

Se considera a Pascal como uno de los pioneros de la inducción matemática, precisamente porque realiza una formulación casi completamente abstracta del método en su memoria *Potestatum Numericarum Summa*, redactada en 1654, aunque publicada en 1665, a continuación del famoso *Traité du triangle arithmétique*. En su escrito Pascal exhibe una fórmula recurrente para la suma de las k-ésimas potencias de enteros que deduce de las propiedades de *triángulo aritmético* –llamado *Triángulo de Tartaglia o Triángulo de Pascal*–. Mediante la citada fórmula Pascal consigue la cuadratura de la parábola $y=x^n$ (n entero positivo), es decir un resultado geométrico equivalente a $\int_0^a x^n dx = a^{n+1}/(n+1)$. Entusiasmado por el resultado, Pascal escribe una observación de gran altura filosófica:

> ***«He tenido que añadir algunas observaciones familiares a los que practican los indivisibles a fin de resaltar las relaciones tan admirables que la naturaleza, ávida de unidad, establece entre las cosas más alejadas en apariencia. Ello aparece en estos ejemplos donde vemos que el cálculo de las dimensiones de las dimensiones continuas se reconduce a la suma de potencias numéricas.»***

Al traducir al simbolismo moderno el lenguaje geométrico con el que Pascal encadena sus proposiciones, con una destreza inefable, aparecen inmediatamente fórmulas de nuestro Cálculo Integral, de modo que debemos afirmar que el gran místico de Port Royal fue –junto con Barrow– uno de los matemáticos que más resultados obtuvo asimilables a los de nuestro Cálculo Integral. Una buena parte de ellos se refieren a la transformación de «*integrales definidas*», que consiste en establecer la igualdad de dos integrales definidas, con base en el hecho de que las dos integrales constituyen dos expresiones diferentes de una superficie o de un volumen. Ambas expresiones se obtienen «*barriendo*» la superficie o el volumen de dos formas diferentes. En el caso de una superficie, barriendo sucesivamente según paralelas a las base y luego paralelas al eje, se obtiene un resultado que en notación moderna escribimos: $\int_0^a y(x)\, dx = a\cdot b - \int_0^b x(y)\, dy$ [b=y(a)], y que equivale a igualar expresiones que resultan de «*integrar respecto del eje de abscisas o respecto del eje de ordenadas*».

Pascal obtiene también mediante complejos desarrollos geométricos resultados generales equivalentes a los métodos de *integración por partes* e *integración por cambios de variable*, así como las propiedades aditivas de la integración. Al tratar la realidad infinitesimal, Pascal se mantiene vinculado al lenguaje geométrico sintético, y a veces mecánico, lo que le obliga a enunciados largos y prolijos que ocultan resultados verdaderamente novedosos y trascendentes y vínculos entre problemas cuyo profundo significado está en el origen del descubrimiento de Newton y Leibniz, que se asienta en la algoritmización y generalización de los métodos, imposible de alcanzar con el abstruso lenguaje geométrico. Así sucede, por ejemplo, en su *Traité des sinus du quart de cercle* donde según testimonio de Leibniz le hizo ver como un relámpago la relación inversa de los problemas de cuadraturas y tangentes. También el *triángulo característico* que Pascal maneja con precisión está en el origen del Cálculo Diferencial de Leibniz, y la *Fórmula binomial* de Newton tiene su origen en Pascal, de modo que los descubridores del Cálculo Infinitesimal son tributarios en buena parte de su genio.

La integración aritmética de Wallis

La cuadratura de las curvas $y=x^k$ con k no necesariamente entero positivo fue estudiada exhaustivamente por J.Wallis en su obra *Arithmetica Infinitorum* de 1655.

Wallis fue muy fecundo en creación pero parco en rigor. No abundan en su obra las demostraciones rigurosas, porque teniendo una confianza ilimitada en su intuición, aventura resultados ciertos mediante su autodenominado método de *modus inductionis*, llamado más tarde conclusión por analogía o inducción incompleta.

Los métodos algebraicos introducidos en la Geometría por Vieta, Fermat y Descartes, así como los instrumentos de computación numérica fundamentados en los logaritmos de Napier y Briggs, permiten a Wallis despegarse de los métodos geométricos de los antiguos, a los que estuvo todavía vinculado Cavalieri, para al igual que había aritmetizado *Las Cónicas* de Apolonio, aritmetizar los indivisibles de aquél, sustituyendo los infinitos indivisibles geométricos de una figura que se quiere cuadrar por indivisibles aritméticos –de ahí el nombre de su obra principal–) con una longitud determinada cada uno, de manera que, utilizando fórmulas sobre series de números, obtiene las cuadraturas al tomar n *muy grande* –paso al límite encubierto–, es decir n tendiendo a infinito. Es, precisamente, en este contexto donde Wallis introduce para la posteridad el símbolo ∞ del infinito.

En la cuadratura de la curva $y=x^k$ Wallis precisa obtener el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1} \quad ,$$

que ahora expresa en la forma:

$$\int_0^a x^k\,dx = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{0^k + 1^k + \cdots + n^k}{n^k + n^k + \cdots + n^k} \right]$$

Wallis obtiene este límite (de lo que él llama *serie de orden k*) de forma empírica. En efecto, para k=3, por ejemplo, obtiene los cocientes de la tabla siguiente, que en realidad representan la comparación de los indivisibles aritméticos de la parábola cúbica $y=x^3$ con los del rectángulo circunscrito.

Ante la evidencia numérica del cuadro, Wallis concluye inductivamente que se verifica:

$$\frac{0^3 + 1^3 + \cdots + n^3}{n^3 + n^3 + \cdots + n^3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4n}$$

de manera que el límite es 1/4.

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{0^3 + 1^3 + \cdots + n^3}{n^3 + n^3 + \cdots + n^3} = \right] = \frac{1}{4}$$

$$\frac{0^3+1^3}{1^3+1^3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{0^3+1^3+2^3}{2^3+2^3+2^3} = \frac{9}{24} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

$$\frac{0^3+1^3+2^3+3^3}{3^3+3^3+3^3+3^3} = \frac{36}{108} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$$

$$\frac{0^3+1^3+2^3+3^3+4^3}{4^3+4^3+4^3+4^3+4^4} = \frac{100}{320} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$$

$$\frac{0^3+1^3+2^3+3^3+4^3+5^3}{5^3+5^3+5^3+5^3+5^4+5^3} = \frac{225}{750} = \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$$

....

Haciendo cálculos similares para diversos valores de k, Wallis va obteniendo:

$$\frac{\sum_{i=0}^{i=n} i}{(n+1)n} = \frac{1}{2} \;;\quad \frac{\sum_{i=0}^{i=n} i^2}{(n+1)n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6n} \;;\quad \frac{\sum_{i=0}^{i=n} i^3}{(n+1)n^3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4n} \;;$$

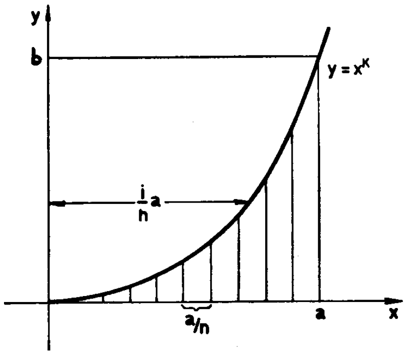
y en general

$$\frac{\sum\limits_{i=0}^{i=n} i^k}{(n+1)n^k} = \frac{1}{k+1} + \frac{a_1}{n} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{n^{k-1}}$$

de donde deduce que para un k entero positivo cualquiera se verifica:

$$\underset{n\to\infty}{\text{Lím}} \left[\frac{0^k + 1^k + \cdots + n^k}{n^k + n^k + \cdots + n^k} \right] = \frac{1}{k+1}$$

Ahora ya puede calcular la cuadratura de la parábola $y=x^k$, comparando indivisibles:



$$\frac{\sum\limits_{x=0}^{x=a} y}{\sum\limits_{x=0}^{x=a} b} = \underset{n\to\infty}{\text{Lím}} \left[\frac{\left(a\cdot[0/n]\right)^k + \left(a\cdot[1/n]\right)^k + \cdots + \left(a\cdot[n/n]\right)^k}{a^k + a^k + \cdots + a^k} \right] = \underset{n\to\infty}{\text{Lím}} \left[\sum_{i=0}^{i=n} \frac{i^k}{(n+1)n^k} \right] = \frac{1}{k+1},$$

resultado equivalente a la fórmula de la cuadratura básica para el entero positivo k:

$$\frac{\int_0^a x^k dx}{a^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$$

Wallis realiza la extensión de la cuadratura desde k entero a k racional positivo, para ello utiliza el siguiente artificio:

Se define el Índice de una función, I(f), mediante la fórmula:

$$\underset{n\to\infty}{\text{Lím}} \left[\frac{f(0) + f(1) + \cdots + f(n)}{f(n) + f(n) + \cdots + f(n)} \right] = \frac{1}{I(f)+1},$$

presuponiendo que tal límite existe. Por ejemplo, según la fórmula anterior

$$\underset{n\to\infty}{\text{Lím}} \left[\frac{0^k + 1^k + \cdots + n^k}{n^k + n^k + \cdots + n^k}\right] = \frac{1}{k+1}$$ expresaría que el índice de $f(x)=x^k$ es $I(x^k)=k$.

Por otra parte Wallis observa que, dada una progresión geométrica de potencias enteras positivas de x, por ejemplo $1, x^3, x^5, x^7, \ldots$, la correspondiente sucesión de índices 0,3,5,7, ..., forma una progresión aritmética. Esto es una observación trivial, pero le permite dar un gran salto adelante, de manera que mediante una audaz extrapolación Wallis establece (sin demostración) que una conclusión análoga puede deducirse para la progresión geométrica:

$$1,\ \sqrt[q]{x},\ \left(\sqrt[q]{x}\right)^2,\ \ldots,\ \left(\sqrt[q]{x}\right)^{q-1},\ x$$

de forma que la sucesión de sus índices:

$$0 = I(1),\ I\left\{\sqrt[q]{x}\right\},\ I\left\{\left(\sqrt[q]{x}\right)^2\right\},\ \ldots,\ I\left\{\left(\sqrt[q]{x}\right)^{q-1}\right\},\ I\{x\} = 1$$

debe formar una progresión aritmética, de donde deduce que se verifica necesariamente:

$$I\left\{\left(\sqrt[q]{x}\right)^p\right\} = \frac{p}{q}\ ;$$

entonces, aplicando la definición de índice de una función, obtiene:

$$\underset{n\to\infty}{\text{Lím}} \left[\frac{\left(\sqrt[q]{0}\right)^p + \left(\sqrt[q]{1}\right)^p + \ \ldots\ \left(\sqrt[q]{n}\right)^p}{\left(\sqrt[q]{n}\right)^p + \left(\sqrt[q]{n}\right)^p + \ ::::\ \left(\sqrt[q]{n}\right)^p}\right] = \frac{1}{(p/q)+1}\ .$$

A partir de aquí, razonando como en el caso de k entero, Wallis obtiene:

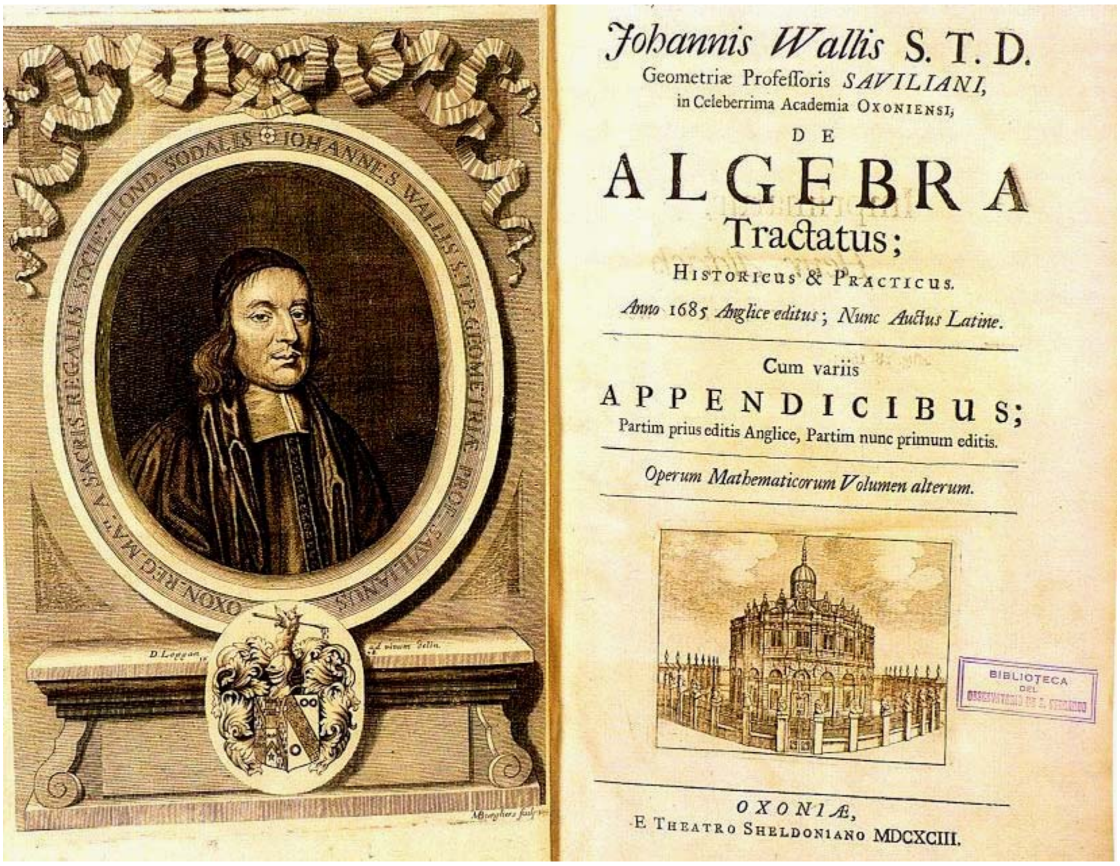
$$\int_0^a x^{p/q}dx = \frac{a^{(p/q)+1}}{(p/q)+1}$$

que es el resultado de la cuadratura básica para k=p/q.

De esta forma Wallis era capaz de calcular las razones entre las áreas bajo las curvas $y=x^{p/q}$ y los rectángulos circunscritos, así como las razones entre los sólidos de revolución determinados por estas parábolas y sus cilindros circunscritos. A pesar de la heterodoxia de sus procedimientos, Wallis estaba convencido absolutamente de la validez de sus métodos.

Además, es en este contexto donde Wallis asocia la raíz $\left(\sqrt[q]{x}\right)^p$ con el índice p/q. Será Newton, poco más tarde, quien, siguiendo los pasos de Wallis, introducirá el uso de potencias fraccionarias y negativas.

LA ARITMETIZACIÓN DE WALLIS HACIA LOS LÍMITES



John Wallis. ***Operum mathematicorum*** **(Oxford, 1693). Portada del libro** ***De Algebra Tractatus*** **de su primera edición latina, que es el primer volumen de las obras matemáticas de Wallis. Se trata de un jjemplar de la Biblioteca del Real Instituto y Observatorio de la Armada de San Fernando (Cádiz).**

En esta obra Wallis se recoge una auténtica ascendencia del Cálculo Infinitesimal: 1.Método de Exhaución de Arquímedes, 2.Método de indivisibles de Cavalieri, 3.Aritmética de los infinitos de Wallis, 4.Método de las series infinitas de Newton.

Wallis despliega una poderosa capacidad aritmetizadora. Al corriente del álgebra literal de Vieta, de los métodos analíticos de Descartes y Fermat y de las tendencias hacia los límites de los matemáticos franceses (Fermat, Pascal y Roberval), Wallis se propone rescatar e independizar a la Aritmética de la representación geométrica, rompiendo con el Algebra Geométrica de los antiguos, llegando incluso a presentar aritméticamente lo que para los griegos era la intocable teoría general de las proporciones de Eudoxo, que aparecía en el libro V de ***Los Elementos*** **de Euclides. Con ello Wallis es, entre los predecesores del Cálculo, quien más próximo está a la idea de límite y quien con mayor soltura la utiliza, por lo menos a nivel intuitivo. La fuente de inspiración del trabajo de Wallis es el método de los indivisibles de Cavalieri de cuya aritmetización destila la concepción intuitiva de límite que aplica.**

Wallis va más lejos que ningún otro matemático en la exploración y utilización del infinito. Con gran osadía representa lo infinitamente pequeño por 1/∞, manifestando que cada subdivisión con tal anchura indistintamente se puede interpretar como una línea o como un paralelogramo infinitesimal. Esto induce a la confusión de las dos concepciones de lo infinitesimal, líneas y rectángulos infinitamente pequeños, más aún cuando dice que un tal ente se le puede considerar como una pequeña anchura de modo que por una multiplicación infinita resultará una anchura dada, es decir (a/∞)·∞ = a. Así lo hace en ***De seccionibus Conicis*** **para hallar el área del triángulo, donde con gran relajación el rigor extrapola con frivolidad las propiedades de lo finito a lo infinito.**

Más cuidadoso en la manipulación del infinito fue en su ***Aritmetica Infinitorum*** **donde obtiene la cuadratura básica de Cavalieri. Comparando indivisibles aritméticos, aplicando inducción incompleta –llamada inducción científica o baconiana– y aproximando, alcanza el resultado utilizando patentemente la idea de límite, con una precisión –por lo menos a nivel intuitivo, aunque por supuesto no riguroso– como hasta entonces no se había alcanzado. Con una audacia inefable generaliza la cuadratura para exponentes racionales mediante una interpolación y no se detiene aquí, sino que extiende la validez de la cuadratura a exponentes irracionales. Así Wallis contribuye a dar carta de naturaleza aritmética a lo irracional, superando el imperativo pitagórico de considerar lo irracional sólo en el campo de la Geometría, removiendo una de los obstáculos que impedía la formulación del concepto de límite y por tanto la elaboración rigurosa del nuevo Cálculo. Paradójicamente la ausencia de rigor de Wallis contribuiría al alumbramiento en su día de las ideas necesarias para establecer el Análisis Infinitesimal con rigor a través del concepto de límite.**

Los Indivisibles e Infinitesimales de Roberval

A lo largo de los siglos los filósofos mantuvieron opiniones diversas sobre la constitución de la materia y la estructura del continuo. Unos sostenían que la materia era infinitamente divisible y que en cada división se conservaban las propiedades básicas de la materia inicial. Otros, por el contrario, mantenían que la descomposición de la materia era limitada, de forma que se llegaría a unas partículas *indivisibles* o *átomos* cuyas propiedades ya no serían idénticas a las de la materia primigenia. Estas concepciones tuvieron su repercusión en la Matemática, de modo que la primera estaría vinculada con los *Infinitesimales* y la segunda con los *Indivisibles*, llamados por algunos *heterogéneos*.

Los indivisibles de Roberval suponen, en cierto modo, una concepción intermedia entre ambos entes matemáticos. En efecto, Roberval maneja *infinitamente pequeños* homogéneos, pero muchas veces lo hace como si fueran los heterogéneos indivisibles, por eso su obra puede considerarse como una transición de los indivisibles de Cavalieri a los infinitesimales de Fermat, Newton y Leibniz. Empieza llamando a su método *método de los infinitos*, pero por la influencia de Cavalieri, adopta enseguida la palabra indivisible.

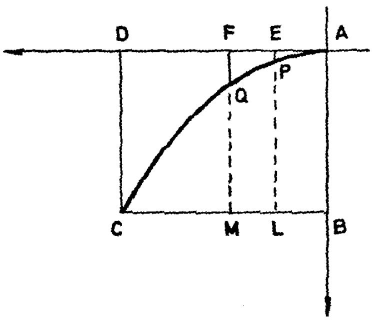
Roberval afirma en su *Traité des Indivisibles*:

> «*El indivisible procede de una subdivisión continua de una superficie que se puede ir estrechando hasta el infinito en pequeñas superficies*. [...]. *Una superficie no está compuesta realmente por líneas, o un sólido compuesto por superficies, sino constituido por pequeñas piezas de superficies y sólidos respectivamente, pero estas infinitas cosas son consideradas como si fueran indivisibles*. [...]. *No se comparan heterogéneos sino que los infinitos o indivisibles se conciben así: una línea está compuesta de líneas pequeñas, infinitas en número, pero se hablará del infinito número de puntos, de forma análoga a como el infinito número de líneas de una superficie representará el infinito número de pequeñas superficies que llenan la superficie entera*.»

Las diversas subdivisiones conducen a Roberval a cálculos aritméticos con series que utiliza, no para determinar directamente el valor de una superficie o volumen, sino para comparar con otra superficie o volumen muy simple, de modo que establece una proporción por medio de la cual un cuarto término desconocido se calcula mediante otros tres conocidos.

A pesar de no tener el mismo significado que en Cavalieri, el concepto de «*todas las líneas*» o indivisibles aparece constantemente en las cuadraturas de Roberval.

Para ilustrar lo que se acaba de exponer, parafraseando su cuadratura de la parábola, sea ABC un segmento de una parábola cuyo vértice es A y cuyo eje es AB. Roberval divide la tangente AD en *un número infinito* de partes iguales: AE, EF, ... ; traza las líneas EL, FM, ... , paralelas a AB por los puntos de división E, F, ... , y establece:



$$\frac{\text{Área}\quad \text{ACD}}{\text{Rectángulo}\quad \text{ABCD}} = \frac{\text{Todas las líneas de ACD}}{\text{Todas las líneas de ABCD}}$$

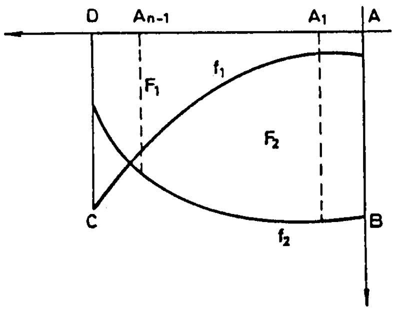
Esta relación es similar a la relación fundamental que utiliza Cavalieri para su cuadratura de la parábola cónica, pero la justificación y el uso que de ella hace Roberval es bastante diferente, ya que éste primero considera que:

$$\frac{\text{Área} \quad \text{ACD}}{\text{Rectángulo} \quad \text{ABCD}} = \frac{\text{Todos los rectángulos de ACD}}{\text{Todos los rectángulos de ABCD}},$$

donde los rectángulos infinitesimales son determinados por la división de AD. Como todos los rectángulos tienen la misma base AE, este segmento de línea puede ser cancelado en ambos miembros de esta igualdad para obtener el segundo miembro de la primera igualdad, donde «*todas las líneas*» significa la suma de las ordenadas. Este es el punto crucial que permite seguir manteniendo en el discurso matemático de Roberval el término «*todas las líneas*».

En lenguaje actual lo que hace Roberval se explicaría así:

Sean F_1 y F_2 dos figuras planas con base rectilínea AD y limitadas por las gráficas de las funciones f_1 y f_2 y las líneas AB y DC. Roberval determina la razón F_1/F_2, mediante la relación:



$$\frac{F_1}{F_2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{i=n}\left[f_1\left([i/n] \quad AD\right)\right] \frac{AD}{n}}{\sum_{i=1}^{i=n}\left[f_2\left([i/n] \quad AD\right)\right] \frac{AD}{n}}$$

En la cuadratura de la parábola F_1 es un segmento de parábola y F_2 es un rectángulo, de modo que se tiene:

$f_1([i/n]AD) = (i^2/n^2)AD^2$, $f_2([i/n]AD) = AD^2$,

por tanto Roberval conduce, implícitamente, la cuadratura de la parábola a la determinación del límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{1=1}^{1=n} \frac{i^2}{n^2}}{\sum_{i=1}^{i=n} 1^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1/3)n^3 + (1/2)n^2 + (1/6)n}{n^3},$$

asegurando que vale 1/3, porque para n suficientemente grande la cantidad $(1/2)n^2+(1/6)n$ es despreciable frente a n^3, como se ilustrará más adelante.

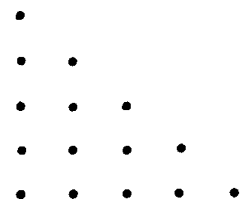
Es decir, Roberval devuelve al indivisible la dimensión geométrica que se le había sustraído, pero utiliza muchas veces el propio lenguaje de Cavalieri, haciendo en sus figuras, al menos en apariencia, abstracción de una dimensión. Es una extraña concepción, que le resulta fecunda al utilizarla en la comparación de figuras complicadas con figuras simples, como se ha visto en el ejemplo.

Los métodos de cuadratura por indivisibles de Cavalieri y de Roberval son algo diferentes. El enfoque de Cavalieri es estrictamente geométrico y atenta contra la homogeneidad del espacio, el de Roberval, por su carácter aritmético e infinitesimal, está más próximo a las integraciones aritméticas de Fermat y Pascal

Roberval trajo de nuevo la asociación de números con magnitudes geométricas, en un sentido muy próximo a lo pitagórico. Un segmento de línea es tratado como compuesto de un número infinito de pequeñas líneas representadas por puntos a los que se les hace corresponder enteros positivos.

Consideremos sucesivamente triángulos rectángulos isósceles con catetos compuestos por 4,5,6, ... puntos (o indivisibles). Al igual que Fermat, Roberval utiliza resultados sobre números poligonales, calculando que el número total de puntos en los triángulos vendrá dado por :

. . . .



Para el triángulo de 4 es $10=(1/2)4^2+(1/2)4$

Para el triángulo de 5 es $15=(1/2)5^2+(1/2)5$

Para el triángulo de 6 es $21=(1/2)6^2+(1/2)6$

Para el triángulo de 7 es $28=(1/2)7^2+(1/2)7$

. . . .

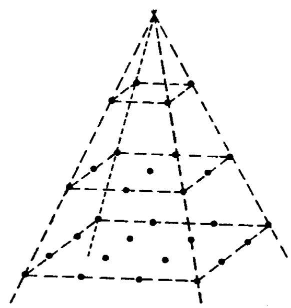
Como se ve se trata de números triangulares, cuya expresión es:

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}=(1/2)n^2+(1/2)n$$

El segundo término de cada miembro de la derecha es la mitad del lado y representa el exceso del triángulo sobre la mitad del cuadrado. Este exceso disminuye indefinidamente en proporción al primer término, con el número de puntos del lado del triángulo. En concreto esta proporción va siendo 1/4, 1/5, 1/6, ... Ya que el número de líneas en un triángulo geométrico o en un cuadrado es infinito, este exceso o *mitad de una línea* es despreciable y no debe entrar en consideración. Esto vendría a decirnos que el triángulo es la mitad del cuadrado, argumento fuertemente equivalente a la cuadratura $\int_0^a x\,dx = a^2/2$.

Roberval continúa con este tipo de argumento y considera el caso de las líneas que siguen el orden de los cuadrados. La suma de todas esas líneas (los puntos que a ellas representan) es a la última, tomada un número de veces igual al número de líneas que hay, como la pirámide es al prisma, es decir como 1 es 3. Si tenemos las pirámides de puntos con base cuadrada, con lados compuestos por 4,5,6, ... puntos o indivisibles, el número total de puntos en las pirámides viene dado por:

. . . .



Para la pirámide de 4 es $30=(1/3)4^3+(1/2)4^2+(1/6)4$

Para la pirámide de 5 es $55=(1/3)5^3+(1/2)5^2+(1/6)5$

Para la pirámide de 6 es $91=(1/3)6^3+(1/2)6^2+(1/6)6$

. . . .

En este caso se trata de números piramidales de base cuadrada que se expresan en la forma:

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=(1/3)n^3+(1/2)n^2+(1/6)n$$

En todas estas expresiones el primer término de la derecha es un tercio del cubo del lado, el segundo es la mitad del cuadrado y el tercero es la sexta parte del número de puntos del lado de la base de la pirámide.

A medida que aumenta el número de puntos en el lado de la pirámide la proporción del segundo término al primero va siendo (3/2)·(1/4), (3/2)·(1/5), (3/2)·(1/6), ... , y la del tercer término al primero va siendo (1/2)·(1/4), (1/2)·(1/5), (1/2)·(1/6), ... Como el número de cuadrados es infinito, los dos últimos términos son despreciables frente al primero, cuando n se hace suficientemente grande, con lo que la suma sería 1/3 del cubo, resultado equivalente a la cuadratura $\int_0^a x^2\,dx = a^3/3$.

De la misma manera la suma de los cubos es un cuarto de la cuarta potencia, la suma de las cuartas potencias es un quinto de la quinta potencia y así sucesivamente. De esta forma Roberval obtendría un resultado equivalente a la cuadratura básica para exponente entero positivo: $\int_0^a x^n\,dx = a^{n+1}/(n+1)$.

La operación de despreciar los términos posteriores al primero frente a éste, simula que ciertos *infinitésimos de orden superior* se desvanecen frente a los de primer orden. En este sentido Roberval es un predecesor de Leibniz.

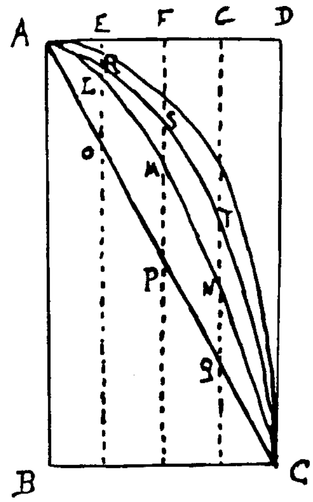
Retomando el tema de la cuadratura de la parábola cónica que Roberval estudia exhaustivamente en una obra que se llama precisamente *La cuadratura de la parábola*, sean AE, EF, ... , subdivisiones iguales de AD, de la segunda expresión anterior se obtiene:

$$\frac{\text{Área}\quad ACD}{\text{Rectángulo}\quad ABCD}=\frac{\text{Todos los rectángulos de ACD}}{\text{Todos los rectángulos de ABCD}}\cong\frac{AE\cdot(EP+FQ+\cdots)}{AD\cdot DC}=$$

$$=\frac{AE\cdot(AE^2+AF^2+\cdots)}{AD\cdot AD^2}=\frac{AE^3\cdot(1^2+2^2+\cdots+n^2)}{AE^3\cdot n^3}=\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}\cong\frac{1}{3}\ .$$

resultando la cuadratura de la parábola cúbica aplicando, implícitamente, el límite habitual:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\ \cdots\ +n^2}{n^3}=\frac{1}{3}\ .$$



Al generalizar, Roberval obtiene la cuadratura de las parábolas de los diversos órdenes, comenzando por la línea recta a la que llama parábola de primer grado, continuando con la parábola cónica, la parábola cúbica y así sucesivamente hasta la parábola de grado n

Vemos cómo Roberval realiza una integración *cuasi-aritmética*, estableciendo las sucesiones y series de números necesarias, pero a la hora de calcular el límite lo encubre recurriendo a la intuición geométrica. Pero con cierta generosidad diríamos que está muy cerca de la noción de *límite de la suma de un número infinito de cantidades infinitamente pequeñas*, lo que le aproxima mucho a nuestra integral definida, en la que, después de dividir una figura en pequeñas secciones, se rebajan éstas, haciéndolas decrecer continuamente en magnitud, conduciendo el problema, tras un cálculo aritmético, a sumar una serie. Realmente la única diferencia es que Roberval necesita hacer un salto lógico para calcular el límite (con una intuición infalible) y además no calcula directamente el resultado, sino a través de la comparación con una figura sencilla que suele ser un rectángulo o un cilindro.

Roberval también considera intuitivamente un «*límite de magnitudes geométricas*», pues maneja lo que llama «*un método para reducir las demostraciones por los indivisibles a las de los antiguos geómetras, mediante polígonos inscritos y circunscritos*», reconciliando así ambos métodos a base de utilizar un lema general que enuncia así:

«*Si tenemos una razón R/S y dos cantidades A y B, tales que para una cantidad añadida a A, la suma tiene con B una razón mayor que R/S, y para una pequeña cantidad sustraída a A, la diferencia tiene con B una razón menor que R/S; entonces digo que A/B=R/S*.»

Mediante la aplicación de este lema, Roberval resuelve nuevamente la cuadratura de la parábola, a base de encajarla en dos series de pequeños rectángulos, unos interiores y otros exteriores, siendo la diferencia entre las dos series inferior a una cantidad dada Z, lo cual es siempre posible dividiendo el lado AD en partes suficientemente pequeñas. La consideración de los diversos pequeños rectángulos muestra, según el lema general, que el área limitada por la parábola es a la del rectángulo circunscrito como 1 es a 3.

A continuación Roberval encuentra, mediante propiedades aritméticas de ciertas series, multitud de resultados sobre los diversos volúmenes de revolución que resultan al hacer girar a cada una de las parábolas anteriores en torno al eje AB o en torno a la base AD.

Si la figura gira en torno a AB, se obtienen los resultados siguientes:

Los sólidos ADC son al cilindro ABCD:	Los conoides parabólicos son al cilindro ABCD:
En la parábola 1ª como 2 es a 3	En el conoide 1º como 1 es a 3
En la parábola 2ª como 1 es a 2	En el conoide 2º como 1 es a 2
En la parábola 3ª como 2 es a 5	En el conoide 3º como 3 es a 5
En la parábola 4ª como 1 es a 3	En el conoide 4º como 2 es a 3
En la parábola 5ª como 2 es a 7	En el conoide 5º como 5 es a 7
En la parábola 6ª como 1 es a 4	En el conoide 6º como 3 es a 4
En la parábola 7ª como 2 es a 9	En el conoide 7º como 7 es a 9
En la parábola 8ª como 1 es a 5	En el conoide 8º como 4 es a 5

Si la figura gira alrededor del lado AD como eje, las parábolas engendran los conos y sus complementarios los morteros parabólicos cumpliéndose las siguientes relaciones:

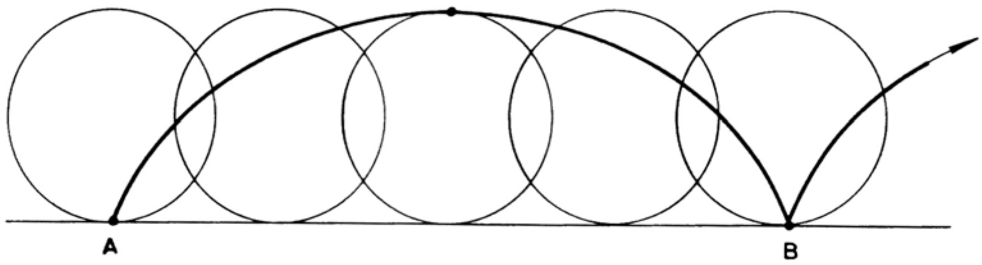
Razones de los conos parabólicos al cilindro ABCD:	Razones de los morteros parabólicos al cilindro ABCD:
El cono 1º como 1 es a 3	El mortero 1º como 2 es a 3
El cono 2º como 1 es a 5	El mortero 2º como 4 es a 5
El cono 3º como 1 es a 7	El mortero 3º como 6 es a 7
El cono 3º como 1 es a 9	El mortero 3º como 8 es a 9
El cono 4º como 1 es a 11	El mortero 4º como 10 es a 11

Roberval prosigue con el estudio de cuerpos anulares, problemas sobre la hipérbola y el conoide hiperbólico (hiperboloide de revolución) y encuentra las razones de la esfera o sus porciones al cilindro circunscrito y al cono inscrito, resultados que aplica a resolver el problema de «*trazar sobre un cilindro recto un área igual a un cuadrado dado mediante un único trazo de compás*», lo que le conduce a estudiar la «*hippopede de Eudoxo*» o «*pezuña de caballo*», curva que jugó un papel importante en el modelo planetario de Eudoxo.

Las cuadraturas y cubaturas trigonométricas de Roberval

El trabajo más importante de Roberval sobre cuadraturas se refiere a la cicloide, curva de moda en su época, sobre la que realiza un estudio exhaustivo a base de ir resolver lo que eran los problemas más candentes del momento. Roberval llama a la cicloide la «*roulette*» y la estudia en su *Traité des Indivisibles* y en un tratado especial sobre esta curva *De Trochoïde ejusque spatio*.

La cicloide se define como el lugar geométrico de las posiciones de un punto de una circunferencia que rueda sin resbalar sobre una recta.



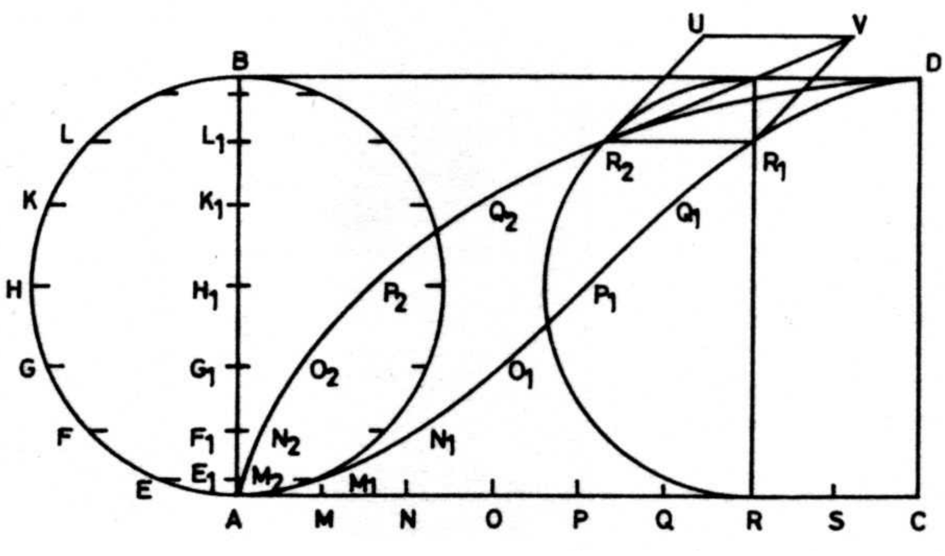
Bajo esta definición empieza Roberval estudiando la generación y la naturaleza de la cicloide, para pasar en seguida a resolver problemas de áreas, volúmenes de revolución, etc., en relación con la curva, constituyendo este estudio uno de los ejemplos más significativos del manejo de indivisibles.

El diámetro AB del círculo AEGB se mueve a lo largo de la tangente AC, permaneciendo paralelo a su posición original, hasta alcanzar la posición CD, siendo AC igual al semicírculo AGB. Al mismo tiempo el punto A se mueve a lo largo de AC, de modo que cuando AB ha alcanzado la posición CD, el punto A alcanza la posición D. Así pues, el punto A está sometido a dos movimientos: su propio movimiento a lo largo del semicírculo AEGB y el debido al movimiento de AB a lo largo de AC. La curva descrita por el punto A debido a estos dos movimientos es la mitad de la cicloide A, ..., D, la segunda parte es la simétrica de la primera respecto a CD.

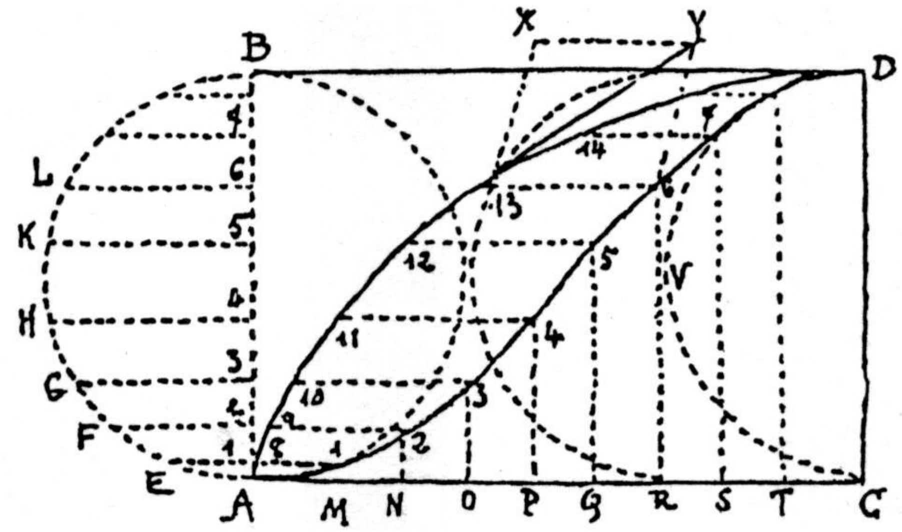
La línea AC y el semicírculo AGB se dividen en una infinidad de partes iguales de manera que:

arco AE = arco EF = ... = línea AM = línea MN = ...

Tracemos lo que Roberval llama el «*seno*» EE_1 perpendicular al diámetro AB y el «*seno verso*» AE_1, que es la altura de A cuando ha alcanzado la posición E. Análogamente trazamos FF_1, GG_1, etc.



Sean MM_1 paralelo a AE_1, NN_1 paralelo e igual a AF_1, etc. Sean M_1M_2 paralelo e igual a EE_1, N_1N_2 paralelo e igual a FF_1, etc., (la notación de Roberval para M_1, N_1, ... es 1,2, ..., y para M_2, N_2, ... es 8,9, ..., como se describe en la figura original).



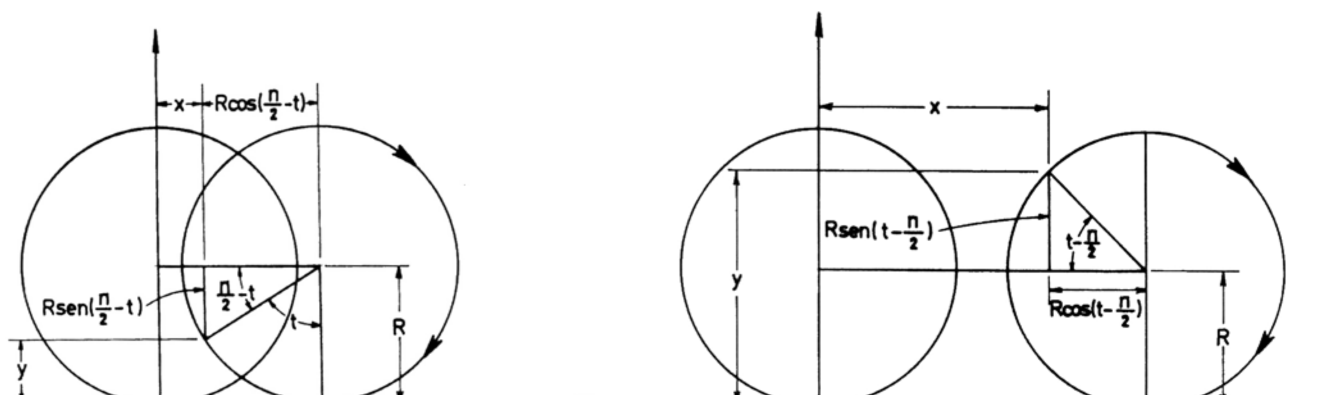
Cuando el diámetro ha alcanzado el punto M, el punto A habrá alcanzado la posición E, la distancia de A a AC será $MM_1=AE_1$, y la distancia de A al diámetro AB será $EE_1=M_1M_2$, por tanto cuando el diámetro está en M el punto A está en M_2. Análogamente cuando el diámetro está en N el punto A está en N_2, etc. De esta forma se engendran dos curvas:

a) La curva $AM_2N_2....R_2D$ que es la mitad de la cicloide.

b) La curva $AM_1N_1....R_1D$ que es llamada por Roberval «*la compañera de la cicloide*».

La compañera de la cicloide es una curva sinusoidal. Es fácil ver que tomando como eje de abscisas la línea AC y como eje de ordenadas AB, la ecuación de *la compañera de la cicloide* es: y=1-cosx.

Hallemos en nuestro lenguaje las ecuaciones paramétricas de la cicloide.



A partir de la figura 9 deducimos que las ecuaciones paramétricas de la cicloide son:

$$\left.\begin{array}{l} x = t - \operatorname{sen} t \\ y = 1 - \cos t \end{array}\right\} \ (R=1) \ \text{ y las de su «compañera»: } \left.\begin{array}{l} x = t \\ y = 1 - \cos t \end{array}\right\}.$$

A continuación Roberval pasa a resolver los problemas típicos de la cicloide:

1. *El área de la figura comprendida entre la cicloide y su compañera es igual al área de la mitad del círculo generador.*

En efecto: en la figura de Roberval $AM_2N_2...D...N_1M_1....A$ tenemos $M_1M_2=EE_1$,$N_1N_2=FF_1$, $O_1O_2=GG_1$, etc. Ahora bien M_1M_2, N_1N_2, O_1O_2, ..., dividen la figura en fajas cuyas alturas son AE_1, E_1F_1, F_1G_1, ..., mientras EE_1, FF_1, GG_1, ..., dividen el semicírculo AHB en «*fajas*» de la misma altura. Por tanto las correspondientes fajas infinitesimales son iguales. De aquí que el área de la figura $AM_2N_2....D....N_1M_1$ ....A y el semicírculo AHB sean iguales.

El resultado 1 en nuestro lenguaje es equivalente, de acuerdo con las ecuaciones de las curvas a:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(x_1(t)-x_2(t)\right)dt=\int_0^{\pi}\left[t-(t-\operatorname{sen}t)\right]\cdot\operatorname{sen}t\,dt=\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^2 t\ \ dt=\pi/2\ .$$

2. *El área de la figura comprendida entre la cicloide y su base es igual a tres veces el área del círculo generador.*

En efecto: *la compañera de la cicloide*, la curva $AM_1N_1...D$, bisecciona el rectángulo ABCD, ya que cada línea de $ACDM_1$ tiene una correspondiente igual en $ABDM_1$; de donde resulta que el área limitada por *la compañera de la cicloide* y la base es la de un círculo generador. De aquí según el resultado anterior al sumar a este área, el área limitada por la cicloide y su compañera, se obtiene que el área limitada por la semi-cicloide y su base es una vez y media el círculo generador, de donde el resultado.

En la figura original de Roberval se observa que el rectángulo ABCD queda escindido en cuatro espacios equivalentes, a saber: el semicírculo CVD, la trilínea ADVC, el espacio A12D5 y la trilínea A12DB.

En lenguaje actual el desarrollo sería el siguiente:

El área del rectángulo ABCD es πx2=2π, y el área de $ACDM_1$ es

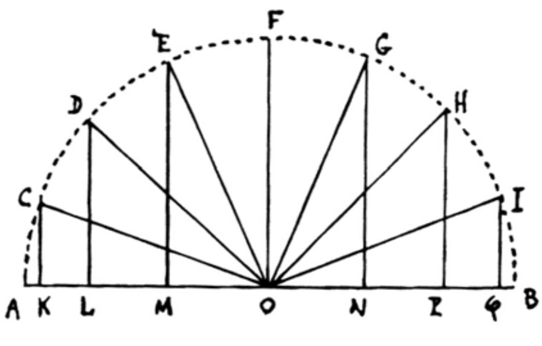
$$\int_0^{\pi}\left(1-\cos t\right)\ dt=\pi$$

de manera que el resultado 2 es equivalente a:

$$\int_{t_1}^{t_2} y(t)\cdot x'(t)\ dt=2\int_0^{\pi}\left[1-\cos t)\right]\cdot\left[1-\cos t\ \right]\ dt=2\cdot(3/2)\cdot\pi=3\pi\,.$$

Roberval continúa su trabajo buscando la razón entre diversos sólidos de revolución obtenidos al hacer girar la cicloide y el cilindro engendrado al girar el rectángulo. Pero para ello precisa calcular la razón de los cuadrados de los «*senos y senos versos*» al cuadrado del diámetro.

3. *La suma de los cuadrados de los «senos» de un semicírculo están en razón 1/8 con el cuadrado del diámetro tomado tantas veces como senos hay.*



En efecto: dividamos el semicírculo en infinitas partes iguales AC, CD, DE, ... Las líneas CK, DL, EM, ..., son los «senos rectos». Aplicando el Teorema de Pitágoras se obtiene:

$OE^2 = EM^2 + MO^2$

$OD^2 = DL^2 + LO^2$

$OC^2 = CK^2 + OK^2$

Ahora bien, OM es igual a CK, OL a DL, OK a EM, ..., de donde resulta que todos los «*senos de complemento*» (cosenos), OM, OL, OK, ..., son iguales a los correspondientes «*senos rectos*», de manera que los cuadrados de todos los «*senos*» tomados dos veces, son iguales al cuadrado del radio OF=OD=OC= ..., tantas veces tomado como senos hay. Pero como OF=AB/2 y $OF^2=AB^2/4$, los cuadrados de los «*senos*» son al cuadrado del diámetro, tomado tantas veces como senos hay, como 1 es a 8.

El resultado demostrado es equivalente en lenguaje actual a:

$$\int_0^{\pi} \mathrm{sen}^2 t\ dt = (1/8)\cdot 2^2 \cdot \pi$$

4. *La suma de los cuadrados de los «senos versos» en un semicírculo están en razón 3/8 con el cuadrado del diámetro, tomado tantas veces como «senos versos» hay*.

En efecto: AB^2 se puede expresar de una infinidad de maneras:

$AB^2 = AK^2 + BK^2 + 2AK\cdot BK \quad (AK\cdot BK = CK^2)$

$AB^2 = AL^2 + BL^2 + 2AL\cdot BL \quad (AL\cdot BL = DL^2)$

$AB^2 = AM^2 + BM^2 + 2AM\cdot BM \quad (AM\cdot BM = EM^2)$.

Vemos que los cuadrados de AB son iguales a dos veces los cuadrados que figuran bajo la forma de productos (AK·BK, AL·BL, AM·BM, ...) más dos veces los cuadrados de los «*senos versos*». Es decir:

- Σ cuadrado del diámetro = 2 veces la suma de los cuadrados de los «*senos rectos*» + 2 veces la suma de los cuadrados de los «*senos versos*».

A partir de aquí, aplicando el resultado anterior se tiene:

- 8 veces los cuadrados de los «*senos rectos*» = 2 veces la suma de los cuadrados de los «*senos rectos*» + 2 veces la suma de los cuadrados de los «*senos versos*».
- 6 veces la suma de los cuadrados de los «*senos rectos*» = 2 veces la suma de los cuadrados de los «*senos versos*».

3/4 Σ cuadrado del diámetro = dos veces la suma de los cuadrados de los «*senos versos*».

De donde se deduce el resultado.

En lenguaje actual el resultado obtenido es equivalente a:

$$\int_0^{\pi} (1-\cos t)^2\, dt = (3/8)\cdot 2^2 \cdot \pi \ .$$

5. *El volumen del sólido engendrado por la revolución de la cicloide alrededor de la línea base AC como eje, está en razón de 5/8 con el volumen del cilindro circunscrito.*

En efecto: el sólido generado por AN_2DN_1 es igual al sólido generado por el semicírculo DC (DVC en la figura de Roberval) porque estas dos figuras planas tienen sus correspondientes líneas iguales y a la misma distancia del eje AC. Como el semicírculo DC es 1/4 del paralelogramo ABCD, el sólido AN_2DN_1 es igual a 1/4 del cilindro ABCD. Por otra parte, las líneas MM_1, NN_1, son «*senos versos*», por tanto el sólido engendrado por AN_1DC es igual a 3/8 del cilindro ABCD. Luego sumando (3/8 + 1/4 = 5/8) se deduce el resultado anunciado.

En nuestro lenguaje el resultado demostrado es equivalente a:

$$\int_0^{\pi} (1-\cos t)^3\, dt = (5/8)\cdot 4\pi \cdot \pi \ .$$

El método exponencial de la progresión geométrica de Fermat

Cuadratura de hipérbolas generalizadas de Fermat

En orden a generalizar el resultado de la cuadratura de Cavalieri para n entero negativo o fraccionario, Fermat atacó y resolvió el problema hacia 1640, investigando el área entre un arco de hipérbola generalizada $x^n y^m = k$ (m,n enteros positivos) una línea ordenada y una asíntota. Su enfoque fue puramente geométrico, y a diferencia de otros trabajos anteriores, en los que se utilizaba una subdivisión equidistante en los intervalos y se comparaba el área o volumen que se quería calcular con otro conocido, Fermat tenía un método que le permitía obtener el área en términos absolutos, utilizando rectángulos infinitesimales que estaban en progresión geométrica de razón menor que la unidad.

Veamos un ejemplo ilustrativo tomado de su *De aequationum localium ... in quadrandis infinitis parabolis et hiperbolis* (*Tratado sobre Cuadraturas*) de 1658.

Fermat comienza diciendo (TH.OF.III.216):

> «*Arquímedes sólo empleó progresiones geométricas para la cuadratura de la parábola; en sus otras comparaciones entre cantidades heterogéneas se restringió a progresiones aritméticas. ¿Sería así porque encontrara que la progresión geométrica sirviera menos a la cuadratura? ¿O quizá es que el artificio particular del que se sirvió para cuadrar con esta progresión la primera parábola puede difícilmente aplicarse a las otras? Cualquiera que sea la razón, yo he probado que la progresión geométrica es muy útil para las cuadraturas y deseo presentar a los geómetras actuales mi invención, que permite cuadrar por un método absolutamente similar, tanto parábolas como hipérbolas*.»

El método está basado en una propiedad de las progresiones geométricas de razón menor que la unidad, que Fermat enuncia así (TH.OF.III.216-217):

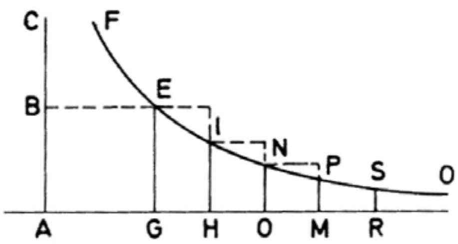
> «*Dada una progresión geométrica cuyos términos decrecen indefinidamente, la diferencia entre dos términos consecutivos es al más pequeño de ellos, como el mayor es a la suma de los términos restantes*.»

Es fácil comprobar que esta propiedad es equivalente a la fórmula de la suma de los términos de una progresión geométrica indefinida y decreciente.

Fermat considera al principio, las hipérbolas $yx^n = k$ y manifiesta (TH.OF.III.217):

> «*Digo que todas estas infinitas hipérbolas, excepto la de Apolonio, que es la primera, pueden ser cuadradas por el método de la progresión geométrica, de acuerdo a un procedimiento uniforme general*.»

Fermat efectúa la demostración para n=2. Con base en la figura adjunta, de la definición de la hipérbola, deduce:



$$\frac{AH^2}{AG^2} = \frac{EG}{IH},$$

$$\frac{AO^2}{AH^2} = \frac{IH}{NO}.$$

En concreto, Fermat afirma (TH.OF.III.218):

«*El área indefinida que tiene por base EG y que está acotada de un lado por la curva ES y de otro por la asíntota infinita GOR, es igual a un cierto área rectilínea*.»

El área rectilínea a que alude Fermat es el rectángulo AGEB. Basándose en la figura anterior Fermat empieza a construir los elementos necesarios para cuadrar la hipérbola (TH.OF.III.218):

«*Consideremos los términos de una progresión geométrica indefinida y decreciente. Sean los primeros términos AG, AH, AO, etc. Supongamos que estos términos están lo bastante próximos para que de acuerdo con el método de Arquímedes podamos "adigualar" como dice Diofanto, o igualar por aproximación el paralelogramo rectilíneo GExGH y el cuadrilátero mixtilíneo GHIE. Además, supondremos que los primeros intervalos GH, HO, OM, etc., son suficientemente iguales para que podamos aplicar el método de reducción de Arquímedes, mediante polígonos inscritos y circunscritos. Basta hacer esta observación una vez para no obligarse a recordar y a insistir constantemente sobre un artificio bien conocido de todos los geómetras* [...].»

Así pues Fermat divide el eje GOR a la derecha del punto G en intervalos GH, HO, OM, etc., de longitudes tales que se verifica:

$$\frac{AH}{AH}=\frac{AH}{AO}=\frac{AO}{AM}=\cdots,$$

$$\frac{AH}{AG}=\frac{GH}{HO}=\frac{HO}{OM}=\cdots,$$

Ahora considera los rectángulos circunscritos:

R_1=EGxGH, R_2=IHxHO, R_3=NOxOM, ...

y comprueba que R_1, R_2, R_3, ... , forman una progresión geométrica decreciente de razón AG/AH. En efecto, aplicando los resultados anteriores, se obtiene:

$$\frac{R_1}{R_2}=\frac{EGxGH}{IHxHO}=\frac{AH^2xGH}{AG^2xHO}=\frac{HO^2xGH}{GH^2xHO}=\frac{HO}{GH}=\frac{AH}{AG},$$

$$\frac{R_2}{R_3}=\frac{IHxHO}{NOxOM}=\frac{AH^2xGH}{AH^2xOM}=\frac{AH^2xHO}{AG^2xOM}=\frac{AH^2xAG}{AG^2xAH}=\frac{AH}{AG}.$$

Comprobando sucesivamente se demuestra que R_1, R_2, R_3, , es una progresión geométrica decreciente a la que Fermat le aplica la propiedad equivalente a su sumación. Sea S su suma, se tiene:

$$\frac{R_1-R_2}{R_2}=\frac{R_1}{S-R_1},$$

de donde se deduce :

$$\frac{AH-AG}{AG}=\frac{EGxGH}{S-EGxGH},$$

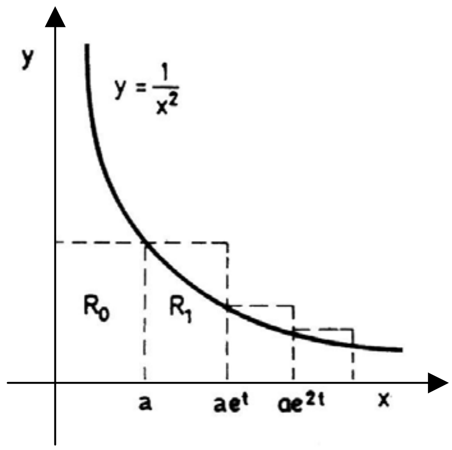
Y finalmente: $S-EGxGH$ = EGxAG .

Ahora bien, como Fermat ha supuesto que unos intervalos «*estaban lo bastante próximos*» para que otros «*fueran suficientemente iguales*» deduce que el área definida por la hipérbola y las líneas GH, GE es, debido a la última expresión y a las infinitas subdivisiones, igual al área del rectángulo AGxGE, y lo hace con estas significativas palabras (TH.OF.III.219):

> «[...] *Si ahora añadimos* [a ambos miembros de la expresión $S - EGxGH = EGxAG$] *el paralelogramo* EGxGH *que a causa de las infinitas subdivisiones, se desvanece y queda reducido a nada, alcanzamos la conclusión, que podría ser fácilmente confirmada por una más prolija prueba llevada a cabo a la manera de Arquímedes: que en este género de hipérbola, el paralelogramo AE es equivalente a la figura comprendida por la base GE, la asíntota GR y la curva ED indefinidamente prolongada.*
>
> *No es difícil extender esta idea a todas las hipérbolas definidas anteriormente excepto la que ha sido indicada* [la hipérbola de Apolonio].»

El método de Fermat se ha denominado «*logarítmico*». En su época esta palabra todavía aludía a una cierta relación entre una progresión geométrica y una aritmética. Hoy nosotros a su método le llamaríamos «*exponencial*» y lo desarrollaríamos así:

A partir de la abscisa $x=a$, efectuamos una subdivisión $x_1=ae^t, x_2=ae^{2t}, \ldots$, en progresión geométrica de razón e^t. Calculemos las áreas de los rectángulos circunscritos:



$R_1 = a\cdot(e^t-1)\cdot(1/a^2) = (e^t-1)/a$,

$R_2 = a\cdot e^t\cdot(e^t-1)\cdot(1/a^2e^{2t}) = (e^t-1)/ae^t$,

....

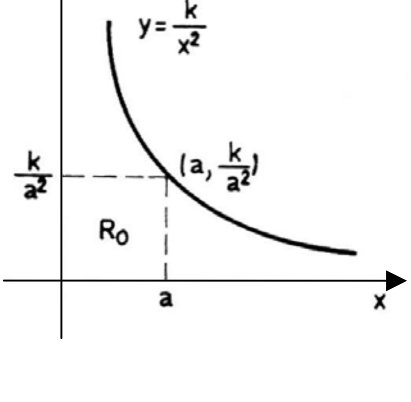
es decir: $R_1 = (e^t-1)/a$, $R_2 = [(e^t-1)/a]\cdot e^{-t}$.

Así pues, $R_1, R_2, \ldots$, forman una progresión indefinida decreciente de razón e^{-t}. Por tanto, aplicando la fórmula de sumación, se tiene para la suma S(t), de los infinitos rectángulos R_1, R_2, ...,

$$S(t) = R_1/(1-e^{-t}) = [(e^t-1)/a]/(1-e^{-t}) = e^t/a = (1/a) + (e^t-1)/a = R_o + R_1,$$

de donde resulta que el área limitada por la hipérbola, la ordenada x=a y la asíntota y=o, viene dada por:

$$\lim_{t\to 0} S(t) = 1/a = Ro.$$



El resultado es equivalente a la integral :

$$\int_a^\infty \frac{k}{x^2}dx = \frac{k}{a} = a\cdot\frac{k}{x^2} = R_0 .$$

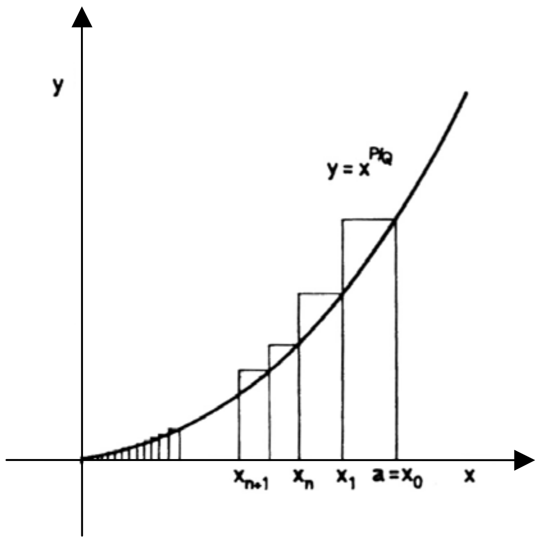
Cuadratura de parábolas generalizadas.

Fermat utilizó también, en su *Tratado sobre Cuadraturas*, el método de la progresión geométrica para la cuadratura de parábolas generalizadas $y=x^{p/q}$, estableciendo la cuadratura de Wallis:

$$\int_o^a x^{p/q}\,dx = \frac{a^{(p/q)+1}}{(p/q)+1} = \frac{q}{p+q}a^{(p+q)/q}$$

incluso antes de los trabajos de aquél, aunque los resultados se publicaron más tarde.

Una aproximación al enfoque de Fermat de la cuadratura de las parábolas en lenguaje moderno, sería lo siguiente:



En la figura adjunta se subdivide el intervalo [o,a] en una sucesión infinita de subintervalos con extremos x_n, siendo $x_n=ar^n$, n=0,1,2,..., y o<r<1. Para cada subintervalo se considera el rectángulo circunscrito a la curva, de base $x_n–x_{n+1}$ y altura dada por la ecuación de la curva $y=x^{p/q}$, es decir, $x_n^{p/q}$.

La suma A(r) de las áreas de los infinitos rectángulos, teniendo en cuenta que forman una progresión geométrica de razón $r^{n(p+q)/q}$ es (se tomará $s=r^{(p+q)/q}$, $t=r^{1/q}$):

$$A(r) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n^{p/q}(x_n - x_{n+1}) = \sum_{n=0}^{\infty}(ar^n)^{p/q}(ar^n - ar^{n+1}) = a^{(p+q)/q}(1-r)\sum_{n=0}^{\infty} r^{n(p+q)/q} =$$

$$= a^{(p+q)/q}(1-r)\sum_{n=0}^{\infty} s^n = a^{(p+q)/q}(1-r)\left[1/(1-s)\right] = a^{(p+q)/q}\left[(1-t^q)/(1-t^{p+q})\right].$$

Ahora bien como se verifica:

$$(1-t)\cdot(1+t+t^2+\cdots\cdots+t^{k-1}) = 1-t^k,$$

se deduce finalmente:

$$A(r) = a^{(p+q)/q}\cdot\frac{1+t+t^2+\cdots+t^{q-1}}{1+t+t^2+\cdots+t^{p+q-1}}.$$

El área comprendida bajo la curva, el eje x y la abscisa x=a, se obtiene tomando el límite en la expresión anterior cuando r tiende a 1 (y por tanto cuando t tiende a 1 también), de donde se deduce la cuadratura.

LOS MÉTODOS DE CUADRATURA DE FERMAT PARA PARÁBOLAS E HIPÉRBOLAS

El modelo arquimediano de la cuadratura de la espiral le sirve a Fermat para realizar sus cuadraturas aritméticas, obteniendo un resultado equivalente a la cuadratura básica de Cavalieri $\int_0^a x^k\,dx$, a base de extender las desigualdades que Arquímedes utilizó para su exhaución. La base para este trabajo son las fórmulas recurrentes para la suma de potencias de enteros, fundamentadas en las propiedades de los números poligonales, que Fermat obtiene inspirándose en el *Apéndice al libro de los números poligonales* que Bachet de Meziriac adjuntó a su edición de 1621 de *La Aritmética* de Diofanto.

Fermat inicialmente utiliza las fórmulas para realizar la cuadratura de la familia infinita de espirales generalizadas $r=a\theta^n$, pero inmediatamente advierte que con una evidente transformación a una referencia rectangular puede realizar la cuadratura de otra familia infinita de curvas, las parábolas generalizadas $y=ax^n$. Lo mismo aplica a la cubatura de conoides engendrados por la rotación de parábolas lo que le sirve para reconocer las limitaciones de su método. Guiado entonces por la naturaleza de las dificultades encontradas, Fermat ingenia un método directo de realizar la cuadratura de las parábolas generalizadas, que, además, tiene la virtualidad de poder aplicarse a las hipérbolas generalizadas, salvo la hipérbola de Apolonio. Se trata de un método puramente geométrico, basado en progresiones geométricas. La idea feliz consiste en realizar la subdivisión del eje de la figura a cuadrar (ilimitada en el caso de hipérbolas) en intervalos, de forma que se satisfagan los requisitos del método arquimediano, es decir se debe poder inscribir y circunscribir todo el área mediante rectángulos construidos sobre los intervalos en que se ha subdividido el eje, y además, de tal forma, que la diferencia entre las áreas de las dos figuras escalonadas (y por tanto de cualquiera de ellas y el área hiperbólica) sea menor que la cantidad prefijada. El llamado *método logarítmico* –a pesar de que en realidad utiliza exponenciales–combinado con la «*adigualdad*» resuelve brillantemente la cuestión.

En los métodos de cuadraturas de Fermat de hipérbolas y parábolas generalizadas subyacen los aspectos esenciales de la integral definida:

a) la división del área bajo la curva en elementos de área infinitamente pequeños,

b) la aproximación a la determinación numérica de la suma de esos elementos de área por medio de rectángulos infinitesimales de altura dada por la ecuación analítica de la curva

c) un intento de expresar el equivalente de lo que será el límite de esta suma cuando el número de elementos crece indefinidamente mientras se hacen infinitamente pequeños.

Estatua de Fermat con su Musa (la Matemática). Sala de personajes ilustres del Capitolio de Toulouse.

El autor es T.E. Victor Barrau (1888).

Fermat representa uno de los eslabones intermedios mas importantes en la transición de la Matemática antigua a la moderna. Desde su profunda admiración hacia las fuentes de la Matemática griega, Fermat contribuye incluso a su restauración con *Apolonii Pergaei libri duo de locis planis restituti*, pero rompe con la práctica matemática habitual de los estándares clásicos, sin dejarse mediatizar por ningún canon estereotipado de Filosofía de la Matemática, al desarrollar un potente instrumental científico, donde lo importante era la resolución de los problemas y la apertura de nuevas vías de descubrimiento, que propicia el cambio de paradigma en la Matemática a base de variar el estilo y el método clásico, desde la superioridad del rigor silogístico a ultranza en la exposición a la importancia del camino seguido en el descubrimiento y desde los métodos demostrativos a los métodos heurísticos de resolución de los problemas.

Los problemas de Cálculo Diferencial: extremos y tangentes

Los métodos de «*adigualdad*» de Fermat sobre máximos y mínimos

Con base en las obras fundamentales de la antigüedad clásica griega (*Los Elementos* de Euclides, *Las Cónicas* de Apolonio, las Obras de Arquímedes, *La Aritmética* de Diofanto, *La Colección Matemática* de Pappus, etc.), así como en la *Teoría de Ecuaciones* de Vieta (en particular en el método de la «*Syncrisis*» de su *Arte Analítica*), Fermat desarrolla los primeros métodos generales para la determinación de máximos y mínimos en la Historia de la Matemática.

Aparte de multitud de comentarios epistolares, cinco son los trabajos o memorias de Fermat sobre el tema máximos y mínimos:

M1. *Método para la investigación de Máximos y Mínimos* (*Methodus ad disquirendam maximan et miniman et de tangentibus linearum curvarum*).

Esta memoria (TH.OF.III.121) que Fermat compone entre 1629 y 1636 es un procedimiento puramente algorítmico desprovisto de todo fundamento demostrativo, donde Fermat introduce la técnica de la «*adigualdad*». Mersenne la recibe a finales de 1637 y la envía a Descartes en enero de 1638. Como segunda parte de este tratado, Fermat describe el primer ejemplo de aplicación del método de máximos y mínimos al trazado de las tangentes a las líneas curvas, la tangente a la parábola, que provoca la tempestuosa polémica de Descartes con Fermat sobre los máximos y mínimos y las tangentes. Denominaremos a esta memoria el *Methodus.*

M2. *Sobre el mismo Método de Máximos y Mínimos (Ad eamdem methodum ...: «Volo meâ methodo, etc.).*

Esta memoria (TH.OF.III.126) escrita en la primavera de 1638, fue compuesta probablemente para explicar el *Methodus* a Mydorgue y Desargues, cuando Descartes les pidió que actuaran como árbitros en su controversia con Fermat. En una forma conceptual y estilística calcada del *Methodus* , Fermat ilustra su método, aplicándolo a una serie de ejemplos, entre los que destaca la resolución del famoso problema de Pappus (Proposición VII.61, de *La Colección Matemática*), probable fuente de inspiración para Fermat de sus métodos de extremos y tangentes. Termina este tratado aplicando el método al trazado de la tangente a la elipse.

M3. *La Investigación Analítica del Método de Máximos y Mínimos (Analityca eiusdem methodi investigatio).*

Esta memoria (TH.OF.III.131) es un manuscrito sin fecha ni título, escrito quizá hacia 1640, para neutralizar las reiteradas críticas de Descartes a los métodos de Fermat. Basándose en su propio mejoramiento del método de «*Syncrisis*» de la Teoría de Ecuaciones de Vieta, Fermat establece los fundamentos teóricos de su método de máximos y mínimos, por eso a este tratado se le conoce también bajo el nombre de *Syncriseos*.

M4. *La carta a Pierre Brûlart*.

Aunque compuesta como epístola, esta pieza merece por su importancia el rango de memoria. Habiendo sido descubierta por De Waard, fué publicada poco después por Giovannozi en 1919, quedando incluida en las Obras de Fermat como suplemento (págs. 120–125). Representa el más importante de los descubrimientos sobre Fermat después de la publicación de las Obras de Fermat. Fermat ensaya realizar un cierto desarrollo limitado en serie, y aunque no podía demostrarlo rigurosamente, le parecía verosímil que se determinaba un extremo a partir de la ecuación que resultaba al anular el coeficiente del término de primer grado. Además, hacía notar que había descubierto que el coeficiente del término de segundo grado era negativo en caso de máximo y positivo en el de mínimo.

EL PADRE MERSENNNE Y LA DIVULGACIÓN DE LA CIENCIA EN EL SIGLO DE FERMAT

El Padre M. Mersenne, gran amigo de Descartes, por haber sido compañeros en *la Flèche*, cataliza casi toda la actividad científica francesa en su celda del convento de los Mínimos de París. Mersenne mantenía correspondencia, haciendo de intermediario, con gran parte de los científicos europeos, haciendo circular entre los interesados los problemas, resultados, técnicas y métodos matemáticos que llegaban a su mano y convocando reuniones donde se discutían y trataban los problemas científicos candentes del momento, siendo asiduos E.Pascal (que era el lider del grupo), Roberval, Desargues, Hardy, Mydorgue y otros.

La ausencia de revistas y sociedades científicas en la época de Fermat y Descartes da cuenta de la importancia divulgativa de la actividad de Mersenne.

Mersenne instaura unos principios de actuación en la Ciencia que van a imperar desde entonces. Para Mersenne la Ciencia debe ser una actividad colectiva y la verdad sólo puede surgir de la controversia, que suscitará siempre que pueda, a veces incluso de forma imprudente, entre los grandes científicos que acuden a su celda y que se comunican epistolarmente con él.

Mersenne inaugura en la Historia de la Ciencia la divulgación científica. Puede decirse que la celda del P.Mersenne fue el embrión de la futura *Academie des Sciences*. La mayor parte de los trabajos de Fermat son comunicados a la comunidad científica a través de su correspondencia con Mersenne y es a través de ella también como se alimenta la polémica entre Descartes y Fermat.

M5. *Apéndice al Método de Máximos y Mínimos* (*Ad methodum de maxima et minima appendix*).

Esta memoria (TH.OF.III.136) compuesta en abril de 1644, representa en cierto modo, un paso hacia atrás respecto a la Carta a Brûlart , porque Fermat aplica esencialmente la misma técnica que en el *Methodus*, complementándola con una extraordinaria mejora y simplificación de un método de Vieta para eliminar expresiones irracionales de las ecuaciones. De esta forma Fermat pudo extender las reglas del *Methodus* a problemas más complicados que los resueltos en las anteriores memorias, problemas en los que la expresión era irracional, en concreto al problema de Arquímedes: «*Encontrar el cono de superficie total máxima que se puede inscribir en una esfera dada*», así como el problema análogo correspondiente al cilindro, que habían sido enviados por Fermat en su primera carta a Mersenne el 26 de abril de 1636 (TH.OF.II.6), para ser resueltos por los matemáticos de París.

A continuación transcribiremos íntegramente la memoria el *Methodus* y la *Investigación Analítica*, respetando la secuencia del contenido, pero separando éste en párrafos que, a nuestro juicio, resultan significativos, lo que facilitará su estudio y análisis.

En el *Methodus* aparece por primera vez la genial y fructífera idea de incrementar una magnitud asimilable a nuestra variable independiente –lo que desde entonces se ha convertido en la esencia del Cálculo Diferencial–. Fermat se expresa con estas palabras:

Método de Fermat para la investigación de Máximos y Mínimos (*Methodus*)

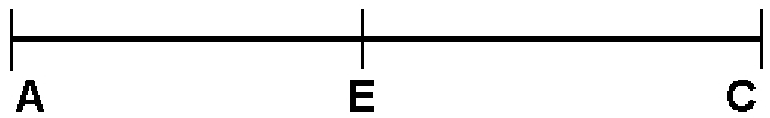
(TH.OF.III.121–122):

Toda la teoría de la Investigación de Máximos y Mínimos supone la consideración de dos incógnitas y la única regla siguiente:

1. **Sea a una incógnita cualquiera del problema (que tenga una, dos o tres dimensiones, según convenga al enunciado).**
2. **Se expresará la cantidad máxima o mínima por medio de a en términos que pueden ser de cualquier grado.**
3. **Se sustituirá a continuación la incógnita original a por a+e, y se expresará la cantidad máxima o mínima por medio de a y e, en términos que pueden ser de cualquier grado.**
4. **se «*adigualará*» para hablar como Diofanto, las dos expresiones de la cantidad máxima o mínima.**
5. **Se eliminarán los términos comunes de ambos lados, tras lo cual resultará que a ambos lados habrá términos afectados de e o de una de sus potencias.**
6. **Se dividirán todos los términos por e, o por alguna potencia superior de e, de modo que desaparecerá la e, de al menos uno de los términos de uno cualquiera de los dos miembros.**
7. **Se suprimirán, a continuación, todos los términos donde todavía aparece la e o una de sus potencias, y se iguala lo que queda, o bien si en uno de los miembros no queda nada, se igualará, lo que viene a ser lo mismo, los términos afectados con signo positivo a los afecta dos con signo negativo.**
8. **La resolución de esta última ecuación dará el valor de a, que conducirá al máximo o mínimo, utilizando la expresión original.**

He aquí un ejemplo:

"Sea dividir una recta AC en E, de manera que AExEC sea máximo".



Pongamos AC=b.

1. **Sea a uno de los segmentos, el otro será b–a.**
2. **El producto del que se debe encontrar el máximo es $ba-a^2$.**
3. **Sea ahora a+e el primer segmento de b, el segundo será b–a–e, y el producto de segmentos: $ba-a^2+be-2ae-e^2$.**
4. **Se debe «*adigualar*» al precedente: $ba - a^2$.**
5. **Suprimiendo términos comunes: $be \approx 2ae + e^2$.**
6. **Dividiendo todos los términos: $b \approx 2a + e$.**
7. **Se suprime la e: $b = 2a$.**
8. **Para resolver el problema se debe tomar por tanto la mitad de b.**

1/1

Es imposible dar un método más general.

La investigación analítica del método de Fermat de máximos y mínimos

Analityca eiusdem methodi investigatio

(TH.OF.III.131–135)

A. Estudiando el método de la «*Syncrisis*» y de la «*Anastrophe*» de Vieta, e intentando cuidadosamente aplicarlo a la búsqueda de las «*ecuaciones correlativas*», se me ocurrió la derivación de un procedimiento para encontrar máximos y mínimos y para resolver así fácilmente todas las dificultades relativas a las «*condiciones límites*», que tanta confusión han provocado a los geómetras antiguos y modernos.

Los máximos y mínimos son, en efecto, «*únicos y singulares*», como lo ha dicho Pappus y como lo sabían ya los antiguos, aunque Commandino reconoce ignorar lo que significa en Pappus el término «*monachos*» (singular). Se sigue de esto que, a uno y otro lado del punto limitante, se puede formar una ecuación ambigua: que las dos ecuaciones ambiguas así formadas son, desde este momento, correlativas, iguales y semejantes.

B. Sea, por ejemplo, propuesto «*dividir la recta b de manera que el producto de sus segmentos sea máximo*». El punto que satisface a esta cuestión es evidentemente el punto medio de la recta dada, y el producto máximo es igual a $b^2/4$; ninguna otra división de esta recta dará un producto igual a $b^2/4$.

C. Pero si uno se propone dividir la misma recta b de manera que el producto de segmentos sea igual a z'' (este área se debe suponer siempre más pequeño que $b^2/4$), se tendrán dos puntos satisfaciendo la cuestión, que se encontrarán situados a uno y otro lado del punto correspondiente al producto máximo.

D. Sea, en efecto, a uno de los segmentos de la recta b, se tendrá : $ba-a^2=z''$, ecuación ambigua, puesto que para la recta a, se pueden tomar cada una de las dos raíces. Sea, por consiguiente, la ecuación correlativa : $be-e^2=z''$. Comparemos estas dos ecuaciones según el método de Vieta: $ba - be = a^2 - e^2$.

Dividiendo a ambos lados por a–e, se tendrá : $b = a + e$;

las longitudes a y e serán entonces desiguales.

E. Si en lugar del área z'', se toma uno más grande, aunque siempre inferior a $b^2/4$, las rectas a y e diferirán menos entre ellas que las precedentes, los puntos de división se aproximan más al punto correspondiente al producto máximo. El producto de los segmentos aumentará, más al contrario disminuirá la diferencia entre a y e, hasta que desaparece completamente esta diferencia para la división correspondiente al producto máximo; en este caso no hay más que una solución «*única y singular*», las dos cantidades a y e llegan a ser iguales.

F. Ahora bien el método de Vieta, aplicado a las dos ecuaciones correlativas anteriores, nos ha conducido a la igualdad $b=a+e$; por consiguiente, si $e=a$ (lo que sucede para el punto correspondiente al máximo o mínimo), se tendrá, en el caso propuesto, $b=2a$, es decir que si se toma el punto medio de la recta b, el producto de los segmentos será máximo.

G. Tomemos otro ejemplo : "*sea dividir la recta b de tal manera que el producto del cuadrado de uno de los segmentos por el otro sea máximo*".

Sea a uno de los segmentos: se debe tener $ba^2 - a^3$ máximo. La ecuación correlativa, igual y semejante es $be^2 - e^3$. Comparemos estas dos ecuaciones según el método de Vieta: $ba^2 - be^2 = a^3- e^3$;

dividiendo ambos lados por a–e, se obtiene: $ba + be = a^2 + ae +e^2$,

lo que da la constitución de las *ecuaciones correlativas*.

Para encontrar el máximo, hacemos $e=a$; se obtiene: $2ba = 3a^2$ ó $2b = 3a$;

y el problema está resuelto.

1/3

H. Sin embargo, en la práctica como las divisiones por un binomio son generalmente complicadas y demasiado penosas, es preferible, comparando las *ecuaciones correlativas*, poner en evidencia las diferencias de las raíces, para no tener que operar más que mediante una simple división por esta diferencia.

I. «*Sea buscar el máximo de $b^2a–a^3$*». Según las reglas del método que se acaba de citar, se debería tomar como ecuación correlativa $b^2e–e^3$. Pero puesto que e, así como a, es una incógnita, nada nos impide designarla por a+e; de manera que se tendrá:

$$b^2a + b^2e - a^3 - e^3 - 3a^2e - 3e^2a = b^2a - a^3 .$$

Está claro que si se suprimen los términos semejantes, todos los restantes quedan afectados de la incógnita e; los que tienen sólo a, son los mismos a ambos lados. Así pues, se tiene:

$$b^2e = e^2 + 3a^2e + 3e^2a ,$$

y dividiendo todos los términos por e,

$$b^2 = e^2 + 3a^2 +3ae ,$$

lo que da la formación de las *ecuaciones correlativas* en esta forma.

Para encontrar el máximo hay que igualar las raíces de las dos ecuaciones, a fin de satisfacer las reglas del primer método, del que nuestro nuevo procedimiento obtiene su razón y su forma de operar.

Así, pues es preciso igualar a y a+e, de donde e=0. Pero según la formación que hemos encontrado para las ecuaciones correlativas,

$$b^2 = e^2 + 3a^2 + 3ae ;$$

debemos, por consiguiente, suprimir en esta igualdad, todos los términos afectados de e, como reduciéndose a 0; quedará pues $b^2=3a^2$, ecuación que dará el máximo buscado para el producto tratado.

J. Para mostrar con mayor amplitud la generalidad de este doble método, consideremos nuevos géneros de ecuaciones correlativas, que Vieta no ha tratado y que hemos obtenido del *Libro de la Sección determinada* de Apolonio (en Pappus, Libro VII, prop.61), cuyas *condiciones límites* son expresamente reconocidas como difíciles por Pappus.

«Sea la recta BDEF, sobre la cual se dan los puntos B, D, E, F. Encontrar entre los puntos D y E un punto N, tal que la razón de los productos BNxNF y DNxNE sea mínima».

Pongamos DE=b, DF=z, BD=d, DN=a; hay que hacer mínima la razón :

$$\frac{dz - da + za - a^2}{ba - a^2}$$

La razón correlativa semejante e igual, según nuestro primer método es :

$$\frac{dz - de + ze - e^2}{be - e^2}$$

2/3

Igualando los productos de los términos medios con los extremos tendremos:

$$dzbe - dze^2 - dabe + dae^2 + zabe - zae^2 - a^2be + a^2e^2 =$$

$$= dzba - dza^2 - deba + dea^2 + zeba - zea^2 - e^2ba + e^2a^2.$$

Suprimiendo los términos semejantes y haciendo las transposiciones convenientes:

$$dzba - dzbe + dea^2 - dae^2 - zea^2 + zae^2 + a^2be - e^2ba = dza^2 - dze^2 .$$

Dividiendo a ambos lados por a – b, (lo que será más fácil si se ponen juntos los términos correlativos; así :

$$\frac{dzba - dzbe}{a - e} = dzb \text{, y también } \frac{dea^2 - dae^2}{a - e} = dae \text{, etc.;}$$

es fácil disponer los términos correlativos para obtener estas divisiones), se tendrá después de la división :

$$dzb + dae - zae + bae = dza + dze ,$$

igualdad que determina la formación de las dos *ecuaciones correlativas*.

Para pasar de aquí al mínimo, es preciso según el método, hacer e=a, de donde :

$$dzb + da^2 - za^2 + ba^2 = 2dza ;$$

la resolución de esta ecuación dará el valor de a, para el cual la razón propuesta será mínima.

K. El analista no se detendrá por el hecho de que esta ecuación tenga dos raíces, pues la que se debe tomar resultará de ella misma, en cuanto se la quiera reconocer. Incluso con ecuaciones que tengan más de dos raíces, un analista por poco sagaz que sea, podrá siempre servirse de uno u otro de nuestros métodos.

L. Pero esta claro, según el ejemplo que acabamos de tratar en último lugar, que el primero de estos dos métodos será, en general, de un empleo poco cómodo, a consecuencia de las divisiones reiteradas por un binomio. Es necesario, por consiguiente, recurrir al segundo método, que aunque simplemente derivado del primero, como ya he dicho, proporcionará a los analistas hábiles, una facilidad sorprendente e innumerables abreviaciones; es mas, se aplicará con una simplicidad y una elegancia muy superiores a la búsqueda de tangentes, de centros de gravedad, de asíntotas y otras cuestiones similares.

M. Es, por consiguiente, que afirmo hoy y siempre, con la misma confianza que antes, que la investigación de máximos y mínimos se reconduce a esta regla única y general, cuyo feliz éxito será siempre legítimo y no debido al azar, como algunos han pensado.

«*Sea a una incógnita* (ver página ..., línea ... hasta la última línea [del «*Methodus*»]) ..., *su primera expresión*».

N. Si todavía hay alguien que considera este método como debido a un feliz azar, puede intentar encontrar uno similar.

En cuanto a los que no lo aprueban, les propongo resolver este problema:

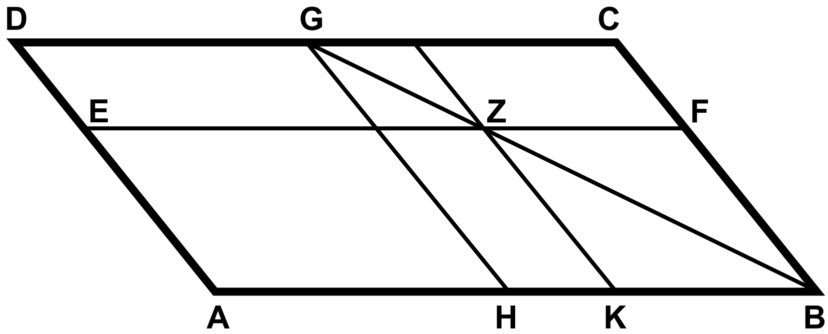
«*Siendo dados tres puntos, encontrar un cuarto punto tal que la suma de sus distancias a los tres puntos dados sea mínima*».

3/3

Al intentar investigar el origen de los métodos de Máximos y Mínimos, el propio testimonio de Fermat establece, al comienzo de la *Investigación Analítica* (véase párrafo A), que las fuentes del método, son la *Teoría de Ecuaciones* del *Arte Analítica de* Vieta, aplicada a resolver los problemas de «*condiciones límites*», es decir, los antiguos problemas griegos de *Diorismos*. A su vez la principal fuente para éstos, sería el Libro VII de *La Colección Matemática* de Pappus, de manera que, en última instancia histórica, los pilares sobre los que se basaría el método, serían la observación de Pappus en la Proposición 61 del Libro VII acerca de que los extremos son «*únicos y singulares*» y el instrumento algebraico de la *Syncrisis* de Vieta.

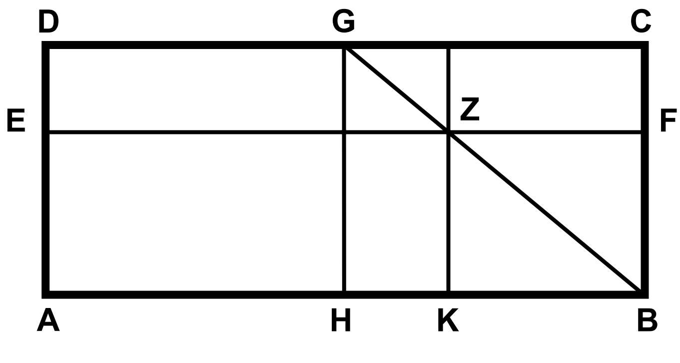
Fermat sabía que en la Matemática griega los problemas de extremos estaban esencialmente vinculados a los *Diorismos*. Los *Diorismos* eran condiciones límites subsidiarias, que debían añadirse al enunciado de un problema para garantizar su resolubilidad en términos generales. El ejemplo más simple es el de la Proposición I.22 de *Los Elementos* de Euclides, donde se requiere para construir un triángulo con tres líneas, que la suma de dos de ellas sea mayor que la tercera. Sin embargo, el ejemplo más influyente sobre los problemas de extremos es el de la Proposición VI.27, de *Los Elementos de Euclides*, que reza :

> «*Entre todos los paralelogramos aplicados sobre la misma recta y deficientes de paralelogramos semejantes al construido sobre la mitad de esta recta, y semejantemente dispuestos, el mayor es el aplicado a la mitad de la recta y semejante a su defecto*.»



La proposición establece que de todos los paralelogramos AKZE que se obtienen al variar Z sobre GB, el mayor se obtiene tomando para el lado de la base el segmento AH, mitad de AB, es decir tomando Z como G.

En particular, al tomar ABCD un rectángulo, la proposición resuelve el problema de «*dividir un segmento AB en dos, de manera que el área del rectángulo que determinan sea máxima*». Este es precisamente el problema que resuelve Fermat en el *Methodus* y el primero que resuelve en la *Investigación Analítica*. El *Diorismo* resulta de que, como consecuencia de esta proposición, sobre el problema «*dividir una línea* AB *en dos segmentos, tal que su producto sea una cantidad dada*», se debe imponer para su resolubilidad la *condición límite* de que este producto sea menor o igual que el área del cuadrado construido sobre la mitad de la línea AB.



Euclides realiza la demostración como es habitual en la Geometría griega en el farragoso lenguaje del Álgebra *Geométrica*. Con Álgebra *Simbólica* la conclusión es muy elemental:

Sea $AB=b=x+y$;

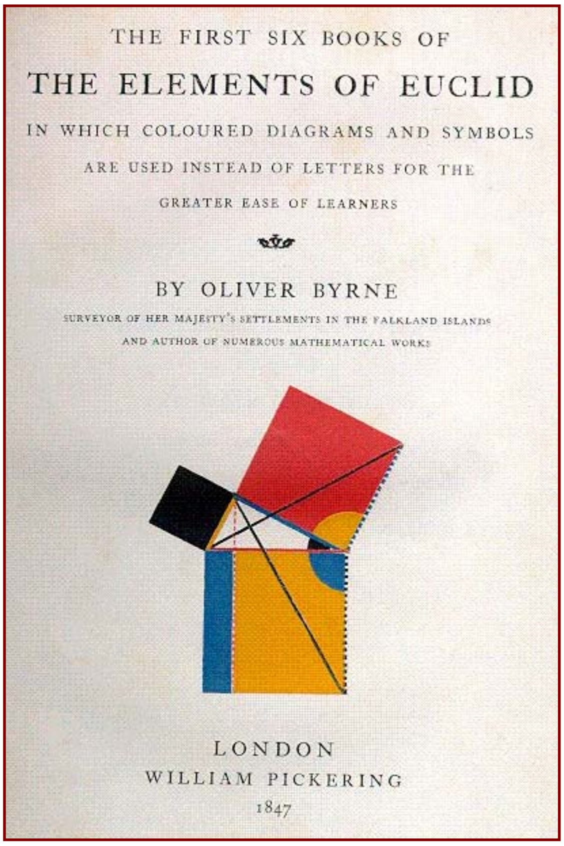
siendo $(x-y)^2 \geq 0$, resulta:

$b^2 = (x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy \geq 4xy$, de donde:

$xy \leq (b/2)^2$.

LAS FUENTES HISTÓRICAS DE LOS MÉTODOS DE FERMAT SOBRE MÁXIMOS Y MÍNIMOS Y TANGENTES.

LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES



THE FIRST SIX BOOKS OF

THE ELEMENTS OF EUCLID

IN WHICH COLOURED DIAGRAMS AND SYMBOLS ARE USED INSTEAD OF LETTERS FOR THE GREATER EASE OF LEARNERS

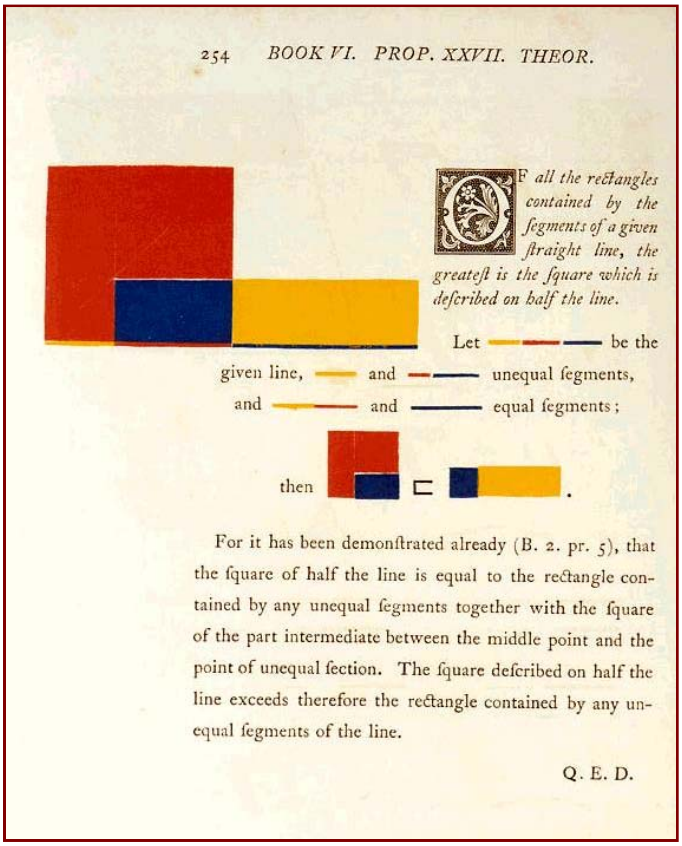
BY OLIVER BYRNE

SURVEYOR OF HER MAJESTY'S SETTLEMENTS IN THE FALKLAND ISLANDS AND AUTHOR OF NUMEROUS MATHEMATICAL WORKS

LONDON

WILLIAM PICKERING

1847



254 *BOOK VI. PROP. XXVII. THEOR.*

Of all the rectangles contained by the segments of a given straight line, the greatest is the square which is described on half the line.

Let be the given line, and unequal segments, and and equal segments;

then .

For it has been demonstrated already (B. 2. pr. 5), that the square of half the line is equal to the rectangle contained by any unequal segments together with the square of the part intermediate between the middle point and the point of unequal section. The square described on half the line exceeds therefore the rectangle contained by any unequal segments of the line.

Q. E. D.

1. *Portada de l*a edición de Oliver Byrne (1847) de *Los Elementos* de Euclides : *The first six books of the Elements of Euclid, in which coloured diagrams and symbols are used instead of letters for the greater ease of learners*. Colbeck collection (Library of the University of British Columbia).

   En esta edición hay un despliegue inusitado de preciosas ilustraciones en color que son magníficos diagramas descriptivos de las construcciones de Euclides, de modo que, como escribe Byrne, en su larga introducción explicativa, la verdad se pone de manifiesto con la «*demostración ocular*», en la que juega un papel fundamental no sólo la forma sino sobre todo el color.
2. La Proposición VI.27 de *Los Elementos* de Euclides en la edición de Oliver Byrne.

Según el propio testimonio de Fermat al comienzo de la *Investigación Analítica* (TH.OF.III.131) las fuentes de su método de máximos y mínimos son la *Teoría de Ecuaciones* del *Arte Analítica de* Vieta, aplicada a resolver los problemas de «*condiciones límites*», es decir, los antiguos problemas griegos de *Diorismos*:

> «*Estudiando el método de la "Syncrisis" y de la "Anastrophe" de Vieta, e intentando cuidadosamente aplicarlo a la búsqueda de las «ecuaciones correlativas», se me ocurrió la derivación de un procedimiento para encontrar máximos y mínimos y para resolver así fácilmente todas las dificultades relativas a las «condiciones límites», que tanta confusión han provocado a los geómetras antiguos y modernos*.»

Fermat reconoce que en la Matemática griega los problemas de máximos y mínimos se vinculaban a los *Diorismos*, término con el que se calificaban ciertas «*condiciones límites*» subsidiarias, que debían añadirse de forma complementaria al enunciado de un problema, generalmente de construcción, para garantizar su solución en términos generales.

Entre todos los ejemplos de *Diorismos*, quizá uno de los más significativos es el que se deduce de la Proposición VI.27, de *Los Elementos de Euclides*

> «*Entre todos los paralelogramos aplicados sobre la misma recta y deficientes de paralelogramos semejantes al construido sobre la mitad de esta recta, y semejantemente dispuestos, el mayor es el aplicado a la mitad de la recta y semejante a su defecto*.»

que, en particular, da solución al problema:

> «*Dividir un segmento AB en dos, de manera que el área del rectángulo que determinan sea máxima*».

Ésta es justamente la cuestión que resuelve Fermat en el *Methodus* y la primera que plantea en la *Investigación Analítica*. El *Diorismo* resulta de que debido a esta proposición, en el problema «*dividir una línea* AB *en dos segmentos, tal que su producto sea una cantidad dada*», se debe imponer para su resolubilidad la *condición límite* de que este producto sea menor o igual que el área del cuadrado construido sobre la mitad de la línea AB.

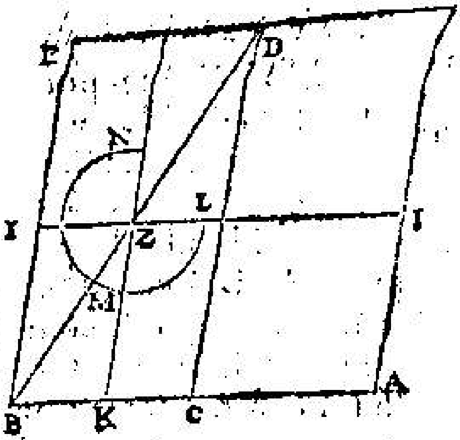
Así pues la Proposición VI.27, de Los Elementos de Euclides es el ejemplo euclídeo más influyente sobre los problemas de máximos y mínimos de Fermat.

LIBRO SEXTO DE EVCLIDES 108

Theorema.20. Proposicion.27.

¶ De todos los parallelogrãmos puestos sobre vna misma linea recta y faltos por figuras pa llelogramas semejantes y semejantemẽte puestas a aquel que es descrito de la media, el mayor parallelogramo es el q̃ esta puesto sobre la media, siendo semejante al tomado.

Sea la linea recta.A B.y corte se,por la.10.del.1. por medio en el puncto.C.y haga se tambien,por la.18.del.6,sobre la linea recta.A B.el parallelogrãmo.A D.falto por la figura parallelogrãma.D B.semejante y semejantemente puesta al de *la mitad de la.A B.esto es, C B,Digo que de todos los pa*rallelogramos puestos sobre la.A B.y faltos por figuras pallelogramas semejantes y semejantemẽte puestas al parallelogrãmo.D B.el mayor es,A D.Põgase sobre la linea recta,A B.el parallelogrãmo A Z.falto por la figura pallelogrãma,Z B,semejante y semejantemente puesta al.D A.Digo que mayor es.A D.que no.A Z,Porque es semejante.D B,parallelogrãmo al parallelogrãmo.Z B.luego estan sobre la misma diagonal(por la.36 del sexto)Saque se su diagonal.D B.y hagase la figura.Pues porque(por la.42.de el.1.)es ygual.Z C.al mismo.Z E,ponga se comun.Z B,luego todo.C T.es ygual a todo.K E,pero C T.es ygual al.C I(por la.36.del.1)porque la linea recta.AC es ygual a la linea recta.C B.luego.I C.es ygual al.E K.ponga se comun.C Z.luego todo.A Z.es ygual a todo el gnomon.L M N.por lo qual el parallelogrãmo.D B,esto es,A D.es mayor que el parallelogrãmo.A Z.Luego de todos los parallelogrãmos que estan sobre vna misma linea recta,y faltos por figuras parallelogrãmas,semejantes y semejantemente puestas a aquel que es descrito de la media el mayor parallelogrãmo es el que esta puesto sobre la media,siendo semejãte al tomado.Lo qual conuenia demostrarse.



La Proposición VI.27 de *Los Elementos* de Euclides en la edición de R.Çamorano (Sevilla, 1576). Se trata de la primera edición en idioma castellano de la obra euclídea. El manuscrito original de Çamorano se conserva en la Biblioteca Nacional de Madrid y perteneció al político catalán Pi i Margall, presidente de la primera República Española.

El Libro VII de *La Colección Matemática* de Pappus, fue un gran foco de interés para Fermat, y el *Arte Analítica* de Vieta, constituyó un buen instrumento para centrar este interés, porque permitía traducir al nuevo lenguaje del Análisis Algebraico las construcciones que habían sido el *Tesoro del Análisis* antiguo. En concreto la Proposición 61 del Libro VII, pudo haber despertado en Fermat la idea matriz de sus métodos de Máximos y Mínimos. Veamos el enunciado de la Proposición de Pappus :

> «*Dadas tres rectas* AB, BΓ, ΓΔ, *si se hace que el cuadrado de la recta* BE *sea al cuadrado de la recta* EΓ, *como el rectángulo determinado por las rectas* AB, BΔ, *es al rectángulo determinado por las rectas* AΓ, ΓΔ, *la razón singular y mínima es la del rectángulo determinado por las rectas* AE, EΔ, *al rectángulo determinado por las rectas* BE, EΔ.»

La proposición de Pappus establece que si E es un punto del segmento BΓ, que cumple:

$$\frac{BE^2}{E\Gamma^2} = \frac{AB \cdot B\Delta}{A\Gamma \cdot \Gamma\Delta}$$

entonces la razón *singular y mínima* para la expresión :

$$\frac{AF \cdot F\Delta}{BF \cdot F\Gamma}$$

siendo F un punto del segmento BΓ, viene determinada por el punto E.

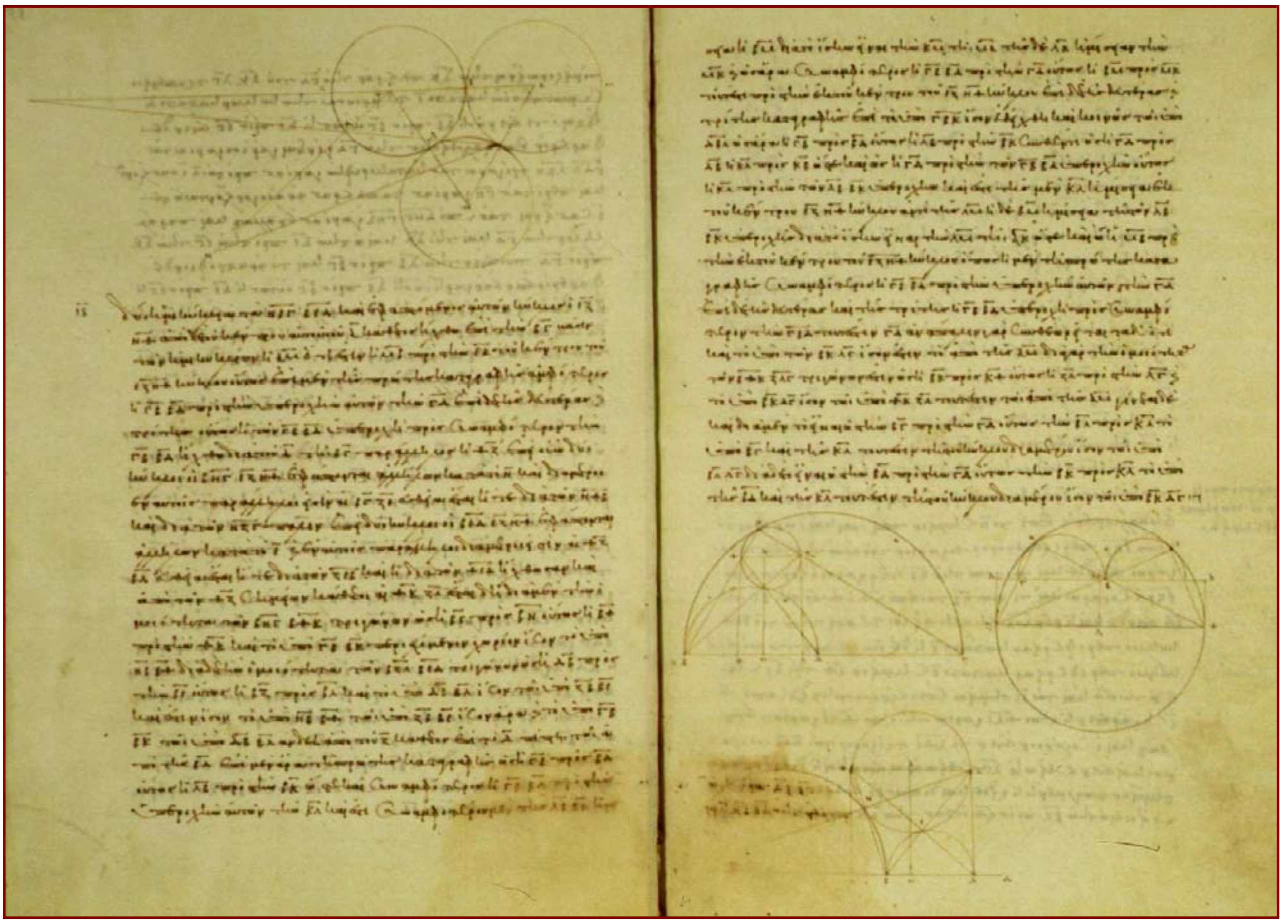
Este problema procede de la obra perdida de Apolonio *Sobre la Sección determinada* y la demostración de Pappus es un buen ejemplo del Análisis Geométrico de los antiguos.

En la *Investigación Analítica* (ver parrafo J), Fermat reinterpreta el Problema de Pappus, y da la solución analítica, utilizando la *Syncrisis* de Vieta, resolviendo brillantemente la cuestión, coronando con ello la memoria, lo que permite conjeturar que pudo idear el método de Máximos y Mínimos, en el intento de resolver el problema. También en la memoria M.2., Fermat trata y resuelve el problema, mediante la técnica del *Methodus*. Previamente, Fermat comenta (TH.OF.III.127):

> «*Para establecer la certeza de este método, tomaré un ejemplo del libro de Apolonio Sobre la sección determinada* [...]. *En este sitio, Pappus la llama una razón mínima* "*monachos y elachistos*" (*singular y mínima*), *porque si se plantea una cuestión sobre magnitudes dadas y que sea cumplida en general por dos puntos, para los valores máximo o mínimo, no habrá más que un punto que la cumpla. Es por esto que Pappus la llama* "*mínima y singular*" (*es decir única*) *a la más pequeña razón de todas las que pueden ser consideradas en la cuestión. Commandino duda en este lugar de la significación del término* "*monachos*" *que emplea Pappus, porque ignora la verdad de lo que acabo de explicar*.»

Vemos en los diversos pasajes, como Fermat hace referencia a ciertas palabras y frases de Pappus que cree que son esenciales, algunas de las cuales no habían sido entendidas por el propio traductor de Pappus, Commandino, debido a que carecía de los libros de Apolonio en que se basaba la Proposición VII.61, de Pappus. Fermat interpreta *epitagma* como condición en el mismo sentido que *Diorismo*, *monachos* como *única y singular*, elachistos como el menor. La interpretación de Fermat se basaría en sus dotes de lingüista, pero es posible que el sentido de las frases empezara a ser comprendido por él, después de haber atacado el problema algebraicamente.

LAS FUENTES HISTÓRICAS DE LOS MÉTODOS DE FERMAT SOBRE MÁXIMOS Y MÍNIMOS Y TANGENTES.
LA COLECCIÓN MATEMÁTICA DE PAPPUS DE ALEJANDRÍA



Página de *La Colección Matemática* de Pappus (en un manuscrito del siglo X de la colección vaticana, *Vat. gr. 218 fols.* 39 verso-40 recto, *math08a NS.05*), arquetipo de las copias posteriores realizadas a partir del siglo XVI.

***La Colección Matemática* de Pappus es un manantial bibliográfico esencial para el estudio de la Historia de la Geometría griega porque describe una multitud de trabajos matemáticos perdidos (de Euclides, Arquímedes, Apolonio, Aristeo y Eratóstenes) sobre Geometría superior, (no incluidos por tanto en *Los Elementos* de Euclides) que constituyen lo que se llama *Tesoro del Análisis*. Además, Pappus nos relata las vías que seguía la investigación geométrica, oculta en los grandes tratados clásicos debido a su estilo sintético, es decir, lo que los antiguos geómetras entienden por Análisis y Síntesis. Aparte de su valor compilador de la Geometría griega superior, la obra tiene un gran valor didáctico por la multitud de lemas introducidos para hacer inteligibles muchos teoremas. Además Pappus aporta muchos resultados originales de su propia cosecha.**

La obra de Pappus fue una importante fuente de admiración de Fermat y sobre todo de fundamento de sus trabajos matemáticos, de indudable influencia sobre la gestación de la Geometría Analítica de *La Introducción a los Lugares Planos y Sólidos* y de sus métodos de máximos y mínimos.

En concreto la observación de Pappus en la Proposición 61 del Libro VII de *La Colección Matemática* acerca de que los extremos son «*únicos y singulares*» pudo ser una de las fuentes de inspiración más importantes de sus métodos de Máximos y Mínimos.

En la *Investigación Analítica*, como muestra de la potencia de sus métodos, Fermat da una solución analítica a la Proposición VII.61 de Pappus, vincula los problemas de máximos y mínimos con las «*condiciones límite*» –los *Diorismos* de Pappus– y alude a su carácter «*único y singular*» con estas palabras:

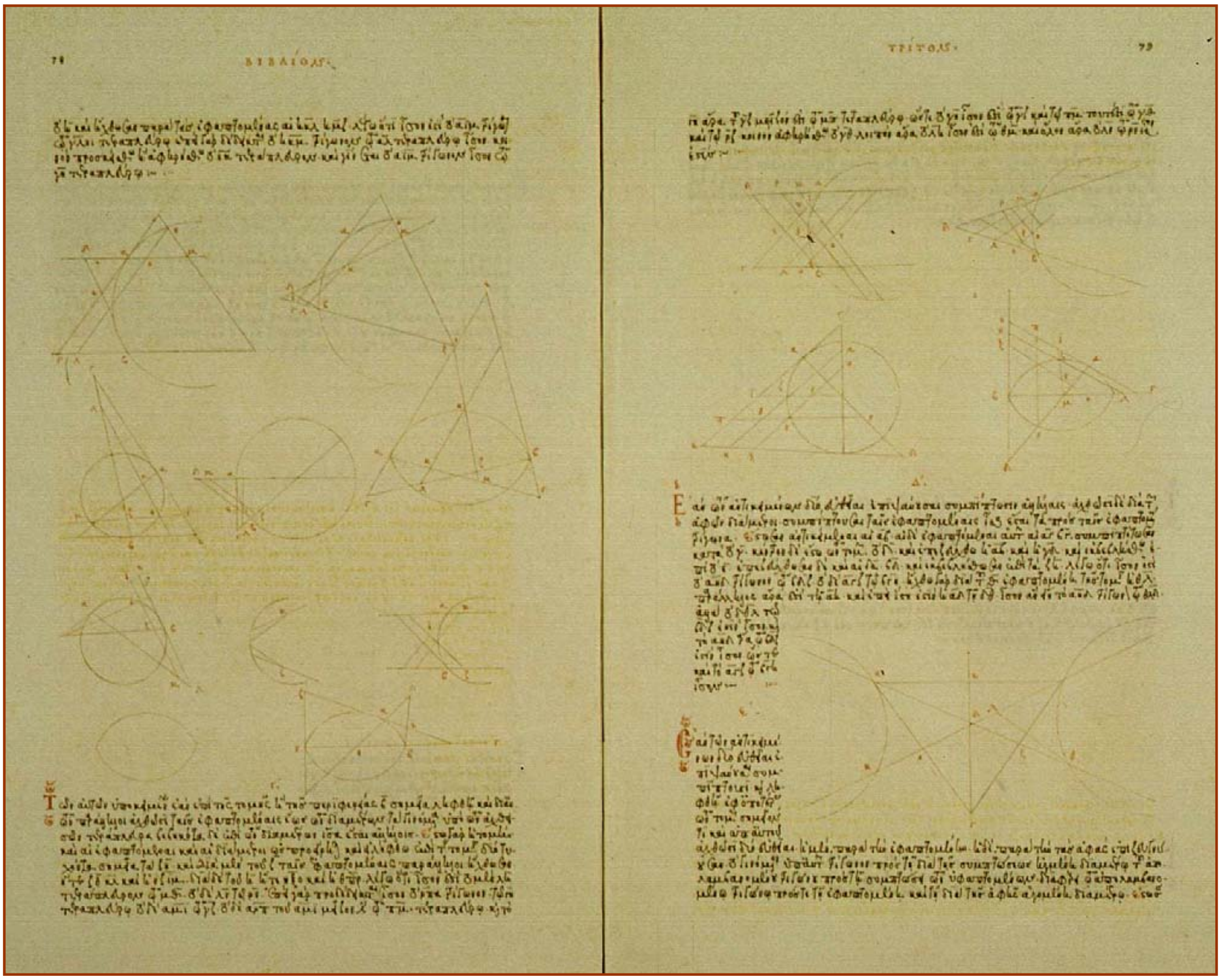
> **«[...]. *Los máximos y mínimos son, en efecto, «únicos y singulares», como lo ha dicho Pappus y como lo sabían ya los antiguos* [...]» (TH.OF.III.131).**
>
> **«[...]. *Las condiciones límite* [que aparecen en este problema] *son expresamente reconocidas como difíciles por Pappus* (TH.OF.III.134).**

También en la memoria *Ad eamdem methodum* (TH.OF.III.127), Fermat había escrito:

> **«[...]. S*i se plantea una cuestión sobre magnitudes dadas y que sea cumplida en general por dos puntos, para los valores máximo o mínimo, no habrá más que un punto que la cumpla. Es por esto que Pappus la llama "mínima y singular"* (*es decir única*) *a la más pequeña razón de todas las que pueden ser consideradas en la cuestión.*»**

Así pues, los testimonios de Fermat avalan la conjetura sobre el origen de sus métodos de máximos y mínimos en el Problema de Pappus de la Proposición 61 del Libro VII de *La Colección Matemática.* Este problema tiene una importancia histórica decisiva, no sólo porque en el intento de resolverlo Fermat haya gestado sus métodos de máximos y mínimos, sino también porque la aplicabilidad del método a las proporciones puede haber abierto el camino a los métodos de Fermat para el trazado de las tangentes a las líneas curvas.

LAS FUENTES HISTÓRICAS DE LOS MÉTODOS DE FERMAT SOBRE MÁXIMOS Y MÍNIMOS Y TANGENTES. *LAS CÓNICAS* DE APOLONIO DE PERGA



Páginas de *Las Cónicas de Apolonio*, quizá el más elegante de todos los manuscritos matemáticos griegos de la colección vaticana. Data de 1536 (Vat. gr. 205 pp. 78-79 math07a NS.03). Se exhiben, con excelentes figuras, las Proposiciones 2–4 del Libro III sobre la igualdad de áreas de triángulos y cuadriláteros formados por tangentes y diámetros de las cónicas, y por tangentes y líneas paralelas a las tangentes.

Las Cónicas **de Apolonio contienen muchos aspectos que anticipan elementos de la Geometría Analítica de Fermat de *La Introducción a los Lugares Planos y Sólidos*. Empezando con su construcción a través de un único cono, Apolonio acuña con significado los nombres de Elipse, Parábola e Hipérbola –procedentes del lenguaje pitagórico de la *Aplicación de las Áreas*– como definición de las cónicas mediante relaciones de áreas y longitudes expresadas en forma de proporción que daban retóricamente la propiedad característica de la curva –el *symptoma* de la curva-, que en el devenir histórico se convertiría, para Fermat, en la *propiedad específica* de la curva. Como Descartes y Fermat, Apolonio considera ciertas «*líneas de referencia*» –diámetros conjugados o diámetro-tangente–), que jugando un papel de «*coordenadas*», asocia a la curva dada, de modo que mediante Álgebra retórica son expresadas en función de esas líneas las propiedades geométricas de la curva equivalentes a su definición como lugares geométricos.**

Fermat había estudiado en profundidad *Las Cónicas* de Apolonio, en cuyo Libro V se estudian de forma geométrica las rectas que dan la distancia máxima y mínima de un punto a los puntos de una cónica, es decir, las rectas normales a una cónica que pasan por un punto dado. También conocía a la perfección otros libros del eximio geómetra griego. Fermat contribuyó incluso a la reconstrucción de los dos libros de *Lugares Planos* de Apolonio. Todo esto situó a Fermat en posición privilegiada para poder entender el Problema de Pappus de la Proposición 61 del Libro VII de *La Colección Matemática* –cuyo origen Fermat sitúa en el libro de Apolonio *Sobre la sección determinada*– que encendió en Fermat una llama de inspiración sobre los temas de máximos y mínimos y tangentes. Por eso Fermat escribe en la memoria *Ad eamdem methodum* (TH.OF.III.127):

> **«*Para establecer la certeza de este método, tomaré un ejemplo del libro de Apolonio Sobre la sección determinada* [...].**

LAS FUENTES HISTÓRICAS DE LOS MÉTODOS DE FERMAT SOBRE MÁXIMOS Y MÍNIMOS Y TANGENTES.
LA ARITMÉTICA DE DIOFANTO DE ALEJANDRÍA

Página de un manuscrito griego del siglo XVI de *La Aritmética* de Diofanto. Biblioteca del Real Monasterio de El Escorial.

Diofanto es el responsable de los primeros escarceos del Álgebra simbólica –el Álgebra sincopada–. A base de adoptar ciertas letras o expresiones como abreviaturas para las cantidades indeterminadas y sus potencias y para las operaciones más habituales, Diofanto fragua un incipiente simbolismo antecedente de la notación algebraica que en su evolución a lo largo de los siglos culminará con la simplificación notacional que acuñan Vieta, Fermat y Descartes, y que se convertirá en el alfabeto de la Matemática.

En la obra de Diofanto, que representa la primera aritmetización de la Matemática, la clásica solución gráfico-geométrica de las ecuaciones del Álgebra Geométrica clásica euclídea , es sustituida por los antiguos métodos aritméticos de los babilonios, como consecuencia de que los símbolos que utiliza ya no son pensados como segmentos de línea, sino que realmente son números. Por esta razón Diofanto va más allá de las ecuaciones cúbicas y considera potencias de la incógnita hasta la sexta, a la que llama cubo-cubo.

Diofanto es un pionero en el camino que sembrado durante 1300 años por los árabes y los matemáticos del Renacimiento italianos, transforma la *logística numerosa* –que opera con números– en otra que opera con todo tipo de especies –la *logistica speciosa* de Vieta– que generalizará los métodos mediante el cálculo literal hacia la doctrina algebraica como uno de los cimientos de la Matemática al convertirse en su propio lenguaje.

La lectura de *La Aritmética* de Diofanto fue una importante fuente de inspiración no sólo de los desarrollos de Fermat sobre Teoría de Números, sino también de sus métodos de máximos y mínimos, tangentes y cuadraturas. De hecho, Fermat se remite, una y otra vez, a Diofanto, como reconocida autoridad clásica para dar cobertura conceptual a los fundamentos de sus métodos de «*adigualdad*», concepto que es introducido a base de adaptar un procedimiento de aproximación a un cierto número racional tan cercana como fuera posible, usado por Diofanto en el ámbito de los problemas de *La Aritmética*, es decir, de encontrar soluciones racionales de ecuaciones indeterminadas.

Por otra parte, Fermat conocía profundamente las Cónicas de Apolonio, en particular el Libro V, donde se trazan problemas relacionados con extremos. En efecto al comienzo del Libro V Apolonio manifiesta:

> «*En este quinto libro expongo las proposiciones referentes a las rectas máximas y mínimas,* [...].
>
> *He puesto además especial cuidado en separar y especificar las proposiciones que atañen a las rectas mínimas según sus géneros, y las he relacionado con las que se refieren a la teoría de las rectas máximas*, [...].»

Es decir Apolonio traza las rectas que dan la distancia máxima y mínima de un punto a los puntos de una cónica, o sea las rectas normales a una cónica que pasan por un punto dado.

Pero en este terreno, el punto débil del método de los antiguos, era el mismo que el del método de exhaución en relación a las cuadraturas. Se trataba de métodos de demostración no de descubrimiento, no eran métodos generales ni heurísticos, precisaban conocer previamente la solución del problema, aplicándose entonces a obtener una demostración rigurosa de la corrección de la misma. Era por tanto necesario obtener otros métodos que además de ser más generales, garantizaran no solo la rigurosa corrección de las soluciones sino el descubrimiento de las propias soluciones.

El Análisis Geométrico de los antiguos había sido el principal instrumento de investigación geométrica, pero el estilo sintético de exposición de la Geometría griega en los grandes tratados (*Los Elementos* de Euclides, *Las Cónicas* de Apolonio, etc., ocultaba a los estudiosos la forma en que los geómetras habían descubierto sus teoremas. La excepción fue Pappus, de ahí la atracción que ejerció sobre la posteridad. Tras los excelentes trabajos de recuperación de las obras antiguas perdidas, en particular las mencionadas por Pappus en el *Tesoro del Análisis* del Libro VII de *La Colección Matemática*, Vieta y su escuela de los Analistas, recogen la tradición del Análisis Geométrico de los antiguos y se aplican en traducirlo en el nuevo lenguaje algorítmico del Álgebra promocionando la capacidad heurística del Análisis, destilando lo que podríamos llamar un Análisis Algebraico. Pero el Álgebra que aplican está mucho más elaborada que la de los Cosistas italianos, porque ha pasado de lo sincopado a lo simbólico. Como consecuencia de la reformulación de Vieta, el *Arte de la Cosa* de los algebristas italianos se había convertido en la *Doctrina de las Ecuaciones* del *Arte Analítica* y todo lo que los antepasados habían realizado en Geometría, ahora podía codificarse en la Teoría Algebraica de Ecuaciones. El simbolismo literal de Vieta, permitía tratar los datos de un problema como parámetros, y por tanto tratar de forma general el problema. El manejo de parámetros incita a la búsqueda de la relación entre las raíces de una ecuación y sus parámetros coeficientes –*Syncrisis*–, o el estudio de la relación entre las raíces de ecuaciones que contienen los mismos términos pero con diferentes signos, que conduce a la reducción del grado de la ecuación –*Anastrophe*–.

La palabra *Syncrisis* que aparece en el capítulo XVI de *De Recognitione æquationum* de la *Opera Mathematica* de Vieta, es un neologismo latino inventado por Vieta para designar la palabra griega significando composición, combinación o comparación. El método de *Syncrisis* consiste en combinar ecuaciones semejantes (*correlativas* las llama Fermat en la *Investigación Analítica*) para obtener expresiones para los coeficientes de una ecuación en función de las raíces. Vieta lo explica con gran verbosidad y agotando la casuística, actuaciones propias de jurista. Su lenguaje confuso y oscuro es clarificado por la notación simbólica de Fermat y Descartes. Con ella y sin disfrazar la sustancia del método de Vieta ilustraremos la *Syncrisis* con el ejemplo más sencillo, la ecuación de segundo grado:

$$bx - x^2 = c\ .$$

La ecuación $bx - x^2 = c$ es la primera de un par de ecuaciones correlativas. Si x es una de las raíces de la ecuación, sea y la segunda *raíz*. La segunda ecuación correlativa es :

$$by - y^2 = c\ .$$

Para llevar a término la *Syncrisis*, Vieta iguala los términos izquierdos de ambas expresiones:

$$bx - x^2 = by - y^2 .$$

Operando se obtiene :

$$b(x-y) = x^2 - y^2 ,$$

de donde se halla :

$$b = x+y , \quad c = xy .$$

es decir para la ecuación cuadrática el coeficiente del término de primer grado es igual a la suma de las raíces y el término independiente igual a su producto.

Considerando tantas ecuaciones correlativas como raíces tenga una ecuación se puede extender el método de la *Syncrisis* a ecuaciones de orden superior, generando las llamadas *funciones simétricas de las* raíces y el llamado *Teorema de Cardano–Vieta*. La *Syncrisis* descansaba lógicamente en la asunción que en seguida se hizo esencial, de que toda ecuación de grado mayor que uno tenía más de una solución.

A través de sus contactos en Bourdeaux con la Escuela de los Analistas, discípulos de Vieta, Fermat se proveyó de su simbolismo algebraico –al que permaneció fiel durante toda su producción, utilizando las letras vocales para designar las incógnitas y las consonantes para los parámetros– y sobre todo del Análisis Geométrico de los antiguos, convertido en Análisis Algebraico por acción del Álgebra Simbólica.

En resumen los problemas de *Diorismos*, las observaciones de Pappus y el método de la *Syncrisis*, son las raíces básicas de los métodos de Máximos y Mínimos de Fermat. Estos elementos de Análisis Geométrico y Doctrina de las Ecuaciones, debieron transformarse gradualmente en la mente de Fermat en la Geometría Analítica de la *Introducción a los lugares planos y sólidos* (TH.OF.III.85–96), una potente heurística geométrica y un poderoso instrumento de investigación, mediante los que Fermat pudo resolver de forma sorprendente y brillante, antiguos y nuevos problemas, en particular numerosos problemas de máximos y mínimos y tangentes.

La presunta o real vinculación entre el *Methodus* y la *Investigación Analítica*, es de capital importancia en el estudio histórico de los intentos de Fermat de fundamentar sus métodos de Máximos y Mínimos.

Fermat anuncia sus métodos de Máximos y Mínimos a Roberval y E.Pascal en la carta IX de 23 de Agosto de 1636 (TH.OF.II.56) :

> «[...]. *He encontrado muchas otras proposiciones geométricas, como la restitución de todas las proposiciones de Los Lugares Planos* [de Apolonio] *y otras; pero a lo que doy más importancia es un método para determinar todo tipo de problemas planos o sólidos, por medio del cual encuentro los máximos y los mínimos, y ello mediante una ecuación tan simple y sencilla como las del Análisis ordinario*. [...].
>
> *Hay infinidad de cuestiones que yo nunca habría podido resolver sin ello, como las dos siguientes que podéis intentar si queréis* : [...].»

Fermat, a continuación, propone los dos problemas del cono y del cilindro de superficie total máxima inscritos en una esfera dada.

Esta era la forma habitual de Fermat de comunicar sus descubrimientos, en forma de problemas que proponía. Cuando la presión de los matemáticos de París le fuerza a hacer públicas las investigaciones que le permitían obtener tan brillantes soluciones a los problemas de extremos, Fermat difunde el *Methodus*. Pero su deseo de revelar a los círculos matemáticos tan poco como fuera posible acerca de sus investigaciones sobre extremos, explica la forma vaga e imprecisa en que lo redacta. La falta de claridad por parte de Fermat en el *Methodus*, fue probablemente deliberada, en el sentido de que lo que pretendería sería establecer un algoritmo, un procedimiento mecánico, privado de toda justificación y fundamentación teórica.

La vaguedad y el laconismo de que Fermat hace gala en el *Methodus*, abona las sistemáticas interpretaciones de su método en términos de Cálculo Diferencial o método de límites, que manifiestan que en el *Methodus* subyace el cálculo de una derivada que se iguala a cero. Realmente es una verdadera tentación reproducir el desarrollo de Fermat poniendo a=x, y la cantidad a maximizar o minimizar f(x). La regla nos daría:

$$4 \text{ y } 5: \ f(x+e) \cong f(x) \ \leftrightarrow \ f(x+e) - f(x) \cong 0 \ ,$$

$$6: \quad \frac{f(x+e)}{e} \cong \frac{f(x)}{e} \ \leftrightarrow \ \frac{f(x+e)-f(x)}{e} \cong 0 \ ,$$

$$7 \text{ y } 8: \left[\frac{f(x+e)}{e}\right]_{e=0} = \left[\frac{f(x)}{e}\right]_{e=0} \ \leftrightarrow \ \left[\frac{f(x+e)-f(x)}{e}\right]_{e=0} = 0 \ .$$

Interpretando el desarrollo de Fermat en términos actuales, diríamos que el valor x que hace tomar a f(x) un valor extremo, debe ser solución de la ecuación:

$$f'(x) = \lim_{e \to 0} \left[\frac{f(x+e)-f(x)}{e}\right] = 0$$

Bajo esta interpretación Fermat se habría anticipado a la expresión de la derivada

$$f'(x) = \lim_{e \to 0} \left[\frac{f(x+e)-f(x)}{e}\right] = 0$$

introducida por Cauchy en 1820, y esto avalaría las opiniones acerca de Fermat como verdadero descubridor del Calculo Diferencial, que mantuvieron Lagrange, Laplace y Fourier y otros matemáticos franceses.

Un estudio exhaustivo de la *Investigación Analítica* nos mostrará la falta de base de esta anacrónica interpretación del método de Fermat. Veremos que el *Methodus* de Fermat no se basa en ningún concepto infinitesimal, sino en conceptos algebraicos puramente finitos, derivados de la Teoría de Ecuaciones de Vieta.

El *Methodus* atrajo, precisamente por su falta de claridad, una ardiente atención por parte de la comunidad matemática del momento, entre 1636 y 1638. E.Pascal, Roverbal, Mydorgue, Hardy, Desargues, manifestaron su opinión sobre el *Methodus*, pero fue Descartes quien se proyectó decisivamente sobre él, a propósito de su aplicación a la determinación de tangentes, entrando en una agria polémica con Fermat que tuvo la feliz virtualidad de ir obligando a éste, progresivamente con más intensidad, a buscar la prueba de validez de su método –más que a buscarla, que ya la poseía de sus investigaciones los años 1626–29, a divulgarla–, de modo que a medida que va proporcionando la justificación del algoritmo, va revisando los fundamentos de su método, a la luz de los nuevos horizontes que le abre su propio desarrollo de la Geometría Analítica –*La Introducción a los lugares planos y sólidos*– y la lectura de La Geometría de Descartes. Estos esfuerzos de Fermat darían como fruto la *Investigación Analítica*, memoria que, aunque cronológicamente posterior al *Methodus*, registraría la forma original más temprana del método de Máximos y Mínimos. Un análisis exhaustivo de la controversia entre Fermat y Descartes, permite justificar plenamente estas afirmaciones, en el sentido de que la *Investigación Analítica* habría sido escrita para mitigar la acusación de Descartes de que el *Methodus* carecía de todo fundamento y sus aplicaciones serían un resultado feliz de un claro error.

A continuación vamos a realizar un seguimiento de la *Investigación Analítica*, analizando párrafo a párrafo su contenido, para defender la tesis de que esta memoria encierra los fundamentos teóricos originales del *Methodus*.

En la *Investigación Analítica*, como en todas sus memorias, Fermat utiliza las consonantes para indicar los datos –que actúan como parámetros–, y emplea las dos primeras vocales a,e, para denotar las incógnitas que nosotros, siguiendo a Descartes, designamos mediante x,y. Por otra parte, y afectando a la notación, tanto Fermat como Vieta, respetan la *ley de la homogeneidad* en las dimensiones, ya que nunca desvinculan el Álgebra de la Geometría, de modo que las variaciones de los términos de una ecuación están siempre limitados por su significado geométrico. Por idéntica razón nunca consideran raíces negativas ni nulas, toda vez que son casi siempre geométricamente insignificantes (sin significado).

Para la resolución analítica de la proposición de Pappus (véase párrafo J), Fermat traduce el problema a símbolos algebraicos, lo que le conduce a una ecuación cuadrática. Una tal ecuación tendrá dos raíces, que corresponderán geométricamente a los dos puntos que satisfacen las condiciones del problema. Pero según la observación de Pappus, hay sólo una *razón mínima, única y singular*, por tanto habrá un único punto–sección, en que la línea puede ser dividida proporcionando una razón mínima. En consecuencia la ecuación cuadrática que expresa la condición de mínimo debe tener una única raíz. Estas intuiciones le llevan a Fermat a plantearse dos cuestiones fundamentales:

a) ¿Como puede uno manipular una ecuación para que tenga una única raíz?

b) Puesto que una ecuación cuadrática tiene dos raíces, ¿Qué sucede con la segunda raíz en el caso de máximo o mínimo?

Esta segunda cuestión atrajo primeramente su atención. Veámoslo con el más simple problema de extremo:

> «*Dividir la recta b en dos segmentos, de manera que el producto de ellos sea máximo*»,

problema equivalente, salvo un factor constante, según vimos, al famoso *diorismo* de Euclides de la Proposición VI.27 de *Los Elementos*.

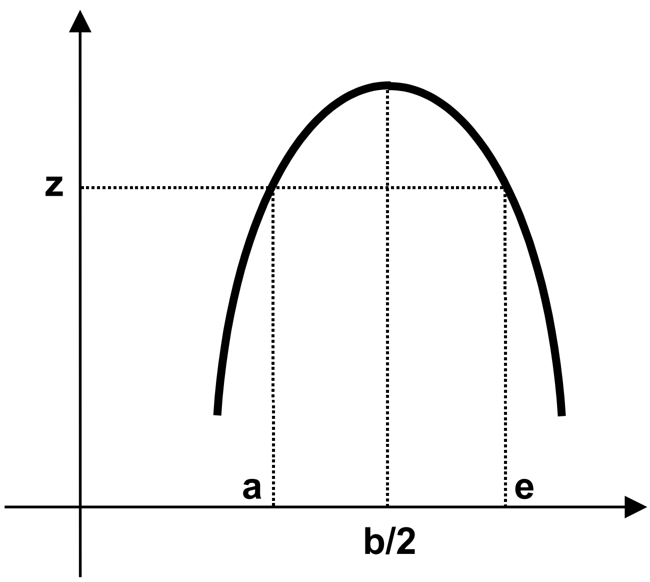
El problema de dividir una línea b en dos segmentos, tal que su producto sea una cantidad dada c, se traduce algebraicamente en la ecuación cuadrática: $bx - x^2 = c$.

Geométricamente este problema de sección requiere un *diorismo*, toda vez el producto $x\cdot(b-x)$ no puede ser arbitrariamente grande. Este *diorismo* arrastra un máximo, ya que Fermat conocía de Euclides,VI.27.,que el producto de los segmentos no puede ser mayor que $b^2/4$ y el valor máximo se obtiene para $x=b/2$ (véase párrafo B).

Pero siendo el problema de naturaleza cuadrática, debería tener otra solución cuyo comportamiento. Fermat se dispone a investigar.

Para ello vuelve al problema general, en el párrafo C:

> «*Pero si uno se propone dividir la misma recta b de manera que el producto de segmentos sea igual a* z'' (*este área se debe suponer siempre más pequeño que* $b^2/4$), *se tendrán dos puntos satisfaciendo la cuestión, que se encontrarán situados a uno y otro lado del punto correspondiente al producto máximo.*»



Aplicando el método de *Syncrisis* de Vieta, Fermat determina (véase el párrafo D), la relación entre las raíces a,e, de la ecuación obteniendo que su suma es siempre b, con independencia del valor de c, es decir : b=a+e, siendo a,e, desiguales .

Fermat estudia, a continuación, la diferencia entre las raíces a,e, cuando c toma un valor más próximo al valor máximo, en orden a investigar lo que sucede con la segunda raíz en el valor máximo (párrafo E):

> «*Si en lugar del área* z'', *se toma uno más grande, aunque siempre inferior a* $b^2/4$, *las rectas* a y e *diferirán menos entre ellas que las precedentes, los puntos de división se aproximan más al punto correspondiente al producto máximo. El producto de los segmentos aumentará, más al contrario disminuirá la diferencia entre* a y e, *hasta que desaparece completamente esta diferencia para la división correspondiente al producto máximo; en este caso no hay más que una solución única y singular, las dos cantidades* a y e *llegan a se iguales.*»

Este pasaje podría dar base, en una lectura superficial y con anacrónica visión modernizadora, a ciertas interpretaciones del pensamiento de Fermat, en términos infinitesimales de límites. Fermat parece decir que cuando c se aproxima al valor máximo, las dos raíces se aproximan entre ellas de modo que su diferencia se aproxima a cero. A pesar de la analogía del pasaje con la aproximación a un límite de los desarrollos modernos, las diferencias son considerables, porque Fermat no llega a manifestar que la diferencia entre las dos raíces se aproxima a cero, sino que asevera que en el máximo la diferencia es cero:

> [...] *desaparece completamente esta diferencia* [...] .

Es importante señalar que para Fermat el verbo latino que utiliza «*evanescere*», no tiene otra especial significación que la de desaparecer. Sólo con Newton ese verbo alcanzará una nueva y especial significación matemática en el sentido de aproximarse a un límite cuando hablas de «*razones últimas de cantidades evanescentes*».

Además, en este pasaje, Fermat intenta descubrir que sucede con la otra raíz, cuando para el valor máximo la ecuación parece tener una única raíz. Mediante un seguimiento geométrico de las dos raíces cuando c se aproxima al valor máximo, Fermat encuentra que la otra raíz no ha desaparecido, sino que es igual a la raíz principal. Es decir, la situación geométrica clarifica lo que Fermat no puede esclarecer de la ecuación misma. Incluso para el valor máximo de c, la ecuación: $bx–x^2=c$, tiene dos soluciones, pero parecen ser una sola, porque ambas son iguales. Geométricamente los dos segmentos determinados por esas soluciones tienen la misma longitud, y por tanto los extremos de ambos segmentos coinciden en el punto medio de la línea. Esta intuición geométrica es confirmada por el resultado de la *Syncrisis*. Ya que la suma de segmentos o raíces es igual a b, en el caso de máximo, al ser las dos raíces iguales, cada raíz es igual a b/2 (véase párrafo F). Vemos pues, que los fundamentos del método de Máximos y Mínimos de Fermat descansan en el estudio de las raíces de ecuaciones, es decir en el dominio finitista de la Teoría de Ecuaciones y no en ningún tipo de consideración infinitesimal sobre límites.

Sin embargo, en el desarrollo anterior subyace una aparente irregularidad, que es preciso soslayar. Despues de dividir por a–e, Fermat toma a=e, ¿Ha dividido por cero?. Para salvar el algoritmo del *Methodus* que Fermat deriva de su método original, se cuenta con la sofisticada teoría de límites de Cauchy. La génesis del método en la mente de Fermat explica que este problema, que podría llevar a un paralogismo, no le inquietara. El método descrito en la *Investigación Analítica* se basaría en una falsa asunción (una especie de regla de la falsa posición utilizada metamatemáticamente) y en la completa generalidad de la Teoría de Ecuaciones de Vieta. En efecto, en orden a aplicar el método de *Syncrisis* en el caso de máximo o mínimo, Fermat asume falsamente –aunque intencionalmente– que la ecuación tiene al menos dos raíces diferentes. La falsa asunción tendría su base en el hecho de que las relaciones descubiertas por *Syncrisis* son completamente generales y son válidas para todos los valores particulares de los parámetros de la ecuación. Es decir, en la ecuación: $bx–x^2=c$, las relaciones: b=x+y, c=xy, son ciertas cualesquiera que sean los valores particulares de b y c. En el caso en que c sea el valor máximo de la expresión bx–

x^2, Fermat sabe que la relación $b=x+y$, es cierta todavía, a pesar de que $x=y$, o $x–y=0$. Por tanto en su pensamiento Fermat no considera que tenga lugar ninguna división por cero. La división por $x–y$ pertenece al examen general de la ecuación, mientras que el poner $x=y$, pertenece a la consideración de un caso particular.

Prosigue la *Investigación Analítica* resolviendo el problema:

> «*Dividir la recta* b *en dos segmentos de manera que el producto del cuadrado de uno de ellos por el otro sea máximo*»,

ejemplo que no es tomado al azar, sino que procede de un *diorismo* aplicado por Arquímedes en su obra *Sobre la Esfera y el Cilindro*, y que conduce a determinar el máximo de $bx^2–x^3$. Aplicando paso a paso la *Syncrisis* de Vieta, Fermat obtiene (véase párrafo G) $2bx=3x^2$, y de aquí $2b=3x$, de donde la solución, $x=2b/3$.

Vemos como en este problema, Fermat pasa directamente de la ecuación: $2bx=3x^2$ al resultado: $2b=3x$, descartando la solución x=o. Para Fermat esta solución es claramente extraña, ya que no conduce a ningún sólido de los que han de ser construidos. Fermat no comenta que $x=0$ proporciona el valor mínimo de la expresión –se entiende mínimo local–. Análogamente en el problema siguiente (véase párrafo I), donde se resuelve el máximo de $b^2x–x$, Fermat llega a la ecuación final: $b=3x^2$, diciendo simplemente que dará el sólido máximo buscado. Este se obtiene tomando la raíz positiva de la ecuación: $b=3x^2$. Nuevamente Fermat ignora que la raíz negativa proporciona un mínimo local. Un valor negativo o nulo para x no tiene significado geométrico. No obstante, la ecuación final para la razón mínima en el problema de Pappus (véase párrafo J) :

$$dzb + da^2 – za^2 + ba^2 = 2dza \quad ,$$

fuerza a Fermat a considerar la cuestión de las dos soluciones:

> «*El analista no se detendrá por el hecho de que esta ecuación tenga dos raíces, pues la que se debe tomar resultará de ella misma*, [...].»

Fermat siempre obvia la cuestión, porque en los casos que trata, la geometría de la situación determina la elección de la raíz. Pero un análisis general de su método descubre ciertas ambigüedades. Se observa que Fermat no maneja verdaderas condiciones suficientes de extremos ni alcanza a ver la distinción entre extremos locales y absolutos. Además, su método viene a decir que si M es un valor extremo de f(x), la ecuación $f(x)–M=O$ tiene una raíz doble, es decir de la forma $(x–a)^2g(x)=0$, siendo a el valor de x que da el extremo y g(a) distinto de cero, pero si f(x) tiene varios extremos locales, se tendrán varios valores de a, como sucede para ecuaciones de grado mayor o igual que tres. Incluso para ecuaciones de cuarto grado por ejemplo, puede haber dos valores de a que den el mismo valor máximo M. La unicidad de los valores extremos, originalmente extraída de Pappus, fue una idea fija para Fermat porque trataba problemas cuadráticos –por tanto con un único valor extremo–, problemas cúbicos con un valor extremo cero –para él geométricamente irrelevante–, y algún problema de cuarto grado homogéneo, que no le conducía a dos valores extremos relativos significativos. Fermat nunca deja claro si unicidad significa que todas las raíces de la ecuación que establece la condición de extremo son iguales –lo que no es cierto, según hemos visto, para ecuaciones de grado mayor o igual que tres–, o simplemente dos de las raíces son iguales –lo que si es correcto–. El método funciona porque, en cualquier caso, se igualan sólo dos de las raíces.

Por otra parte, es digno de resaltar que ni en la *Investigación Analítica* ni en ninguna otra memoria, Fermat calcula explícitamente el valor máximo, que podría obtener fácilmente de la propia *Syncrisis* –por ejemplo, en el primer problema, $c=xy$, siendo $x=y=b/2$–. La razón de este hecho es clara, Fermat se plantea sus problemas en el ámbito de las construcciones geométricas y lo que requiere exclusivamente en su solución es el punto–sección o el segmento de línea que proporciona el valor máximo o mínimo, no el propio valor extremo. Los problemas de máximos y mínimos de Fermat son problemas de construcciones geométricas y no de optimización de cantidades.

Continúa la *Investigación Analítica* describiendo el camino que conduce hacia la formulación del procedimiento algorítmico del *Methodus*. Fermat recorre este camino mediante un perfeccionamiento de la *Syncrisis* de Vieta. El paso fundamental hacia el desarrollo del *Methodus* consiste en considerar para las raíces, a y $a+e$, en lugar de a y e, un paso que simplificará las operaciones, pero que contribuirá a exacerbar el aparente paralogismo de la presunta división por cero.

Aplicando el método de la *Syncrisis* de Vieta a nuevos problemas, Fermat pone de manifiesto ciertos inconvenientes que la teoría impone en el Análisis, cuando se aplica a la resolución de ciertas ecuaciones. En varias cartas dirigidas al Padre Mersenne, Fermat describe estas dificultades y su forma de solventarlas. Ya en la primera carta que Fermat envía a Mersenne el 26 de abril de 1636 (TH.OF.II.5), le informa :

> «*He encontrado también muchos tipos de análisis para diversos tipos de problemas tanto numéricos como geométricos, en la solución de los cuales el análisis de Vieta no ha sido suficiente*.»

Actuando como intermediario, como era habitual, Mersenne remite tanto a Descartes como a Fermat (a éste en una carta ahora perdida), tres problemas algebraicos conteniendo expresiones irracionales, que le habían sido enviados por Dounot. En contestación, Fermat escribe a Mersenne el domingo 1 de abril de 1640 la carta XXXVIII bis, describiendo en ella un útil corolario de la *Syncrisis* aplicada a resolver ecuaciones (procedente como la propia *Investigación Analítica* de una investigación anterior), junto con un retoque de la propia *Syncrisis*, que le inducirá a realizar una pequeña enmienda en su original método de Máximos y Mínimos, lo cual a su vez le permitirá establecer el algoritmo del *Methodus*. Veamos la parte de la carta XXXVIII bis que interesa a esta cuestión (TH.OF.II.187):

> «*El método que comparo a la Syncrisis, no es más que para evitar las divisiones que son a menudo muy penosas en este tipo de cuestiones.*
>
> *Sea, por ejemplo :*
>
> $$bda - ba^2 - a^3 = z .$$
>
> *Esta ecuación puede tener tres soluciones, de las cuales* n *por ejemplo sea dada. Es preciso encontrar las otras dos. Para lograrlo es necesario rebajar en un grado esta ecuación, lo que Vieta realiza mediante división y Descartes también*.»

Es decir, al ser n solución de la ecuación, se tiene:

$$bdn - bn^2 - n^3 = z .$$

Aplicando la *Syncrisis,* se igualan las ecuaciones correlativas :

$$bda - ba^2 - a^3 = bdn - bn^2 - n^3 ,$$

de donde :

$$bd(a-n) = b(a^2-n^2) + (a^3 - n^3) .$$

Dividiendo ahora por $a-n$, se obtiene :

$$bd = ba + bn + a^2 + an + n^2 ,$$

y ya que n es dado, se tiene una ecuación cuadrática, es decir se ha rebajado el grado de la ecuación en una unidad.

En teoría esta técnica se aplica fácilmente, pero Fermat ya había observado en una carta anterior (Carta XXXVII de 20 de febrero de 1639, TH.OF.II.179) ciertas dificultades prácticas que podían presentarse.

Fermat en la Carta XXVII pone el ejemplo de la ecuación :

$$a^3 - 9a^2 + 13a = \sqrt{288} - 15 \ ,$$

de la que se sabe que $3-\sqrt{2}$ es una *raíz*.

La aplicación directa de la *Syncrisis* supone dividir la ecuación:

$$a^3 - 9a^2 + 13a = (3-\sqrt{2}) - 9(3-\sqrt{2})^2 + 13(3-\sqrt{2}) \ ,$$

por $a-(3-\sqrt{2})$, lo cual conlleva una dificultad considerable. Por eso Fermat afirma en esta carta:

> [...] *Los medios que Vieta utiliza para resolver problemas similares, que llama Syncrisis en su tratado De recognitio æquationum son deficientes* [...].
>
> [...] *Yo daré un método general para todas las soluciones similares, que funciona mejor, con menos dificultad y que no tiene los defectos del método de Vieta, que es bastante engorroso, debido a las divisiones que acarrea, particularmente en los ejemplos algo difíciles, como el planteado, que los analistas habituales no sabrían resolver mediante la Syncrisis.*

En la citada carta XXXVIII bis, Fermat cumple su promesa aplicando sus nueva ideas a la ecuación mencionada en esta carta ($bda - ba^2 - a^3 = z$) :

> «[...] *He aquí como procedo yo*:
>
> n *es igual a* a; *ahora bien hay otras dos líneas iguales a* a *y* distintas de n. *Pongamos que una de estas dos líneas sea* n+e, *y consideremos ahora la ecuación como si* n+e *fuera* a, *tendremos*:
>
> $$bdn + bde - be^2 - e - bn^2 - 2bne - 3ne^2 - n - 3n^2e = z \ .$$
>
> *Ahora bien, puesto que a es igual a n, se tiene que*
>
> $$bda - ba^2 - a^3 \text{ será igual a } bdn - bn^2 - n^3 \ .$$
>
> *Pero*, $bda - ba^2 - a^3$ es igual a z,
>
> *por la primera ecuación; por consiguiente :*
>
> $$bdn - bn^2 - n \quad \text{será igual a } z \ .$$
>
> *Quitando, por tanto, de un lado de la ecuación*
>
> $$bdn - bn^2 - n \ ,$$
>
> *y del otro z, quedará*:
>
> $$bde - be^2 - e^3 - 2bne - 3ne^2 - 3n^2e = 0 \ .$$
>
> *Y dividiendo todos los términos por e, que es una división simple y no compuesta como la de Vieta y otros, quedará*:
>
> $$bd - be - e^2 - 2bn - 3ne - 3n^2 = 0 \ ,$$
>
> *y así la ecuación no será más que de segundo grado, en cuanto e sea conocido, añadiéndoselo a n, tendremos la línea buscada*.»

De esta forma, Fermat habría perfeccionado el método de la *Syncrisis* de Vieta, en vez de dividir por a–e, tendría que dividir por e, sentando la base para el establecimiento de la forma algorítmica del *Methodus*. En efecto, Fermat describe en la *Investigación Analítica* el efecto del perfeccionamiento de la *Syncrisis* sobre el método (párrafo H) :

> «*Sin embargo, como en la práctica las divisiones por un binomio son generalmente complicadas y demasiado penosas, es preferible comparando las ecuaciones correlativas, poner en evidencia las diferencias de las raíces, para no tener que operar más que mediante una simple división por esta diferencia*.»

A continuación, Fermat aplica la nueva forma de la *Syncrisis* a encontrar el máximo de b^2x-x^3, comentando las ventajas que tiene la nueva forma respecto a la original (párrafos I, L):

> «*Sea buscar el máximo de* b^2a-a^3*. Según las reglas del método que se acaba de citar, se debería tomar como ecuación correlativa* b^2e-e^3*. Pero puesto que* e*, así como* a*, es una incógnita, nada nos impide designarla por* a+e*; de manera que se tendrá:*
>
> $$b^2a + b^2e - a^3 - e^3 - 3a^2e - 3e^2a = b^2a - a^3 .$$
>
> *Está claro que si se suprimen los términos semejantes, todos los restantes quedan afectados de la incógnita* e*; los que tienen sólo* a*, son los mismos a ambos lados. Así pues, se tiene:*
>
> $$b^2e = e^2 + 3a^2e + 3e^2a ,$$
>
> *y dividiendo todos los términos por e,*
>
> $$b^2 = e^2 + 3a^2 +3ae ,$$
>
> *lo que da la formación de las ecuaciones correlativas en esta forma.*
>
> *Para encontrar el máximo hay que igualar las raíces de las dos ecuaciones, a fin de satisfacer las reglas del primer método, del que nuestro nuevo procedimiento obtiene su razón y su forma de operar.*
>
> *Así, pues es preciso igualar* a *y* a+e, *de donde* e=0*. Pero según la formación que hemos encontrado para las ecuaciones correlativas,*
>
> $$b^2 = e^2 + 3a^2 + 3ae ;$$
>
> *debemos, por consiguiente, suprimir en esta igualdad, todos los términos afectados de* e*, como reduciéndose a* 0*; quedará pues* $b^2=3a^2$*, ecuación que dará el máximo buscado para el producto tratado.*»

....

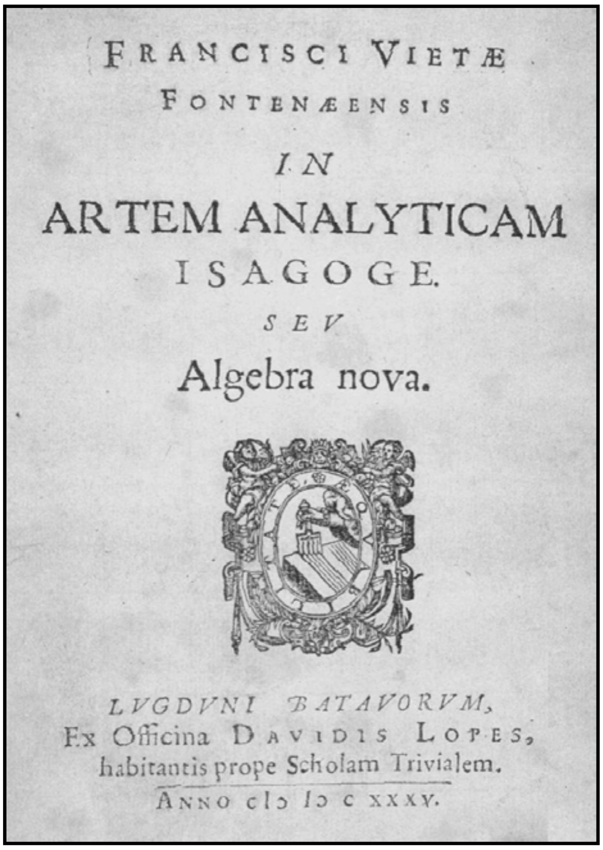
> «*Pero esta claro* [...] *que el primero de estos dos métodos será, en general, de un empleo poco cómodo, a consecuencia de las divisiones reiteradas por un binomio. Es necesario, por consiguiente, recurrir al segundo método, que aunque simplemente derivado del primero, como ya he dicho, proporcionará a los analistas hábiles, una facilidad sorprendente e innumerables abreviaciones; es mas, se aplicará con una simplicidad y una elegancia muy superiores a la búsqueda de tangentes, de centros de gravedad, de asíntotas y otras cuestiones similares.*»

En síntesis, en la aplicación original de la *Syncrisis*, Fermat llama a las raíces de la ecuación a y e, jugando ambas el mismo papel de variables. Como consecuencia del retoque sobre la *Syncrisis,* Fermat llama a las raíces a y a+e, en lugar de a y e, lo que permite simplificar su método de Máximos y Mínimos, ya que en vez de dividir por el binomio a–e, ahora tiene que realizar una simple división por e. De aquí a la formulación del algoritmo del *Methodus* va un paso, que sólo requiere dilucidar el significado de la «*adigualdad*», lo que se intentará aclarar enseguida. La diferencia entre la forma original y la forma perfeccionada de la *Syncrisis*, sería algo similar a la diferencia entre las dos expresiones que nosotros utilizamos para definir la derivada de una función en un punto:

$$\frac{f(a)-f(e)}{e} \quad , \quad \frac{f(a+e)-f(a)}{e} \quad ,$$

pero, por supuesto, sin añadir ninguna connotación infinitesimal sobre límites.

LAS FUENTES HISTÓRICAS DE LOS MÉTODOS DE FERMAT SOBRE MÁXIMOS Y MÍNIMOS Y TANGENTES. EL *ARTE ANALÍTICA* DE VIETA



FRANCISCI VIETÆ
FONTENÆENSIS
IN
ARTEM ANALYTICAM
ISAGOGE.
SEV
Algebra nova.

LVGDVNI BATAVORVM,
Ex Officina DAVIDIS LOPES,
habitantis prope Scholam Trivialem.
ANNO CIↃ IↃ C XXXV.

Portada de la edición de 1635*In Artem Analyticam Isagoge* de Vieta. La primera edición es de 1591.

La obra de Vieta *In Artem Analyticam Isagoge* está inspirada profundamente en la obra de Diofanto y Pappus. En ella Vieta fundamenta los principios y las reglas del cálculo algebraico literal.

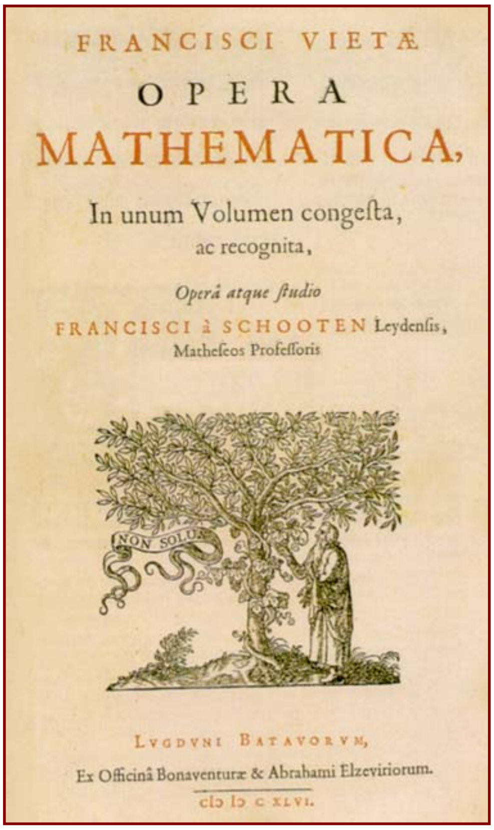
El *Arte Analítica* de Vieta perfecciona considerablemente el Álgebra sincopada de Diofanto y de los matemáticos árabes y renacentistas, e inicia el cálculo literal del Álgebra simbólica mediante la introducción de los parámetros, lo que le permite obtener la solución general de las ecuaciones mediante fórmulas que expresan las incógnitas en función de los parámetros. Ya que los parámetros no permiten obtener un resultado numérico concreto tras las operaciones combinatorias que conducen a la resolución de una ecuación, sino una solución simbólica, Vieta trasciende la *Logistica numerosa* ordinaria, aplicada al cálculo con números, y alcanza la *Logistica speciosa* que tiene que ver con las especies, entendiendo por éstas cualquier tipo de magnitud, en particular elementos geométricos como ángulos o longitudes. Esto quiere decir que las cantidades simbólicas del *Arte Analítica* al ser interpretadas como magnitudes geométricas y las operaciones simbólicas como procedimientos de construcción geométrica, permiten obtener la solución simbólica de las ecuaciones generales con significado geométrico, de modo que *el Arte Analítica* podía ser aplicado no sólo a los problemas numéricos sino también a problemas geométricos. De esta forma, el *Arte Analítica* de Vieta que tuvo su origen en el *Tesoro del Análisis* de Pappus, revierte sobre éste, de manera que su contenido es traducido al lenguaje simbólico del Arte, es decir, mediante el concurso del Algebra simbólica, Vieta puede reconstruir, en términos algebraicos, el Análisis Geométrico clásico, lo que prepara el terreno para el advenimiento de la Geometría Analítica de *La Introducción a los Lugares Planos y Sólidos* de Fermat .

Según palabras de Vieta:

> **«*La debilidad del antiguo Análisis residía en que se aplicaba sólo a los números, es decir, era una Logistica numerosa. Pero el Álgebra permite razonar sobre cualquier tipo de magnitud –número, segmento, ángulo, figura,...– de modo que lo que hay que hacer es considerar una Logistica speciosa, aplicable a cualquier especie de cantidad, que se podrá expresar de una manera genérica mediante letras, tanto si es una magnitud desconocida* [incógnita] *como conocida* [parámetro], *ya que no hago diferencia entre ellas. Es más, consideraré las magnitudes desconocidas como si se conocieran y operando según las reglas del Arte Analítica, las desconocidas con las conocidas, obtendré aquellas en función de éstas. He aquí el fundamento de la obtención de soluciones generales de los problemas donde los antiguos sólo obtenían soluciones particulares.* »**

En su viajes profesionales a Bourdeaux, Fermat contactaba con los discípulos de Vieta que le proveían de su nueva Doctrina de las Ecuaciones –con incógnitas y variables–, todo un eficiente simbolismo algebraico que había convertido el Análisis Geométrico de los antiguos en Análisis Algebraico por la acción del Algebra Simbólica del *Arte Analítica* de Vieta. Al aplicar las teorías de Vieta a resolver los problemas de «*condiciones límites*» de Pappus, es decir, los antiguos problemas griegos de *Diorismos*, Fermat establece los fundamentos teóricos de su método de máximos y mínimos.

LAS FUENTES HISTÓRICAS DE LOS MÉTODOS DE FERMAT SOBRE MÁXIMOS Y MÍNIMOS Y TANGENTES.
LA *SYNCRISIS* DEL *ARTE ANALÍTICA* DE VIETA


FRANCISCI VIETÆ
OPERA
MATHEMATICA,
In unum Volumen congesta,
ac recognita,
Operâ atque studio
FRANCISCI à SCHOOTEN Leydensis,
Matheseos Professoris
LVGDVNI BATAVORVM,
Ex Officinâ Bonaventuræ & Abrahami Elzeviriorum.
cIↄ Iↄ c XLVI.

Portada de la primera edición de O*pera mathematica* de Vieta. Fue editada por Van Schooten –editor también de *La Geometría* de Descartes**, en Leyden, en 1646.**

Con su *Arte Analítica*, Vieta había ya establecido una conexión entre Álgebra y Geometría, al obtener las ecuaciones que corresponden a diversas construcciones geométricas, en el caso de problemas geométricos determinados, es decir manejando sólo ecuaciones determinadas, en las que la variable aunque es una incógnita, es una constante fija a encontrar. Fermat, en *La Introducción a los Lugares Planos y Sólidos* desarrolla esta idea para problemas geométricos indeterminados mediante la consideración de ecuaciones indeterminadas en variables continuas que representan segmentos geométricos.

Al aplicar el Análisis algebraico de Vieta a los problemas de lugares geométricos de Apolonio y Pappus, definidos, en un sistema de coordenadas, por una ecuación indeterminada en dos incógnitas, Fermat alumbra su Geometría Analítica, una poderosa herramienta de investigación, mediante la cual él mismo resolverá de forma prodigiosa, operativa y brillante, con elegancia, claridad, rapidez y plenitud heurística, numerosos problemas antiguos de lugares geométricos y otros nuevos sobre extremos, tangentes, cuadraturas y cubaturas que están en las raíces del cálculo diferencial e integral.

Tras la importante labor de recuperación de las obras griegas perdidas, sobre todo las que menciona Pappus en el *Tesoro del Análisis* del Libro VII de *La Colección Matemática*, Vieta se propone traducir el Análisis Geométrico de los griegos –redactado en un estilo sintético de exposición que ocultaba la forma en que los geómetras habían descubierto sus teoremas– en el nuevo lenguaje algorítmico del Álgebra que promociona la capacidad heurística del Análisis, y destila una especie de Análisis Algebraico. Pero el Álgebra que aplicada por Vieta está mucho más elaborada que la de los Cosistas italianos, porque empieza a trascender lo sincopado para alcanzar lo simbólico, de modo que tras la reforma de Vieta, el *Arte de la Cosa* de los algebristas italianos se convierte en la *Doctrina de las Ecuaciones* del *Arte Analítica*, que permite codificar en la Teoría Algebraica de Ecuaciones casi todo lo que los griegos habían realizado en Geometría. Además, el simbolismo literal de Vieta, permitía tratar los datos de los problema como parámetros, y por tanto darles un carácter general. De hecho, El objetivo de la obra de Vieta es romper con la particularidad en el estudio de los problemas. Hasta él, los procedimientos algebraicos eran explicados a partir de un ejemplo concreto. El *Arte Analítica* proveerá de los instrumentos para resolver con toda generalidad ya no problemas concretos –donde se recurre a felices trucos como hacía Diofanto o los algebristas italianos– sino clases de problemas, donde se emplea una forma de razonamiento a base de ideas generales y se fija la atención en la naturaleza de las cuestiones y en la estructura intrínseca de las ecuaciones que se derivan de ellas, para su aplicación a casos análogos.

El uso de parámetros en las ecuaciones propicia la búsqueda de las relaciones entre las raíces de una ecuación y sus parámetros coeficientes –*Syncrisis*–, o el estudio de la relación entre las raíces de ecuaciones que contienen los mismos términos pero con diferentes signos –*Anastrophe*–, que conduce a la reducción del grado de la ecuación.

En la *Syncrisis* y la *Anastrophe* de Vieta residen algunos de los fundamentos teóricos –puramente algebraicos– del método de Fermat de máximos y mínimos. En efecto, Fermat se encarga de perfeccionar y mejoras los procedimientos de Vieta de la *Syncrisis* y la *Anastrophe* y se le ocurre aplicarlos a resolver los antiguos problemas de «*condiciones límites*», es decir, los clásicos problemas griegos de *Diorismos* descritos por Pappus en *La Colección Matemática*

las fuentes del método de Fermat de máximos y mínimos son la *Doctrina de las Ecuaciones* del *Arte Analítica de* Vieta, aplicada a resolver los problemas de condiciones límites. Así lo atestigua el propio Fermat al comienzo de la *Investigación Analítica* (TH.OF.III.131):

> ***Estudiando el método de la "Syncrisis" y de la "Anastrophe" de Vieta,* [...] *se me ocurrió la derivación de un procedimiento para encontrar máximos y mínimos y para resolver así fácilmente todas las dificultades relativas a las «condiciones límites»* [...].**

Termina la *Investigación Analítica* resolviendo de forma brillante el famoso problema de Pappus de la Proposición VII.61 de *La Colección Matemática*. Para su resolución, Fermat no sigue el procedimiento de la *Syncrisis* perfeccionada, sino el de la forma original. Con este problema Fermat parece querer cerrar con broche de oro la *Investigación Analítica*, esperando mostrar la exitosa efectividad de su técnica en un problema clásico realmente complicado. Este problema tiene una importancia histórica decisiva, no sólo porque en el intento de resolverlo Fermat haya gestado sus métodos de Máximos y Mínimos, sino también porque la aplicabilidad del método a las proporciones puede haber abierto el camino a los métodos de Fermat para el trazado de las tangentes a las líneas curvas. Pero antes de adentrarse en este complejo entramado terminemos de cubrir el camino que va de la *Syncrisis* de la *Investigación Analítica* a la *adigualdad* del *Methodus*.

Como se ha mencionado reiteradamente, en el *Methodus* Fermat ofrece un simple algoritmo, un procedimiento operativo para calcular máximos y mínimos, que en la Historia de la Matemática se le conoce como el Método de Fermat para la obtención de máximos y mínimos, a pesar de que no es el único método de Fermat. La razón de esta denominación tiene su justificación en que el método de la *Syncrisis* lo utiliza exclusivamente en una sola memoria –en la *Investigación Analítica*–, mientras que aplica el algoritmo del *Methodus* en todas las demás, salvo en la Carta a Brûlart, donde expone su última versión.

A pesar de ello, en las líneas anteriores se ha intentado justificar la tesis de que a través del perfeccionamiento que Fermat llevó a cabo de la *Syncrisis* de Vieta, la forma algoritmica del *Methodus*, aunque cronológicamente es anterior deriva del método de la *Syncrisis* que Fermat plasmó en la *Investigación Analítica*. Pero esta interpretación tropieza con el serio bache de la *adigualdad* que es preciso superar.

En la aplicación del algoritmo del *Methodus* a cualquier problema, Fermat selecciona una incógnita a (párrafo 1), construye una expresión en términos de la incógnita a y los datos de la condición a ser maximizada o minimizada (párrafo 2). De esa expresión obtiene otra sustituyendo a+e por a (párrafo 3), haciendo las expresiones *adiguales* (párrafo 4). En concreto Fermat dice en el párrafo 4 del *Methodus* :

Se «*adigualará*» para hablar como Diofanto, las dos expresiones de la cantidad máxima o mínima

También en el M.2. (TH.OF.III.126), Fermat dice :

> «[...]. *Yo comparo* [las dos expresiones], *como si fueran iguales, aunque de hecho no lo sean. Es esta comparación lo que yo llamo* "*adigualdad*", *para hablar como Diofanto, pues se puede traducir así la palabra griega* "*parisòtes*" *en la que se basa*.»

Pero ¿Qué es la *adigualdad*?. A tenor de la práctica habitual de Fermat de ocultar los fundamentos de sus investigaciones, se podía interpretar la *adigualdad* como un serio obstáculo conceptual introducido deliberadamente, para disfrazar los fundamentos de su método. La *adigualdad* sustituye a lo que en el caso normal de *Syncrisis* sería el acto de igualar las dos expresiones de la izquierda de las dos ecuaciones correlativas que se derivan de la ecuación que expresa el problema general. Es decir en el primer ejemplo de extremo, la igualdad de las ecuaciones correlativas

$$\left.\begin{array}{r} ba-a^2=z \\ b(a+e)-(a+e)^2=z \\ z<\text{máx}(ba-a^2) \end{array}\right\} \text{ llevaría a la } \textit{adigualdad}: \ b(a+e)-(a+e)^2 \cong ba-a^2 .$$

Los pasos siguientes en el algoritmo son similares a los de la *Syncrisis* hasta que en el paso final (párrafo 7), al suprimir todos los términos que todavía contienen la e –es decir, al hacer la e igual a o– la *adigualdad* pasa a ser verdadera igualdad.

En la concepción original del método –la de la *Syncrisis*–, los términos a, e, z, de las ecuaciones correlativas son cantidades variables, interdependientes a través de la relación z=a·(a+e), que proporciona la propia *Syncrisis*. Solo después de la *Syncrisis*, cuando Fermat toma conciencia de la particular naturaleza de las raíces en el caso de valor extremo de z, a se convierte en una incógnita correspondiente al máximo de ba–a^2. En cambio en la forma algorítmica del *Methodus*, a representa esa incógnita desde el principio, lo que significa que la e deberá ser 0, si realmente hay sólo una *raíz*.

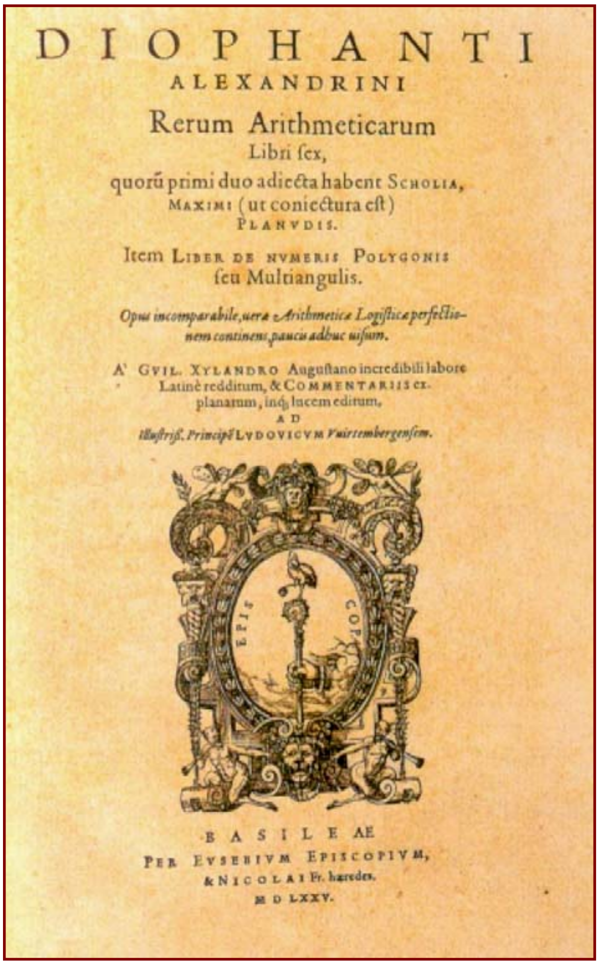
Fermat evita en el *Methodus* llamar la atención sobre la extraña, sospechosa y equívoca naturaleza de e, lo que le hubiera obligado a desentrañar el verdadero significado de la *adigualdad* y a justificar la corrección del método. En vez de hacer esto, Fermat se remite a la obra fundamental de una reconocida autoridad clásica, la Aritmética de Diofanto de Alejandría. Bajo el prestigio de Diofanto, Fermat intentará dar cobertura conceptual y prueba de corrección a su aplicación de la *adigualdad*.

La palabra «*adigualdad*» proviene del término latino «*adæqualitas*», que es la traducción latina que Xylander –que tradujo al latín y editó en Basilea en 1575 *La Aritmética* de Diofanto–, acuñó del término griego «*parisótes*» con el que Diofanto designaba una aproximación a un cierto número racional tan cercana como fuera posible, en el ámbito de los problemas de *La Aritmética*, es decir, de encontrar soluciones racionales de ecuaciones indeterminadas.

El gran historiador de la Matemática griega Sir Thomas Heath llama al procedimiento de Diofanto «*Método de aproximación por límites*» (*A History of Greek Mathematics*, volumen II, página 477, Dover Publications), traduciendo *adæqualitas* por «*tan próximo como sea posible*».

Esta técnica es utilizada por Diofanto en el Libro V de *La Aritmética*, problemas 9 y 11, siendo en este último donde aparece la palabra que Xylander tradujo por «*adæqualitas*». La técnica de Diofanto se basa en una oscura asunción: asume provisionalmente que unas ciertas fracciones son iguales, en orden a determinar su verdadera diferencia. Pero el procedimiento es por supuesto puramente finitista, sin utilizar ninguna consideración sobre límites ni ningún otro argumento infinitesimal, de ahí lo desafortunado del nombre que le dio Heath.

LA «*ADIGUALDAD*» EN *LA ARITMÉTICA* DE DIOFANTO Y EN FERMAT



DIOPHANTI
ALEXANDRINI
Rerum Arithmeticarum
Libri sex,
quorũ primi duo adiecta habent Scholia,
Maximi (ut coniectura est)
Planudis.
Item Liber de numeris Polygonis
seu Multiangulis.
Opus incomparabile, uerae Arithmeticae Logisticae perfectionem continens, paucis adhuc uisum.
A Guil. Xylandro Augustano incredibili labore Latinè redditum, & Commentariis explanatum, inq; lucem editum,
AD
Illustriss. Princip. Lvdovicvm Vuirtembergensem.
BASILEAE
Per Eusebium Episcopium, & Nicolai Fr. haeredes.
M D LXXV.

Portada del Libro I de *La Aritmética* de Diofanto (*Diophanti Alexandrini Rerum Arithmeticorum Libri Sex ... Item Liber de Numeris Polygonis seu Multiangulis*).

Edición de Xylander. (Basilea, 1575). Ejemplar de la Biblioteca de la Universidad de Sevilla.

A diferencia de las otras grandes obras de la Matemática griega, *La Aritmética* de Diofanto se tradujo del griego al latín muy tardíamente. Rafael Bombelli realizó la primera traducción parcial. La primera aparición en imprenta de los seis libros existentes de *La Aritmética* de Diofanto se debe a Wilhem Holzmann, conocido en la historiografía matemática por el sobrenombre de Xylander.

La palabra «*adigualdad*» deriva del término griego «*parisótes*» –traducido al latín como «*adæqualitas*» por Xylander–, con el que Diofanto designaba «una cierta aproximación tanto como fuera posible».

La «*adigualdad*», inicialmente extraída de Diofanto, es utilizada por Fermat como palabra clave de los verdaderos fundamentos de sus métodos de Máximos y Mínimos y de Tangentes. Fermat manejó una copia de la edición de la obra de Diofanto que en 1621 había republicado G.Bachet de Meziriac. En ella Fermat escribió sus famosas anotaciones al margen de sus resultados sobre *Teoría de Números*. La reedición de la obra de Diofanto que realizó en 1670 el hijo de Fermat, Samuel de Fermat, incluye estas notas de su padre, pero extrañamente esta marginalia no menciona en los alrededores de las correspondientes proposiciones de Diofanto, nada relacionado con el uso que Fermat hace de la «*adæqualitas*» en sus métodos de Máximos y Mínimos.

Como se aprecia en las memorias de Fermat sobre las Tangentes, que van apareciendo en el curso de la polémica con Descartes, el término diofantino «*adigualdad*» va a sufrir una metamorfosis, en una lenta transición desde ser una simple máscara para ocultar las raíces del método, a ser un instrumento para expresar la idea de «*aproximadamente igual*» o «*igualdad en el caso límite*», allanando el camino hacia la rectificación y la cuadratura.

Fermat recoge la idea de la falsa asunción y la aplica en su técnica. En efecto dando vueltas alrededor del razonamiento de Diofanto, Fermat asume por el momento que en el máximo las dos raíces son distintas, en orden a determinar las condiciones bajo las cuales serían iguales. Utilizando la forma enmendada de la *Syncrisis* y considerando de momento que las raíces son distintas, Fermat *adiguala* los lados izquierdos de las ecuaciones correlativas, *adigualdad* que convierte en igualdad al tomar e=o, es decir, al considerar la naturaleza real del valor extremo.

La introducción del término de Diofanto, parece permitirle a Fermat obviar la justificación del algoritmo del *Methodus* y de paso ocultar los fundamentos de su método bajo el prestigio de un eximio matemático griego. Pero la forma que tiene Fermat de manejar la *adigualdad*, propicia que se haga una lectura de la misma en términos de pseudo–igualdad, cuasi–igualdad o igualdad en el caso límite. Ello supone interpretar la naturaleza de e como «*incremento*» o variación. Ambos hechos llevan a las erróneas exégesis de los métodos de Fermat de Máximos y Mínimos en términos de consideraciones infinitesimales, que sitúan a Fermat en la Historia de la Matemática como el verdadero descubridor del Cálculo Diferencial. Esto suele contemplarse en las historias generales de la Matemáticas, que por su contenido, esencia y objetivos, no pueden pararse a profundizar excesivamente en el pensamiento de los creadores, de modo que una descripción superficial puede ser una simple interpretación, y como tal en algún caso no muy ajustada al pensamiento original, sobre todo si se realiza en un lenguaje demasiado actual, que anacrónicamente moderniza al autor. A título de ejemplo transcribimos algunos párrafos de algunos manuales bien conocidos de Historia de las Matemáticas.

En la *Historia de la Matemática* de J.Rey Pastor yJ.Babini, páginas 225–226 (Espasa–Calpe 1951), leemos:

> [...] *El método para hallar máximos y mínimos establecido por Fermat, expresado en lenguaje moderno, consiste en calcular la función incrementada, restarle la función, dividir por el incremento de la variable y eliminar todos los términos afectados por el incremento de la variable; la expresión resultante igualada a cero da el valor de la variable que hace máxima o mínima la función*.

Fermat naturalmente no pensaba en funciones sino en cantidades. No se puede hablar de función hasta que de forma muy incipiente aparece en el método de las Tangentes (con motivo del desarrollo de la Geometría Analítica) algo asimilable al concepto de función, como es la llamada *propiedad específica* de la curva.

En la *Historia de la Matemáticas* de J.P.Colette, tomo II, página 29, (Siglo XXI, 1985), se dice:

> «*Es importante señalar que este método algorítmico es equivalente a calcular*
>
> $$\lim_{e\to 0}\left[\frac{f(x+e)-f(x)}{e}\right]$$
>
> *aunque Fermat no poseía el concepto de límite. Sin embargo el cambio de variable de* a *a* a+e, *y los valores próximos utilizados por Fermat constituyen la esencia del análisis infinitesimal*.»

Pero en ningún texto de Fermat aparece la e como variable que tiende a cero, ni siquiera requiere explícitamente que la e deba ser *pequeña*, en concreto en la aplicación del método a las tangentes –por ejemplo en la tangente a la elipse (TO.OF.III.129)–, Fermat dice literalmente que toma la e *ad libitum*.

De forma similar se pronuncia Carl B.Boyer en su magnífica obra enciclopédica *Historia de la Matemática* (Alianza Universidad Textos, Madrid 1986), donde en la página 440 podemos leer:

[...]. *Para curvas polinómicas de la forma* y=f(x) *Fermat descubrió un método muy ingenioso para hallar los puntos en los que la función toma un valor máximo o mínimo. Fermat comparaba el valor de* f(x) *en un cierto punto con el valor* f(x+e) *en un punto próximo; en general estos dos valores serán claramente distintos, pero en una "cumbre" o en "el fondo de un valle" de una curva lisa, la diferencia será casi imperceptible. Por lo tanto, para hallar los puntos que corresponden a los valores máximos y mínimos de la función, Fermat iguala* f(x) *a* f(x+e*), teniendo en cuenta que estos valores aunque no son exactamente iguales, son "casi iguales". Cuanto más pequeño sea el intervalo entre los dos puntos, más cerca estará dicha psedo–igualdad de ser una verdadera ecuación; así pues Fermat, después de dividir todo por e, hace* e=0. *El resultado le permite calcular las abscisas de los puntos máximos y mínimos de la función polinómica. Aquí podemos ver ya en esencia el proceso que ahora llamamos de diferenciación, pues el método de Fermat es equivalente a calcular*

$$\lim_{e \to 0} \left[\frac{f(x+e)-f(x)}{e} \right]$$

e igualar este límite a cero. Resulta completamente justo, por lo tanto, reconocer la razón que asistía a Laplace al aclamar a Fermat como el verdadero descubridor del Cálculo Diferencial, así como co–descubridor de la Geometría Analítica. Obviamente Fermat no disponía del concepto de límite, pero salvo esto, su método para determinar máximos y mínimos sigue un camino completamente paralelo al que podemos ver hoy en los libros de Cálculo, excepto en la mínima diferencia de que hoy se suele utilizar el símbolo h *o* x, *en vez de la* e *de Fermat para el incremento de la variable. El procedimiento de Fermat, que consiste en cambiar ligeramente el valor de la variable para considerar valores próximos a uno dado, ha constituido desde entonces la verdadera esencia del análisis infinitesimal.*

En este pasaje de C.B.Boyer, así como en otro similar de su obra *The History of the Calculus and its conceptual development* (Dover, New York, 1959, página 156), parece realizarse una interpretación del método de Fermat en términos infinitesimales, consecuencia de una confusa traducción de la notación de Fermat al lenguaje actual.

Nosotros manejamos dos tipos de variables, las cartesianas x,y, que son variables finitas en el conjunto de los números reales y las variables infinitesimales e,h o Δx, que varían en un entorno de cero. Pero Fermat que siguió siempre fiel a Vieta en su notación, no manejó en sus métodos de Máximos y Mínimos y de Tangentes, más variables que a y e, que jugando ambas el mismo papel de variables algebraicas finitas, deben ser traducidas por nuestras variables x,y, al pasar al lenguaje cartesiano. Sin embargo esta traducción no es completada por algunos historiadores, de modo que a la a se le llama x, pero a la e se le sigue llamando e, o peor aún se le traduce por h o Δx. Esto conduce a afirmaciones ligeras como, la del final del párrafo de C.B.Boyer :

[...] *su método de máximos y mínimos se asemeja al usado en el Cálculo actualmente, excepto que ahora se acostumbra a utilizar el símbolo* h o Δx, *en lugar de la* e *de Fermat*, [...].

Pero obviamente las diferencias entre los métodos de Fermat y los del Cálculo Diferencial moderno van mucho más allá de la distinción entre los caracteres tipográficos. La propia notación de Fermat muestra que el «*incremento*» e no se concibe como infinitesimal, al no fijar atención alguna al tamaño del intervalo en el que se mueve la cantidad e.

Tanto Newton como Leibniz, verdaderos artífices del Cálculo Infinitesimal, cuidaron bien de señalar a través de la notación, la diferencia esencial entre las variables finitas y los incrementos infinitesimales. La notación de Newton fue en sus orígenes x o y, y después x, öx, respectivamente, mientras Leibniz crea de forma genial una notación identificada con los propios conceptos y significativamente definitiva, utilizando al principio x, x/d, y posteriormente x, dx (F.Cajory, *Leibniz, the master–builder of Mathematical Notations*, Revista *ISIS*, 7, 1925, páginas 412–429).

Los párrafos aludidos de los historiadores J.Rey Pastor, J.P.Colette y C.B.Boyer, son ejemplares botones de muestra de como se interpretan los métodos de Fermat. Cierto que puntualizan que Fermat no poseía el concepto de límite, pero más o menos subrepticiamente realizan una descripción en términos infinitesimales, en la línea de la idea de Nicolas de Oresme, recogida por J.Kepler en su obra *Nova stereometria doliorum vinariorum* acerca de que:

> «*Cerca de un máximo, los incrementos son al principio imperceptibles.*»

El editor de las *Oevres de Fermat* (OF), Paul Tannery, piensa sin embargo que Fermat no pudo apropiarse de la idea de Oresme y Kepler, porque es muy probable que no dispusiera de sus trabajos.

Además de multitud de razones proporcionadas por el análisis de la *Investigación Analítica*, hay dos hechos esenciales en el algoritmo del *Methodus* que desmienten las anacrónicas interpretaciones de los modernizadores de Fermat. Uno es el reiteradamente aludido carácter del «*incremento*» e, como variable algebraica finita y el otro es la posible división por potencias de e, que permite el algoritmo.

En efecto, en el párrafo 6 del *Methodus* Fermat dice :

> «*Se dividirán todos los términos por* e *o alguna potencia superior de* e*, de modo que desaparecerá la* e*, al menos de uno de los términos de uno cualquiera de los miembros.*»

También en el M.2 (TO.OF.III.126–127), Fermat dice :

> [...]. *Dividamos todos los términos por* e. [...]. *Después de esta división, si todos los términos pueden ser todavía divididos por* e, *es necesario reiterar la división, hasta que se tenga un término que no se preste a esta división por* e, o *para emplear el lenguaje de Vieta, que no se vea afectado por* e, [...].»

El poder dividir por potencias superiores de e, no se ajusta al algoritmo moderno del cálculo de la derivada. Aunque en los problemas que trata Fermat, la condición de la reiterada división por e es innecesaria, como el método deriva de la Teoría de Ecuaciones, Fermat aunque no lo haya experimentado, puede imaginar casos en los que las expresiones *adigualadas* contengan potencias superiores de e en todos sus términos. En tal caso la *Syncrisis* como método algebraico finito que es, permitiría la división reiterada por e, a fin de liberar algún término de la e.

El método de *Syncrisis* tan simple y operativo, le proporcionó a Fermat un poderoso instrumento para la resolución de los problemas de *Diorismos* y extremos. Pero su inveterada manía de ocultar los fundamentos demostrativos de sus métodos, y en el caso de verse forzado a hacer públicas sus investigaciones, revelar lo imprescindible, explica la forma vaga, escueta e imprecisa de la descripción de su regla en el *Methodus*, que dejó perplejos a sus contemporáneos y que ha confundido a muchos historiadores, sobre las cuestiones de las raíces del algoritmo y su presunto carácter precursivo del Cálculo Diferencial moderno. Un análisis exhaustivo de la *Investigación Analítica* y del *Methodus* y sobre todo un estudio comparado de ambas memorias, nos ha permitido establecer que las raíces de los métodos de Fermat sobre máximos y mínimos están en el dominio de lo finito–algebraico de la Teoría de Ecuaciones de Vieta, y aunque la idea del cambio de variable o tránsito desde a hasta a+e, mediante el «*incremento*» e, que es la esencia del Cálculo Diferencial, se destila del *Methodus*, la propia naturaleza de e como variable algebraica finita le impidió cruzar a Fermat en el tema de máximos y mínimos la barrera entre lo finito y lo infinitesimal.

Así pues, aunque cronológicamente el *Methodus* es anterior a la *Investigación Analítica*, parece haber pruebas suficientes e irrefutables para asegurar que los fundamentos del algoritmo del *Methodus*, hay que buscarlos en las investigaciones de Fermat de los últimos años de la década de 1620 a 1630, que Fermat plasmó en las cuidadosas reflexiones casi didácticas de la *Investigación Analítica*, para atemperar las increpaciones y los rumores difundidos por Descartes –en su correspondencia con el padre Mersenne, acerca de que los métodos de Fermat «*no tenían ninguna generalidad*», «*operaban a ciegas*»y «*funcionaban por azar*».

En efecto, los problemas que le había enviado Mersenne, provenientes de Dounot, le dieron la oportunidad de hacer esto, toda vez que su solución requería la aplicación del método de *Syncrisis* de Vieta. Los problemas conteniendo expresiones irracionales permitieron a Fermat mostrar a Mersenne y a otros, la efectividad de su ingeniosa enmienda de la *Syncrisis* de Vieta, y ya que estaba con el tema de la *Syncrisis*, Fermat debió aprovechar para plasmar en la *Investigación Analítica* los fundamentos demostrativos de sus métodos de Máximos y Mínimos, que él había derivado de la investigación sobre la *Syncrisis*. Parece avalar esta conjetura la forma como empieza la *Investigación Analítica* :

> «*Estudiando el método de la Syncrisis*, [...], *se me ocurrió la derivación de un procedimiento para encontrar máximos y mínimos*, [...].

Además, la conclusión de la *Investigación Analítica* indica el propósito para el que fue escrita esta memoria. En efecto, en el párrafo M, Fermat dice:

> *Es por consiguiente que afirmo hoy y siempre, con la misma confianza que antes, que la investigación de máximos y mínimos se reconduce a esta regla, única y general, cuyo feliz éxito será siempre legítimo y no debido al azar, como algunos han pensado* [Descartes].
>
> *Sea a una incógnita* (*ver página* ..., *línea* ... *hasta la última línea* [del *Methodus*]) ..., *su primera expresión*».

Esta regla *única y general* que Fermat describe, es una copia literal de la regla descrita en el *Methodus*. A esta reiteración de la memoria de 1636, Fermat añade un desafío (párrafo N) :

> «*Si todavía hay alguien que considera este método como debido a un feliz azar, puede intentar encontrar uno similar*.»

Así contestaba Fermat a los que difamaban su método, diciendo que operaba a ciegas y funcionaba por azar. Fermat había ido elaborando su método de forma sistemática, a partir de la Teoría de Ecuaciones de Vieta, fundamentándole, como hemos visto, en su propio perfeccionamiento o mejoramiento de la *Syncrisis* de Vieta, como muestra paso a paso la *Investigación Analítica*.

Concluyendo, a pesar del alto valor científico y precursivo del *Methodus*, en nuestra interpretación, no debemos exagerar, de forma anacrónica, el presunto contenido infinitesimal de la memoria, debido a que:

a) Fermat pensaba en cantidades no en funciones,

b) Fermat no concebía el «*incremento*» e como infinitesimal, ni siquiera como una magnitud pequeña; en más de una ocasión aplicando el método al trazado de tangentes, dirá que toma la e «*ad libitum*».

c) El método es puramente algebraico y no supone en principio ningún concepto de límite. Para Fermat la e no es que tienda a 0, sino que en realidad se hace 0.

d) Mediante la condición sexta de la regla, Fermat se permite el poder dividir por potencias superiores de e, lo que no ocurre en nuestra definición de derivada.

e) Fermat no hacía ninguna referencia a que el método daba sólo una condición suficiente.

f) En realidad los problemas de máximos y mínimos de Fermat son problemas de construcciones geométricas más que de optimización de cantidades.

FERMAT EN LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS

Puede decirse con certeza que la figura matemática de Fermat está en el origen de casi todos las disciplinas matemáticas que aparecen a lo largo del siglo XVII –el Cálculo Infinitesimal (en sus dos vertientes, diferencial e integral), la Geometría Analítica, El Cálculo de Probabilidades y la Teoría de Números–.

Toda persona de cultura media ha estudiado que Newton y Leibniz inventaron el Cálculo Infinitesimal, Descartes la Geometría Analítica y Pascal el Cálculo de Probabilidades. Fermat es el ascendiente directo de todos estos descubrimientos. ¿A qué se debe entonces que Fermat no ocupe en la historia de estas disciplinas científicas el lugar que le corresponde? La respuesta a esta pregunta es múltiple y puede ir desde el mas serio rigor histórico hasta la ironía. Fermat ha precedido en la raíz a Descartes, Pascal, Leibniz, Newton, etc. pero estos matemáticos llegaron mas lejos que él. Fermat dio el impulso inicial que es imprescindible para que toda doctrina científica empiece a prosperar, pero no forjó ninguna teoría en un cuerpo de doctrina coherente y acabado, plasmado en una obra cerrada y definitiva como por ejemplo hizo Descartes en *La Geometría*.

Roger Paintandre, Profesor de Matemáticas del Licée *PierreFermat* de Toulouse ironiza –en un discurso pronunciado el 22 de junio de 1957 con motivo de la inauguración de una exposición sobre Fermat– acerca del olvido en que ha caído la figura de Fermat :

> **«[...]** ***Fermat no ha conocido por parte del gran público el renombre de un Pascal, un Galileo o un Newton.*** **[...]** ***. Claro está que él no tuvo la precocidad de redescubrir a Euclides a los quince años,*** **[...]** ***. No tuvo la fortuna de ser perseguido por la Inquisición, apenas participó en la Fronda ni comulgó en exceso con el jansenismo. Y nunca soñó con recibir una manzana sobre la cabeza mientras contemplaba la luna. ¡Falta imperdonable!. Pero mas allá de estas anécdotas mas o menos vanas, Fermat fue uno de los grandes genios de Francia y uno de los matemáticos mas extraordinarios de todos los tiempos.*****»**

Ironías aparte, hay otras razones para comprender la oscuridad en la cayó Fermat. Tras la lectura de los trabajos de Fermat –en particular su correspondencia–, se puede afirmar que Fermat hacía Matemáticas, para saciar una irrefrenable afición y para satisfacer a sus amigos, por eso Fermat no redactó casi nada de sus descubrimientos y rehusó su publicación, de modo que lo esencial de su obra fue desarrollada en su asidua correspondencia con los científicos coetáneos y en los márgenes de sus libros. Es en sus brillantes epístolas, dando muestra de una inteligencia poderosamente sintética, donde inventa, explica, demuestra y se bate con una contundencia argumental impecable en la defensa de sus ideas matemáticas. Aquí reside el poderoso atractivo que tiene la figura de Fermat para el estudioso de la Historia de las Matemáticas.

A pesar de su grandeza como matemático quizá comparable a Arquímedes, Descartes, Newton, Euler o Gauss, Fermat es apenas conocido en los círculos de Filosofía e Historia de la Ciencia, quizá porque fue lo que se llama un matemático puro, quizá porque tras su desaparición, las disciplinas matemáticas que creó o que contribuyó decisivamente a desarrollar, dieron un paso de gigante oscureciendo la acción del pionero, quizá por las vicisitudes que sufrieron la publicación de sus obras. Cualquiera que sea la razón, Fermat es injustamente poco conocido. Por ejemplo, apenas es citado por Brunschvicg (editor de las obras de Pascal) en *Les étapes de la Philosophie Mathématique,* o por A.Koiré en *Estudios de Historia del pensamiento científico* – donde desarrolla capítulos dedicados a Tartaglia, Cavalieri, Pascal, ...–. Todavía sorprende más que no sea mencionado por sus compatriotas Voltaire en su *Diccionario filosófico* y D'Alembert en el *Discours Préliminaire de l'Encyclopédie* –donde se cita hasta trece veces a Descartes, una a Pascal y doce a Newton–.

Sin embargo en el ámbito del público matemático, la figura de Fermat es casi mítica por sus geniales contribuciones a la *Teoría de Números* –su nombre va asociado a uno de los mas famosos problemas recién resuelto de la Matemática–, pero en general se desconocen sus decisivas incursiones y sus magníficas aportaciones en prácticamente todos los demás campos de la Matemática, particularmente en el terreno del Cálculo Infinitesimal. No obstante, en los libros de Historia general del Cálculo Infinitesimal o de Historia general de las Matemáticas, se elogia enfáticamente a Fermat como el verdadero descubridor del Cálculo Diferencial y auténtico adelantado de los conceptos fundamentales del Cálculo Integral.

Si importantes son los descubrimiento matemáticos de Fermat, no es inferior su relevancia histórica desde el plano metodológico. Fermat parte de un minucioso conocimiento de los clásicos griegos y arranca con profundas raíces en el pasado clásico para crear un estilo matemático que conduce el programa analítico de Vieta hasta las últimas consecuencias. Con ello, Fermat (y Descartes aunque con estilo y método diferentes) realiza la transformación del modelo griego estrictamente geométrico e instaura un modelo algebraico completamente nuevo, destilando un Análisis Algebraico que se convierte en un lenguaje y un instrumento de trabajo e investigación común a todos los matemáticos, que sustituye las complejas y particulares construcciones geométricas euclídeas por la resolución general de los problemas mediante ecuaciones algebraicas y la demostración sintética –que oculta la vía del descubrimiento– por la derivación analítica. Fermat es uno de los principales artífices de la inflexión radical que presenta la Matemática del siglo XVII respecto a la clásica griega, donde el afán demostrativo euclídeo da paso a la heurística de la creatividad y el descubrimiento. Lo que importa a Fermat es la obtención de métodos que permitan resolver de forma directa y operativa los problemas y escribirlos formalmente siguiendo la línea de la propia investigación geométrica, es decir, métodos que al describir el proceso inventivo enseñen a descubrir y rompan la clásica dualidad helénica invención-demostración – «*ars inveniendi*» versus «*ars disserendi*» que tiene lugar en dos estadios de tiempo y espacio diferentes. Fermta pondera la heurística y se busca afanosamente la fusión, en un solo acto matemático, del descubrimiento y de la demostración. En todo este panorama juega un papel programático esencial la intervención del Álgebra como instrumento inherente a la Geometría Analítica que convierte a ésta en una poderosa herramienta de investigación y exploración científica, en el más útil instrumento para resolver con elegancia, rapidez y plenitud heurística las cuestiones geométricas.

Los métodos de «*adigualdad*» de Fermat sobre tangentes

El problema de las tangentes a las líneas curvas aparece, aparte de en multitud de epístolas explicatorias, en los siguientes trabajos o memorias de Fermat:

T1. En el *Methodus* de 1629–36 (TH.OF.III.122) Fermat describe la más temprana versión del método de las tangentes, obteniendo la tangente a la parábola, aduciendo que se reconduce al método de máximos y mínimos, que le precede en la memoria.

T2. En el M.2 (*Ad eamdem methodum*) de 1638 (TH.OF.III.129), tras resolver el problema de Pappus mediante el algoritmo del *Methodus*, Fermat dice aplicar el método a las tangentes y obtiene la tangente a la elipse.

T3. En el *Méthode de Maximis et Minimis expliquée et envoyée par M.Fermat à M.Descartes* (TH.OF.II.154), que le denominaremos el *Méthode expliquée*. Se trata de un documento, que acompaña a una carta enviada por Fermat a Mersenne en Junio de 1638. En esta memoria Fermat contesta a algunas objeciones de Descartes, e intenta justificar que efectivamente el método de tangentes deriva de su método de máximos y mínimos. En concreto demuestra para la parábola que la obtención de un mínimo proporciona la normal y de ésta obtiene la tangente. Además obtiene aplicando su método la tangente al «*Folium de Descartes*», problema a cuya resolución le había desafiado el filósofo.

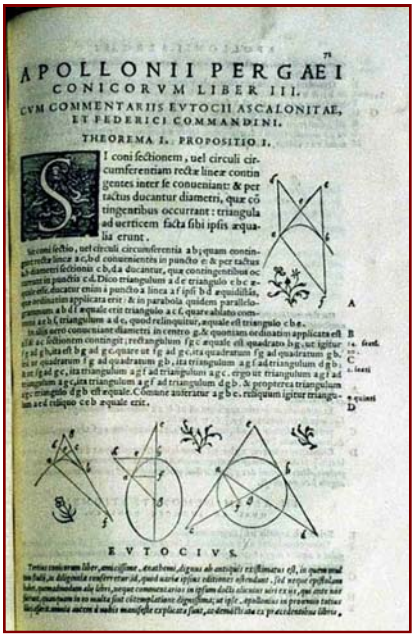
T4. En *Doctrinam Tangentium* (TH.OF.III,140), memoria que Mersenne hizo circular hacia octubre de 1640. Esta memoria es probable que fuera escrita en conjunción con la *Investigación Analítica*, cuando alrededor de 1640 Fermat se decidió a contestar a las acusaciones de Descartes sobre sus métodos de máximos y mínimos y tangentes e inició la revelación de los fundamentos de los mismos. Fermat realiza en pocas frases una síntesis de una magnífica investigación matemática sobre Geometría Analítica, extremos y tangentes. Esta memoria representa por su contenido la más sofisticada versión del método de las tangentes, obteniendo las tangentes a las curvas clásicas, cisoide, concoide, cuadratriz, así como la tangente a la curva más famosa del momento, la cicloide, donde se aprecia la potencia del método. Trata también un problema de inflexión y por la nueva visión de antiguos y modernos conceptos, así como por la constante evolución de la «*adigualdad*» hacia «*lo aproximadamente igual*», abre la puerta hacia la rectificación y la cuadratura.

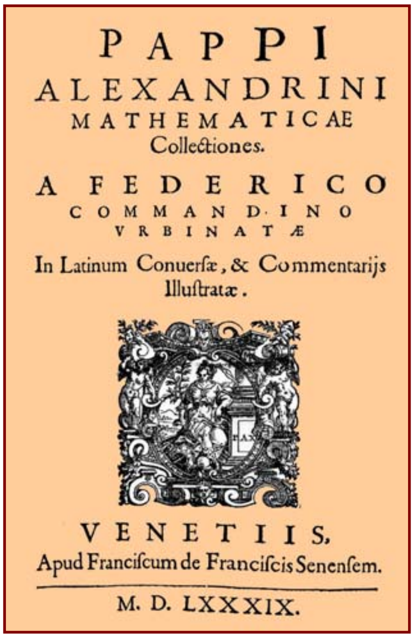
En la *Investigación Analítica* no aparece ningún problema de tangentes, pero como se ha dicho, el problema de Pappus que allí vuelve a resolver, puede haber sido, por la aplicación a las razones, la fuente de inspiración del método de las tangentes.

Sello emitido en 2001 con motivo del cuarto centenario del nacimiento de Fermat.

LA RESTAURACIÓN DE LA MATEMÁTICA GRIEGA Y SU INFLUENCIA SOBRE LAS INVESTIGACIONES DE FERMAT


DE GLI
ELEMENTI
D'EVCLIDE
LIBRI QVINDICI
CON GLI SCHOLII ANTICHI.
TRADOTTI PRIMA
IN LINGVA LATINA DA M.
FEDERICO COMMANDINO DA VRBINO,
& con Commentarij illustrati,
ET HORA D'ORDINE DELL'ISTESSO
TRASPORTATI NELLA NOSTRA VULGA-
RE, & da lui riueduti.
CON PRIVILEGIO.
IN VRBINO, APPRESSO
DOMENICO FRISOLINO.
M. D. LXXV.


APOLLONII PERGAEI
CONICORVM LIBER III.
CVM COMMENTARIIS EVTOCII ASCALONITAE,
ET FEDERICI COMMANDINI.
THEOREMA I. PROPOSITIO I.
EVTOCIVS.


PAPPI
ALEXANDRINI
MATHEMATICAE
Collectiones.
A FEDERICO
COMMANDINO
VRBINATAE
In Latinum Conuersæ, & Commentarijs
Illustratæ.
VENETIIS.
Apud Franciscum de Franciscis Senensem.
M. D. LXXXIX.

Ediciones de traducciones al latín de F. Commandino de las grandes obras de la Matemática griega:

1. ***Los Elementos* de Euclides. Urbino, 1575.**
2. ***Las Cónicas* de Apolonio. Bolonia, 1576. Todos los bibliófilos ensalzan la edición de Commandino; tanto Halley como Ver Eecke consideraron íntegramente esta versión para sus ediciones.**
3. ***La Colección Matemática* de Pappus. Es la primera impresión de la obra de Pappus, realizada en Venecia, en 1589.**

Estas ediciones están profusamente ilustradas tanto desde el punto de vista gráfico como tipográfico y se acompañan de magníficos comentarios de Commandino. Es muy posible que Fermat tuviera a su disposición ejemplares de estas ediciones de las grandes obras de la Matemática griega.

Diversas escuelas matemáticas renacentistas, en particular la *Escuela de los Analistas* de Vieta –en cuyas fuentes bebería Fermat– que participan de la tendencia humanista general en la Cultura hacia la contemplación, ponderación y recuperación del legado clásico, recogen y desarrollan la tradición instaurada por Maurólico y Commandino de traducir del griego al latín e incluso a las lenguas vernáculas las principales obras de la Matemática griega. La formación humanista, un soberbio dominio de las lenguas clásicas y un brillante talento matemático –conocimientos y facultades que posteriormente exhibiría Fermat–, permitió dilucidar infinidad de pasajes del griego original que multitud de simples copistas y amanuenses habían dejado oscuros o habían quedado borrosos por el paso del tiempo. Pero la labor de recuperación del mundo matemático clásico no se reducía a la simple traducción o aclaración de fragmentos dudosos y a su puesta en circulación para el público interesado, sino que iba más allá, al intentar la restauración del material perdido y la extensión de los métodos y resultados.

Fiel a esta tradición, Fermat debuta como matemático con la recuperación de una de las obras de Apolonio, *Los Lugares Planos*, germen de su Geometría Analítica.

Los Analistas y gran parte de los matemáticos posteriores, por la influencia de Vieta y Fermat, basan su programa de investigación en la restauración de la antigua tradición matemática griega basada en el *Método de Análisis,* de ahí el nombre de la escuela. La profunda admiración de los matemáticos de los siglos XVI y XVII hacia la Matemática clásica griega, no les hizo caer, como ocurrió con ciertos matemáticos humanistas anteriores, en la tendencia a respetar a ultranza la filosofía de la Matemática de Platón y Aristóteles. Al contrario, muchos matemáticos, en particular Descartes –en la regla IV de las *Reglas para la dirección del espíritu*–, lamentaron y criticaron que la rigidez del impecable estilo sintético, axiomático y apodíctico euclídeo impuesto por los epígonos de Platón, ocultara las vías heurísticas de los métodos de descubrimiento del Análisis Geométrico griego que afortunada y excepcionalmente Pappus relacionaba y desarrollaba en su *Colección Matemática*. Así que, tras la traducción respetuosa y fiel al original, generalmente en un refinado latín clásico, la actividad investigadora se dirige al comentario útil, a la exégesis y finalmente a la emulación, pero dando mayor importancia a la resolución de los problemas que al estilo de la presentación, partiendo de los modelos griegos como principio, pero conscientes de que el respeto absoluto al paradigma estilístico griego cercena considerablemente las posibilidades de expresión y generalización.

En este sentido, la importancia de la naciente Álgebra simbólica será decisiva. Por ejemplo, los Analistas comparten con los algebristas italianos la práctica del Álgebra como una poderosa técnica algorítmica para resolver problemas. Pero van mucho más allá porque, impelidos por la idea de crear un arte simbólico de razonamiento como instrumento fundamental de investigación matemática, llegan a recorrer gran parte del camino que media entre la incipiente *Álgebra sincopada* de Diofanto de Alejandría y el *Álgebra simbólica* de Descartes. En este ámbito juega un papel primordial precisamente la emergencia de la Geometría Analítica de Fermat de *La Introducción a los Lugares Planos y Sólidos*.

LA GEOMETRÍA ANALÍTICA DE LA *ISAGOGE DE* FERMAT

Dibujo a plumilla de la tradicional efigie de Fermat.

El origen de la Geometría Analítica de Fermat de la *Introduccción a los Lugares Planos y Sólidos* (*Ad Locos Planos et Solidos Isagoge*) tiene su germen en su profundo conocimiento de la Geometría de Apolonio y Pappus y del *Arte Analítica* de Vieta.

Fermat advirtió que las relaciones de áreas, expresadas según el Álgebra Geométrica de los griegos en forma de proporción, mediante las que Apolonio escribía las propiedades intrínsecas de las cónicas se podían traducir fácilmente al lenguaje de ecuaciones del *Álgebra simbólica* de Vieta. De esta forma el *symptoma* de la curva de *Las Cónicas* de Apolonio, forma retórica de expresión de la curva en el lenguaje pitagórico de la *Aplicación de las Áreas*, evolucionaba hacia la *ecuación característica* de la curva de Fermat.

Así pues, al vincular los trabajos matemáticos de Vieta y Apolonio, Fermat alumbra su Geometría Analítica que establece un efectivo puente entre la Geometría y el Álgebra que le permite asociar curvas y ecuaciones, a base de aplicar el Análisis algebraico de Vieta a los problemas de lugares geométricos de Apolonio y Pappus, definidos en un sistema de coordenadas, por una ecuación indeterminada en dos incógnitas. De este modo, Fermat resolverá los problemas del Análisis Geométrico de los antiguos mediante la mecánica operatoria del Álgebra simbólica.

Con su Geometría Analítica Fermat alcanza el máximo grado de eficacia en la aplicación a los problemas geométricos del antiguo método de *Análisis* –de ahí procede el adjetivo Analítica que acompaña al sustantivo Geometría–, siendo el Álgebra por su carácter algorítmico el principal instrumento de la aplicación de ese Análisis.

La Geometría Analítica dotada del simbolismo literal, con toda la potencia algorítmica, manipulación y simplificación que permite el automatismo operacional del cálculo algebraico, sustituye las ingeniosas construcciones geométricas de la rígida y retórica *Álgebra Geométrica* de los griegos por sistemáticas operaciones algebraicas que al fundir en un único acto intelectual el descubrimiento y la demostración –el *ars inveniendi* y el *ars disserendi*– convierten a la Geometría Analítica en una poderosa herramienta heurística de exploración e investigación geométricas, mediante la cual Fermat resolverá de forma prodigiosa y brillante, multitud de problemas, antiguos y nuevos, en particular numerosas cuestiones de lugares geométricos, máximos, mínimos y tangentes, cuadraturas y cubaturas, centros de gravedad y problemas de rectificación de curvas.

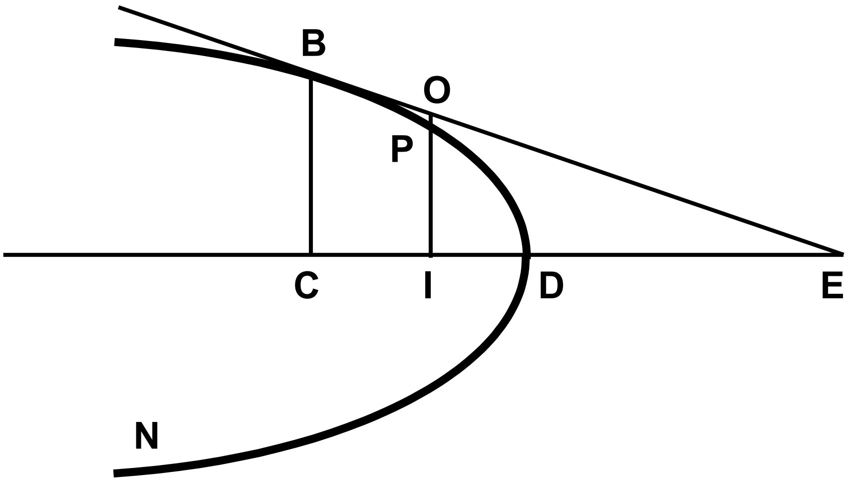
La Geometría Analítica ha dominado el pensamiento matemático y su enseñanza desde la época de Fermat hasta nuestros días. El empleo sistemático de las coordenadas tratadas con el cálculo algebraico, es un potente instrumento algorítmico de resolución de problemas geométricos, un método de un poder y una universalidad tan eficientes en la Matemática, que supera cualquier otro instrumento anterior, y más allá de la Matemática, la Geometría Analítica ha revolucionado, a través de las gráficas funcionales todas las ciencias relacionadas con el tiempo y el espacio.

La tangente a la parábola

Fermat utiliza, en la segunda parte del *Methodus*, el método de «*adigualdad*» para trazar la tangente a una parábola en un punto. Es la primera descripción que hace Fermat de su método de tangentes y manifiesta que el procedimiento es una aplicación de su método para los máximos y mínimos con estas palabras (TH.OF.III.122):

> «*Nosotros reconducimos al método precedente la invención de las tangentes en puntos dados de curvas cualesquiera*. [...].»

Fermat considera la parábola BDN con vértice C y diámetro DC, y se plantea trazar la tangente en un punto B de la misma. Sea ésta BE, que interseca al eje en el punto E.



Fermat continúa:

> «[...]. *Si se toma sobre la recta* BE *un punto cualquiera* O, *desde el que se traza la ordenada* OI, *al mismo tiempo que la ordenada* BC *desde el punto* B, *se tendrá*: $CD/DI > BC^2/OI^2$, *puesto que el punto* O *es exterior a la parábola*. [...].»

Hay en este párrafo dos elementos significativos. En primer lugar señalar que el punto O que Fermat toma sobre la tangente, puede ser cualquiera. Esta observación contradice, como ya vimos en los temas de máximos y mínimos, las interpretaciones de las construcciones de Fermat en términos de límites. Por otra parte, Fermat aplica implícitamente, en este párrafo, la propiedad de generación de las cónicas de Apolonio, en forma de proporción.

Siguiendo a Fermat, escojamos en el segmento de tangente BE un punto O cualquiera y tracemos la ordenada OI, así como la BC.

De la propiedad de la parábola tendremos, según Apolonio (*Las Cónicas*, I.11):

$$BC^2/PI^2 = CD/DI \ ,$$

Además, OI>PI, por tanto se verifica:

$$CD/DI > BC^2/OI^2 \ .$$

Ahora, de la semejanza de triángulos rectángulos (*Euclides*, VI.4), se tiene:

$$BC/OI = CE/IE \ (3) \ .$$

De las dos últimas relaciones deducimos finalmente:

$$CD/DI > CE^2/IE^2 \ .$$

Pongamos CD=d, CI=e. Hemos de determinar el segmento subtangente, CE=a.

A partir de la última desigualdad, se tiene:

$$\frac{d}{d-e} = \frac{a^2}{(a-e)^2} ,$$

de donde resulta:

$$d \cdot (a-e)^2 > a^2 \cdot (d-e) ,$$

y de aquí:

$$da^2 + de^2 - 2dae > da^2 - a^2e .$$

Ahora Fermat sustituye esta desigualdad por la«*adigualdad*»:

$$da^2 + de^2 - 2dae \cong da^2 - a^2e ,$$

y manifiesta:

«"*Adigualemos*" *según el método precedente; se tendrá eliminando términos comunes*:

$de^2 - 2dae \cong -a^2e$. »

Fermat continúa trasponiendo términos y dividiendo por e:

$$de + a^2 \cong 2da ,$$

ignora el término que todavía contiene la e y obtiene:

$$a^2 = 2da ,$$

de donde resulta finalmente:

$$a = 2d .$$

Fermat comenta el resultado:

«*Hemos probado de esta forma que* CE *es doble de* CD, *lo que es conforme a la verdad.*»

Y termina diciendo:

«*Este método nunca falla, y puede ser aplicado aun gran número de cuestiones muy hermosas; mediante él, he encontrado los centros de gravedad de figuras limitadas por líneas rectas y curvas, así como los de los sólidos y otras numerosas cosas que podremos tratar en otra parte si dispongo del tiempo para ello.*»

Si aplicamos el resultado de Fermat, en términos actuales, a la obtención de la ecuación de la tangente a la parábola $y^2=2px$, tendríamos:

Sea m la pendiente de la recta tangente en el punto B de coordenadas $B=(x_0,y_0)$, se obtiene:

$$m = BC/EC = y_0 / 2x_0 ,$$

de donde resulta para la ecuación de la tangente a la parábola en B:

$$y - y_0 = \frac{y_0}{2x_0} \cdot (x - x_0) .$$

Al hacer operaciones resulta:

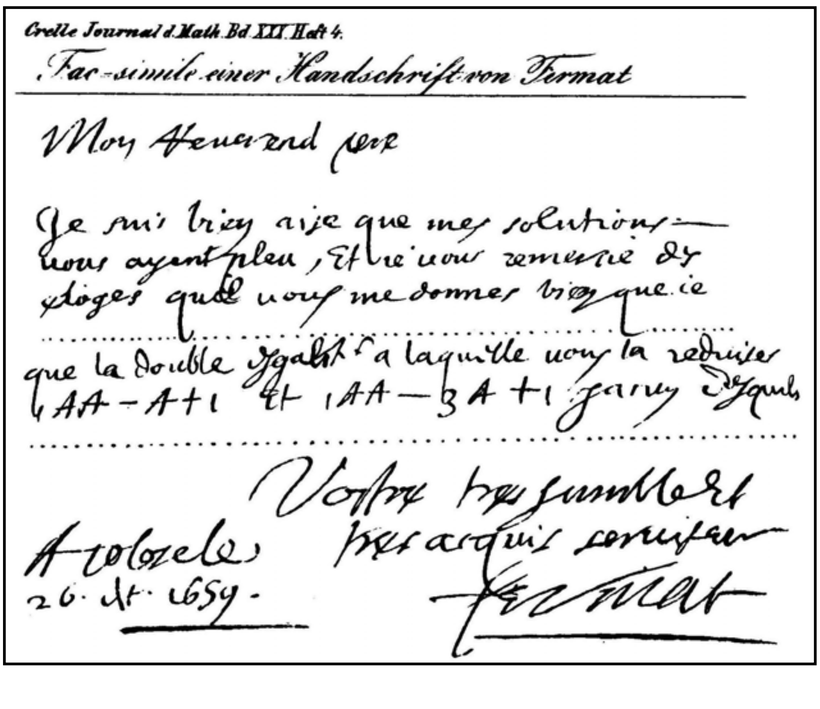
$$yy_0 = p(x+x_0) ,$$

ecuación habitual de la tangente a la parábola.

FERMAT, EL PRÍNCIPE DE LOS AFICIONADOS A LAS MATEMÁTICAS

Curiosa ilustración caricaturesca alusiva a la costumbre que tenía Fermat de reseñar sus descubrimientos en los márgenes de las obras de su pertenencia, que aparece en el artículo 15, sobre Teoría de Números, firmado por Paul S. Herwitz, de la obra coordinada por Morris Kline *Matemáticas en el mundo moderno* (Editorial Blume, Madrid, 1974).

A Fermat siempre le acompaña el calificativo de «*aficionado*» porque su profesión de jurista no estaba laboralmente muy próxima a la actividad de creación científica. Por la especial dedicación de Fermat a la investigación matemática y por la importancia capital de sus resultados justo es llamarle «*El Príncipe de los aficionados*» como hace E.T.Bell en *Les grands mathématiciens* (Payot, París, 1950).



Crelle Journal d. Math. Bd XXI Heft 4.

Fac-simile einer Handschrift von Fermat

Mon Reverend pere

Je suis bien aise que mes solutions vous ayent pleu, Et ie vous remercie des eloges que vous me donnes bien que ie

....

que la double egalité a laquelle vous la reduisez 1AA − A + 1 et 1AA − 3A + 1 jamais egaulx

....

Vostre tres humble et tres acquis serviteur

A Tolose 26 oct 1659.

Fermat

Facsímil de un carta autógrafa de Fermat al Padre Mersenne, publicada en el Diario de las Matemáticas de Crelle, con la intención de identificar la letra del eximio y célebre matemático, albergando la esperanza de facilitar el hallazgo a los eruditos de manuscritos perdidos de Fermat o notas en márgenes de libros.

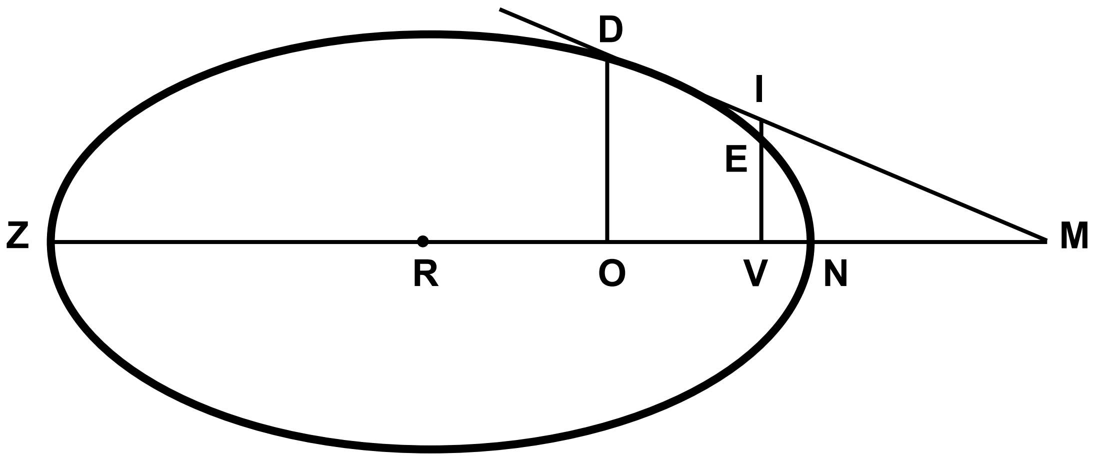
Es casi legendario el hecho de que Fermat no tenía cuadernillos de notas ni conservaba los apuntes manuscritos con sus brillantes consideraciones y sus excelentes descubrimientos matemáticos. Escribía sus observaciones en los márgenes de los libros de su magnífica biblioteca de obras clásicas de la Matemática griega.

La tangente a la elipse

La tangente a la elipse es tratada por Fermat en la memoria que hemos llamado M.2 (TO.OF.III.129), como una nueva aplicación de su método de *adigualdad* y como en el caso de la parábola, en el trazado de la tangente a la elipse, Fermat manifiesta que aplica su método de máximos y mínimos:

> «[...].*Para aplicar también este método a las tangentes, puedo proceder como sigue. Sea, por ejemplo la elipse* [...].»

Fermat considera la elipse ZDN de eje ZN y centro R, y se plantea trazar la tangente en un punto D de la misma. Sea ésta DM, que interseca al eje en el punto M. Tracemos la ordenada DO desde el punto D y pongamos, en notaciones algebraicas, OZ=b, ON=g. Hemos de determinar el segmento subtangente, OM=a.



Fermat toma, a continuación, un punto V cualquiera comprendido entre O y N:

> «[...]. *Puesto que* DM *es tangente a la elipse, si por un punto* V, *tomado* "*ad libitum*" *entre* O y N, [...]»,

y traza la ordenada IEV, paralela a DO, que corta a la tangente DM en el punto I, y a la elipse en el punto E.

Aplicando para la elipse, la propiedad de generación de las cónicas, en forma de proporción (*Las Cónicas* de Apolonio I.12), Fermat obtiene:

$$\frac{DO^2}{EV^2} = \frac{ZO \cdot ON}{ZV \cdot VN} \ .$$

De la semejanza de triángulos rectángulos resulta:

$$DO/IV = OM/VM \ .$$

Siendo DM tangente a la elipse, todos sus puntos excepto D, son exteriores a la elipse, por tanto IV>EV, lo que combinado con las igualdades anteriores permite escribir:

$$\frac{ZO \cdot ON}{ZV \cdot VN} > \frac{OM^2}{VM^2} \ .$$

Llamando OV=e, los segmentos ZV, VN y VM serán:

ZV=b+e, VN=g–e, VM=a–e ,

y la última desigualdad se expresará:

$$\frac{b \cdot g}{(b+e) \cdot (g-e)} > \frac{a^2}{(a-e)^2} \ .$$

Por consiguiente, se tiene:

$$b \cdot g \cdot (a-e)^2 > a^2 \cdot (b+e) \cdot (g-e) \ .$$

Ahora Fermat introduce la «*adigualdad*»:

> «[...]. *Es preciso por tanto, según mi método, comparar por "adigualdad", estos productos, eliminar lo que es común y dividir lo que queda por* e. [...].

Es decir, Fermat escribe:

$$b \cdot g \cdot (a-e)^2 \cong a^2 \cdot (b+e) \cdot (g-e) \ ,$$

que desarrollado es:

$$bga^2 + bge^2 - 2bgae \cong bga^2 - bea^2 + gea^2 - a^2e^2 \ .$$

Al eliminar términos comunes resulta:

$$bge - 2bga \cong -ba^2 + ga^2 - a^2e \ .$$

Suprimiendo términos donde todavía aparece la e se obtiene:

$$-2bga \cong -ba^2 + ga^2 \ .$$

Fermat alcanza, por fin, la solución. Aludiendo a la última *adigualdad*, escribe:

> «[...] *miembros que es preciso igualar, según el método. Trasponiendo como conviene; se tendrá*: ba–ga = 2bg. »

Es decir, según el resultado de Fermat, el segmento de subtangente a, sería igual a:

$$a = 2bg/(b-g) \ .$$

A continuación Fermat, para confirmar la validez de su solución, la compara con la solución de Apolonio (*Las Cónicas*, II.49):

> «[...]. *Se ve que esta solución es la misma que la de Apolonio, pues según mi construcción, para encontrar la tangente, es preciso hacer*:
>
> $$\frac{b-g}{g} = \frac{2b}{a} \ , \text{ o } \frac{ZO-ON}{ON} = \frac{2ZO}{OM} \ ,$$
>
> *mientras que según la de Apolonio, es preciso hacer:*
>
> $$\frac{ZO}{ON} = \frac{ZM}{MN},$$
>
> *y está claro que estas dos construcciones conducen a lo mismo.*»

Efectivamente, los resultados de Fermat y de Apolonio son equivalentes, como se puede comprobar fácilmente. En efecto:

$$\frac{ZO}{ON} = \frac{ZM}{MN} = \frac{ZO+OM}{MN} = \frac{2ZO+OM}{OM} = \frac{2ZO}{OM} + \frac{OM}{OM} = \frac{2ZO}{OM} + \frac{ON}{ON},$$

de donde se deduce:

$$\frac{ZO-ON}{ON}=\frac{2ZO}{OM}.$$

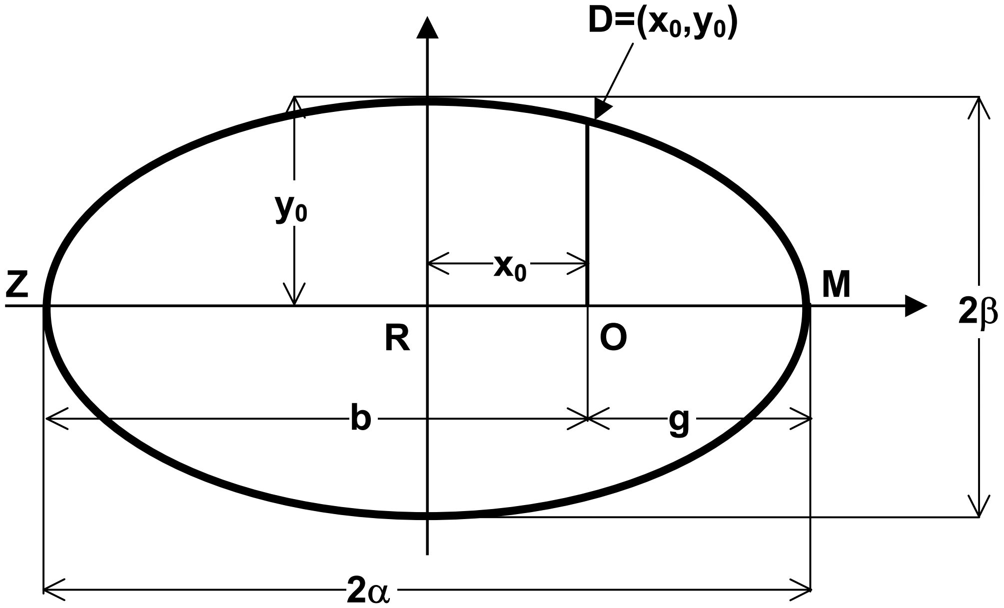
Fermat termina diciendo:

> «*Podría añadir otros numerosos ejemplos, tanto del primer caso de mi método como del segundo, pero los descritos son suficientes y prueban de sobra que el método es general y no falla jamás*.»

Apliquemos el resultado de Fermat, en términos actuales, ala obtención de la ecuación de la tangente a la elipse de semiejes α β:

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$$

en el punto D de coordenadas $D=(x_0,y_0)$.



Se tendrá: $b = \alpha + x_0$, $g = \beta - x_0$,

y si m es la pendiente de la recta tangente en el punto D, se obtiene:

$$\frac{-y_0}{a}=\frac{-y_0}{\frac{2bg}{b-g}}=\frac{-y_0}{\frac{2\left(\alpha^2-x_0^2\right)}{2x_0}}=\frac{-x_0y_0}{\frac{\alpha^2-x_0^2}{\beta^2}}=\frac{-x_0\cdot y_0}{\alpha^2\cdot y_0^2}=\frac{-\beta^2\cdot x_0}{\alpha^2\cdot y_0},$$

de donde resulta para la ecuación de la tangente en D:

$$y-y_0=\left(\frac{-\beta^2\cdot x_0}{\alpha^2\cdot y_0}\right)\cdot(x-x_0)\ .$$

Al hacer operaciones resulta:

$$\frac{xx_0}{\alpha^2}+\frac{yy_0}{\beta^2}=1,$$

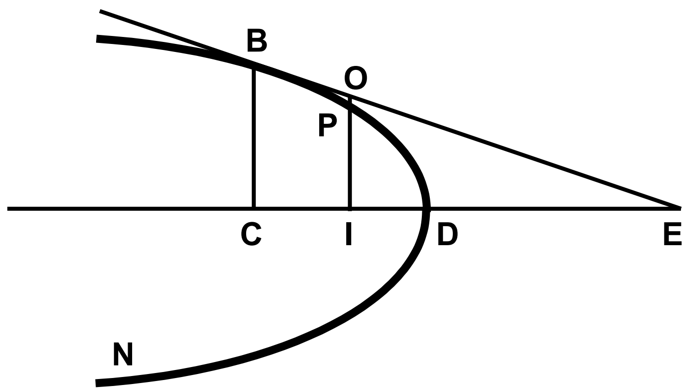
ecuación habitual de la tangente a la elipse.

El método de tangentes como derivación del método de extremos

Se puede comprobar fácilmente que los métodos de«*adigualdad*» para las tangentes funcionan para un amplio conjunto de curvas –las curvas algebraicas–, y así se ha hecho más arriba para la parábola y la elipse. Realmente como en el caso de extremos, el método de tangentes se puede traducir o interpretar en el lenguaje del Cálculo Diferencial moderno –y así se hará más adelante siguiendo indicaciones de la propia correspondencia de Fermat–. Pero mucho más interesante históricamente es la cuestión de estudiar, por qué Fermat estaba convencido que el método funcionaba e investigar como se le ocurrió.

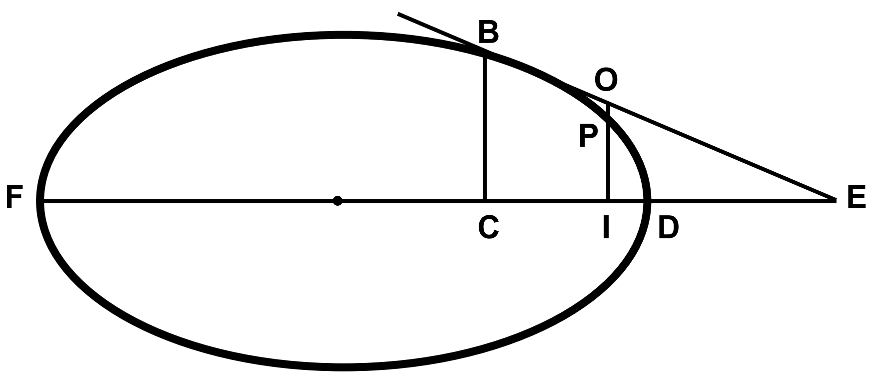
La exitosa resolución del problema de la Proposición VII.61,de *La Colección Matemática* de Pappus, pudo haber encendido en Fermat la crucial llama intuitiva, pues en este problema aplica su método de «*adigualdad*» a proporciones, en igual forma que lo aplicaba a cantidades; y hay que considerar que hasta los avances que en su propio pensamiento sobre extremos y tangentes, provocó su propia Geometría Analítica y su lectura de *La Geometría* de Descartes, las curvas eran definidas mediante proporciones. Por ejemplo, la parábola se definía mediante la expresión griega clásica, según la cual (*Las Cónicas* de Apolonio, I.11):

> «*Una parábola es una curva para la que dados dos puntos cualesquiera* B,P, *de la misma se tiene*: $BC^2/PI^2 = CD/ID$ » .



Es decir, $BC^2/CD = PI^2/ID$, lo que dice que para cada punto B sobre la parábola, la cantidad BC^2/CD es una constante llamada el «*latus rectum*».

Análogamente se definía una elipse en la forma (*Las Cónicas* de Apolonio, I.13):



> «U*na elipse es una curva para la que dados dos puntos* B,P, *de la misma se tiene*:
>
> $$\frac{BC^2}{PI^2} = \frac{CD \cdot CF}{ID \cdot IF} \text{ .»}$$

Estas expresiones de las cónicas en forma de proporción es lo que se llamaba el «*symptôma*» de Apolonio. Antes de su invención de una Geometría Analítica en su *Ad locos planos et solidos isagoge –Introducción a los lugares planos y sólidos*–, esta forma como proporción, era el único medio que tenía Fermat para expresar las propiedades de definición de las curvas. Pero esa invención tiene lugar hacia 1635, varios años después de la fecha que Fermat asigna a la invención del método de tangentes. Algunas interpretaciones del método de tangentes de Fermat pasan por alto este detalle, que según veremos es crucial para entender el futuro desarrollo del método. Cuando la necesidad de fundamentar sus desarrollos le aprieta, en el curso de su agria disputa con Descartes, Fermat no duda en utilizar las nuevas posibilidades de expresión de curvas, en términos de ecuaciones, que le brinda la nueva Geometría Analítica. La aparición de ésta, altera radicalmente los conceptos matemáticos sobre curvas, y rápidamente hace crecer el número de curvas disponibles para la investigación matemática. Solo cuando a toda curva –de las que nosotros llamamos algebraicas– se le puede asignar una ecuación, que le corresponde unívocamente y que implícitamente contiene todas sus propiedades, tiene interés generalizar, en el más amplio sentido, todo método algebraico de tangentes. Por consiguiente, la discusión del método de tangentes de Fermat, posterior a 1635–36 ofrecerá poca ayuda al historiador que busque los fundamentos de su método original.

Naturalmente Fermat utilizó los nuevos recursos para realizar el tránsito de la expresión antigua de las curvas en forma de proporción, a la expresión en forma de ecuación, pero al ser él mismo el artífice de los nuevos recursos geométrico–algebraicos, pudo quizá no haber reparado en el profundo cambio conceptual que se acarreaba. Así pues al intentar reconstruir una generalización del método original de tangentes, que permita explicar la confianza ilimitada que Fermat tenía en su método, se debe tener presente estas reflexiones, sobre la situación anterior a los revolucionarios cambios que produjo el advenimiento de la Geometría Analítica.

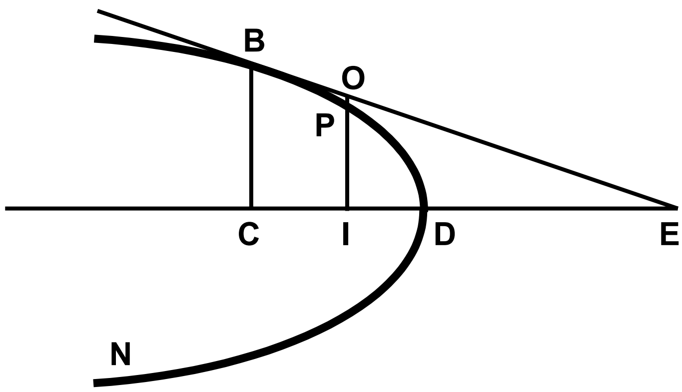
Procedamos a intentar una reconstrucción y tras ella una generalización del método de tangentes de Fermat. Para ello tengamos presente las cuestiones claves que presidirían el ulterior desarrollo de Fermat del método de las tangentes y sobre todo la ardua polémica con Descartes, que serían:

a. ¿Puede encontrarse un valor extremo relacionado con el trazado de una tangente?
b. Que cantidad extremal se somete al método de máximos y mínimos en el trazado de una tangente?
c. ¿En qué sentido el método de tangentes deriva del método de máximos y mínimos?

Sigamos la descripción de Fermat del método de las tangentes en la parábola:

Con referencia nuevamente a la figura de la parábola, tenemos que para todo punto O distinto de B sobre la tangente BE, la razón OI^2/DI, es mayor que la razón BC^2/CD, ya que para P en la parábola se tiene:

$$BC^2/CD = PI^2/DI \;\; y \;\; OI>PI .$$



Por tanto la razón BC^2/CD, es en cierto sentido un valor mínimo para la cantidad en forma de razón OI^2/DI, variando O sobre la tangente, es decir:

$$\frac{BC^2}{CD} = \text{mínimo}\left\{\frac{OI^2}{DI},\ I \in \text{tangente BE}\right\}.$$

Tratemos tal mínimo mediante el método de máximos y mínimos.

La determinación de la tangente requiere encontrar la longitud de la subtangente, CE=a.

Sea CD=d, CI=e, entonces IE=a–e, DI=d–e.

Siendo el triángulo BCE fijo, también lo es la razón BC/a=m, por tanto de la consideración del triángulo se tiene: BC=am, de donde resulta para el «*symptôma*» de la parábola:

$$\frac{BC^2}{CD} = \frac{m^2a^2}{d}$$

De la semejanza de los triángulos rectángulos BCE, OIE, se obtiene: OI=m·IE, y de aquí:

$$\frac{OI^2}{DI} = \frac{m^2 \cdot (a\text{-}e)^2}{d\text{-}e}$$

Al cambiar a por a–e, en la expresión que presuntamente se hace mínima BC^2/CD, cambiará d en d–e, es decir al aplicar el punto 3 del *Methodus*, tendríamos la expresión $m^2 \cdot (a–e)/(d–e)$, que según acabamos de ver es igual a OI^2/DI.

Según los preceptos del método de máximos y mínimos, Fermat «*adigualaría*» las dos expresiones: m^2a^2/d , $m^2 \cdot (a–e)^2/(d–e)$:

$$\frac{m^2a^2}{d} \cong \frac{m^2 \cdot (a-e)^2}{d-e}$$

es decir «*adigualaría*»: $\frac{BC^2}{CD} = \frac{OI^2}{DI}$,

no porque la e sea «*pequeña*», (a lo que no hace alusión, pues toma un punto O cualquiera sobre la tangente BE, es decir, toma e «*ad libitum*»), sino como aplicación directa de la doctrina del *Methodus*.

De la adigualdad considerada resulta:

$$a^2 \cdot (d–e) \cong d \cdot (a–e)^2 ,$$

que es precisamente la «*adigualdad*» a la que llega Fermat, como hemos visto anteriormente. El resto de la derivación hasta llegar al valor del segmento de subtangente CE=a, seguiría los mandatos del *Methodus* paso a paso.

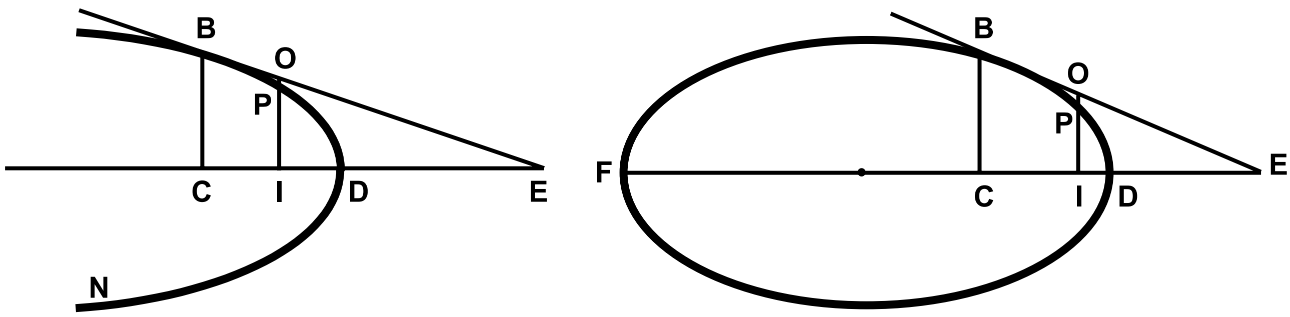
Tendríamos de esta manera una plausible e hipotética reconstrucción del camino original que media entre el método de máximos y mínimos y el método de tangentes, a saber tratando la razón BC^2/CD como un mínimo. Sin embargo ni en el *Methodus*, ni en escritos posteriores de Fermat, hay ninguna indicación de que ésta fuera la forma en que él relacionaba ambos métodos, derivando uno a partir del otro.

Tras la reconstrucción realizada y en orden a seguir intentando descubrir por qué Fermat afirma categóricamente que su método de tangentes deriva de su método de máximos y mínimos, ensayemos una generalización del método de tangentes, más allá de su particular aplicación a la parábola o la elipse.

Expresemos la razón definitoria de la curva –el «*symptôma*»– en la forma:

$\frac{f(BC)}{h(CD)} = k$, siendo k alguna constante de proporcionalidad.

Por ejemplo, para la parábola y la elipse tendríamos:



a) Parábola: $y^2 = 2px$; $\dfrac{f(BC)}{h(CD)} = \dfrac{BC^2}{CD} = 2p.$

b) Elipse: $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$; $\dfrac{f(BC)}{h(CD)} = \dfrac{BC^2}{CD \cdot CF} = \dfrac{\beta^2}{\alpha^2}$.

Habría que observar que la expresión del «*symptôma*» en la forma:

$$\frac{f(BC)}{h(CD)} = k \ ,$$

no es aplicable a todas las curvas planas, es decir no toda curva plana es expresable en forma de variables separadas. No obstante todas las curvas manejadas por Fermat antes de 1629 y algunas posteriormente, en particular las secciones cónicas, admiten esta expresión. Para curvas trascendentes, Fermat generalizará, como veremos más adelante, su método de tangentes, en la memoria *Doctrina Tangentium* mediante una hábil extensión de la «*adigualdad*».

Con base en $\dfrac{f(BC)}{h(CD)} = k$, bastaría considerar el triángulo BCE y mediante BC=ma, trabajar a partir de la «*adigualdad*»:

$$\frac{f(MA)}{h(CD)} = \frac{f\left(m(a-e)\right)}{h(CD-e)} \ ,$$

para determinar la tangente de toda curva, cuyo «*symptôma*» o proporción definitoria se conociera.

Por ejemplo, en el caso de la elipse, llamando CD=g, CF=b, tendríamos:

$$\frac{m^2a^2}{bg} = \frac{m^2 \cdot (a-e)^2}{(g-e) \cdot (b+e)} \ ,$$

o equivalentemente:

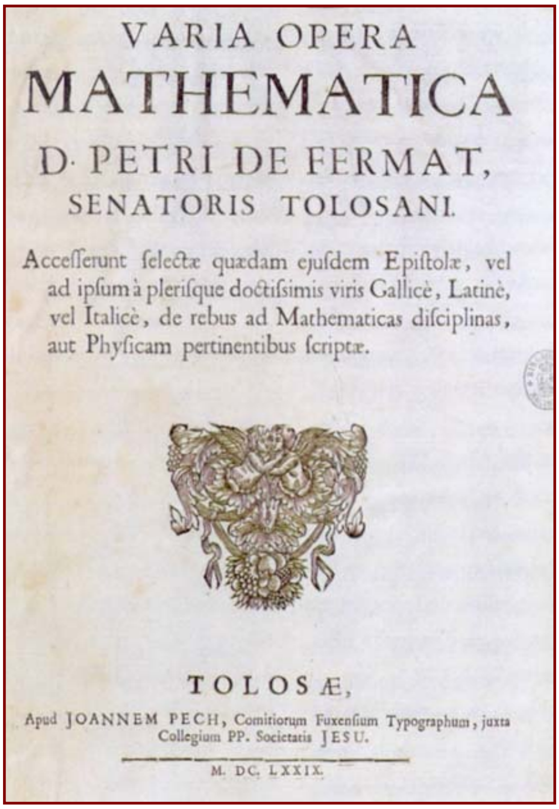
$$b \cdot g \cdot (a-e)^2 \ \cong \ a^2 \cdot (b+e) \cdot (g-e) \ ,$$

que es precisamente la «*adigualdad*» obtenida por Fermat en el trazado de la tangente a la elipse, como hemos visto con anterioridad.

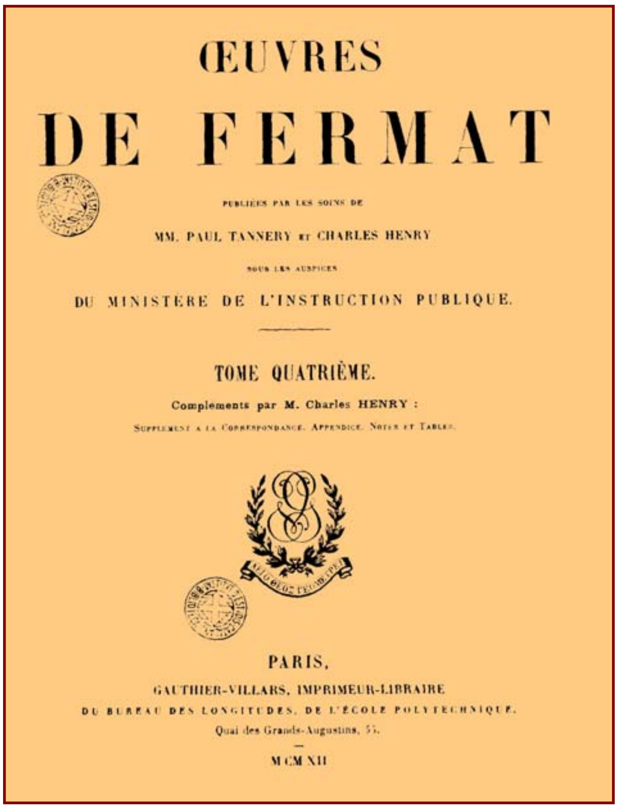
Bajo la reconstrucción y generalización realizadas, podríamos afirmar que el método de tangentes de Fermat, sería completamente general y derivaría de su método de máximos y mínimos. Sin embargo, Fermat no dejó en el *Methodus*, en modo alguno, nada claro el asunto. Se limitó simplemente a exponer la aplicación del método a la parábola, terminando la memoria con una afirmación categórica:

«*Este método nunca falla*, [...].»

LAS VICISITUDES DE LA PUBLICACIÓN DE LAS *OEUVRES* DE FERMAT



VARIA OPERA
MATHEMATICA
D. PETRI DE FERMAT,
SENATORIS TOLOSANI.
Accesserunt selectæ quædam ejusdem Epistolæ, vel ad ipsum à plerisque doctissimis viris Gallicè, Latinè, vel Italicè, de rebus ad Mathematicas disciplinas, aut Physicam pertinentibus scriptæ.
TOLOSÆ,
Apud JOANNEM PECH, Comitiorum Fuxensium Typographum, juxta Collegium PP. Societatis JESU.
M. DC. LXXIX.



ŒUVRES
DE FERMAT
PUBLIÉES PAR LES SOINS DE
MM. PAUL TANNERY ET CHARLES HENRY
SOUS LES AUSPICES
DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.
TOME QUATRIÈME.
Compléments par M. Charles HENRY :
SUPPLÉMENT A LA CORRESPONDANCE. APPENDICE. NOTES ET TABLES.
PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.
Quai des Grands-Augustins, 55.
MCMXII

1. **Edición de Samuel de Fermat de *VARIA OPERA MATHEMATICA* de *D. PETRI DE FERMAT*. Tolosa, 1679.**
2. **Portada del volumen IV de las *OEUVRES DE FERMAT*, publicadas entre 1891 y 1912 por P.Tannery y C.Henry .**

La particular forma que tenía Fermat de trabajar en Matemáticas –Fermat no escribió grandes tratados, sino apuntes episódicos y notas marginales–, así como la manera de comunicar de forma epistolar sus descubrimientos, unida a la despreocupación por la conservación de sus papeles y la constante reticencia en torno a su eventual publicación, supuso que a su muerte, en 1665, la mayoría de los manuscritos de Fermat –de algunos de ellos ni siquiera existía copia– estuvieran en manos de sus múltiples corresponsales y por tanto gran parte de su trabajo quedara desperdigado en numerosos ambientes científicos de toda Europa. En vida de Fermat sólo una memoria se publicó, fue un tratado sobre rectificación de curvas impreso en 1660 bajo las iniciales M.P.E.A.S. (*De la comparación de las líneas curvas con las líneas rectas. Disertación geométrica*), como apéndice de un tratado de Lalouvère sobre la cicloide. Por estas razones su influencia directa no tuvo la envergadura y la inmediatez que la de Descartes.

Catorce años después de la muerte de su padre, habiendo reunido la mayor parte de los escritos latinos, así como un número suficiente de cartas inéditas, Samuel de Fermat hizo imprimir en 1679 *Varia Opera Mathematica*, que a pesar de las omisisones de importantes desarrollos de Fermat y de las excesivas incorrecciones –Samuel no era matemático–, constituyó hasta finales del siglo XIX –se reimprimió en 1861– la única publicación donde se podían estudiar los trabajos de Fermat.

Gran parte de la obra de Fermat presente o ausente en las *Varia Opera* que yacía en manuscritos, originales y copias, muchos de ellos sin título y anónimos, cayó en manos de coleccionistas y seguramente fue atribuida a otros matemáticos.

Gracias a la actividad bibliófila del historiador de las Matemáticas C.G.Libri, el Ministerio de Instrucción Pública francés –en un *Proyecto de Ley de 28 de abril de 1843*– instituyó un programa para una nueva edición de las obras de Fermat a cargo del Estado, que resolviera los defectos y colmara las lagunas de las *Varia Opera*, que el propio Libri había señalado al disponer de nuevos manuscritos y demás material inédito de Fermat. Numerosas vicisitudes políticas y administrativas retrasaron el proyecto hasta finales del siglo XIX.

Teniendo a su disposición las anteriores publicaciones, así como numerosos manuscritos recopilados a lo largo del tiempo y a lo ancho de Europa, C.Henry y P.Tannery emprendieron por fin en 1891, la publicación de las *Oevres de Fermat*, concluyendo la magna obra de cuatro grandes volúmenes en 1912.

Posteriormente C. de Waard, en sus investigaciones que condujeron a la publicación de la *Correspondencia de Mersenne*, descubrió en Groningen y Florencia algunas cartas y memorias de Fermat. La mas importante (y la única sobre el tema de máximos y mínimos) es la *Carta a Brûlart*, de 1643, que fue publicada por Giovannozi en 1919, e incorporada en 1922 al S*upplément* a los Volúmenes I-IV de las *Oeuvres de Fermat*.

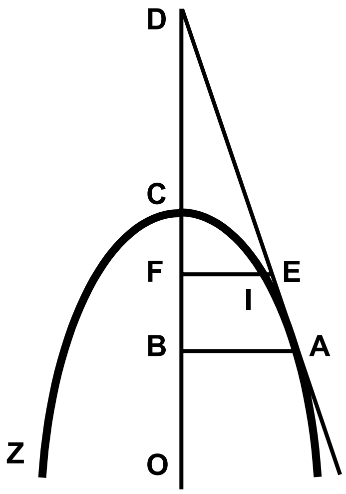
La tangente a través de la normal. El Méthode expliquée

Aunque Fermat no gustaba de publicar sus descubrimientos matemáticos, los matemáticos de París habían presionado excesivamente sobre él, para que pusiera sobre el papel sus métodos de máximos y mínimos y de tangentes, o al menos diera alguna indicación de las técnicas que había empleado para obtener tan brillantes soluciones de los magníficos problemas, antiguos y modernos, que se habían planteado. De modo que no le quedó más remedio que comunicar los métodos, pero lo hizo de forma tan vaga e imprecisa, que naturalmente no dio satisfacción al público matemático, particularmente a Descartes, que sintiéndose ofendido por una ligera crítica de Fermat a una de sus creaciones científicas, *La Dióptrica* –opúsculo que acompañaba al *El Discurso del Método*– desencadenó una tempestuosa tormenta de crítica contra los métodos de Fermat.

Como reacción, Fermat escribe numerosos documentos para justificar sus métodos, entre los cuales uno de los más significativos es el llamado *Méthode expliquée* (TH.OF.II.154).

En esta memoria Fermat considera la curva ZCA con los elementos dados y se propone buscar la tangente AD, trazada desde el punto D a la curva. Fermat expone:

> «[...] *Tomemos a discreción un punto, tal como* E*, sobre la tangente, desde el cual se traza la paralela* FE *a la ordenada* AB, [...]. *Aunque la* línea FE *no sea igual a la ordenada trazada desde el punto* F *a la curva, yo la considero sin embargo como si en efecto fuese igual a la ordenada, y a continuación la comparo por «adigualdad» con la línea* FI*, mediante la propiedad específica de la curva*.»
>
> *En la parábola, por ejemplo, yo hago lo siguiente:*
>
> *como* BC *es a* CF, *así* BA^2 *es* a FE^2 ,
>
> *o bien, para evitar las fracciones y la diversidad de líneas,*
>
> *como* BC *es a* CF, *así* BD^2 *es a* DF^2 ;
>
> *pues siempre es lo mismo, a causa de los dos triángulos semejantes* DBA, DFE.»



En la aplicación que realiza Fermat sobre la parábola, la«*adigualdad*» FI ≅ FE le conduce a considerar, «*la propiedad específica*» de la curva no sobre la curva misma sino sobre la tangente ,como más tarde escribirá literalmente en *Doctrinam Tangentium*, ya que viene a afirmar que se verifica:

$$\frac{BA^2}{FE^2} \cong \frac{BC}{CF} \quad \text{y} \quad \frac{BD^2}{DF^2} = \frac{BC}{CF},$$

lo que resulta de la «*adigualdad*» FI ≅ FE y de la consideración de la propiedad específica de la parábola $\left[\frac{BA^2}{FI^2} \cong \frac{BC}{CF}\right]$ y de la semejanza de triángulos DBA, DFE $\left[\frac{BA}{FE} = \frac{BD}{DF}\right]$.

De $\frac{BA^2}{FE^2} \cong \frac{BC}{CF}$ resulta $FE^2 \cong \frac{BA^2}{BC} \cdot CF$, lo que permite asegurar a Fermat:

> «[...] *Puedo comparar el cuadrado de* FE *con el rectángulo determinado por el* ”*latus rectum*» [BA^2/BC] *de la parábola y la línea* CF, *como si este cuadrado fuera igual a este rectángulo, aunque de hecho no lo sea, pues solamente las ordenadas de puntos de la curva tienen esta propiedad que nosotros concedemos por* ”*adigualdad*” *a la línea* FE .

Escribamos el razonamiento de Fermat en términos algebraicos. Consideremos los segmentos:

$BD=a$, $BA=b$, $BF=e$, $BC=d$,

como datos. De ellos obtenemos:

$CF=d–e$, $FD=a–e$.

A partir de la última *adigualdad*: $FE^2 \cong \frac{BA^2}{BC} \cdot CF$ *,* se deduce el resultado:

$$\frac{b^2 \cdot (a-e)^2}{a^2} = \frac{b^2/d}{d-e}$$

que conduce a la expresión habitual:

$(a–e)^2 \cdot d = a^2 \cdot (d–e)$,

de donde aplicando la regla se llega al resultado correcto: $a = 2d$.

Retrato de Fermat. Lycée *Pierre de Fermat*. Toulouse.

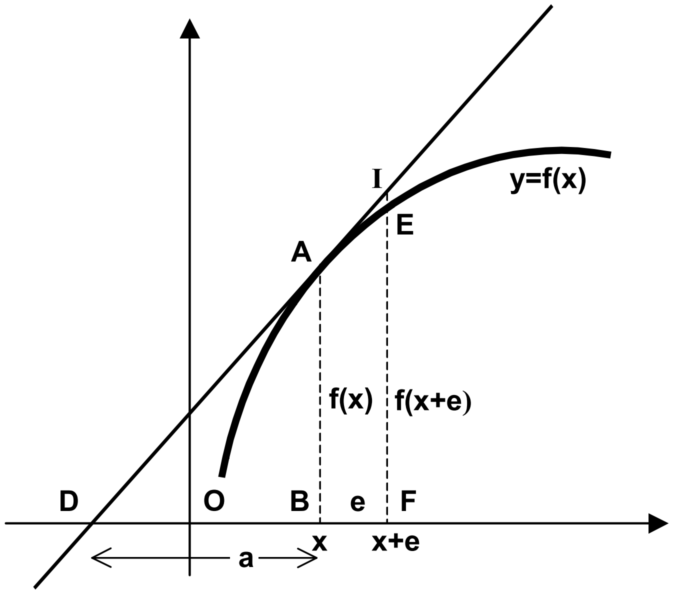
Hasta aquí Fermat no habría hecho sino refinar el algoritmo de su método original. Pero la «*adigualdad*» empezaba a tener una vida propia, al comenzar una lenta transición entre la «*adigualdad*» como disfraz para ocultar los verdaderos fundamentos de los métodos de máximos y mínimos y tangentes y la «*adigualdad*» como *pseudo–igualdad*, *cuasi–igualdad* o «*aproximadamente igual*» en el camino hacia lo infinitesimal. Originalmente utilizado para ocultar los razonamientos que vimos en los intentos de reconstrucción de los métodos de extremos y tangentes, el término diofantino permitiría a Fermat realizar la extensión que ahora estaba haciendo, mientras mantenía una estrecha relación entre los pasos originales del algoritmo y los más rigurosos y claros razonamientos, en que ahora empezaba a basar el método.

Como en el caso de extremos en una verdadera tentación interpretar el método de Fermat en términos infinitesimales de límites y derivadas.

Veamos, pues, en el cuadro siguiente, una aproximación, en lenguaje actual, al procedimiento de Fermat para el trazado de las tangentes a una curva algebraica y=f(x), derivado de su método de máximos y mínimos, que tanta polémica provocó en el círculo matemático del Padre Mersenne por la intervención de Descartes y que posteriormente ha hecho que los matemáticos franceses, y en particular Cauchy, hayan considerado a Fermat ya no sólo como predecesor sino como el auténtico creador del Cálculo Diferencial.

EL MÉTODO DE FERMAT PARA LAS TANGENTES EN TÉRMINOS INFINITESIMALES DE LÍMITES Y DERIVADAS

Sea la curva algebraica y =f(x).



Llamemos: DB=a, BF=e.

La *adigualdad* FI ≅ FE y la semejanza de triángulos ΔABD, ΔIFD, conduce a la *adigualdad*:

$$\frac{a}{f(x)} \cong \frac{a+e}{f(x+e)}$$

sobre la que se aplicarán los pasos habituales de la regla del *Methodus.*

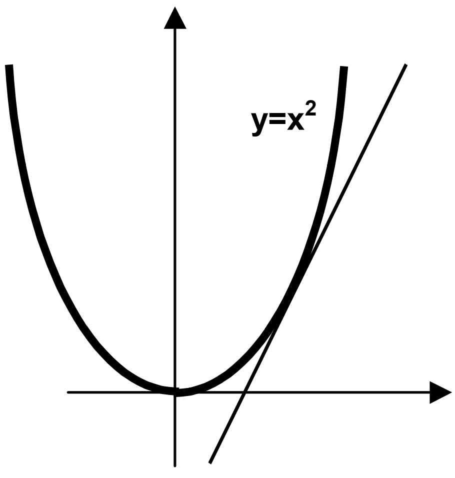
A partir de

$$\frac{a}{f(x)} \cong \frac{a+e}{f(x+e)} \cong \frac{e}{f(x+e)-f(x)}$$

se deduce: $\dfrac{f(x)}{\dfrac{f(x+e)-f(x)}{e}} \cong a$,

donde la expresión f(x+e)–f(x) resulta ser divisible por e si f(x) es una función algebraica. Simplificando y haciendo e igual a cero, se obtiene para la subtangente a, una expresión que es equivalente a $\dfrac{f(x)}{f'(x)}$**, donde f′(x) es la derivada formal de la función algebraica y=f(x). Pero como la pendiente de la recta tangente es precisamente** $m = \dfrac{f(x)}{a}$**, resulta que el desarrollo de Fermat identifica la pendiente de la recta tangente a la curva y=f(x) con la derivada formal f′(x).**

Apliquemos el método a la parábola y=f(x)=x².



Escribimos la primera *adigualdad*: $\dfrac{a}{f(x)} \cong \dfrac{a+e}{f(x+e)}$,

y hacemos operaciones:

$$\frac{a}{x^2} \cong \frac{a+e}{(x+e)^2} \cong \frac{e}{(x+e)^2 - x^2} = \frac{e}{e^2+2xe} = \frac{1}{e+2x}$$

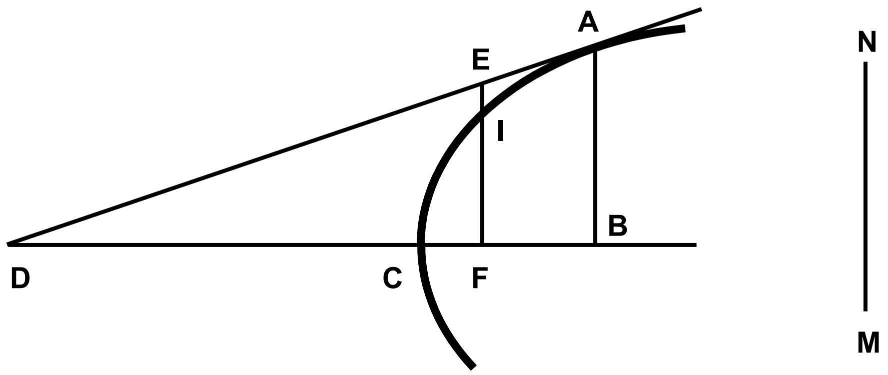
Ahora, al hacer e=0, resulta el valor para la subtangente a=x/2.

Luego la pendiente de la tangente, equivalente a nuestra derivada, es:

$$m = \frac{f(x)}{a} = \frac{x^2}{x/2} = 2x = f'(x)$$

Fermat continúa en el *Methode expliquée* poniendo a prueba la utilidad del método, y lo aplica a resolver brillantemente un problema al que Descartes le había desafiado a resolver: encontrar la tangente al «*Folium de Descartes*», expresándose de la siguiente forma:

> [...]. *Y para hacer ver que el método es general, y que satisface con similar facilidad todo tipo de cuestiones, lo podemos aplicar, como segundo ejemplo, a la línea curva propuesta por Descartes.*
>
> *Sea la curva* CA *cuya propiedad de definición es que, cualquier punto que se tome sobre dicha curva, como* A, *trazando la perpendicular* AB*, los dos cubos* CB *y* BA *son iguales al paralelepípedo determinado por una línea recta dada, como* NM*, y las dos líneas* CB *y* BA.



> *Supongamos la cosa hecha, y sea una construcción parecida a la precedente, con los nombres de la líneas* BD, BC, BA, CF, FE. *Será necesario comparar mediante "adigualdad", los dos cubos* CF, FE, *con el sólido determinado por* NM, FC, FE.»

Poniendo notaciones algebraicas:

BD=a , BF=e , NM=n , BA=b , CB=d , CF=d–e , DF=a–e ,

por semejanza de los triángulos DFE, DBA, se tendrá: FE/DF = BA/BD, de donde:

$$FE^3 = \frac{BA^3}{BD^3}\cdot DF^3 = \frac{b^3a^3 - b^3e - 3b^3a^2e + 3b^3ae^2}{a} \quad .$$

Los otros términos que intervienen son:

$$CF^3 = (d-e)^3 = d^3 - e^3 - 3d^2e + 3de^2 \ ,$$

$$NM\cdot CF\cdot FE = n\cdot(d-e)\cdot\frac{b(a-e)}{a} = \frac{ndba - ndbe - nbae + nbe^2}{a}.$$

Tras la comparación por «*adigualdad*»: $CF^3 + FE^3 \cong NM\cdot CF\cdot FE$,

siguiendo después paso a paso la regla se obtiene:

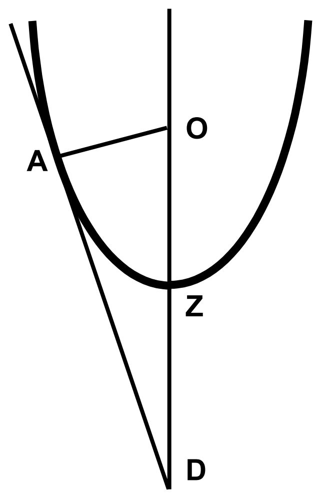
$$3d^2a + 3b^3 = ndb + nba \ ,$$

de donde finalmente resulta:

$$a = \frac{ndb - 3b^2}{3d^2 - nb} \ ,$$

un resultado correcto de un problema realmente difícil.

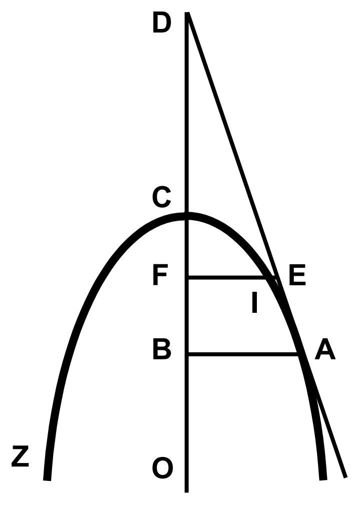
A continuación Fermat se dispone por fin, en los párrafos siguientes del *Méthode expliquée*, a dilucidar la relación exacta, el vínculo real entre el método de máximos y mínimos y de tangentes, es decir, a contestar a las preguntas planteadas anteriormente, base de las increpaciones de Descartes y, por tanto causa primera de la polémica entre ambos. Pero de forma sorprendente, Fermat en vez de aclararnos como una tangente resulta de un máximo o mínimo saca a relucir la normal en la forma siguiente:



«[...]. *Para señalar de que manera el método de "maximis et minimis" puede ser aplicado a la invención de las tangentes helo aquí:*

Siendo dado el punto A*, es preciso recurrir no "ad maximam", puesto que no se encontraría más que el infinito, sino "ad minimam". Busquemos por consiguiente el punto* O *en el diámetro, de tal forma que la línea* OA *sea la más corta que pueda ser trazada desde* el punto O *a la curva. El punto* O *se encontrará mediante el método. Unamos los puntos* O *y* A *mediante la línea* OA*, y tracemos la línea* AD *perpendicular a* OA*. Digo entonces que esta línea* AD *será tangente a la curva, lo que se demuestra fácilmente*.»

Fermat realiza una demostración retórica de este hecho y aplica inmediatamente a la parábola, lo que acaba de desarrollar.



«*Sea por ejemplo la parábola dada* CIA *,sobre la cual se ha dado el punto* A*. Quiero buscar el punto* O*, de manera que* OA *sea la línea más corta de todas las que desde el punto* O *se pueden trazar hasta la parábola.*»

Sigamos en notaciones algebraicas la construcción que hace Fermat de la tangente a la parábola .

Sean BC=d , BA=b , OB=a , BF=e ,

de donde: OF=a+e , FC=d–e ,

el «*latus rectum*» será entonces $z=b^2/d$.

Siguiendo paso a paso el método de máximos y mínimos de Fermat, se tiene:

1. Sea a=OB la incógnita del problema.
2. Se expresa la cantidad OA^2 mínima en términos de a:

$$OA^2 = OB^2+BA^2 = a^2+b^2 \ .$$

3. Se sustituye a=OB por a+e=OF y se expresa la cantidad mínima en términos de a y e:

   a partir de $FI^2 = z\cdot CF = z\cdot(d–e)$, $OF^2 = (a+e) = a^2+2ae+e^2$, se obtiene:

$OI^2 = OF^2 + FI^2 = a^2+e^2+2ae+zd–ze$.

4. Se «*adigualan*» las dos expresiones de la cantidad mínima:

   $OA^2 \cong OI^2$, es decir: $a^2+b^2 \cong a^2+e^2+2ae+zd–ze$.

5. Se eliminan los términos comunes (se utiliza que $b^2=zd$):

   $0 \cong e^2+2ae–ze$.

6. Se dividen todos los términos por e:

   $0 \cong e+2a–z$.

7. Se suprimen los términos que todavía contienen la e:

   $0 \cong 2a–z$.

8.– Se resuelve la ecuación resultante:

   $a = z/2$.

Fermat termina el problema de la parábola diciendo:

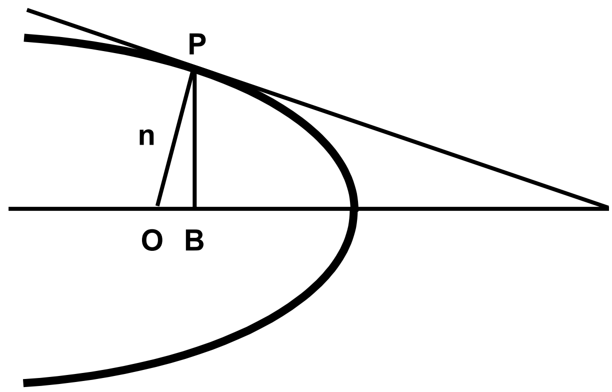
> «[...].*Y por tanto a, es decir* OB*, será igual a la mitad del latus rectum de la parábola, y la tangente está hallada*.»

Apliquemos el resultado obtenido por Fermat a obtener, en nuestro lenguaje la ecuación de la tangente a la parábola de ecuación $y^2=2px$, (cuyo «*latus rectum*» es 2p) en el punto $P=(x_o ,y_o)$.

Si tomamos OB=a, el resultado de Fermat nos da: $a = –p$.

La pendiente de la recta normal a la parábola en el punto P será :

$BP/OB = y_o /a = –y_o/p$,



de donde resulta para la pendiente de la tangente la cantidad p/y . Así pues la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2=2px$, en el punto $P=(x_o ,y_o)$ será:

$y–y_o = (p/ y_o)\cdot(x–x_o)$,

es decir: $yy_o = p(x+x_o)$.

Hemos visto como Fermat ha explicitado, por fin, la conexión entre el método de máximos y mínimos y el de tangentes, demostrando claramente que el método de tangentes utiliza un procedimiento derivado exclusivamente de su método de máximos y mínimos.

Pero el cambio desde el método original de tangentes (el del *Methodus*) hasta la anterior derivación, es tan sorprendente como imprevisto. Y a pesar de lo que diga el propio Fermat puede que la nueva forma no estuviera originalmente en su mente, porque no sigue estrictamente los pasos del algoritmo de tangentes del *Methodus* aplicado a la parábola, ni los pasos con que inicia el propio *Méthode expliquée*. Fermat cambia radicalmente el enfoque, aplicando el método a la determinación de la normal, y es muy probable que lo hiciera inducido por la forma cartesiana de obtención de la normal.

No obstante en los párrafos siguientes del *Méthode expliquée* Fermat justifica porqué utilizó en el *Methodus* su regla de forma diferente, a pesar de que el vínculo entre máximos y mínimos y tangentes se establece, según él, a través del mínimo que proporciona la normal:

> «[...]. Es así [mediante la normal] *como aplicaba mi método para encontrar tangentes, pero reconozco que tenía su defecto, a causa de que la línea* OI, *o su cuadrado, son difíciles de encontrar por esta vía; debido a las asimetrías que se suelen encontrar en estas cuestiones*. [...].»

Fermat alude en el párrafo siguiente del *Méthode expliquée* a las deficiencias que tienen los métodos que utilizan la normal justificando la introducción del método original:

> «[...]. *Puesto que por consiguiente estos dos métodos* [los que utilizan la normal] *parecen insuficientes, era necesario encontrar uno que eliminara estas dificultades.*
>
> *Me parece con razón que es el primero que he propuesto, pues siendo* CF *siempre igual a* d–e, FE *siendo* b·(a–e)/a, *no veo nada que impida que se les pueda comparar, si se quiere poniendo* d–e *por y,* b·(a–e)/a *po*r x [siguiendo las notaciones de Descartes], *sin encontrar nunca una sola asimetría, en lo que consiste la facilidad y la perfección de este método.*»

A pesar de que Fermat sigue manteniendo la virtualidad del método original, la controversia con Descartes alteró de forma significativa sus puntos de vista sobre su propio método de tangentes. La «*adigualdad*» había empezado a convertirse en algo más que una simple máscara para encubrir los fundamentos reales del método, de forma que se inicia sobre ella una lenta transición desde su aplicación como palabra clave a su significado como concepto matemático.

Por otra parte la regla de tangentes llegó a ser conceptualmente más simple porque Fermat, con su desarrollo de una Geometría Analítica en su *Introducción a los Lugares Planos y Sólidos*, pudo a estas alturas sustituir las clásicas definiciones de las curvas basadas en proporcionalidad –el «*symptôma*» de Apolonio–, por la «*propiedad específica*» de las curvas. En efecto, la *Introducción*... había hecho posible describir curvas en términos de ecuaciones, las cuales habían llegado a ser las propiedades específicas de las curvas. El término «*propiedad específica*» que es de capital importancia para el incipiente concepto de función, aparece de repente en los escritos de Fermat y empieza a tener un efecto inmediato sobre la reformulación del método de tangentes, de lo que es buena muestra el *Méthode expliquée* y más aún la *Doctrinam Tangentium* que veremos a continuación.

Acaba el *Méthode expliquée* con unas significativas palabras de Fermat que aluden por primera vez al problema inverso de la tangente:

> «*Se podría a continuación buscar la inversa de esta proposición y, siendo dada la propiedad de la tangente, buscar la curva que debe convenir a esta propiedad, cuestión a la que desembocan las de los espejos ustorios propuestos por M. Descartes. Pero esto merece un discurso aparte*. [...]. *Yo deseo solamente que él sepas que nuestras cuestiones sobre* “*maximis et minimis et de tangentibus linearum curvarum*” *son perfectas desde ocho o diez años y que varias personas que las conocen desde hace cinco o seis años así lo atestiguan.*»

La *Doctrinam Tangentium*

A lo largo de los años de desarrollo de las técnicas de Fermat, sus métodos de máximos y mínimos, evolucionaron relativamente poco. En cambio con las reglas para el trazado de tangentes ocurrió lo contrario. El advenimiento de la Geometría Analítica de Descartes y del propio Fermat, trajo consigo la introducción sistemática de nuevas y sofisticadas curvas, así como la facilidad de expresión y definición de las nuevas y antiguas curvas, a tenor de lo cual los métodos para el trazado de las tangentes a las líneas curvas, precisaban mayor refinamiento. En esta línea se enmarca el desarrollo de Fermat de nuevas y potentes técnicas para las tangentes, que plasma en la importante memoria *Doctrinam Tangentium*.

Queriendo mostrar que los procedimientos desarrollados en el *Methodus* y más tarde clarificados y sistematizados en el *Méthode expliquée*, se aplicaban no solo a las curvas algebraicas sino también a las ahora llamadas trascendentes o mecánicas, Fermat escribe la *Doctrinam Tangentium*, proporcionando a la «*adigualdad*» un nuevo significado, que dará más tarde, un magnífico fruto en los trabajos de Fermat sobre cuadratura y rectificación.

Fermat comienza la memoria *Doctrinam Tangentium* justificando los desarrollos que va a emprender (TH.OF.III,140):

> «*La teoría de las tangentes es una continuación del método, desde largo tiempo publicado para la invención del máximo y del mínimo, que permite resolver fácilmente todas las cuestiones de condiciones límites y en particular aquellos famosos problemas cuyas condiciones límites son señaladas como difíciles por Pappus (Libro VII).*
>
> *Las líneas curvas de las que nosotros buscamos las tangentes, tienen sus propiedades específicas expresables, ya sea mediante líneas rectas solamente o incluso mediante curvas complicadas que requieren rectas y otras curvas.*
>
> *Nosotros hemos ya satisfecho el primer caso mediante nuestra regla, que, demasiado concisa ha podido parecer difícil, pero que sin embargo ha sido reconocida como legítima.*»

Vemos como la lectura de *La Geometría* y el desarrollo de su propia Geometría Analítica había afectado de forma significativa las nociones de Fermat sobre la naturaleza de las líneas curvas y por tanto su sentido de la aplicabilidad general del método original de tangentes.

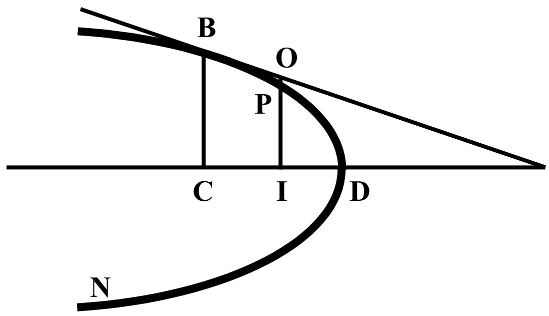
Descartes distinguía entre «*curvas matemáticas*» –dignas de ser estudiada en Geometría– y «*curvas mecánicas*». Las primeras podían ser definidas mediante una ecuación algebraica indeterminada en dos incógnitas, correspondientes a segmentos rectilíneos variables, mientras que las curvas mecánicas requieren para su definición longitudes de arco de otras curvas. El nombre de mecánicas aplicado a algunas curvas es ambiguo porque muchas «*curvas matemáticas*» pueden obtenerse de forma mecánica mediante un movimiento continuo o una superposición de movimientos continuos, por ejemplo la elipse se puede obtener mediante composición de dos movimientos continuos, de alejamiento y acercamiento a los focos. Se debe entender –como hace Descartes en *La Geometría*– que una curva es matemática cuando la relación de los movimientos que la definen «*es exacta*», es decir, puede ser expresada algebraicamente, en otro caso la curva será mecánica. Fermat coincide plenamente con Descartes en estas concepciones sobre curvas. Las del primer tipo tienen la propiedad específica expresable solo mediante líneas rectas. Para las segundas la propiedad especifica requiere ser expresada no sólo mediante segmentos de rectas sino también mediante segmentos curvilíneos.

Para las curvas del primer tipo la regla de tangentes ofrecida en el *Methodus* es suficiente. En *Doctrinam Tangentium*, Fermat no añade nada a la regla, pero pone por escrito, en unas cortas pero significativas palabras, el algoritmo general, con una claridad incomparablemente superior a la del *Methodus* o el *Méthode expliquée*, diciendo:

«*Nosotros consideramos de hecho en el plano de una curva cualquiera, dos rectas dadas en su posición, de las que a una se la puede llamar* "*diámetro*" *y a la otra* "*ordenada*". *Nosotros suponemos la tangente ya encontrada en un punto dado de la curva, y consideramos mediante la* "*adigualdad*" *la propiedad específica de la curva, no sobre la curva misma sino sobre la tangente a encontrar*.»

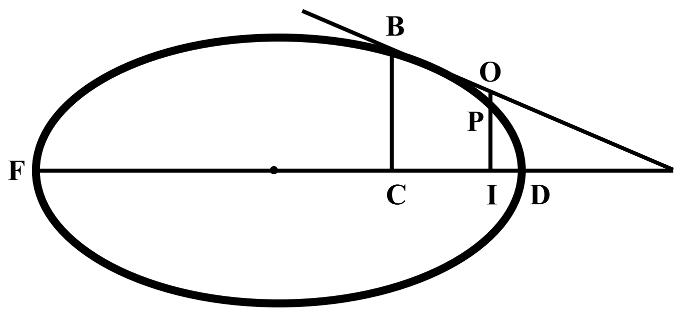
Es decir, por ejemplo, para la parábola se consideraría:

$$\frac{BC^2}{CD} = \frac{OI^2}{ID}$$



Mientras que para la elipse sería:

$$\frac{BC^2}{OI^2} = \frac{FC \cdot CD}{FI \cdot ID}$$



Continúa el texto de Fermat:

«*Eliminando, siguiendo nuestra teoría de máximos y mínimos, los términos que sean necesarios, llegamos a una igualdad que determina el punto de contacto de la tangente con el diámetro, es decir la tangente misma*.»

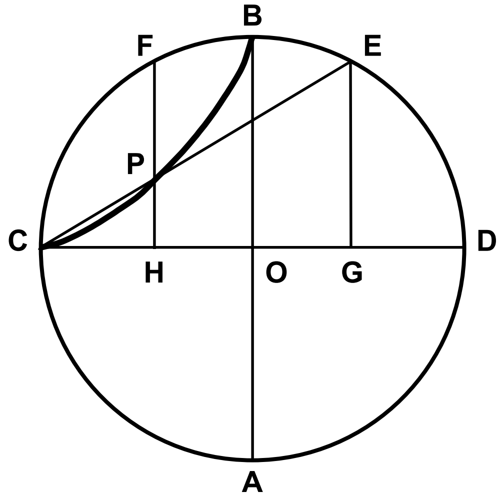
En este corto párrafo, Fermat sintetiza años de investigación matemática. Todo el nuevo sistema geométrico creado en *La Introducción a los Lugares Planos y Sólidos* yace en la primera frase, mientras que en la segunda frase Fermat pone por escrito los procedimientos apuntados en el *Méthode expliquée*, que aplicará a continuación a la determinación de la tangentes a dos curvas clásicas, la Cisoide de Diocles y la Concoide de Nicomedes, en una forma que no difiere de las originales aplicaciones de la regla, más que por la complejidad algebraica de las propiedades específicas de las curvas.

Curvas algebraicas. La tangente a la Cisoide

La cisoide es una de las curvas clásicas griegas, utilizada por Diocles (hacia el 180 a.C.) para construir dos medias proporcionales, que resolvieran el problema de Delos de la «*duplicación del cubo*», lo que conocemos a través de *Los Comentarios al Libro* I *de Los Elementos de Euclides* de Proclo (hacia el 460 d.C.) y de dos fragmentos de Eutocius (hacia el 560 d.C.) sobre Diocles.

La cisoide en una curva plana que se engendra a partir de la construcción siguiente:

Sea el círculo ADBC, y consideremos dos diámetros perpendiculares AB y CD. sean E y F puntos en los cuadrantes BD y BC, respectivamente, tales que los arcos BE y BF sean iguales. Tracemos los segmentos EG y FH perpendiculares a CD. Unamos C con E, y sea P el punto donde el segmento CE interseca a FH. La cisoide es el lugar geométrico de todos los puntos P, correspondientes a las diferentes posiciones de E en el cuadrante BD y de F a igual distancia de B que E, en el cuadrante BC.



De la construcción se obtiene EG=FH, CG=DH, de donde se deduce:

DH/FH = CG/EG .

El segmento FH es media proporcional entre los segmentos DH y CH, por tanto:

DH/FH = FH/HC .

Los triángulos EGC, PHC, son semejantes, luego se verifica:

CG/GE = HC/HP .

Combinando las tres igualdades, se obtiene:

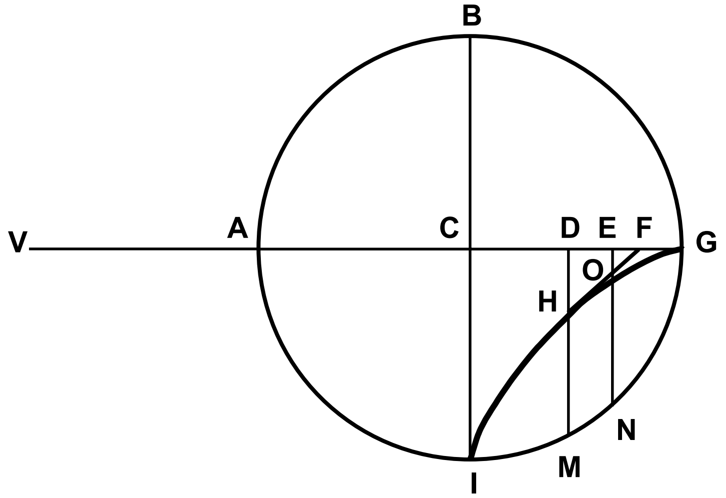
FH/HC = HC/HP .

Se puede comprobar fácilmente que la expresión FH/HC = HC/HP caracteriza a los puntos P de la curva, es decir, con la terminología de Fermat, representa la *propiedad específica de la curva*.

Veamos ya la construcción de Fermat de la tangente a la cisoide en *Doctrinam Tangentium*:

> «*A los numerosos ejemplos que ya he dado, añadiré el de la tangente a la cisoide, inventada, según se dice, por Diocles*.»
>
> *Sea un círculo en el que los diámetros* AG,BI, *se cortan perpendicularmente, y la cisoide* IHG*, en la cual, por un punto cualquiera* H*, se quiere trazar la tangente.*
>
> *Supongamos el problema resuelto y sea* F *la intersección de* CG *y la tangente* HF*. Pongamos* DF=a*, y tomando un punto* E *cualquiera entre* D *y* F, DE=e.

Según la propiedad específica de la cisoide: MD/DG = DG/DH, *se tendrá por consiguiente que expresar de forma analítica la "adigualdad"* NE/EG≅EG/EO, *siendo* EO *la porción de la recta* EN *interceptada entre* E *y la tangente* [es decir, se aplica, como es habitual, la propiedad específica de la curva, no sobre la curva misma sino sobre la tangente].



Sean dados AD=z, DG=n, DH=r, *y como ya hemos señalado la incógnita* DF=a, *y la cantidad arbitraria* DE=e.

Se tendrá: EG = n–e , EO = (ra–re)/a [ya que por semejanza de los triángulos EOF, DHF, se tiene: EO/EF= DH/DF)],

$$EN = \sqrt{zn - ze + ne - e^2}$$

[puesto que en el semicírculo AIG se verifica: EN2=AE·EG= =(z+e)·(n–e)]

Según la regla, se debe considerar la propiedad específica, no sobre la curva, sino sobre la tangente, y poner por consiguiente NE/EG = EG/EO, *siendo* EO *la ordenada sobre la tangente, o en notaciones analíticas,*

$$\frac{\sqrt{zn - ze + ne - e^2}}{n - e} \cong \frac{n - e}{\dfrac{ra - re}{a}}$$

elevando al cuadrado, para eliminar el radical:

$$\frac{zn - ze + ne - e^2}{n^2 + e^2 - 2ne} \cong \frac{n^2 + e^2 - 2ne}{\dfrac{r^2a^2 + r^2e^2 - 2r^2ae}{a^2}}$$

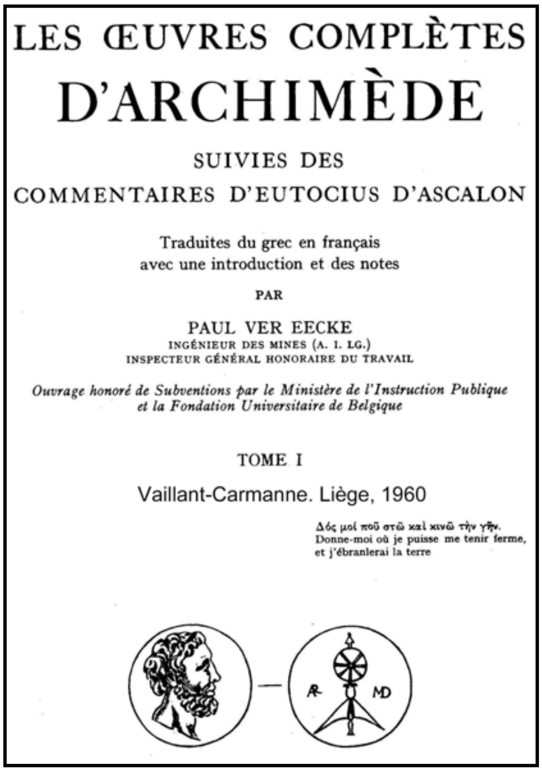
Multiplicando todos los términos por a^2, y adigualando según la regla el producto de los extremos al de los medios, suprimiendo los términos superfluos, en conformidad con el método, se tendrá por fin : 3za + na = 2zn .

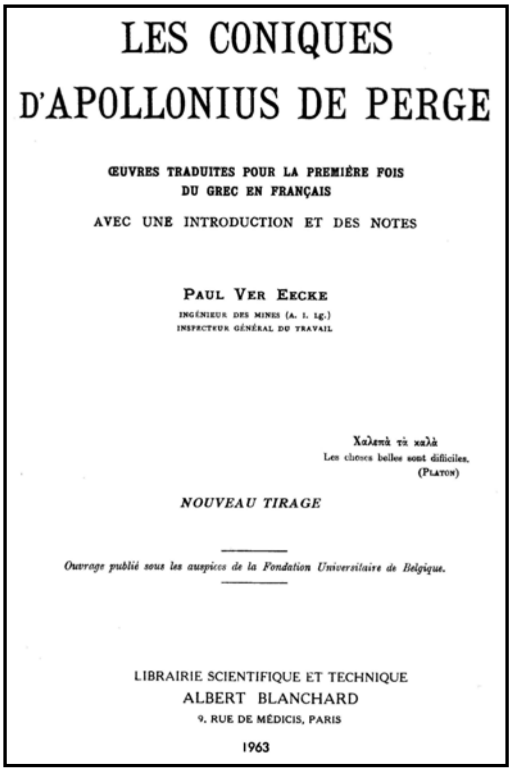
$$\left[\text{Es decir: } a = \frac{2zn}{3z + n} = \frac{2zn}{2z + (z + n)} = \frac{2\,ADxDG}{2\,AD + (AD + DG)} = \frac{2\,ADxDG}{2\,AD + 2\,AG} = \frac{ADxDG}{AD + AG}\right].$$

De donde se deduce la construcción siguiente de la tangente: Se prolonga el radio CA del círculo dado hasta V *y se toma* AV=AC. *Se divide* ADxDG *por* VD, *sea* DF *el cociente; se une* F *con* H *y se tendrá la tangente* FH *a la cisoide.*

A continuación Fermat procede de forma similar que en el caso de la cisoide al trazado de la tangente a otra de las curvas clásicas griegas, la concoide de Nicomedes.

LAS OBRAS FUNDAMENTALES DE LA MATEMÁTICA GRIEGA DE GRAN INFLUENCIA SOBRE DE FERMAT (EDICIONES DE P. VER EECKE)

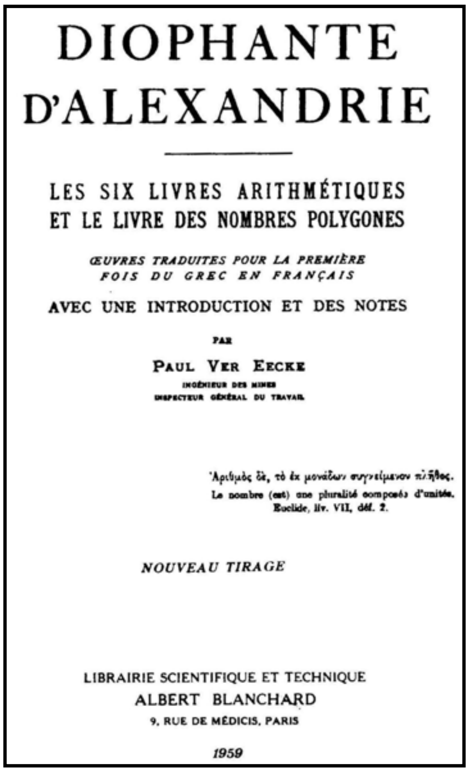

LES ŒUVRES COMPLÈTES
D'ARCHIMÈDE
SUIVIES DES
COMMENTAIRES D'EUTOCIUS D'ASCALON
Traduites du grec en français
avec une introduction et des notes
PAR
PAUL VER EECKE
INGÉNIEUR DES MINES (A. I. LG.)
INSPECTEUR GÉNÉRAL HONORAIRE DU TRAVAIL
Ouvrage honoré de Subventions par le Ministère de l'Instruction Publique et la Fondation Universitaire de Belgique
TOME I
Vaillant-Carmanne. Liège, 1960
Δός μοί ποῦ στῶ καὶ κινῶ τὴν γῆν.
Donne-moi où je puisse me tenir ferme, et j'ébranlerai la terre

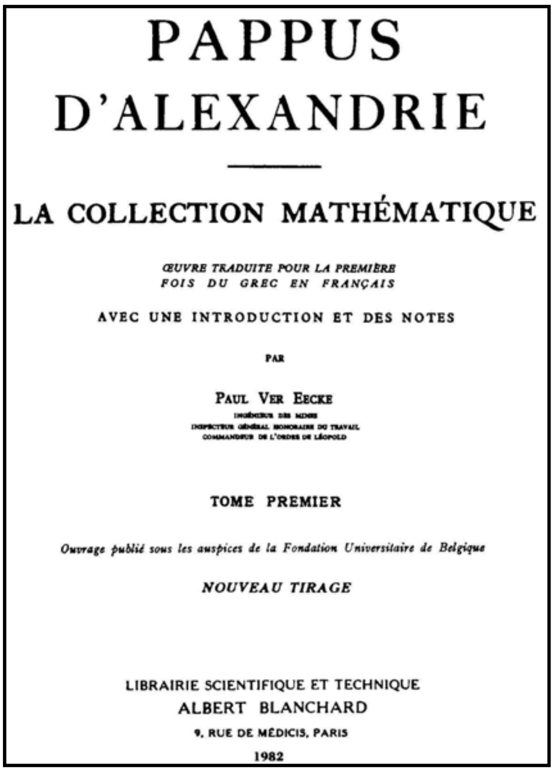

LES CONIQUES
D'APOLLONIUS DE PERGE
ŒUVRES TRADUITES POUR LA PREMIÈRE FOIS DU GREC EN FRANÇAIS
AVEC UNE INTRODUCTION ET DES NOTES
PAUL VER EECKE
INGÉNIEUR DES MINES (A. I. Lg.)
INSPECTEUR GÉNÉRAL DU TRAVAIL
Χαλεπὰ τὰ καλά
Les choses belles sont difficiles.
(PLATON)
NOUVEAU TIRAGE
Ouvrage publié sous les auspices de la Fondation Universitaire de Belgique.
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE ET TECHNIQUE
ALBERT BLANCHARD
9, RUE DE MÉDICIS, PARIS
1963

Portadas de las ediciones de Paul Ver Eecke de las fuentes bibliográficas primarias griegas que más influencia ejercieron sobre Fermat.

1. *Archimède. Les Oeuvres complètes d'Archimède*. **Vaillant-Carmanne. Liège, 1960.**
2. *Les Coniques d'Apollonius de Perge*. **Blanchard. París, 1963**
3. *Diophante d'Alexandrie. Les six livres arithmétiques et le livre des nombres polygones*. **Blanchard, París, 1959.**
4. *Pappus d'alexandrie. La Collection Mathématique*. **Blanchard, París, 1982.**

Estas magníficas ediciones de P. Ver Eecke de las obras de Arquímedes, Apolonio, Diofanto y Pappus, disponen de una brillante introducción y de unas generosas notas de carácter histórico, filológico y matemático, aclaratorias y extensivas del texto original que coadyuvan sobremanera a su intelección.


DIOPHANTE
D'ALEXANDRIE
LES SIX LIVRES ARITHMÉTIQUES
ET LE LIVRE DES NOMBRES POLYGONES
ŒUVRES TRADUITES POUR LA PREMIÈRE FOIS DU GREC EN FRANÇAIS
AVEC UNE INTRODUCTION ET DES NOTES
PAR
PAUL VER EECKE
INGÉNIEUR DES MINES
INSPECTEUR GÉNÉRAL DU TRAVAIL
Ἀριθμὸς δέ, τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος.
Le nombre (est) une pluralité composée d'unités.
Euclide, liv. VII, déf. 2.
NOUVEAU TIRAGE
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE ET TECHNIQUE
ALBERT BLANCHARD
9, RUE DE MÉDICIS, PARIS
1959


PAPPUS
D'ALEXANDRIE
LA COLLECTION MATHÉMATIQUE
ŒUVRE TRADUITE POUR LA PREMIÈRE FOIS DU GREC EN FRANÇAIS
AVEC UNE INTRODUCTION ET DES NOTES
PAR
PAUL VER EECKE
INGÉNIEUR DES MINES
INSPECTEUR GÉNÉRAL HONORAIRE DU TRAVAIL
COMMANDEUR DE L'ORDRE DE LÉOPOLD
TOME PREMIER
Ouvrage publié sous les auspices de la Fondation Universitaire de Belgique
NOUVEAU TIRAGE
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE ET TECHNIQUE
ALBERT BLANCHARD
9, RUE DE MÉDICIS, PARIS
1982

Curvas mecánicas. La tangente a la cicloide

La tangente a la cicloide es, sin duda alguna, el ejemplo más espectacular de la aplicación de los métodos de Fermat al trazado de las tangentes a las líneas curvas. Fermat desarrolla una potente parafernalia matemática aplicable al trazado de las tangentes de las curvas mecánicas, que resuelve de forma brillante el problema.

Fermat sabiendo que a la cicloide –a la que llama la «*Curva de Roberval*») no se le pueden aplicar directamente los métodos desarrollados hasta ahora, porque es una curva de naturaleza esencialmente diferente a la parábola, elipse, cisoide, concoide, folium, etc., ya que en su definición interviene una longitud de arco, prepara el camino con estas palabras que siguen en la memoria *Doctrinam Tangentium* a la construcción de las tangente a la cisoide y a la concoide:

> «*Para el segundo caso que Descartes juzgaba como difícil, se obtiene por un método muy elegante y bastante sutil*.
>
> «*Mientras que los términos estén formados solamente por rectas, se les busca y se les dibuja según la regla precedente. Además, para evitar los radicales, se pueden sustituir las ordenadas de las curvas por las ordenadas de las tangentes, halladas según el método precedente. Y en fin, lo que es el punto importante, se pueden sustituir las longitudes de arco de las curvas por las partes correspondientes de las tangentes ya halladas y llegar a la ”adigualdad” , como hemos indicado: se resolverá así fácilmente la cuestión.*»

Vemos como el concepto de «*adigualdad*» ha sufrido una metamorfosis profunda. El cambio, insinuado en el *Méthode expliquée* ya ha tenido lugar. La «*adigualdad*», en sus orígenes extraída de Diofanto, para disfrazar la falsa asunción de que en el extremo una ecuación tenía dos raíces distintas y esconder en última instancia los fundamentos de los métodos de máximos y mínimos, se convirtió en el *Méthode expliquée* en una asunción de *pseudo–igualdad* entre la ordenada de la curva y la distancia a lo largo de la misma línea, desde el eje a la tangente. Ahora sin embargo Fermat da un paso de gigante hacia la noción infinitesimal de «*aproximadamente igual*», con el establecimiento de dos principios:

1. Se pueden sustituir las ordenadas de las curvas por las ordenadas de las tangentes ya halladas.
2. Se pueden sustituir las longitudes de arco de las curvas por las partes correspondientes de las tangentes ya halladas.

Si el primer principio viene a ser la consideración por«*adigualdad*» de la *propiedad específica de la curva*, no sobre la propia curva sino sobre la tangente, el segundo, más audaz todavía, es un verdadero principio de rectificación.

Veamos como con base en estos principios Fermat realiza la admirable construcción de la tangente a la cicloide.

Sea la cicloide HCG con vértice C y circunferencia generatriz CMF. Sea R un punto cualquiera donde queremos trazar la tangente RB.

Si MA la tangente al círculo, cambiemos ligeramente alguna de las notaciones de Fermat. Sean en notaciones algebraicas:

$CD=x$, $RD=f(x)$, $MD=g(x)$,

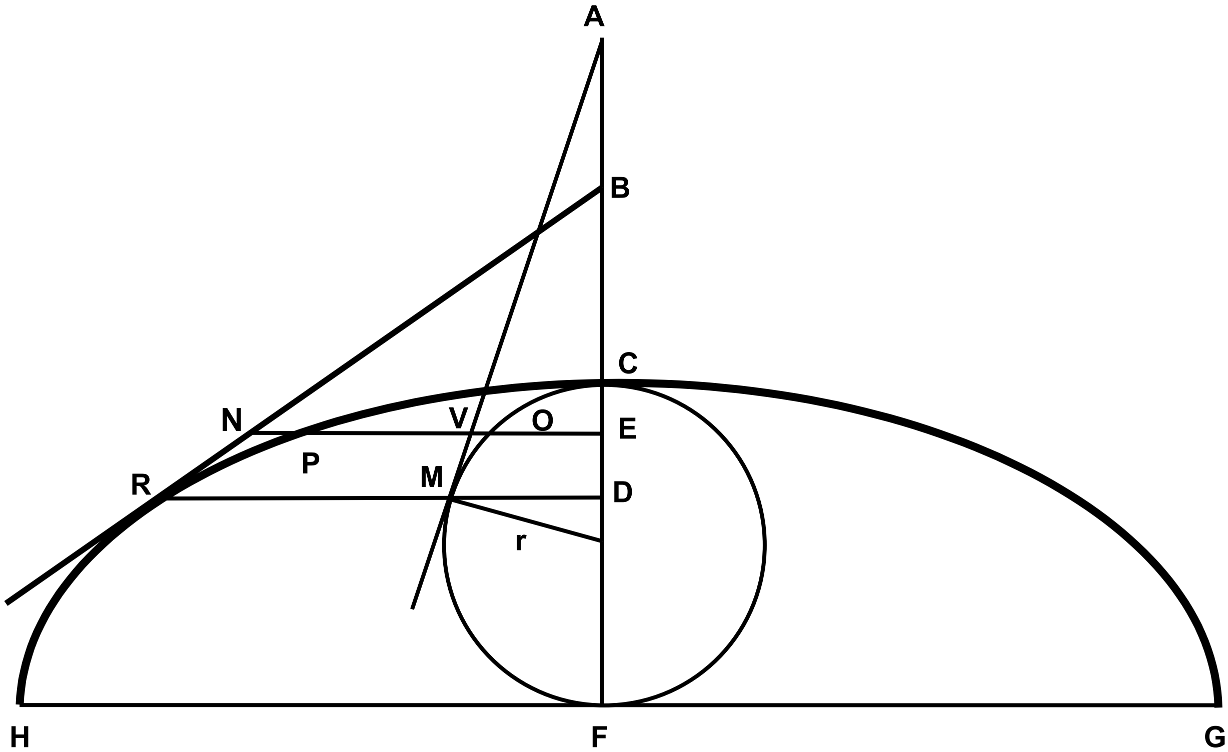
$DE=e$, $f(x-e)=PE$, $g(x-e)=OE$,

$MA=d$, $AD=b$.

La magnitud que permite trazar la tangente RB es $DB=a$. La propiedad específica de la cicloide permite escribir:

$$f(x) = RM + MD = \text{arco } CM + g(x) \qquad [1]$$

$$f(x-e) = PO + OE = \text{arco } CO + g(x-e) \,. \qquad [2]$$



La semejanza de triángulos (RDB, NEB en primer lugar, y MDA,VEA en segundo lugar) y la «*adigualdad*» usual en el método de las tangentes –la aplicación del primer principio– dan:

$$\frac{f(x)\cdot(a\text{-}e)}{a} = NE \;\cong\; f(x\text{-}e) \qquad [3]$$

$$\frac{g(x)\cdot(b\text{-}e)}{b} = EV \;\cong\; g(x\text{-}e) \qquad [4]$$

Restando arcos sobre la circunferencia se tiene:

$$\text{arco } CO = \text{arco } CM - \text{arco } OM\ . \qquad [5]$$

Por otra parte de la aplicación del segundo principio y la semejanza de los triángulos MDA, VEA, se obtiene:

$$\text{arco } OM \cong MV = de/b\ . \qquad [6]$$

Ahora [2], [5], [4]y [6] resulta:

$$f(x-e) \;\cong \text{arco } CM \;-\; \frac{de}{b} + \frac{g(x)\cdot(b-e)}{b}\ . \qquad [7]$$

De [7], donde junto con [1] y [3], obtenemos:

$$\left[\text{arco } CM + g(x)\right]\cdot\frac{a-e}{a} \;\cong \text{arco } CM \;-\; \frac{de}{b} + \frac{g(x)\cdot(b-e)}{b}\ . \qquad [8]$$

A partir de aquí utilizando las reglas habituales del proceso de «*adigualdad*» se tiene sucesivamente:

$$\left[\text{arco } CM + g(x)\right]\cdot(a-e) \;\cong a\cdot(\text{arco } CM) \;-\; \frac{ade}{b} + g(x)\cdot a - \frac{g(x)\cdot ae)}{b}\ ,$$

$$-\left[\text{arco } CM + g(x)\right]\cdot e \;\cong \frac{d+g(x)}{b}\cdot ae\ ,$$

$$\frac{\text{arco } CM + g(x)}{a} \;\cong \frac{d+g(x)}{b}\ ,$$

es decir, según [1] $\frac{f(x)}{a} \cong \frac{d+g(x)}{b}$. [9]

Ahora de la geometría de la figura resulta: $b^2 = d^2 - [g(x)]^2$,

y de aquí: $\frac{b}{d-g(x)} = \frac{d+g(x)}{b}$. [10]

También se obtiene

$$\frac{d}{r} = \frac{b}{g(x)} = \frac{g(x)}{r-x} ,$$

de donde resulta

$$\frac{d-g(x)}{x} = \frac{b}{g(x)} ,$$

y de aquí

$$\frac{d-g(x)}{b} = \frac{x}{g(x)} . \qquad [11]$$

Combinando [10] con [11] se deduce:

$$\frac{d+g(x)}{b} = \frac{g(x)}{x} . \qquad [12]$$

Por fin, de [9] y [12] se obtiene:

$$\frac{f(x)}{a} = \frac{g(x)}{x} .$$

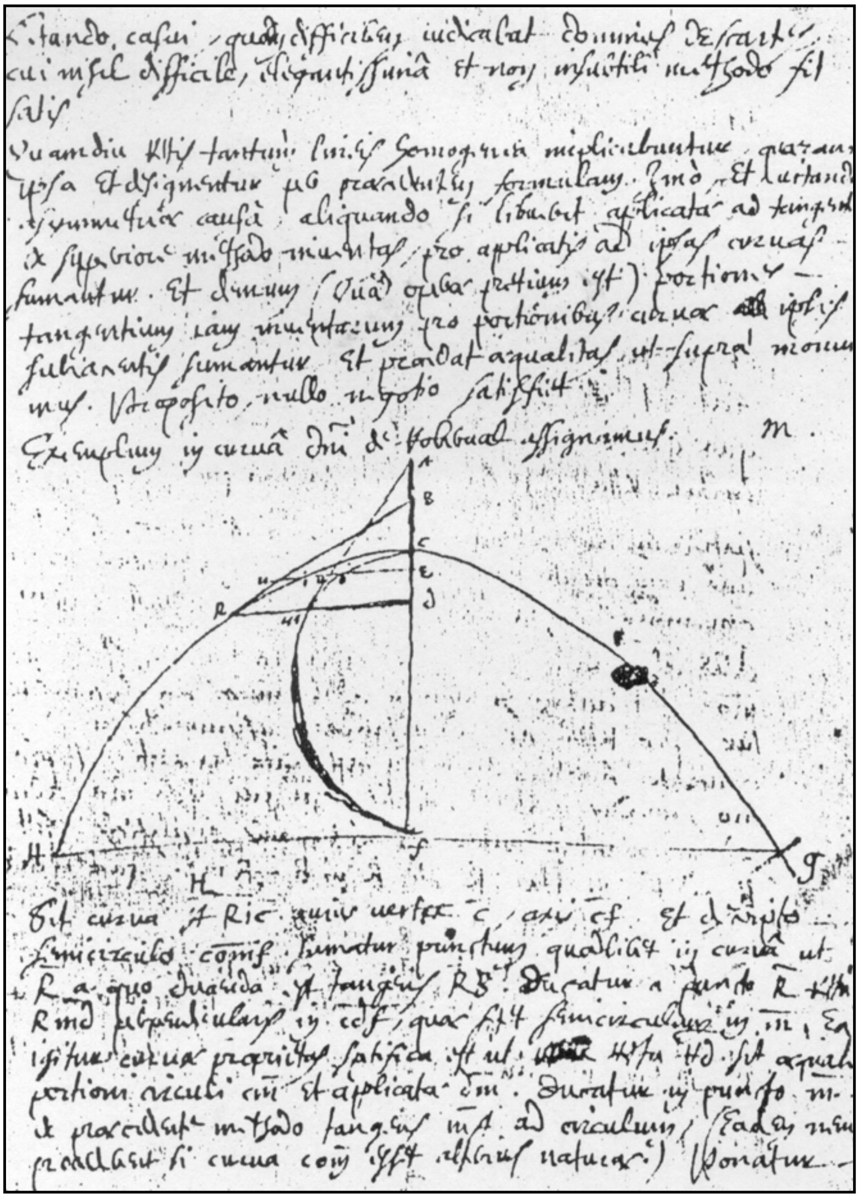
Siendo la expresión g(x)/x la pendiente del segmento MC, podemos afirmar, como dice Fermat al final de su desarrollo, que la tangente a la cicloide en el punto R, se obtiene trazando la recta paralela al segmento MC por el punto de tangencia R.

La construcción de Fermat de la tangente a la cicloide es un magnífico paradigma de utilización de todas las técnicas desarrolladas por Fermat sobre el tema de máximos y mínimos y tangentes. Sin entrar estrictamente en el terreno de lo infinitesimal Fermat en *Doctrinam Tangentium* se acerca lo más posible a este campo. Aquí la «*adigualdad*» es utilizada no únicamente para postular la pseudo–igualdad entre la ordenada de la curva y la de la tangente, sino que en la versión final del método de las tangentes, Fermat extiende su uso para conseguir la pseudo–igual dad de una longitud de arco a lo largo de una curva, con el segmento de tangente que la subtiende. Si la diferencia entre la «*adigualdad*» y lo «*aproximadamente igual*» –o igualdad en el caso límite– estaba bien clara en la *Investigación Analítica* o en el *Methodus*, esta diferencia deja de ser radical en *Doctrinam Tangentium*.

A partir de finales de 1640, la noción de «*adigualdad*» que, como se ha mencionado de forma reiterada, nació del intento de Fermat de escamotear los fundamentos puramente algebraicos del método de tangentes, empezó a sugerir aplicaciones a una nueva clase de problemas, aplicaciones que cimbreaban en la estrecha línea de separación entre el campo de lo finito y el dominio de lo infinitesimal. Fermat, que no retornó al tema después de esta época, aparentemente nunca cruzó esta línea divisoria en sus problemas de máximos y mínimos y de tangentes. Durante los siguientes años Fermat hace evolucionar de forma definitiva la «*adigualdad*» hacia «*lo aproximadamente igual*» abriendo el horizonte hacia la cuadratura y la rectificación. En efecto, en el *Tratado sobre Cuadratura* Fermat, de forma definitivamente clara dirá (TH.OF.III.218):

> [...]. *De acuerdo con el método de Arquímedes podemos "adigualar", como dice Diofanto, o igualar por aproximación*, [...].»

EL MANUSCRITO DE FERMAT *DOCTRINAM TANGENTIUM* DE 1640



Página con la tangente a la Cicloide de un manuscrito autógrafo de 1640 de la última memoria de Fermat sobre las tangentes a las líneas curvas –*Doctrinam Tangentium*– (TH.OF.III,140).

En la memoria *Doctrinam Tangentium*, Fermat se decidió a contestar a las acusaciones de Descartes sobre sus métodos de máximos y mínimos y tangentes e inició la revelación de los fundamentos de los mismos, realizando en unas pocas frases una síntesis de una magnífica investigación matemática sobre Geometría Analítica, Máximos y Mínimos y Tangentes.

Esta memoria representa por su contenido la más sofisticada versión del método de las tangentes. Fermat obtiene las tangentes a las curvas clásicas –cisoide, concoide, cuadratriz–, así como la tangente a la curva más famosa del momento –la cicloide–, donde se aprecia la potencia de los nuevos métodos surgidos de la aplicación de la Geometría Analítica de la *Introdución a los Lugares Planos y Sólidos*, al permitir aplicar el artificio de la «*adigualdad*» a las curvas mecánicas.

Fermat trata también en este escrito un problema de inflexión y por la nueva visión de antiguos y modernos conceptos, así como por la constante evolución de la «*adigualdad*» hacia «*lo aproximadamente igual*», abre la puerta hacia la cuadratura y la rectificación.

Según los historiadores de las Matemáticas, hay escasas razones para sospechar la existencia de material inédito de Fermat. Sin embargo, los hábitos de trabajo de Fermat pueden inducir a pensar en ello, ya que como se sabe, Fermat tenía arraigada la costumbre de escribir en los márgenes de los libros, de modo que aunque su copiosa biblioteca debió dispersarse a su muerte, alguno de sus libros puede permanecer en manos de algún anticuario o coleccionista. Esta es la razón por la que los editores de las *Oeuvres de Fermat* reprodujeron en la introducción del Volumen I, esta página del facsímil de la memoria *Doctrinam Tangentium*, como muestra de la escritura autógrafa de Fermat, en orden a reconocerla en otros documentos. En palabras de Paul Tannery y Charles Henry:

Reproducimos aquí un facsímil de la primera página del escrito *Doctrinam Tangentium*, que podrá servir, en caso necesario, para reconocer la escritura de Fermat. Es difícil esperar actualmente el descubrimiento de cartas u opúsculos autógrafos. Aunque su imposibilidad en modo alguno está demostrada, es en otro orden de investigaciones sobre el que llamamos la atención de los eruditos.

Fermat, que no tenía cuadernos de notas y no conservaba manuscritos, escribía sus observaciones sobre los márgenes de los libros que le pertenecían, y debía hacerlo, cualquiera que fuera la naturaleza de sus libros. Ahora bien, es difícil creer que haya tenido lugar la destrucción completa de todas las Obras que han formado parte de la biblioteca de un hombre que era no solamente un matemático de primer orden, sino que se interesaba por todas las cuestiones científicas y que era un humanista muy distinguido. Parece por consiguiente que el examen de la escritura de las notas escritas en los ejemplares de las Obras de su tiempo, podría llevar a constatar su paso por las manos de Fermat y conducir a descubrimientos interesantes.

FERMAT EN LA HISTORIA DEL CÁLCULO INFINITESIMAL

La posición de Fermat en la Historia de la Matemática en relación al descubrimiento del Cálculo Infinitesimal es una cuestión muy debatida. La Historia atribuye con más o menos razón la invención del Cálculo Infinitesimal a Newton y a Leibniz, la Geometría Analítica a Descartes y el Cálculo de Probabilidades a B.Pascal, tres de los más importantes campos de la Matemática desarrollados en el siglo XVII. Sin embargo la personalidad de Fermat está en la raíz de todos los grandes descubrimientos matemáticos del siglo XVII. Ahora bien, mientras ciertas creaciones matemáticas de la época tienen una marca poderosamente individual –la *Dinámica* de Newton, la *Geometría Proyectiva* de Desargues o la *Teoría de Números* del propio Fermat–, en lo que al Cálculo se refiere, el descubrimiento se fue fraguando de una forma gradualmente atomizada en lentas transiciones casi imperceptibles mediante la inevitable y sucesiva aparición de nuevos conceptos, métodos y técnicas que una amplia y brillante pléyade de matemáticos iban entrelazando entre sí de forma casi inextricable.

Los revolucionarios métodos y técnicas que Fermat aplica a una masa ingente de problemas –cuadraturas, cubaturas, máximos y mínimos, tangentes, rectificaciones, centros de gravedad, etc.– avalan el que muchos matemáticos, sobre todo franceses, le veneren como el verdadero descubridor del Cálculo Infinitesimal, en sus dos aspectos, Diferencial e Integral. Tras un primer contacto con los trabajos de Fermat, es fácil llegar a compartir esta opinión sobre todo si en vez de manejar obras originales se conforma uno con historias más o menos fieles, donde para hacer más inteligible al creador, se adopta un lenguaje actual, lo que le desvirtúa en mayor o menor grado. Esto es aplicable en general en la Historia de las Matemáticas, pero en el caso de Fermat es particularmente grave, por lo que toda paráfrasis debe realizarse con sumo cuidado y respeto a las ideas originales.

En las cuadraturas, Fermat busca y encuentra un rectángulo que proporcione el área de una figura bajo una curva. En su resolución del problema gravitan muchos de los elementos conceptuales esenciales de la integral definida, particularmente el equivalente al límite de una suma de infinitas áreas de rectángulos infinitamente pequeños, pero la solución de Fermat es la contestación a un específico y concreto problema geométrico. Fermat no estudia la variación de la cuadratura de una curva respecto a una abscisa variable, que genera otra curva –ideal germinal del Cálculo Integral, como muestra el trabajo de Newton con su estudio de la razón de cambio de esta nueva curva–.

Fermat formula su ingenioso y práctico método de máximos y mínimos, que tanto se asemeja formalmente al incremento infinitesimal de la variable independiente de nuestro Cálculo Diferencial, y según él, lo aplica a su método de las tangentes, aunque no es muy capaz de explicar qué vínculos –aparte de la «*adigualdad*»– hay entre ambas técnicas, es decir, qué cantidad se somete al método de máximos y mínimos en el método de las tangentes. Los procedimientos de Fermat para las tangentes son, en apariencia, sorprendentemente similares y comparables a los de nuestro *Cálculo Diferencial* que se fundamenta con la técnica de los límites. No obstante, Fermat, aunque parece encontrar la solución en el desprecio de «*potencias infinitesimales*» –en la línea de los procedimientos analíticos de Barrow para las tangentes y de Newton en su primera versión de las fluxiones–, nunca atraviesa, en el tema de máximos y mínimos y tangentes, la barrera entre lo finito y lo infinitesimal. No es fácil por tanto delimitar el nivel de contribución de Fermat al nacimiento del Cálculo Diferencial. El análisis de las memorias y la correspondencia de Fermat permite asegurar que las raíces de sus métodos residen en el campo de lo finito-algebraico de la *Teoría de Ecuaciones* de Vieta y no en ningún tipo de consideración infinitesimal, pero es indudable que desde el punto de vista de lo algorítmico y lo formal, Fermat inicia el argumento trascendental de la consideración del incremento de la cantidad que hay que hacer máxima producido por el incremento de la variable –artificio matriz de nuestro Cálculo Diferencial–, es decir, maneja, de hecho, expresiones del tipo $\frac{f(a)-f(e)}{e}$, $\frac{f(a+e)-f(a)}{e}$, –equivalentes al cociente incremental–, que intervienen en el cálculo de nuestra derivada, pero, por supuesto, sin añadir ninguna vínculo infinitesimal sobre límites, ya que, a pesar de lo que sugiere el termino diofantino de «*adigualdad*» que Fermat utiliza, la propia naturaleza de e como variable algebraica finita mantiene a Fermat en el tema de los máximos y mínimos fuera de lo infinitesimal. Además, en realidad los problemas de máximos y mínimos que plantea y resuelve Fermat son problemas de construcciones geométricas más que de optimización de cantidades. Interpretar el cálculo de Fermat de un extremo como el cálculo de una derivada de un polinomio que se hace igual a cero, es un anacronismo, porque en la mente de Fermat lo que tiene lugar es únicamente la consideración de la relación entre los coeficientes de un polinomio –la *Syncrisis* de Vieta– para que igualado a cero, la ecuación resultante tenga una raíz repetida.

En cuanto a las tangentes, Fermat no sólo es capaz de construir la tangente en un punto cualquiera de una curva dada, sino que tras su desarrollo de una Geometría Analítica, que le permite pasar de la expresión en forma de proporción de una curva a la expresión mediante una ecuación, Fermat obtiene que la tangente a la curva está implícita en la propiedad de definición de la curva –que con tan buen criterio llama *la propiedad característica* de la curva–, ya que deriva directamente de la ecuación que expresa esa propiedad. La controversia con Descartes propicia la gradual depuración de los métodos de Tangentes de Fermat, provocando una lenta pero manifiesta evolución de la «*adigualdad*»en el sentido de lo «*aproximadamente igual*» o «*igualdad en el caso límite*», acercándose cada vez más al terreno de lo infinitesimal. No obstante, en el cálculo de una tangente Fermat busca y encuentra simplemente la longitud de la subtangente, pero no llama especialmente la atención sobre el ángulo determinado por el eje y la tangente, de modo que no aparece ni siquiera implícitamente el concepto de derivada. Sólo el lector moderno –con su idioma, notación y lenguaje actuales– encuentra, de forma anacrónica, aspectos de la derivada, al interpretar los trabajos de Fermat.

Hay pues en Fermat aspectos que van, y otros que no, en la dirección de la invención del Cálculo Diferencial. En cualquier caso la contribución de Fermat fue decisiva. Los verdaderos artífices del Cálculo Diferencial, Newton y Leibniz son deudores de Fermat. El Cálculo de Fluxiones de Newton tiene su base técnica en una generalización de la regla del *Methodus* de Fermat a cantidades que dependen implícitamente de dos variables –procedimiento parecido a nuestro Cálculo Diferencial de funciones implícitas–, realizada por su maestro Barrow. Asimismo, Leibniz, que había tenido como maestro a Huygens, el cual estaba al corriente de los descubrimientos de Fermat a través de van Schooten, utiliza los recursos técnicos de Fermat –el simbolismo y el cálculo operacional– para alumbrar su propio Cálculo Diferencial.

ELOGIO DE FERMAT
Journal des Savants (9–2–1665)

Se ha conocido aquí con enorme dolor la muerte de M. de Fermat, Consejero del Parlamento de Toulouse. Ha sido uno de los más excelsos espíritus de este siglo, y un genio tan universal y de tan extensa amplitud, que si todos los sabios no hubieran dado testimonio de su mérito extraordinario, habría dificultad para creer todas las cosas que sobre él se deben decir para no cercenar en nada sus alabanzas.

Fermat había mantenido siempre una correspondencia muy particular con los señores Descartes, Torricelli, Pascal, Frenicle, Roberval, Huygens, etc. y con la mayor parte de los grandes geómetras de Inglaterra y de Italia. Había mantenido una amistad tan estrecha con M. de Carcavi, mientras fueron cofrades en el Parlamento de Toulouse, que como él ha sido el confidente de sus estudios, es todavía hoy el depositario de todos sus valiosos escritos.

Pero ya que este diario tiene como misión principal dar a conocer a través de sus obras a las personas que se han hecho célebres en la República de las Letras, nos ceñiremos a dar aquí el catálogo de los escritos de este gran hombre; dejando a los otros el cuidado de hacerle un elogio más pomposo y más amplio.

Fermat sobresalió en todas las partes de las Matemáticas; pero principalmente en la ciencia de los números y en la bella Geometría. A el se le debe:

Un método para la cuadratura de parábolas de cualquier grado.

Un método de *maximis et mínimis*, que se aplica no solamente a los problemas planos y sólidos; sino también al trazado de las tangentes, a los centros de gravedad de los sólidos y a las cuestiones numéricas.

Una introducción a los lugares, planos y sólidos, que es un tratado analítico concerniente a la solución de problemas planos y sólidos, que había sido visto antes de que Descartes hubiera publicado nada sobre este tema.

Un tratado de *contactibus sphoericis*, donde ha demostrado en los sólidos lo que Vieta había demostrado solamente en los planos.

Otro tratado en el que restablece y demuestra los dos libros de Apolonio de Perga sobre los *Lugares Planos*.

Y un método general para la rectificación de las líneas curvas.

Además, como tenía un conocimiento muy profundo de la antigüedad y era consultado por todo el mundo sobre las dificultades que se presentaban, él ha dilucidado multitud de lugares y cuestiones oscuras que se encuentran en los antiguos. [...] Pero la mayor parte de sus observaciones se encuentran dispersas en sus Epístolas, porque no escribía sobre estos temas científicos más que para satisfacer la curiosidad de sus amigos.

Todas estas obras de Matemática y todas sus curiosas investigaciones sobre la antigüedad, no impedían que M. de Fermat ejerciera su cargo con toda asiduidad y suficiencia, de modo que ha sido considerado uno de los más grandes jurisconsultos de su tiempo.

Pero lo más sorprendente es que con toda la fuerza del espíritu que es necesario para alimentar las originales cualidades de las que acabamos de hablar, Fermat tenía tan gran delicadeza de espíritu, que hacía versos latinos, franceses y españoles con la misma elegancia, que si hubiera vivido en los tiempos de Augusto, o que hubiera pasado la mayor parte de su vida en la corte de Francia o en la de Madrid.

Se hablará más particularmente de las obras de este gran hombre, cuando se haya recuperado lo que ha sido publicado y cuando se haya obtenido de M. su hijo la libertad de publicar lo que todavía no ha tenido lugar.

ÉLOGE DE MONSIEUR DE FERMAT

Conseiller au Parlament de Tolose

Du Iournal des Sçavants, du Lundy 9. Fevrier 1665.

El Método del círculo de Descartes para las normales a una curva

Descartes desarrolla en el Libro II de *La Geometría* (G.AT,VI, 412-423) un método para el trazado de las tangentes a las líneas curvas –el llamado «*método del círculo*»–, mediante la construcción previa de la recta normal. Se trata de un método puramente algebraico, donde, a diferencia de los métodos de Fermat, queda bien claro que no aparecen consideraciones de tipo infinitesimal. Es sin duda uno de los más significativos problemas de aplicación del método cartesiano, con el que Descartes participa e interviene, a través de su celebre polémica con Fermat, en el ámbito matemático de la primera parte del siglo XVII, muy ocupado en la resolución del problema del trazado de las tangentes a las líneas curvas.

Una vez concebida y definida en la primera parte del Libro II de *La Geometría*, de forma clara y distinta, *la naturaleza geométrica de las líneas curvas*, Descartes introduce uno de los principios básicos de su método ponderando su importancia en la resolución de los problemas sobre curvas (G.AT,VI, 412-413):

> «*Para encontrar todas las propiedades de las líneas curvas basta con saber la relación que tienen todos sus puntos con los de las líneas rectas, y la manera de trazar otras líneas que las corten en todos esos puntos en ángulo recto*.
>
> *Luego con sólo saber la relación que tienen todos los puntos de una línea curva con todos los de una línea recta, en la forma que he explicado, es fácil también conocer la relación que ellos tienen con todos los otros puntos y líneas dadas; y, por lo tanto, conocer los diámetros, los ejes, los centros, y otras líneas o puntos que tengan con la línea curva alguna relación particular, o más simple que otros; y, de ahí imaginar diversos modos de describirlas, y elegir los más fáciles. Y también, con sólo esto, se puede aun, encontrar casi todo lo que puede ser determinado respecto a la medida del espacio que abarcan, sin que haya necesidad de que yo me extienda más. Y, por último, en lo que respecta a todas las otras propiedades que pueden atribuirse a las líneas curvas, ellas no dependen más que de la magnitud de los ángulos que ellas forman con otras líneas. Pero, cuando puedan trazarse líneas rectas que las cortan en ángulo recto* [normales], *en los puntos en que se encuentran con aquéllas con las que forman los ángulos que se quieren medir, o, lo que aquí tomo como igual, en que ellas cortan sus contingentes* [tangentes], *la magnitud de esos ángulos no es más difícil de encontrar que si ellos estuvieran comprendidos entre dos líneas rectas. Creo por esto haber dado aquí todo lo que se requiere para los elementos de la líneas curvas, cuando haya expuesto la manera general de trazar líneas rectas que las corten en ángulos rectos en los puntos* [de las curvas] *que de ellas se elijan. Y me atrevo a decir que éste es el problema más útil y más general no sólo que yo conozca, sino aun que yo haya anhelado jamás conocer en Geometría.*»

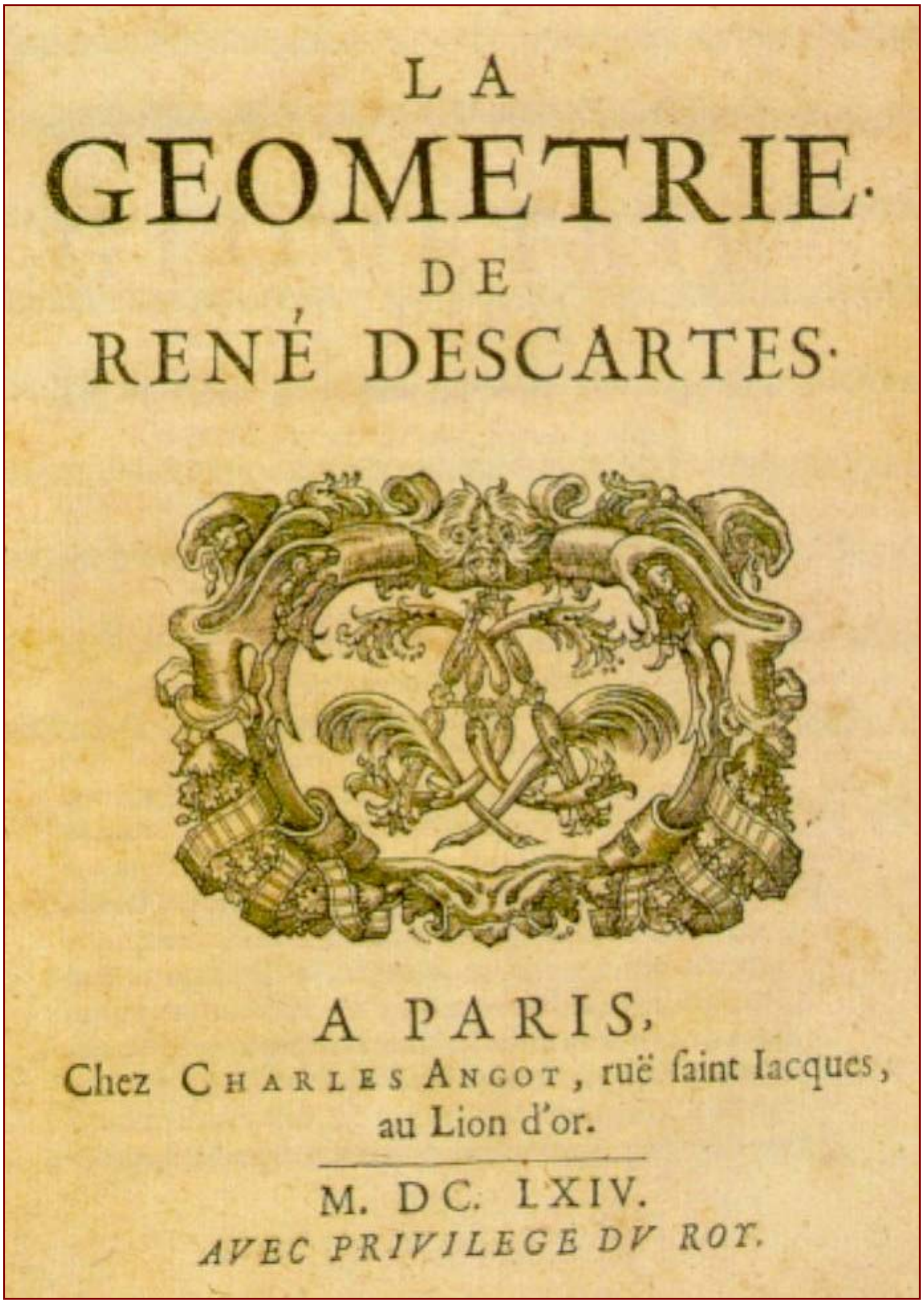
Descartes determina que «p*ara encontrar todas las propiedades de las líneas curvas basta con saber la relación que tienen todos sus puntos con los de las líneas rectas*», descrita por medio de una expresión –que es la ecuación de la curva–, y establece cómo se puede utilizar esta expresión algebraica para encontrar los elementos geométricos más notables de las curvas –diámetros, ejes, centros, etc.– y, en particular, las normales y tangentes.

Descartes añade, además, de soslayo, la frase (G.AT,VI, 413):

> «[...] *Con sólo esto, se puede aun, encontrar casi todo lo que puede ser determinado respecto a la medida del espacio que abarcan*»,

de modo que el asunto se podría aplicar al cálculo de áreas determinadas por curvas de las que se conoce la ecuación, es decir, al otro problema candente en los círculos matemáticos de la primera parte del siglo XVII, el cálculo de cuadraturas, problema al que Descartes no presta gran atención en su obra matemática.

LA GEOMETRÍA DE DESCARTES


LA

GEOMETRIE.

DE

RENÉ DESCARTES.

A PARIS,

Chez CHARLES ANGOT, ruë ſaint Iacques,

au Lion d'or.

M. DC. LXIV.

AVEC PRIVILEGE DV ROY.

***La Geometría* de Descartes, edición separada de *El Discurso del Método* (París, 1664).**

***La Geometría* de Descartes es considerada con gran unanimidad como una de las obras fundamentales del pensamiento geométrico a lo largo de toda la Historia de la Matemática. Mediante el uso del Álgebra como herramienta algorítmica esencial, Descartes dará una nueva lectura a la Geometría de los griegos, que supera sus limitaciones y trasciende sus conquistas geométricas a base de elaborar un magnífico instrumento de ataque de los problemas geométricos antiguos y modernos que libera a la Geometría de la dependencia y sometimiento a la estructura geométrica de la figura y su representación espacial y propone una forma de solución de los problemas basada en la aplicación del Análisis mediante la actuación del Álgebra, que supone el problema resuelto y establece una ordenada dependencia entre lo conocido y lo desconocido, hasta hallar el resultado buscado, de modo que las reglas del método cartesiano adquieren el sentido matemático de normas para la solución de los problemas geométricos mediante ecuaciones.**

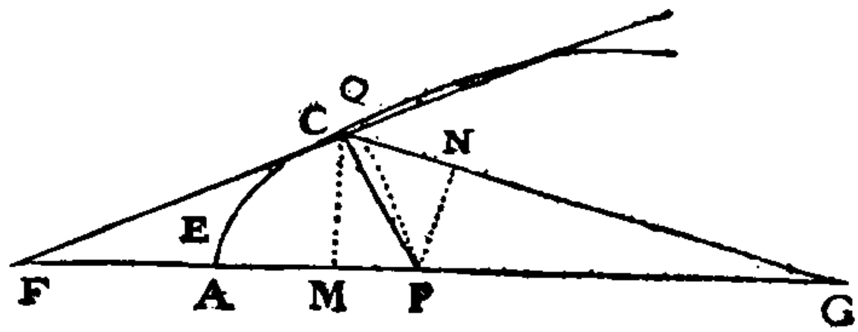
De acuerdo con la idea de Descartes acerca de la Matemática como fundamento de la sabiduría universal, y en particular como base racional de todas las ciencias, *La Geometría* de Descartes perfecciona de forma muy notable el Álgebra esbozada en el Libro II de las *Reglas para la Dirección del Espíritu* al establecer el Análisis Algebraico no sólo como un instrumento que aplicado a la Geometría creará la Geometría Analítica sino como algo mucho más universal todavía, el lenguaje de expresión y por tanto la clave de todas las ciencias.

***La Geometría* de Descartes no puede entenderse de forma aislada ya que forma parte indisoluble de un proyecto metodológico general de alcanzar la unidad de la Ciencia que Descartes intenta fijar en las *Reglas para la dirección del espíritu* y en *El Discurso del Método*. Descartes se propone con *El Discurso del Método* y los tres ensayos que lo acompañan, demostrar que ha alcanzado un nuevo método de especulación sobre la verdad científica mejor que todo método anterior y que precisamente *La Geometría* demuestra este aserto (DM.AT, I, 478).**

A continuación, Descartes entra directamente en el problema. Curiosamente utiliza la notación anterior xx para indicar x^2, en cambio adopta la notación potencial x^n para el resto de las potencias. Transcribiremos el texto de Descartes utilizando una notación uniforme x^n para todas las potencias (G.AT,VI, 413-414):

Manera general de encontrar líneas rectas que corten las curvas dadas o sus tangentes, formando ángulos rectos.

«*Sea CE la línea curva y que deba trazarse una recta por el punto C que forma con ella ángulos rectos.*



Supongamos que la cosa está hecha y que la línea buscada es CP, que prolongo hasta el punto P en que encuentra a la línea recta GA que supongo ser aquella a cuyos puntos se refieren todos los de la línea CE; de manera que haciendo MA o CB=y, y CM o BA=x, hay alguna ecuación que explica la relación que existe entre x e y [el punto B no figura en el dibujo; guiándose por las siguientes figuras, se obtendría como intersección de la perpendicular a AM por A y la paralela a AM por C].

Luego haciendo PC=s, PA=v, o bien PM=v–y, por el triángulo rectángulo PMC obtengo s^2*, que es el cuadrado de la base, igual a* $x^2+v^2-2vy+y^2$*, que son los cuadrados de los dos lados; es decir que tengo*

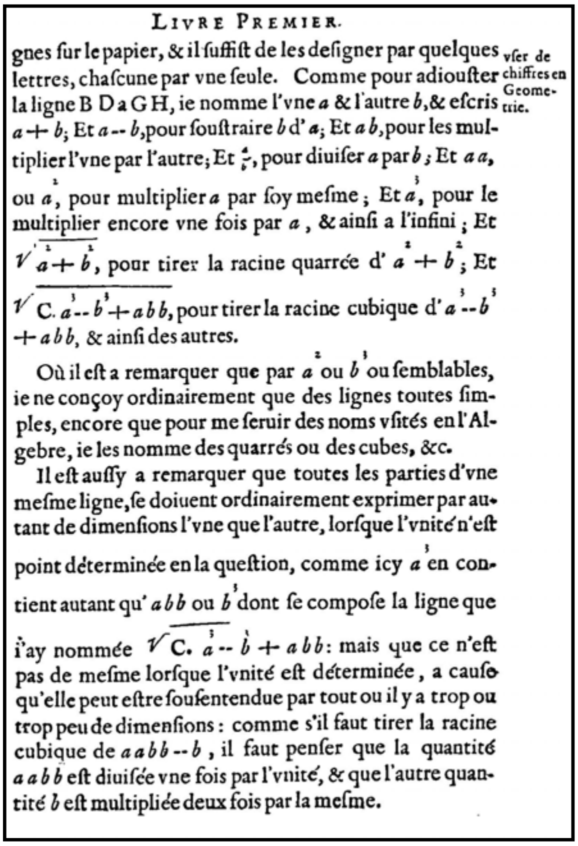
$$x = \sqrt{s^2 - v^2 + 2vy - y^2}$$

o bien

$$y = v + \sqrt{s^2 - x^2}$$

y por medio de esta ecuación, saco de la otra ecuación que da la relación que tienen todos los puntos de la curva CE con los de la recta GA [la ecuación de la curva], *una de las dos cantidades indeterminadas x o y; lo que es fácil de hacer poniendo* $\sqrt{s^2 - v^2 + 2vy - y^2}$ *en lugar de x, y el cuadrado de esta suma en lugar de* x^2*, y su cubo en lugar de* x^3*; y así los otros términos si es x que yo deseo sacar; o bien, si es y, poniendo en su lugar* $v + \sqrt{s^2 - x^2}$ *; y el cuadrado o el cubo, etc. De modo que quede siempre según esto, una ecuación en la cual no hay más que una sola cantidad indeterminada x o y.*

LA NOTACIÓN MATEMÁTICA CARTESIANA



LIVRE PREMIER.

gnes ſur le papier, & il ſuffiſt de les deſigner par quelques lettres, chaſcune par vne ſeule. Comme pour adiouſter la ligne B D a G H, ie nomme l'vne a & l'autre b, & eſcris $a + b$; Et $a - b$, pour ſouſtraire b d'a; Et ab, pour les multiplier l'vne par l'autre; Et $\frac{a}{b}$, pour diuiſer a par b; Et aa, ou a^2, pour multiplier a par ſoy meſme; Et a^3, pour le multiplier encore vne fois par a, & ainſi a l'infini; Et $\sqrt{a^2 + b^2}$, pour tirer la racine quarrée d' $a^2 + b^2$; Et $\sqrt{C.\, a^3 - b^3 + abb}$, pour tirer la racine cubique d'$a^3 - b^3 + abb$, & ainſi des autres.

vſer de chiffres en Geometrie.

Où il eſt a remarquer que par a^2 ou b^3 ou ſemblables, ie ne conçoy ordinairement que des lignes toutes ſimples, encore que pour me ſeruir des noms vſités en l'Algebre, ie les nomme des quarrés ou des cubes, &c.

Il eſt auſſy a remarquer que toutes les parties d'vne meſme ligne, ſe doiuent ordinairement exprimer par autant de dimenſions l'vne que l'autre, lorſque l'vnité n'eſt point determinée en la queſtion, comme icy a^3 en contient autant qu'abb ou b^3 dont ſe compoſe la ligne que i'ay nommée $\sqrt{C.\, a^3 - b^3 + abb}$: mais que ce n'eſt pas de meſme lorſque l'vnité eſt determinée, a cauſe qu'elle peut eſtre ſouſentendue par tout ou il y a trop ou trop peu de dimenſions: comme s'il faut tirer la racine cubique de $aabb - b$, il faut penſer que la quantité $aabb$ eſt diuiſée vne fois par l'vnité, & que l'autre quantité b eſt multipliée deux fois par la meſme.

1. **Tercera página de la edición de 1637 de *La Geometría* donde Descartes introduce el simbolismo de la notación cartesiana.**
2. **Caricatura de Descartes que publicó el 23 de marzo de 1996 la sección de PENSAMIENTO de la revista LA ESFERA del Diario *EL MUNDO* de Madrid, con motivo del cuarto centenario de su nacimiento.**

La notación que Descartes introduce en la Regla XVI de las *Reglas para la Dirección del Espíritu* (RXVI.AT.X.455) y perfecciona al comienzo de *La Geometría* (G.AT,VI, 371), fue la fórmula oportuna para su magno proyecto de reforma que alcanzó a una completa reconstrucción de la Matemática sobre premisas muy sencillas, no geométricas como en Euclides, sino algebraicas, y con unas herramientas geométricas muy sencillas, sólo el *Teorema de Tales* y el *Teorema Pitágoras*. En palabras de Descartes:

> **«[...]** ***De esta manera*** **t*omaría lo mejor del Análisis geométrico y del Álgebra y corregiría los defectos del uno por medio de la otra*» (DM.AT,VI,20).**

Descartes alude una y otra vez en las *Regulae* y en *La Geometría* a la función que debe cumplir una buena notación, simple y clara, formada de «*signos muy breves*»: «*ejercitar el entendimiento sin fatigar mucho la imaginación*» (DM.AT,VI, 17-18), para no distraer el pensamiento en retener cosas, a base de descargar la memoria por medio de la escritura para sólo confiarle lo imprescindible (RXVI.AT.X.458):

> ***«De modo general es preciso observar que jamás debe encomendarse a la memoria ninguna de las cosas que no requieran una continuada atención, si podemos depositarlas en el papel, no sea que un recuerdo superfluo para el conocimiento de un objeto nos prive de alguna parte de nuestro espíritu.»***

Aparte de su ingente contribución al nacimiento de la Geometría Analítica, a Descartes le cabe, pues, el mérito de haber dado los pasos más importantes en la introducción de la moderna notación simbólica de las Matemáticas. Descartes aplica a los problemas un nuevo y potente simbolismo simplificador, explicativo y resolutivo, que va mucho más allá de la abreviatura cósica iniciada por Diofanto y desarrollada por los algebristas italianos e incluso allende la escritura simbólica de Vieta. Los símbolos y términos de la matemática son el soporte de sus conceptos y métodos, por tanto tienen una gran importancia, y a pesar de la arbitrariedad en la elección de los signos, conviene adoptar un criterio unificador, que al ser adoptado universalmente, facilita la interpretación, la comprensión, la generalización y la mecanización, ahorra tiempo y espacio, entraña economía de pensamiento y permite una mayor y más rápida difusión. Esto es precisamente lo que consiguió Descartes con los convenios notacionales fijados en *La Geometría*, que han tenido la virtualidad de convertirse en algo poderosamente definitivo, de modo que *La Geometría*, es el primer texto matemático en el que un lector actual no encontraría dificultades con la notación.

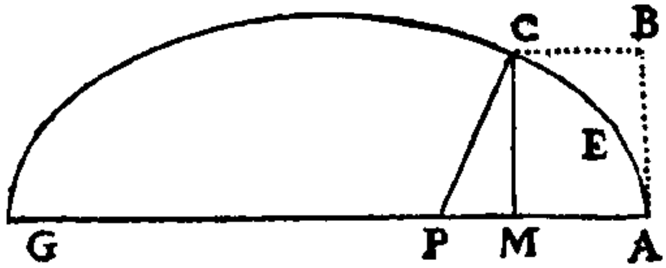
Después de Descartes, la notación algebraica es uno de los más potentes lenguajes creados por el hombre, un instrumento para la expresión breve, intuitiva y mecánica de relaciones enormemente complicadas que puedan tener entre sí objetos abstractos cualesquiera, y en su aplicación a la Geometría, el ingenio que exigía la lectura y comprensión de la obra de Euclides quedaría reemplazado por procedimientos algorítmicos automáticos.

A continuación, Descartes aplica el método desarrollado a la elipse (G.AT,VI, 414):

Si fuese CE una elipse y MA el segmento de su diámetro [eje] *al cual corresponde CM, y siendo r su lado recto y q el transverso se tiene, por el teorema 13 del Libro I de Apolonio:*

$$x^2 = ry - \frac{r}{q}y^2,$$

[ecuación de la elipse referida a ejes oblicuos, siendo uno de ellos el diámetro y el otro la tangente en su extremo]



de donde sustituyendo x^2*, queda:*

$$s^2 - v^2 + 2vy - y^2 = ry - \frac{r}{q}y^2$$

o bien

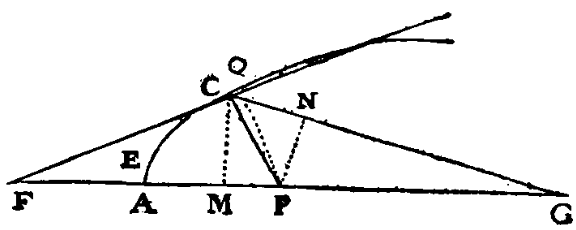
$$y^2 + \frac{qry - 2qvy + qvv - qs^2}{q - r}$$ *igual a cero.*

pues mejor, en este lugar, *considerar así en conjunto toda la suma que hacer una parte igual a otra.*»

Dada la curva CE de eje AG y vértice A, Descartes se plantea trazar la normal en el punto C, para lo cual debe encontrar un punto P sobre el eje AG que al trazar el segmento PC nos de la normal. De acuerdo con la metodología cartesiana, comienza el análisis del problema:

a) se considera resuelto, y b) se da nombre a los todos los segmentos que parecen necesarios: MA =y, CM=x, PC=s, PA=v.

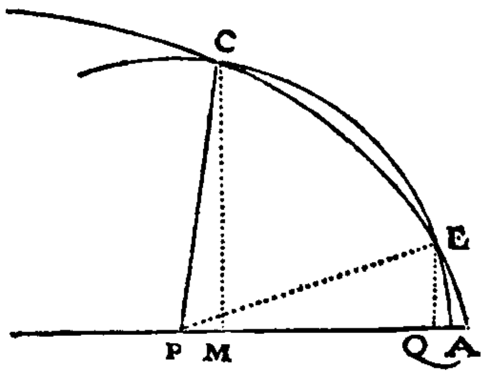
En la síntesis se indica que «[...] *Hay alguna ecuación que explica la relación que existe entre x e y*», es decir, la ecuación de la curva.



A continuación, Descartes considera la circunferencia de centro el punto P y radio el segmento PC, que cortará a la curva en algunos puntos según la naturaleza de la curva. Todavía en el ámbito geométrico del problema, Descartes intuye que el segmento PC será la normal si la circunferencia es tangente a la curva en el punto C.

Descartes prosigue realizando para la parábola cálculos análogos a los de la elipse, tras lo cual vuelve al problema general en una forma que justifica que a su regla se le denomine «*método del círculo*» (G.AT,VI, 417):

> «*Ahora, después de encontrada una ecuación así, en lugar de utilizarla para conocer las otras cantidades x o y, que son ya dadas, puesto que el punto C es dado, se la debe emplear para encontrar v o s que determinan el punto P pedido. Y, a este efecto se debe considerar que si ese punto P es el punto que deseamos encontrar, el círculo del cual es centro y que pasa por el punto C, tocará a la línea curva CE sin cortarla; pero si el punto P está ya sea más próximo o más alejado del punto A de lo debido, ese círculo cortará a la curva no sólo en el punto C, sino necesariamente en algún otro. Debe también considerarse que cuando este círculo corta la línea curva CE, la ecuación por la cual se busca la cantidad x o y, o alguna semejante, suponiendo PA y PC conocidas, contiene necesariamente dos raíces, que son desiguales. Pues por ejemplo, si este círculo corta a la curva en los puntos C y E, trazando EQ paralela a CM, los nombres de las cantidades indeterminadas x e y*



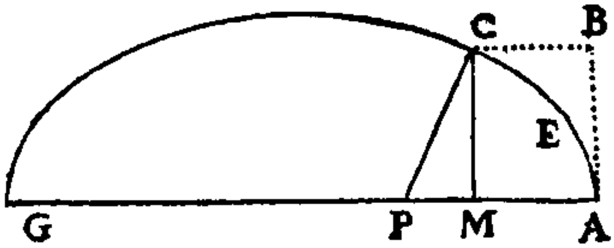
> *convendrán igualmente a las líneas EQ y QA que a CM y MA, pues PE es igual a PC por ser del círculo; si bien, buscando las líneas EQ y QA por PE y PA que se suponen dadas, se tendrá la misma ecuación que si se buscara CM y MA por PC y PA, de lo que se deduce, evidentemente, que el valor de x o de y, o de cualquier otra cantidad que se suponga, será doble en esta ecuación, es decir que habrá dos raíces desiguales entre sí, de las que una será CM y la otra EQ, si es x que se busca; o bien una será MA y la otra QA, si es y; y así las otras. Es cierto que si el punto E no se encuentra del mismo lado de la curva que el punto C, no habrá más que una de estas raíces que sea verdadera y la otra será opuesta o menor que cero; pero cuanto más próximos estén estos dos puntos el uno del otro, tanto menor diferencia habrá entre las dos raíces; y, ellas serán enteramente iguales, si ellos están juntos en uno, es decir si el círculo que pasa por C toca la curva CE sin llegar a cortarla*.
>
> *Además, debe considerarse que cuando hay dos raíces iguales en una ecuación, ella tiene necesariamente la misma forma que si se multiplica por si misma la cantidad que se supone ser desconocida menos la cantidad conocida que le es igual; después de lo cual si esta última expresión tiene dimensión inferior a la de la ecuación precedente, se la multiplica por otra suma que tenga tanta dimensión como la que le falta, de modo que pueda haber ecuación separadamente entre cada uno de los términos de la una y cada uno de los de la otra.*»

Para cada punto C de la curva hay que determinar el punto P –problema geométrico– que permite trazar el segmento PC, normal a la curva en C, es decir, hay que poner v y s en función de x e y –problema algebraico–. Suponer el problema resuelto permite determinar en un terreno algebraico la ecuación de un círculo. Regresando a la Geometría, si la recta trazada por P es la normal «*el círculo del cual es centro y que pasa por el punto C, tocará a* *la línea curva CE sin cortarla*», es decir, será tangente, cortará a la curva en un solo punto, un punto doble (en sentido actual). Ahora, volviendo al Álgebra, para que el círculo «*toque*» (sea tangente) a la curva es preciso que la ecuación resultante tenga una raíz doble. Esta ecuación resultante proviene del sistema de ecuaciones formado por la ecuación de la curva y la ecuación del círculo.

Aquí aparece otro principio fundamental de la Geometría Analítica: «la intersección de curvas –que es un problema geométrico– se reconduce a la resolución de sistemas de ecuaciones – que es un problema algebraico–.

Descartes resolverá el problema algebraico final que se plantea mediante *el método de coeficientes indeterminados*, y en este tema, así como en el asunto paralelo de las raíces dobles, también es un pionero.

Continúa Descartes aplicando el método a la elipse (G.AT,VI, 419):

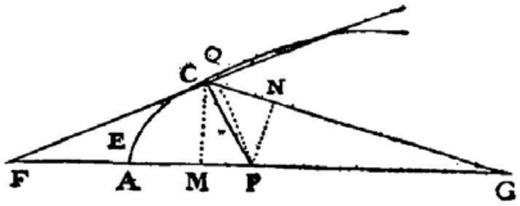
> *Así, por ejemplo, digo que la primera ecuación encontrada más arriba* [la de la elipse]*, a saber*
>
> $$y^2 + \frac{qry - 2qvy + qv^2 - qs^2}{q - r}$$
>
> 
>
>
> *debe tener la misma forma que la que se obtiene haciendo e igual a y, y multiplicando y–e por sí misma: de lo que resulta*
>
> $y^2 - 2ey + e^2$,
>
> *de manera que se pueden comparar separadamente cada uno de sus términos y decir que, puesto que el primero, que es y^2 es el mismo en la una y en la otra; el segundo que en una expresión es:*
>
> $$\frac{qry - 2qvy}{q - r}$$
>
> *es igual al segundo de la otra que es –2ey.*
>
> *De donde, buscando la cantidad v que es la línea PA, se tiene*
>
> $$v = e - \frac{r}{q}e + \frac{1}{2}r,$$
>
> *o bien, por haber nosotros supuesto e=y, se tiene*
>
> $$v = y - \frac{r}{q}y + \frac{1}{2}r,$$
>
> *y también podría encontrarse s por el tercer término:*
>
> $$e^2 = \frac{qv^2 - qs^2}{q - r}$$
>
> *pero, puesto que la cantidad v determina bien el punto P, que es el único que buscamos, no hay necesidad de proseguir.*»

De forma análoga Descartes realiza la argumentación y el cálculo para la parábola y la Concoide de Nicomedes (G.AT,VI, 420-424).

LA GEOMETRIE.

tels de leurs poins qu'on voudra choiſir. Et i'oſe dire que c'eſt cecy le probleſme le plus vtile, & le plus general non ſeulement que ie ſçache, mais meſme que i'aye iamais deſiré de ſçauoir en Geometrie.

Facon generale pour trouuer des lignes droites, qui coupent les courbes données, ou leurs contingentes, a angles droits.



Soit C E la ligne courbe, & qu'il faille tirer vne ligne droite par le point C, qui face auec elle des angles droits. Ie ſuppoſe la choſe deſia faite, & que la ligne cherchée eſt C P, laquelle ie prolonge iuſques au point P, ou elle rencontre la ligne droite G A, que ie ſuppoſe eſtre celle aux poins de laquelle on rapporte tous ceux de la ligne C E : en ſorte que faiſant M A ou C B ∞ y, & C M, ou B A ∞ x, iay quelque equation, qui explique le rapport, qui eſt entre x & y. Puis ie fais P C ∞ s, & P A ∞ v, ou P M ∞ $v - y$, & a cauſe du triangle rectangle P M C iay ss, qui eſt le quarré de la baze eſgal à $xx + vv - 2vy + yy$, qui ſont les quarrés des deux coſtés. c'eſt a dire iay x ∞ $\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$, oubien y ∞ $v + \sqrt{ss - xx}$, & par le moyen de cete equation, i'oſte de l'autre equation qui m'explique le rapport qu'ont tous les poins de la courbe C E a ceux de la droite G A, l'vne des deux quantités indeterminées x ou y. ce qui eſt ayſé a faire en mettant partout $\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$ au lieu d'x, & le quarré de cete ſomme au lieu d'xx, & ſon cube au lieu d'x^3, & ainſi des autres, ſi c'eſt x que ie veuille oſter ; ou-

Página de la edición de 1637 de *La Geometría* de Descartes relativa al trazado de rectas normales a las curvas –*método del círculo*– donde Descartes aplica uno de los Principios fundamentales de la Geometría Analítica (G.AT,VI, 412):

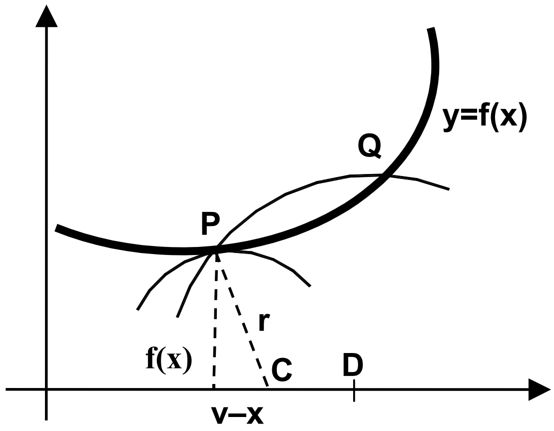
> «*Para encontrar todas las propiedades de las líneas curvas basta con saber la relación que tienen todos sus puntos con los de las líneas rectas.*»

Esta frase contiene uno de los principios más importantes de la Historia de la Matemática, que instaura los fundamentos de la Geometría Analítica. La relación que liga los segmentos o «*las líneas rectas*» que hacen la función de «*coordenadas*» de los puntos de una curva, es decir, la ecuación de la curva, permite conocer las propiedades y los elementos característicos de la curva. La ecuación de la curva establece, pues, una correspondencia entre las propiedades algebraicas de la ecuación y las propiedades geométricas de la curva asociada. De esta forma la resolución de un problema de Geometría se traslada de forma muy eficaz a resolverlo en Álgebra y, además, ésta se convierte en un poderoso instrumento de investigación geométrica.

En su «*método del círculo*» para las tangentes, Descartes evita el uso de límites e infinitesimales ideando un método puramente algebraico, basado en la igualdad de raíces, para obtener la coincidencia de puntos. Claro está que una aclaración completa de su método nos llevaría a la interpretación infinitesimal de la tangente como límite de la secante.

Para mayor comprensión del *método del círculo* de Descartes, interpretemos la técnica cartesiana para una función algebraica general, de forma deliberadamente anacrónica en términos del lenguaje moderno. Tendríamos lo siguiente:

Sea la curva $y=f(x)$, y P un punto cualquiera de ella de abscisa x, donde queremos trazar la normal. Descartes supone como siempre el problema resuelto y la solución dada por la recta CP, siendo $C=(v,o)$ la intersección de la normal con el eje de abscisas.



En general un círculo con centro en un punto D próximo a C y que pase por P, cortará a la curva $y=f(x)$, no sólo en P, sino en otro punto Q, cercano a P, pero si CP es la normal a la curva en el punto P, este punto será un punto doble de la intersección de la curva $y=f(x)$ y el círculo $(x-v)^2 + y^2=r^2$.

Eliminando la y de ambas ecuaciones resulta que la ecuación

$$[f(x)]^2 + (v-x)^2 = r^2 \qquad (1)$$

donde v,r, son fijos, debe tener la abscisa x de P como raíz doble.

Pero una función algebraica con una raíz doble $x=e$, debe ser de la forma:

$$(x-e)^2\cdot\Sigma b_n x^n,$$

de modo que se puede imponer la condición de raíz doble anterior en la forma:

$$[f(x)]^2 + (v-x)^2 - r^2 = (x-e)^2\cdot\Sigma b_n x^n \qquad (2).$$

Identificando coeficientes se encuentra el valor de v, en términos de la raíz doble e.

En general mediante el método de Descartes lo que se halla es la «*subnormal*» $v-x$, que permite hallar la pendiente de la normal: $-f(x)/(v-x)$ y de ésta la pendiente de la tangente (es decir, nuestra derivada: $(v-x)/f(x)$.

La condición de raíz doble sobre (1) hoy la impondríamos (utilizando las derivadas formales de una curva algebraica), aplicando que «*toda raíz doble de una función es raíz de su derivada*», por tanto de (1) se deduce:

$$2f(x)\cdot f'(x) - 2(v-x) = 0,$$

y de aquí:

$$f'(x)=(v-x)/f(x),$$

obteniéndose el mismo valor que antes para la pendiente de la tangente.

Apliquemos la técnica de Descartes, con lenguaje actual, a diversos casos sencillos.

A_1.- La parábola $y=x^2$.

La ecuación (2) ahora se escribe: $x^4 + (v-x)^2 - r^2 = (x-e)^2\cdot(x^2 + bx + c)$.

Identificando coeficientes se obtiene: $v=2e^3 + e$, sustituyendo $e=x$, la «*subnormal*» vendrá dada por: $v-x=2x^3$, y la pendiente de la tangente en el punto (x,x^2) de la curva será:

$$(v-x)/f(x) = 2x^3/x^2 = 2x.$$

A_2.- La parábola $y^2=2px$.

La ecuación (2) ahora se escribe: $2px + (v-x)^2 - r^2 = (x-e)^2$.

Identificando coeficientes se obtiene $v=e+p$, sustituyendo $e=x$, la «*subnormal*» vendrá dada por $v-x=p$, y la pendiente de la tangente en el punto $(x, \sqrt{2px})$ de la curva será:

$$\frac{v-x}{f(x)} = \frac{p}{\sqrt{2px}} = \frac{p}{y} .$$

La ecuación de la tangente a la parábola $y^2=2px$ en el punto (x_o,y_o) será pues: $y - y_o = \frac{p}{y_o}(x - x_o)$, de donde haciendo operaciones resulta:

$yy_o = p(x+x_o)$, expresión habitual de la tangente a la parábola.

B.- La elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

La ecuación (2) ahora se escribe: $b^2\cdot\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) + (v-x)^2 - r^2 = (x-e)^2\cdot c$

Identificando coeficientes resulta: $-(b^2/a^2) + 1 = c$, $-2v = -2ec$.

Despejando v se tiene: $v = e\cdot[1-(b^2/a^2)]$.

Sustituyendo $e=x$, la «*subnormal*» vendrá dada por $v-x=(-b^2x)/a^2$, de modo que la pendiente de la recta tangente en el punto (x,y) será:

$$\frac{v-x}{f(x)} = -\frac{b^2x}{a^2y}.$$

De aquí resulta que la ecuación de la recta tangente a la elipse en el punto (x_o,y_o) se expresará: $y - y_o = -\frac{b^2x_o}{a^2y_o}(x - x_o)$, de donde haciendo operaciones resulta:

$\frac{xx_o}{a^2} + \frac{yy_o}{b^2} = 1$, expresión habitual de la tangente a la elipse.

Bajo un punto de vista de *Geometría Algebraica* –diríamos hoy–, el método cartesiano encuentra las tangentes a las curvas –vía la normal–, mediante la técnica de considerar el doble contacto del *círculo osculador* como una característica de la normal. De este modo, Descartes obtiene un método de tratar el problema, que al intuir que será el germen de una ciencia futura, le concede una importancia capital, al reconocer que las tangentes y normales a las curvas son rectas que, de alguna forma, imponen sus leyes a las curvas.

La edición de Frans van Schooten, de 1659, de *La Geometría* de Descartes.

Los aspectos más importantes de *La Geometría* de Descartes que apuntan hacia la futura Geometría Analítica son lo siguientes:

A. Preliminares geométrico-algebraicos: «*Cómo el cálculo de la aritmética se relaciona con las operaciones de geometría*» (G.AT,VI, 369). Descartes soslaya la inconmensurabilidad, al asignar longitudes a los segmentos, previa la adopción de un segmento unidad a discreción, tras lo cual construye de forma efectiva las operaciones aritméticas y les da un significado geométrico. De esta forma Descartes elimina la *limitación pitagórica de la inconmensurabilidad.*

B. Simplificación de la notación algebraica: «*Cómo pueden emplearse letras en geometría*» (G.AT,VI, 371). Descartes considera un segmento de recta tanto como magnitud geométrica continua como una medida numérica, pero establece que la potencia de un segmento sigue siendo un segmento, así que cuadrado y cubo ya no son magnitudes planas o espaciales, sino la segunda o tercera potencia de un número. De este modo, las operaciones aritméticas quedan incluidas en un terreno estrictamente algebraico. Con ello Descartes *elimina la limitación euclídea de la homogeneidad.*

C. Aplicación de la metodología cartesiana del *Análisis* y la *Síntesis* en el planteamiento y resolución de ecuaciones que corresponden a los *problemas planos* (G.AT,VI, 372-376). Descartes desarrolla todo un protocolo de actuación –suponer el problema resuelto; dar nombre a todos los segmentos que parecen necesarios para representar los datos del problema, tanto los conocidos como los desconocidos; determinar la ecuación entre las longitudes conocidas y las desconocidas; resolver la ecuación resultante; construir geométricamente la solución–. Se trata de un verdadero método de resolución de problemas geométricos donde se transita de forma reversible de la Geometría al Álgebra y del Álgebra a al Geometría. En particular, Descartes exhibe de forma ostentosa eficientes métodos de resolución de ecuaciones y de construcción geométrica de las soluciones, que contrastan con la farragosidad del Álgebra Geométrica de *Los Elementos* de Euclides. Realmente aquí vemos la magnificencia y simplicidad de los métodos de *La Geometría* de Descartes en contraposición a la prolijidad y precariedad de la Geometría griega.

D. El *Problema de Pappus* (G.AT,VI, 377-387). Descartes introduce el primer sistema de coordenadas de *La Geometría*. Este problema fue un indicador fehaciente, ante el público científico coetáneo, de la novedad y de la inusitada potencia del método analítico cartesiano en Geometría en un asunto geométrico que desbordó a lo largo de los siglos las posibilidades del Análisis geométrico griego.

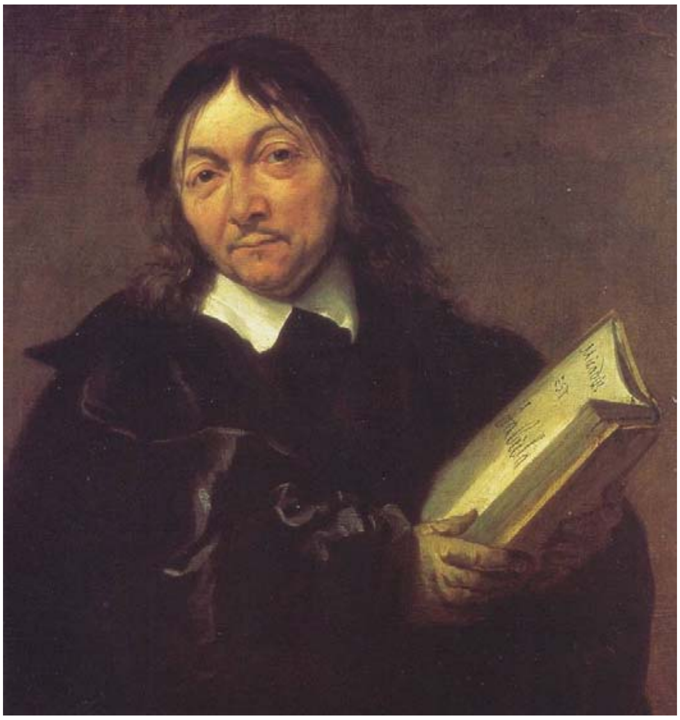
E. Determinación de las rectas normales a una curva (G.AT,VI, 412-423). Descartes resuelve de forma prodigiosa el problema de normales y tangentes, y apunta a la asociación de curvas y ecuaciones que instaura los dos principios fundamentales de la llamada Geometría Analítica.

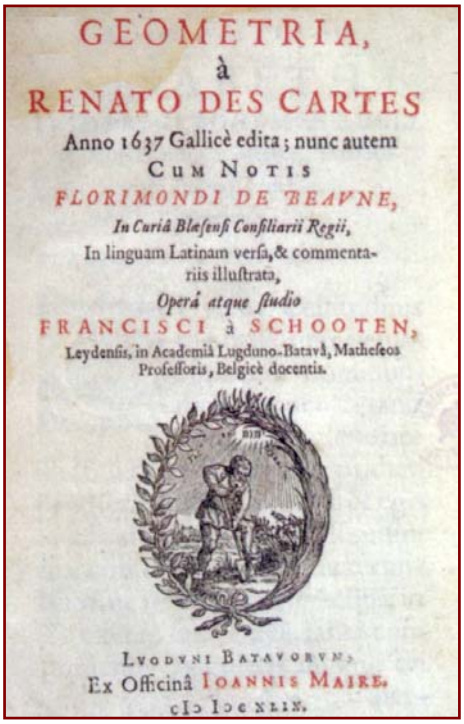
El problema del trazado de las normales a una curva en un punto, es considerado el mayor éxito del método cartesiano, marcando una impronta en la génesis de la Geometría Analítica por la capacidad que desarrolla Descartes de establecer puentes de ida y vuelta entre el Álgebra y la Geometría: análisis geométrico de los problemas, síntesis del análisis en el Álgebra de ecuaciones y traducción geométrica de los resultados algebraicos, un magnífico y poderoso diccionario reversible entre dos lenguajes, el geométrico y el algebraico, con la posibilidad de traducir no sólo en el ámbito gramatical –puntos por coordenadas, curvas por ecuaciones–, sino también en el dominio sintáctico –las relaciones entre los elementos geométricos, por ejemplo intersecciones de curvas, se traducen en relaciones entre los correspondientes elementos algebraicos, por ejemplo mediante sistemas de ecuaciones–.

Con un énfasis inusitado Descartes considera que este problema es el más importante, no sólo de cuantos ha resuelto sino de cuantos anhelara descubrir en Geometría (G.AT,VI,413):

> «[...] *Y me atrevo a decir que éste es el problema mas útil y mas general no sólo que yo conozca, sino aun que yo haya anhelado jamás conocer en Geometría*».

Con estos antecedentes, se comprende la sorprendente acritud con que se desarrolló su polémica con Fermat, a partir de la difusión de los métodos de máximos y mínimos ideados por este «*aficionado*» ya que se aplicaban también al trazado de tangentes. El desarrollo de la controversia, en el que participaron casi todos los matemáticos del círculo de Mersenne, tuvo la feliz virtualidad de ir obligando progresivamente a Fermat a aclarar la naturaleza de sus procedimientos, en el curso de lo cual nuevas curvas nacieron para la Geometría Analítica y para el Cálculo Infinitesimal, que simultáneamente estaba eclosionando gracias a toda la parafernalia analítica que ofrecían los métodos de Fermat y Descartes.





GEOMETRIA,
à
RENATO DES CARTES
Anno 1637 Gallicè edita; nunc autem
Cum Notis
FLORIMONDI DE BEAUNE,
In Curiâ Blæsensi Consiliarii Regii,
In linguam Latinam versa, & commentariis illustrata,
Operâ atque studio
FRANCISCI à SCHOOTEN,
Leydensis, in Academiâ Lugduno-Batavâ, Matheseos Professoris, Belgicè docentis.

LUGDUNI BATAVORUM,
Ex Officinâ IOANNIS MAIRE.
cIↄ Iↄc xlix.

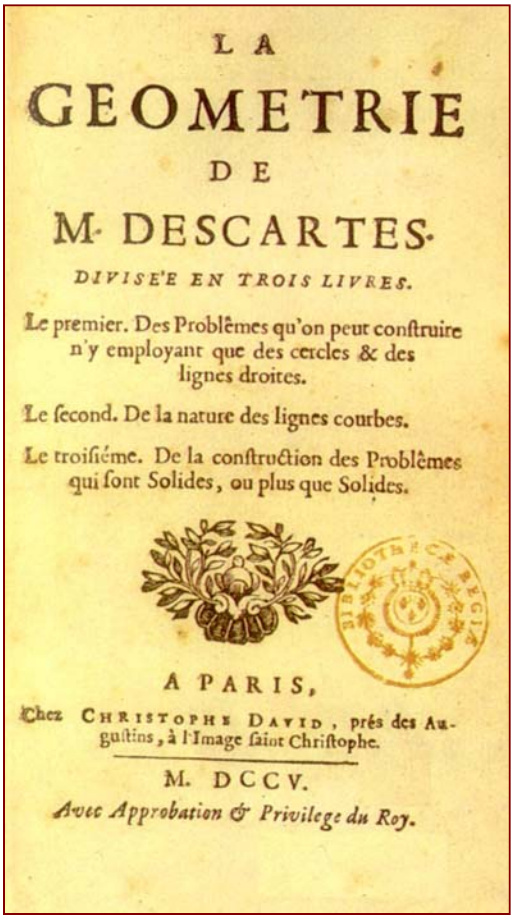
1. **Retrato de Descartes por Weenix. Museo de Utrecht.**
2. **La edición en latín de 1649 de van Schooten (con notas de F. De Beaune) de *La Geometría* de Descartes, es la primera edición separada de *El Discurso del Método*. Esta edición contribuyó de forma muy considerable a la difusión de la obra de Descartes.**

A Descartes se le considera, junto con Fermat, el fundador de la Geometría Analítica. En el propio ámbito de *La Geometría*, Descartes hizo trascendentales contribuciones a la *Teoría de Ecuaciones*, donde vislumbró importantes cuestiones como la *regla de los signos* para descifrar el número de raíces negativas y positivas de cualquier ecuación algebraica, la *Regla de Ruffini* y el *Teorema Fundamental del Álgebra*. Además en sus estudios sobre poliedros, parece ser que Descartes llegó a conocer la conocida *Formula de Euler* que relaciona aristas, caras y vértices de un poliedro.

Dibujo a plumilla de la tradicional efigie de Descartes que procede del retrato de Descartes del Museo de Louvre que se atribuye a F.Hals.

LA GEOMETRÍA DE DESCARTES SUPERA LAS LIMITACIONES DE LA GEOMETRÍA GRIEGA


RENATI DES CARTES
GEOMETRIA,
Unà cum Notis
FLORIMONDI DE BEAUNE,
In Curia Blesensi Consiliarii Regii, & Commentariis illustrata,
Operâ atque studio
FRANCISCI à SCHOOTEN,
in Acad. Lugd. Batav. Matheseos Professoris.
AB EODEM DUM VIVERET DILIGENTER RECOGNITA,
locupletioribus Commentariis instructa, multisque egregiis accessionibus, tam ad uberiorem explicationem, quam ad ampliandam hujus Geometriæ excellentiam facientibus exornata.
Nunc verò à Viro Clariss. denuo revisa, & ab innumeris mendis, quibus priores Editiones scatebant, repurgata, unà cum notis quibusdam & animadversionibus tumultuariis in universum Opus, huic quartæ editioni recens adjectis.
Accedit insuper
COMPENDIUM MUSICÆ.
Cum Gratia & Privilegio Sacræ Cæs. Majest.
FRANCOFURTI AD MOENUM,
Sumptibus FRIDERICI KNOCHII, Bibliop.


LA
GEOMETRIE
DE
M. DESCARTES.
DIVISÉE EN TROIS LIVRES.
Le premier. Des Problêmes qu'on peut construire n'y employant que des cercles & des lignes droites.
Le second. De la nature des lignes courbes.
Le troisiéme. De la construction des Problêmes qui sont Solides, ou plus que Solides.

A PARIS,
Chez CHRISTOPHE DAVID, prés des Augustins, à l'Image saint Christophe.
M. DCCV.
Avec Approbation & Privilege du Roy.

1. **Edición latina de 1695 de van Schooten de *La Geometría* de Descartes.**
2. **Edición francesa de 1705 de *La Geometría* de Descartes.**

A diferencia de las obras de Fermat, *La Geometría* de Descartes tuvo numerosas ediciones, tanto en latín como en francés, algunas de ellas con prolijos comentarios para hacerla más inteligible, es decir, que eran auténticas ediciones críticas. Por ello los rudimentos de Geometría Analítica de *La Geometría* de Descartes recibieron una amplia difusión.

***La Geometría* de Descartes transforma los antiguos instrumentos de la Geometría griega –el Álgebra Geométrica y el Análisis Geométrico– en lo que hoy llamamos la Geometría Analítica cartesiana, mediante la intervención del Álgebra literal a la que el propio Descartes contribuyó de forma definitiva con la contundente y eficaz reforma y simplificación de la notación algebraica.**

En concreto *La Geometría* de Descartes elimina de forma brillante toda una serie de limitaciones que el carácter geométrico-sintético imponían a la Geometría griega:

- **Limitación pitagórica de la inconmensurabilidad.**
- **Limitación platónica de los instrumentos geométricos –regla y compás–.**
- **Limitación euclídea de la homogeneidad dimensional.**
- **Limitación tridimensional.**
- **Limitación de la dependencia de las figuras geométricas.**
- **Limitación de la imposibilidad de asignar números a las figuras geométricas.**

Muchos pensadores conceden mayor importancia a la reforma cartesiana de las Matemáticas que a su intervención en la Filosofía. Así parece deducirse, por ejemplo, de la siguiente frase de J. Stuart Mill (citada por E.Bell en *Les grands mathématiciens*. Payot, París, 1950. Cap.3. p.46):

> ***«La Geometría analítica, mucho más que cualquiera de sus especulaciones metafísicas, inmortaliza el nombre de Descartes y constituye el máximo paso hecho en el progreso de las ciencias exactas.»***

LA GEOMETRÍA ANALÍTICA COMO INSTRUMENTO DEL CÁLCULO INFINITESIMAL

La Geometría Analítica desarrollada por Fermat y Descartes tuvo un papel decisivo en el desarrollo de las técnicas del Cálculo del siglo XVII. La investigación infinitesimal se nutre ante todo del planteamiento y resolución de problemas de cuadraturas y tangentes sobre curvas. Cabe decir que pioneros de los métodos y técnicas del Cálculo del siglo XVII, como Kepler e incluso Cavalieri, no tuvieron a su disposición los desarrollos geométricos de Fermat y Descartes, de modo que el número de curvas que manejaron y a las que podían aplicar las técnicas algorítmicas del Cálculo que iban descubriendo era muy limitado, prácticamente las mismas que conocieron los griegos –las cónicas de Menecmo y Apolonio, la cisoide de Diocles, la concoide de Nicomedes, la cuadratriz de Hipias, la Hipopede de Eudoxo, la espiral de Arquímedes y pocas más–. Además, todavía manejaron las curvas en el farragoso lenguaje del *Álgebra Geométrica* mediante relaciones de áreas y proporciones. Los trabajos de Fermat y Descartes en *La Introducción a los Lugares Planos y Sólidos y La Geometría*, respectivamente, abren el camino a la introducción sistemática de nuevas curvas y a un manejo más útil, sencillo y operativo, mediante las ecuaciones de las curvas.

En efecto, el *Principio fundamental de la Geometría Analítica*, expresado en lenguaje moderno, consiste en el descubrimiento de que las ecuaciones indeterminadas en dos incógnitas, f(x,y)=0, se corresponden con lugares geométricos, en general curvas, determinadas por todos los puntos cuyas coordenadas relativas a dos ejes satisfacen la ecuación. Un aspecto de esta idea es expresada por Descartes en el Libro II de *La Geometría* de la siguiente forma (G.AT,VI, 412):

> «*Para encontrar todas las propiedades de las líneas curvas basta con saber la relación que tienen todos sus puntos con los de las líneas rectas,* **[...].»**

El aspecto complementario de la idea de Descartes es expresado por Fermat casi al comienzo de la *Introducción a los Lugares Planos y Sólidos* con estas lacónicas palabras (TH.OF.III.85):

> «*Siempre que en una ecuación final se encuentran dos cantidades incógnitas, se tiene un lugar geométrico, describiendo el extremo de una de ellas una línea recta o curva*.»

En ambas sentencias se compendia uno de los principios fundamentales de la Historia de la Matemática, que instaura los cimientos de la Geometría Analítica. De acuerdo con ello, las curvas planas están determinadas por la ecuación canónica asociada, trasunto de las propiedades y los elementos característicos de la curva, es decir, la ecuación de la curva establece una relación entre las propiedades algebraicas de la ecuación y las propiedades geométricas de la curva. Por el simple hecho de escribir una ecuación una nueva curva queda definida en el panorama geométrico para la indagación de problemas infinitesimales vinculados a ella, de modo que aparece en el ambiente matemático de los dos primeros tercios del siglo XVII una ingente cantidad de nuevas curvas que se definen a propósito de la introducción de la Geometría Analítica, entre las que sobresalen: el caracol de Pascal, el folium de Descartes o galande de Barrow, la curva de Lamé, la espiral logarítmica, la kappa-curva, la curva tangentoidal, pero sobre todo las parábolas, hipérbolas y espirales generalizadas o de orden superior –llamadas de Fermat por ser él quien las introdujo– y la más famosa, la cicloide, la reina de todas las curvas, llamada la *Helena de la Discordia*, por las polémicas que surgieron sobre cuestiones de prioridad y acusaciones de plagio acerca de la resolución de problemas vinculados a ella. Importantes trabajos dedicaron a esta curva Fermat, Descartes, Pascal, Roberval y otros matemáticos.

El vasto horizonte de nuevas curvas promueve la aparición de multitud de variadas técnicas algorítmicas infinitesimales al disponer de un amplio material geométrico al que aplicarlas. Las Geometrías Analíticas de Fermat y Descartes permiten utilizar la expresión algebraica de la ecuación de una curva para encontrar sus elementos geométricos más notables –diámetros, ejes, centros, etc.– y, en particular, en el terreno infinitesimal resolver los problemas de cuadraturas y tangentes relacionadas con la curva. La Geometría Analítica traslada los problemas infinitesimales de la Geometría al Álgebra, la cual por su carácter operacional, permite, tras la realización de cálculos y en particular la resolución de ecuaciones, regresar a la geometría del problema, para encontrar y solucionar cuestiones geométricas. Como consecuencia, la tarea de probar un teorema o resolver un problema geométrico de índole infinitesimal se conduce de forma muy eficiente a probarlo o resolverlo mediante el Álgebra, de modo que la aplicación de la Geometría Analítica proporciona una potente técnica de resolución de problemas infinitesimales, y algo todavía más importante, un poderoso instrumento de exploración e investigación geométricas en el ámbito infinitesimal.

LA GEOMETRÍA ANALÍTICA COMO INSTRUMENTO DEL CÁLCULO INFINITESIMAL

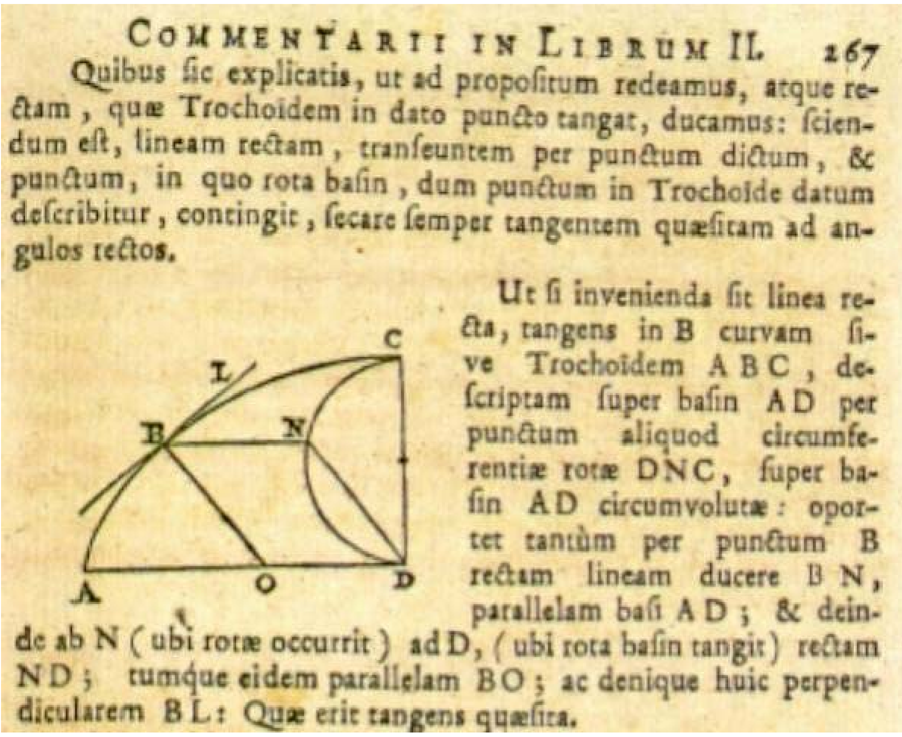
La aparición de La Geometría Analítica tuvo un papel decisivo en el proceso de alumbramiento de las técnicas del Cálculo del siglo XVII que fueron produciendo la transformación analítica de la Geometría Sintética Infinitesimal de Arquímedes en el algoritmo infinitesimal del Análisis Matemático de Newton y Leibniz.

La irrupción de la Geometría Analítica en el panorama matemático del siglo XVII propicia una unificación de los problemas infinitesimales. La sustitución de las complejas construcciones geométricas de la Geometría Sintética por automáticas operaciones algebraicas permite la aplicación de las mismas técnicas a problemas de naturaleza geométrica diversa, además de poner de manifiesto el proceso heurístico de descubrimiento que tiene lugar de consuno con la justificación de las diversas técnicas y métodos infinitesimales.

En las cuadraturas y cubaturas del Cálculo Integral, la Geometría Analítica favorece una progresiva aritmetización del *método de exhaución* de los griegos –cuya aplicación dependía de manera esencial de la forma geométrica particular de la figura a cuadrar–. Con ello se va favoreciendo una incipiente y subrepticia utilización de los límites, que aunque en un nivel intuitivo, su uso va siendo cada vez más general

En cuanto a las tangentes del Cálculo Diferencial, la generalidad del Álgebra frente a la especificidad de la Geometría, permite, por ejemplo, que en la traducción geométrico-algebraica en que consiste la Geometría Analítica, cada caso particular del trazado geométrico de la tangente, que es diferente y específico para cada curva, de acuerdo con su naturaleza geométrica, deje de serlo y se pueda aplicar, mediante un proceso analítico, el mismo procedimiento a todas las curvas de las que se conozca su expresión analítica –su ecuación–, es decir, el proceso algorítmico de cálculo de una derivada. Así pues, la Geometría Analítica permite sustituir la construcción geométrica de la tangente, que es singular para cada curva según su estructura geométrica, por una operación analítica, única y universal: «*el cálculo de una derivada*»

He aquí una muestra muy significativa de la trascendencia de la Geometría Analítica como herramienta que simplifica y reduce una extensa tipología de problemas geométricos –el cálculo de cuadraturas y cubaturas se reconduce al cálculo de un límite, mientras el trazado de las tangentes de las diversas curvas se reduce a un único y concreto problema analítico: el cálculo de la derivada–. Por eso la Geometría Analítica de Fermat y Descartes tuvo una importancia trascendental en el fecundo proceso de algoritmización que condujo al descubrimiento del Cálculo Infinitesimal por Newton y Leibniz.


COMMENTARII IN LIBRUM II. 267

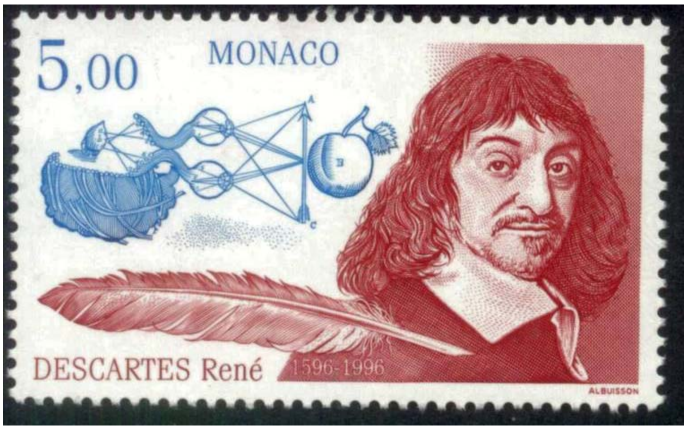
Quibus sic explicatis, ut ad propositum redeamus, atque rectam, quæ Trochoidem in dato puncto tangat, ducamus: sciendum est, lineam rectam, transeuntem per punctum dictum, & punctum, in quo rota basin, dum punctum in Trochoide datum describitur, contingit, secare semper tangentem quæsitam ad angulos rectos.

Ut si invenienda sit linea recta, tangens in B curvam sive Trochoidem A B C, descriptam super basin A D per punctum aliquod circumferentiæ rotæ D N C, super basin A D circumvolutæ: oportet tantùm per punctum B rectam lineam ducere B N, parallelam basi A D; & deinde ab N (ubi rotæ occurrit) ad D, (ubi rota basin tangit) rectam N D; tumque eidem parallelam B O; ac denique huic perpendicularem B L: Quæ erit tangens quæsita.

Página de la edición de van Schooten de 1695 de *La Geometría* de Descartes.

Se trata de un apunte de van Schooten donde se explica el cálculo cartesiano de la tangente a la cicloide, que sin duda es la más importante curva sobre la que se ensayaron y aplicaron los métodos y técnicas infinitesimales que aparecieron a lo largo del siglo XVII como consecuencia del gran desarrollo de la Geometría Analítica de Descartes y Fermat.

IMÁGENES DE DESCARTES EN LOS SELLOS DE CORREOS



1. **Emitido en Francia el 9 de junio de 1937, en conmemoración del tercer centenario de la publicación de *El Discours sur la Méthode.***
2. **Emitido en Mónaco en el 400 aniversario del nacimiento de Descartes.**
3. **Emitido en Francia en el 400 aniversario del nacimiento de Descartes.**
4. **Emitido en Granada con motivo del año 2000 de las Matemáticas.**
5. **Emitido en Sierra Leona con motivo del año 2000 de las Matemáticas.**

Los métodos cinemáticos de Roberval.

Roberval y Torricelli desarrollaron entre 1630 y 1640 un método para el trazado de tangentes basado en argumentos cinemáticos. Torricelli lo dio a conocer en su *Opera geometrica*, pero Roberval como era habitual en él no lo publicó, conociéndose vía los *Cogitata phisico-mathematica* del Padre Mersenne.

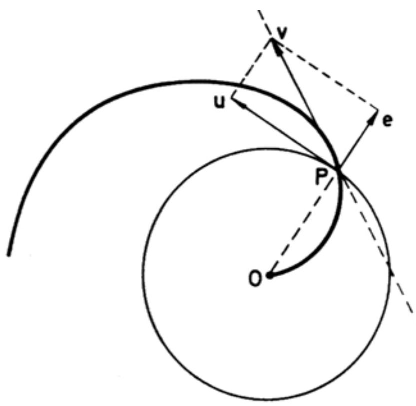
Roberval establece que la dirección del movimiento de un móvil que describe una circunferencia es la perpendicular en el extremo del diámetro, y de aquí, generalizando, enuncia lo que él llama axiomas o principios de invención para encontrar las tangentes a las curvas:

> «*La dirección del movimiento de un punto que describe una línea curva, es la tangente a la curva en cada posición de este punto.*»
>
> «*Para trazar la tangente a una curva dada, mediante las propiedades específicas de la curva, se examinan los diversos movimientos que tiene el punto que la describe: todos estos movimientos se componen en uno solo, trazando la línea de dirección del movimiento compuesto, tendremos la tangente.*»

Es decir el método de Roberval utiliza el concepto intuitivo de movimiento instantáneo y se basa en tres principios básicos:

1. Considerar una curva como la trayectoria de un punto móvil.
2. Considerar la tangente en un punto de la curva como la dirección del movimiento instantáneo en ese punto móvil.
3. Si el movimiento del punto que describe la curva es una combinación de movimientos simples, la línea instantánea del movimiento o dirección de la tangente puede hallarse por composición de movimientos, mediante la bien conocida ley del paralelogramo.

Roberval consiguió con su método determinar las tangentes de todas las curvas típicas de la época. Veamos el caso de la espiral de Arquímedes y la cicloide.



La recta OP gira en torno al punto O –que permanece fijo– con movimiento uniforme mientras el punto P se mueve a lo largo de ella con movimiento uniforme. El movimiento que describe el punto P engendra la *Espiral de Arquímedes*.

Siendo la espiral resultante de un movimiento radial y de un movimiento tangencial al círculo de centro O y radio OP, en cada punto P, la tangente en este punto se obtendrá componiendo el vector radial que da la velocidad radial con el vector tangencial que representa a la velocidad tangencial, por aplicación de la ley del paralelogramo –que en este caso es un rectángulo–.

Pero al igual que para las cuadraturas, el ejemplo más significativo de aplicación de los métodos de Roberval es la construcción de la tangente a la cicloide.

Roberval recuerda que el punto P que describe la cicloide en un instante genérico, está sometido a dos movimientos:

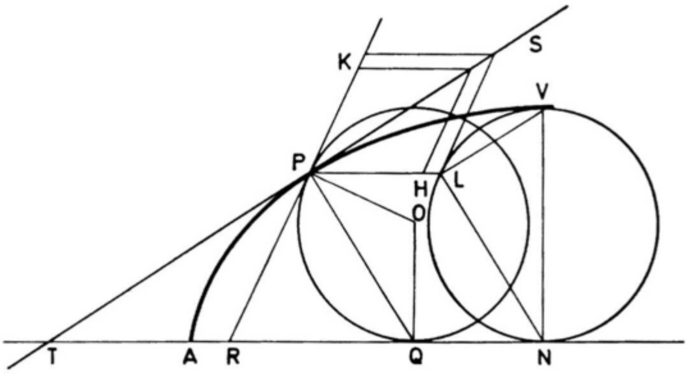
a. Un movimiento rectilíneo uniforme de dirección PH, paralela a la base AN, y

b. Un movimiento de rotación uniforme alrededor de la circunferencia generatriz, cuya dirección PK, es la de la tangente a ésta en P.

La razón entre ambas velocidades es la razón entre AN y la semicircunferencia NLV, es decir igual a 1, de modo que PH=PK tienen la misma longitud. De la igualdad de velocidades –el paralelogramo de la ley es un rombo– se deduce que la dirección del movimiento resultante y por tanto de la tangente en P, es la bisectriz del ángulo que forman los segmentos PH y PK.

Se verifica, además, que la recta PQ que une el punto P de tangencia con el punto Q, en el cual el círculo generador que pasa por P, toca a la base, es la normal a la cicloide en P. En efecto, el triángulo RPQ es isósceles ya que RP=RQ (por tangencia y potencia), además, PH es paralela a AN, luego:

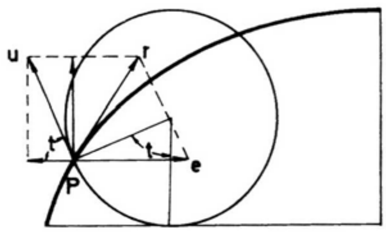
<RPQ = <PQR = <QPH,



de donde resulta que PQ es la bisectriz del ángulo <RPH. Siendo PS la bisectriz del ángulo HPK, se tiene que PQ y PS son bisectrices interior y exterior del mismo ángulo, en particular PQ y PS son perpendiculares, y como PS es la tangente en P, PQ será la normal en P.

Roberval sigue estudiando la geometría de la figura y demuestra fácilmente que la tangente a la cicloide es la recta por P paralela a LV, siendo NLV el círculo generador central –que da el vértice a la cicloide–, que es el mismo resultado obtenido por Fermat con su método de las tangentes.

En coordenadas cartesianas sabemos que la ecuación de la cicloide viene dada por:



$$\left.\begin{array}{l} x = t - \text{sen } t \\ y = 1 - \cos t \end{array}\right\}$$

Los vectores de velocidad instantánea en el punto P serán:

e = (1,0) para la traslación

u = (-cos t,sen t) para la rotación.

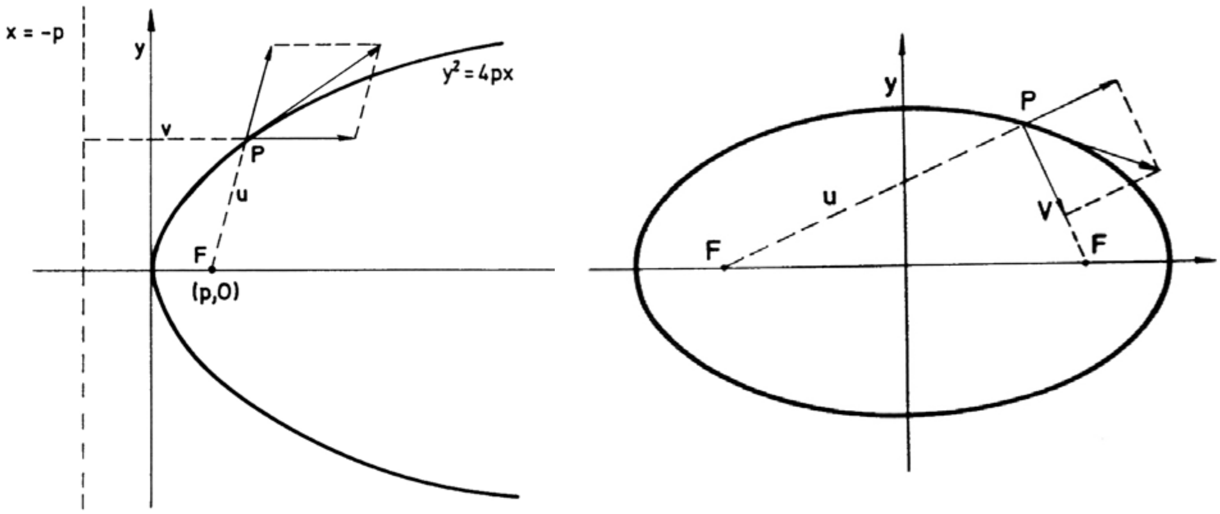
Según la ley del paralelogramo el vector velocidad instantánea en el punto P y por tanto la dirección de la tangente a la cicloide en P será:

v = (1-cos t, sen t) .

Observamos que este resultado podríamos obtenerlo mediante la derivación término a término de las ecuaciones paramétricas de la cicloide lo que vendría a confirmar, al menos para este caso, la validez del método de Roberval.

Roberval aplicó también su método al trazado de las tangentes a las cónicas. Para ello concibió las cónicas como curvas mecánicas, tomando como movimientos generadores, los movimientos de acercamiento y alejamiento de los focos para la elipse y la hipérbola, y del foco y la directriz para la parábola.

Ya que la parábola es el lugar de los puntos que equidistan de la directriz x=-p y del foco F=(p,0), Roberval la considera engendrada por la composición de dos movimientos, uno de traslación uniforme alejándose perpendicularmente de la directriz, y otro radial uniforme alejándose del foco. El paralelogramo de velocidades –que en este caso es un rombo– determina la velocidad resultante y por tanto la tangente a la parábola en un punto P tiene la dirección de la bisectriz del ángulo que forman el radio focal en P con la perpendicular desde el punto a la directriz.



Mediante un argumento similar, Roberval obtiene que la tangente ala elipse en un punto P es la bisectriz del ángulo que forman dos vectores de igual magnitud en las direcciones de los radios vectores u,v en P, uno alejándose de un foco y otro acercándose al otro foco.

Roberval obtuvo la dirección correcta de las tangentes a la elipse e hipérbola, pero erró en el cálculo de la intensidad de la velocidad.

Roberval obtuvo incluso la tangente a la cuadratriz, aunque su argumentación en la aplicación de su método a este ejemplo no es muy diáfano.

La construcción de las tangentes por el método de Roberval es muy atractiva, por lo simple que es y por la apariencia que da de exactitud absoluta, pero realmente no es un método general, ya que precisa determinar las leyes del movimiento y calcular las velocidades, lo que a veces resulta complicado o imposible. El método fue aplicado durante mucho tiempo sin prevención alguna, hasta que en 1831 Duhamel observó la aplicación incorrecta en algunos casos, ninguno de ellos resuelto por Roberval, lo que hace pensar que éste eligió bien los ejemplos a los que lo aplicó, o tuvo realmente mucha suerte. Duhamel evidenció el defecto que empaña al método algunas veces; se trata de la errónea medida de las velocidades componentes ya que éstas no son proporcionales, en general, a los incrementos infinitamente pequeños de los radios vectores. Las variaciones de longitud instantáneas son determinadas por las proyecciones ortogonales de la diagonal del paralelogramo, mientras que las velocidades son los propios lados del paralelogramo. No hay proporcionalidad entre estas variaciones y las velocidades, salvo cuando el paralelogramo de velocidades es un rectángulo o un rombo, tal como eran en los ejemplos elegidos por Roberval.

Los métodos diferenciales de Barrow

Isaac Barrow criticó el enfoque aritmético que Wallis había dado al Cálculo y bajo un punto de vista conservador, reivindicó, en contra de los métodos algebraicos de la Geometría Analítica de Fermat y Descartes, el regreso a las formas rigurosamente euclídeas clásicas en las concepciones numéricas y geométricas, lo que contribuyó al retraso en el uso efectivo y correcto de la noción de límite, que requiere para su definición rigurosa de una concepción de número no basada estrictamente en la interpretación geométrica de magnitudes continuas. Como además el influjo de Barrow sobre Newton fue decisivo probablemente contribuyó a que éste evitara la noción aritmética de límite y se guiara en su gestación del Cálculo por la noción de variación continua de cantidades en el movimiento y en la Geometría.

Barrow publica en 1669 las *Lectiones Opticae* y en 1670 las *Lectiones Geometricae*, en ambas teniendo al joven Newton como colaborador. En ellas Barrow realiza la primera exposición orgánica del incipiente Cálculo, obteniendo numerosos teoremas geométricos, en parte nuevos, que representan en conjunto un gran avance para el Cálculo. No sólo problemas sobre cuadraturas –equivalentes a los cambios de variable e integración por partes– de tangentes –pendiente de funciones definidas implícitamente, propiedades aditivas de la derivada–, rectificación de curvas –resultados equivalentes a la fórmula $ds^2=dx^2+dy^2$ y rectificación de la parábola–, sino también un embrión geométrico del *Teorema Fundamental del Cálculo*.

Barrow no utiliza apenas el simbolismo aritmético y algebraico de Wallis, Fermat y Descartes –al primero le critica y a los últimos les ignora–. Al contrario, Barrow razona y escribe en un abstruso, artificioso y casi ininteligible lenguaje geométrico, que oculta el importante valor y la novedad de los resultados, lo que da la apariencia de ser una compleja generalización de los resultados geométricos clásicos de los antiguos y que hacen su obra de difícil y onerosa lectura. Sin embargo, cuando se refunde su obra en términos de nuestro Análisis Matemático actual –lo que hacen algunos libros de Historia de las Matemáticas–aparecen multitud de reglas de uso común y teoremas de diferenciación e integración habituales en los textos de la materia. Claro está que realizar esto sería una paráfrasis exagerada y desvirtuaría la obra de Barrow.

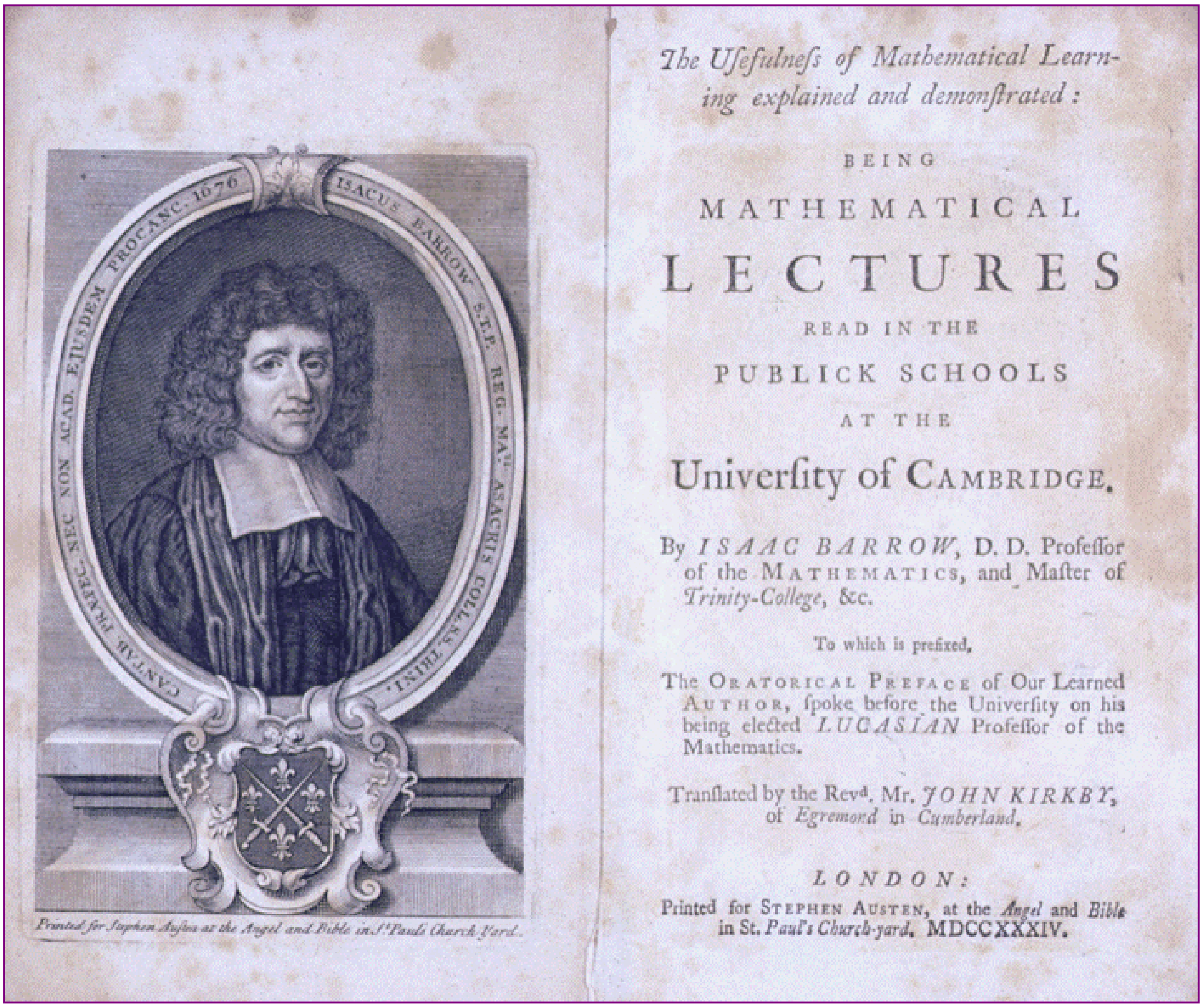
Se puede aventurar que fue la forma geométrica de trabajar, lo que impidió a Barrow a pesar de sus magníficos resultados de anticipación, desarrollar el enfoque algorítmico, que es el ingrediente esencial del Cálculo, pues su obra padece una total limitación operacional que hace imprescindible la utilización constante de figuras geométricas complejas, a las que se esclaviza, porque en su descripción minuciosa puede estar la clave de la demostración. Barrow utiliza, en efecto, cerca de ciento ochenta figuras en escasamente cien páginas. Esto le ha supuesto un cierto olvido en algunas historias de la Matemática, como figura esencial junto con Fermat en el alumbramiento del Cálculo.

Para Barrow la variable tiempo juega un papel fundamental en sus especulaciones sobre la naturaleza del continuo, que no son precisamente un modelo de claridad y precisión, ya que adopta puntos de vista diferentes, infinitesimales o atomísticos, aunque es partidario de los indivisibles de Cavalieri. Así escribe al comienzo de la *Lectione* I de *Lectiones Geometricae*:

> «*El tiempo tiene mucha analogía con una línea recta. Ya sea recta o circular y en consecuencia puede ser convenientemente representado por ella. El tiempo tiene sólo longitud, es similar en todas sus partes y puede ser considerado como constituido mediante una simple yuxtaposición de sucesivos instantes o de un continuo fluir de instantes; de forma análoga a como una línea recta o circular tiene sólo longitud, es similar en todas sus partes y puede ser considerada como constituida de un número infinito de puntos o como la traza de un punto en movimiento.*»

> «*Los indivisibles de Cavalieri dan en muchos casos el procedimiento más expeditivo, y no son menos ciertos e infalibles que los demás.*»

ISAAC BARROW, TEÓLOGO Y MATEMÁTICO



Edición en inglés de las *Mathematical Lectures* de Barrow, Londres, 1784. University of Illinois at Urbana-Champaign. Rare Book Room Exhibit.

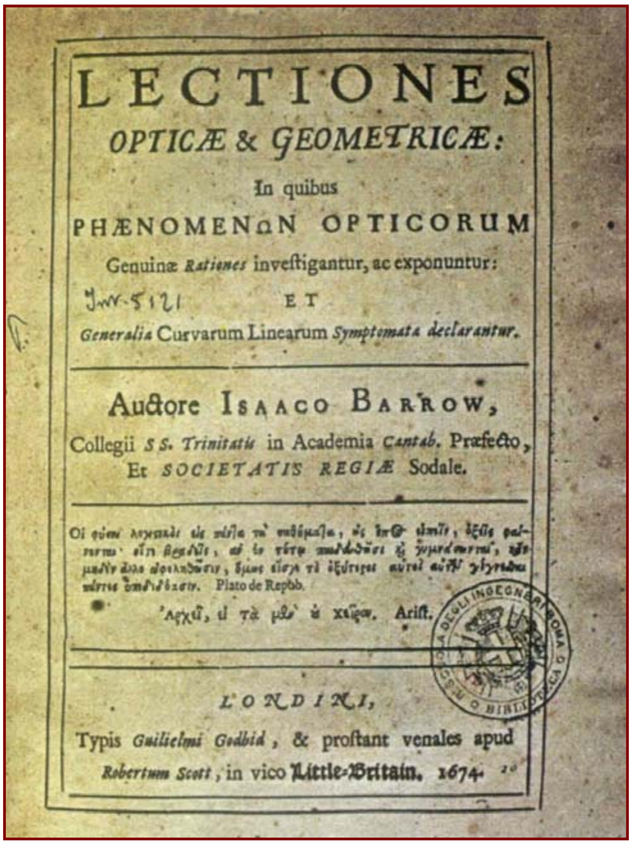
Barrow fue muy famoso como teólogo de brillante y encendida elocuencia. Sirvió como Capellán a Carlos II desde 1670. En 1672 el Rey le nombró también su maestro y luego vicerrector del *Trinity College*. Al ser considerado el mejor erudito Inglaterra, se le encargó empezar los cimientos de la ahora famosa biblioteca del *Trinity College*.

Barrow, que fue un hombre polifacético, estaba muy preocupado por cuestiones filosóficas que afectaban a las Matemáticas. Entre 1664 y 1667 pronunció diversas conferencias –a las que asistió el joven Isaac Newton como alumno muy desatacado– que fueron publicadas en 1683 bajo el titulo de *Lectiones Mathematicae*–, donde especulaba sobre las bases metafísicas en las que reposan las verdades matemáticas y efectuaba un análisis de los procesos que condujeron a Arquímedes a sus prodigiosos descubrimientos.

Barrow fue uno de los primeros miembros de la *Royal Society*. Como matemático ocupó la primera Cátedra Lucasiana de Matemáticas de Cambridge desde 1663 hasta 1669, fecha en que renunció en favor de su amigo y discípulo distinguido Newton, quien describió en sus primeras publicaciones algunos de los resultados matemáticos de su maestro.

Los trabajos de Barrow –en contraposición a la aritmetización de su compatriota Wallis– se mueven casi estrictamente en el campo de la Geometría Sintética, en cuyo lenguaje desarrolló sus importantes descubrimientos geométricos de anticipación de muchos teoremas del cálculo, que demostraba con precisión a la manera de los antiguos griegos, basándose en sencillas hipótesis de monotonía y convexidad. Afortunadamente, en esta línea de actuación geométrica no siempre fue secundado por Newton. Los puntos de vista de Barrow sobre la naturaleza del continuo no están muy definidos, de modo que tanto puede manifestarse atomísticamente defendiendo los vagos indivisibles geométricos de Cavalieri, como cinemáticamente hablar del fluir continuo del tiempo o analitícamente –aunque raras veces– manejar infinitesimales a la manera de Fermat, pero en cualquier caso y a diferencia de Wallis, sin rozar ni siquiera implícitatmente el concepto de límite. Llega a afirmar que es perfectamente correcto substituir los rectángulos infinitamente estrechos por líneas llegando pues, prácticamente, a no diferenciar los infinitamente pequeños de los indivisibles.

LAS *LECTIONES GEOMETRICAE* DE ISAAC BARROW



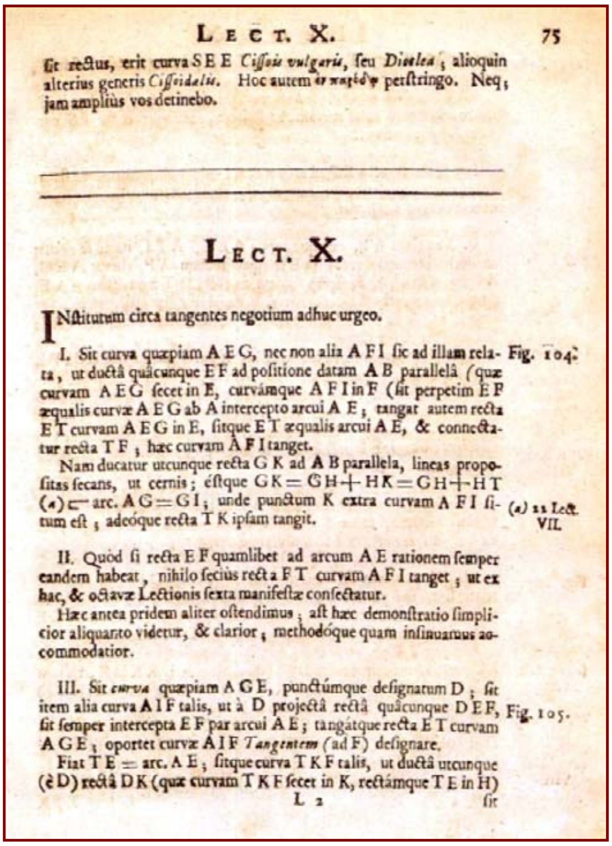
LECTIONES
OPTICÆ & GEOMETRICÆ:
In quibus
PHÆNOMENΩN OPTICORUM
Genuinæ *Rationes* inveſtigantur, ac exponuntur:
ET
Generalia Curvarum Linearum *Symptomata declarantur.*

Auctore Isaaco Barrow,
Collegii *SS. Trinitatis* in Academia *Cantab.* Præfecto,
Et *SOCIETATIS REGIÆ* Sodale.

[illegible] Plato de Repub.

Ἀρχὴ, τὸ ἥμισυ τοῦ παντός. Ariſt.

LONDINI,
Typis *Guilielmi Godbid*, & proſtant venales apud
Robertum Scott, in vico Little-Britain. 1674.



LECT. X. 75

ſit rectus, erit curva S E E *Ciſſois vulgaris*, ſeu *Diocleæ*; alioquin alterius generis *Ciſſoidalis*. Hoc autem ἐν παρόδῳ perſtringo. Neq; jam ampliùs vos detinebo.

LECT. X.

INſtitutum circa tangentes negotium adhuc urgeo.

I. Sit curva quæpiam A E G, nec non alia A F I ſic ad illam relata, ut ductâ quâcunque E F ad poſitione datam A B parallelâ (quæ curvam A E G ſecet in E, curvámque A F I in F) ſit perpetim E F æqualis curvæ A E G ab A intercepto arcui A E; tangat autem recta E T curvam A E G in E, ſitque E T æqualis arcui A E, & connectatur recta T F; hæc curvam A F I tanget. Fig. 104.

Nam ducatur utcunque recta G K ad A B parallela, lineas propoſitas ſecans, ut cernis; éſtque G K = G H + H K = G H + H T (a) ⊏ arc. A G = G I; unde punctum K extra curvam A F I ſitum eſt; adeóque recta T K ipſam tangit. (a) 11 Lect. VII.

II. Quòd ſi recta E F quamlibet ad arcum A E rationem ſemper eandem habeat, nihilo ſeciùs recta F T curvam A F I tanget; ut ex hac, & octavæ Lectionis ſexta manifeſtæ conſectatur.

Hæc antea pridem aliter oſtendimus; aſt hæc demonſtratio ſimplicior aliquanto videtur, & clarior; methodóque quam inſinuamus accommodatior.

III. Sit *curva* quæpiam A G E, punctúmque deſignatum D; ſit item alia curva A I F talis, ut à D projectâ rectâ quâcunque D E F, ſit ſemper intercepta E F par arcui A E; tangátque recta E T curvam A G E; oportet curvæ A I F *Tangentem* (ad F) deſignare. Fig. 105.

Fiat T E = arc. A E; ſitque curva T K F talis, ut ductâ utcunque (è D) rectâ D K (quæ curvam T K F ſecet in K, rectámque T E in H)

L 2 ſit

1. **Portada de *Lectiones Opticae* & *Geometricae* de Barrow. Londres, 1674.**
2. **Primera página de la *Lectione* X de *Lectiones Geometricae*, en el curso de la cual Barrow vislumbra el vínculo geométrico entre los problemas de cuadraturas y tangentes –el llamado ahora *Teorema Fundamental del Cálculo*. En un apéndice de la misma aparece también la regla o método analítico de Barrow para el trazado de las tangentes.**

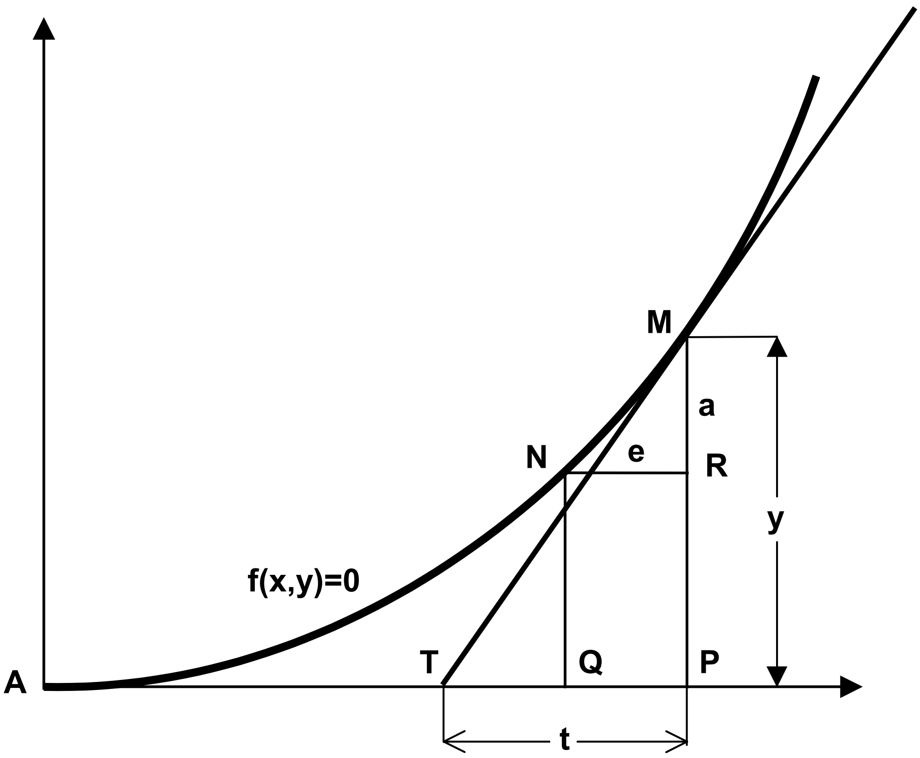
Las *Lectiones Geometricae* es el tratado matemático más importante de Barrow. En esta obra el maestro de Newton anticipa –en forma estrictamente geométrica, salvo en el caso del método analítico de las tangentes– buena parte de los resultado clásicos del Calculo Diferencial e Integral. En particular Barrow, obtiene mediante consideraciones geométricas:

- **Reglas para el trazado de las tangentes que son equivalentes a la derivación de funciones implícitas, y en las que se aplica con éxito el «*Triángulo característico*» o «*Triángulo diferencial*»**
- **Resultados similares a las reglas habituales de la derivación –es decir, el comportamiento de la derivación frente a las operaciones aritméticas de la suma, producto, cociente, potencias, etc.–.**
- **Resolución de problemas de máximos y mínimos.**
- **Proposiciones geométricas equivalentes a los conocidos ahora como métodos de «*integración por partes*» e «*integración por cambios de variable*».**
- **Teoremas geométricos correspondientes al reconocimiento de la relación entre las cuadraturas y las tangentes como el hecho de que la integración y la diferenciación son operaciones inversas.**
- **Reglas para la diferenciación e integración de funciones potenciales, circulares, logarítmicas, exponenciales y otras muchas.**
- **Teoremas generales sobre rectificación de curvas y centros de gravedad de algunos sólidos.**

En toda la extensa parafernalia de resultados geométricos equivalentes a teoremas de Calculo Diferencial e Integral de las *Lectiones Geometricae*, Barrow desarrolla el punto de vista sintético de la Geometría clásica griega –de la que era un ferviente admirador– frente a los nuevos métodos analíticos que habían introducido *La Geometría* de Descartes y *La Introducción a los Lugares Planos y Sólidos* de Fermat. Por ejemplo, Barrow adopta la definición griega de la tangente a una curva como «*la línea recta que toca a la curva en un único punto*».

Sólo en un caso el enfoque matemático de Barrow ha sido analítico. Se trata de su método infinitesimal para la determinación de tangentes, donde aparece el famoso «*triángulo característico*» o «*triángulo diferencial*», ya utilizado por Torricelli, Pascal, etc., y que es la piedra angular del desarrollo del Cálculo de Leibniz. En referencia a ello Barrow dice al final de la *Lectione* X:

> «*Hemos terminado de esta manera la primera parte*. [...] *suplementariamente a esto hemos añadido en forma de apéndice, un método para encontrar tangentes mediante el cálculo, frecuentemente usado por nosotros*, [...].»



Con base en la figura, Barrow establece:

Sea AP, PM, dos líneas rectas dadas, PM cortando a la curva dada en M, y supongamos que MT corta a la curva en M y corta a la recta AP en T.

En orden a encontrar el segmento de la subtangente PT, consideremos un arco de la curva infinitamente pequeño MN. Tracemos NQ y NR, paralelas respectivamente a NP y AP. Sea MP=m, PT=t, MR=a, NR=e, otros segmentos determinados por la naturaleza de la curva. Comparamos MR con NR por medio de una ecuación obtenida por cálculo. A continuación observaremos las siguientes reglas:

- Regla 1. *En el cálculo omitiremos todos los términos conteniendo potencias de* a *o* e, *o productos de ellos*.
- Regla 2. *Después de formar la ecuación, desecharemos todos los términos que consisten en letras significando cantidades determinadas o conocidas, o términos que no contienen* a *o* e (*estos términos pasándolos a un lado de la ecuación serán siempre igual a cero*).
- Regla 3. *Se sustituye* m (*o* MP) *por* a, *y* t (o PT) *por* e. *De aquí se encontrará la cantidad* PT.

Es decir, Barrow determina la tangente a la curva dada de forma implícita por f(x,y)=0. Para ello considera un arco MN de la curva infinitamente pequeño.

Si M=(x,y), N será N=(x–e,y–a). Barrow plantea la ecuación: f(x–e,y–a) = f(x,y) = 0 , ya que M y N son puntos de la curva. A continuación, Barrow aplica tres reglas:

- R1. Se eliminan todos los términos que contienen potencias de e o de a, o productos de ellos.
- R2. Se ignoran todos los términos que no contienen e o a.
- R3. De la ecuación resultante se obtiene a/e, que por la semejanza del triángulo característico MNR con el triángulo MTP, nos proporciona la pendiente de la tangente:

  m = y/t = a/e , de donde se puede obtener el valor de la subtangente: t=PT.

Vemos como Barrow aplica el *Triángulo característico* bajo la idea esencial de que la tangente es la posición límite de la secante cuando a y e se aproximan a cero, aplicando el límite a base de despreciar los «*infinitesimales de orden superior*».

Dada una curva general definida implícitamente: $f(x,y)=\sum_{i,j=0}^{n} c_{ij}x^i y^j$, escribimos:

$$f(x,y)=\sum_{i,j=0}^{n} c_{ij}x^i y^j=\sum_{i,j=0}^{n} c_{ij}\left(x+e\right)^i\cdot\left(y+a\right)^j=f(x+e,y+a)\,.$$

Desarrollemos los binomios $(x+e)^i$, $(y+a)^j$, y apliquemos las reglas 1 y 2 de Barrow. Se obtiene:

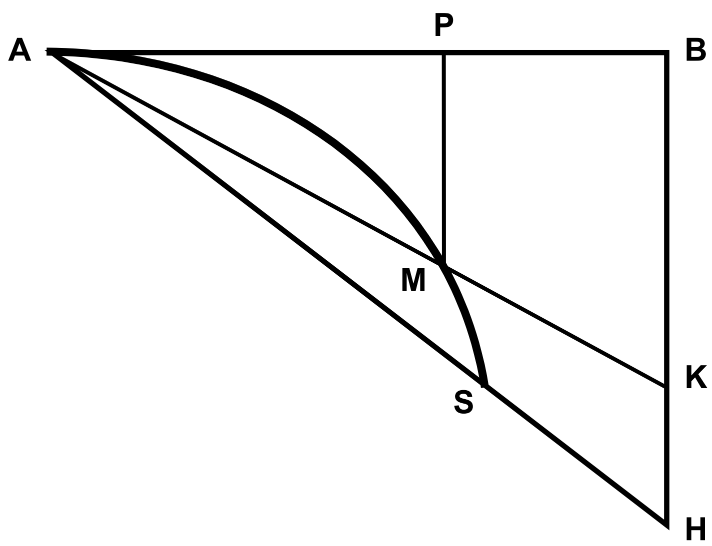
$$\sum_{i,j=0}^{n} c_{ij}\left(ix^{i-1}y^j e+jx^i y^{j-1}a\right)=0 \ ,$$

de donde la pendiente de la tangente vendrá dada por:

$$m=\frac{dy}{dx}=\frac{a}{e}=-\frac{\sum_{i,j=0}^{n} ix^{i-1}y^j}{jx^i y^{j-1}}=-\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}.$$

de modo que las reglas de Barrow permitirían obtener una derivación analítica del cálculo de la pendiente de la tangente mediante las derivadas parciales formales.

Veamos una aplicación que Barrow dio de su método a la Kappa–curva. En la figura ABH es un ángulo recto, siendo A un punto fijo. Sea K un punto cualquiera de BH, se une A con K, y se toma M sobre AK de manera que AM=BK. Se obtiene así una curva AMS, cuya tangente en un punto M se quiere determinar.



Barrow obtiene primero la ecuación de la curva. Para ello traza PM perpendicular al eje AB y considera AP=x, PM=y. Sea r la longitud AB, se tiene:

$$BK/PM = AB/AP,$$

es decir: $BK/y = r/x$,

de donde: $BK = ry/x$,

además, $AM^2 = AP^2 + PM^2 = x^2 + y^2$,

y como BK=AM será: $x^2 + y^2 = (ry/x)^2$,

y por tanto: $f(x,y) = x^4 + x^2y^2 - r^2y^2 = 0$,

que es la ecuación del lugar geométrico.

El cálculo de la tangente en el punto M se desarrollaría así:

$f(x-e,y-a) = f(x,y) : (x-e)^4 + (x-e)^2(y-a)^2 - r^2(y-a)^2 = x^4 + x^2y^2 - r^2y^2$.

Operando: $(x^4-4x^3e+6x^2e^2-4xe^3+e^4) + (x^2-2xe+e^2)(y^2-2ya+a^2) - r^2(y^2-2ya+a^2) = x^4+x^2y^2-r^2y^2$.

- Regla 1. $(x^4-4x^3e) + (x^2-2xe)(y^2-2ya) - r^2(y^2-2ya) = x^4+x^2y^2-r^2y^2$.
- Regla 2. $4x^3e + 2x^2ya + 2xy^2e - 2r^2ya = 0$,

  $(2x^3 + xy^2)e = (-x^2y+r^2y)a$.
- Regla 3. $m = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a}{e} = \dfrac{2x^3 + xy^2}{r^2y - x^2y}$

resultado que se puede confirmar mediante la aplicación de la fórmula:

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{a}{e} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}.$$

Barrow aplicó su método de tangentes a un gran número de curvas, entre ellas las siguientes:

a) $x^3 + y^3 = r^3$ (curva de Lamé).

b) $x^3 + y^3 = rxy$ (Folium de Descartes –llamada por Barrow *La Galande*–).

c) $y = (r-x)tg(\pi x/2r)$ (cuadratriz de Hipias).

d) $y = r\ tg(\pi x/2x)$ (curva tangentoidal).

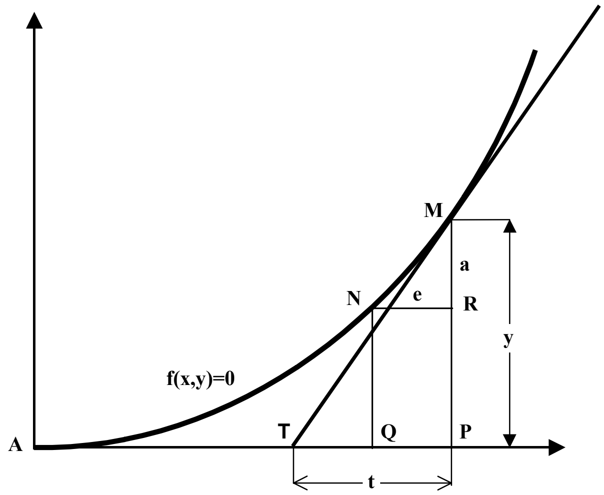
Observamos que el método de Barrow guarda gran similitud ya con el utilizado en nuestro Cálculo Diferencial, donde las letras e,a, son los familiares incrementos Δx, Δy. Salta a la vista, además, la analogía entre el método de «*adigualdad*» de Fermat para las tangentes y el método de Barrow, y al respecto podríamos repetir las consideraciones desarrolladas entonces en torno a la aplicación de la «*adigualdad*» de Fermat. En particular, se puede afirmar que las reglas 1 y 3 de Barrow sólo admiten justificación rigurosa mediante los límites.

En realidad el método de Barrow es una generalización, para funciones definidas implícitamente, del método de «*adigualdad*» de Fermat –que no fue conocido directamente por Barrow, pero que es muy probable que le llegara a través de los trabajos de Huygens, Gregory y Wallis–, lo cual acerca entre sí a los dos matemáticos del Siglo XVII que más contribuyeron a anticipar nociones del Cálculo Diferencial e Integral.

Barrow marca un hito en la historia de las técnicas del Cálculo del Siglo XVII por los fundamentales resultados que obtuvo –principalmente la conexión geométrica entre los problemas de cuadraturas y tangentes, que se tratará en la próxima sección– y por haber sido el maestro más influyente de Newton.

LAS TANGENTES DE BARROW
Y EL TRIÁNGULO DIFERENCIAL O CARACTERÍSTICO

Aparentemente el método de las tangentes de Barrow es una modificación del método de Fermat, adaptado para funciones implícitas, que utiliza el llamado *Triángulo Característico* o *Triángulo diferencial*. Este triángulo también fue utilizado por Pascal en su obra *Traité des sinus du quart de cercle* para calcular la cuadratura de un arco de cicloide.



El *Triángulo Característico* MNR es un triángulo en el que la hipotenusa MN es un arco infinitamente pequeño de la curva que puede ser considerado como un segmento de recta. El carácter infinitesimal del *Triángulo Característico* permite considerar su semejanza con el triángulo TPM que da la subtangente de la curva: TPM ≈ MNR.

Dada la curva implícita f(x,y)=0, sea $\overset{\frown}{MN}$ un arco infinitamente pequeño de la curva, determinado por dos puntos M=(x,y) y N=(x+e, y+a) de la curva, infinitamente próximos (e=dx, a=dy). En la igualdad

$$f(x,y)= f(x+e,y+a)=0$$

Barrow suprime todos los términos que contienen potencias superiores de e o a, e identifica el arco $\overset{\frown}{MN}$ con el segmento $\overline{MN}$, lo que lleva a la semejanza de los triángulos TPM ≈ MNR, de donde resulta la pendiente de la recta tangente: $m=\frac{y}{t}=\frac{dy}{dx}=\frac{a}{e}$

Barrow emplea el concepto de *Triángulo característico* en el que la idea esencial estriba en mirar a la línea tangente como la posición límite de la secante cuando las cantidades a y e se aproximan a cero –es decir, se consideran infinitesimales–. Además, viene a tomar el límite bajo la consideración de despreciar los «*infinitesimales de orden superior*».

Por ejemplo, para el *folium de Descartes*, $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$, Barrow actúa del siguiente modo:

$$(x + e)^3 + (y + a)^3 - 3(x + e)(y + a) = x^3 + y^3 - 3xy\,,$$

$$(x^3 + 3x^2e + 3xe^2 + e^3) + (y^3 + 3y^2a + 3ya^2 + a^3) -3(xy + xa +ye +ae) - (x^3 + y^3 - 3xy) = 0.$$

Simplificando términos comunes y eliminando potencias superiores de e y a, resulta:

$$3x^2e + 3y^2a - 3xa - 3ye = 0.$$

Finalmente se obtiene para la pendiente de la tangente: $m=\frac{dy}{dx}=\frac{a}{e}=\frac{y-x^2}{y^2-x}$.

También para la función potencial $y=x^n$, la aplicación del método de Barrow daría:

$(x + e)^n - (y + a) = x^n - y$. Aplicando la Fórmula del binomio de Newton se tiene:

$x^n + nx^{n-1}$ + (términos con potencias superiores de e) $-y - a = x^n - y$.

Simplificando términos comunes y eliminando potencias superiores de e y a, resulta:

$$m=\frac{dy}{dx}=\frac{a}{e}=nx^{n-1}.$$

En su método infinitesimal de las tangentes, Barrow excepcionalmente aplica métodos analíticos, considera con precisión el triángulo característico y se acerca a la concepción de la tangente como límite geométrico de la secante, pero sobre todo aplica una idea equivalente a despreciar potencias de infinitesimales, que resultados tan fructíferos le darían a Newton. De hecho en su primera época cuando Newton no había aún desarrollado su notación de fluxiones, había formulado sin embargo un método sistemático de diferenciación calcado del de Barrow, del que se diferencia casi exclusivamente en la notación. Formalmente, como en el caso de Fermat, el procedimiento se parece a la acción en nuestro Cálculo Diferencial de incrementar las variables, estudiando el incremento producido sobre la función, pero Barrow simplemente piensa en resolver un problema geométrico concreto con infinitesimales, sin manejar, por supuesto, funciones ni variables continuas. Además, un tratamiento riguroso del procedimiento precisaría de forma ineludible el uso de los límites.

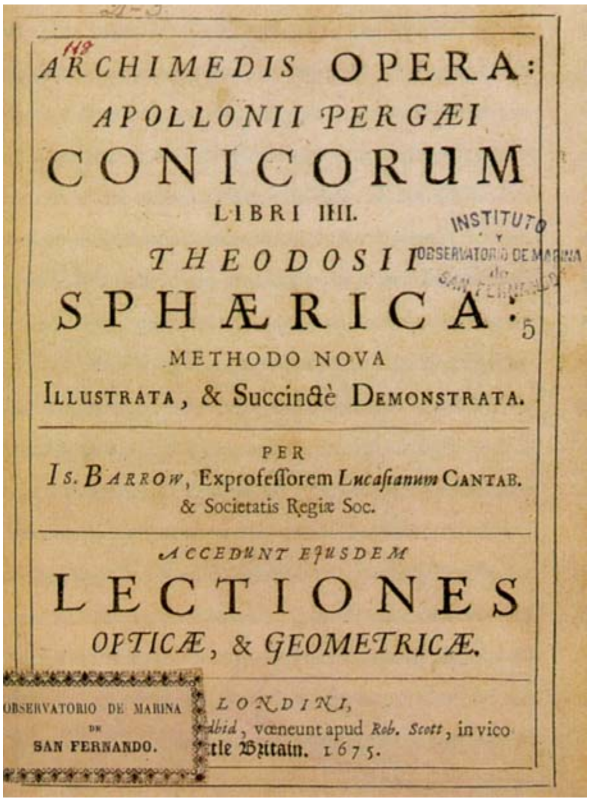
RESUMEN DE LOS RESULTADOS GEOMÉTRICOS SOBRE TANGENTES Y CUADRATURAS DE LAS *LECTIONES GEOMETRICAE*, SEGÚN LA EDICIÓN DE M.CHILD (I. BARROW. *GEOMETRICAL LECTURES* CHICAGO. OPEN COURT, 1916)

LECTURE I:	Generación de magnitudes. El tiempo como variable independiente. El tiempo como agregación de instantes, comparado con la línea como agregación de puntos.
LECTURE II:	Generación de magnitudes por movimientos locales. Los movimientos simples de traslación y de rotación.
LECTURE III:	Composición de movimientos concurrentes. Composición de movimientos rectilíneos y paralelos.
LECTURE IV:	Propiedades de las curvas que surgen de la composición de movimientos. El gradiente de la tangente.
LECTURE V:	Otras propiedades de las curvas. Curvas como la cicloide. Normales. Líneas máximas y mínimas.
LECTURE VI:	Determinación de ciertas curvas construidas según ciertas condiciones dadas. Clases de hipérbolas.
LECTURE VII:	Curvas semejantes o análogas. Exponentes e índices. Progresiones aritméticas y geométricas. Teoremas al Teorema Binomial. Asíntotas.
LECTURE VIII:	Construcción de tangentes por medio de curvas auxiliares cuyas tangentes son conocidas. «*Diferenciación*» de una suma y una diferencia.
LECTURE IX:	Tangentes de curvas formadas por medias aritméticas y geométricas. Paraboloides. Curvas de forma elíptica e hiperbólica. «*Diferenciación*» de productos, potencias y fracciones.
LECTURE X:	Determinación rigurosa de ds/dx. La diferenciación como inversa de la integración. Explicación con ejemplos del método del triángulo diferencial. Diferenciación de funciones trigonométricas.
LECTURE XI:	Cambio de la variable independiente en la integración. La integración como inversa de la diferenciación. Diferenciación de un cociente. Área y centro de gravedad de un paraboloide. Límites para el arco de un círculo y de una hipérbola. Estimación de π.
LECTURE XII:	Teoremas generales sobre rectificación, formas estándares para la integración de funciones circulares mediante reducción a la cuadratura de la hipérbola. Métodos de figuras inscritas y circunscritas. Medida de superficies cónicas. Cuadratura de la hipérbola. Diferenciación e integración de funciones logarítmicas y exponenciales. Otras formas estándares.

Todo este despliegue de resultados geométricos equivalentes a numerosos teoremas de Cálculo Diferencial e Integral, justifican que el editor de la obra de Barrow escriba en el Prefacio (pág. VII):

> «*Isaac Barrow fue el primer inventor del Calculo Infinitesimal. Newton adquirió las principales ideas del mismo a través de su comunicación personal con Barrow; y Leibniz también es, en alguna medida, tributario del trabajo de Barrow, obteniendo confirmación de sus propias ideas originales y sugerencias para su ulterior desarrollo, de una copia del libro de Barrow.*

BARROW, EDITOR DE OBRAS DE LA MATEMÁTICA GRIEGA

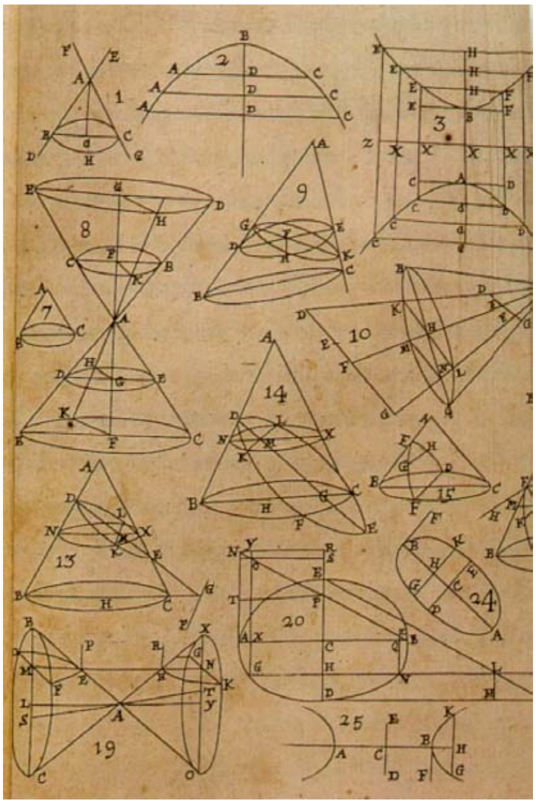


ARCHIMEDIS OPERA:
APOLLONII PERGÆI
CONICORUM
LIBRI IIII.
THEODOSII
SPHÆRICA:
METHODO NOVA
ILLUSTRATA, & Succinctè DEMONSTRATA.

PER
Is. BARROW, Exprofessorem Lucasianum CANTAB.
& Societatis Regiæ Soc.

ACCEDUNT EJUSDEM
LECTIONES
OPTICÆ, & GEOMETRICÆ.

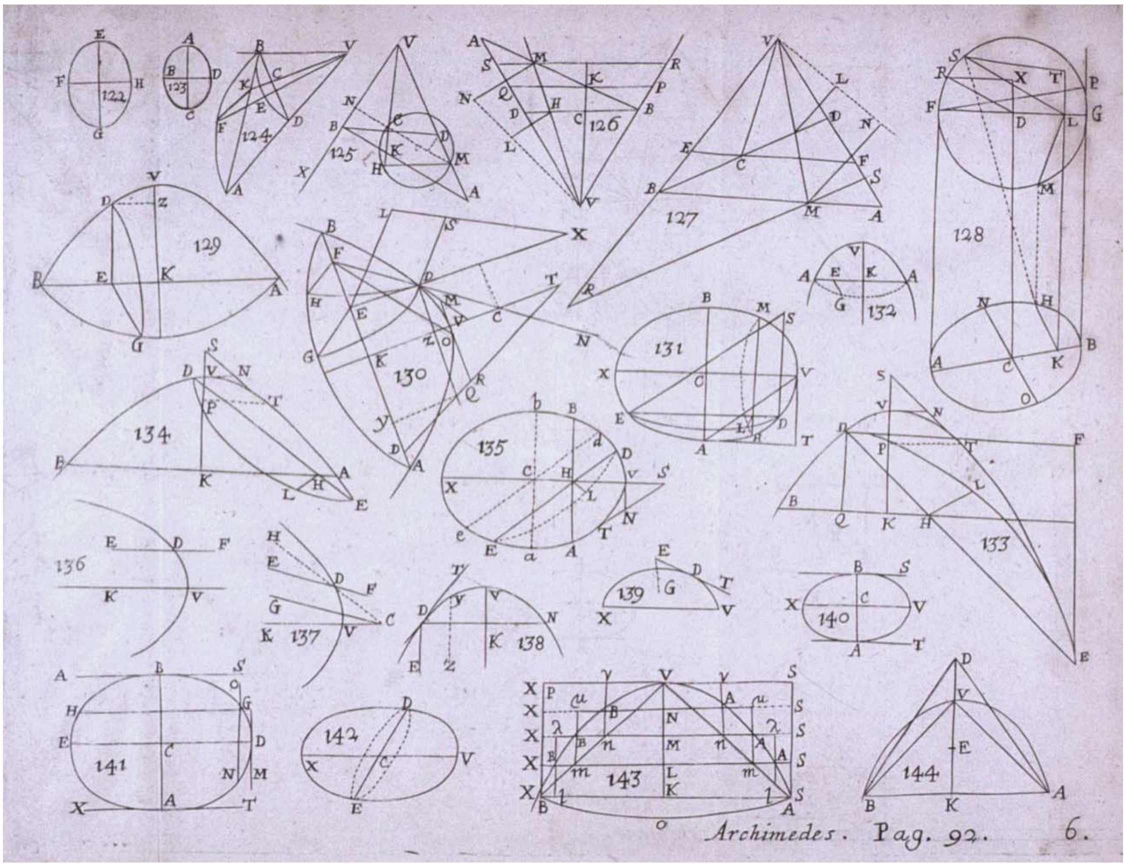
LONDINI,
[...]bid, vœneunt apud Rob. Scott, in vico
[Li]ttle Britain. 1675.

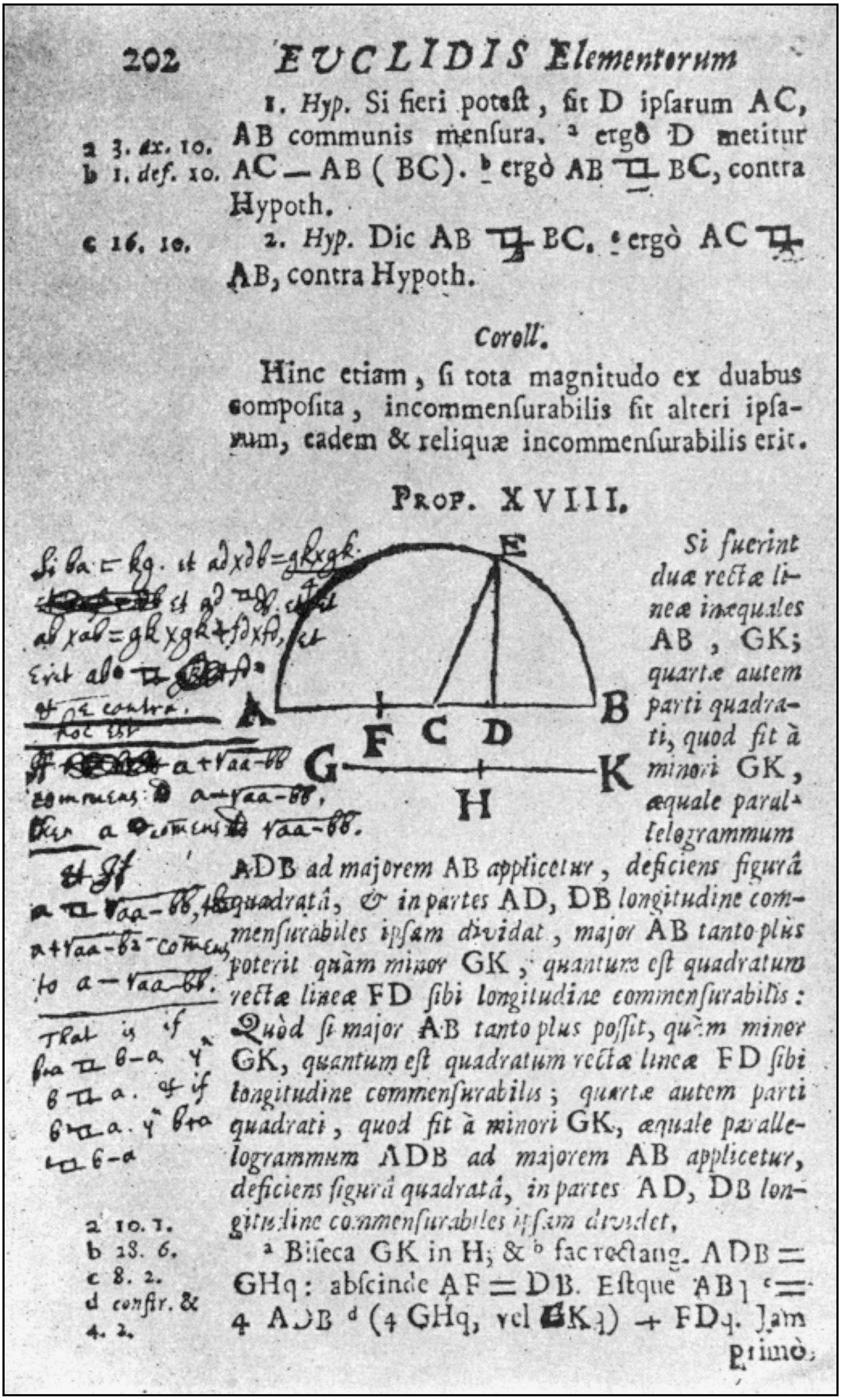


BARROW, ISAAC, *Archimedis opera; Apollonii Pergaei conicorum libri IIII; Theodosii Sphaerica*. Londini: Excudebat Guil Godbid, voeneunt apud Rob. Scott, in vico Little Britain, 1675, 1674.

Barrow era un eximio erudito profundo conocedor de la Matemática griega, lo que le permitió realizar ediciones de las principales obras de Euclides, Arquímedes, Apolonio y Teodosio. Aquí se muestran la edición conjunta de los tres trabajos de Barrow que comprenden obras de Arquímedes, Apolonio y Teodosio. Estas ediciones, a las que acompañaban numerosos comentarios, eran utilizadas en la Cátedra Lucasiana de Matemáticas de Cambridge .

La ilustración superior con la portada y las figuras de Apolonio procede de la Biblioteca del Real Instituto y Observatorio de la Armada de San Fernando (Cádiz). La inferior contiene figuras de Arquímedes y procede de una exposición de libros antiguos de la Universidad de Illinois (at Urbana-Champaign. Rare Book Room Exhibit)





202 *EUCLIDIS Elementorum*

a 3. ax. 10. b 1. def. 10. 1. *Hyp.* Si fieri potest, sit D ipsarum AC, AB communis mensura. a ergò D metitur AC — AB (BC). b ergò AB ⊓⊔ BC, contra Hypoth.

c 16. 10. 2. *Hyp.* Dic AB ⊓⊔ BC. c ergò AC ⊓⊔ AB, contra Hypoth.

Coroll.

Hinc etiam, si tota magnitudo ex duabus composita, incommensurabilis sit alteri ipsarum, eadem & reliquæ incommensurabilis erit.

PROP. XVIII.

Si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales AB, GK; *quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori* GK, *æquale parallelogrammum* ADB *ad majorem* AB *applicetur, deficiens figurâ quadratâ, & in partes* AD, DB *longitudine commensurabiles ipsam dividat, major* AB *tanto plus poterit quàm minor* GK, *quantum est quadratum rectæ lineæ* FD *sibi longitudine commensurabilis: Quòd si major* AB *tanto plus possit, quàm minor* GK, *quantum est quadratum rectæ lineæ* FD *sibi longitudine commensurabilis; quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori* GK, *æquale parallelogrammum* ADB *ad majorem* AB *applicetur, deficiens figurâ quadratâ, in partes* AD, DB *longitudine commensurabiles ipsam dividet.*

a 10. 1. b 28. 6. c 8. 2. d confir. & 4. 2.

a Biseca GK in H; & b fac rectang. ADB = GHq: abscinde AF = DB. Estque ABq c = 4 ADB d (4 GHq, vel GKq) + FDq. Jam primò,

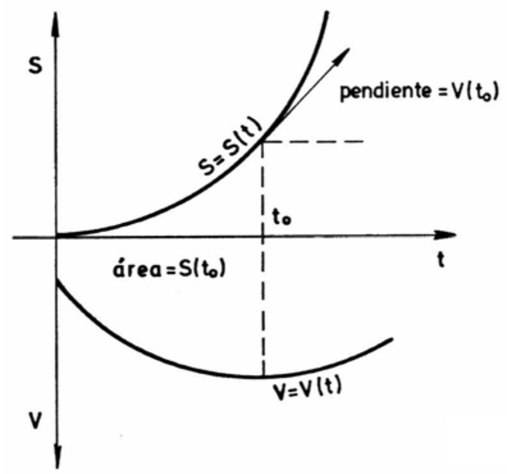
Página de la proposición 18 del Libro X de *Los Elementos* de Euclides de la edición latina de Isaac Barrow (Londres, 1655). Un ejemplar de esta edición fue manejado por Newton y en él dejó su impronta el sabio en unas notas manuscritas.

El Teorema Fundamental del Cálculo

El reconocimiento de la relación inversa entre los problemas de cuadraturas y tangentes se va abriendo paso muy lentamente hasta su formulación explícita (aunque estrictamente geométrica) por Isaac Barrow. No obstante hasta los desarrollos de Newton y Leibniz no se aprecia la importancia trascendental del Teorema Fundamental del Cálculo, en cuanto a que permite la elaboración de un algoritmo universal para la obtención de las cuadraturas mediante la resolución del problema inverso de la tangente.

Las investigaciones medievales sobre el movimiento, en particular las de Oresme, conducen a la idea de que el espacio recorrido por un móvil es igual al área bajo la gráfica de su velocidad en función del tiempo. Galileo recoge estas consideraciones, que son «*demostradas*» enseguida con argumentos de indivisibles. También Galileo establece la ley fundamental de la composición vectorial del movimiento y la aplica para determinar la trayectoria descrita por un proyectil. Además, si se representa el movimiento en un gráfico de desplazamiento-tiempo, la dirección de éste da la dirección de la tangente a la trayectoria, mientras la velocidad da la pendiente de la línea de tangente.

Torricelli recoge todos esto resultados y los desarrolla en su escrito *De motu gravium*, incorporado a su *Opera Geometrica* de 1644, de modo que tras nuevas especulaciones cinemáticas obtiene para curvas particulares (parábolas de orden cualquiera) resultados fácilmente generalizables, que permiten establecer, desde un punto de vista cinemático, el carácter inverso de las operaciones de cuadratura –que dan el espacio conocida la



$$\int_0^{to} v(t)\, dt = s(to)$$

$$\left.\frac{ds}{dt}\right]_{t=to} = v(to)$$

velocidad– y de construcción de tangentes –que dan la velocidad conocido el espacio–.

Es decir, si s=s(t), v=v(t), representan respectivamente el espacio y la velocidad en función del tiempo, se verifica:

a) El área limitada por la curva v=v(t) y el eje de abscisas representa, para cada t, el espacio recorrido s=s(t),
b) La pendiente de la tangente a la curva s=s(t) representa para cada t, la ordenada de la curva v=v(t) en la abscisa t.

Fermat que tanto se prodigó en anticipar resultados de Cálculo Diferencial e Integral, aplicando su método de máximos y mínimos al cálculo de tangentes y centros de gravedad, que redujo los problemas de rectificación a cuadraturas –tras el previo cálculo de la tangente–, que utilizó infinitesimales aritméticos y geométricos, si llegó a percatarse de la relación inversa de las cuadraturas con las tangentes, no llegó a advertir la profunda significación del hecho, lo que le obligó a utilizar hábiles artificios geométricos. Como mucho

Fermat intenta demostrar, con un razonamiento nada claro, que si dos curvas tienen en cada punto la misma pendiente, las curvas tienen la misma forma, es decir en nuestro lenguaje que f’(x) determina f(x) salvo una contante. Claro está que de los diversos métodos de Fermat, se deduce para casos particulares, la relación inversa que manifiestan las expresiones:

$$F(t)=\int_{o}^{t} x^n dx = \frac{t^{n+1}}{n+1} \text{ , } F'(t)=t^n \text{ .}$$

Gregory de Saint-Vincent descubre en 1647 que la función de área hiperbólica

$$f(t)=\int_{1}^{t}(1/x)\,dx$$

tiene la propiedad:

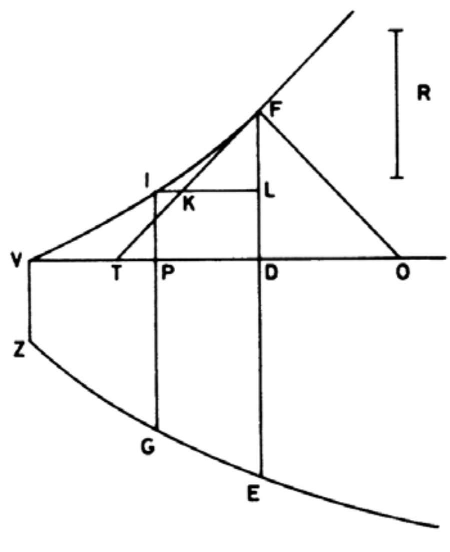
$f(t\cdot r) = f(t)+f(r)$,

lo que de alguna manera permitiría escribir la relación inversa:

$f(t) = \log t$, $f'(t) = 1/t$.

Pero sin duda alguna fue Isaac Barrow el matemático que con mayor precisión formuló el problema de la relación inversa entre cuadraturas y tangentes. Ya en su *Lecture* I enuncia el principio de Oresme y Galileo y en su *Lecture* X enuncia y demuestra, con un razonamiento impecable, una relación importante entre cuadraturas y tangentes.

Con referencia a la figura Barrow escribe:



«*Sea ZGE una curva cuyo eje es VD. Consideremos las ordenadas (VZ,PG,DE), perpendiculares al eje y continuamente creciendo desde la coordenada inicial VZ; sea VIF una línea tal que si una línea recta EDF es trazada, perpendicular al eje VD y cortando a las curvas en los puntos E,F, el rectángulo determinado por DF y una longitud dada R es igual al espacio interceptado VDEZ; sea un punto T en el eje VD tal que DE:DF = R:DT, y unimos* [T con F]. *Entonces TF cortará a la curva* [es la tangente a la curva].

Tomemos un punto I en la curva VIF (primero del lado de F hacia V), y a través de él tracemos IG paralelo a VZ y IL paralelo a VD, cortando a las líneas dadas como se muestra en la figura; entonces LF:LK = DF:DT = DE:R, es decir RxLF = LKxDE.

Pero de la naturaleza de las líneas DF,LK, se tiene RxLF = área PDEG, por tanto LKxDE = área PDEG, por tanto LKxDE = área PDEG < DPxDE, por tanto se tiene LK < DP < LI.

Análogamente si el punto I estuviera del otro lado deF, se haría la misma construcción de antes y se puede fácilmente demostrar que LK > DP > LI.

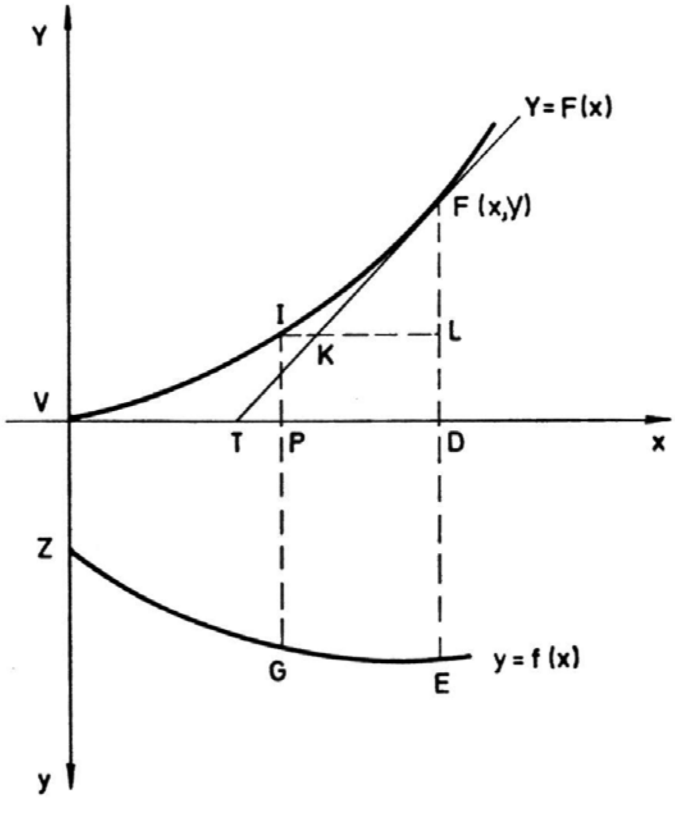
De aquí se deduce que es bastante claro que toda la línea TKF permanece en o debajo de la curva VIFI.

Resultados análogos se obtienen si las ordenadas VZ,PG,DE, decrecen continuamente, la misma conclusión se obtiene mediante un argumento similar; sólo una particularidad ocurre, a saber, en este caso, al contrario que en el otro, la curva VIF es cóncava respecto al eje VD.

Corolario: Obsérvese que DExDT = RxDF = área VDEZ.»

Veamos ciertas conclusiones fundamentales que podemos inferir del resultado de Barrow. Dada una curva y=f(x), donde f es una función creciente y orientada hacia abajo, se construye una curva Y=F(x) con la condición de que la ordenada genérica Y=DF, representa el área determinada por la curva y=f(x) y las ordenadas F(0)=VZ y f(x)=DE, es decir:

$$Y = \int_o^x y\,dx\,.$$



Para construir la tangente a la curva Y=F(x) en el punto F(x,Y), Barrow, partiendo del punto D=(x,0), coge sobre el eje x el punto T, tal que se tenga la relación:

$$DT = Y/y = DF/DE,$$

y demuestra que la recta TF es la tangente.

Ahora bien como se tiene:

$$DF/DT = DE = y,$$

el resultado es equivalente a:

$$\frac{dY}{dx} = y,$$

es decir:

$$y = \frac{d}{dx}\int_o^x y\,dx.$$

A través del desarrollo del teorema y de la interpretación que del mismo se ha dado, hemos visto como Barrow reconduce el problema inverso de la tangente a cuadraturas, es decir obtiene «*integrales indefinidas*» a partir de «*integrales definidas*». En efecto, si se quiere determinar una curva Y=F(x) tal que para cada x se conoce la dirección de la tangente y=f(x), Barrow demuestra que tal curva es:

$$Y = \int_o^x y\,dx,$$

ya que tomando el punto T de modo que DT=Y/y, TF es la tangente a la curva y=f(x), que como se sabe es única. Lo que no resuelve Barrow es el problema de obtener «*integrales definidas*» a partir de «*integrales indefinidas*», es decir, no resuelve cuadraturas por medio del teorema de inversión, a base de expresarlas en términos de antiderivadas, que es la aplicación esencial del Teorema Fundamental del Cálculo.

Además, el enfoque de Barrow es estrictamente geométrico y sólo asegura y prueba que la recta TF es tangente a la curva Y=F(x) en el sentido clásico griego de «*la línea recta que toca en un único punto a la curva*». De manera que Barrow, autoimponiédose un estático lenguaje geométrico, aborta la visión clara y práctica de la interrelación entre los problemas de cuadraturas y tangentes, que a nivel cinemático tan claramente aparecían como inversos. Al no sustituir el ente geométrico tangente por el correspondiente ente analítico (derivada), Barrow cercena las posibilidades de generalización y algoritmización que encerraba su magnífico teorema. Barrow descubre un hecho fundamental que vincula las cuadraturas con las tangentes, pero no alcanza a calibrar la trascendental importancia que tiene.

Claro está que Barrow no había reducido a un algoritmo universalmente válido su método de tangentes, y es evidente que la importancia del carácter recíproco de la derivación y la integración queda puesta de manifiesto sólo cuando se dispone de un método general para la obtención analítica de las derivadas o geométricamente para construir tangentes. De haber sido así, Barrow hubiera sido el descubridor del Cálculo.

Fue el discípulo de Barrow, Isaac Newton, quien advirtió el inmenso alcance de la relación inversa entre cuadraturas y tangentes. Siendo capaz de sustraerse al purismo geométrico euclídeo de su maestro, Newton desplegó toda la parafernalia analítica necesaria para reconvertir y desarrollar las ideas geométricas de Barrow, dando a luz un algoritmo automático para la resolución de los problemas de cuadraturas y tangentes.

EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO (TEOREMA DE BARROW)

78 L E C T. X.

Hujuſmodi plura quædam cogitaram hìc inſerere; verùm hæc exiſtimo ſufficere ſubindicando modo, juxta quem, citra *Calculi moleſtiam*, *curvarum tangentes* exquirere licet, unaque conſtructiones demonſtrare. Subjiciam tamen unum aut alterum non aſpernanda, ut videtur *Theoremata* perquam generalia.

XI. Sit linea quæpiam Z G E, cujus axis V D; ad quam imprimìs applicatæ perpendiculares (V Z, P G, D E) ab initio V Z continuè utcunque creſcant; ſit item linea V I F talis, ut ductâ quâcunq; rectâ E D F ad V D perpendiculari (quæ *curvas* ſecet punctis E, F, ipſam V D in D) ſit ſemper *rectangulum* ex D F, & deſignatâ quâdam R æquale *ſpatio* reſpectivè *intercepto* V D E Z; fiat autem D E . D F :: R . D T; & connectatur recta T F; hæc curvam V I F continget.

Fig. 109.

Sumatur enim in linea V I F punctum quodpiam I (illud primò ſupra punctum F, verſus initium V) & per hoc ducantur rectæ I G ad V Z, ac K L ad V D parallelæ (quæ lineas expoſitas ſecent, ut vides) éſtque tum L F . L K :: (D F . D T ::) D E . R; adeóque L F × R = L K × D E. Eſt autem (ex præſtituta linearum iſtarum natura) L F × R æquale ſpatio P D E G; ergò L K × D E = P D E G ⊐ D P × D E. Unde eſt L K ⊐ D P; vel L K ⊐ L I.

Fig. 110.

Rurſus accipiatur quodvis punctum I, infrà punctum F, reliquáq; fiant, utì priùs; ſimiliſque jam planè diſcurſu conſtabit fore L K × D E = P D E G ⊏ D P × D E, unde jam erit L K ⊏ D P, vel L I. E quibus liquidò patet totam rectam T K F K intra (ſeu extra) curvam V I F I exiſtere.

Iiſdem quoad cætera poſitis, ſi *ordinatæ* V Z, P G, D E, *&c.* continuè decreſcant, eadem concluſio ſimili ratiocinio colligetur; unicum obvenit *Diſcrimen*, quòd in hoc caſu (contra quàm in priore) linea V I F concavas ſuas axi V D obvertat.

Corol. Notetur D E × D T æquari ſpatio V D E Z.

XII. Exindè deducitur hoc *Theorema*: Sint duæ lineæ quævis Z G E, V K F ita relatæ, ut ad communem ipſarum axem V D applicatâ quâvis rectâ E D F, ſit ſemper quadratum ex D E æquale *duplo ſpatii* V D E Z; ſumatur autem D Q = D E, & connectatur F Q, hæc curvæ V K F perpendicularis erit.

Fig. 111.

Concipiatur enim linea V I F, per F tranſiens, talis qualem mox attigimus (cujus ſcilicet ad V D applicatæ ſe habeant ut ſpatia VDEZ, hoc eſt ut quadrata ex applicatis à curva V K F in præſente hypotheſi) lineámque

Página 78 de las *Lectiones Geometricae* de Barrow, perteneciente a la *Lectione* X, con el texto del *Teorema Fundamental del Cálculo*.

Barrow fue el primer matemático en reconocer realmente que la integración y la diferenciación son operaciones inversas, pero el estrecho marco de la Geometría Sintética condenó a Barrow a no poder capitalizar su famoso teorema. Su forma estrictamente geométrica le impidió advertir que había descubierto el nudo gordiano del Cálculo Infinitesimal, el instrumento esencial para realizar las cuadraturas vía **la operación inversa de cálculo de la tangente –la antiderivación–, el núcleo de un nuevo tipo de análisis, suf**icientemente significativo en sí **mismo como para desarrollarlo en un algoritmo universal.**

Justo es, no obstante, ponderar la labor de Barrow, porque aunque manejó un lenguaje geométrico y tan poco algebraico como pudo, obtuvo resultados equivalentes a buena parte del Cálculo Infinitesimal de Newton y Leibniz.

EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO (TEOREMA DE BARROW)

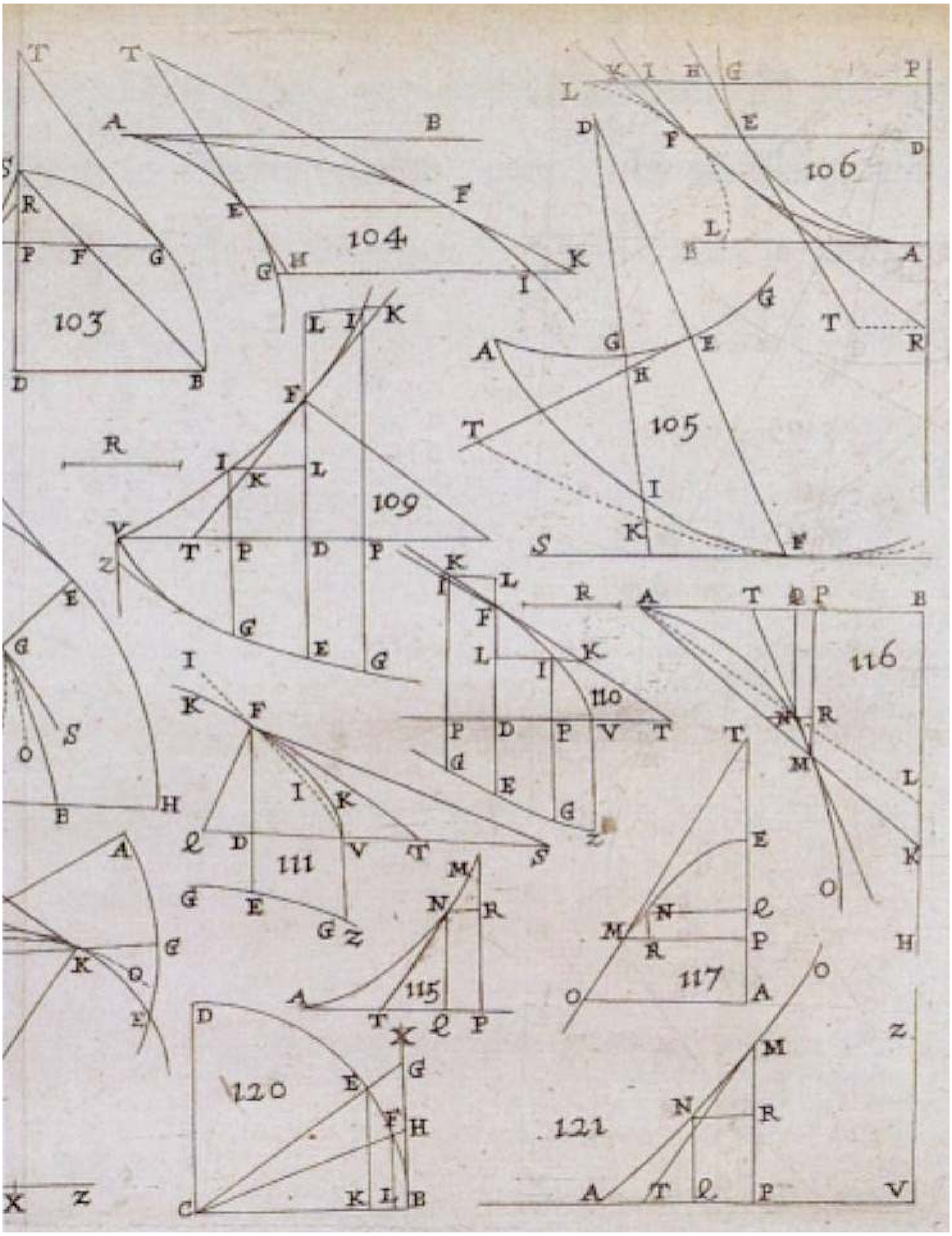


Lámina del final de la obra de Barrow *Lectiones Geometricae* (Londres, 1674) con las figuras de la *Lectione* X, en un ejemplar de la Biblioteca Nacional de España.

La figura 109 es la que corresponde a su versión geométrica del *Teorema Fundamental del Cálculo* que ha pasado a la literatura matemática con el nombre de Teorema de Barrow.

La figura 115 corresponde al método analítico para el trazado de las tangentes a las curvas, donde aparece el *Triángulo característico* o *Triángulo diferencial*.

Epílogo: el descubrimiento del Cálculo Infinitesimal de Newton y Leibniz

Hasta aquí se ha descrito la naturaleza y los problemas más representativos sobre cuadraturas y tangentes del periodo clásico griego, del Medioevo y de la etapa empírica del Cálculo Infinitesimal –primeros dos tercios del siglo XVII–. A lo largo del desarrollo del Cálculo inmediatamente anterior a Newton y Leibniz se han puesto de manifiesto hechos muy significativos –el incremento de la variable independiente de Fermat y Barrow, el triángulo característico y sus semejantes vinculados a cada punto de la curva, la relación inversa entre cuadraturas y tangentes, la aplicación intuitiva de la idea de límite, etc.–. En este fecundo periodo se ha dilapidado en general el rigor impecable de la Geometría griega, pero se han ingeniado magníficos métodos heurísticos de rápido descubrimiento.

A lo largo del recorrido de la etapa empírica del desarrollo del Cálculo anterior a Newton y Leibniz, hemos visto como se iba abriendo paso lenta y subrepticiamente el concepto de límite. Aunque muchos matemáticos aplican intuitivamente nociones muy próximas a las nuestras, al contextualizar sus resultados advertimos las dificultades inherentes al ejercicio del pensamiento aritmético en términos de límites, que tan imprescindible habría de manifestarse, durante dos siglos, en la ardua tarea de reconstruir y sistematizar el Análisis, fundamentándolo en bases rigurosas. Newton intentó evitar los infinitamente pequeños, y en ello se vio abocado a considerar las «*primeras y últimas razones de cantidades evanescentes*», que es un remedo más de la idea de límite, aunque ya más próximo al rigor, pero no lo suficiente, como para no encender la dura crítica del obispo Berkeley. Leibniz en cambio con su reformulación de los conceptos infinitesimales –los diferenciales– disfraza, como habían hecho sus predecesores, el concepto de límite bajo su notación y terminología.

A partir de aquí se plantea históricamente la necesidad de dos hechos fundamentales:

a) La generalización y unificación de los problemas y métodos infinitesimales, es decir la elaboración de un algoritmo aplicable a todos los problemas.

b) La reformulación sobre bases rigurosas del nuevo Análisis Infinitesimal.

La parte a) es lo que llamamos el descubrimiento final del Cálculo por Newton y Leibniz. La parte b) es la puesta en orden lógico del Cálculo, que realiza Cauchy y sus continuadores, la llamada *Aritmetización* del Análisis.

Puede decirse que el Cálculo de la etapa anterior a Newton y Leibniz es una ingente casuística de métodos heurísticos, aplicados a problemas geométricos específicos, que se resuelven mediante técnicas *ad hoc*, obteniéndose multitud de resultados particulares que, al traducirlos al lenguaje moderno, muestran los conceptos esenciales del Cálculo, que de alguna manera yacían en ellos, pero de forma tan fragmentaria que sólo se referían a problemas individuales y no a teorías generales. Pero la perspectiva de generalización estaba implícita en esos métodos. Si no se acertó a encontrar la técnica algorítmica general bastante tuvo que ver en ello el lenguaje matemático al uso, todavía primitivo, que se utilizaba. Esto es patente en el caso de Barrow –que al mantenerse en un terreno geométrico no pudo rentabilizar su famoso teorema que vinculaba las cuadraturas con las tangentes– y sobre todo de Pascal que con admirable destreza y sin utilizar fórmula alguna elabora enunciados que pueden traducirse inmediatamente en fórmulas de nuestro Cálculo Integral. El dominio incomparable del lenguaje le permite evitar el simbolismo algebraico, con su claridad y precisión, pero su rechazo de las fórmulas le impidió descubrir el Cálculo Diferencial de Leibniz, vía el triángulo característico, así como la fórmula binomial de Newton, descubrimientos que como Leibniz reconoce, se hicieron gracias a él.

Como consecuencia del precario lenguaje era difícil acertar a vislumbrar las posibles conexiones entre los problemas que se trataban, pero aun en el caso de advertirlas, como por ejemplo la relación entre la rectificación de la parábola y la cuadratura de la hipérbola, o la esencial relación inversa de las tangentes con las cuadraturas, era difícil formularlas con exactitud, y mucho más captar el profundo significado y la importancia que tales conexiones tenían en el camino de la generalización de los métodos.

El gran acierto de Leibniz es precisamente la elaboración de una notación especialmente afortunada, tan identificada con los propios conceptos y tan significativamente definitiva, que, a veces, nos resulta inevitable utilizarla, anacrónicamente, para exponer los resultados infinitesimales de sus predecesores. Su virtuosismo en la creación del simbolismo le permitiría traducir en fórmulas los resultados y en algoritmos los métodos, tanto los de sus antecesores como los descubiertos por él mismo, lo que a su vez le facilitaría la utilización de los recursos algebraicos para independizar el discurso matemático de las figuras geométricas y con todo ello reconocer y aislar los conceptos fundamentales del Cálculo Infinitesimal, creando un cuerpo de doctrina dotado de algoritmos eficaces, es decir, funcionando como un Cálculo operacional que resuelve todos los problemas planteados anteriormente, mediante procedimientos uniformes y con una proyección a nuevos y más complicados problemas, como un potente instrumento de investigación. En palabras del propio Leibniz, se trataba de hacer con las técnicas y los métodos del Cálculo lo mismo que había hecho Vieta con la *Teoría de Ecuaciones* del *Arte Analítica* y Descartes con *La Geometría*.

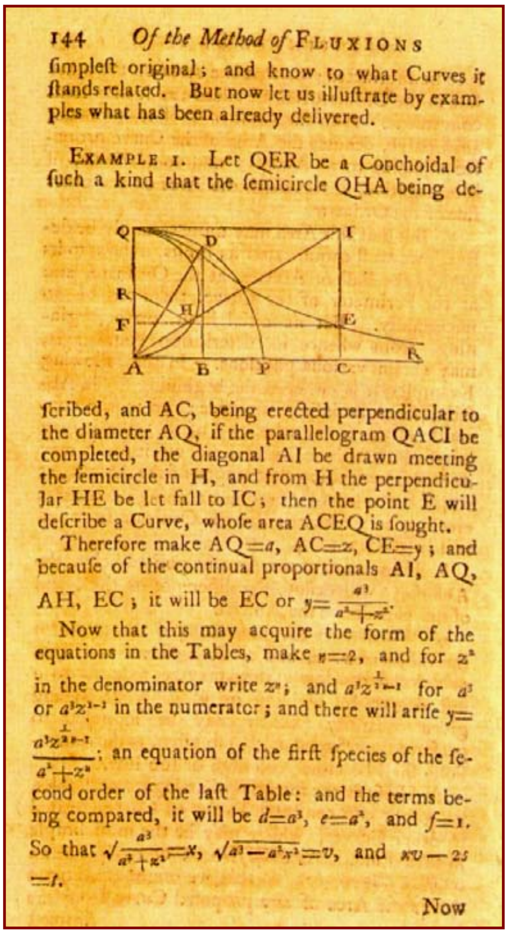
El descubrimiento final del Cálculo Infinitesimal, requería la confrontación y contrastación de los métodos geométricos de Cavalieri y Barrow con los métodos analíticos de Descartes, Fermat y Wallis, con los métodos aritméticos de Roberval, Fermat y Wallis y con los métodos cinemáticos de Torricelli, Roberval y Barrow. No se ajusta por tanto del todo a la realidad histórica la asignación categórica de Newton a la tradición cinemática representada por Arquímedes, Galileo, Torricelli, Roberval y Barrow y de Leibniz a la tradición atomistística representada por Demócrito, Kepler, Cavalieri, Fermat, Pascal y Huygens. Las dos tradiciones afectaron tanto a Newton como a Leibniz.

El descubrimiento final del Cálculo requería asimismo y sobre todo el reconocimiento de la importancia del *Teorema Fundamental del Cálculo* como núcleo de un algoritmo universal, que establecería una forma general de proceder aplicable a todos los problemas infinitesimales.

El Cálculo de Newton comienza con la consideración de elementos infinitesimales a la manera de Fermat y Barrow –cuya aplicación extiende mediante el *Teorema binomial*–, pero en seguida deriva hacia una concepción mecánica, basada en la idea intuitiva del movimiento continuo, a base de operar con el concepto de «*fluente*» –como cantidad que varía respecto al tiempo– y de «*fluxión*» –como su velocidad de cambio respecto al tiempo–, y utilizar constantemente las series infinitas para universalizar la aplicabilidad del cálculo fluxional, valiéndose de la derivación término a término. En cuanto a la Integración, Newton cambia radicalmente la concepción tradicional del área como límite de una suma de infinitesimales, a base de considerar la razón de cambio del área respecto de la abscisa, calculando después el área, mediante una antiderivación, dejando completamente claro, por vez primera, el carácter inverso de las cuadraturas y las tangentes. Newton recoge la influencia de Barrow –que en su versión del *Teorema Fundamental del Cálculo* maneja la integral indefinida a expensas de la integral definida–, permutando la preeminencia que históricamente había tenido la integración sobre la derivación. Con Newton la derivación ocupará el papel principal, quedando la integración reducida a ser el problema inverso. De hecho Newton con su intuición algorítmica, concebirá la idea de sustituir todas las operaciones de carácter geométrico involucradas en el Cálculo, por una única operación analítica, la derivación, que resolverá además por inversión, la integración –*Teorema Fundamental del Cálculo*–, para lo cual se auxiliará con el reciente y poderoso algoritmo de los desarrollos en serie –derivación e integración término a término–.

El Cálculo de Leibniz tiene en cambio una hechura más analítica y simbólica, al ser las diferencias infinitesimales y la suma de «*infinitamente pequeños*» las bases de su Cálculo Diferencial e Integral, respectivamente, lo que le permite, al extrapolar el carácter inverso de la suma y la diferencia, como operaciones, descubrir el vínculo entre tangentes y cuadraturas, y a través del triángulo característico reducir todos los problemas de cuadratura a una antiderivación, considerando lo que se llama la «*cuadratriz*» o «*sumatriz*», y auxiliándose, además, con transformaciones a modo de sustituciones, que son operaciones totalmente análogas a la integración por partes y por cambio de variable.

LA FUNCIÓN DE NEWTON Y LEIBNIZ EN EL DESCUBRIMIENTO DEL CÁLCULO INFINITESIMAL



144 *Of the Method of* FLUXIONS

simplest original; and know to what Curves it stands related. But now let us illustrate by examples what has been already delivered.

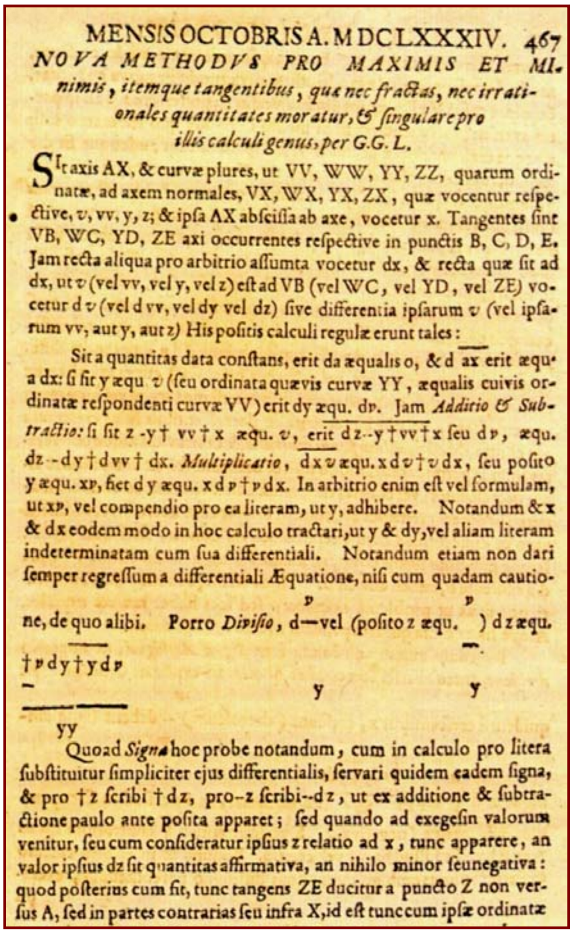
EXAMPLE I. Let QER be a Conchoidal of such a kind that the semicircle QHA being de-

scribed, and AC, being erected perpendicular to the diameter AQ, if the parallelogram QACI be completed, the diagonal AI be drawn meeting the semicircle in H, and from H the perpendicular HE be let fall to IC; then the point E will describe a Curve, whose area ACEQ is sought.

Therefore make $AQ=a$, $AC=z$, $CE=y$; and because of the continual proportionals AI, AQ, AH, EC; it will be EC or $y=\frac{a^3}{a^2+z^2}$.

Now that this may acquire the form of the equations in the Tables, make $\eta=2$, and for z^2 in the denominator write z^η; and $a^3z^{\frac{1}{\eta}-1}$ for a^3 or a^3z^{1-1} in the numerator; and there will arise $y=\frac{a^3z^{\frac{1}{\eta}-1}}{a^2+z^\eta}$; an equation of the first species of the second order of the last Table: and the terms being compared, it will be $d=a^3$, $e=a^2$, and $f=1$. So that $\sqrt{\frac{a^3}{a^2+z^2}}=x$, $\sqrt{a^3-a^2x^2}=v$, and $xv-2s=t$.

Now



MENSIS OCTOBRIS A. MDCLXXXIV. 467

NOVA METHODUS PRO MAXIMIS ET MINIMIS, itemque tangentibus, quæ nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, & singulare pro illis calculi genus, per G.G. L.

Sit axis AX, & curvæ plures, ut VV, WW, YY, ZZ, quarum ordinatæ, ad axem normales, VX, WX, YX, ZX, quæ vocentur respective, v, vv, y, z; & ipsa AX abscissa ab axe, vocetur x. Tangentes sint VB, WC, YD, ZE axi occurrentes respective in punctis B, C, D, E. Jam recta aliqua pro arbitrio assumta vocetur dx, & recta quæ sit ad dx, ut v (vel vv, vel y, vel z) est ad VB (vel WC, vel YD, vel ZE) vocetur dv (vel dvv, vel dy vel dz) sive differentia ipsarum v (vel ipsarum vv, aut y, aut z) His positis calculi regulæ erunt tales:

Sit a quantitas data constans, erit da æqualis o, & $d\overline{ax}$ erit æqu. a dx: si sit y æqu v (seu ordinata quævis curvæ YY, æqualis cuivis ordinatæ respondenti curvæ VV) erit dy æqu. dv. Jam *Additio & Subtractio*: si sit z - y + vv + x æqu. v, erit $d\overline{z-y+vv+x}$ seu dv, æqu. dz - dy + dvv + dx. *Multiplicatio*, $d\overline{xv}$ æqu. x dv + v dx, seu posito y æqu. xv, fiet dy æqu. x dv + v dx. In arbitrio enim est vel formulam, ut xv, vel compendio pro ea literam, ut y, adhibere. Notandum & x & dx eodem modo in hoc calculo tractari, ut y & dy, vel aliam literam indeterminatam cum sua differentiali. Notandum etiam non dari semper regressum a differentiali Æquatione, nisi cum quadam cautione, de quo alibi. Porro *Divisio*, $d\frac{v}{y}$ vel (posito z æqu. $\frac{v}{y}$) dz æqu. $\frac{\pm v\,dy \mp y\,dv}{yy}$

Quoad *Signa* hoc probe notandum, cum in calculo pro litera substituitur simpliciter ejus differentialis, servari quidem eadem signa, & pro + z scribi + dz, pro - z scribi - dz, ut ex additione & subtractione paulo ante posita apparet; sed quando ad exegesin valorum venitur, seu cum consideratur ipsius z relatio ad x, tunc apparere, an valor ipsius dz sit quantitas affirmativa, an nihilo minor seu negativa: quod posterius cum fit, tunc tangens ZE ducitur a puncto Z non versus A, sed in partes contrarias seu infra X, id est tunc cum ipsæ ordinatæ

1. **Página de *The Metod of Fluxions* de Newton (Londres, 1737), con el trazado de la tangente a la concoide. En esta obra Newton unifica la mayor parte de resultados sobre tangentes y cuadraturas que ocuparon a buena parte de los matemáticos del siglo XVII.**

1. **Página de *Nova Methodus pro Maximis et Minimis* de Leibniz (Leipzig, 1684), donde aparecen las reglas para derivar sumas, productos y cocientes. Esta obra se la considera como la primera publicación sobre Cálculo Infinitesimal de la historia.**

«*Apoyándose en hombros de gigantes*» primero los de Arquímedes y después los de Cavalieri y Torricelli, Fermat y Descartes, Roberval y Pascal, Wallis y Barrow; apurando y exprimiendo la capacidad de unificación y generalización que permitían los procedimientos del Álgebra y de la Geometría Analítica, bajo concepciones y métodos infinitesimales diferentes, Newton y Leibniz fueron capaces de separar la ganga geométrica de los resultados de sus antecesores y encontrar el principio general que les permitiría reducir las operaciones fundamentales del Cálculo Infinitesimal a una operativa universalmente válida, concibiendo la idea de sustituir todas las operaciones de carácter geométrico implicadas en el cálculo de tangentes, por una única operación analítica –la derivación del Cálculo Diferencial–, que resolvería, además por inversión –cálculo de la antiderivada o primitiva– los problemas de cuadraturas del Cálculo Integral, a través del *Teorema Fundamental del Cálculo*, que vincula ambos problemas y permite la obtención de cuadraturas mediante la resolución del problema inverso de la tangente.

En la brillante operación realizada por Newton y Leibniz, que se ha venido en llamar el descubrimiento del Cálculo Infinitesimal, y que es sin lugar a dudas, uno de los logros más importantes en la Historia del Pensamiento matemático, coadyuvó de forma decisiva la creación y aplicación de un simbolismo que propiciara traducir en fórmulas los resultados y en algoritmos los métodos, a base de utilizar los recursos algebraicos de la Geometría Analítica para emancipar los desarrollos matemáticos de las figuras geométricas y con todo ello reconocer y destilar los conceptos fundamentales del Cálculo Infinitesimal y crear una herramienta matemática dotada de algoritmos eficaces, es decir, funcionando como un Cálculo operacional que resuelve todos los problemas de cuadraturas y tangentes planteados anteriormente, mediante procedimientos uniformes y con una proyección a nuevos y más complejos problemas y cuestiones, como un potente instrumento de investigación. En palabras del propio Leibniz, se trataba de hacer con las técnicas del Cálculo lo mismo que había hecho Vieta con la *Teoría de Ecuaciones* y Descartes con *La Geometría*.

Como conclusión, Newton y Leibniz, bajo concepciones y métodos infinitesimales diferentes, fueron capaces de separar la ganga geométrica de los resultados de sus antecesores, encontrando el principio general que les permitiría reducir las operaciones fundamentales del Cálculo Infinitesimal a un algoritmo universalmente válido, produciendo un cambio sustancial en el tratamiento y resolución de los problemas. Recogiendo todos los componentes de «*lo heurístico*» de la fase empírica anterior, Newton y Leibniz, sin añadir grandes cotas de rigor, desarrollan «*lo algorítmico*» con la fecundidad, coherencia y generalidad de sus diferentes sistemas infinitesimales, abriendo la puerta a «*lo riguroso*» del Análisis moderno. Gracias a la ilustre pléyade de matemáticos que les precedieron estos sabios bien pudieron haber manifestado la frase que se atribuye a diversos científicos:

«*Si he podido vislumbrar más allá, es porque me he apoyado en hombros de gigante.*»

Los artífices del Cálculo Infinitesimal, Newton y Leibniz en sellos de correos alusivos.
Partiendo de bases arquimedianas y apoyándose en los «*gigantescos hombros*» del brillante elenco de matemáticos de la etapa empírica del Cálculo, Newton y Leibniz alumbraron una de las más grandes creaciones de la Historia del Pensamiento: El Cálculo Infinitesimal.

CRONOLOGÍA DEL CÁLCULO INFINITESIMAL

Los problemas infinitesimales en el mundo griego

–585. THALES. Comienzo de la Geometría deductiva.

–540. PITÁGORAS. Aritmética y Geometría pitagóricas. *Álgebra Geométrica*.

–480. HIPASOS DE METAPONTO. Descubrimiento de las magnitudes inconmensurables. Crisis de fundamentos de la Matemática.

–480. HERÁCLITO DE EFESO. Pluralidad móvil.

–475. Dispersión de la comunidad pitagórica.

–465. PARMÉNIDES DE ELEA. Unidad inmóvil. Origen de la Metafísica.

–460. ANAXÁGORAS DE CLAZOMENE. Cuadratura del círculo. Axioma de Continuidad.

–450. HIPÓCRATES. Primer matemático «*profesional*». Cuadraturas de *lúnulas*. Duplicación del cubo. Método de Análisis. Letras en figuras geométricas. Primeros *Elementos* de Geometría.

–445. ZENÓN DE ELEA. Paradojas sobre el movimiento. Crítica filosófica a los Principios de la Matemática. «*Horror al infinito*».

–440. LEUCIPO. Teoría atomística.

–430. ANTIFÓN DE ATENAS. Cuadratura del círculo. Exhaución.

–425. TEODORO DE CIRENE. Demostraciones de inconmensurabilidad.

–420. SÓCRATES. Inducción y Definición.

–420. HIPIAS. Sofística. Cuadratriz. Trisección del ángulo.

–415. DEMÓCRITO DE ABDERA. Atomística. Irracionales. Indivisibles. Volumen de la pirámide y del cono.

–410. BRYSON DE HERACLEA. Cuadratura del círculo. Compresión.

–400. ARQUITAS. Estereometría. Duplicación del cubo. Mecánica. *Cuadrivium*.

–380. PLATÓN. Fundamentos de las Matemáticas. Sistematización de la demostración rigurosa. Organización y estructuración deductiva de la Matemática –antecedente euclídeo–. Método Analítico. La Academia. Mecenazgo de matemáticos. La Matemática propedéutica de la Filosofía. Educación matemática. Inconmensurables. *Cuadrivium*.

–370. EUDOXO DE CNIDO. Solución a la crisis de fundamentos de la Matemática producida por la aparición de las magnitudes inconmensurables. Axioma de Continuidad. Teoría de la Proporción. Método de Exhaución.

–350. MENECMO. Secciones cónicas. Duplicación del cubo.

–340. ARISTÓTELES. Lógica. Infinito potencial y actual.

–320. EUDEMO. Historia de las Matemáticas.

–300. EUCLIDES. *Los Elementos*. Compilación y sistematización de la Geometría elemental griega. *Álgebra Geométrica* (Libro II). Teoría de la Proporción (Libros V, VI). Inconmensurables (Libro X). Cubaturas de prismas, pirámides, cilindros conos (Libro XII).

–225. ARQUÍMEDES. Invención y rigor. Descubrimiento y demostración –*Ars inveniendi* y *Ars disserendi*. Método mecánico de descubrimiento mediante la ley de equilibrio de la palanca. Método de exhaución mediante compresión. Cuadratura del círculo. Cuadratura de la Espiral de Arquímedes y de la Parábola. Conoides y esferoides. Numerosas cuadraturas, cubaturas y centros de gravedad.

- 200. APOLONIO. Estudio exhaustivo de las curvas cónicas en *Las Cónicas*. Elementos notables de las cónicas. Lugares geométricos Virtuosismo geométrico. Sistemas de coordenadas. *Symptoma* de las cónicas (ecuaciones del *Álgebra Geométrica* en forma de proporción). Raíces primigenias de la Geometría Analítica. Tangentes y normales como rectas máximas y mínimas.

+250. DIOFANTO. *La Aritmética*. Álgebra sincopada.

+325. PAPPUS. *La Colección Matemática*. Compilación del Análisis Geométrico griego. Geometría Superior. Comentarios. Cónicas como lugares geométricos –foco y directriz–. Método Analítico. Clasificación de los problemas geométricos. Duplicación del cubo. Trisección del ángulo. Los *Diorismos* y condiciones límites como origen de los problemas de máximos y mínimos –Proposición VII.61–.

+460. PROCLO. Comentarios históricos sobre la Geometría griega. Lugares geométricos. Filosofía de la Matemática.

La aportación medieval a lo infinitesimal

+560. EUTOCIO DE ASCALON. Comentario de Arquímedes.

1125. JORDANUS NEMORARIUS. Continuidad.

1260. CAMPANUS. Traducción de *Los Elementos* de Euclides.

1270. MOERBECKE. Traducción de algunas Obras de Arquímedes.

1325. BRAWARDINE. Especulaciones sobre el continuo, el infinito, el tiempo y el movimiento.

1330. ESCUELA DE MERTON. Movimiento uniformemente acelerado. *Regla de Merton*.

1360. ORESME. *Tractatus de latitudinibus formarum*. Latitud de las formas. Sistemas de coordenadas. Representación gráfica de variables. Estudio de movimiento. *Principio de Oresme*. *Regla de Merton*.

Las cuestiones infinitesimales en el Renacimiento

1450. CUSA. Cuadratura del círculo.

1482. RATDOLT. Primera edición impresa de *Los Elementos* de Euclides.

1543. TARTAGLIA. Publicación de la traducción de Arquímedes de Moerbecke.

1575. COMMANDINO. Recuperación, traducción y restauración del legado clásico griego (*Los Elementos* de Euclides, *Obras* de Arquímedes, *Las Cónicas* de Apolonio, *La Colección Matemática* de Pappus).

1591. VIETA. *In Artem Analyticem Isagoge*. Álgebra simbólica. Parámetros en las ecuaciones. *Logistica speciosa* del *Arte Analítica*. Aplicación del Análisis algebraico a problemas geométricos. Raíces de la Geometría Analítica.

La etapa empírica del Calculo

1614. NAPIER. *Mirifici Logarithmorum* ... . Logaritmos de Neper.

1615. KEPLER. *Stereometria*. Volúmenes de conoides de revolución. Principio de Continuidad.

1619. Fundación de la *Cátedra Savilian* de Oxford.

1624. BRIGGS. *Arithmetica Logarithmica*. Logaritmos vulgares. Tablas

1629–36. FERMAT. Máximos y mínimos y tangentes. Cuadraturas aritméticas de potencias naturales, basadas en fórmulas sobre números poligonales.

1634. ROBERVAL. *Traité des indivisibles*. Cuadratura de la parábola. Problemas sobre la cicloide. Cuadraturas trigonométricas. Método cinemático para el trazado de tangentes.

1635. CAVALIERI. *Geometria Indivisibilibus* ... . Método de los Indivisibles. Principio de Cavalieri. Integración de x^n, n=1,2,3,4,5, 6,9. Area de la elipse. Cuadratura de la espiral.

1636. FERMAT. *Intoducción a los lugares planos y sólidos* –Geometría Analítica de Fermat–.

1637. DESCARTES. *La Geometría* –Geometría Analítica de Descartes–. Método del círculo para el trazado de normales.

1638. FERMAT y DESCARTES. Controversia sobre las tangentes.

1638. GALILEO. *Discorsi* ... . Cuestiones sobre el infinito y lo infinitesimal

1640. FERMAT. *Investigación Analítica, Doctrinam Tangentium*. Fundamentación de los métodos de máximos y mínimos y de tan gentes.

1640. ROBERVAL y TORRICELLI. Rectificación de la espiral logarítmica.

1643. FERMAT. Cuadraturas de hipérbolas y parábolas generalizadas.

1644. TORRICELLI. *Opera geometrica*. Indivisibles. Cuadraturas. Cubatura de un sólido infinito. Método cinemático para el trazado de tangentes.

1646. VAN SCHOOTEN. Edición de *Opera mathematica* de Vieta.

1647. SAINT-VINCENT. *Opus Geometricum* ... . Cuadratura del círculo. Logaritmos y áreas hiperbólicas.

1649. VAN SCHOOTEN. Primera edición de *La Geometría* de Descartes separada de *El Discurso del Método.*

1654. PASCAL. *Potestatum numericarum summa* . Fórmula para la suma de potencias. Integración aritmética de potencias naturales.

1655. WALLIS. *Arithmetica Infinitorum*. Integración aritmética de potencias de exponente fraccionario. Producto infinito para $\pi/2$.

1657. NEIL. Rectificación de la parábola semicúbica.

1658. ROBERVAL y WREN. Rectificación de la cicloide.

1658. PASCAL. *Lettres de A. de Detonville*. Concurso sobre la cicloide.

1659. PASCAL. *Traite des sinus du quart de cercle*. Integración de senos. Triángulo característico.

1659. FERMAT. Tratado general sobre rectificación de curvas.

1659. WALLIS. *Tractaus duo, prior de cycloide, posterior cisoide*. Rectificación de la cicloide, cuadratura de la cisoide.

1665. WALLIS. *Tractatus de sectionibus conicis*. Cónicas como lugares geométricos. Propiedades de las cónicas a través de sus ecuaciones.

1659. HUDDE. Reglas para las tangentes a curvas algebraicas.

1660. SLUSE. Espirales. Puntos de inflexión.

1660. Fundación de la *Royal Society* de Londres.

1663. Fundación de la *Cátedra Lucasiana* de Cambridge.

1665. Fundación de las revistas *Le Journal des Savants* y *Philosophical Transactions*.

1667. GREGORY. *Vera circuli et hiperbola cuadratura*. Aproximación al concepto de convergencia de una serie.

1668. GREGORY. *Geometricae par universalis*. Teorema binomial. Desarrollos en serie de funciones trigonométricas.

1668. MERCATOR. *Logarithmotechnia*. Serie de Mercator para el logaritmo.

1669. Fundación de la *Académie des Sciences* de París.

1670. BARROW. *Geometrical Lectures*. Método infinitesimal de tangentes. Triángulo característico. Reglas habituales de la derivación respecto a las operaciones aritméticas Reglas para la diferenciación e integración de funciones potenciales, circulares, logarítmicas, exponenciales y otras muchas. integración por partes y por cambios de variable. Teorema Fundamental del Cálculo.

1675. BARROW. Edición conjunta de *Las Cónicas* de Apolonio y las *Obras* de Arquímedes.

1673. HUYGENS. Horologium oscillatorium. Curvatura. Involutas y evolutas. Rectificación de la Cicloide.

1679. FERMAT. Samuel de Fermat publica *Varia Opera Mathematica* de Pierre de Fermat.

El descubrimiento del cálculo infinitesimal por Newton

1666. NEWTON. *Tratado sobre fluxiones*. Investigación cinemática de tangentes. Teorema Fundamental del Cálculo. Regla del producto y del cociente. Regla de la cadena e integración por sustitución. Razón de cambio del área. Cálculo del área mediante antidiferenciación. Tabla de antiderivadas.

1669. NEWTON. *De analysi per aequationes* ... . Método general para calcular el área bajo la curva y=f(x) mediante el Teorema Fundamental del Cálculo. Integración término a término de desarrollos en serie. Desarrollos en serie obtenidos por división y extracción de raíces. Reversión de series. Series trigonométricas. Aplicación a la cuadratura de la cicloide y la cuadratriz.

1671. NEWTON. *Methodus fluxionum et serierum infinitarum* (no impreso hasta 1736) –Obra maestra del Cálculo–. Compilación de trabajos anteriores. Aplicación de las series infinitas a la resolución de ecuaciones algebraicas y diferenciales (coeficientes indeterminados). Máximos y mínimos. Nuevas integraciones por sustitución. Transformación de integrales. Aplicación a la cuadratura de la cicloide, la cisoide, la espiral y la versiera. Nuevas tablas de integrales. Triángulo característico. Longitudes de arco. Primera rectificación de la cisoide. Rectificación de la parábola semicúbica, de un arco de elipse y de la cuadratriz.

1676. NEWTON. *Epistola Prior* (13 de junio). *Epistola Posterior* (24 de octubre). Serie binomial de Newton para potencias de exponente negativo y fraccionario.

1687. NEWTON. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Razones últimas de cantidades evanescentes –intento de definición del concepto de límite–.

1693. NEWTON. *De quadratura curvarum* (publicado como apéndice de la *Opticks* en 1704). Ultima versión del Cálculo de Newton.

1699. N.FATIO DE DUILLIER desata la polémica sobre prioridad entre Newton y Leibniz.

El descubrimiento del cálculo infinitesimal por Leibniz

1666. LEIBNIZ. *De arte combinatoria*. Propiedades de las combinaciones y permutaciones.

1676. LEIBNIZ. Réplica a la *Epistola Prior* de Newton. Reducción de expresiones irracionales a racionales. Reducción analítica de cuadraturas (método de transmutación). Cuadratura aritmética del círculo. Serie de Leibniz : $\pi/2=\Sigma(-1)^{n+1}(1/n)$.

1677. LEIBNIZ. Réplica a la Epistola Posterior de Newton. Notación diferencial. Triángulo característico. Ecuaciones diferenciales.

1684. LEIBNIZ. *Nova methodus pro maximis et minimis* ... . (Nuevo método para los máximos y mínimos, así como para las tangentes, que no se detiene frente a cantidades fraccionarias e irracionales, y un tipo peculiar de cálculo para esos problemas, publicado en el *Acta Eruditorum*, 3, de Leipzig). Cálculo Diferencial de Leibniz. Aparece el término Cálculo Diferencial. Definición de diferenciales como incrementos finitos. Reglas generales de diferenciación. Condiciones de máximo y mínimo. Concavidad y puntos de inflexión. Solución al Problema de De Beaume.

1686. LEIBNIZ. *De Geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum* (publicado en el *Acta Eruditorum*, 5). Cálculo Integral de Leibniz. Introducción del símbolo $\int$ para la integral. Carácter inverso del Cálculo Integral y el Cálculo Diferencial.

1693. LEIBNIZ. *Supplementum geometricae dimensoriae* .... (publicado en el *Acta Eruditorum* de 1693). Teorema Fundamental del Cálculo.

1714. LEIBNIZ. *Historia et origo Calculi differentialis*. Leibniz explica en tercera persona el proceso que le llevó al descubrimiento del Cálculo 40 años antes.

Bibliografía

Obras originales de Arquímedes

1. ARQUÍMEDES: *Arquímedes Opera Omnia.* Publicación de J.L. Heiberg, Leipzig, 1910–1913.
2. ARQUÍMEDES: *El Método.* Introducción y notas de J.Babini. EUDEBA, Buenos Aires, 1966.
3. ARQUÍMEDES: *El Método.* Introducción y notas de L.Vega. Alianza Editorial, Madrid, 1986.
4. GONZÁLEZ URBANEJA, P.M; VAQUÉ, J.: *El método relativo a los teoremas mecánicos de Arquímedes*. Pub. Univ. Autónoma de Barcelona, Ed. Univ. Politècnica de Catalunya. Colección *Clásicos de las Ciencias.* Barcelona, 1993. Edición crítica en Español con facsímil de esta obra de Arquímedes.
5. GONZÁLEZ URBANEJA, P.M; VAQUÉ, J.: *Mètode d'Arquimedes sobre els teoremes mecànics dedicat a Eratòstenes*. Fundació Bernat Metge. Barcelona, 1997. Edició crítica en català d'aquesta obra d'Arquimedes.
6. RUFINI,E: *Il Metodo d'Archimede e le origine dell'analisi infinitesimale nell'antichità*. Casa Editrice Alberto Stock, Roma, 1926. Nueva edición de Feltrinelli, Milán, 1961.
7. VER EECKE,P: *Les Oeuvres complètes d'Archimède*. Vaillant-Carmanne. Liège, 1960.

Otras obras originales de la Matemática Griega

8. ARISTÓTELES: *Analítica Primera*, *Metafísica*, *Física* (en Obras). Aguilar, Madrid, 1967.
9. ENRIQUES,F.: *Los Elementos de Euclides y la crítica antigua y moderna*. Libros I-IV. Instituto Jorge Juan (CSIC). Madrid. 1954.
10. EUCLIDES: *Elementos*. Traducción y notas de M.L.Puertas. Gredos, Madrid, 1996.
11. HEAT,T.L.: *The thirteen books of The Elements*. 3 Vols. Dover, New York, 1956.
12. PLATÓN: *Obras completas.* Aguilar, Madrid, 1969.
13. VER EECKE,P.: *Les Coniques d'Apolonius de Pergue*. Blanchard, París, 1959.
14. VER EECKE,P.: *Diophante d'Alexandrie. Les six livres arithmétiques*. Blanchard, París, 1959.
15. VER EECKE,P: *Pappus d'Alexandrie. La Collection Mathémathique*. Blanchard. París, 1982.
16. VERA,F.: *Científicos griegos* (Ediciones en español de *Los Elementos* de Euclides, *Las Cónicas* de Apolonio, *La Aritmética* de Diofanto y *La Colección Matemática* de Pappus). Aguilar, Madrid, 1970.

Obras originales de Fermat y Descartes

17. DESCARTES,R.: *Vie et Oeuvres de Descartes*. Publiées par C. Adam y P. Tannery. 13 volúmenes. Léopold Cerf, imprimeur París, 1897-1913.
18. DESCARTES,R.: *Oeuvres de Descartes*. Pub.C. Adam; P.Tannery. Lib. Philos. J.Vrin, París, 1964-74.
19. DESCARTES,R.: *La Geometría*. Introd.de P.Rosell. Espasa-Calpe, Buenos Aires, 1947.
20. DESCARTES,R.: *The Geometry*. Traducción de D.Smith. Dover, New York, 1954.
21. DESCARTES,R.: *La Geometria*. Introducció, traducció i notes de J.Pla i P.Viader. Institut d'Estudis Catalans, Eumo-Pòrtic, Barcelona-Vic, 1999.
22. DESCARTES,R.: *Discurso del Método, Dióptrica, Meteoros y Geometría*. Prólogo, traducción y notas de G.Quintás. Alfaguara, Madrid, 1986.
23. DESCARTES,R.: *Discurso del Método / Reglas para la dirección de la mente*. Orbis, Barcelona,1983.
24. DESCARTES,R.: *Reglas para la dirección del espíritu*. Alianza Editorial, Madrid, 1989.
25. DESCARTES,R.: *Discurso del Método*. Alianza Editorial, Madrid, 1991.
26. FERMAT: *Oeuvres de Fermat*. Pub. Henry,C; Tannery,P, Gauthier-Villars, París, 1891-1912.

Otras obras originales de Newton y Leibniz

27. LEIBNIZ,G.: *Análisis Infinitesimal***.** Introd. y notas de J.Lorenzo. Tecnos, Madrid 1987.
28. LEIBNIZ,G.: *De la Geométrie peu accessible et de l'analyse des indivisibles et des indeterminés.* Actes Savants de Leipzig, 1686.
29. NEWTON,I.: *La méthode des fluxions et des suites infinies*. Chez Beburé l'aîné, Libraire. París, 1740.

30. NEWTON,I: *Principios matemáticos de la filosofia natural y su sistema del mundo*. Edición de A, Escohotado. Editora Nacional, Madrid, 1982.
31. NEWTON,I.: *Análisis de Cantidades mediante Series, Fluxiones y Diferencias*. Edición crítica con facsímil A.Durán de la obra de Newton *Analysis per Quantitatum, ...* SAEM Thales, RSME, Sevilla, 2003.

Obras originales de otros matemáticos

32. BARROW,I.: *Geometrical lectures***.** Edited by M.Child. Chicago, Open Court, 1916.
33. CAVALIERI,B.: *Geometria degli Indivisibili*. Edición de L.Lombardo. Torino, 1996.
34. ORESME,N.: *Tractatus de configurationibus Qualitatum et motuum*. Introducción, traducción y comentarios de M.Clagett. University of Wisconsin Press, 1968.
35. PASCAL,B.: *Oevres Complètes*. Bibliothèque de La Pléiade, París,1969.
36. SMITH,D.E.: *A Source Book in Mathematics*. Dover, New York,1959.
37. STRUIK,D.: *A Source Book in Mathematics.* 1200-1800. Harvard University. Massachusetts,1969. Caps. 4,5.
38. VIETA: *Introduction a l'Art Analytique*. Traduit par M.F.Ritter. 1867.
39. VIETA: *The Analytic Art*. Trasl. by T.R.Witmer. The Kent University Press. Ohio, 1983.
40. VIETA: *Oeuvres Mathématiques*. Traduction par J.Peyroux. Blanchard. París, 1991-92.

Obras monográficas sobre Pitágoras

41. GONZÁLEZ URBANEJA,P.M.: *Pitágoras, el filósofo del número*. Nivola, Madrid, 2001. Cap.6.
42. GONZÁLEZ URBANEJA,P.M.: Legado y herencia de Pitágoras (en *APUNTES DE CPR*. Nº 10. pp. 16-21), Palencia, 2001.
43. GONZÁLEZ URBANEJA,P.M.: *Pitágoras. El umbral del Pensamiento occidental* (en *Reflexiones sobre el pasado, presente y futuro de las Matemáticas*, pp.77-117). Publicaciones de la Universidad de Huelva. 2002.

Obras monográficas sobre Arquímedes

44. BABINI,J.: *Arquímedes*. Espasa-Calpe, Buenos Aires, 1948.
45. CLAGETT,M.: *Archimedes in the Middle Ages*. Vol.1. University of Wisconsin Press, 1968.
46. CLAGETT,M.: *Archimedes* (en *Dictionary of Scientific Biography*), Charles Scribners sons, New York, 1970. Vol. I, pp. 213-231.
47. DIJKSTERHUIS,E.: *Archimedes*, Princeton University Press, 1987.
48. HEATH, T. L.: *The Works of Archimedes*. Dover, New York, 2002.
49. STRATHERN,P.: *Arquímedes y la palanca.* Siglo XXI, 1999.
50. TORIJA,R.: *Arquímedes*. *Alrededor del círculo*. Nivola, Madrid, 1999.
51. VARIOS AUTORES: *Arquímedes.* Editorial Debate/Itaca, Madrid, 1954.

Obras monográficas sobre Fermat y Descartes

52. ÁLVAREZ,C.: *Descartes y la ciencia del siglo XVII*. Siglo XXI, México, 2000.
53. CHICA,A.: *Descartes. Geometria y método.* Nivola, Madrid, 2001.
54. ITARD,J.: *Pierre Fermat*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1950.
55. LYCÉE PIERRE FERMAT DE TOULOUSE: *Un Mathématicien de Génie, Pierre de Fermat***.** Exposition organisée par la Bibliothèque Municipale de Toulouse, 1957.
56. MAHONEY,M.S.: *The Mathematical Career of Pierre Fermat*. Princeton University Press, 1994.
57. MONTESINOS,J.: *Descartes: el Álgebra y la Geometría*. Actas, año II, Seminario *Orotava* de Historia de la Ciencia, Canarias 1995.
58. ROSSELLINI,R.: *Cartesius*. RAI, una produzione Orizzonte 2000. 180'.
59. SHEA,W.R.: *La magia de los números y el movimiento*: *la carrera científica de Descartes*. Alianza Universidad, 746, Madrid, 1993.
60. VERA,F.: *Veinte matemáticos célebres* (Cap.5: Fermat–Descartes)**.** Mirasol. Buenos Aires, 1961.

Obras monográficas sobre Newton y Leibniz

61. BABINI,J.: *El Cálculo Infinitesimal. Leibniz/Newton.Origen-polémica*. EUDEBA, Buenos Aires, 1977.
62. CHRISTIANSON,G.: *Newton*. 2 vols. Salvat Editores, Barcelona, 1986.
63. MUÑOZ,J.: *Newton. El umbral de la ciencia moderna*. Nivola, Madrid, 1999.
64. VARIOS AUTORES : *Newton*. Editorial Debate/Itaca. Madrid, 1983.
65. VERA,F.: *Veinte matemáticos célebres* (Cap. 6: Newton–Leibniz). Mirasol. Buenos Aires, 1961.

Obras monográficas sobre otros matemáticos

66. AUGER,L.: *Gilles Personne de Roberval, "Un savant méconnu"*. Blanchard, París, 1962.
67. BELL,E.T.: *Les grands mathématiciens* (Zenón, Eudoxo, Arquímedes, Descartes, Fermat, Pascal, Newton, Leibniz, ...). Payot. París, 1950.
68. CLAGETT,M.: *Nicole Oresme and the Medieval Geometry of Qualities and Motions*. University of Wisconsin Press, 1968.
69. GARDIES,J.: *Pascal, entre Eudoxo y Cantor*. Librairie philosophique Vrin, París, 1984.
70. GONZÁLEZ URBANEJA, P.M.: *Las Técnicas del Cálculo: Fermat, Wallis y Roberval* (en *Seminario Orotava de Historia de la Ciencia*, Actas, año II, pp.405-438), Santa Cruz de Tenerife, 1995.
71. KNORR,W.R.: *The evolution of the Euclidian Elements*. D.R.P.Company. Londres, 1990.
72. LEVI,B.: *Leyendo a Euclides*. Zorzal, Buenos Aires, 2001.
73. SCOTT,J.: *The Mathematical work of Jhon Wallis.* Chelsea Publishing Company, New York, 1981.
74. VARIOS AUTORES: *L'Oeuvre scientifique de Pascal*. Presses Universitaires de France, París, 1964.
75. VARIOS AUTORES: *Matemáticas en el mundo moderno* (Descartes, Newton, Leibniz, ...) . Blume, Madrid-Barcelona, 1974.
76. VARIOS AUTORES: *Grandes Matemáticos* (... Descartes, Fermat, ...). Investigación y Ciencia, Barcelona, 1995.

Artículos de revistas científicas

77. ANDERSEN,K.: *Cavalieri's Method of Indivisibles.* Archiv of History of Exactes Sciences, 291–367, febrero 1984.
78. BACHMAKOVA,I.G.: *Les méthodes differentieles d'Archimède.* Archiv of History of Exactes Sciences, 2, 1962–63.
79. BOS, H.J.M.: *On the Representation of Curves in Descartes' Géométrie*. Archiv of History of Exactes Sciences, 24, 295338, 1981.
80. BOS, H.J.M.: *Differentials, higher–order differentials and the derivative in the Leibnizian calculus.* Archiv of History of Exactes Sciences, 14, 190, 1974–1975.
81. BOSMANS,H.: *La publication des inédits de Fermat.* Revue de Questions Scientifiques. 3, 422–441, 1923.
82. BOYER,C.B.: *Proportion, Equation, Function, three steps in the development of a concept*. Scripta Mathematica, XII, 513, 1946.
83. BOYER,C.B.: *History of Analytic Geometry.* Scripta Mathematica, 1956, Capítulos III–V.
84. BOYER,C.B.: *Cavalieri, limits and discarded infinitesimals.* Scripta Mathematica, VIII, 1941, 7991.
85. BOYER,C.B.: *Pascal, The Man and the Mathematicien.* Scripta Mathematica, XXVI, 283–307, 1963.
86. BRUSOTTI,L.: *I metodi di esaustione nella storia della matematica.* Periodico di Matematiche, Serie IV, Vol. XXX, nº 5, 1952.
87. CAJORI,F.: *Leibniz, the Masterbuilder of Mathematical Notations.* Isis, 7, 412–429, 1925.
88. CASSINA,U.: *Storia del concetto di limite*. Periodico di Matematiche, Serie IV, Vol.XVI, 119, 82–103, 144–167, 1936.
89. COOLIDGE, J.L.: *The Origin of Analytic Geometry*. Osiris, I, 231–250, 1936.
90. COOLIDGE, J.L.: *The History of Tangents.* American Mathematical Monthly, LVIII, 449462, 1951.
91. COOLIDGE, J.L.: *The history of binomial theorem.* American Mathematical Montly, LVI, 147–157, 1949.
92. COWAN RUSELL,W.: *Fermat's contribution to the development of thedifferential Calculus.* Scripta Mathematica, 13, 1947.
93. DHOMBRES,J.: *Quelques aspects de l'histoire des équations fonctionnelles liés à l'évolution du concept de fonction*. Archiv of History of Exactes Sciences, 36, 91–181, 1985.

94. DUTKA,J.: *Wallis's Product, Brouncker's Continued Fractions and Leibniz's Series.* Archiv of History of Exactes Sciences, 26, 115–126, 1982.
95. EVANS,G.V.: *Cavalieri's Theorem in his own words.* American Mathematical Montly, XXIV, 447–451, 1917.
96. FOA,A.: *La Cicloide.* Periodico di Matematiche, Serie IV, VOL.XXV, 65–95, 1946.
97. FONT, V.: *Construcció de tangents i normals en el període* 1630-1660*. Aplicacions a l'ensenyament del càlcul diferencial en el Batxillera*t (en El valor de la ciencia, El viejo Topo, pp. 255-263), Barcelona. 2001.
98. FRITZ,K.: *The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum*. Annals of Mathematics, 46, 242-64, 1945.
99. GALUZZI,M.: *Il Problema della Tangenti nella* "*Géométrie*" *di Descartes*. Archiv of History of Exactes Sciences, 22, 37–51, 1980.
100. GONZÁLEZ URBANEJA,P.M.: *La etapa empírica del Cálculo*. Actas VII JAEM, pp.58-64, SMPM E.Castelnuovo, 1995.
101. GONZÁLEZ URBANEJA,P.M.: *La aparición de los inconmensurables*. Mundo Científico, 220, pp.56-63. Barcelona, 2000.
102. GOULD,S.H.: *The Method of Archimedes*. American Mathematical Monthly, LXII, 473–476, 1955.
103. HEATH,T.L: *The Method de Archimedes recently discovered by Heiberg*. *("a supplement to the works de Archimedes 1897)*. Cambridge University Press, 1912. Nueva edición en Dover Publications, New York,1960.
104. HEIBERG,J.L: "*Eine neue Archimedes handschrift*", *Hermes*, vol.XLII, pp. 234–303, Berlín, 1907.
105. HEIBERG,J.L; ZEUTHEN H.G: *Eine neue Schrift des Archimedes*, Bibliotheca Mathematica de Teubner, págs.321363, Vol. VII_3, Leipzig Junio 1907.
106. HILL,J.M.: *The Theory of Proportion*. The Mathematical Gazette, VI, 324–332, 360–368, 1912.
107. KITCHER.P: *Fluxions, limits, and infinite littnessA study of Newton's presentation of the calculus.* Isis, 64, 33–49, 1973.
108. KNORR,W.R.: *Aristotle and Incommensurability, some further reflections*. Archiv of History of Exactes Sciences, 24, 1–9, 1981.
109. KNORR,J.M.: *Archimedes and the preeuclidean proportion theory*. Archives Internat.Hist.Sciences, 28, 183–244,1978.
110. KNORR,J.M.: *Archimedes and the Elements, Proposal for a Revised Chronological Ordering of de Archimedean Corpus*. Archiv of History of Exactes Sciences, 19, 211–290, 1978.
111. LORENZO,J.: *Pascal y los Indivisibles.* Theoria. Segunda época, año 1, número 1, 1985.
112. MAHONEY,M.S.: *Another Look at Greek Geometrical Analysis*. Archiv of History of Exactes Sciences, 5, 318–348, 1968–69.
113. MILHAUD,G.: *La querelle de Descartes et Fermat au sujet des Tangents.* Revue General des Sciences. XXVIII, 332–337, 1917.
114. MASSA,M.R.: *El mètode dels indivisibles de Bonaventura Cavalieri* (en *Butlleti de la Societat Catalana de Matemàtiques* 9, pp.68-100), Institut d'Estudis Catalans, 1994.
115. MASSA,M.R.: *El concepto de límite hasta el siglo* XVII (en *ciencias, educación e historia*, pp.449-454), Publicacións do seminario de estudos galegos, 1997.
116. NUNN,T.P.: *The arithmetic of infinites.* Mathematical Gazzette, Vol V, 345–356, 377–386, 1910–11.
117. PAUC,C.Y.: *Leibniz in París.* Scripta Mathematica, XX, 37–50.1954
118. ROSENFELD,L.: *RenéFrancois Sluse et le problème des tangents*. Isis, 10, 416–434, 1928.
119. ROSENTHAL,L.: *The History of Calculus*. American Mathematical Montly, LVII, 75–86, 1951.
120. SCRIBA,C.J: *The Inverse Method of Tangents, a Dialogue between Leibniz and Newton (1675–1677)*. Archiv of History of Exactes Sciences, 2, 113–137, 1962–63.
121. SERGESCU,P.: *Les Mathématiques dans le Journal des Savants.* Isis.
122. STROMHOLM,P.: *Fermat's methods of maxima and minima and of tangents. A reconstruction*. Archiv of History of Exactes Sciences, 5, 1968, 47–69.
123. WHITESIDE,D.T.: *Henry Briggs. The binomial theorem anticipated.* The Mathematical Gazzette. Vol.45. 9–12, 1961.
124. WHITESIDE,D.T.: *Newton's discovery of the general binomial theorem.* The Mathematical Gazzette, Vol. 45, 175–180, 1961.
125. WHITESIDE,D.T.: *Patterns of mathematical thought in de later 17th century.* Archiv of History of Exactes Sciences, 1, 1960–62, 179–388.
126. WHITESIDE,D.T.: *The mathematical principles underlyng Newton's Principia Mathematica*. Journal Hist. Astron. 1, 116–138, 1970.
127. YOUSCHKEVITCH,A.P.: *The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century*. Archiv of History of Exactes Sciences, 16, 37–85, 1975

Obras generales sobre Historia del Cálculo Infinitesimal

128. BARON,M.E.: *The Origins of the Infinitesimal Calculus.* London Pergamon, 1969.
129. BOYER,C.B.: *The History of the Calculus and its conceptual development.* Dover, New York, 1949.
130. CASTELNUOVO,G.: *Le Origini del Calcolo Infinitesimale nell'èra moderna.* N.Zanichell Editore, Bologna, 1938.
131. CUESTA DUTARI,N: *Historia de la Invención del Cálculo Infinitesimal y de su introducción en España.* Universidad de Sala manca, 1985
132. DELACHET,A.: *L'Analyse Matémathique*. Presses Univ. de France, nº 378. París, 1977.
133. DURÁN,A.: *Historia, con personajes, de los conceptos del Cálculo*. Alianza Universidad, Madrid, 1996.
134. DURÁN,A.: *De cómo se gestó y vino al mundo del* Cálculo Infinitesimal (en *El legado de las Matemáticas: de Euclides a Newton, los genios a través de sus libros*. pp.224-278).Universidad de Sevilla. 2000.
135. EDWARDS,C.H.: *The Historical Development of the Calculus.* Springer–Verlag, New York, 1979.
136. GONZÁLEZ URBANEJA,P.M.: *Las raíces del Cálculo Infinitesimal en el siglo* XVII. Alianza Universidad, Madrid, 1992.
137. GONZÁLEZ URBANEJA,P.M.: *De la cuadratura de la espiral a la cuadratura de parábolas. La integración de* x^k (en *Resolución de problemas en los albores del siglo* XXI, pp.39-79). Editora Andaluza, Huelva, 2000
138. GRATTAN–GUINNESS,I (compilador): *Del Cálculo a la Teoría de Conjuntos.* Alianza Universidad, Madrid, 1984.
139. NATANSON,I.P.: *Suma de cantidades infinitamente pequeñas.* MIR, Moscú, 1973.
140. TOEPLITZ,O.: *The Calculus, a Genetic Approach.* University of Chicago Press, Chicago, 1963.

Obras generales sobre Historia de la Ciencia y de las Matemáticas

141. ARGÜELLES,J.: *Historia de la Matemática*. Akal, Madrid, 1989. Cap.7.
142. ARTMANN,B.: *Euclid–The Creation of Mathematics*. Springer. New York, 1996. Cap.24.
143. AUSEJO,E.: *Las Matemáticas en el siglo* XVII. Akal. Madrid, 1992. Caps. 3,4.
144. BABINI,J: *Historia sucinta de la Matemática*. Espasa-Calpe, Buenos Aires, 1969. Caps. 8,13,14,26,28,29.
145. BELL,E.T.: *Historia de las Matemáticas*. Fondo de Cultura Económica. México, 1985. Caps. 1,7.
146. BOURBAKI,N: *Elementos de Historia de las Matemáticas***.** Alianza Universidad, Madrid, 1972. Cap. 17.
147. BOYER,C.B.: *History of Analytic Geometry*. Scripta Mathematica. Yeshiva Univ. New York, 1956. Cap.2,4,5.
148. BOYER,C.B.: *Historia de las Matemáticas.* Alianza Universidad. Madrid. 1986. Caps. 4,5,6,7,9,11,14,15,16,17,18,21,22.
149. CAJORI,F.: *A History of Mathematics*.The MacMillan Company. Londres, 1919. Caps. 4,12.
150. CAJORI, F.: *A History of mathematical notations*. Dover, New York, 1983. Vol.2. Cap. II
151. CHASLES,M.: *Aperçu historique sur l'origine et le développment des méthodes en Géométrie*. París 1875.
152. COLERUS,E.: *Breve historia de las Matemáticas*. Doncel, Madrid, 1972. Vol.1, caps.1,2,3,8,9; vol.2, caps.1,2.
153. DEDRON,P ; ITARD,I.: *Mathématiques et Mathématiciens.* Magnard. París 1959. Caps. 4,7,10,11.
154. DHOMBRES, J.: *Mathématiques a fil des âges*. Gauthiers-Villars, París, 1990. Cap.4
155. DUNHAM,W.: *Viaje a través de los genios*. Pirámide. Madrid, 1992. Caps. 1,4.
156. DUNHAM,W.: *El Universo de las Matemáticas*. Pirámide. Madrid, 1995. Cap.D.
157. EGGERS,C.: *El nacimiento de la Matemática en Grecia*. EUDEBA. Buenos Aires,1995. Cap.6.
158. EVES,H.: *An Introduction to the History of Mathematics*. CBS College Publishing,New York, 1983. Caps.3.5, 5.5, 6.3, 8.9, 10, 11.
159. EVES,H.: *Great Moments in Mathematics*. The mathematical association of America, 1977. Vol. Caps. 5,6,8,11,12,23; Vol. Caps. 25,26.
160. GONZÁLEZ URBANEJA,P.M.: *Matemáticas y matemáticos en el mundo griego* (en *El legado de las Matemáticas: de Euclides a Newton, los genios a través de sus libros*). pp.24-75.Universidad de Sevilla. 2000.
161. GONZÁLEZ URBANEJA,P.M.: *Los orígenes de la Geometría Analítica*. Fundación Canaria *Orotava* de Historia de la Ciencia. Tenerife, 2004. Caps. 2,5,6,7,8,10.

162.HEAT, T.L.: *A History of Greek Mathematics*. Dover, New York, 1981. Vol.1, Caps.5,6,7,11; vol.2, Cap.13,19.
163.ITARD,J.: *Essais d'Histoire de les Mathematiques*. Blanchard, París, 1984. Caps. 2.5, 2.6, 3.5–3,9.
164.KLINE,M.: *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*. vols. Alianza Universidad, Madrid, 1992. Vol.1, Caps. 3,4,5,11,12,15,16.
165.KNORR,W.: *The evolution of the Euclidian Elements*. D.R.P.Company. Londres, 1990. Caps. 1,2,3,4,6,7,8,9.
166.LORIA,G.: *Histoire des sciences mathématiques dans l'antiquité hellénique*. Gauthier-Villars, París, 1929. Caps. 2,3.
167.MAZA,C.: *Las matemáticas de la antigüedad y su contexto histórico*. Univ. Sevilla, 2000. Cap.6.3, 7.4, 7.6.
168.MONTESINOS,J. (Coordinador): *Historia de la Geometría griega*. Actas del Seminario *Orotava* de Historia de la Ciencia. Tenerife, 1992. Caps. 5, 11,12,15,22.
169.MONTESINOS,J; HERNÁNDEZ,M. (Coordinadores): *De Arquímedes a Leibniz. Tras los pasos del infinito matemático, teológico, físico y cosmológico*. Seminario Orotava de Historia de la Ciencia, Actas, año II, Santa Cruz de Tenerife, 1995. Caps. 5,12,15,16,18.
170.MONTESINOS,J.: *Historia de las Matemáticas en la Enseñanza Secundaria*. Síntesis. Madrid.2000. Caps. 1,2,3,4,7.
171.MONTUCLA,J.F.: *Histoire des Mathématiques*. Blanchard. París, 1968. Tomos 1 y 2.
172.NICOLAU,F.: *La Matemàtica i els matemàtics.* Claret, Barcelona, 2000. Caps. 5,10,21,28,29,3034,35,36.
173.REY,A.: *El apogeo de la ciencia técnica griega*. 2Vols. UTEHA, México 1962. Libro V.
174.REY PASTOR,J.; BABINI,J: *Historia de la Matemática*. Gedisa,. Barcelona, 1984. Vol.1. Caps. 3.3, 3.6, 4.2, 4.3 ; Vol.2. Caps. 8.1, 8.3, 8.4.
175.RÍBNIKOV,K.: *Historia de las Matemáticas*. MIR, Moscú, 1974. Caps. 3.3, 5.
176.ROUSE BALL,W: *Histoire des Mathématiques***.** Librairie scientifique A.Hermann, París, 1906. Caps. 2,3,4,14,15,16,17.
177.SCOTT,J.F.: *A History of Mathematics***.** Taylor and Francis, New York, 1975. Caps.7,10.
178.SERRES,M. (Compilador): *El Saber griego*. Akal. Madrid,2000. Caps. 3.11, 4.4, 4.5, 4.8, 4.24.
179.SMITH,D.E.: *History of Mathematics*. Dover. New York, 1958. Vol.1, caps 3,9 ; vol.2, caps.5.8,10.
180.SMITH,D.E.: *A Source Book in Mathematics*. Dover. 2 Vols. New York, 1959. Caps. 5.1–5.5.
181.SPENGLER,O.: *El sentido de los números* (en *La decadencia de Occidente*). Austral, Madrid, 1998. Cap.I.1.
182.STRUIK.D.J.: *A Source Book in Mathematics,* 1200-1800. Harvard University Press, Cambridge, 1969. Caps. 4,5.
183.STRUIK,D.J.: *La Matemática, sus orígenes y su desarrollo*. Ediciones Siglo XX. Buenos Aires,1960. Caps.1,2.
184.STRUIK,D.J.: *A Concise History of Mathematics*. Dover. New York, 1987. Caps. 3,6.
185. TANNERY,P.: *La géométrie grecque*. Gauthier-Villars. París,1887. Caps. 6,8,9.
186.TATON,R.: (compilador): *Historia general de las Ciencias*. Orbis. Barcelona, 1988. Vol.2, caps. 1.2.1, 1.3.2, 2.2.1, 2.2.2; vol.3, cap. 8.3.3; vol.5, caps. 1.1.1, 1.1.3.
187.THE OPEN UNIVERSITY: *Topics in History of Mathematics* (La aparición de la Matemática griega. Mersenne: el nacimiento de la Geometría moderna. El nacimiento del Cálculo, La fundación de la Royal Society,). BBC, TV, Londres, 1987.
188.VERA,F: *Breve Historia de la Geometría*. Losada. Buenos Aires, 1963. Caps. 2,4,7,8.
189.WIELEITNER,H.: *Historia de las Matemáticas*. Labor, Barcelona, 1932. Caps. 1.1.B, 3.2.
190.WILSON,R.: *Stamping through mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2001.
191.WUSSING,H.: *Lecciones de Historia de las Matemáticas*. Siglo XXI. Madrid, 1989. Caps. 3,4,7,8.

Obras sobre Filosofía de la Ciencia y de las Matemáticas.

192.ARTMANN,B.: *Euclid–The Creation of Mathematics*. Springer, New York, 1996. Caps. 23,24.
193.BECKER,O.: *Magnitudes y límites del pensamiento matemático*. Rialp, Madrid, 1996. Caps. 1,3.
194.BERKELEY,G.: *The Analyst, A Discourse Addressed to an Infidel Mathematicien*, (en *The works of George Berkeley*). Ed. T.Nelson. Bibliot. Britannica Philosophica, London 1951.
195.BRUNSCHVICG,L.: *Les étapes de la Philosophie Mathématique*. Blanchard, París, 1972. Caps. 4, 7,9.
196.CAÑÓN,C.: *La Matemática, creación y descubrimiento*. Univ.Pontificia de Comillas. Madrid,1993. Cap. 2.3.

197. CROMBIE,A.C.: *Historia de la Ciencia, de San Agustín a Galileo*. Alianza Universidad, Madrid, 1983. Caps. 1.1, 1.3, 1.4.
198. DANTZING,T.: *El número, lenguaje de la ciencia*. Hobbs sudamericana, Buenos Aires, 1971. Cap. VII.
199. FOWLER,D.H.: *The Mathematics of Plato's Academia*. Oxford U.P. New York, 1999. Caps. 2.2, 8.3.
200. GARDIES,J.: *L'Héritage épistémologique d'Eudoxe de Cnide*. Librairie philosophique Vrin, París, 1988. Caps. 1,2,3,4.
201. GÓMEZ PIN,V.: *La tentación pitagórica*. Síntesis, Madrid, 1999. Cap. 2.3.
202. GUEDJ, D.: *El imperio de las cifras y los números*. Ediciones B.S.A. Barcelona, 1988. Cap.V.
203. HULL,L.: *Historia y Filosofía de la Ciencia*. Ariel. Barcelona, 1981. Caps.1,3,7,8.
204. KLINE,M.: *Matemáticas, la pérdida de la certidumbre*. Siglo XXI. Madrid, 1985. Caps. 5,6.
205. KOIRÉ,A.: *Estudios de Historia del Pensamiento Científico*. Siglo XXI. Madrid, 1971. Caps. 18,19.
206. LE LIONNAIS,F.: *Las grandes corrientes del Pensamiento matemático.* EUDEBA. Buenos Aires, 1965.
207. LORENZO,J.: *Introducción al estilo matemático*. Tecnos, Madrid, 1971. Cap.5.
208. MILHAUD,G.: *Les Philosophes-Géométres de la Grèce*. Arno Press. New York, 1976. Libro I.
209. MONDOLFO,R: *El infinito en el pensamiento de la antigüedad clásica*. EUDEBA, Buenos Aires, 1971. Caps. 4,5.
210. RUSSELL,B.: *Historia de la filosofía occidental*. Austral.Madrid,1995. Vol.1. Cap. 3, 33.
211. SANTALÓ, L. (1993): *La matemática: una filosofía y una técnica*, Eumo, Vic- Girona. Caps.1.5, 2.4, 5.4.
212. SZABÓ,A.: *Les débuts des Mathématiques grecques*. Librairie Vrin, París, 1977. Cap.1.
213. VARIOS AUTORES: *Historia del Pensamiento*. Barcelona, 1983. Vol.1, cap.2; vol.2, cap.3.
214. VEGA,L.: *La Trama de la Demostración*. Alianza Universidad, Madrid, 1990. Cap.IV.

Índice de ilustraciones y cuadros textuales

LOS FILÓSOFOS Y MATEMÁTICOS QUE MÁS PARTICIPARON EN EL NACIMIENTO DEL CÁLCULO INFINITESIMAL. 17

LOS INCONMENSURABLES QUIEBRAN LA FILOSOFÍA PITAGÓRICA. 19

LAS LÚNULAS DE HIPÓCRATES EN LOS CUADERNOS DE LEONARDO DA VINCI. 22

ANAXÁGORAS DE CLAZOMENE E HIPÓCRATES DE QUÍOS. 23

ZENÓN Y LA ESCUELA DE ELEA (BIBLIOTECA DE EL ESCORIAL). 24

HERÁCLITO Y DEMÓCRITO. PINACOTECA DE BRERA (MILÁN). 26

PLATÓN. MUSEO PÍO CLEMENTINO (VATICANO). 27

EFIGIE DE EUDOXO. *TRATADO DE LAS E*SFERAS DE EUDOXO (PAPIRO EGIPCIO DEL SIGLO II D.C. MUSEO DE LOUVRE, PARÍS). 28

LA DEFINICIÓN DE EUDOXO DE PROPORCIÓN GENERALIZA LA NOCIÓN PITAGÓRICA DE PROPORCIONALIDAD DE RAZONES DE ENTEROS. 29

LA PROPOSICIÓN X.1 DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES (EDICIÓN DE I. BARROW, LONDRES, 1678) Y EL *PRINCIPIO DE EUDOXO* DEL *MÉTODO DE EXHAUCIÓN*. 32

LOS PROBLEMAS INFINITESIMALES EN LA ACADEMIA DE PLATÓN. 33

LO INFINITESIMAL EN *LA FÍSICA* DE ARISTÓTELES. 35

LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES Y LA ESTRUCTURA DE LA GEOMETRÍA GRIEGA. . 37

PITÁGORAS, PLATÓN Y EUCLIDES EN LA *ESCUELA DE ATENAS* DE RAFAEL. 38

LA INCIDENCIA HISTÓRICA DEL DESCUBRIMIENTO PITAGÓRICO DE LOS INCONMENSURABLES. 38

CUADRATURAS Y CUBATURAS EN EL LIBRO XII DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES. ... 40

EUCLIDES Y ARQUÍMEDES. EL MAESTRO Y EL INVESTIGADOR. 43

ARQUIMEDES SEGÚN EL HISTORIADOR DE LA CIENCIA F.VERA. 44

EL LIBRO XII DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES Y LA INFLUENCIA DE EUCLIDES SOBRE ARQUÍMEDES. 45

LOS MANUSCRITOS DE LAS *OBRAS DE ARQUÍMEDES*. 46

LAS PRINCIPALES OBRAS DE ARQUÍMEDES CON SUS RESULTADOS MATEMÁTICOS MÁS IMPORTANTES SOBRE CUESTIONES INFINITESIMALES. 48

ALGUNAS PÁGINAS DE OBRAS DE ARQUÍMEDES EN *ARQUÍMEDES OPERA OMNIA* (BASILEA, 1544). 49–50

LA RECONSTRUCCIÓN DEL *MÉTODO* DE ARQUÍMEDES POR HEIBERG. 53

LA CUADRATURA DE UN SEGMENTO PARABÓLICO Y LA CUBATURA DE LA ESFERA EN *ARCHIMEDIS OPERA OMNIA* DE J.L. HEIBERG. 57

LA ESFERA Y EL CILINDRO EN LA TUMBA DE ARQUÍMEDES EN SIRACUSA. 58

ARQUÍMEDES, UN SABIO ENTRE LA HISTORIA Y LA LEYENDA. 62

ARQUÍMEDES PINTADO POR RIBERA EN 1630 (MUSEO DEL PRADO, MADRID). 66

EDICIÓN DE LAS *OBRAS DE ARQUÍMEDES* REALIZADA POR D.RIVAULT EN 1615. 66

EL TRATADO DE ARQUÍMEDES *SOBRE LAS ESPIRALES*. 67

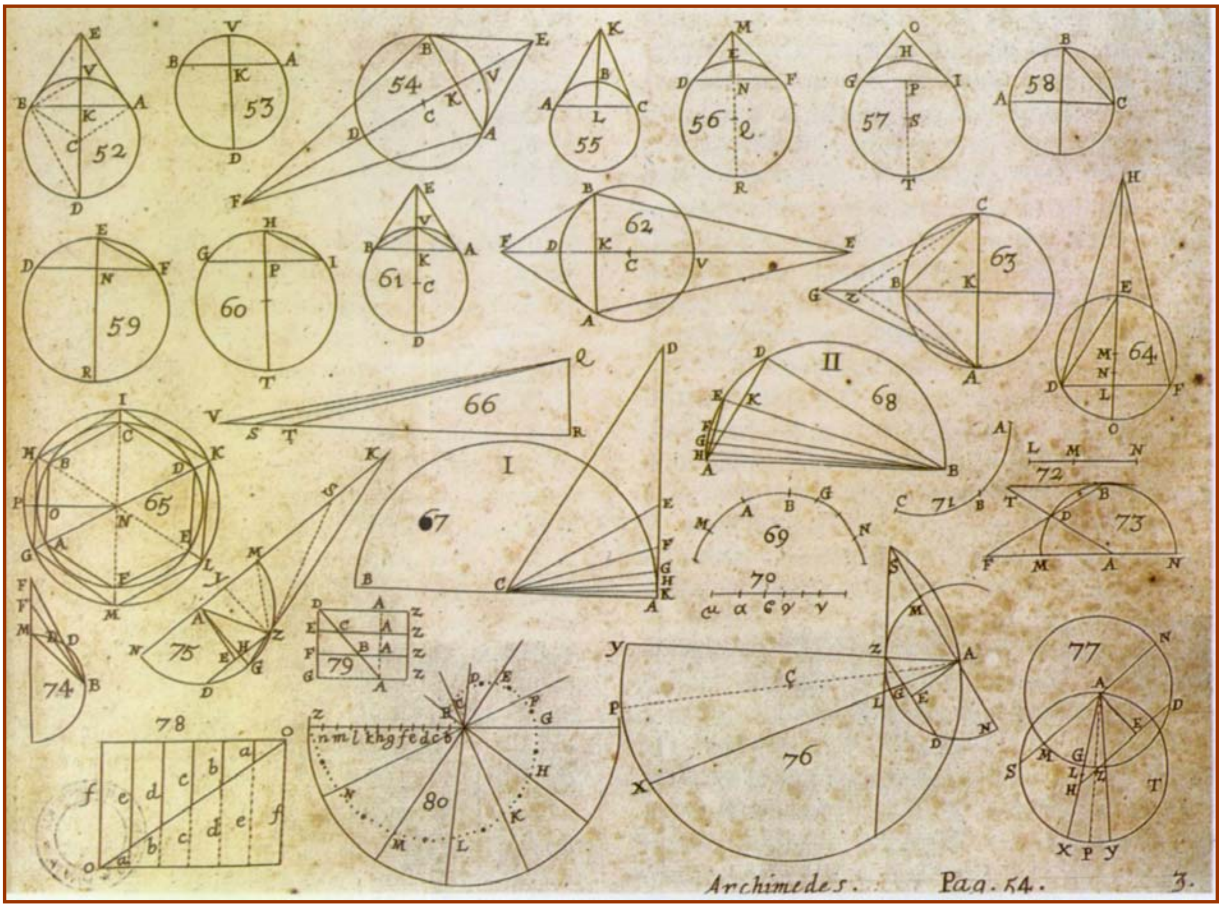
LA OBRA DE ARQUÍMEDES *SOBRE LA CUADRATURA DE LA PARÁBOLA*. 72

EL *MÉTODO DE EXHAUCIÓN* EN ARQUÍMEDES SEGÚN J.BABINI. 73

BUSTO DE ARQUÍMEDES DEL MUSEO CAPITOLINO DE ROMA. 74
LA OBRA CRÍTICA DE MAZZUCHELLI SOBRE ARQUÍMEDES (BRESCIA, 1737). 75
LA ÉPICA MUERTE DE ARQUÍMEDES. 76
ARQUÍMEDES PRECEDENTE DEL CÁLCULO INTEGRAL. 77
LA EDICIÓN DE MAURÓLICO (1685) DE LAS *OBRAS DE ARQUÍMEDES*. 77
ICONOGRAFÍA ARQUIMEDIANA EN LOS SELLOS DE CORREOS. 78
LA FÍSICA DE ARISTÓTELES Y LAS CUESTIONES INFINITESIMALES EN LA EDAD MEDIA. 80
LA *LATITUD DE LAS FORMAS* DE ORESME. 82
LAS LEYES DEL MOVIMIENTO DE ORESME. 83
LA CONTRIBUCIÓN DE ORESME AL DESARROLLO DE LO INFINITESIMAL EN EL MEDIEVO. 85
EL INFINITO Y EL CONTINUO EN *LOS INDIVISIBLES* DE CAVALIERI. 96
LA INFLUENCIA DE CAVALIERI EN LA HISTORIA DEL CÁLCULO INTEGRAL. 99
LA INFLUENCIA DE DIOFANTO SOBRE DE FERMAT. 101
LA MATEMÁTICA GRIEGA Y LAS CUADRATURAS ARITMÉTICAS DE FERMAT. 102
LA CONTRIBUCIÓN DE PASCAL AL CÁLCULO INTEGRAL. 104–105
LA ARITMETIZACIÓN DE WALLIS HACIA LOS LÍMITES. 109
LOS MÉTODOS DE CUADRATURA DE FERMAT PARA PARÁBOLAS E HIPÉRBOLAS. 123
ESTATUA DE FERMAT CON SU MUSA, LA MATEMÁTICA (V.BARRAU, 1888. SALA DE PERSONAJES ILUSTRES DEL CAPITOLIO DE TOULOUSE). 123
EL PADRE MERSENNNE Y LA DIVULGACIÓN DE LA CIENCIA EN EL SIGLO DE FERMAT. 126
MÉTODO DE FERMAT PARA LA INVESTIGACIÓN DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS. 127
LA INVESTIGACIÓN ANALÍTICA DEL MÉTODO DE FERMAT DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS. 128
LAS FUENTES HISTÓRICAS DE LOS MÉTODOS DE FERMAT SOBRE MÁXIMOS Y MÍNIMOS Y TANGENTES. *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES. 132
LA PROPOSICIÓN VI.27 DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES EN LA EDICIÓN DE R.ÇAMORANO. 133
LAS FUENTES HISTÓRICAS DE LOS MÉTODOS DE FERMAT SOBRE MÁXIMOS Y MÍNIMOS Y TANGENTES. *LA COLECCIÓN MATEMÁTICA* DE PAPPUS. 135
LAS FUENTES HISTÓRICAS DE LOS MÉTODOS DE FERMAT SOBRE MÁXIMOS Y MÍNIMOS Y TANGENTES: *LAS CÓNICAS* DE APOLONIO. 136
LAS FUENTES HISTÓRICAS DE LOS MÉTODOS DE FERMAT SOBRE MÁXIMOS Y MÍNIMOS Y TANGENTES: *LA ARITMÉTICA* DE DIOFANTO. 137
LAS FUENTES HISTÓRICAS DE LOS MÉTODOS DE FERMAT SOBRE MÁXIMOS Y MÍNIMOS Y TANGENTES: EL *ARTE ANALÍTICA* DE VIETA. 147–148
LA «ADIGUALDAD» EN *LA ARITMÉTICA* DE DIOFANTO Y EN FERMAT. 150
FERMAT EN LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS. 155
LA RESTAURACIÓN DE LA MATEMÁTICA GRIEGA Y SU INFLUENCIA SOBRE LAS INVESTIGACIONES DE FERMAT. 157

LA GEOMETRÍA ANALÍTICA DE LA *ISAGOGE DE* FERMAT. 158
FERMAT, EL PRÍNCIPE DE LOS AFICIONADOS A LAS MATEMÁTICAS. 161
LAS VICISITUDES DE LA PUBLICACIÓN DE LAS *OEUVRES* DE FERMAT. 169
RETRATO DE FERMAT (LYCÉE PIERRE DE FERMAT. TOULOUSE). 171
EL MÉTODO DE FERMAT PARA LAS TANGENTES EN TÉRMINOS INFINITESIMALES DE LÍMITES Y DERIVADAS. 172
LAS OBRAS FUNDAMENTALES DE LA MATEMÁTICA GRIEGA DE GRAN INFLUENCIA SOBRE DE FERMAT (EDICIONES DE P. VER EECKE). 181
EL MANUSCRITO DE FERMAT *DOCTRINAM TANGENTIUM* DE 1640. 185
FERMAT EN LA HISTORIA DEL CÁLCULO INFINITESIMAL.. 186
ELOGIO DE FERMAT (JOURNAL DES SAVANTS, 9–2–1665). 187
LA GEOMETRÍA DE DESCARTES. 190
LA NOTACIÓN MATEMÁTICA CARTESIANA. 191
EL MÉTODO DEL CÍRCULO EN *LA GEOMETRÍA* DESCARTES. 196
LA GEOMETRÍA DE DESCARTES Y LA GEOMETRÍA ANALÍTICA. 199
LA EDICIÓN DE F. VAN SCHOOTEN, DE 1659, DE *LA GEOMETRÍA* DE DESCARTES. 199
DESCARTES EN LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS. 200
RETRATO DE DESCARTES POR WEENIX (MUSEO DE UTRECHT). 200
LA EDICIÓN DE 1649 DE VAN SCHOOTEN DE *LA GEOMETRÍA* DE DESCARTES. 200
EL RETRATO DE DESCARTES DEL MUSEO DE LOUVRE ATRIBUIDO A F.HALS. 201
LA GEOMETRÍA DE DESCARTES SUPERA LAS LIMITACIONES DE LA GEOMETRÍA GRIEGA 202
OTRAS EDICIONES DE *LA GEOMETRÍA* DE DESCARTES. 202
LA GEOMETRÍA ANALÍTICA COMO INSTRUMENTO DEL CÁLCULO INFINITESIMAL. .203–204
IMÁGENES DE DESCARTES EN LOS SELLOS DE CORREOS. 205
ISAAC BARROW, TEÓLOGO Y MATEMÁTICO. 212
MATHEMATICAL LECTURES DE BARROW (LONDON,1784. UNIVERS. OF ILLINOIS). 212
LECTIONES GEOMETRICAE DE ISAAC BARROW. 213
LAS TANGENTES DE BARROW Y EL TRIÁNGULO CARACTERÍSTICO. 217
RESUMEN DE LOS RESULTADOS GEOMÉTRICOS SOBRE TANGENTES Y CUADRATURAS DE LAS *LECTIONES GEOMETRICAE*, SEGÚN LA EDICIÓN DE M.CHILD (I. BARROW. *GEOMETRICAL LECTURES* CHICAGO. OPEN COURT, 1916). 218
BARROW, EDITOR DE OBRAS DE LA MATEMÁTICA GRIEGA. 219–220
EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO (TEOREMA DE BARROW). 224–225
FIGURAS DE LA *LECTIONE* X DE *LECTIONES GEOMETRICAE* DE BARROW (LONDRES, 1674. BIBLIOTECA NACIONAL DE ESPAÑA). 225
LA FUNCIÓN DE NEWTON Y LEIBNIZ EN EL DESCUBRIMIENTO DEL CÁLCULO INFINITESIMAL. 229
NEWTON Y LEIBNIZ EN LOS SELLOS DE CORREOS. 230

ORÍGENES Y EVOLUCIÓN HISTÓRICA DEL CÁLCULO INFINITESIMAL



Pedro Miguel González Urbaneja

pgonzale@pie.xtec.es