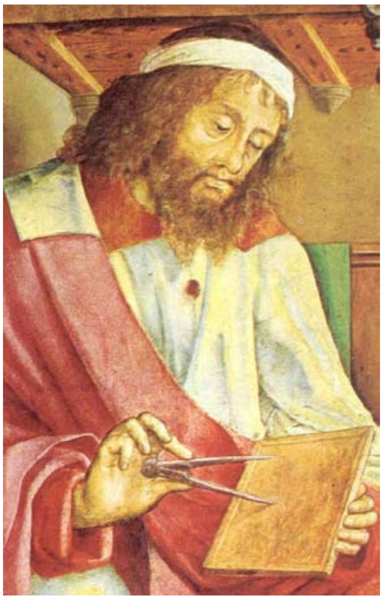
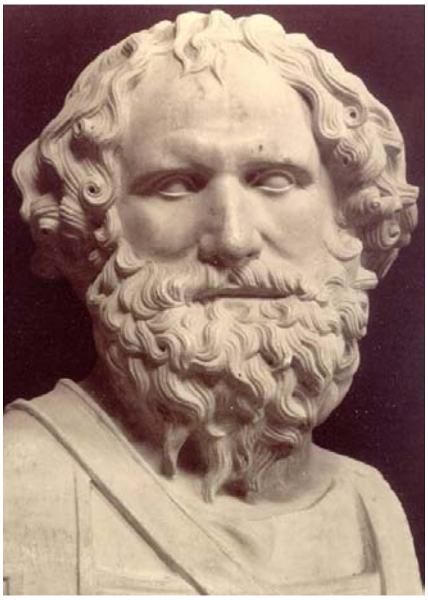
La Historia de la Matemática como recurso didáctico e instrumento de integración cultural de la Matemática

HISTORIA DE LA MATEMÁTICA PARA LA ENSEÑANZA SECUNDARIA

ESTUDIO CRÍTICO DE TRES OBRAS CUMBRES DE LA LITERATURA MATEMÁTICA:

LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES
EL MÉTODO DE ARQUÍMEDES
LA GEOMETRÍA DE DESCARTES





Pedro Miguel González Urbaneja
pgonzale@pie.xtec.es

LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES
EL MÉTODO DE ARQUÍMEDES
LA GEOMETRÍA DE DESCARTES

No hay una Matemática, hay muchas Matemáticas.* [...] *El espíritu antiguo creo su Matemática casi de la nada. El espíritu occidental, histórico, había aprendido la Matemática antigua, y la poseía –aunque sólo exteriormente y sin incorporarla a su intimidad–; hubo, pues, de crear la suya modificando y mejorando, al parecer, pero en realidad aniquilando la matemática euclidiana, que no le era adecuada. Pitágoras llevó acabo lo primero; Descartes lo segundo. Pero los dos actos son, en lo profundo, idénticos

O.Spengler. *La decadencia de Occidente*. Austral, Madrid, 1998.Cap.I.1. p.144.

La lectura de Euclides a los 11 años fue uno de los grandes acontecimientos de mi vida, tan deslumbrante como el primer amor

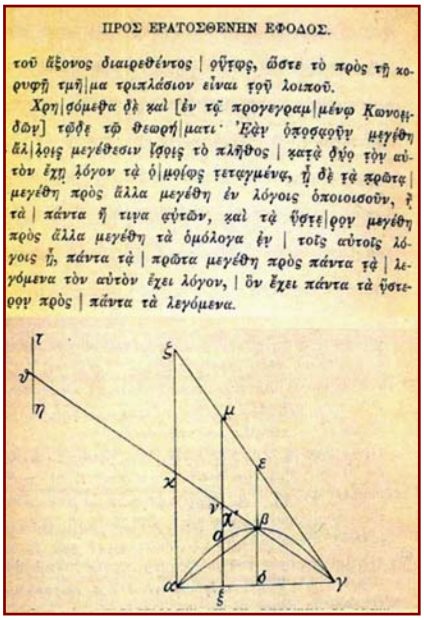
B.Russell. *Autobiography*. Little, Brown & Co, Boston, 1951, p.37.

Había más imaginación en la cabeza de Arquímedes que en la de Homero.

***Voltaire.* Diccionario filosófico.**

La Geometría analítica, mucho más que cualquiera de sus especulaciones metafísicas, inmortaliza el nombre de Descartes y constituye el máximo paso hecho en el progreso de las ciencias exactas.

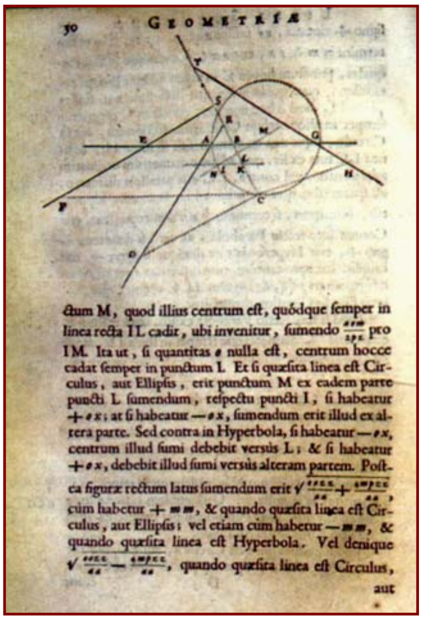
J.Stuart Mill. (citado por E.Bell en *Les grands mathématiciens*. Payot, París, 1950. p.46.



ΠΡΟΣ ΕΡΑΤΟΣΘΕΝΗΝ ΕΦΟΔΟΣ.

τοῦ ἄξονος διαιρεθέντος | οὕτως, ὥστε τὸ πρὸς τῇ κορυφῇ τμῆ|μα τριπλάσιον εἶναι τοῦ λοιποῦ.

Χρη|σόμεθα δὲ καὶ [ἐν τῷ προγεγραμ|μένῳ Κωνοειδῶν] τῷδε τῷ θεωρή|ματι· Ἐὰν ὁποσαοῦν μεγέθη ἄλ|λοις μεγέθεσιν ἴσοις τὸ πλῆθος | κατὰ δύο τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον τὰ ὁ|μοίως τεταγμένα, ᾖ δὲ τὰ πρῶτα | μεγέθη πρὸς ἄλλα μεγέθη ἐν λόγοις ὁποιοισοῦν, ἢ τὰ | πάντα ἢ τινα αὐτῶν, καὶ τὰ ὕστε|ρον μεγέθη πρὸς ἄλλα μεγέθη τὰ ὁμόλογα ἐν | τοῖς αὐτοῖς λόγοις ᾖ, πάντα τὰ | πρῶτα μεγέθη πρὸς πάντα τὰ | λεγόμενα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, | ὃν ἔχει πάντα τὰ ὕστερον πρὸς | πάντα τὰ λεγόμενα.



ctum M, quod illius centrum est, quódque semper in linea recta IL cadit, ubi invenitur, sumendo $\frac{aom}{2pz}$ pro IM. Ita ut, si quantitas o nulla est, centrum hocce cadat semper in punctum L. Et si quæsita linea est Circulus, aut Ellipsis, erit punctum M ex eadem parte puncti L sumendum, respectu puncti I, si habeatur $+ox$; at si habeatur $-ox$, sumendum erit illud ex altera parte. Sed contra in Hyperbola, si habeatur $-ox$, centrum illud sumi debebit versùs L; & si habeatur $+ox$, debebit illud sumi versùs alteram partem. Postea figuræ rectum latus sumendum erit $\sqrt{\frac{oozz}{aa}+\frac{4mpzz}{aa}}$, cùm habetur $+mm$, & quando quæsita linea est Circulus, aut Ellipsis; vel etiam cùm habetur $-mm$, & quando quæsita linea est Hyperbola. Vel denique $\sqrt{\frac{oozz}{aa}-\frac{4mpzz}{aa}}$, quando quæsita linea est Circulus,

aut

Pedro Miguel González Urbaneja
pgonzale@pie.xtec.es

ÍNDICE

ESTUDIO CRÍTICO DE TRES OBRAS CUMBRES DE LA LITERATURA MATEMÁTICA:

LOS *ELEMENTOS* DE EUCLIDES, EL *MÉTODO* DE ARQUÍMEDES LA *GEOMETRÍA* DE DESCARTES

TRES OBRAS CUMBRES DE LA MATEMÁTICA: *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES, *EL MÉTODO* DE ARQUÍMEDES Y *LA GEOMETRÍA* DE DESCARTES

Introducción

Euclides, Arquímedes y Descartes son tres figuras históricas de la mayor relevancia en el ámbito escolar por la ingente repercusión que sus obras han tenido en la conformación de la Matemática académica elemental a lo largo de la Historia de la Educación matemática. Una única obra ha bastado en el caso de Euclides, *Los Elementos*, y también en el caso de Descartes, *La Geometría*, para asegurar su inmortalidad en la Historia de la Ciencia y la permanencia en la Escuela de sus autores; la primera para determinar el contenido de la Matemática elemental, la segunda para introducir un instrumento, la Geometría Analítica, que con el concurso del Álgebra se ha convertido en el lenguaje ineludible de las ciencias y las técnicas. La aportación de Arquímedes –el más importante de los matemáticos de la antigüedad clásica griega– es enormemente más rica todavía, por su amplitud, rigor y profundidad, pero de su inmenso caudal científico hablaremos ante todo de una obra, *El método sobre los teoremas mecánicos* –cuyo largo título indicaremos por *EL MÉTODO*–, en la cual lo que nos interesa es el proceso heurístico que sigue la investigación matemática y las cuestiones epistemológicas involucradas acerca de la relación entre los procesos de descubrimiento–invención y los métodos de exposición–demostración, todo ello en un ámbito muy importante de la Matemática y de la Educación matemática: el Cálculo Integral.

Aún hoy, después de 2300 años desde que Euclides los compuso, la lectura de *Los Elementos* sigue provocando una profunda admiración, seguida de fruición intelectual, por el derroche inusitado de ingenio, lógica, rigor, didáctica, exactitud, certeza, pureza, belleza, coherencia y elegancia. Todo lo que se haya dicho y se diga sobre la obra euclidiana, que es mucho, siempre resulta insuficiente: Tesoro matemático de la humanidad, cumbre de la Matemática griega, compilación de la Geometría platónica, una de las voces más importantes de la herencia clásica, Biblia de las Matemáticas, demostración de humanidad y manifestación de cultura y civilización superiores, Geometría popular de todos los tiempos, cima del pensamiento matemático, codificación de los fundamentos de la Geometría de la regla y el compás, libro secular más estudiado de toda la Historia, primera teoría propiamente dicha que registra la Historia, el libro más grande y más maravilloso de las Matemáticas, el más famoso libro de texto, y un larguísimo etcétera.

Los Elementos de Euclides es el tratado de Matemáticas que mayor influencia ha tenido a lo largo de toda la Historia de la Cultura –incluso mucho más allá de la propia Matemática y ciencias afines– y que más veces se ha editado, después de la Biblia. La principal obra de Euclides ha constituido, como autoridad indiscutida, el cuerpo de doctrina central de la totalidad de las ciencias matemáticas elementales hasta mediados del siglo XIX, del que se puede derivar el resto y ha sido a lo largo de la Historia de la Ciencia y de la Educación el principal vehículo de la transmisión del saber matemático hasta mediados del siglo XX. Pero aún hoy la carrera de Euclides no ha concluido, porque *Los Elementos* de Euclides siguen siendo, por una parte, una fuente inagotable de estudios epistemológicos y de investigaciones históricas, y por otra, una fuente fundamental del currículum de la Matemática elemental, que determina el contenido y el orden lógico secuencial y por tanto la ordenación curricular de los diversos temas y capítulos de los Libros de Texto de la Matemática escolar básica y secundaria.

Hemos emprendido, pues, un estudio crítico de *Los Elementos* de Euclides, guiados por los presupuestos que hemos señalado más arriba. Estudiamos, en una primera parte, la organización y la metodología de la obra euclidiana en cuanto al significado de Definiciones, Postulados, Axiomas y Proposiciones; sigue el contenido matemático de todos y cada uno de los libros geométricos (Libros I, II, III, IV, V, VI, X, XI, XII, XIII); y después, el marco histórico-cultural del mundo griego helenístico donde aparecen *Los Elementos*; breves aspectos biográficos de su autor, Euclides; y presunciones, más o menos fundamentadas en documentos históricos, sobre la finalidad de la obra como tratado recopilador y sistematizador de los informes y heterogéneos conocimientos matemáticos anteriores, con propósito compilador, científico, académico, didáctico, etc. En una segunda parte intentamos dilucidar la influencia histórica de *Los Elementos* de Euclides, el sustrato filosófico que subyace en la obra y estudiamos la transmisión de *Los Elementos* de Euclides a lo largo de los tiempos, con la descripción de las más importantes ediciones de la obra y su trascendencia científica. A continuación, en una tercera parte, tratamos la dimensión escolar histórica y el valor didáctico de *Los Elementos* de Euclides a lo largo de la Historia de la Educación matemática, dando cuenta del proceso de escolarización del tratado que tiene lugar en las diversas ediciones. Finalmente, exponemos unas consideraciones finales sobre *Los Elementos* y su autor. Acabamos con un anexo donde reproducimos, en su versión original, algunas proposiciones que consideramos muy importantes, desde nuestro criterio, en la práctica matemática escolar, extractadas de una curiosa versión, la edición visual de *Los Elementos* de Euclides O.Byrne (Londres,1847).

La descripción del contenido de cada Libro de *Los Elementos* de Euclides, está precedida de un estudio general de los temas que trata aspectos de atribuciones históricas de matemáticos anteriores a Euclides, influencias ulteriores, disquisiciones, presunciones, relevancia de algunas cuestiones desde el ámbito científico o didáctico, etc. Después se describen, proposición a proposición, los diversos resultados, y en algunos problemas matemáticos escolares muy importantes se hace un estudio particular de la adaptación didáctica al aula del correspondiente teorema o problema euclidiano. De esta forma vemos, acompañados con bellísimas ilustraciones de las proposiciones extraídas de ediciones históricas de *Los Elementos* de Euclides, en su contexto histórico y en su evolución hacia su tratamiento académico y escolar, multitud de problemas universales de las Matemáticas elementales escolares, como por ejemplo:

- Libro I. Construcciones elementales con regla y compás, congruencias de triángulos y cuadriláteros, desigualdades relativas a ángulos y lados de un triángulo. Paralelismo, Teorema de Pitágoras.
- Libro II. Equivalencias geométricas de identidades algebraicas elementales, resolución geométrica de ecuaciones, *Divina Proporción*, Teorema del coseno, Cuadratura de figuras rectilíneas.
- Libro III. Geometría del círculo: cuerdas, tangentes, secantes, ángulos centrales y ángulos inscritos, Potencia de un punto respecto de una circunferencia.
- Libro IV. Construcciones con regla y compás de polígonos regulares inscritos y/o circunscritos en círculos.
- Libro V. Magnitudes inconmensurables.
- Libro VI. Teoremas fundamentales sobre semejanza de figuras geométricas: Teorema de la bisectriz, Teorema de Tales, Teoremas del cateto y de la altura, construcciones de la tercera, la cuarta y la media proporcional.
- Libro X. El *Método de Exhaución*.
- Libro XI. Geometría del espacio: paralelismo y perpendicularidad, ángulos sólidos, paralelepípedos.
- Libro XII. Área del círculo, volúmenes de pirámides, cilindros y conos y esferas.
- Libro XIII. Construcción de los cinco poliedros regulares.

Ante este despliegue de problemas matemáticos escolares presentes en *Los Elementos* de Euclides, apreciamos el inconmensurable valor didáctico e histórico de la obra, por su fructífera dimensión escolar, como cuerpo de doctrina geométrica de lectura obligada para todos los estudiantes de Matemáticas, durante veintitrés siglos, en manuales inspirados en la obra de Euclides, que hoy sigue siendo la base informativa de toda disciplina científica matemática elemental en la Enseñanza Secundaria.

En el prólogo de la obra de B.Levi *Leyendo a Euclides*, escribe el filósofo M.Bunge (Zorzal, Buenos Aires, 2001, p.61):

> «*La sistematicidad y su rigor lógico hace que el estudio de la Geometría de Euclides sea acaso más formativo que el de la Geometría Analítica o el Cálculo Infinitesimal. Teoría éstas que poseen algoritmos que se aplican uniformemente y en muchos casos mecánicamente. Ése es uno de los motivos por los cuales Los Elementos de Euclides fueron libros de texto en todo el mundo durante dos milenios. Su estudio exige tanto ingenio y empeño como rigor. Forma tanto matemáticos como abogados*.»

Esto mismo debía pensar el presidente Lincoln cuando aseguraba que había aprendido a pensar con Lógica leyendo *Los Elementos de Euclides*, donde había encontrado, también, el sentido de lo que significa demostrar, es decir el rigor apodíctico por encima de la intuición, la opinión y el juego retórico y dialéctico de la persuasión. Aquí, entre otros muchos puntos singulares, reside el alto valor educativo y formativo de las Matemáticas, que ya le asignó y reivindicó Platón, con obligaciones políticas hacia su cultivo, y que se manifiesta desde la lejana época alejandrina que dio a luz *Los Elementos* de Euclides –herederos de la Matemática platónica– hasta hoy y siempre. Por eso podemos leer en un *Tratado de Geometría* del Siglo XVIII de autor anónimo:

> «*La lectura de Euclides no sólo hace geómetras a los jóvenes, sino que insensiblemente los va habituando a ser excelentes lógicos*.»

En la segunda obra analizada, *EL MÉTODO* de Arquímedes, además de relatar algunos episodios de ingenio, originalidad y sagacidad increíbles, más o menos legendarios –según Voltaire «*había más imaginación en la cabeza de Arquímedes que en la de Homero*»–, que una copiosa Literatura –Cicerón, Plutarco, Silio Itálico, Vitrubio, Valerio Máximo, Tito Livio– se encargó de embellecer, describimos su inmensa contribución a la magnificación del patrimonio matemático euclídeo, y nos interesamos sobre todo por la superación arquimediana de los prejuicios platónicos acerca de la actividad científica, a base de combinar el rigor intelectual con la intuición sensorial para vincular la especulación abstracta con las realizaciones técnicas, que requiere la necesidad de resolver problemas concretos, desarrollando una concepción matemática casi experimental, origen de una tradición científica –llamada después *Filosofía Natural* y mucho más tarde *Física Matemática*–, que es retomada por Galileo para establecer las bases de la Revolución científica del siglo XVII.

En concreto la obra que estudiamos, *EL MÉTODO*, contiene los procedimientos heurísticos de tipo mecánico –Arquímedes aplica la famosa *Ley de la Palanca* que rige la más sencilla de sus máquinas– que el gran sabio de Siracusa utilizaba tanto para alumbrar sus extraordinarios descubrimientos como para emprender la demostración de los resultados matemáticos obtenidos. En palabras de uno de los más egregios matemáticos y pedagogos del siglo XX, F.Klein (*Matemática elemental desde un punto de vista superior*. Vol. II. Geometría Biblioteca Matemática. Dtor: J.Rey Pastor. Madrid, 1931, pp.254–255):

> «*Arquímedes fue un gran investigador que en cada uno de sus escritos avanza un paso más, sobre lo ya conocido*. [...]. *El procedimiento de exposición* [en su obra *EL MÉTODO*] *es exactamente igual que nuestra manera de enseñar en la actualidad, pues procede genéticamente, indicando el proceso mental seguido y no utilizando nunca el rígido encadenamiento de* "*hipótesis, tesis, demostración y determinación*" *que domina Los Elementos de Euclides.*

Como aplicación didáctica específica de los aspectos históricos, describimos, además, lo que tal vez es el ejemplo más representativo de la aplicación del método demostrativo de exhaución de la Geometría griega –*la Cuadratura de la Espiral*–, lo que nos permite valorar la trascendente influencia de Arquímedes en la génesis del Cálculo Integral, a través de dos analogías manifiestas –*el método mecánico de descubrimiento* y *los Indivisibles* del siglo XVII, por una parte, y *el método de demostración por exhaución* y *los límites* de la aritmetización del Análisis del siglo XIX, dos de los ingredientes importantes de la Matemática escolar secundaria.

En la tercera obra que analizamos, *La Geometría* de Descartes, se intenta desentrañar las raíces de la Geometría Analítica en el pensamiento cartesiano a base de estudiar el anclaje de *La Geometría* de Descartes en su obra filosófica y en particular en *El Discurso del Método* y en las *Reglas para la dirección del espíritu*, tratados donde se sitúa la metodología cartesiana, en particular los preceptos del Análisis y la Síntesis que Descartes aplica de forma constante en *La Geometría*. Pero para comprender la relevancia histórica y la gestación de *La Geometría* de Descartes rastreamos los orígenes de la Geometría Analítica desde los primeros estadios de la Matemática helénica, de modo que arrancamos del *Álgebra Geométrica* del Libro II de *Los Elementos* de Euclides, estructura que adquiere la Matemática griega como consecuencia de la crisis de fundamentos que acarreó la aparición de los inconmensurables y estudiamos el Análisis Geométrico griego –del que la Geometría Analítica hereda no sólo el nombre sino también los procedimientos– que utilizaba un equivalente de las coordenadas pero sólo empleaba *Álgebra Geométrica* y el *Arte Analítica* de Vieta que desarrolla el *Álgebra Simbólica* pero no usaba coordenadas. Al aunar ambos instrumentos –coordenadas y Álgebra literal– Descartes (y también Fermat) alcanza la Geometría Analítica estableciendo un puente para transitar entre la Geometría y el Álgebra, lo que le permite asociar curvas y ecuaciones, a base de aplicar el *Análisis Algebraico* de Vieta a los problemas de lugares geométricos de Apolonio y Pappus, definidos, en un sistema de coordenadas, por una ecuación indeterminada en dos incógnitas.

Descartes crea una herramienta geométrica nueva y revolucionaria que permite fundir en un sólo acto intelectual el descubrimiento y la demostración –que tan separadas estaban en la Geometría griega– mediante una potente metodología geométrica y algebraica que reemplaza las complejas e ingeniosas construcciones de la rígida *Álgebra Geométrica* de los griegos por sistemáticas operaciones algebraicas y se convierte en un poderoso instrumento de investigación y exploración con el que el filósofo resuelve con plenitud heurística, de forma elegante, rápida, brillante y prodigiosa, numerosos problemas, clásicos y modernos, como abundantes cuestiones de lugares geométricos, extremos, tangentes y cuadraturas y otros que se habían resistido a lo largo de la historia como el famoso *Problema de Pappus*. Por primera vez en la Historia de la Matemáticas se tiene la conciencia de haber superado a los antiguos griegos en algún aspecto. En palabras de Spinoza, el filósofo del *more geometrico* (*Los Principios de la Filosofía cartesiana*):

> «*Descartes, mediante un método nuevo, hizo pasar de las tinieblas a la luz cuanto en las Matemáticas había permanecido inaccesible a los antiguos y todo cuanto los contemporáneos habían sido incapaces de descubrir; luego puso los cimientos inquebrantables de la Filosofía sobre los cuales es posible asentar la mayor parte de las verdades en el orden y con la certidumbre de las Matemáticas.*»

La Geometría Analítica domina el pensamiento matemático desde la época de su creador, Descartes. El empleo sistemático de las coordenadas tratadas con el cálculo algebraico es una poderoso instrumento algorítmico de resolución de problemas geométricos, un método de una capacidad y una universalidad tan eficaces en la Matemática, que supera cualquier otra herramienta anterior, y más allá de la Geometría y de la Matemática, la Geometría Analítica revoluciona todas las ciencias vinculadas al tiempo y al espacio, a través del concepto de función, el utensilio más importante para el conocimiento y dominio de la naturaleza. Por eso como escribe el historiador de la Matemática y pedagogo M.Kline (*El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*. Vol. 1. Alianza Universidad. Madrid, 1992. vol.1, p.425

> «*La Geometría Analítica cambió la faz de las Matemáticas.*»

La fuerza algebraica inexorable de la Geometría Analítica al aportar simplificación, generalización, mecanización, unificación, flexibilidad, versatilidad, claridad, economía, brevedad y difusión, se convierte en el lenguaje universal de las ciencias. Merced a la Geometría Analítica, el ingenio y la imaginación que exigía la comprensión de la obra de Euclides puede ser sustituido por la simplicidad de procedimientos algorítmicos automáticos. Además, la notación cartesiana se convirtió en definitiva, por eso *La Geometría* de

Descartes es el primer texto matemático en el que un estudiante actual no encontraría dificultades con la notación. La Geometría Analítica es una poderosa herramienta de la actividad matemática que potencia la intuición y facilita la investigación, y al unir la Geometría con la Aritmética, a través del Álgebra, democratiza la Geometría y la Matemática en general, porque sus técnicas permiten que cualquier persona que tenga pequeños rudimentos de Álgebra pueda resolver problemas geométricos, aunque no tenga un gran talento y una gran sagacidad y sutileza intelectual. Así que, parafraseando a Descartes en *El Discurso del Método*, con la Geometría Analítica: «*se ejercita el entendimiento sin fatigar mucho la imaginación*» (DM.AT,VI,17). En este sentido decimos que la Geometría Analítica *es* una geometría democratizadora, y por tanto un potente utensilio de la Matemática escolar. Así que allende la frase de M.Kline podemos decir que la Geometría Analítica cambió no sólo la faz de las Matemáticas sino también la faz la de la Educación matemática.

Los argumentos que se despliegan a lo largo de este escrito se sustentan de forma esencial en numerosos textos originales de los matemáticos y filósofos griegos, así como en los textos de las Obras de Descartes y otros filósofos y matemáticos. También se apoyan en las opiniones y reflexiones que sobre el trabajo matemático de Euclides, Arquímedes y Descartes han vertido numerosos pedagogos, historiadores y filósofos de la Ciencia y de la Matemática, e incluso escritores, literatos y artistas. Estos textos originales cumplen una función muy importante. Son textos con auténtica atribución histórica y bibliográfica, elegidos muy cuidadosamente de forma erudita, extraídos directamente de los escritos originales de los creadores de la Matemática y de los filósofos e historiadores, y en muchos casos en torno a estos textos se articula la descripción de la Historia del Pensamiento matemático. De estos textos surgen numerosas citas extraídas directamente y referenciadas, con autor, texto y página, reseñados en la generosa bibliografía que incluye junto a las fuentes, tanto obras de largo aliento como otras de divulgación científica con indicación de los capítulos que interesan a cada tema.

A lo largo del documento se insertan numerosas y originales ilustraciones que siempre tienen una relación contextual con el tema que se esta tratando. Son piezas artísticas de una gran belleza en las que la Matemática o los matemáticos son los protagonistas principales y el objeto de expresión. Bastantes de estas ilustraciones son portadas o páginas significativas de famosas ediciones de obras matemáticas clásicas que son crónicas visuales y auténticas joyas matemáticas iconográficas, a las que acompañan breves explicaciones sobre la evolución de la edición matemática, en manuscrito o impresión, o sobre el simbolismo emblemático o metafórico que trasmite su iconografía, y con un sucinto estudio de la importancia de la edición de la obra en la Historia de las Matemáticas. En general se alude al lugar –biblioteca, museo, universidad, ...– donde se ubica la obra descrita. También se insertan portadas de ediciones modernas –pero de gran relevancia editorial– y se hace una valoración crítica acerca de su aportación a la historiografía. Se trata de obras que se han consultado de forma intensa en la elaboración de este escrito.

También insertamos numerosos cuadros de texto enfatizado con esquemas, sinopsis y resúmenes; ampliaciones del contenido general, datos biográficos y bibliográficos; textos de carácter épico; recopilación de citas; una condensación de ideas referentes a una cuestión matemática; una descripción que de un mismo problema matemático realizan varios autores; cuestiones de historiografía y su incidencia en el desarrollo de algunas teorías matemáticas; aplicaciones de técnicas y métodos matemáticos a la resolución de ciertos problemas históricos; interpretaciones de problemas matemáticos con el simbolismo algebraico actual; aspectos curiosos y singulares; importancia e influencia histórica ulterior de técnicas y métodos matemáticos y vínculos con otros temas; conexiones con cuestiones eruditas de gran relevancia en la Historia de la Cultura y del Pensamiento; relaciones de las cuestiones matemáticas sobre hechos científicos y filosóficos; etc. Estos cuadros pueden ir solos o acompañados de alguna ilustración *ad hoc* y permiten una doble lectura de los documentos. Pero su omisión en la lectura del grueso del texto no resta inteligibilidad. No obstante, por su contenido, estos cuadros son interesantes centros de atención que discurren a lo largo de todo el documento y constituyen un buen complemento en muchos aspectos.

LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES

BIBLIA DE LAS MATEMÁTICAS

Los Elementos de Euclides como codificación de los fundamentos de la Geometría de la regla y el compás son el Tesoro matemático de la humanidad desde hace más de dos mil años.
REY,A. *El apogeo de la ciencia técnica griega*. UTEHA, México 1962. Vol.1. Cap.4. p.176.

***Este maravilloso libro* [*Los Elementos* de Euclides] *ha sido, es y será el libro de texto de Matemáticas más grande de todos los tiempos*.**
T.L.Heat. *History of Greek Mathematics*. Dover, New York, 1981. Vol.1. p.358.

***Los Elementos de Euclides reducen a todos sus predecesores a objetos de mero interés histórico*.**
O.Neugebauer. *The exacts Sciences in antiquity*. Dover. New York, 1969. p. 145.

Con Euclides comienza verdaderamente la edad de oro de la Geometría griega.
W.Knorr Matemáticas (en *El Saber griego*. Akal, Madrid, 2000, p.322).

El marco histórico-cultural de *Los Elementos*.
Euclides, el autor de *Los Elementos*.
El propósito de *Los Elementos* de Euclides.
Citas memorables sobre *Los Elementos* de Euclides.
Organización y metodología de *Los Elementos* de Euclides.
Definiciones, postulados y nociones comunes.
Las Proposiciones.
Los libros geométricos de *Los Elementos* de Euclides.

- **El Libro I.**
- **El Libro II.**
- **El Libro III.**
- **El Libro IV.**
- **El libro V.**
- **El Libro VI.**
- **El libro X.**
- **El Libro XI.**
- **El Libro XII.**
- **El Libro XIII.**
- **Los Libros apócrifos XIV y XV.**

La influencia histórica de *Los Elementos* de Euclides.
El sustrato filosófico de *Los Elementos* de Euclides.
La transmisión de *Los Elementos* de Euclides. Las diversas ediciones.
La dimensión escolar y el valor didáctico de *Los Elementos* de Euclides
Consideraciones finales sobre Euclides y *Los Elementos*.
Anexo: de la edición visual de *Los Elementos* de O.Byrne (1847).
Bibliografía.

El marco histórico-cultural de *Los Elementos* de Euclides

A la muerte de Alejandro Magno se inicia una feroz lucha por el poder entre sus generales más renombrados que conduce a la división del imperio alejandrino. Hacia el año 306 a.C., Ptolomeo I Soter («*el Salvador*») consolida su poder en la parte egipcia del imperio y favorece el flujo de científicos, artistas y técnicos procedentes de todos los rincones del ámbito helénico, iniciando una encomiable labor de mecenazgo cultural y científico, acorde con su espíritu ilustrado, de modo que el centro de la Cultura griega se desplaza de Atenas a Alejandría, que se convierte en la verdadera capital de la civilización helenística y se transforma en el foco de la cultura, la ciencia y el saber más importante del mundo mediterráneo, situación que se prolongaría mucho más allá de la dominación romana, hasta la caída de la ciudad en manos de los árabes en el año 641 de nuestra era.

Ptolomeo estableció una de las instituciones científicas más relevantes en toda la Historia de la Cultura, el *Museo* de Alejandría –nombre que proviene de los antiguos cenáculos pitagóricos de carácter científico, filosófico y religioso– que con el tiempo se convirtió en el centro principal de estudio e investigación del Mediterráneo, foco de atracción para los estudiosos y núcleo de la cultura helenística. Todavía permanece en Atenas la *Academia* de Platón y el *Liceo* de Aristóteles, pero más bien entregados al cultivo de la Filosofía, mientras que debido a que la *Biblioteca* de Alejandría disponía prácticamente todo el material bibliográfico conocido y a la protección que ejercía oficialmente la dinastía de los Lágidas que instaura el fundador, Ptolomeo I, el *Museo* llegó a albergar a los más importantes científicos y eruditos, en condiciones de seguridad y bienestar –recibían un salario del Estado y vivienda– lo que facilitaba su dedicación exclusiva a la enseñanza –aunque el dictado de las lecciones no era regular– y a la investigación, en aras de la magnificación del acervo científico y del desarrollo de un ambiente docente cuyo magisterio beneficiaba a multitud de estudiantes y estudiosos provenientes de todos los rincones del mundo helenizado. El *Museo* era en cierto modo comparable a una universidad estatal actual donde investigaban y enseñaban más de un centenar de investigadores, que se consideraban de dos tipos: los filólogos –dedicados al estudio crítico de los textos, a la Historiografía, la Mitografía y la Gramática– y los filósofos, que en realidad eran los científicos.

La ciencia alejandrina había recibido una gran influencia aristotélica. Algunos miembros del Liceo aristotélico, como Estratón de Lámpsaco, habían sido llamados a Alejandría, llevándose gran parte de los fondos bibliográfico del Liceo, que iban a constituir el primer núcleo bibliográfico de la *Biblioteca,* que en sus mejores tiempos llegó a disponer de más de setecientos mil ejemplares. No obstante, la ciencia del *Museo* abandonó la exigencia filosófica aristotélica acerca de la búsqueda de la unidad del saber y se aplicó a la rigurosa investigación sectorial sobre problemas de disciplinas autónomas concretas: Medicina, Astronomía, Matemáticas, Mecánica, etc. Por eso el sabio típico del *Museo* es el docto competente y especializado en una materia singular, seria y rigurosa, a la que otorga toda su dedicación. A esta imagen responde con exactitud Euclides que trabajó en Alejandría cuando empezaba uno de los período más gloriosos y de mayor florecimiento, hacia comienzos del siglo III a.C.

Más importante aún que la ascendencia aristotélica fue el influjo de la Filosofía platónica, de donde proviene la gran dedicación de los científicos alejandrinos a la Geometría y a la Astronomía, basando estas ciencias en el puro razonamiento y haciéndolas independientes de toda experiencia sensible y de todo aspecto práctico y concreto de la realidad.

Además de Euclides, investigaron y escribieron en Alejandría la mayor parte de los grandes matemáticos posteriores a Platón: Aristarco (hacia 280 a.C.), Eratóstenes (h.240 a.C.) que llegó a ser el bibliotecario, Hipsicles (h.150 a.C.), Hiparco (h.140 a.C.), Menelao (h.100 a.C.), Herón (h.65 d.C.), Ptolomeo (h.150 d.C.), Diofanto (h.250 d.C.), Pappus (h.325 d.C.), Teón (h.390 d.C.), su hija Hipatia (h.410 d.C.). Al nombre de todos estos célebres matemáticos acompaña siempre el gentilicio «*de Alejandría*». Otros matemáticos importantes como Arquímedes (h.250 a.C.), Apolonio (h.200 a.C.), Nicómaco (h.100 d.C.) y Proclo (h.460 d.C.) no vivieron de forma permanente en Alejandría, pero se formaron, se informaron y visitaron el gran emporio científico secular.

LA BIBLIOTECA Y EL MUSEO DE ALEJANDRÍA SEGÚN CARL SAGAN

La Gran Sala de la antigua Biblioteca de Alejandría. Reconstrucción basada en datos documentales. La ilustración procede de la obra de Carl Sagan *Cosmos* (Planeta, Barcelona, 1982, p.21)

El gran divulgador de la Historia de la Ciencia C.Sagan escribe en su famosa obra (pp. 18–21):

La Biblioteca y el Museo Alejandría fueron en su época el cerebro de la mayor ciudad del planeta, el primer auténtico instituto de investigación de la historia del mundo. [...] Había en la Biblioteca una comunidad de eruditos que estudiaban el Cosmos entero. Exploraban la física, la literatura, la medicina, la astronomía, la geografía, la filosofía, las matemáticas, la biología y la ingeniería. La ciencia y la erudición habían llegado a su edad adulta. El genio florecía en aquellas salas. La Biblioteca de Alejandría es el lugar donde los hombres reunieron por primera vez de modo serio y sistemático el conocimiento del mundo.

Además de Eratóstenes, hubo el astrónomo Hiparco, que ordenó el mapa de las constelaciones y estimó el brillo de las estrellas; Euclides, que sistematizó de modo brillante la geometría [...], Dionisio de Tracia, el hombre que definió las partes del discurso y que hizo en el estudio del lenguaje lo que Euclides hizo en la geometría; [...] Herón, inventor de cajas de engranajes y de aparatos de vapor, y autor de *Autómata*, la primera obra sobre robots; Apolonio, el matemático que demostró las formas de las secciones cónicas [...] las curvas que como sabemos hoy siguen en sus órbitas los planetas, los cometas y las estrellas; Arquímedes, el mayor genio mecánico hasta Leonardo de Vinci; y el astrónomo y geógrafo Ptolomeo, que compiló gran parte de lo que es hoy la seudociencia de la astrología: su universo centrado en la Tierra estuvo en boga durante 1500 años, lo que nos recuerda que la capacidad intelectual no constituye una garantía contra los yerros descomunales. Y entre estos grandes hombres hubo una gran mujer, Hipatia, matemática y astrónoma, la última lumbrera de la Biblioteca, cuyo martirio estuvo ligado a la destrucción de la Biblioteca siete siglos después de su fundación [...].

Los reyes griegos de Egipto que sucedieron a Alejandro tenían ideas muy serias sobre el saber. Apoyaron durante siglos la investigación y mantuvieron la Biblioteca para que ofreciera un ambiente de trabajo a las mejores mentes de la época. La Biblioteca constaba de diez grandes salas de investigación, cada una dedicada a un tema distinto, había jardines botánicos, un zoo, salas de disección, un observatorio, y una gran sala comedor donde se llevaban a cabo con toda libertad las discusiones críticas de las ideas.

El núcleo de la biblioteca era su colección de libros. Los organizadores escudriñaron todas las culturas y lenguajes del mundo. Enviaban agentes al exterior para traer libros que eran copiados y devueltos luego a sus propietarios. [...] Parece probable que la Biblioteca contuviera medio millón de volúmenes, cada uno de ellos un rollo de papiro escrito a mano. [...] Alejandría era la capital editorial del planeta. [...] El arte de la edición crítica se inventó allí. [...] Los Ptolomeos dedicaron gran parte de su enorme riqueza a la adquisición de todos los libros griegos [...]. En raras ocasiones un Estado ha apoyado con tanta avidez la búsqueda del conocimiento. [...] Los Ptolomeos no se limitaron a recoger el conocimiento conocido, sino que animaron y financiaron la investigación científica y de este modo generaron nuevos conocimientos. Los resultados fueron asombrosos.

Euclides, el autor de *Los Elementos*

Euclides y Arquímedes son las dos figuras más importantes de la Matemática griega. Mientras que Arquímedes es el investigador por excelencia, que incrementa de forma muy considerable el caudal matemático griego, la trascendente tarea de Euclides estriba en estructurar el patrimonio matemático griego en un entramado consistente, claramente organizado mediante una concatenación lógica de los resultados –*Los Elementos*–. Así que más que crear unas matemáticas nuevas (lo que hizo toda una brillante pléyade de matemáticos anteriores –Tales, Pitágoras, Hipócrates, Demócrito, Arquitas, ...– y sobre todo los de la Academia de Atenas –Teeteto, Eudoxo, Menecmo, Dinostarto, ...– que bajo la dirección matemática y filosófica platónica realizaron el llamado «*milagro griego*» en Matemáticas), a Euclides le cabe el inmenso mérito de la ordenación y sistematización de la Geometría griega elemental, de manera que con independencia de sus aportes originales, su mayor contribución se le reconoce como gran compilador y creador de un estilo de exposición –el método axiomático–, de modo que en lenguaje actual diríamos que Euclides es un gran maestro y su obra fundamental un *Libro de Texto*, que establece un férreo paradigma de exposición y de demostración en Matemáticas, una especie de norma académica de obligado respeto para todo matemático.

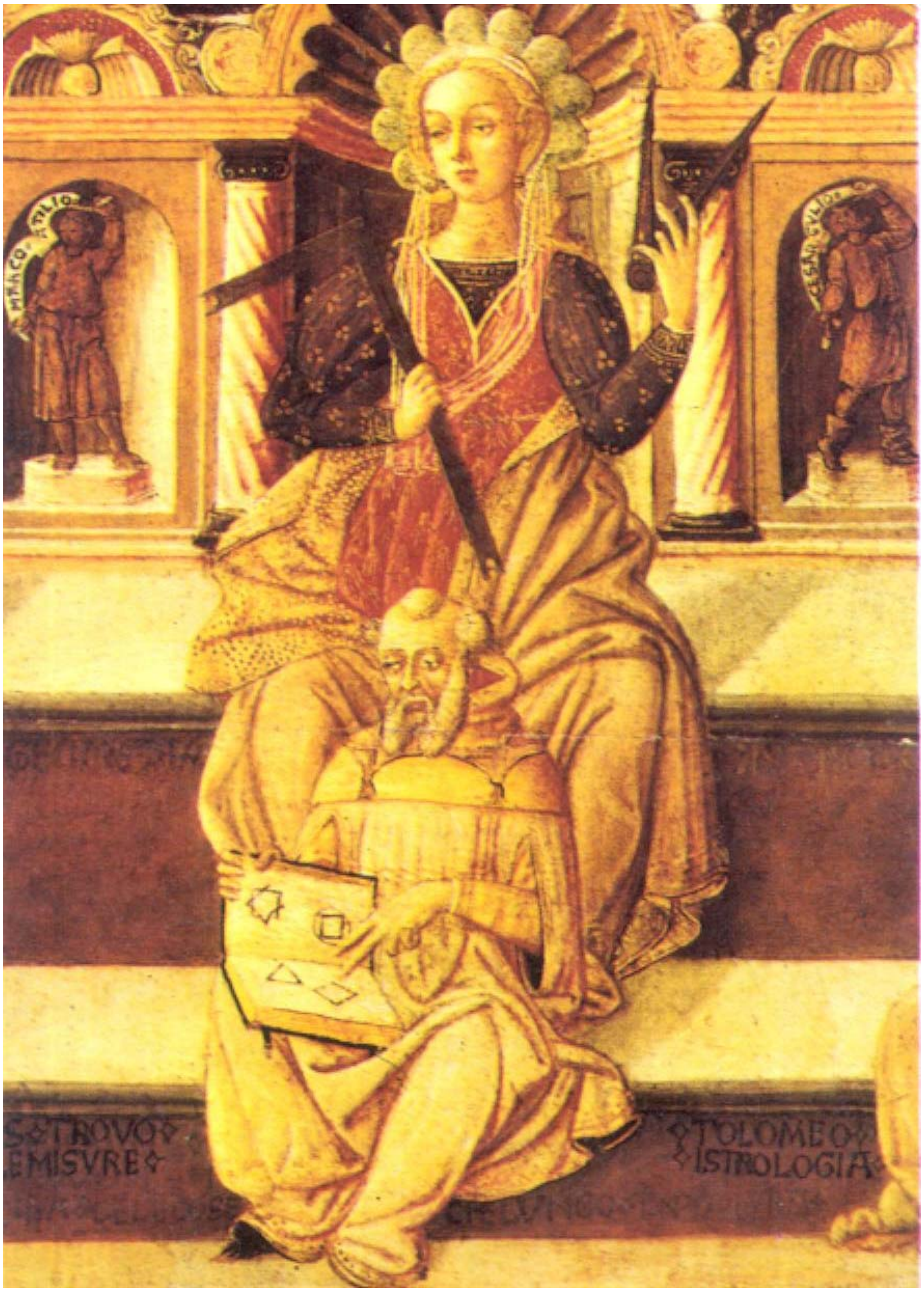
Hay una notable discrepancia entre el valor inconmensurable de la obra de Euclides y la ignorancia que se tiene en torno a su persona y las circunstancias de su vida, incluso la fecha y el lugar de nacimiento. Los exiguos datos biográficos se reducen a unos pocos comentarios y algunas anécdotas que se fueron recogiendo en ciertas obras escritas varios siglos después de su existencia, sobre todo al final de la cultura greco–romana y a lo largo de la Edad Media. La información no puede ser, pues muy fidedigna. Incluso sabios próximos en el tiempo, como Arquímedes de Siracusa y Apolonio de Perga, sobre los que la obra euclídea tuvo una influencia capital, apenas lo mencionan. Apolonio lo cita en un prólogo y en Arquímedes hay sólo dos citas de *Los Elementos* de Euclides; están ambas en el tratado *Sobre la Esfera y el Cilindro*, en las proposiciones I.2 (refiriéndose a la Proposición I.2 de *Los Elementos*) y en la I.6 (refiriéndose a la Proposición XII.2).

Hacia el año 300 a.C. Euclides debió de llegar a Alejandría, requerido como profesor por las instituciones docentes del Museo, y allí vivió el resto de su vida enseñando y escribiendo sobre Matemáticas. Por la naturaleza de su obra, Euclides habría estudiado probablemente con los discípulos de Platón y tal vez en la Academia misma, donde habría conocido los últimos resplandores de su foco científico, siendo responsable de su irradiación hacia la nueva sede del Saber, Alejandría.

Las referencias más fiables sobre Euclides serían las que relata Proclo (siglo V d.C.) en su famoso *Comentario al Libro I de Los Elementos de Euclides* –una de las principales fuentes sobre la Matemática griega, a la que aludiremos de forma reiterada–, donde el filósofo neoplatónico da unas valiosísimas referencias biográficas y bibliográficas, que constituyen un resumen sumario de la Historia de las Matemática griega desde los orígenes hasta Euclides, y que tiene la excepcional importancia de ser uno de los escasos documentos escritos sobre los primeros matemáticos griegos. Transcribamos algunos fragmentos del mismo referentes a Euclides, tomados de *El principal texto antiguo relativo a la Historia de la Geometría* (en A.Rey, *El apogeo de la ciencia técnica griega,* UTEHA,México,1962. pp.7–9):

> «*Euclides vivió en los días de Ptolomeo I, pues es citado por Arquímedes, que nació en las postrimerías del reinado de aquel soberano y, por otra parte, se cuenta que Ptolomeo preguntó cierto día a Euclides si no había un camino más corto para la Geometría que Los Elementos; obtuvo la siguiente respuesta: "En la Geometría no hay camino para los reyes".*
>
> *Así pues, Euclides es más reciente que los discípulos de Platón, pero más antiguo que Eratóstenes y que Arquímedes, contemporáneos según el mismo Eratóstenes.*
>
> [...] *Le debemos* [además de *Los Elementos*] *otras muchas obras de Matemáticas, escritas con singular exactitud y llenas de ciencia teórica. Tales son sus Ópticas, sus Catóptricas, sus Elementos de Música y también su libro Sobre las Divisiones.*»

EUCLIDES Y LA MATEMÁTICA COMO CIENCIA LIBERAL

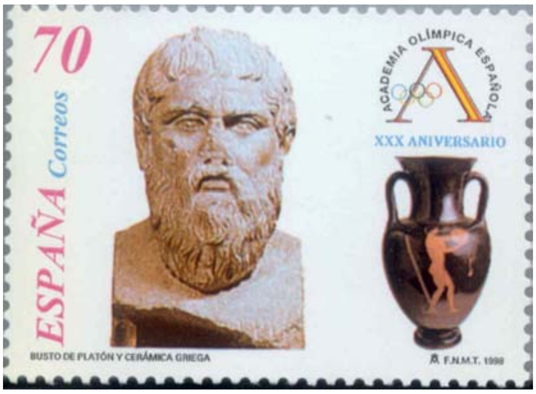


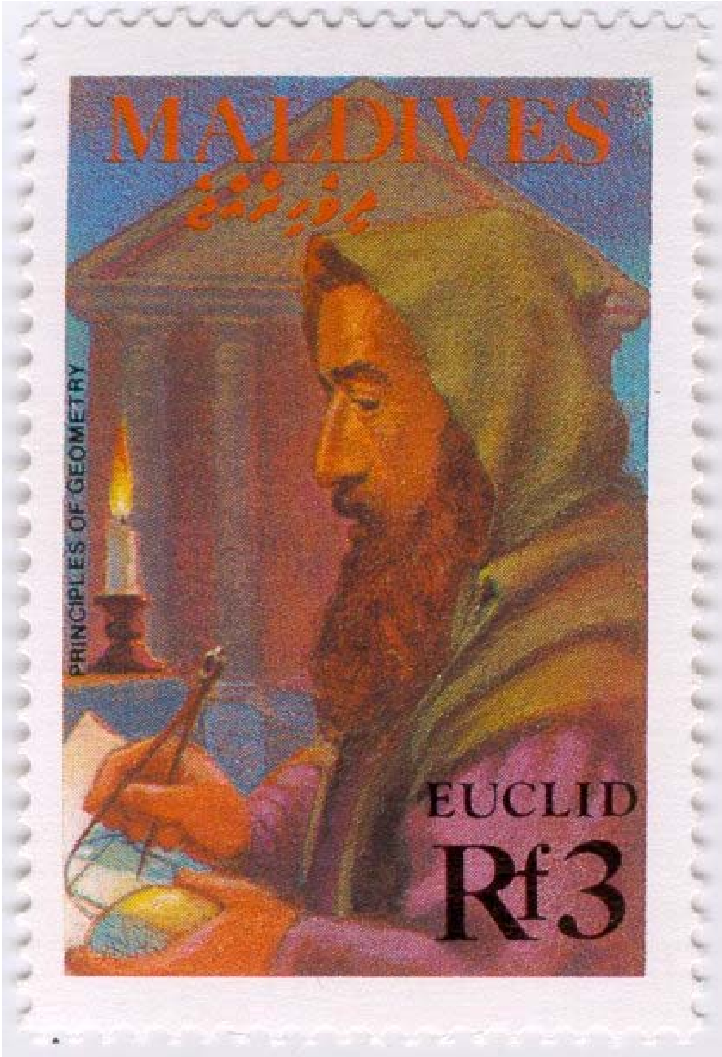
Euclides a los pies de la Geometría. Colección Cambó. Barcelona

Las leyendas asociadas a Euclides lo describen como el típico sabio bonachón, modesto y amable, pero no exento de cierta ironía mordaz. Cuenta una leyenda relatada por Estobeo (siglo V d.C) que cuando uno de sus alumnos le espetó al maestro la consabida pregunta: «*¿Para que sirve el estudiar Geometría*?», Euclides llamo su esclavo y le dijo «*Dale unas monedas a éste, ya que necesita sacar provecho de lo que aprende*».

Esta anécdota es coherente con un aspecto fundamental de la Matemática griega: «*e carácter de ciencia liberal y desinteresada*». En efecto los griegos independizaron las Matemáticas del pragmatismo empírico y de la utilidad inmediata, porque como aduce Platón en la *República* (525a–534a) las ciencias matemáticas tienen la misión pedagógica de formar mentes bien hechas, cumpliendo con el fin propedéutico de servir de introducción al estudio de la Filosofía. Las Matemáticas, según los griegos, deben estudiarse por la afición y el amor al saber en sí mismo, es decir las Matemáticas deben estudiarse por Filosofía y para la Filosofía.

PITÁGORAS, PLATÓN Y EUCLIDES
TRES HITOS DE LA MATEMÁTICA GRIEGA





1. **Sello con la efigie de Pitágoras. San Marino, 1983.**
2. **Sello con la efigie de Platón. España, 1998.**
3. **Sello con la efigie de Euclides. Maldivas, 1988**

La Matemática griega se desarrolla en tres fundamentales estadios temporales (siglos VI, IV, III, A.C) y geográficos (la magna Grecia del sur de Italia, Atenas y Alejandría) y sus figuras principales son Pitágoras, Platón y Euclides. Cada uno de ellos aporta una singularidad esencial:

- **Pitágoras es el instaurador de la tradición matemática griega y el artífice de la fundamentación filosófica e ideológica de la Matemática.**
- **Platón es la figura central en todos los sentidos; su actividad es la que confiere un estatuto gnoseológico y ontológico a la Geometría griega. Además, creó un entorno académico donde se potenciaron hasta el paroxismo los estudios geométricos.**
- **Euclides es el sistematizador de todos los conocimientos matemáticos elementales precedentes. Su obra, *Los Elementos*, se convierte en el canon normativo de exposición y demostración en la Geometría griega, y como tal marca una pauta a lo largo de veintidós siglos.**

La tradición matemática de la Escuela Pitagórica es recogida por Platón y la *Academia* de Atenas para ponerla en manos de Euclides, que en la compilación enciclopédica de *Los Elementos* creará un modelo geométrico estructural paradigmático.

La tradición matemática griega, instaurada por Pitágoras, es la base de los estudios matemáticos de la Academia de Platón y en manos de Euclides alcanza el carácter de modelo geométrico canónico en *Los Elementos*, gran parte de cuyo contenido, sobre todo los Libros I, II, III, IV, VII y XIII es de raíz pitagórica, siendo el resto de origen platónico. A Euclides hay que atribuirle el inmenso mérito de la demostración original de algunas Proposiciones de *Los Elementos* (por ejemplo la I.47 –*Teorema de Pitágoras*–) y sobre todo la estructuración lógica con el estilo axiomático de presentación.

El propósito de *Los Elementos* de Euclides.

Los Elementos de Euclides vertebran la Geometría griega elemental en toda su extensión y son el marco inevitable de referencia. A veces se cree que *Los Elementos* de Euclides contienen un resumen sumario y exhaustivo de toda la Geometría griega; pero en realidad la obra de Euclides es un compendio, en lenguaje geométrico, de todos los conocimientos de la Matemática elemental, es decir, por una parte, la Geometría sintética plana –puntos, rectas, polígonos y círculos– y espacial –planos, poliedros y cuerpos redondos–; y por otra parte, una Aritmética y un Álgebra, ambas con una indumentaria geométrica. Así pues, *Los Elementos* de Euclides son una exposición en orden lógico de los fundamentos de la Matemática elemental, y por tanto no contienen, por ejemplo, el estudio de las Cónicas de Menecmo ni de otras curvas planas superiores –la Hipopede de Eudoxo, la Cuadratriz de Hipias o Dinostrato, la Concoide de Nicomedes, la Cisoide de Diocles, etc.– que eran bien conocidas y utilizadas en la época en la resolución de problemas geométricos, considerados de naturaleza superior, como los *Tres Problemas Clásicos* –cuadratura del círculo, duplicación del cubo y trisección del ángulo–. A este respecto escribe Proclo en su *Comentario* sobre Euclides:

> «*Son singularmente admirables sus Elementos de Geometría por el orden que reina en ellos, la selección de los teoremas y problemas tomados como elementos –pues no insertó en modo alguno todos los que podía dar, sino únicamente aquellos que son susceptibles de desempeñar el papel de elementos–, y también la variedad de los razonamientos desarrollados de todas las maneras y que conducen a la convicción, ya partiendo de las causas, ya remontándose a los hechos, pero que son siempre irrefutables, exactos y del más científico carácter*.»

Pero ¿cuál sería el propósito de Euclides escribiendo *Los Elementos*?

El mismo Proclo al final de su *Comentario* nos dice algo al respecto:

> «*Los Elementos son una guía segura y completa para la consideración científica de los objetos de la Geometría.*»

Y en un párrafo anterior Proclo escribe:

> «*Euclides dio los procedimientos que emplea la perspicaz inteligencia y por los cuales es posible ejercitar a los principiantes en el estudio de la Geometría para que reconozcan los paralogismos y eviten los errores.*»

El propósito de Euclides escribiendo *Los Elementos* sería pues de índole metodológico, construyendo una especie de manual, a base de estructurar en una secuencia jerárquica lógica los resultados geométricos de sus antecesores, en particular los de Tales, Pitágoras, Hipócrates, Demócrito, Eudoxo y Teeteto. En efecto, Proclo escribe en otro párrafo:

> «*Euclides, el autor de los Elementos ordenó diversos trabajos de Eudoxo, mejoró los de Teeteto y produjo también demostraciones irrefutables para aquello que sus predecesores no habían probado de manera rigurosa.*»

Pero es muy probable que Euclides tuviera un propósito mucho más ambicioso todavía, que sería plasmar en un cuerpo de doctrina geométrico, la forma definitiva que debía estructurar toda la Matemática después de la solución que dio la Academia platónica a la tremenda crisis de fundamentos que produjo la aparición de las magnitudes inconmensurables. De hecho Proclo enfatiza en su *Comentario*:

> «*Euclides era platónico en cuanto a su opinión y la filosofía del maestro le era muy familiar*, [...]. »

EL *COMENTARIO* DE PROCLO AL LIBRO I DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES

Euclides. Fragmento de una miniatura medieval. Oxford Bodleian Library.
Portada de *El Comentario al Libro I de los Elementos de Euclides* de Proclo en una edición de 1560.

El Comentario **de Proclo es uno de los documentos histórico-críticos más valiosos y excepcionales sobre la Historia de la Geometría Griega que contiene numerosas referencias biográficas y bibliográficas, que son las únicas que conocemos de algunos geómetras anteriores al helenismo, y de algunas cuestiones matemáticas que interesaron a los antecesores de Euclides.**

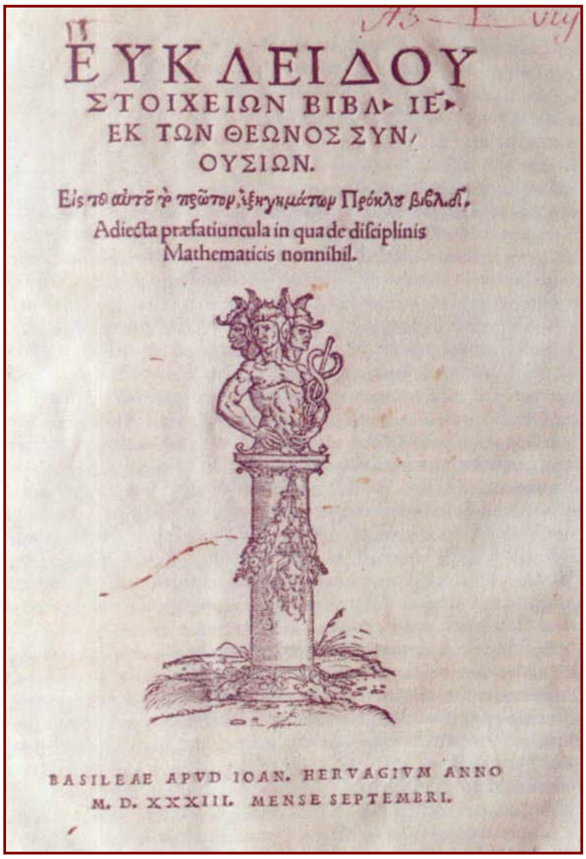
El texto de Proclo tal vez se componía de apuntes para sus lecciones diarias de Geometría en *La Academia* de Atenas, la cual llegó a dirigir 800 años después de la muerte de su fundador. Proclo escribió, además, amplios comentarios a algunos diálogos de Platón (la *República*, el *Timeo* y el *Parménides*) y diversas obras sobre Astronomía. Para sus comentarios críticos, Proclo debió tener a su disposición materiales bibliográficos antiguos, por eso se ha ponderado tanto su labor de transmisión del conocimiento matemático. Son muy interesantes también sus disquisiciones de Filosofía de la Matemática, que tratan aspectos como diferencia entre axiomas y postulados, teoremas y problemas, naturaleza de los objetos matemáticos y en general sobre la esencia matemática, y analizan con detalle los dos aspectos, inteligible y sensible, de la Matemática, es decir, la Geometría y la Aritmética, por una parte, y la Mecánica, la Astronomía, la Óptica, la Geodesia y la Logística, por otra. A Proclo se le debe, además, las primeras tentativas de demostrar el famoso quinto postulado de Euclides de las paralelas, con sus implicaciones filosóficas.

El Comentario al Libro I de los Elementos de Euclides **de Proclo es un libro de textos del siglo V d.C. sobre una obra que databa de más de 700 años. Proclo fue mejor filósofo –de credo platónico– que matemático, pero sobre todo fue un crítico muy agudo, competente e instruido que poseía en su mente todos los conocimientos de más de mil años de investigación matemática. Proclo considera a Euclides como miembro de la antigua Academia platónica a la que habría glorificado concluyendo *Los Elementos* con uno de los tópicos más queridos por Platón: los sólidos regulares del *Timeo*. Como buen comentarista, Proclo explica el significado del término «*Elementos*» que da título a la obra de Euclides (Proclo de Licia [en *Científicos griegos*. Estudio prelim. de F.Vera, Aguilar, 1970, pp. 1157–58]):**

> «*Son singularmente admirables sus Elementos de Geometría por el orden que reina en ellos, la selección de los teoremas y problemas tomados como elemento, pues no insertó en modo alguno todos los que podía dar, sino únicamente aquellos que son susceptibles de desempeñar el papel de elementos, es decir, de informar sobre los primeros principios geométricos.* **[...]** *Para el aprendiz, Los Elementos se proponen iniciarlo en el estudio de toda la Geometría, porque empezando por ellos llegará a conocer las otras ramas de esta ciencia,* **[...]** *porque es aquí donde están reunidos y ordenados convenientemente los teoremas que parecen más primitivos, más sencillos y más próximos a las primeras hipótesis, sobre los que se apoyan los demás.* **[...]** *Elemento es lo más sencillo en que se resuelve lo complejo, siendo elementos las cosas más primitivas que se establecen par a un resultado, como los axiomas, que son los elementos de los teoremas, y esta es la significación que en sus Elementos dio Euclides* **[...]** *donde contempla las figuras más primordiales, y pasa de las cosas sencillas a las complejas y establece sus especulaciones partiendo de nociones comunes que le dan claridad y orden.* »

Para Proclo el término «*elemento*» tiene dos sentidos que se corresponden con las dos acepciones habituales. Elementos son los fundamentos o conocimientos básicos sobre los que se edifica una teoría científica, pero a su vez una cuestión se concibe como elemental cuando en general es bien conocida.

LA EDICIÓN PRINCEPS DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES

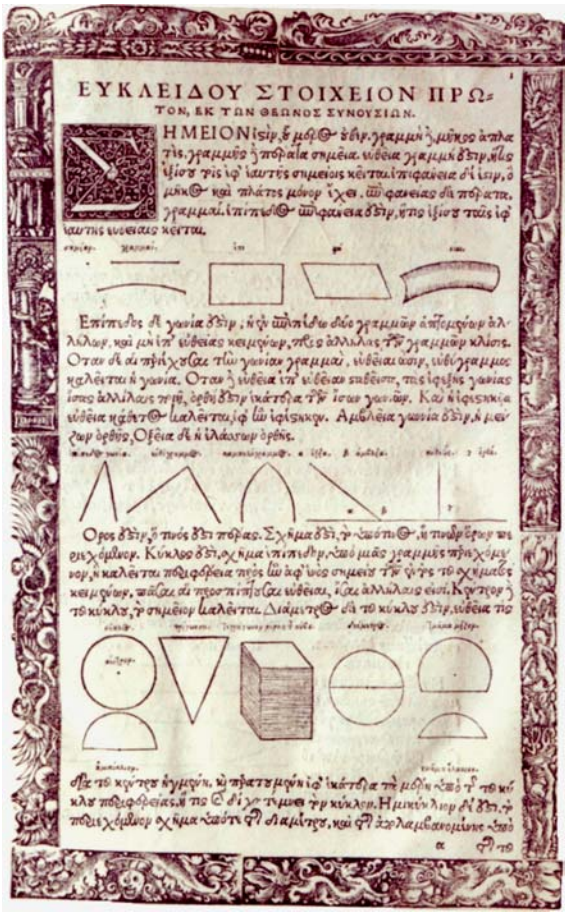


Portada y dos páginas de la *Editio princeps* de *Los Elementos* de Euclides (S.Grynaeus *el viejo*, Basilea, 1533) que fija por primera vez el texto estándar en griego con base en dos manuscritos griegos: uno de Venecia (*codex venetus marcianus* 301) y otro de París (*codex Paris* gr. 2343).

***Los Elementos* de Euclides son un *Corpus* geométrico que compila de forma enciclopédica la Geometría griega elemental. Se componen de trece libros, organizados en 465 proposiciones, 23 definiciones, 5 postulados y 5 nociones comunes (axiomas).**

En *Los Elementos*, Euclides establece un férreo paradigma estilístico axiomático-deductivo de exposición y de demostración en Matemáticas, a base de ordenar en una secuencia jerárquica lógica los resultados geométricos de sus antecesores (en particular los de Tales, Pitágoras, Hipócrates, Demócrito, Eudoxo y Teeteto) plasmando en un cuerpo de doctrina geométrica la forma definitiva que debía estructurar toda la Matemática griega después de la solución que dio la *Academia* platónica a la tremenda crisis de fundamentos que produjo la aparición de las magnitudes inconmensurables. El estilo sintético euclídeo se impondrá en los más importantes tratados de la Matemática griega , en particular *Las Cónicas* de Apolonio y *Las Obras* de Arquímedes.

***Los Elementos* de Euclides es el texto que más veces se ha editado, después de *La Biblia*, siendo, además, la obra más influyente de toda la literatura matemática.**



CITAS MEMORABLES SOBRE EUCLIDES

1. **Euclides, el autor de los Elementos ordenó diversos trabajos de Eudoxo, mejoró los de Teeteto y produjo demostraciones irrefutables para aquello que sus predecesores no habían probado de manera rigurosa. [...]. Son singularmente admirables sus Elementos de Geometría por el orden que reina en ellos, la selección de los teoremas y problemas [...] siempre irrefutables, exactos y del más científico carácter. [...]. Euclides dio los procedimientos que emplea la perspicaz inteligencia y por los cuales es posible ejercitar a los principiantes en el estudio de la Geometría para que reconozcan los paralogismos y eviten los errores. [...]. Este Libro [*Pseudaria*] tiene por objetivo la purificación y el adiestramiento de la inteligencia mientras que *Los Elementos* son una guía segura y completa para la consideración científica de los objetos de la Geometría. Proclo. *Comentarios al Libro I de los Elementos de Euclides* (en A.Rey, *El apogeo de la ciencia técnica griega*, UTEHA, México, 1962, pp.8–9).**

2. **Se cuenta que Ptolomeo preguntó cierto día a Euclides si no había un camino más corto para la Geometría que Los Elementos; obtuvo la siguiente respuesta: "En la Geometría no hay camino para los reyes". Proclo. *Comentario al Libro I de Los Elementos de Euclides* (en A.Rey, p.9)**

3. **Mientras admiro a los que han observado la verdad de este teorema [Proposición I.47 –*Teorema de Pitágoras*–], ensalzo más todavía al escritor de *Los Elementos*, no sólo porque consiguió una demostración mucho más lúcida, sino también porque obtuvo un teorema mucho más general [Proposición VI.31] mediante los irrefutables argumentos del Libro VI. Proclo. *Comentarios al Libro I de los Elementos de Euclides*.**

4. **El muy sagaz Euclides recopiló los fundamentos de la Geometría. Quien los conozca bien, no tiene ninguna necesidad de lo escrito a continuación, [...]. A.Durero. *De la Medida*. Akal, Madrid. 2000. p.133.**

5. **Hasta los 40 años no se interesó por la Geometría, hecho que ocurrió por accidente al hojear casualmente en una biblioteca un libro de Los Elementos de Euclides, abierto por la Proposición I.47. «¡*Vive Dios*! –exclamó– ¡*Esto es imposible*! Así que se puso a leer la demostración que le llevó a otras anteriores y éstas le remitieron a otras, que también leyó, hasta que quedó absolutamente convencido de esa verdad. Esto le hizo enamorarse de la Geometría. J.Aubrey. *De la vida de T.Hobbes* (en *Brief Lives*), Londres, 1694.**

6. **Entre Pitágoras y Euclides, La Geometría plana ha sufrido en su conjunto una revisión profunda, cuyo momento decisivo ha sido el trabajo de Eudoxo sobre las proporciones. P.Tannery. *La géométrie grecque*. Gauthier-Villars, París,1887, p.–98.**

7. **Lincoln: «*He aprendido a pensar con lógica leyendo los Elementos de Euclides*. [...] *Tras la lectura de todas las proposiciones de los seis primeros libros de Euclides, encontré el sentido de lo que significa demostrar*.» J.Mellon. *The Face of Lincoln*, Viking, New York, 1979, p.67).**

8. **Einstein: «*A los 12 años un tío mío me había contado el Teorema de Pitágoras antes de que la Santa Geometría de Los Elementos de Euclides cayera en mis manos*. [...]. *Es maravilloso que un hombre sea capaz de alcanzar tal grado de certeza y pureza haciendo uso exclusivo de su pensamiento.*» P.A.Schilpp. Sketch autobiográfico sobre A.Einstein. *Philosopher-Scientist.*, 1951.**

9. **Einstein: «*Si Euclides no es capaz de encender tu entusiasmo juvenil, entonces no has nacido pasa ser un pensador científico*». Americam Mathematical Montly, vol.99, nº8, 10/1992, p.773.**

10. ***Los Elementos* es el libro más reproducido de todo el patrimonio cultural después de la Biblia. [...]. Es una de las voces más importantes de la herencia clásica, una especie de propiedad sagrada como demostración de humanidad y manifestación de cultura y civilización superiores. [...]. Euclides no es un mero recopilador y ordenador, aunque dicha actividad ya sería suficiente para elevarle a la categoría de inmortal, porque se trata nada menos que de la concepción unitaria de la Matemática .[...]. *Los Elementos* capacitan para adueñarse de toda la Matemática, son un «*camino real*» sino el único que conduce al dominio de las Matemáticas. E.Colerus. *Breve historia de las Matemáticas*. Doncel, Madrid, 1972. Vol.1, pp. 47,48, 49,53.**

CITAS MEMORABLES SOBRE EUCLIDES

11. La lectura de Euclides a los 11 años fue uno de los grandes acontecimientos de mi vida, tan deslumbrante como el primer amor. **B.Russell. *Autobiography*. Little, Brown & Co, Boston, 1951, p.37.**

12. Mientras no existió una teoría aritmética adecuada de los inconmensurables, el método de Euclides [Libro V de *Los Elementos*] era el mejor posible en Geometría. Cuando Descartes introdujo la geometría coordenada, dando el lugar supremo a la Aritmética, supuso la posibilidad de una solución del problema de los inconmensurables, aunque entonces no fue encontrada. **B.Russell. *Historia de la Filosofía occidental*. Austral.Madrid,1995. Vol.1. Libro 1.Cap.3. p.73.**

13. Eudoxo construyó una profunda teoría que aparece descrita en el Libro V de *Los Elementos* de Euclides, y que es considerada por muchos matemáticos modernos como el logro más depurado de las Matemáticas griegas. Esta teoría es sorprendentemente moderna en espíritu, y puede ser considerada como el principio de la moderna teoría de números irracionales, que ha revolucionado el Análisis Matemático y ha tenido mucha influencia en la filosofía reciente. **G.H. Hardy. Apología de un matemático. Nivola, Madrid, 1999. pp.98–99.**

14. Eudoxo está en la cumbre de las matemáticas griegas por su Teoría de las Proporciones. [...]. Eudoxo ha encontrado el primer método lógicamente satisfactorio, que Euclides ha reproducido en el Libro V de sus *Elementos*, para resolver los problemas de la continuidad, los enigmas del infinito y los dédalos de los números irracionales estos problemas. **E.Bell. *Les grands mathématiciens*. Payot. París, 1950, pp.36–37.**

15. La Geometría euclidiana, que es idéntica, grosso modo, a la Geometría popular de todos los tiempos, no coincide con la intuición sino en muy estrechos límites, en el papel. [...] Euclides procede de acuerdo con el sentir antiguo que obedece al terror cósmico ante lo inconmensurable. **O.Spengler. *La decadencia de Occidente*. Austral, Madrid, 1998. Cap.I.1. p.155.**

16. La obra más representativa del saber geométrico griego es el famoso tratado llamado *Elementos* de Euclides, de tan extraordinario valor, que puede afirmarse que jamás otro alguno ha ocupado en la Ciencia tan preeminente lugar. [...]. El papel verdadero de *Los Elementos* de Euclides fue el de una *introducción al estudio de la Geometría* y de la Matemática en general, con la tendencia de tratar ésta según las ideas de la escuela platónica, como *preparación para estudios filosóficos generales*. [...]. *La teoría de las Proporciones* es un ejemplo característica de la tenacidad con que la tradición euclídea se conserva en la enseñanza geométrica. [...]. *En el quinto Libro* de Euclides se establece por primera vez *la licitud del cálculo con números irracionales*, sobre la base de definiciones rigurosas. [...]. La meta ideal que procura alcanzar Euclides es *deducir de un modo rigurosamente lógico todas las propiedades geométricas de ciertas premisas establecidas al principio.* En la importancia de este intento reside la clave de la significación histórica de *Los Elementos* de Euclides. **F.Klein. *Matemática elemental desde un punto de vista superior*. Vol. II. Geometría Biblioteca Matemática. Dtor: J.Rey Pastor. Madrid, 1931. pp. 251, 253, 257, 258, 260, 319.**

17. *Los Elementos* de Euclides como codificación de los fundamentos de la Geometría de la regla y el compás son el Tesoro matemático de la humanidad desde hace más de dos mil años. **A.Rey. *El apogeo de la ciencia técnica griega.* UTEHA, México 1962. Vol.1. Cap.4. pág.176.**

18. Este maravilloso libro [*Los Elementos* de Euclides] ha sido, es y será el libro de Matemáticas más grande de todos los tiempos. **T.Heat. *History of Greek Mathematics*. Dover, N. York, 1981. Vol.1. p.358.**

19. *Los Elementos* de Euclides reducen a todos sus predecesores a objetos de mero interés histórico. **O.Neugebauer. *The exacts Sciences in antiquity*. Dover. New York, 1969. p.145.**

20. La introducción de los postulados en *Los Elementos* de Euclides revela una lógica matemática mucho más sutil que la lógica aristotélica. [...] La originalidad de Los Elementos reside el sumo cuidado con el cual, con el mínimo de postulados, se esfuerza en obtener el máximo de resultados. **J.Itard. *Essais d'Histoire de les Mathematiques*. Blanchard, París, 1984. p.91.**

CITAS MEMORABLES SOBRE EUCLIDES

21. La lectura de Euclides no sólo hace geómetras los jóvenes, sino que insensiblemente los va habituando a ser excelentes lógicos. **Anónimo. *Tratado de Geometría*. Siglo XVIII**
22. Con todo derecho la Geometría de Euclides habría que denominarla Geometría platónica. **G.Reale. *Platón. En búsqueda de la sabiduría secreta*. Herder, Barcelona, 2001, p.213.**
23. Ninguna obra científica, filosófica o literaria, como *Los Elementos* de Euclides, en su largo caminar desde la antigüedad hasta el presente, ha caído bajo la pluma de un editor con tanta frecuencia. **J.Murdoch. *Euclid: Transmission of the Elements.* Citado por L.Vega en la Introducción general de *Euclides*: *Elementos*. Gredos. Madrid, 1996. Vol. 1, p.123.**
24. Hasta mediados del siglo XIX no hay un sistema de Geometría digno de tal nombre que se aparte sustancialmente del plan trazado en *Los Elementos* de Euclides. [...] Es un tratado que funda de una vez por todas una disciplina científica que representa por más de veinte siglos el espejo y la norma del rigor en ésta y otras ciencias afines. La fundación de la Geometría y del llamado «método axiomático» con *Los Elementos* de Euclides es un caso único en la historia de las fundaciones. [...]. La larga historia de los intentos fallidos de apear de su pedestal el postulado euclídeo de las paralelas es la más popular de cuantas se refieren al desarrollo de las Matemáticas. **Luis Vega (en Introducción general de *Los Elementos* de Euclides de Editorial Gredos. Madrid, 1996. pp. 7, 57.**
25. *Los Elementos* de Euclides constituyen, sin ninguna duda, el libro sobre Matemáticas de mayor influencia que jamás se haya escrito, llegando a formar parte de toda educación liberal. [...] El efecto que le produjo la lectura de Euclides al artista del Renacimiento (Durero, Leonardo, ...) fue arrollador. [...]. **D.Pedoe. *La Geometría en el arte.* Gustavo Gili. Barcelona, 1979, pp.123, 126.**
26. Euclides es el autor del texto de Matemáticas de éxito más fabuloso que se haya escrito nunca. [...]. *Los Elementos* de Euclides es la más famosa obra matemática de la Historia. [...]. No sólo fueron la primera obra matemática griega de importancia que ha llegado hasta nosotros, sino también el libro de texto que ha ejercido una mayor influencia de todos los tiempos. [...] Fue uno de los primerísimos libros matemáticos que se imprimió; se estima que desde entonces se han publicado más de un millar de ediciones. Ningún libro, salvo la Biblia puede jactarse de haber tenido tantas, y desde luego ninguna obra matemática ha tenido una influencia comparable. **C.B.Boyer. *Historia de las Matemáticas.* Alianza Universidad. Madrid. 1986. pp. 141, 146, 162.**
27. El grandioso conjunto de *Los Elementos* de Euclides fue autoridad indiscutida en las Matemáticas elementales hasta el siglo XIX. [...]. Con el Libro V nos encontramos ante una de las cimas del pensamiento matemático, y puede afirmarse que este libro fue en verdad asimilado y superado tan sólo hace un siglo, más o menos. **R.Taton (compilador). *La Ciencia helenística* (en *Historia general de las Ciencias*. Orbis. Barcelona, 1988, vol.2, Lib.2, cap.2). p.350.**
28. *Los Elementos* de Euclides ha sido durante 2300 años un documento insuperado. Como toda obra maestra puede ser leído una y otra vez, suministrando nuevos aspectos del genio de su creador. Aún hoy, estos viejos escritos constituyen una fuente ilimitada de goce para los que disfrutan con la ingeniosidad y el artificio de un argumento matemático elegante. **W.Dunham. *Viaje a través de los genios*. Pirámide. Madrid, 1992. p.116.**
29. El nombre de Euclides ha atravesado los siglos hasta nuestros días, cargado con un valor simbólico para la totalidad de la Matemática, tal como la concebían idealmente los sabios y pensadores. [...].Constituyen el cuerpo de doctrina central de las ciencias matemáticas, del que se puede derivar el resto. [...]. Fueron el principal vehículo de la transmisión del saber matemático de base en las épocas helenística y romana. [...]. *Los Elementos* de Euclides permanecen como núcleo de investigaciones dinámicas y su carrera, en este sentido, todavía no ha concluido. **M. Caveing. Euclides (en *El Saber griego*. Akal, Madrid, 2000, pp.479, 480, 482, 485.**
30. *Los Elementos* de Euclides han constituido el modelo de demostración sistemática de un conjunto de conocimientos, modelo que tendrá influencia mucho más allá de las Matemáticas. **G. Lloyd. La demostración y la idea de ciencia. (en *El Saber griego*. Akal, Madrid, 2000, p.479).**

Organización y metodología de *Los Elementos* de Euclides.

Los Elementos de Euclides constan de 465 Proposiciones organizadas en trece libros. Los Libros I, II, III y IV tratan sobre las propiedades básicas de figuras rectilíneas y círculos. El Libro V expone la *Teoría de la Proporción* de Eudoxo, que resuelve de forma brillante la crisis producida por la aparición de las magnitudes inconmensurables. El Libro VI aplica esa teoría al estudio de las figuras semejantes. Los Libros VII, VIII y IX tratan de *Teoría de Números*, es decir de las propiedades de los números enteros y la divisibilidad. El Libro X introduce el *Método de Exhaución* y clasifica de forma sistemática los segmentos inconmensurables. Los Libros XI y XII estudian la geometría de sólidos aplicando el *Método de Exhaución* de Eudoxo al cálculo del área del círculo y algunos volúmenes. Finalmente el Libro XIII está dedicado al estudio exhaustivo de los cinco poliedros regulares.

Los Elementos de Euclides están escritos en un lenguaje sintético que ordena las diversas proposiciones en una concatenación lógica de forma que cada resultado se remonta a los anteriores, sin introducir en el razonamiento ningún elemento antes haber demostrado su existencia por medio de una construcción, prerrequisito que Euclides satisface en general con gran habilidad y sofisticación. Para la elevación de su edificio geométrico, Euclides utiliza un método de trabajo que requiere asumir ciertas afirmaciones previas, cuya exactitud se considera evidente, así como ciertas construcciones que se suponen conocidas, es decir, las definiciones, los postulados y los axiomas, de ahí el nombre de método axiomático-deductivo.

Así pues, aunque no hay ninguna introducción o preámbulo de la obra, previamente, en el Libro I, Euclides introduce unos preliminares a base de veintitrés definiciones, cinco postulados y cinco nociones comunes o axiomas.

Definiciones, postulados y nociones comunes

Los Elementos de Euclides se inician en el Libro I con 23 definiciones de conceptos –punto, recta, superficie, ángulos, rectas perpendiculares y paralelas, círculo, semicírculo, los diversos tipos de triángulos y cuadriláteros, etc.–, elementos geométricos que se utilizarán en la primera parte de la obra y que con gran probabilidad son debidos a la Academia platónica. A lo largo del texto euclídeo se van añadiendo nuevas definiciones hasta un total de ciento dieciocho. En *Los Elementos* las definiciones son frases breves y precisas con las que se introducen los conceptos matemáticos y se da nombre a los diversos elementos geométricos que intervienen en las proposiciones. Transcribiremos aquí las primeras definiciones siguiendo las diversas ediciones de *Los Elementos* referenciadas en la bibliografía.

Definiciones:

D.I.1. Punto es lo que no tiene partes.

D.I.2. Línea es la longitud sin anchura.

D.I.3. Los extremos de la línea son puntos.

D.I.4. Línea recta es la que yace por igual sobre sus puntos.

D.I.5. Superficie es lo que sólo tiene largo y ancho.

D.I.6. Los extremos de la superficie son líneas.

D.I.7. Superficie plana es la que yace por igual sobre sus rectas.

D.I.8. Angulo plano es la inclinación de dos líneas que se encuentran en un plano y no yacen las dos sobre una recta.

D.I.9. Si las dos líneas que contienen el ángulo son rectas, el ángulo se llama rectilíneo.

D.I.10. Si una recta trazada sobre otra forma con ella dos ángulos contiguos iguales cada uno de ellos es recto, y la recta se llama perpendicular a aquella sobre la cual se trazó.

D.I.11. Ángulo obtuso es el mayor que el recto.

D.I.12. Ángulo agudo es el menor que el recto.

D.I.13. Límite es el extremo de algo.

D.I.14. Figura es lo comprendido por uno o varios límites.

D.I.15. Círculo es una figura plana limitada por una sola línea que se llama periferia [circunferencia], respecto de la cual son iguales las rectas que inciden sobre ellas trazadas desde uno de los puntos situados en el interior de la figura.

D.I.16. Este punto se llama centro del círculo.

D.I.17. Diámetro del círculo es una recta cualquiera que pase por el centro y cuyas dos partes tengan sus extremos en la periferia. Esa recta divide al círculo en dos partes iguales.

D.I.18. Semicírculo es la figura limitada por un diámetro y la periferia. El centro del semicírculo es el mismo que el del círculo.

D.I.19. Figuras rectilíneas son las limitadas por rectas. Triláteras si lo están por tres, cuadriláteras por cuatro y multiláteras por más de cuatro.

D.I.20. Entre las figuras triláteras el triángulo es equilátero si tiene los tres lados iguales, isósceles si solo tiene dos lados iguales y escaleno si sus tres lados son desiguales.

D.I.21. Entre la figuras triláteras, el triángulo rectángulo es el que tiene un ángulo recto; obtusángulo, el que tiene un ángulo obtuso, y acutángulo, el que tiene sus tres ángulos agudos.

D.I.22. Entre las figuras cuadriláteras, el cuadrado es equilátero y equiángulo; el rectángulo, equiángulo, pero no equilátero; el rombo es equilátero, pero no rectangular; el romboide, sin ser equilátero ni equiángulo, tiene iguales los lados y los ángulos opuestos. Las demás figuras cuadriláteras se llaman trapecios.

D.I.23. Rectas paralelas son las que, estando en el mismo plano y prolongadas al indefinidamente, no se encuentran.

Claramente se pueden plantear algunas objeciones a la vaguedad y debilidad que presentan algunas de las definiciones. Pero hay que tener cierta indulgencia lógica ya que no hay ningún conjunto previo de elementos indefinidos en términos de los cuales definir los demás, es decir, en cualquier estructura lógica no se pueden definir todos los términos, ya que toda definición consta de términos, que a su vez habría que definir, de modo que la pretensión de definirlo todo es quimérica y está condenada a la circularidad lógica. Un sistema lógico debe arrancar de unos cuantos términos no definidos sobre los que se basan todas las definiciones posteriores. El numero de términos no definidos debe ser lo mas exiguo posible, pero su consideración es inevitable. Por eso en las geometrías modernas las nociones de punto y recta son primigenias y permanecen si definir. Euclides con sus definiciones pretende darnos una cierta imagen mental, física, intuitiva y convincente de los elementos geométricos.

En ninguna parte de *Los Elementos* de Euclides aparece el concepto de grado como unidad de medida de los ángulos. La única medida de ángulo considerada es el ángulo recto definido por perpendicularidad como uno de los ángulos adyacentes iguales a lo largo de una línea recta.

Con base en estas definiciones, Euclides presenta a continuación una lista de cinco postulados y cinco nociones comunes (o axiomas). Los selecciona de forma muy juiciosa para evitar reiteraciones o inconsistencias lógicas. Aquí Euclides sigue la orientación de Aristóteles en el sentido de distinguir de forma clara entre axiomas como verdades autoevidentes por ser comunes a todas las ciencias y postulados como verdades menos obvias que se refieren solamente a la materia concreta de que se trate, en este caso a la Geometría. Posteriormente a Euclides se distinguía entre axioma como algo conocido o aceptado como evidente y postulado como algo que se debe exigir. Digamos que terminología aparte, en el desarrollo ulterior de la Geometría tanto los axiomas como los postulados de Euclides fueron aceptados como verdades incuestionables, al menos hasta el advenimiento de las Geometrías no Euclídeas.

Postulados:

P1. [Es posible] trazar una línea recta desde un punto cualquiera a otro punto cualquiera.

P2. [Es posible] prolongar de una manera ilimitada en línea recta una recta limitada.

P3. [Es posible] describir un círculo para cada centro y cada radio.

P4. Todos los ángulos rectos son iguales.

P5. Si una recta, al incidir sobre otras dos, forma del mismo lado ángulos internos menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en que estén los ángulos menores que dos rectos.

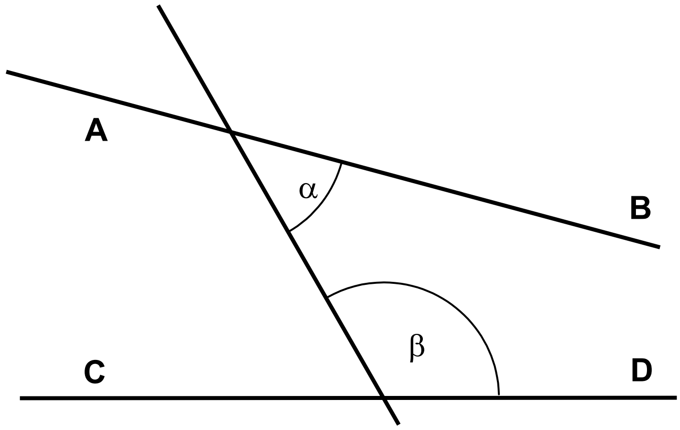
Los dos primeros postulados proporcionan la base lógica para realizar las construcciones geométricas que se pueden trazar con una regla no graduada, ya que nos permiten unir dos puntos con una línea recta (P1) y extender cualquier línea recta dada (P2). El tercer postulado aporta la base lógica para trazar un círculo de centro y radio dados. Así pues, los tres primeros postulados justifican los usos de los instrumentos euclidianos, –la regla y el compás–, herramientas geométricas por excelencia.

Aquilatando el significado del tercer postulado, digamos que el compás ideal de Euclides no permite transportar una distancia igual a un segmento sobre otro segmento más largo, a partir de uno de sus extremos, es decir, el compás euclídeo es «*colapsable*»; permite dibujar círculos, según el tercer postulado, pero sólo mantiene su rigidez mientras se traza un círculo determinado, ya que las puntas del compás se cierran en cuanto se levanta alguna de ellas. Euclides no incluyó un postulado más para apoyar la trasferencia de longitudes, porque no era necesario, ya que en las tres primeras proposiciones del Libro I demostrará la posibilidad de esta operación, bajo la interpretación estricta del tercer postulado del compás como colapsable. Así vemos como Euclides, dando muestra de agudeza geométrica, evitó desde el principio postular lo que podía deducir, manteniendo en un mínimo el número sus postulados.

Los dos primeros postulados tal como fueron formulados por Euclides no garantizan ni la unicidad de la línea recta que pasa por dos puntos (suposición implícita en la Proposición I.4 y explícita en la XI.1), ni su infinitud. Sin embargo, Euclides hace uso tácito en sus demostraciones de la unicidad y la infinitud desde el comienzo del Libro I.

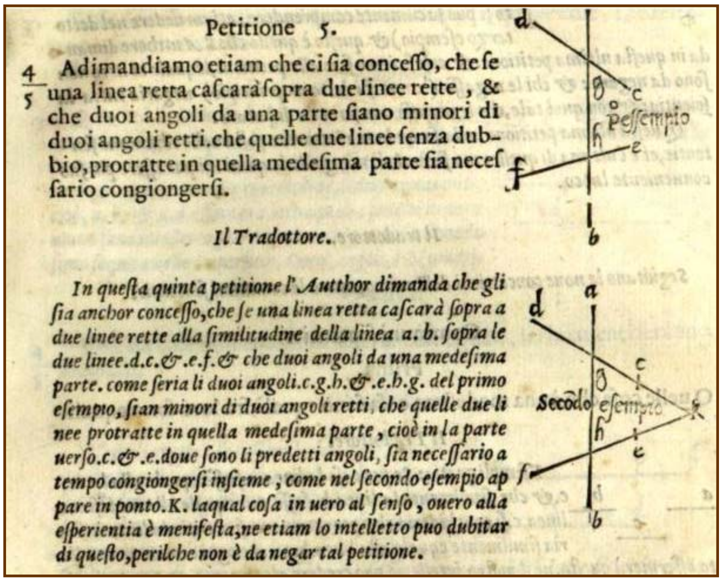
A pesar de algunas omisiones y pequeños errores, uno de los grandes méritos de *Los Elementos* de Euclides es la elección de los principios, en cuanto al número y al tipo de ellos. A partir de un exigua cantidad de ellos, Euclides prueba cientos de teoremas, muchos de ellos de una gran profundidad.

Efectivamente los principios son elegidos de una forma muy inteligente, sobre todo en el más importante y controvertido de los postulados, el quinto postulado, llamado «*Postulado de las paralelas*». Euclides no es ajeno a que cualquier principio sobre las paralelas debe afectar de forma implícita o explícita a cuestiones geométricas que lindan con el infinito, tan denostado en la Matemática griega y por el que sentían los griegos una especie de terror cósmico ante las limitaciones de la experiencia humana para manejar físicamente una extensión infinita. Pero al ser consciente de que algún postulado en relación con las paralelas era imprescindible, Euclides eligió una versión del mismo donde quedara camuflado la temible presencia del infinito, estableciendo condiciones bajo las que dos rectas se cortan en un punto a distancia finita.



De acuerdo con la figura, el *Postulado de las paralelas* asegura, que si la suma de los ángulos α y β es menor que dos rectos, entonces las rectas AB y CD se cortan en las prolongaciones de B y D.

Este postulado es de naturaleza muy diferente a los anteriores. Su enunciado es mucho más prolijo, requiere un gráfico para su perfecta comprensión y no es muy evidente. Por ello muchos matemáticos han mantenido a lo largo de la historia la íntima convicción de que el quinto postulado debería ser en realidad un teorema y son legión los que derrocharon esfuerzos en intentar demostrarlo. Como en otros temas, estos intentos no fueron efímeros ya que alumbrarían dos mil años después de Euclides el panorama de las Geometrías no Euclídeas. El mismo Euclides, que sin duda ostenta la paternidad del postulado, manifiesta una actitud un tanto rara ante el mismo, al intentar demostrar todos los teoremas que pueda sin recurrir a él, evitando en lo posible su uso, incluso a costa de incrementar la dificultad de las pruebas. De hecho Euclides difiere su utilización hasta la Proposición I.29.


Petitione 5.

4/5 Adimandiamo etiam che ci sia concesso, che se una linea retta cascarà sopra due linee rette, & che duoi angoli da una parte siano minori di duoi angoli retti. che quelle due linee senza dubbio, protratte in quella medesima parte sia necessario congiongersi.

Il Tradottore.

In questa quinta petitione l'Autthor dimanda che gli sia anchor concesso, che se una linea retta cascarà sopra a due linee rette alla similitudine della linea a. b. sopra le due linee. d. c. & . e. f. & che duoi angoli da una medesima parte. come seria li duoi angoli. c. g. h. & . e. h. g. del primo esempio, sian minori di duoi angoli retti, che quelle due linee protratte in quella medesima parte, cioè in la parte uerso. c. & . e. doue sono li predetti angoli, sia necessario a tempo congiongersi insieme; come nel secondo esempio appare in ponto. K. laqual cosa in uero al senso, ouero alla esperientia è menifesta, ne etiam lo intelletto puo dubitar di questo, perilche non è da negar tal petitione.

***El Postulado de las Paralelas* en la edición de Tartaglia de *Los Elementos* de Euclides (Venecia, 1569).**

Nociones Comunes:

NC1. Cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí.

NC2. Si a cosas iguales se agregan cosas iguales, los totales son iguales.

NC3. Si de cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales.

NC4. Las cosas que se superponen una a la otra son iguales entre sí.

NC5. El todo es mayor que la parte.

La primera de estas *Nociones Comunes* es la ley transitiva que podemos considerar como el silogismo fundamental de la Geometría. Las dos siguientes se refieren a la legitimidad de sumar y restar cosas iguales. La última introduce la desigualdad.

La cuarta de las *Nociones Comunes* merece una atención. Euclides viene a decir que si una figura se puede trasladar sobre el plano de modo que al colocarse sobre otra, ambas figuras coinciden perfectamente –se superponen–, entonces las dos figuras son iguales en todos sus aspectos, es decir, tiene los mismos ángulos, los mismos lados y demás elementos. Ante el enunciado debemos reprochar que esta cuarta noción, en la que se basan las pruebas mediante congruencia, es de carácter geométrico, y por tanto en el sentido aristotélico, aceptado por Euclides, debería ser un postulado.

Después de las nociones comunes vienen las proposiciones, teoremas y problemas, que están demostrados y resueltos, respectivamente, con el rigor lógico apodíctico euclídeo, apoyándose en los principios asumidos (Postulados y Nociones Comunes) y asegurando en los problemas la existencia de la solución por medio de construcciones con regla y compás.

EUCLIDES Y *LOS ELEMENTOS*
SEGÚN FELIX KLEIN

Felix Klein. Matemática elemental desde un punto de vista superior

Vol. II. Geometría. Biblioteca Matemática. Dr: J.Rey Pastor. Madrid, 1931. pp.251–278

La obra más representativa del saber geométrico griego es el famoso tratado llamado *Elementos* de Euclides, de tan extraordinario valor, que puede afirmarse que jamás otro alguno ha ocupado en la Ciencia tan preeminente lugar. (p.251). [...].

La personalidad de Euclides es muy poco conocida, sabiéndose únicamente que vivió en Alejandría hacia el año 300 a.C. Se conoce en cambio bastante sobre el movimiento científico en Alejandría por tal época. A la fundación del imperio de Alejandro, siguió la necesidad de recoger todo lo que en el orden científico había sido creado en los siglos precedentes, dándole unidad y formando con ello un sistema científico. Así se desarrolló la famosa Escuela de Alejandría, cuya enseñanza tenía algunos puntos en común con la universitaria actual, ya que su papel era *recoger y ordenar los materiales procedentes de la libre investigación*, no siendo,(272) pues, de extrañar que tendiese en cierto modo al dogmatismo escolar. (p.251–252). [...].

La significación científica de *Los Elementos* de Euclides y la enorme fama y difusión que han alcanzado ha promovido un culto *a la obra* en la que se cree ver la base de todo sistema geométrico completo.(p.252). [...].

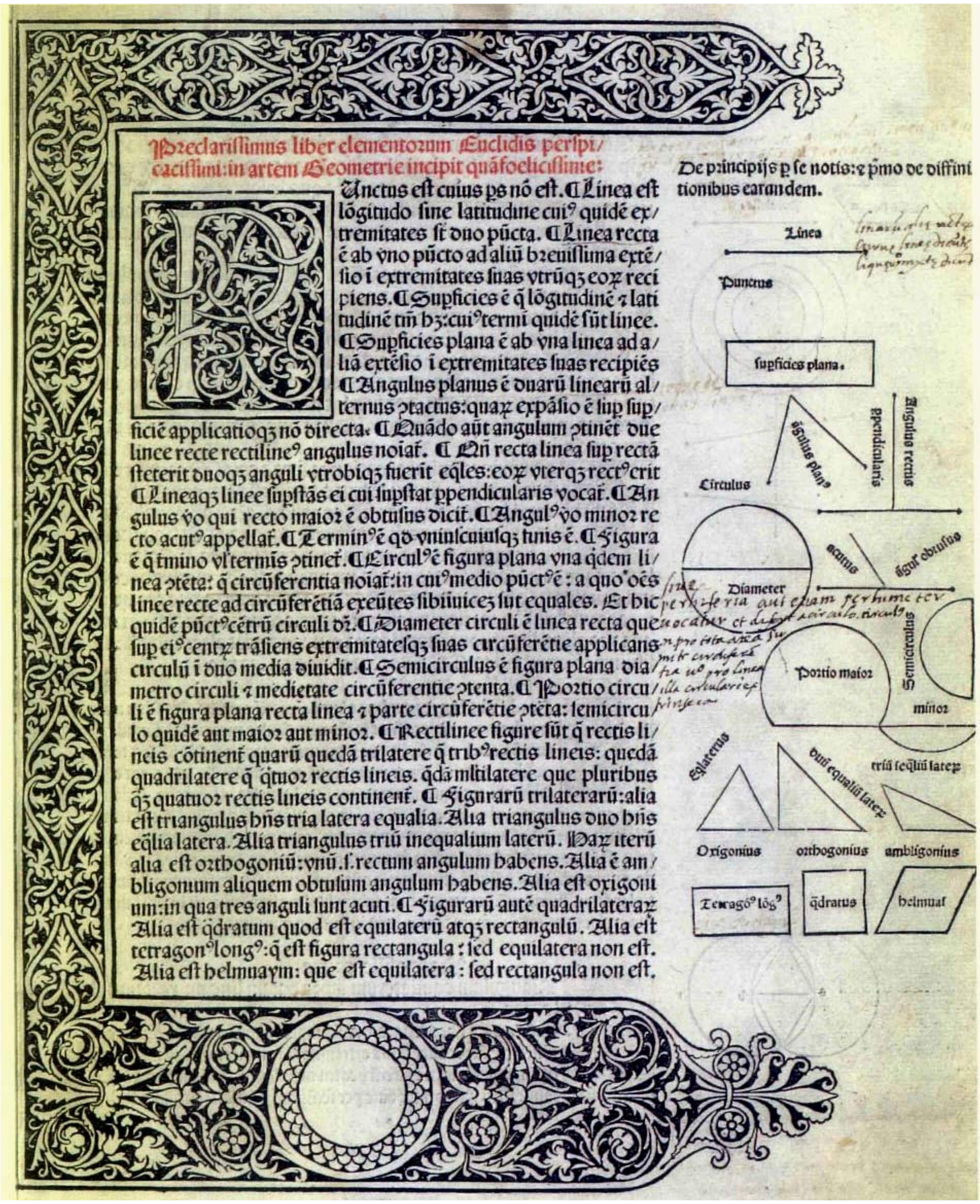
Euclides al escribir sus *Elementos* no se propuso de ningún modo condensar en una enciclopedia la totalidad de los conocimientos geométricos de su época, puesto que entonces no hubiera prescindido de algunas teorías que, como la de las secciones cónicas y curvas de orden superior, habían sido ya estudiadas –el mismo Euclides escribió un trabajo sobre cónicas que no ha llegado a nuestras manos–, aunque hasta Apolonio (200 a.C.) no alcanzasen su forma completa. El papel verdadero de *Los Elementos* de Euclides fue el de una *introducción al estudio de la Geometría* y de la Matemática en general, con la tendencia de tratar ésta según las ideas de la escuela platónica, como *preparación para estudios filosóficos generales*. Así se comprende la razón de que la obra fundamental esté escrita atendiendo en primer lugar a la conexión lógica, que ha de dar por fruto un sistema completo de Geometría, mientras que las aplicaciones prácticas estén excluidas sistemáticamente. En dicho sistema Euclides sobrepasó en algunas partes los conocimientos teóricos de su tiempo, ya que no todos estaban suficientemente desarrollados para su adaptación. (p.253). [...].

Generalmente se cree que *Los Elementos* de Euclides no constituyeron una obra única sino la recopilación de diferentes trabajos anteriores. Realmente acerca del autor nada de cierto se conoce, pues todas las noticias que hoy se tienen de Euclides y sus contemporáneos, no arrojan ninguna luz sobre esto. En el casi actual, la tradición se remonta al comentador de Euclides Proclo Diadoco, que vivió hacia el año 450 d.J., es decir, más de 700 años después, y si, por diferentes motivos, no se atribuyen caracteres de certeza a algunas de sus afirmaciones, mucho menos puede concedérseles a los que hoy intentan establecer una teoría acerca del autor de una obra escrita 1200 años antes. (p.258). [...].

Una ojeada general sobre el contenido de la obra [...] descubre que la meta ideal que procura alcanzar Euclides es *deducir de un modo rigurosamente lógico todas las propiedades geométricas de ciertas premisas establecidas al principio.* En la importancia de este intento reside la clave de la significación histórica de *Los* Elementos de Euclides. (p.260). [...].

La *gran importancia histórica* de *Los Elementos* de Euclides consiste en haber establecido para lo sucesivo *como ideal de la Geometría el alcanzar un encadenamiento lógico perfecto*. En lo que se refiere al modo de acercarse a este ideal, hay que reconocerle muchos aciertos. (p.278). [...].

LA PRIMERA EDICIÓN IMPRESA DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES



Preclarissimus liber elementorum Euclidis perspi/
cacissimi: in artem Geometrie incipit quāfoelicissime:

Punctus est cuius ps nō est. ¶ Linea est lōgitudo sine latitudine cui⁹ quidē ex/tremitates st duo pūcta. ¶ Linea recta ē ab vno pūcto ad aliū breuissima extē/sio i extremitates suas vtrūqȝ eoꝝ reci/piens. ¶ Supficies ē q̄ lōgitudinē ⁊ lati/tudinē tm̄ hȝ: cui⁹ termi quidē sūt linee. ¶ Supficies plana ē ab vna linea ad a/liā extēsio i extremitates suas recipiēs ¶ Angulus planus ē duarū linearū al/ternus ɔtactus: quaꝝ expāsio ē sup sup/ficiē applicatioqȝ nō directa. ¶ Quādo aūt angulum ɔtinēt due linee recte rectiline⁹ angulus noiat. ¶ Qn̄ recta linea sup rectā steterit duoqȝ anguli vtrobiqȝ fuerit eq̄les: eoꝝ vterqȝ rect⁹ erit ¶ Lineaqȝ linee supstās ei cui supstat ppendicularis vocat. ¶ An/gulus vo qui recto maior ē obtusus dicit. ¶ Angul⁹ vo minor re/cto acut⁹ appellat. ¶ Termin⁹ ē qd vniuscuiusqȝ finis ē. ¶ Figura ē q̄ tmino vl termis ɔtinet. ¶ Circul⁹ ē figura plana vna qdem li/nea ɔtēta: q̄ circūferentia noiat: in cui⁹ medio pūct⁹ ē: a quo oēs linee recte ad circūferētiā exeūtes sibiinuicez sūt equales. Et hic quidē pūct⁹ cētrū circuli dr̄. ¶ Diameter circuli ē linea recta que sup ei⁹ centꝝ trāsiens extremitatesqȝ suas circūferētie applicans circulū i duo media diuidit. ¶ Semicirculus ē figura plana dia/metro circuli ⁊ medietate circūferentie ɔtenta. ¶ Portio circu/li ē figura plana recta linea ⁊ parte circūferētie ɔtēta: semicircu/lo quidē aut maior aut minor. ¶ Rectilinee figure sūt q̄ rectis li/neis cōtinent quarū quedā trilatere q̄ trib⁹ rectis lineis: quedā quadrilatere q̄ q̄tuor rectis lineis. q̄dā mltilatere que pluribus qȝ quatuor rectis lineis continent. ¶ Figurarū trilaterarū: alia est triangulus hn̄s tria latera equalia. Alia triangulus duo hn̄s eq̄lia latera. Alia triangulus triū inequalium laterū. Haꝝ iterū alia est orthogoniū: vnū .s. rectum angulum habens. Alia ē am/bligonium aliquem obtusum angulum habens. Alia est oxigoni/um: in qua tres anguli sunt acuti. ¶ Figurarū autē quadrilateraꝝ Alia est q̄dratum quod est equilaterū atqȝ rectangulū. Alia est tetragon⁹ long⁹: q̄ est figura rectangula: sed equilatera non est. Alia est helmuaym: que est equilatera: sed rectangula non est.

De principijs p se notis: ⁊ pmo de diffini/tionibus earundem.

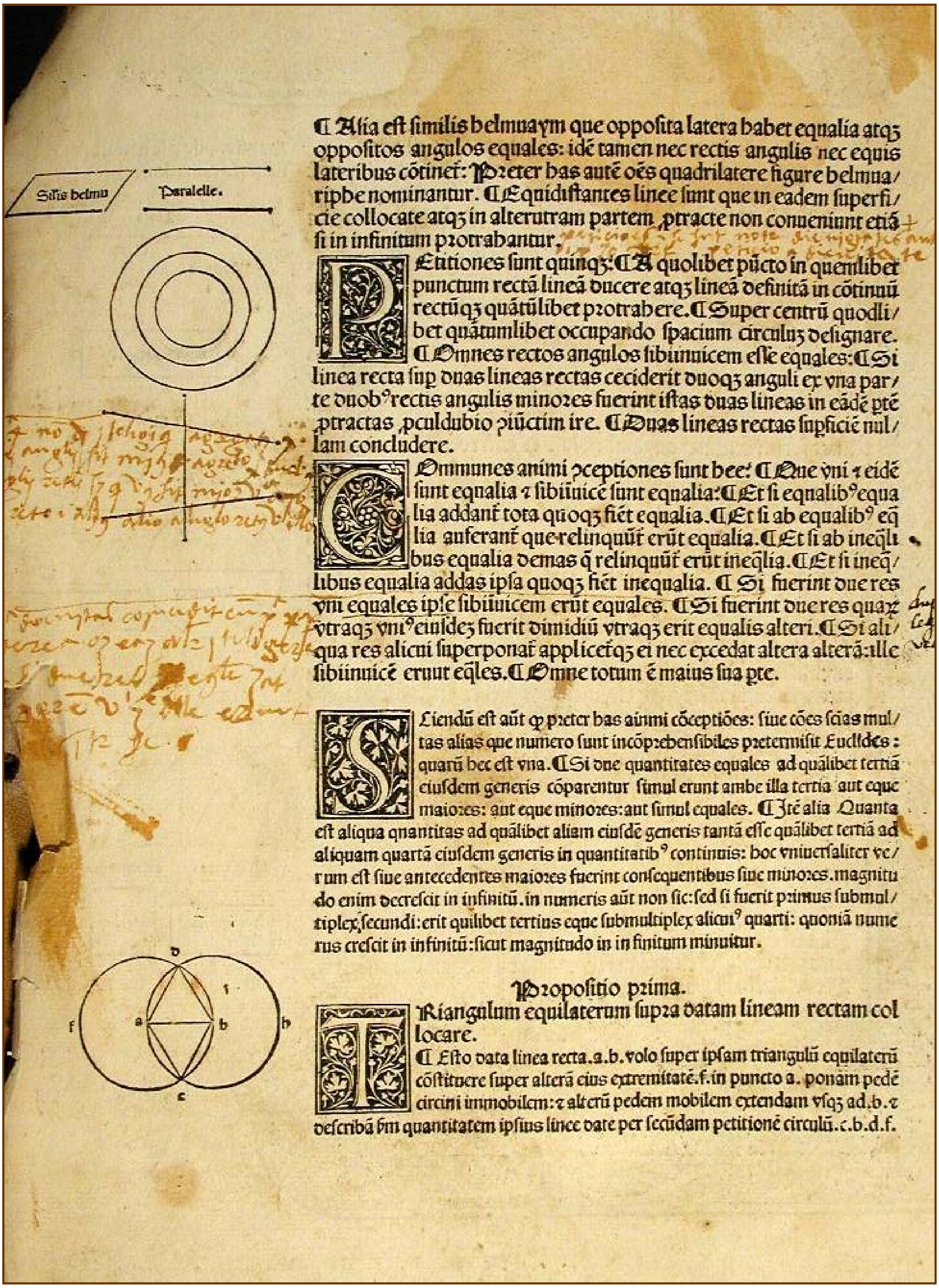
Página inicial de la primera impresión de *Los Elementos de Euclides* que tiene lugar en Venecia en 1482 y se debe al impresor E.Ratdolt. Pertenece a un incunable de la Biblioteca Nacional de España.

Esta edición se hizo a partir de una versión arábigo-latina que a su vez era una reelaboración de la traducción latina de Adelardo de Bath de 1142, comentada por Campano de Novara, a mediados del siglo XIII. Seguramente este texto contiene la primera impresión de figuras geométricas en un libro de contenido matemático. Para ello dispone de un margen de 8 cm. Ratdolt asegura haber desarrollado una tecnología que le permitía imprimir cualquier figura con la misma facilidad que el texto.

En el largo El título –*Euclidis Megarensis ... Geometricorum Elementorum Opus, ab Adelhardo Bathoniensi traslata, cum annotationibus Johannis Campani*– se confunde al verdadero autor de *Los Elementos* con el filósofo Euclides de Megara, coetáneo de Platón y por tanto casi un siglo anterior. Esta confusión se mantendrá en muchas ediciones posteriores, a pesar de que Commandino la despejará en sus versiones de *Los Elementos*.

La edición de Ratdolt, además de ser la primera que aparece en imprenta, es posiblemente una de las más conocidas. Sin embargo, por su procedencia arábigo-latina, su fiabilidad respecto a la tradición euclídea fue puesta en entredicho por las traducciones latinas de Zamberti y Commandino.

LA PRIMERA EDICIÓN IMPRESA DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES


¶ Alia est similis helmuaym que opposita latera habet equalia atq; oppositos angulos equales: idē tamen nec rectis angulis nec equis lateribus cōtinet: Preter has autē oēs quadrilatere figure helmua/riphe nominantur. ¶ Equidistantes linee sunt que in eadem superfi/cie collocate atq; in alterutram partem ꝓtracte non conueniunt etiā si in infinitum protrahantur.

Petitiones sunt quinq;: ¶ A quolibet pūcto in quemlibet punctum rectā lineā ducere atq; lineā definitā in cōtinuū rectūq; quātūlibet protrahere. ¶ Super centrū quodli/bet quātumlibet occupando spacium circulū designare. ¶ Omnes rectos angulos sibiinuicem esse equales: ¶ Si linea recta sup duas lineas rectas ceciderit duoq; anguli ex vna par/te duob⁹ rectis angulis minores fuerint istas duas lineas in eādē ptē ꝓtractas ꝓculdubio ꝯiūctim ire. ¶ Duas lineas rectas supficiē nul/lam concludere.

Communes animi ꝯceptiones sunt hee: ¶ Que vni ⁊ eidē sunt equalia ⁊ sibiīuicē sunt equalia: ¶ Et si equalib⁹ equa lia addant tota quoq; fiēt equalia. ¶ Et si ab equalib⁹ eq lia auferant que relinquūt erūt equalia. ¶ Et si ab ineqli bus equalia demas q̄ relinquūt erūt ineqlia. ¶ Et si ineq/libus equalia addas ipsa quoq; fiēt inequalia. ¶ Si fuerint due res vni equales ipse sibiīuicem erūt equales. ¶ Si fuerint due res quax vtraq; vni⁹ eiusdē fuerit dimidiū vtraq; erit equalis alteri. ¶ Si ali/qua res alicui superponat applicet q; ei nec excedat altera alterā: ille sibiīuicē erunt eqles. ¶ Omne totum ē maius sua pte.

Sciendū est aūt ꝙ preter has animi cōceptiōes: siue cōes scias mul/tas alias que numero sunt incōprehensibiles pretermisit Euclides: quarū hec est vna. ¶ Si due quantitates equales ad quālibet tertiā eiusdem generis cōparentur simul erunt ambe illa tertia aut eque maiores: aut eque minores: aut simul equales. ¶ Itē alia Quanta est aliqua quantitas ad quālibet aliam eiusdē generis tantā esse quālibet tertiā ad aliquam quartā eiusdem generis in quantitatib⁹ continuis: hoc vniuersaliter ve/rum est siue antecedentes maiores fuerint consequentibus siue minores. magnitu do enim decrescit in infinitū. in numeris aūt non sic: sed si fuerit primus submul/tiplex secundi: erit quilibet tertius eque submultiplex alicui⁹ quarti: quoniā nume rus crescit in infinitū: sicut magnitudo in in finitum minuitur.

Propositio prima.

Triangulum equilaterum supra datam lineam rectam col locare.

¶ Esto data linea recta. a. b. volo super ipsam triangulū equilaterū cōstituere super alterā eius extremitatē. f. in puncto a. ponam pedē circini immobilem: ⁊ alterū pedem mobilem extendam vsq; ad. b. ⁊ describā ſm quantitatem ipsius linee date per secūdam petitionē circulū. c. b. d. f.

Página que contiene los Postulados, las Nociones Comunes y la primera Proposición (Folio 4 recto), en la edición de Ratdolt de *Los Elementos* de Euclides (Venecia, 1482). Ejemplar de la Biblioteca del Monasterio de San Millán de Yuso.

EUCLIDES ESCRITOR DE LIBROS DE GEOMETRÍA

Euclides y la Geometría.
Fragmento del códice de Nicolo da Bologna *Las Virtudes y las Artes* de 1355.
Biblioteca Ambrosiana de Milan.

En *El Comentario al Libro I de los Elementos de Euclides*, Proclo nos informa de otros escritos de Euclides aparte de *Los Elementos*:

> **«[...] *Le debemos* [además de *Los Elementos*] *otras muchas obras de Matemáticas, escritas con singular exactitud y llenas de ciencia teórica. Tales son sus Ópticas, sus Catóptricas, sus Elementos de Música y también su libro Sobre las Divisiones.*»**

Proclo no menciona otras obras importantes de Euclides sobre Geometría, Astronomía y Mecánica, aunque llegó a escribir unos doce tratados dedicados posiblemente a la Enseñanza de las Matemáticas en Alejandría, lo que permite asegurar que Euclides era un brillante científico con excelentes dotes pedagógicas.

Entre las otras obras escritas por Euclides cabe citar los *Porismas* (obra perdida), que sería una aproximación a una especie de Geometría Analítica y funciones, en la que, según Pappus se estudiaría algo intermedio entre un teorema, en que se propone algo para ser demostrado y un problema, en que se propone algo para ser construido. Según otros comentadores un *Porisma* sería una proposición en la que se determina una relación entre cantidades conocidas y variables, es decir algo parecido a una función.

Otras obras perdidas serían:

- ***Lugares de Superficie*, *Lugares Sólidos* (que era el nombre griego para las Cónicas de Menecmo, ampliado de forma muy considerable su estudio por las obras de Apolonio).**
- ***Pseudaria* (sobre argumentaciones falaces en Matemáticas, destinado a enseñar la forma de evitar los paralogismos).**
- ***Fenómenos* (sobre Geometría esférica para uso de astrónomos).**

Otra obra muy importante de Euclides es los *Datos* que nos ha llegado a través de Pappus. Este tratado habría sido escrito por Euclides para complementar *Los Elementos*, como guía analítica de los problemas de Geometría para descubrir los resultados –lo que puede ser determinado, en una figura plana, cuando se dan algunos datos–, es decir, en cierto modo, esta obra presenta la Geometría Plana de *Los Elementos* de Euclides pero dejando patente de forma heurística y genética el camino que sigue la investigación matemática.

Otro tratado interesante es *La sección del Canon* que contiene la teoría aritmética de los intervalos musicales de tradición pitagórica.

Euclides también pudo ser el autor de algunos de los llamados *Hipomnemata*, una especie de cuadernos sueltos que reproducían las conferencias orales con las lecciones que se impartían en Alejandría.

Las Proposiciones

En *Los Elementos* de Euclides las proposiciones son los enunciados que se demuestran a partir de las proposiciones anteriores y las asunciones aceptadas en Postulados y Nociones Comunes. En sus demostraciones, Euclides justifica todos los pasos que da, pero no suele mencionar de forma exhaustiva todos los resultados anteriores que aplica, en particular, a partir del Libro I, no se alude a los Postulados y Nociones Comunes como justificación, ya que se suponen conocidos de forma de forma implícita. No obstante, al considerar las referencias –explícitas e implícitas– vemos que *Los Elementos* de Euclides constituyen una complejo y tupido entramado lógico–matemático donde no sobra nada y donde cualquier añadido u omisión cambiaría la estructura global de la magna obra euclidiana.

Hay dos tipos de proposiciones:

- Teoremas: enuncian propiedades de los entes matemáticos.
- Problemas: explican cómo se construyen los objetos matemáticos.

A veces, en algunas ediciones de *Los Elementos* de Euclides, la diferencia entre Teoremas y Problemas se advierte d forma exclusiva por el hecho de que los Teoremas acaban con la frase: «*como queríamos demostrar*», mientras que los problemas terminan con la expresión: «*como queríamos* hacer».

En sus *Comentarios al Libro I de los Elementos de Euclides*, Proclo dedica una larga digresión a la distinción entre Teoremas y problemas en *Los Elementos* de Euclides. Veamos algunas de sus frases:

> «*Las cosas que se derivan de los principios se dividen, a su vez, en problemas y teoremas. Los primeros se ocupan de la generación de las figuras y de sus acciones, ablaciones, adjunciones, y, en general, de todas sus afecciones, mientras que los segundos estudian los casos particulares de cada figura*. [Algunos] *prefieren llamar problemas a todas las cosas porque creen que el nombre de teorema conviene más a las esencias contemplativas que se ocupan de las cosas eternas*. [Para muchos] *los problemas tienen un doble efecto: conseguir las cosas que se buscan, y una vez conseguidas, ver qué son, su naturaleza, sus propiedades y sus relaciones con otras cosas. Hay, pues, problemas y teoremas geométricos, y como la especulación predomina en la Geometría y las operaciones en la Mecánica, todos los problemas tiene una parte especulativa; pero la recíproca no es cierta porque las demostraciones son obra exclusiva de la especulación.*
>
> *Todo lo que en Geometría sigue a los principios se ha obtenido por medio de la demostración*, [...] *Los teoremas no exigen problemas, pero los hay que tienen por sí mismos la demostración de la cosa que se busca.* [...]. *Inscribir un triángulo equilátero en un círculo* [Euclides IV.2] *es un problema porque también se puede Inscribir un triángulo no equilátero; construir un triángulo equilátero sobre una recta dada* [Euclides I.12] *es también un problema porque se puede construir un triángulo que no sea equilátero*; *pero cuando decimos que los ángulos en la base de un triángulo isósceles son iguales* [Euclides I.5], *enunciamos un teorema porque es imposible que dichos ángulos no sean iguales*; *y si pedimos inscribir un ángulo recto en un semicírculo, formulando la petición como problema, la consideración extraña a la Geometría porque todo ángulo inscrito en un semicírculo es recto* [Euclides III.31].
>
> *De aquí se deduce que las cuestiones generales deben llamarse teoremas y las particulares que no se refieren absolutamente a lo que se propone, problemas,* [...] diferencia que se observa en cada proposición [...] *y en el hecho de que el propio Euclides agrega la frase: "lo que queríamos hacer" al final de las cosas buscadas y "lo que queríamos demostrar" que caracteriza a los teoremas*

De las 465 proposiciones de *Los Elementos* de Euclides son problemas 93; y se reparten más o menos por igual en los trece libros, salvo en el Libro IV, que sólo contiene problemas y los Libros V y IX que sólo tiene teoremas.

En el cuadro siguiente se describe de forma muy sucinta el contenido temático de cada uno de los trece libros, con la correspondiente presumible atribución a algunos de los matemáticos anteriores a Euclides. A continuación, se relacionan las Proposiciones de *Los Elementos* de Euclides, que tengan alguna incidencia sobre la Matemática escolar.

RESUMEN DE LOS RESULTADOS MATEMÁTICOS MÁS IMPORTANTES DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES

I. Pitágoras. 48 Proposiciones. Construcciones elementales con regla y compás. Congruencias de triángulos y cuadriláteros. Desigualdades relativas a ángulos y lados de un triángulo. Paralelismo –con el resultado fundamental de que los ángulos de un triángulo suman dos rectos, I.32–. Teorema de Pitágoras y su recíproco (I.47, I.48).

II. Pitágoras. 14 Proposiciones. Equivalencias geométricas de varias identidades algebraicas elementales (II.1–II.10). Resolución de ecuaciones mediante la Aplicación de las Áreas del Álgebra Geométrica (II.5, II.6). Sección áurea (II.11). Generalización del Teorema de Pitágoras (II.12, II.13), conocida como Teorema del coseno. Cuadrado equivalente a una figura rectilínea (II.14).

III. Pitágoras, Hipócrates. 37 Proposiciones. Geometría del círculo: cuerdas, tangentes, secantes, ángulos centrales y ángulos inscritos. Teorema de Tales del semicírculo (III.31). Potencia de un punto respecto de una circunferencia (III.35–III.37).

IV. Pitágoras, Hipócrates. 16 Proposiciones. Construcciones con regla y compás de polígonos regulares de 3, 4, 5, 6 y 15 lados inscritos y/o circunscritos en círculos.

V. Eudoxo. 25 Proposiciones. Teoría de la Proporción. Resolución de la crisis de los inconmensurables.

VI. Eudoxo. 33 Proposiciones. Reconstrucción de Eudoxo de los teoremas pitagóricos sobre proporciones. Teoremas fundamentales sobre semejanza de triángulos y otras figuras. Teorema de la bisectriz (VI.2). Teorema de Tales (VI.2). Teorema del cateto y de la altura (VI.8). Construcciones de la tercera, la cuarta y la media proporcional (VI.11, VI.12 y VI.13). Generalización de la Aplicación de las áreas y solución geométrica de las ecuaciones cuadráticas. Sección áurea (VI.30). Generalización del Teorema de Pitágoras (VI.31).

VII, VIII, IX. Pitágoras, Euclides. 102 Proposiciones. Teoría elemental de Números. Divisibilidad de números enteros: números primos, Algoritmo de Euclides para el cálculo del m.c.d (VII.1, VII.2), Teorema de Euclides (VII.30), relación mcd-mcm (VII.34), Teorema fundamental de la Aritmética (IX.14), Teorema de la infinitud de números primos (IX.20). Suma de términos de una progresión geométrica (IX.35). Números perfectos (IX.36).

X. Eudoxo, Teeteto. 115 Proposiciones. *Principio de Eudoxo* (Método de exhaución, X.1). Clasificación de inconmensurables cuadráticos.

XI. Eudoxo. 39 Proposiciones. Geometría del espacio: paralelismo y perpendicularidad, ángulos sólidos, paralelepípedos semejantes.

XII. Demócrito, Eudoxo. 18 Proposiciones. Método de exhaución de Eudoxo aplicado a la cubatura de pirámides, cilindros y conos.

XIII. Pitágoras. Teeteto. 18 Proposiciones. Las diagonales de un pentágono se cortan en sección Áurea (XIII.8). Propiedades relativas del pentágono, hexágono y decágono inscritos en una circulo. Inscripción de los cinco poliedros regulares en una esfera (XIII.13–XIII.17). Teorema de clasificación de los poliedros (XIII.18).

El Libro I

El Libro I de *Los Elementos* de Euclides, como es natural, es la parte de la obra más conocida y mejor estudiada. El Libro I empieza con la construcción del triángulo equilátero y termina con el Teorema del cuadrado de la hipotenusa, resultados pitagóricos que como todos los demás que contiene son bien conocidos para un estudiante de Enseñanza Secundaria:

- Teoremas sobre congruencias de triángulos (los cuatro patrones de congruencia lado-ángulo-lado, lado-lado-lado, ángulo-lado-ángulo y ángulo-ángulo-lado).
- Resultados sobre triángulos isósceles.
- Construcciones elementales con regla y compás (triángulo equilátero, trasferencia de longitudes, bisectriz de un ángulo, bisección de un segmento, trazado de perpendiculares).
- Estudio de ángulos (adyacentes, externos e internos de un triángulo, opuestos por el vértice, alternos e internos, correspondientes, suma de los ángulos de un triángulo).
- Igualdades y desigualdades relativas a ángulos y lados de un triángulo.
- Teoremas sobre paralelismo de rectas.
- Relaciones entre triángulos y paralelogramos y sus áreas.

Como ya se ha indicado Euclides difiere todo lo que puede la cuestión de las paralelas, por eso los resultados sobre paralelogramos aparecen bastante al final del Libro. Entre ellos debemos mencionar la proposición I.45 donde se construye un paralelogramo equivalente a una figura rectilínea dada, uno de los primeros problemas de transformación de un área en otra, Teoría llamada *Aplicación de las Áreas* (problemas a los que Euclides dedicará el segundo Libro), que Eudemo (según Proclo) atribuía a los pitagóricos y en la que se basaría la cuadratura de figuras poligonales.

Un aspecto muy interesante del Libro I es que en él Euclides realiza, cuando puede, una inversión de inferencias, es decir, estudia cuándo el resultado de un teorema se puede invertir, obteniendo el teorema inverso, así lo hace en las proposiciones 5-6, 13-14, 18-19, 24-25, 27-29, 47-48.

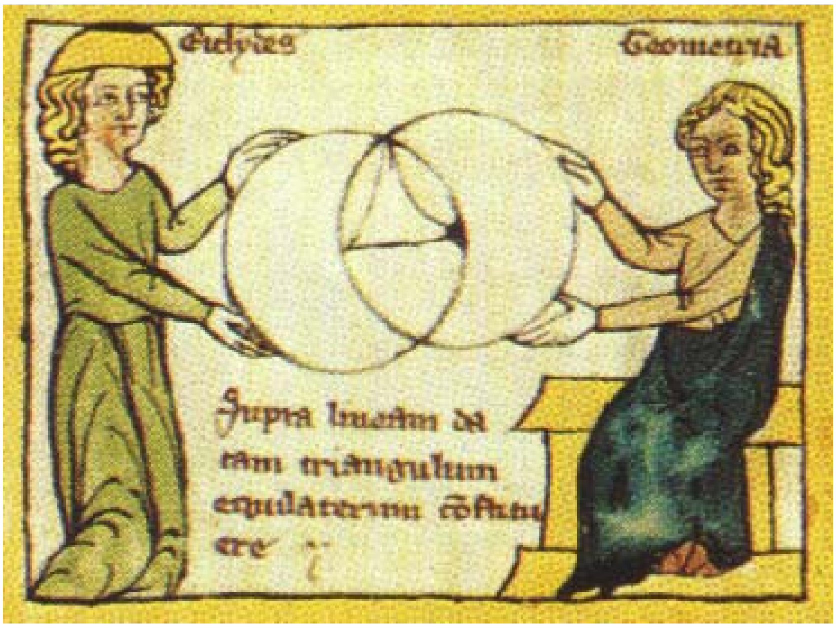
Alguna de las proposiciones adolece de cierta insuficiencia, y se echa de menos algún que otro postulado, de modo que hay una justificación visual de tipo ilustrativo, lo que contraviene el propio deseo de Euclides de desterrar de su Geometría las demostraciones gráficas, al basar el argumento exclusivamente en la lógica y derivar todo resultado de los postulados y axiomas. Como contrapunto, en otras ocasiones, Euclides demuestra con una soberbia lógica impecable, algunas verdades que por ser tan evidentes a los sentidos, alguien estaría tentado de incluirlas en los postulados; por ejemplo la Proposición I.20: «*cada lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos*» llamada «*desigualdad triangular», equivalente* a que «*la línea recta es la distancia más corta entre dos puntos*». En esta ocasión, Euclides también evitó suponer lo que podía deducir.

En el texto de Euclides aparece a partir de la Proposición I.35 cierta ambigüedad entre igualdad de área y congruencia, que evitaremos indicando por *equivalentes* las figuras que tienen el mismo área aunque no necesariamente la misma forma.

Termina el primer Libro con uno de los más fascinantes e importantes teoremas de la Geometría elemental: El *Teorema de Pitágoras* –la Proposición I.47–, donde alcanza un verdadero clímax geométrico la hermosísima forma magistral con que Euclides realiza la hazaña geométrica de demostrar el Teorema, con una lógica impecable y una economía de medios increíble. Además, Euclides da una magnífica demostración del teorema inverso –la Proposición I.48–, de modo que ambas proposiciones caracterizan a los triángulos rectángulos.

Las Proposiciones del Libro I:

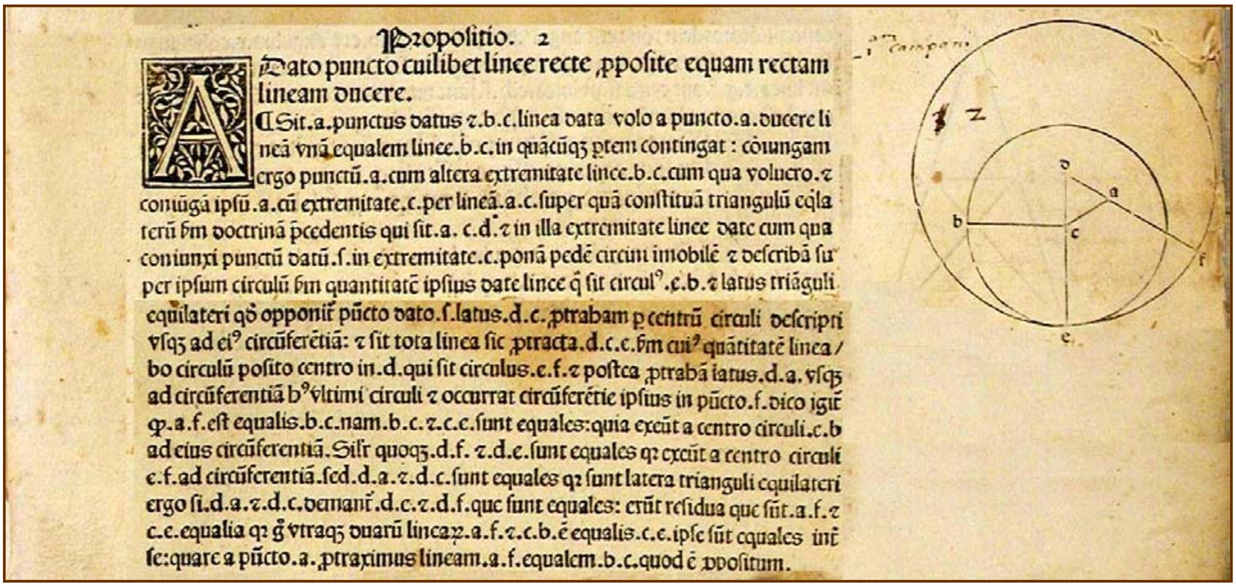
- Proposición I.1. Construir un triángulo equilátero sobre un segmento dado.
- Proposición I.2. Construir en un punto dado un segmento igual a otro dado.
- Proposición I.3. Dados dos segmentos desiguales, restar del mayor otro segmento igual al menor.



Euclides y la Geometría representados sosteniendo la figura de la Proposición I de *Los Elementos*. Pertenece a una colección de telas que representan a las siete *Arte Liberales* del currículum medieval.

En esta primera Proposición, Euclides indica cómo se construye un triángulo equilátero. Mediante este problema se demuestra que los triángulos equiláteros existen. Euclides había introducido la noción de triángulo equilátero en la Definición I.20. Vemos, pues, desde el mismo comienzo de *Los Elementos*, que Euclides tiene muy claro que la definición de un objeto matemático no implica su existencia. Además en la Proposición I Euclides halla una construcción necesaria para demostrar la Proposición II, en la que enseña como se trasladan segmentos. Ya que para añadir, quitar o comparar segmentos se precisa colocarlos juntos, la Proposición II es capital para el curso posterior del texto euclidiano.

En las construcciones de las dos primeras proposiciones de *Los Elementos*, Euclides supone que existen puntos de corte entre rectas y circunferencias, sin que la continuidad de la recta se haya postulado explícitamente con anterioridad. Los críticos han querido ver en esta situación uno de los punto débiles de la obra de Euclides.



Propositio. 2

A Dato puncto cuilibet linee recte pposite equam rectam lineam ducere.

Sit.a.punctus datus z.b.c.linea data volo a puncto.a.ducere lineã vnã equalem linee.b.c.in quãcũq3 ptem contingat: cõiungam ergo punctũ.a.cum altera extremitate linee.b.c.cum qua voluero.z coniũgã ipsũ.a.cũ extremitate.c.per lineã.a.c.super quã constituã triangulũ eqlaterũ bm doctrinã pcedentis qui sit.a.c.d.z in illa extremitate linee date cum qua coniunxi punctũ datũ.f.in extremitate.c.ponã pedẽ circini imobilẽ z describã super ipsum circulũ bm quantitatẽ ipsius date linee q̃ sit circul⁹.e.b.z latus triãguli equilateri qd opponit pũcto dato.f.latus.d.c.ptrabam p centrũ circuli descripti vsq3 ad ei⁹ circũferẽtiã: z sit tota linea sic ptracta.d.c.e.bm cui⁹ quãtitatẽ lineabo circulũ posito centro in.d.qui sit circulus.e.f.z postea ptrabã latus.d.a.vsq3 ad circũferentiã b⁹ vltimi circuli z occurrat circũferẽtie ipsius in pũcto.f.dico igit q.a.f.est equalis.b.c.nam.b.c.z.c.e.sunt equales:quia exeũt a centro circuli.c.b ad eius circũferentiã.Silr quoq3.d.f.z.d.e.sunt equales q2 exeũt a centro circuli e.f.ad circũferentiã.sed.d.a.z.d.c.sunt equales q2 sunt latera trianguli equilateri ergo si.d.a.z.d.c.demant.d.c.z.d.f.que sunt equales: erũt residua que sũt.a.f.z c.e.equalia q2 g vtraq3 duarũ linearũ.a.f.z.c.b.ẽ equalis.c.e.ipse sũt equales int se:quare a pũcto.a.ptraximus lineam.a.f.equalem.b.c.quod ẽ ppositum.

La Proposición I.2 de *Los Elementos* de Euclides en la edición de E.Ratdolt (Venecia, 1482). Ejemplar de la Biblioteca del Monasterio de San Millán de Yuso

LA PRIMERA PROPOSICIÓN DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES ENLA PRIMERA EDICIÓN ESPAÑOLA

LIBRO PRIMERO DE

LOS ELEMENTOS

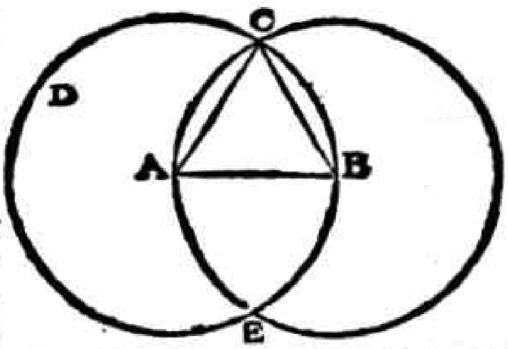
GEOMETRICOS DE EVCLIDES

philoſopho Megarenſe.

Problema primero, propoſition primera,

Sobre vna linea recta dada terminada hazer vn triangulo equilatero.

Sea la linea recta dada terminada. A B. cõuiene deſcreuir ſobre A B. vn triãgulo equi latero. Sobre el cẽtro. A. y ſegũ el eſpacio. A. B. deſcri baſe el circulo. B. C. D. (por la tercera petitiõ) Y tambiẽ (por la miſma) ſobre el centro. B. y eñl eſpacio. B A. del criuaſe el otro circulo. A. C. E. Y (por la primera peticiõ)

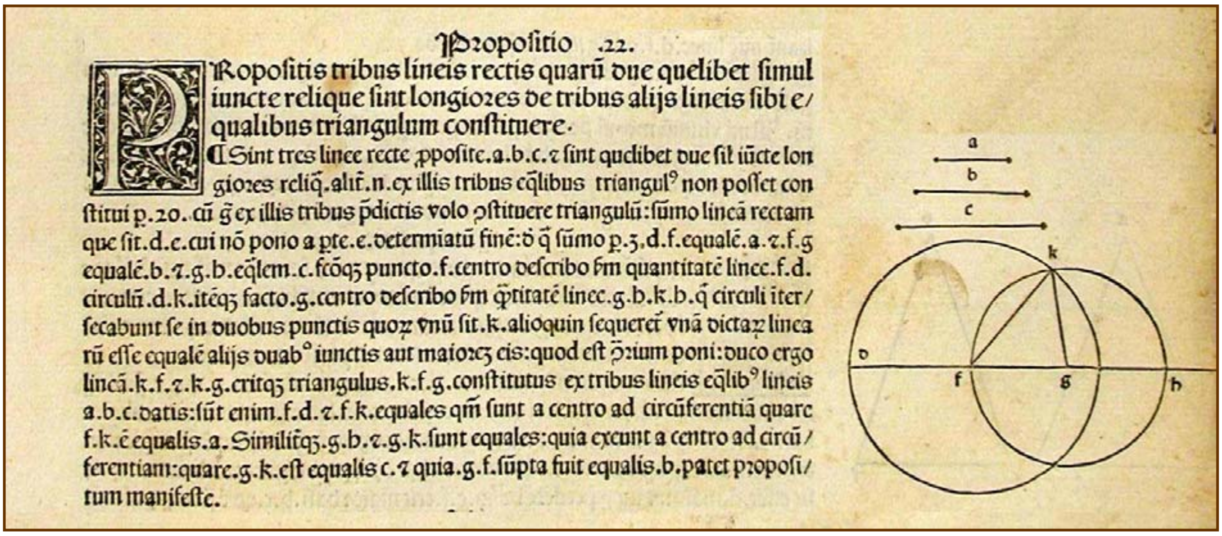


deſde el puncto. C. donde los circulos ſe cortan, tirenſe las lineas rectas, C A, C B. aſta los punctos. A. B. Y porque el puncto. A. es centro del circulo. C. B. D. ſera ygual la linea. A. C. a la linea. A. B. (por la decima quinta definitiõ) Itẽ porque el punto. B. es centro del circulo. C A E. ſera ygual la linea. B C a la linea. A B. luego ambas. C A. y la. C B. ſon Yguales a la linea. A. B. Y las coſas que a vna ſon Yguales, ẽtre ſi ſon yguales (por la primera comun ſentencia) luego la linea. A C. es ygual a la linea. C B. luego las tres lineas C A. A B. B C. ſon yguales entre ſi. Sera pues equilatero el triangulo. A B C. y fabricado ſobre la linea recta dada terminada. A B. lo qual conuino hazerſe.

La Proposición I de *Los Elementos* de Euclides– en la edición de Rodrigo Çamorano, primera en idioma castellano, Sevilla, 1576.

Proposición I.4. Si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales a dos lados del otro e iguales los ángulos comprendidos por los lados iguales, tendrán iguales sus bases y los dos triángulos serán iguales.

- Proposición I.5. En los triángulos isósceles, los ángulos en la base son iguales entre sí [este teorema se conocía en la Edad Media con el nombre latino de *Pons asinorum*, ya que la figura de Euclides simula vagamente un puente, que metafóricamente las personas con limitadas dotes para el argumento lógico, no podían atravesar].
- Proposición I.6. Si dos ángulos de un triángulo son iguales, los lados opuestos a estos ángulos también serán iguales.
- Proposición I.8. Si dos triángulos tiene dos lados del uno iguales a los lados del otro e iguales las bases, tendrán iguales los ángulos comprendidos por los lados iguales.
- Proposición I.9. Dividir en dos un ángulo rectilíneo dado.
- Proposición I.10. Dividir un segmento en dos partes iguales.
- Proposición I.11. Desde un punto dado en una recta, trazar una recta que forme ángulos rectos.
- Proposición I.12. Dada una recta indefinida, trazar desde un punto que no esté sobre ella una recta perpendicular.
- Proposición I.13. Si una recta levantada sobre otra forma ángulos, serán rectos o igual a dos rectos.
- Proposición I.14. Si respecto de una recta cualquiera y en un punto de ella, dos rectas no situadas en el mismo lado de ella, forman ángulos contiguos iguales a dos rectos, las dos rectas están sobre la misma recta.
- Proposición I.15. Si dos rectas se cortan, forman ángulos opuestos por el vértice iguales.
- Proposición I.16. Si se prolonga uno de los lados de un triángulo, el ángulo externo es mayor que cada uno de los ángulos internos y opuestos.
- Proposición I.17. Dos ángulos de un triángulo son menores que dos rectos.
- Proposición I.18. En todo triángulo el lado mayor subtiende el ángulo mayor.
- Proposición I.19. En todo triángulo el ángulo mayor subtiende el lado mayor.
- Proposición I.20. En todo triángulo dos lados cualesquiera en conjunto, son mayores que el otro lado [desigualdad triangular].
- Proposición I.22. Construir un triángulo con tres segmentos iguales a otros tres dados. Pero es necesario que dos de ellos tomados juntos de cualquier manera sean mayores que el restante [primer *diorismo* en el contexto de un problema de *Los Elementos*].



Propositio .22.

Propositis tribus lineis rectis quarũ due quelibet simul iuncte relique sint longiores de tribus alijs lineis sibi e/qualibus triangulum constituere.

Sint tres linee recte pposite.a.b.c.z sint quelibet due sil iũcte longiores reliq.alit.n.ex illis tribus eqlibus triangul⁹ non posset constitui p.20.cũ g ex illis tribus pdictis volo ɔstituere triangulũ:sumo lineã rectam que sit.d.e.cui nõ pono a pte.e.determiatũ finẽ:d q sumo p.3.d.f.equalẽ.a.z.f.g equalẽ.b.z.g.h.eqlem.c.fcõqz puncto.f.centro describo fm quantitatẽ linee.f.d.circulũ.d.k.iteqz facto.g.centro describo fm qtitatẽ linee.g.h.k.h.q circuli iter/secabunt se in duobus punctis quoz vnũ sit.k.alioquin sequeret vnã dictaz linearũ esse equalẽ alijs duab⁹ iunctis aut maiorez eis:quod est ɔtrium poni:duco ergo lineã.k.f.z.k.g.eritqz triangulus.k.f.g.constitutus ex tribus lineis eqlib⁹ lineis a.b.c.datis:sũt enim.f.d.z.f.k.equales qm sunt a centro ad circũferentiã quare f.k.ẽ equalis.a.Similitqz.g.h.z.g.k.sunt equales:quia exeunt a centro ad circũ/ferentiam:quare.g.k.est equalis c.z quia.g.f.sũpta fuit equalis.b.patet proposi/tum manifeste.

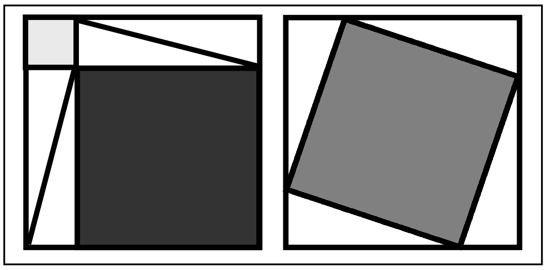
La Proposición I.22 de *Los Elementos* de Euclides en la edición de E.Ratdolt (Venecia, 1482).

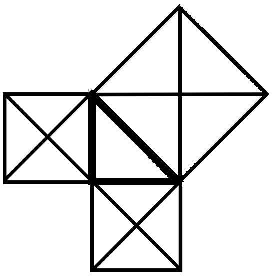
- Proposición I.26. Si dos triángulos tienen dos ángulos y un lado iguales, ya sea este lado el situado entre los ángulos iguales o el subtendido por uno de los ángulos iguales, tendrán iguales los otros dos lados y el tercer ángulo.
- Proposición I.27. Si una recta al incidir sobre otras dos, forma ángulos alternos iguales, dichas rectas serán paralelas.
- Proposición I.29. Una recta que incide sobre dos paralelas forma ángulos alternos iguales entre sí.
- Proposición I.31. Por un punto dado trazar una recta paralela a otra recta dada.
- Proposición I.32. Si se prolonga uno de los lados de un triángulo, el ángulo externo es igual a los dos internos y opuestos, juntos, y los tres ángulos internos del triángulo son iguales a dos rectos.
- Proposición I.33. Los segmentos que unen los extremos de segmentos iguales y paralelos en la misma dirección son también iguales y paralelos.
- Proposición I.34. Los lados y los ángulos opuestos de una región paralelográmica son iguales entre sí y la diagonal divide la región en dos partes iguales.
- Proposición I.35. Los paralelogramos que están sobre la misma base y entre las mismas paralelas, son equivalentes [tienen el mismo área aunque no necesariamente la misma forma].
- Proposición I.36. Los paralelogramos colocados sobre bases iguales y entre las mismas paralelas son equivalentes.
- Proposición I.38. Los triángulos colocados sobre bases iguales y entre las mismas paralelas son equivalentes.
- Proposición I.39. Triángulos equivalentes colocados sobre la misma base y del mismo lado, están entre las mismas paralelas.
- Proposición I.40. Triángulos equivalentes colocados sobre bases iguales y del mismo lado, están entre las mismas paralelas.
- Proposición I.41. Si un paralelogramo tiene la misma base que un triángulo y están colocados entre las mismas paralelas, el paralelogramo es doble que el triángulo [el área de un triángulo es la mitad del producto de su base por la altura].
- Proposición I.42.Construir en un ángulo rectilíneo dado un paralelogramo igual a un triángulo dado.
- Proposición I.43. En todo paralelogramo los complementos de los paralelogramos situados en torno a la diagonal son equivalentes.
- Proposición I.44. Aplicar a una recta dada en un ángulo rectilíneo dado, un paralelogramo equivalente a un triángulo dado.
- Proposición I.45. Construir en un ángulo rectilíneo dado un paralelogramo equivalente a una figura rectilínea dada.
- Proposición I.46. Trazar un cuadrado a partir de una recta dada.
- Proposición I.47. En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es equivalente a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto [*Teorema de Pitágoras*].
- Proposición I.48. Si en un triángulo el cuadrado construido sobre uno de los lados es equivalente a la suma de los cuadrados construidos sobre los restantes lados del triángulo, el ángulo comprendido por estos dos lados es recto [recíproco del *Teorema de Pitágoras*].

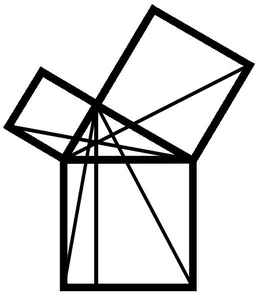
EL TEOREMA DE PITÁGORAS
PARADIGMA DE LA MATEMÁTICA
PARADIGMA DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

El *Teorema de Pitágoras* es tal vez la relación matemática más importante, más conocida, más admirada, más aludida, más popular, que más nombres y más pruebas ha recibido, y la que ocupa el primer plano en el recuerdo de los tiempos escolares. Todo ello hace justicia a su relevante valor práctico, teórico y didáctico. Al ser la fuente de todas las relaciones métricas que aparecen en la Geometría elemental, el *Teorema de Pitágoras* es el más útil y espléndido.

La magnífica grandeza del *Teorema de Pitágoras* inicia una decisiva inflexión intelectual entre la práctica empírica e inductiva y la argumentación deductivo-demostrativa, tanto en el devenir histórico cultural matemático –germen de la Matemática racional en Grecia– como en el espacio escolar de la Educación matemática –umbral de la Matemática deductiva elemental–.







He aquí lo que han escrito, en términos panegíricos, algunos grandes matemáticos sobre *Teorema de Pitágoras*:

> «*Este teorema con la multitud de demostraciones del mismo ilustra de forma sorprendente el hecho de que hay muchas formas de alcanzar la misma verdad.*»
> **E.S.Lomis. *The Pythagorean Proposition*. NCTM, 1968. p.3.**

> «*El Teorema de Pitágoras ha tenido ocupados a los matemáticos desde la época clásica hasta el presente.* [...] *Sus múltiples demostraciones ilustran la agilidad de los matemáticos al atacar el mismo problema desde ángulos diferentes.* [...] *Con independencia de la frecuencia con que se demuestre, el Teorema de Pitágoras logra siempre retener su belleza, su frescura y su eterno sentido de admiración.*»
> **W.Dunham. *El Universo de las Matemáticas*. Pirámide. Madrid, 1995. pp.136, 153.**

> «*La contestación más frecuente a la cuestión de lo que se recuerda de la Matemática escolar es el Teorema de Pitágoras.* [...] *Debemos considerar al Teorema de Pitágoras como un activo cultural de primer orden que pertenece a la base intelectual común de la humanidad.* [...] *En sentido cultural, Homero es a Grecia, lo que la Biblia es a la Edad Media, Shakespeare a Inglaterra* (*Goethe a Alemania y Cervantes a España*) *y lo que el Teorema de Pitágoras es a las Matemáticas, que es independiente de los lenguajes específicos y trasciende las fronteras culturales. Es con razón y con frecuencia un símbolo de todas las Matemáticas.*»
> **B.Artmann. *Euclid–The Creation of Mathematics*. Springer. N. York, 1996. pp.57–58.**

EL TEOREMA DE PITÁGORAS. LA DEMOSTRACIÓN Y EL MILAGRO GRIEGO EN MATEMÁTICAS

Sellos emitidos en Grecia el 20 de agosto de 1955 con ocasión de un Congreso sobre Pitágoras conmemorativo del 2500 aniversario de la fundación de la primera Escuela de Filosofía de la Historia. El primero representa al propio Pitágoras retratado en una moneda encontrada en Samos y el segundo es una imagen visual del Teorema de Pitágoras aplicado al sagrado *triángulo egipcio*.

En sus *Comentarios al Libro I de los Elementos de Euclides, Proclo* escribe sobre Pitágoras:

> «*Pitágoras transformó la doctrina de Tales en enseñanza liberal, examinó desde lo alto los principios de la Geometría, investigó los teoremas de un modo inmaterial e intelectual y descubrió la dificultad de los números irracionales y la construcción de las figuras cósmicas* [poliedros]».

Según Proclo, Pitágoras marca un hito en la historia de la Matemática, porque transformó el saber geométrico en disciplina puramente teórica, investigando los teoremas de manera inmaterial y abstracta, es decir sin instrumentos ni mediciones materiales, sin referencia a materiales concretos y sólo por medio de la intuición de ideas y del discurso mental, dando el gran salto cualitativo, que supone el verdadero nacimiento en Grecia de las Matemáticas como ciencia especulativa y deductiva, más allá de la práctica empírica e inductiva de las civilizaciones del próximo, medio y lejano oriente. Con Pitágoras podemos hablar del *Milagro griego en Matemáticas* como parte del milagro que supuso la inflexión radical que realizaron los griegos en el ámbito general de la Cultura y el Pensamiento.

En concreto respecto del Teorema atribuido por tradición a Pitágoras, digamos que éste realiza la primera demostración del mismo. Entre la ley general que establece el Teorema y los casos específicos de la Geometría babilónica, egipcia, hindú o china, hay el abismo que media entre un instrumento primitivo que no se pregunta cómo funciona y un mecanismo universalmente aplicable. El aporte esencialmente original es que el Teorema da una verdad general y universal independiente de los particulares valores de los lados del triángulo rectángulo.

He aquí, pues, en la demostración, la aportación fundamental del Pitagorismo a la Matemática, valorado siempre muy por encima de sus magníficas contribuciones particulares en ámbitos concretos de esta ciencia, siendo considerada, además, la demostración, como elemento esencial en el tránsito del mito al logos que tiene lugar en la cultura griega. La demostración va mucho más allá de la mera persuasión de la Retórica en la que los griegos eran grandes maestros, pues es posible con persuasión argüir lo falso contra lo verdadero –de ahí los reproches de Sócrates hacia los sofistas–. La demostración convence por la ilación argumental incontrovertible que alcanza algo legítimo mientras no se pongan en entredicho las leyes de la lógica. Por eso a partir de Pitágoras la Matemática es universalmente considerada como un manantial primario de verdad objetiva.

EL TEOREMA DE PITÁGORAS. LA DEMOSTRACIÓN Y EL MILAGRO GRIEGO EN MATEMÁTICAS

La Matemática conduciendo a Pitágoras. **Fragmento de la tabla de Da Ponte** ***Las Artes Liberales.*** **Museo del Prado. Madrid.**

La emergencia del *Teorema de Pitágoras* en el horizonte histórico cultural señala el primer salto intelectual entre los confines de la especulación empírica y los dominios del razonamiento deductivo. El *Teorema de Pitágoras* pudo estar en el origen de la demostración –que caracteriza a la Matemática con respecto a las demás ciencias– ya que la prueba pitagórica del *Teorema de Pitágoras* tal vez sea la primera demostración verdaderamente matemática de la Historia.

Sobre la importancia histórica del *Teorema de Pitágoras* como origen de la aparición del fenómeno de la demostración que en el mundo griego dará carta de naturaleza a la Geometría racional, y por ende al verdadero nacimiento en Grecia de las Matemáticas como ciencia especulativa y deductiva, transcribimos unas significativas citas de dos importantes historiadores de la Matemática:

Abel Rey (*El apogeo de la ciencia técnica griega,* UTEHA, México, 1962. Vol.1. pp.11, 13):

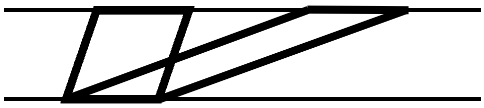
> ***«La demostración guió a los pitagóricos. Desde entonces el método y la actitud del pensamiento son búsqueda de lo necesario y de lo universal, y el Teorema de Pitágoras, en primer lugar, sirve en esto de completa ilustración.»***
>
> ***«La universalidad del teorema de Pitágoras y la invención de la demostración geométrica son las hadas que vemos en torno a la cuna de la Geometría griega, del milagro griego en matemática y del espíritu científico que ha llegado hasta nosotros.»***

H.G.Zeuthen. (*Théorème de Pythagore, origine de la Géométrie scientifique*, II Congreso internacional de Ginebra, 1904):

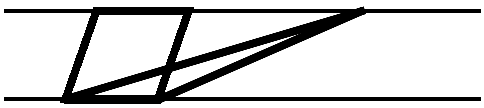
> ***«El Teorema de Pitágoras constituyó el origen de la Geometría racional en la Escuela Pitagórica y las deducciones que paulatinamente fue realizando la Escuela, tuvieron por objeto lograr una demostración general del teorema, advertida su verdad en casos particulares. »***

EL *TEOREMA DE PITÁGORAS*
EN *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES

Euclides enuncia y demuestra el Teorema de Pitágoras en la Proposición I.47 de *Los Elementos*. La demostración de Euclides del Teorema de Pitágoras es una prueba muy elegante, que la tradición se la ha atribuido y que precisa un bagaje considerable de conocimientos geométricos, desarrollados por Euclides en las proposiciones anteriores de *Los Elementos*. La diferencia con la prueba de Pitágoras estriba en que Euclides utiliza las relaciones entre paralelogramos y triángulos con la misma base y situados entre las mismas paralelas, en vez de proporciones que ya no podían ser utilizadas, en forma pitagórica, después del descubrimiento de las magnitudes inconmensurables.

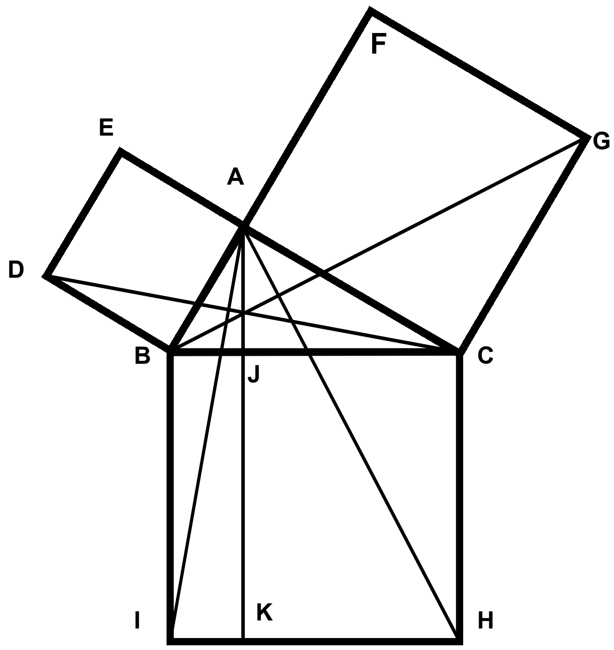


«*Los paralelogramos que tienen la misma base y están situados entre las mismas paralelas tiene el mismo área*» (*Euclides* I.36).



«*Si un paralelogramo tiene la misma base que un triángulo y están situados entre las mismas paralelas el área del paralelogramo es doble de la del triángulo*» (*Euclides* I.41).

Parece que Euclides está ansioso de situar lo más pronto posible el Teorema de Pitágoras en *Los Elementos*, ante la perentoria necesidad de utilizarlo ulteriormente con asiduidad, pero ante la imposibilidad de aplicar de forma tan temprana la *Teoría de la Proporción* de Eudoxo que será desarrollada en los Libros V y VI, basándose en las proposiciones descritas (I.36, I.41), realiza, con una estética inefable y con un ingenio sublime, la siguiente demostración:



- **Los triángulos DCB y ABI son iguales ya que AB=BD, BI=BC y el ángulo B del triángulo DCB es igual al ángulo B del triángulo ABI.**
- **El área del cuadrado ABDE es doble del área del triángulo DCB ya que tienen la misma base y están situados entre las mismas paralelas.**
- **El área del rectángulo BIKJ es doble del área del triángulo ABI ya que tienen la misma base y están situados entre las mismas paralelas.**

De modo que se verifica :

$\square BIKJ = 2\triangle ABI = 2\triangle DCB = \square ABDE$

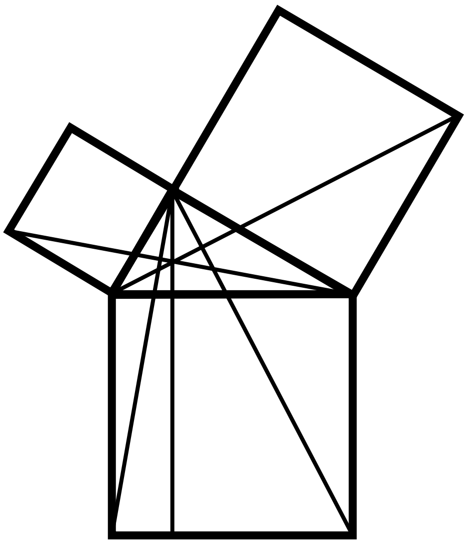
Razonando de forma análoga se tiene :

$\square CHKJ = 2\triangle AHC = 2\triangle BCG = \square ACGF$.

De donde resulta : $\square ABDE + \square ACGF =$

$\square BIKJ + \square CHKJ = \square BIHC$.

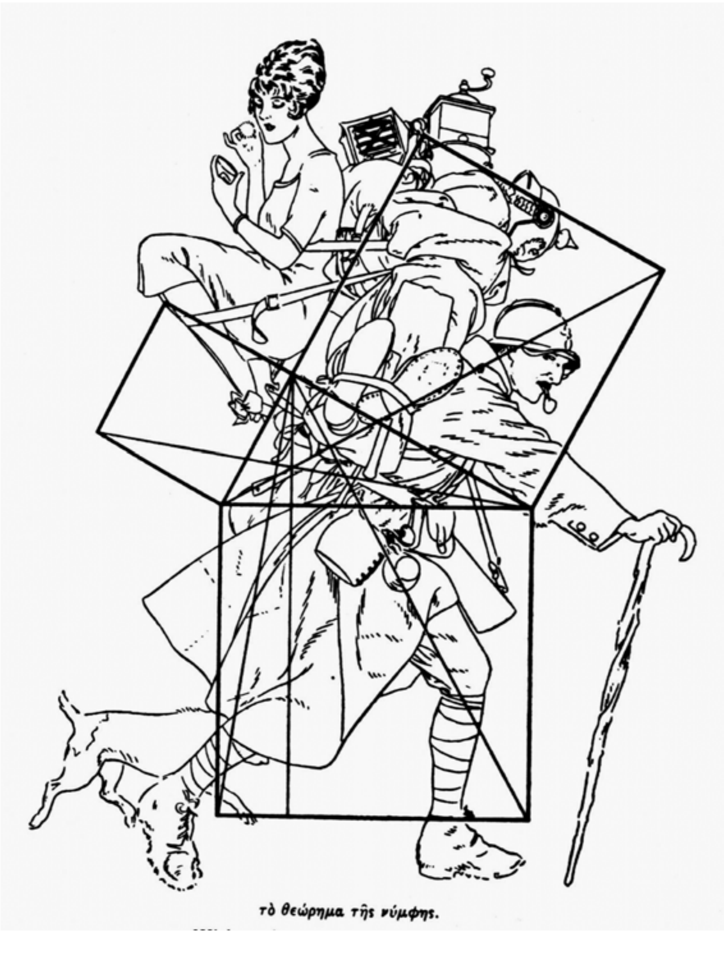
LA FIGURA EUCLÍDEA DE LA DEMOSTRACIÓN DEL *TEOREMA DE PITÁGORAS*



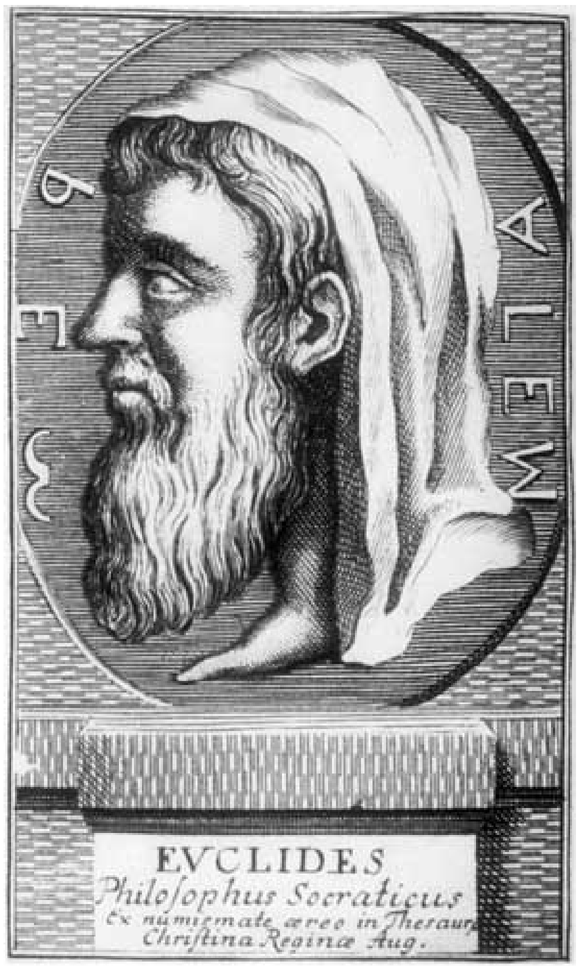
La demostración euclídea del *Teorema de Pitágoras* es de naturaleza estrictamente geométrica, y en ella juega un papel fundamental una figura que procede de una secuencia de construcciones que mediante ciertas congruencias de triángulos va transformando los cuadrados sobre los catetos en dos rectángulos que al encajarse componen el cuadrado sobre la hipotenusa

La figura que utiliza Euclides en su demostración del el Teorema de Pitágoras se ha hecho famosa también por la gran cantidad de calificaciones curiosas que se le han dado. E. Lucas en *Recréations mathématiques* dice que los árabes le llamaban «*silla de la novia*», porque se parece a la silla que en algunos países orientales llevaba un esclavo a la espalda para transportar a la novia hasta la ceremonia. También se ha llamado «*calesa de la mujer recién casada*» (Bhaskara), «*capucha de franciscano*», «*cola de pavo real*», «*figura del molino de viento*».

El filósofo Schopenhauer, que muy impresionado por el hecho del teorema, siempre se preguntó por la razón natural de la relación pitagórica, llamaba a la demostración de Euclides «*una prueba paseando en zancos*» y también «*prueba de la ratonera*».



Caricatura alegórica de la «*silla de la novia*» del Teorema de Pitágoras en *Los Elementos* de Euclides, en el contexto de la primera guerra mundial, que aparece en *The Mathematical Gazette* 11 (1922), pág.346.



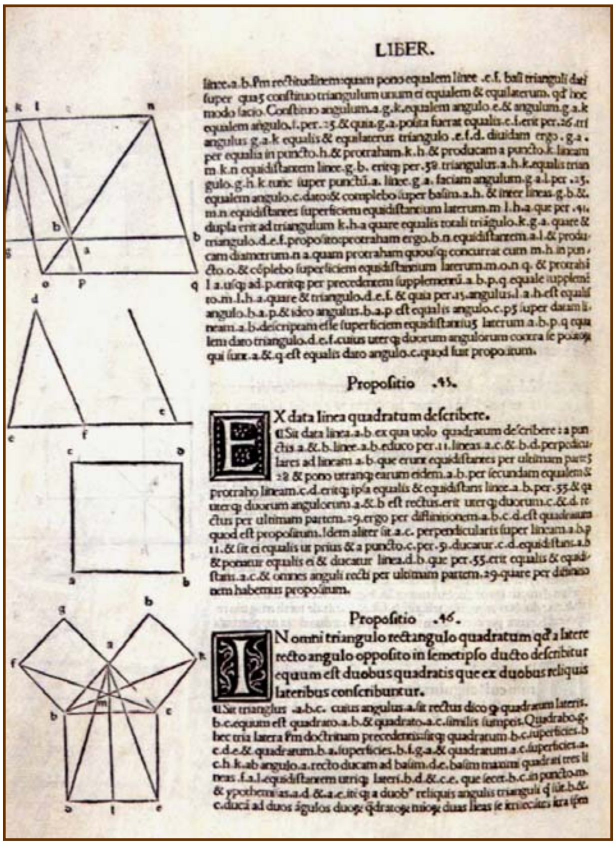
Retrato caricaturesco de Euclides. En el título se confunde, como es habitual, al autor de *Los Elementos* con el filósofo socrático Euclides de Megara.

EL *TEOREMA DE PITÁGORAS* EN ANTIGUAS EDICIONES
DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES

1. **La Proposición I.47 (*Teorema de Pitágoras*) en un manuscrito del siglo IX de la colección vaticana (*Vat. gr. 190, vol. 1 fol.. 39 recto math01 NS.01)*.**
2. **La Proposición I.47 (*Teorema de Pitágoras*) en la edición *Princeps* (Basilea, 1533).**
3. **La Proposición I.47 (*Teorema de Pitágoras*) en la primera impresión (edición de E.Ratdolt ,Venecia, 1482).**

D.Smith y F.Klein, grandes matemáticos, excelentes pedagogos, brillante historiador de la Matemática el primero y muy conocido en el segundo la aplicación del *Método genético* en la Educación matemática –que se sustenta en la Historia de las Matemáticas–, escriben sobre la prueba euclídea del *Teorema de Pitágoras*:

> **«*Cientos de pruebas ha sugerido la proposición pitagórica.* [...] *Una de las primeras es la de Los Elementos de Euclides que ha soportado la prueba del tiempo mejor que cualquier otra*».**
>
> **D.Smith. *History of Mathematics*. Dover. New York, 1958. Vol.2, p.289.**
>
> **«*En la demostración de Euclides* [del Teorema de Pitágoras] *están tan mezcladas de tal modo la intuición y la lógica, que cada paso lógico está evidenciado intuitivamente, lo cual puede muy bien considerarse como el ideal.***
>
> **F.Klein. Matemática elemental desde un punto de vista superior. Vol.2, Biblioteca matemática, Madrid, 1931, p. 319.**



LIBER.

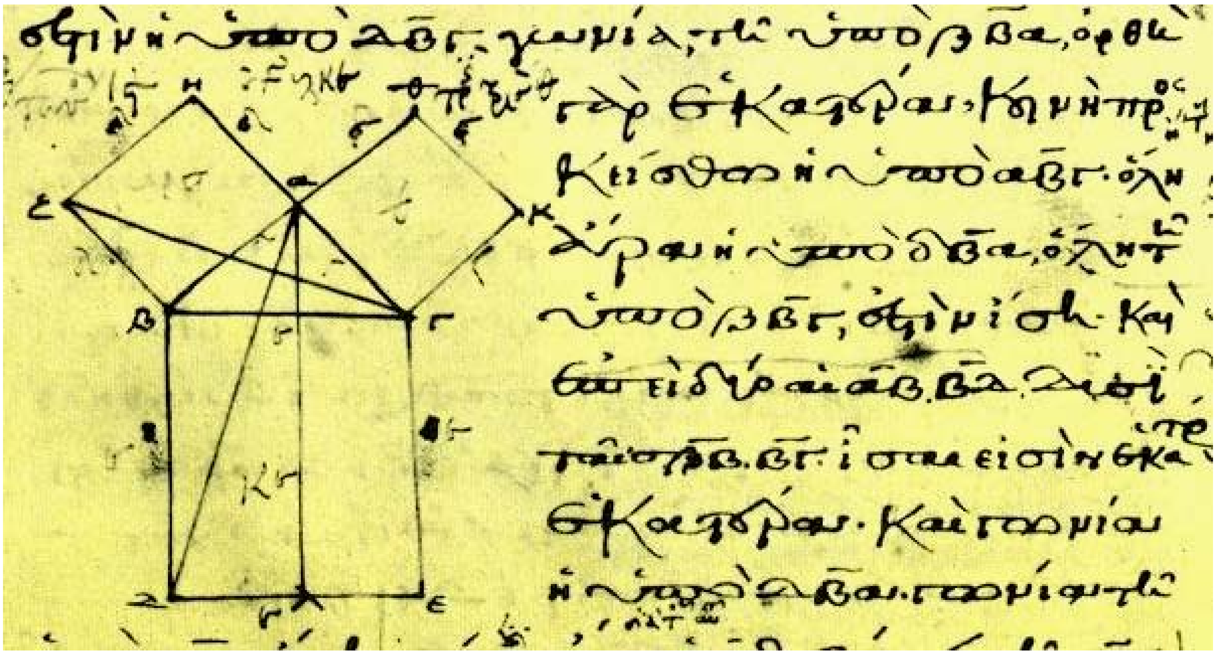
Propositio .45.

Ex data linea quadratum describere.

Propositio .46.

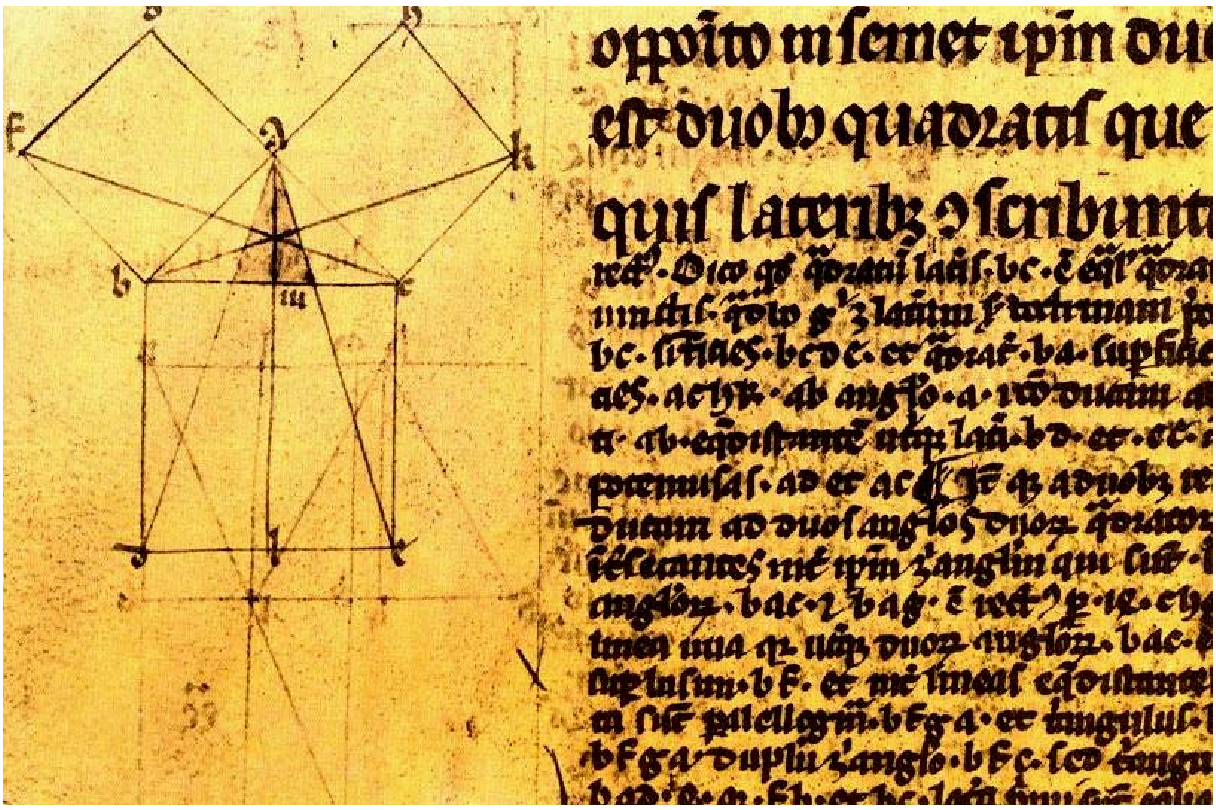
In omni triangulo rectangulo quadratum qd a latere recto angulo opposito in semetipso ducto describitur equum est duobus quadratis que ex duobus reliquis lateribus conscribuntur.

ILUSTRACIONES HISTÓRICAS DEL *TEOREMA DE PITÁGORAS* EN EUCLIDES

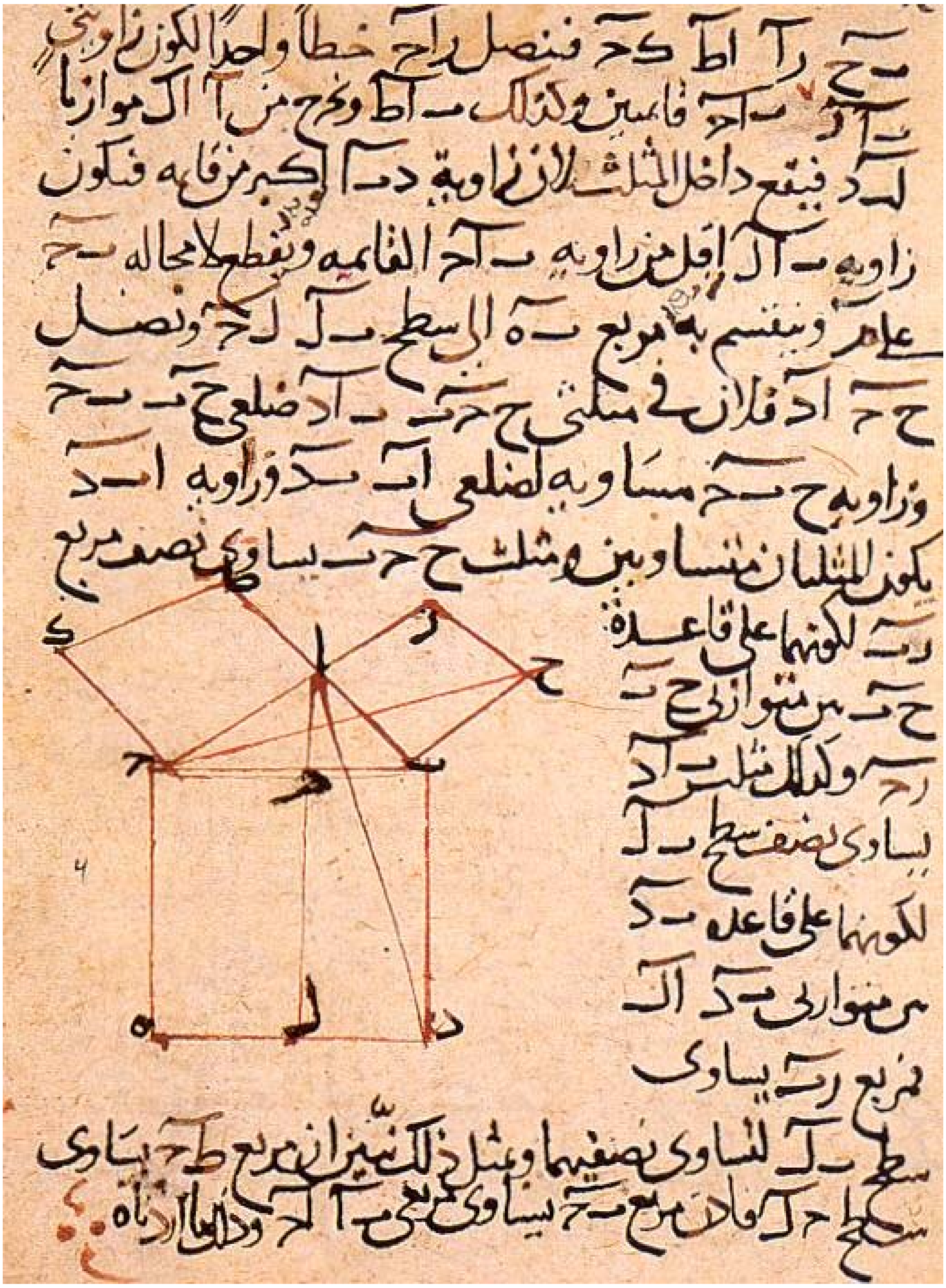


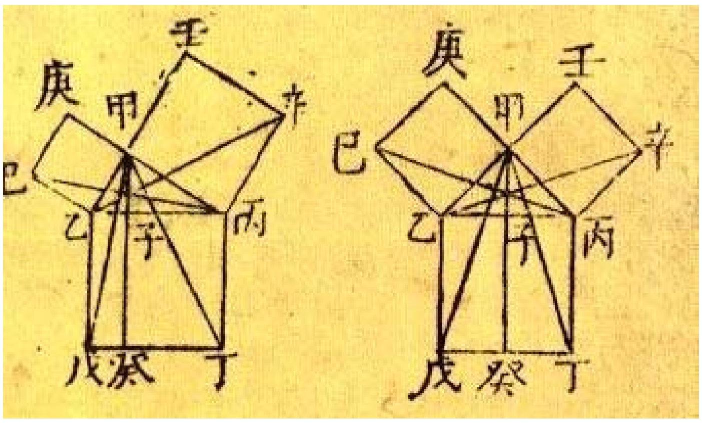
1. *El Teorema de Pitágoras* en griego. Manuscrito de *Los Elementos* de Euclides del siglo XII. Biblioteca Nacional de París.
2. *El Teorema de Pitágoras en latín. Traducción de Los Elementos de Euclides al latín de fecha incierta.*

Los Elementos de Euclides es, sin duda alguna, el libro científico más traducido y divulgado a lo largo de la Historia de la Cultura. *E*s el texto que más veces se ha editado, después de *La Biblia*, siendo, además, la obra más influyente de toda la literatura matemática.



ILUSTRACIONES HISTÓRICAS
DEL TEOREMA DE PITÁGORAS EN EUCLIDES





1. ***Teorema de Pitágoras* en árabe. Página de un Comentario de 1250 sobre Euclides.**
2. ***Teorema de Pitágoras* en chino. Manuscrito del siglo XVII.**

EL RECÍPROCO DEL *TEOREMA DE PITÁGORAS* PROPOSICIÓN I.47 DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES

La Proposición I.47 marca la cumbre del Libro I de *Los Elementos*, pero el ingenio de Euclides va todavía más allá demostrando el resultado inverso del Teorema de Pitágoras en la Proposición I.48 que es un increíble modelo de economía de recursos en Geometría :

> *«Si en un triángulo el cuadrado construido sobre uno de los lados es igual a la suma de los cuadrados construidos sobre los restantes lados del triángulo, el ángulo comprendido por estos dos lados es recto.»*

En la demostración Euclides traza un segmento AD=AB y perpendicular a AC.

De la hipótesis: $AB^2 + AC^2 = BC^2$,

y al ser rectángulo el triángulo ADC, resulta:

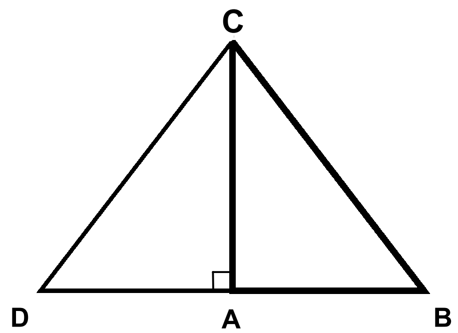
$AD^2 + AC^2 = DC^2$ (I.47, *Teorema de Pitágoras*).

Pero como AB=AD, será:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = AD^2 + AC^2 = DC^2$.

por tanto BC=DC; de manera que los triángulos DAC y CAB son congruentes, ya que al ser el lado AC común los dos triángulos tienen los tres lados iguales.

Por tanto el ángulo CAB que es igual al CAD (*Euclides* I.8), debe ser recto.



Dos notas son dignas de ser remarcadas sobre esta demostración: su concisión y el hecho de gran valor lógico-deductivo de que Euclides aplica el propio Teorema de Pitágoras para demostrar su recíproco.

Por desgracia esta sencilla demostración es obviada en los libros de texto aunque paradójicamente es utilizada implícitamente tanto como el propio Teorema de Pitágoras y ello desde los antiguos agrimensores egipcios. En efecto, es curioso que mientras cualquier persona se enfrenta al *Teorema de Pitágoras* en su etapa escolar, muy pocas personas conocen la demostración del teorema inverso, aunque están seguros de su legitimidad y de hecho lo aplican cuando es necesario.

Las dos proposiciones, I.47 y I.48 constituyen una unidad secuencial con la que se alcanza el esplendor geométrico en el Libro I de *Los Elementos*, ya que tomadas en conjunto caracterizan por completo los triángulos rectángulos, es decir:

> *«Un triángulo es rectángulo si y sólo si el cuadrado sobre la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados sobre los catetos».*

EL GRAN TEOREMA: EL *TEOREMA DE PITÁGORAS*

EN UN TEXTO DE W.DUNHAM

***Viaje a través de los genios*. Pirámide. Madrid, 1992.**

Cap. 2 (la demostración de Euclides del *Teorema de Pitágoras*), p.76-82.

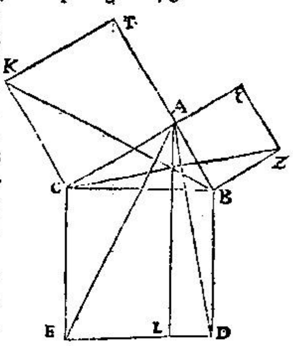
[...] Este hito histórico se conocía mucho antes de la época de Euclides, de manera que en absoluto lo descubrió él. Sin embargo merece que se reconozca su particular demostración, una prueba que muchos creen que es original de Euclides. Su belleza radica en la economía de sus presupuestos; después de todo Euclides disponía de sus postulados, sus nociones comunes y las primeras 46 proposiciones –una caja de herramientas más bien escasa– para, a partir de ellos montar una demostración. Considérense los temas de Geometría de los que aún no se había ocupado: los únicos cuadriláteros por él investigados eran los paralelogramos; los círculos en su práctica totalidad aún estaban inexplorados, y el tema extremadamente importante de la semejanza no se mencionaría hasta el Libro VI. Con toda seguridad es posible diseñar demostraciones breves del *Teorema de Pitágoras* utilizando triángulos semejantes, pero Euclides no quiso diferir la demostración de su importante proposición hasta el Libro VI. Claramente pretendía demostrar el *Teorema de Pitágoras* de la manera más rápida y directa posible y, en consecuencia, diseñó una demostración que se convertiría en la proposición 47 de *Los Elementos*. Desde esta perspectiva, se puede considerar que gran parten de lo que había precedido estaba apuntando al gran *Teorema de Pitágoras*, que sirve de adecuado clímax al Libro I

La Proposición I.47 marca la cima del Libro I, pero Euclides tenía un resultado final que demostrar, la inversa del *Teorema de Pitágoras*. En este caso el ingenio y la economía de medios son innegables. Por desgracia, esta demostración no es tan bien conocida como debiera serlo. De hecho, mientras la mayoría de los estudiantes se tropiezan con una demostración del *Teorema de Pitágoras* en algún momento de sus vidas, muy pocos ven una demostración de la inversa, o lo que es equivalente, están seguros de su validez.

LIBRO PRIMERO DE

¶En los triangulos rectangulos el quadrado que es hecho de el lado q̃ esta opuesto al angulo recto es ygual a los dos quadrados q̃ son hechos de los lados q̃ cõtienen el angulo recto,

Sea el triangulo rectãgulo. A B C. q̃ tenga recto el angulo B A C. digo que el quadrado q̃ es hecho del lado. BC. es ygual a los quadrados q̃ se hazen de B A. y de. A C. Describase, por la. 46. dela. B C. el quadrado. B D C E, y por la misma, de la B A. y dela, A C. los quadrados. A B Z I. A C K T. y por el pũto A. tirese. A L. parallela cõ la. B D. C E, por la proposiciõ. 31, y por la. 1. peticiõ tirese A D. C Z. y porq̃ los ãgulos. B A C. B A I son rectos. Luego tiradas dos lineas rectas. A C, A I. desde vna linea recta. A B. y desde vn pũcto en ella. A. no hacia vnas mismas ptes hacẽ de vna y otra pte ãgulos yguales a dos rectos, por la. 14. pposiciõ) luego ẽ derecho esta la. A C. d̃la. A I y por esto tãbiẽ BA esta ẽ derecho de. AT y por q̃ el angulo. D B C, es ygual al angulo. Z B A. porq̃ cada vno dellos es recto: põgase comũ el angulo A B C. Luego todo D B A es ygual a todo el angulo Z B C. y porq̃ las dos. A B. B D, son yguales a las dos B Z, B C. la vna a la otra, y el ãgulo. D B A es ygual al angulo. Z B C.



luego la basis, A D, por la. 4. pposiciõ, es ygual a la basis. Z C. y el triangulo. A B D. al triangulo. Z B C. es tãbien ygual. Y el parallelogramo. BL, por la. 41, es doblo del triangulo. A B D por

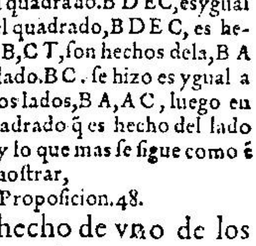
EVCLIDES. 34.

porq̃ tiene vna misma basis q̃ es. B D. y esta en vnas mismas parallelas, es a saber. D B. A L. y tãbiẽ el quadrado I B. por la misma, es doblo del triãgulo. Z B C. porq̃ tiene la misma basis q̃ es. B Z. y esta en vnas mismas parallelas, es a saber. Z B. I C. y las cosas q̃ son doblo de cosas yguales, por la. 6. comun sentẽcia, entre si son yguales, Luego el parallelogrãmo. B L. es ygual al quadrado. I B. Semejãtemente si, por la. 1. peticion, se tirã. A E. B K. se demostrara el parallelogrãmo. C L. ser ygual al quadrado, T C, Luego todo el quadrado. B D E C, es ygual a los dos quadrados, I B, T C, Y el quadrado, B D E C, es hecho de la, B C, y los quadrados, I B, C T, son hechos dela, B A A C, Luego el quadrado q̃ de el lado. B C. se hizo es ygual a los quadrados q̃ son hechos de los lados, B A, A C, luego en los triangulos rectangulos el quadrado q̃ es hecho del lado q̃ esta oppuesto al angulo recto y lo que mas se sigue como ẽ el theorema, que se hauia de demostrar,

Theorema. 34. Proposicion. 48.

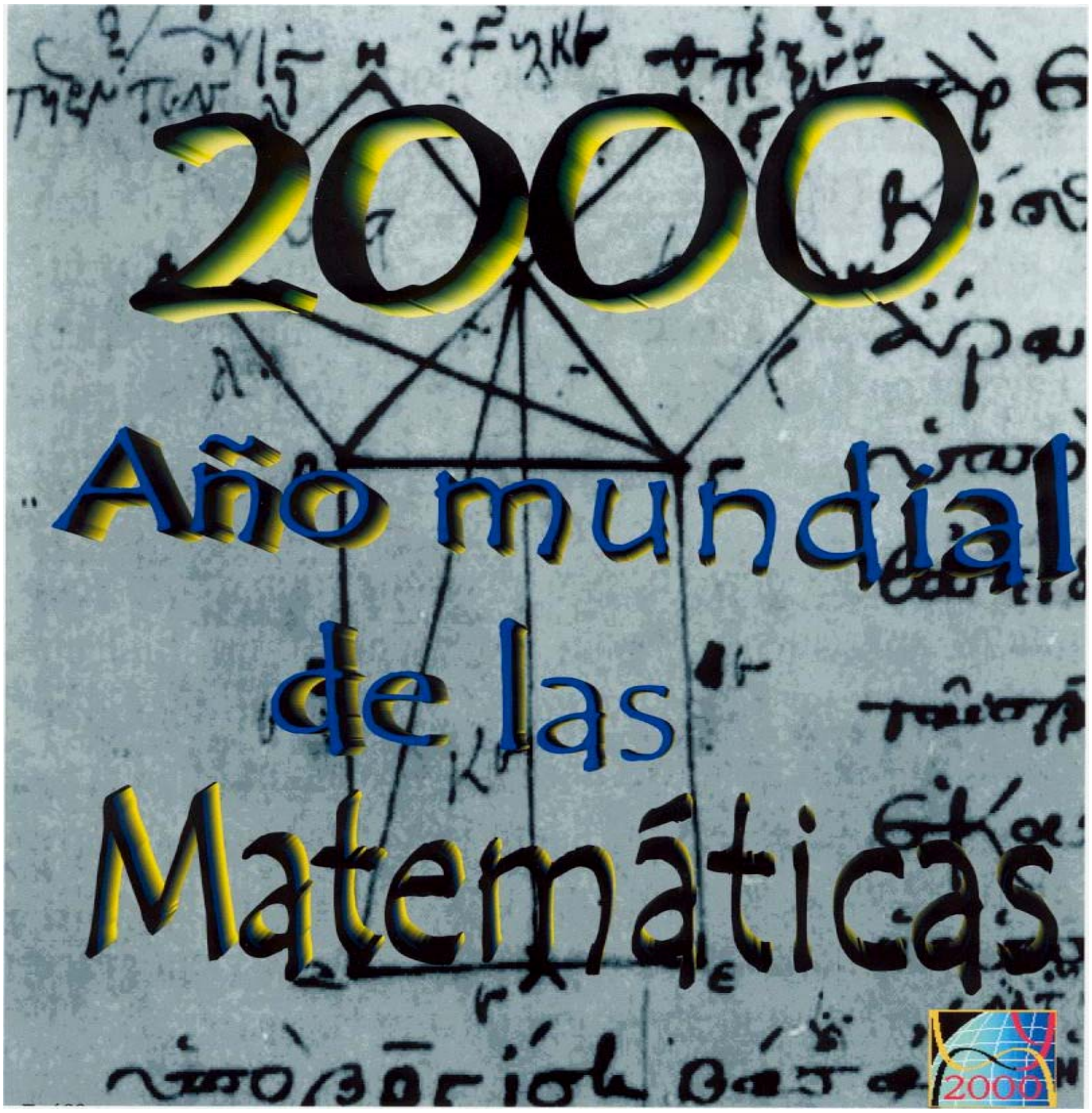
¶Si el quadrado que es hecho de vno de los lados del triãgulo fuere ygual a aq̃llos quadrados que de los demas lados del triãgulo: el angulo comprehendido de los dos lados restantes del triangulo, sera recto.

El quadrado que es hecho del vn lado. B C. del triangulo. A B C. sea ygual a aq̃llos quadrados que son hechos de los lados. B A. A C. digo que el angulo. B A C. es recto. Saquese (por la. 11. propositiõ) desde el puncto. A. la. A D. en angulos rectos con la linea recta. A C. y (por la. 3. proposicion) pongase. A D. ygual a la. A B, y (por la. 1. peticiõ) tire se. D C. y porque es ygual. D A. a la. A B. el quadrado



El *Teorema de Pitágoras* y su inverso –Proposiciones I.47 y I.48 de *Los Elementos* de Euclides– en la edición de Rodrigo Çamorano, primera en idioma castellano, Sevilla, 1576.

EL TEOREMA DE PITÁGORAS EN EL 2000
AÑO MUNDIAL DE LAS MATEMÁTICAS



Póster de la celebración en España del *Año 2000 Mundial de las Matemáticas* que incluye un fragmento con el anagrama euclídeo de una demostración del *Teorema de Pitágoras* en una edición medieval en griego de los *Los Elementos* de Euclides.

El *Teorema de Pitágoras* como parte esencial de los bellísimos tesoros matemáticos de la tradición pitagórica es una de las joyas geométricas a las que alude Kepler en su obra *Mysterium Cosmographicum* de 1596.

Sin duda alguna, el *Teorema de Pitágoras* es el más espléndido, atractivo, célebre, popular, renombrado y útil de la Geometría elemental. Con toda seguridad es el Teorema más conocido, del que más demostraciones se han realizado, el que más nombres ha recibido y el que más pasión ha producido en toda una pléyade heterogénea de personajes ilustres, desde el alba de la historia hasta nuestros días. La multitud de pruebas del *Teorema de Pitágoras* ilustran la idea de que hay muchas formas de alcanzar la misma verdad.

La soberbia grandeza del *Teorema de Pitágoras* establece una radical inflexión intelectual entre la práctica empírica e inductiva y la argumentación deductivo-demostrativa, tanto en el marco histórico cultural matemático como en el ámbito escolar de la Educación matemática.

Como origen de la Geometría racional, fundamento de multitud de teoremas geométricos, causa primera de la Inconmensurabilidad, umbral entre la Matemática empírica y la Matemática deductiva, paradigma para la Matemática y paradigma para la Educación matemática, bien podemos considerar que el *Teorema de Pitágoras* pertenece al imaginario cultural de todos los pueblos.

El Libro II

Tras la aparición de las magnitudes inconmensurables los griegos no podían admitir la existencia de números irracionales. De esta forma se imposibilitaba el tratamiento numérico de longitudes, áreas y volúmenes. A esta limitación operacional se añadía un deficiente sistema de numeración que usaba las propias letras del alfabeto griego para representar los números enteros, lo que suponía una considerable dificultad para realizar las operaciones. Estas condiciones impedían asignar a las figuras geométricas números que midieran sus longitudes, áreas y volúmenes y por tanto no era factible someterlas a manipulaciones algebraicas, como se hace con los números, de modo que había que operar directamente con las figuras que se trataban como magnitudes. Así aparece el llamado *Álgebra Geométrica* de los griegos, que desarrolla la Escuela pitagórica, como una especie de algoritmo geométrico que permitía resolver los problemas sin recurrir al cálculo literal. Los números son sustituidos por segmentos de recta y las operaciones entre ellos se llevan a cabo mediante construcciones geométricas, por ejemplo, la suma de dos números se realiza yuxtaponiendo segmentos, el producto se convierte en el área del rectángulo de lados las longitudes de esos números y la extracción de una raíz cuadrada es equivalente a la construcción de un cuadrado cuyo área es igual a la de un rectángulo dado. Pues bien, el Libro II de *Los Elementos* de Euclides, con sus catorce proposiciones, contiene la parte más importante del *Álgebra Geométrica* de los griegos.

En las primeras diez proposiciones, Euclides establece la equivalencia geométrica de las principales identidades algebraicas muy habituales en la práctica escolar. Además, las figuras geométricas que utiliza Euclides permiten utilizar el *Álgebra Geométrica* como un poderoso instrumento para la resolución de ecuaciones cuadráticas, mediante el método de la *Aplicación de las áreas* (que se generalizará en el Libro VI), lo que supone que el Libro II juegue un papel fundamental en la Geometría griega.

El Libro II termina con dos proposiciones equivalentes al llamado *Teorema del coseno* (que generalizan el *Teorema de Pitágoras*) y con la cuadratura de figuras poligonales.

Definiciones:

D.II.1. Definición II.1. De todo paralelogramo rectangular se dice que está comprendido por las dos rectas que comprenden el ángulo recto.

D.II.2. Definición II.2. En toda área de paralelogramo se llama gnomon a uno cualquiera de los paralelogramos situados en torno a su diagonal junto con los dos complementos.

Proposiciones:

- Proposición II.1. Si una de dos rectas dadas se divide en un número cualquiera de partes, el rectángulo comprendido por dichas rectas, equivale a los rectángulos comprendidos por la no dividida y por cada una de las parciales.

  [Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma, $a \cdot (b + c + d + ...) = a \cdot b + a \cdot c + a \cdot d + ...$]

- Proposición II.2. Si se divide de una forma cualquiera una recta, el rectángulo comprendido por la recta entera y cada una de sus partes, es equivalente al cuadrado de la recta entera.

  [$(a+b) \cdot a+(a+b) \cdot b=(a+b)^2$].

- Proposición II.3. Si se divide de una forma cualquiera una recta, el rectángulo comprendido por la recta entera y por una de sus partes, es equivalente al rectángulo comprendido por las partes de la recta más el cuadrado de la parte primeramente dicha.

  [$(a+b) \cdot a=a \cdot b+a^2$].

- Proposición II.4. Si se divide de una forma cualquiera una recta por un punto, el cuadrado de la recta entera es equivalente a los cuadrados de las partes más dos veces el rectángulo comprendido por las partes.

  [Cuadrado de un binomio: $(a+b)^2=a^2+b^2+2a\cdot b$].

- Proposición II.5. Si se divide una recta en partes iguales y desiguales, el rectángulo comprendido por las partes desiguales de la recta entera, más el cuadrado de la diferencia entre las dos partes, es equivalente al cuadrado de la mitad de la recta dada.

  $$\left[a\cdot b+\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right] \text{ o}$$

  [Suma por diferencia igual a diferencia de cuadrados: $(a + b)\cdot(a–b) + b^2 = a^2$].

  [Solución geométrica de la ecuación cuadrática $ax–x^2=b^2$, véase VI.28].

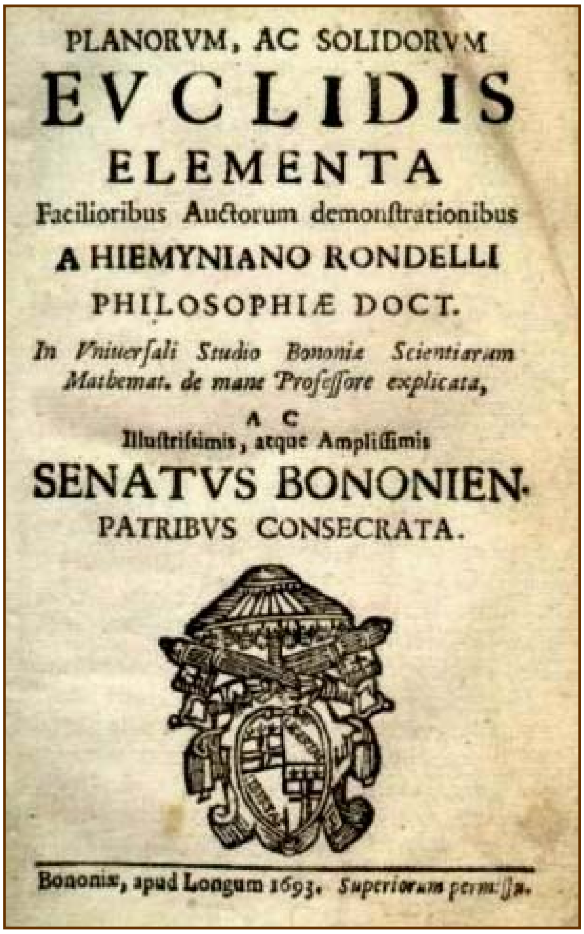
Proposición II.6. Si se divide una recta en dos partes iguales y se prolonga, el rectángulo comprendido por la recta entera, más la prolongación, y por la prolongación, junto con el cuadrado de la recta mitad, es equivalente al cuadrado de la recta formada por la recta mitad y la prolongación.

[$(2a+b)\cdot b+ a^2=(a+b)^2$, o $(a+b)\cdot(b–a)+ a^2=b^2$].

[Solución geométrica de la ecuación cuadrática $ax+x^2=b^2$, véase VI.29].

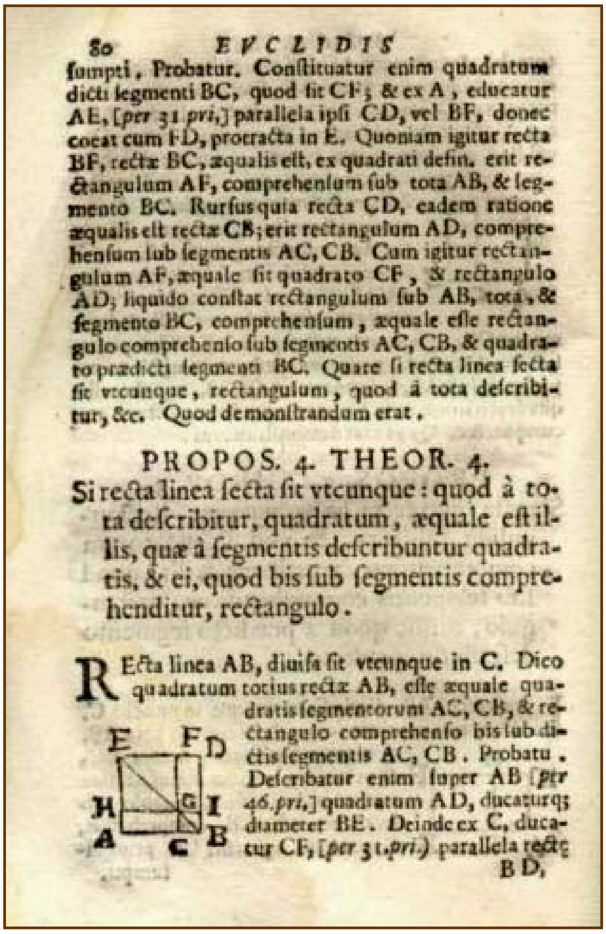
- Proposición II.7. Si se divide de una forma cualquiera una recta, el cuadrado de la recta entera y el de una de sus partes, tomados en conjunto, equivalen a dos veces el rectángulo comprendido por la recta entera y la parte considerada más el cuadrado de la otra parte.

  [$(a+b)^2+a^2= (2a+b)\cdot a+b^2$, o $a^2+b^2= 2a\cdot b+(a–b)^2$].



PLANORVM, AC SOLIDORVM
EVCLIDIS
ELEMENTA
Facilioribus Auctorum demonstrationibus
A HIEMYNIANO RONDELLI
PHILOSOPHIÆ DOCT.
In Vniversali Studio Bononiæ Scientiarum Mathemat. de mane Professore explicata,
AC
Illustrissimis, atque Amplissimis
SENATVS BONONIEN.
PATRIBVS CONSECRATA.

Bononiæ, apud Longum 1693. *Superiorum permissu.*



80 EVCLIDIS

sumpti. Probatur. Constituatur enim quadratum dicti segmenti BC, quod sit CF; & ex A, educatur AE, [*per 31 pri.*] parallela ipsi CD, vel BF, donec coeat cum FD, protracta in E. Quoniam igitur recta BF, rectæ BC, æqualis est, ex quadrati defin. erit rectangulum AF, comprehensum sub tota AB, & segmento BC. Rursus quia recta CD, eadem ratione æqualis est rectæ CB; erit rectangulum AD, comprehensum sub segmentis AC, CB. Cum igitur rectangulum AF, æquale sit quadrato CF, & rectangulo AD; liquido constat rectangulum sub AB, tota, & segmento BC, comprehensum, æquale esse rectangulo comprehenso sub segmentis AC, CB, & quadrato prædicti segmenti BC. Quare si recta linea secta sit vtcunque, rectangulum, quod à tota describitur, &c. Quod demonstrandum erat.

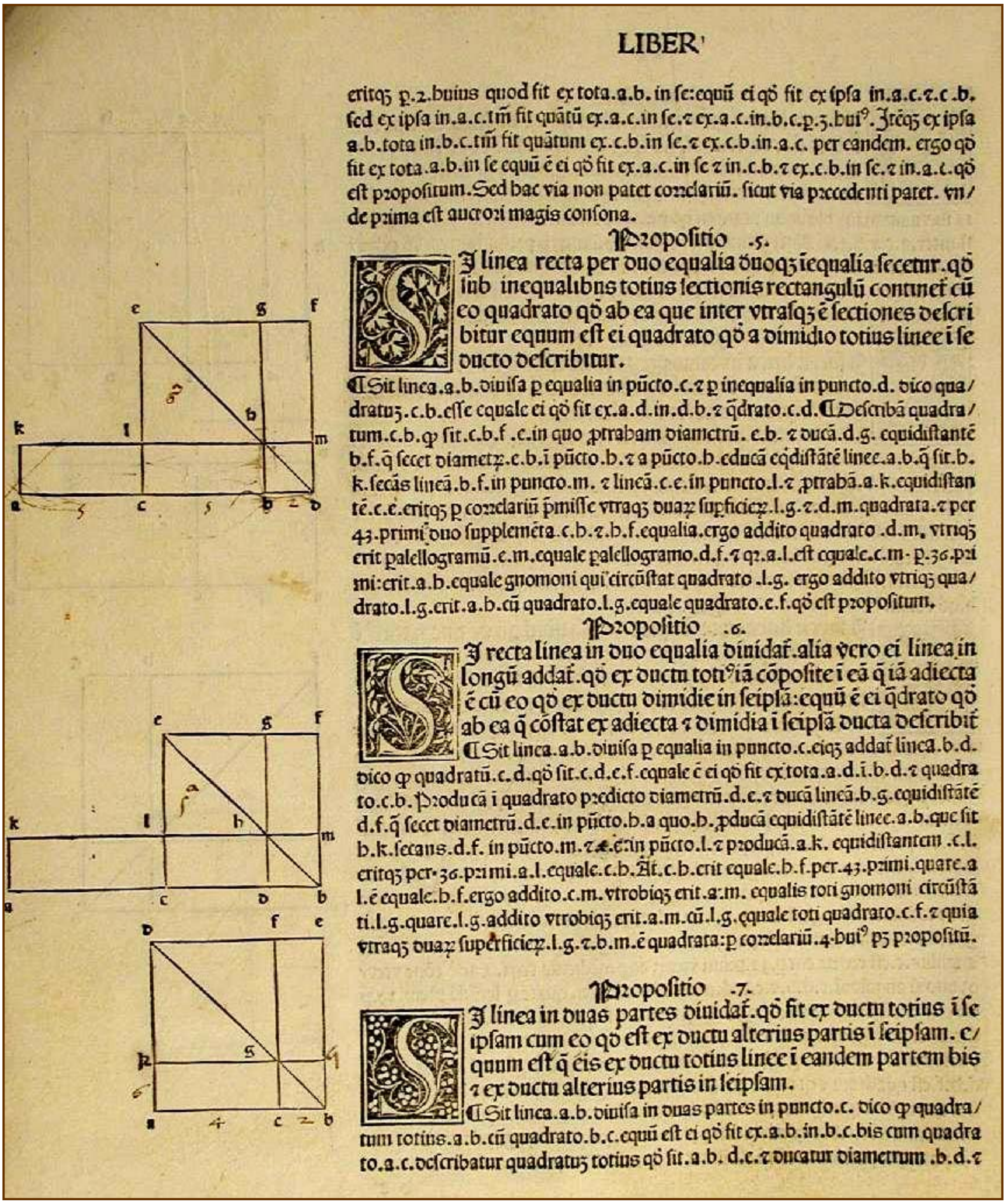
PROPOS. 4. THEOR. 4.

Si recta linea secta sit vtcunque: quod à tota describitur, quadratum, æquale est illis, quæ à segmentis describuntur quadratis, & ei, quod bis sub segmentis comprehenditur, rectangulo.

Recta linea AB, diuisa sit vtcunque in C. Dico quadratum totius rectæ AB, esse æquale quadratis segmentorum AC, CB, & rectangulo comprehenso bis sub dictis segmentis AC, CB. Probatu. Describatur enim super AB [*per 46. pri.*] quadratum AD, ducaturq; diameter BE. Deinde ex C, ducatur CF, [*per 31. pri.*] parallela rectæ BD,

Portada y Proposición II.4 en la edición de Rondelli de *Los Elementos* de Euclides (Bolonia, 1693).

EL ÁLGEBRA GEOMETRICA DEL LIBRO II
DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES



LIBER

critq̃ p.2.huius quod fit ex tota.a.b. in se: equũ ei qd̃ fit ex ipsa in.a.c.z.c.b. sed ex ipsa in.a.c.tm̃ fit quãtũ ex.a.c.in se.z ex.a.c.in.b.c.p.3.hui⁹. Itẽq̃ ex ipsa a.b.tota in.b.c.tm̃ fit quãtum ex.c.b.in se.z ex.c.b.in.a.c. per eandem. ergo qd̃ fit ex tota.a.b.in se equũ ẽ ei qd̃ fit ex.a.c.in se z in.c.b.z ex.c.b.in se.z in.a.c.qd̃ est propositum. Sed hac via non patet corelariũ. sicut via precedenti patet. vn/de prima est auctori magis consona.

Propositio .5.

Si linea recta per duo equalia duoq̃ inequalia secetur.qd̃ sub inequalibus totius sectionis rectangulũ continetur cũ eo quadrato qd̃ ab ea que inter vtrasq̃ ẽ sectiones descri bitur equum est ei quadrato qd̃ a dimidio totius linee i se ducto describitur.

Sit linea.a.b.diuisa p equalia in pũcto.c.z p inequalia in puncto.d. dico qua/dratũ.c.b.esse equale ei qd̃ fit ex.a.d.in.d.b.z q̃drato.c.d. Describã quadra/tum.c.b.q̃ sit.c.b.f.e.in quo ptrabam diametrũ.e.b. z ducã.d.g. equidistanté b.f.q̃ secet diametrũ.e.b.i pũcto.h.z a pũcto.h.educã eq̃distãté linee.a.b.q̃ sit.h. k.secãs lineã.b.f.in puncto.m. z lineã.c.e.in puncto.l.z ptrabã.a.k.equidistan té.c.e.eritq̃ p corelariũ pmisse vtraq̃ duaꝝ superficieꝝ.l.g.z.d.m.quadrata.z per 43.primi duo supplemẽta.c.h.z.h.f.equalia.ergo addito quadrato .d.m. vtriq̃ erit palellogramũ.c.m.equale palellogramo.d.f.z q2.a.l.est equale.c.m. p.36.pri mi:erit.a.h.equale gnomoni qui circũstat quadrato .l.g. ergo addito vtriq̃ qua/drato.l.g.erit.a.h.cũ quadrato.l.g.equale quadrato.c.f.qd̃ est propositum.

Propositio .6.

Si recta linea in duo equalia diuidat.alia vero ei linea in longũ addat.qd̃ ex ductu toti⁹ iã cõposite i eã q̃ iã adiecta ẽ cũ eo qd̃ ex ductu dimidie in seipsã: equũ ẽ ei q̃drato qd̃ ab ea q̃ cõstat ex adiecta z dimidia i seipsã ducta describit.

Sit linea.a.b.diuisa p equalia in puncto.c.eiq̃ addat linea.b.d. dico q̃ quadratũ.c.d.qd̃ sit.c.d.e.f.equale ẽ ei qd̃ fit ex tota.a.d.i.b.d.z quadra to.c.b. Producã i quadrato predicto diametrũ.d.e.z ducã lineã.b.g.equidistãté d.f.q̃ secet diametrũ.d.e.in pũcto.h.a quo.h.producã equidistãté linee.a.b.que sit h.k.secans.d.f. in pũcto.m.z.e.c.in pũcto.l.z producã.a.k. equidistantem .c.l. eritq̃ per 36.primi.a.l.equale.c.h. sed.c.h.erit equale.h.f.per.43.primi.quare.a l.ẽ equale.h.f.ergo addito.c.m.vtrobiq̃ erit.a.m. equalis toti gnomoni circũstã ti.l.g.quare.l.g.addito vtrobiq̃ erit.a.m.cũ.l.g.equale toti quadrato.c.f.z quia vtraq̃ duaꝝ superficieꝝ.l.g.z.b.m.ẽ quadrata:p corelariũ.4.hui⁹ p3 propositũ.

Propositio .7.

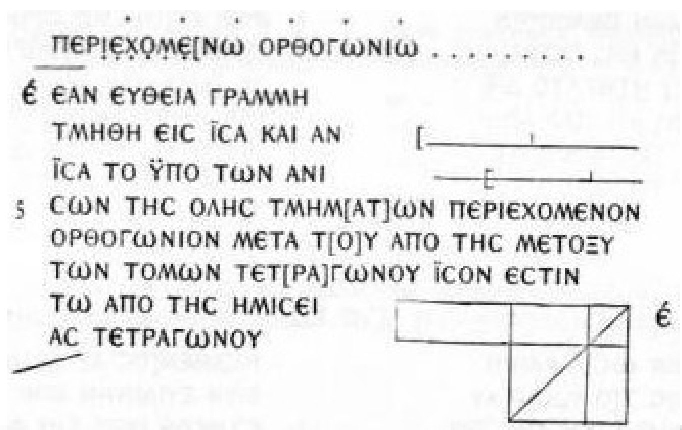
Si linea in duas partes diuidat.qd̃ fit ex ductu totius i se ipsam cum eo qd̃ est ex ductu alterius partis i seipsam. e/quum est q̃ eis ex ductu totius linee i eandem partem bis z ex ductu alterius partis in seipsam.

Sit linea.a.b.diuisa in duas partes in puncto.c. dico q̃ quadra/tum totius.a.b.cũ quadrato.b.c.equũ est ei qd̃ fit ex.a.b.in.b.c.bis cum quadra to.a.c.describatur quadratũ totius qd̃ sit.a.b. d.e.z ducatur diametrum .b.d.z

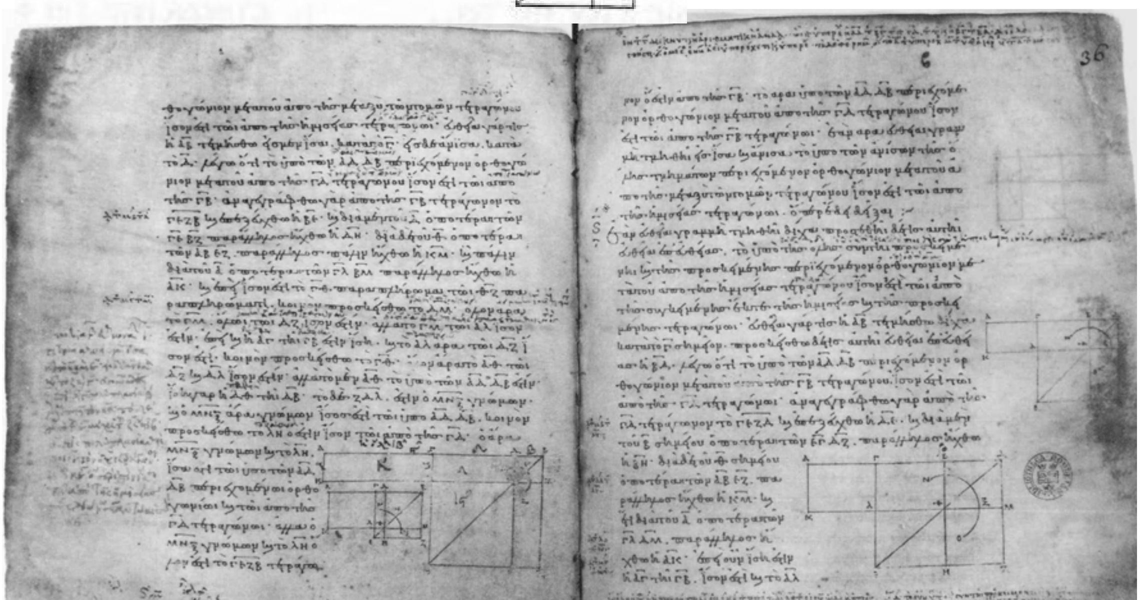
Las Proposiciones II.5, II.6 y II.7 del Álgebra Geométrica del Libro II de *Los Elementos* de Euclides en la edición de E.Ratdolt (Venecia, 1482). Este ejemplar procede de la Biblioteca Monástica de Yuso del Monasterio de San Millán de la Cogolla.

La parte más importante del Libro II de *Los Elementos* de Euclides trata de los fundamentos del Álgebra Geométrica de los griegos que operaba directamente con las figuras que se trataban como magnitudes. Los números son tratados como segmentos de recta y las operaciones entre ellos se realizan mediante construcciones geométricas. El estudio de las relaciones entre los rectángulos o cuadrados de la misma altura construidos sobre la suma o la diferencia de dos segmentos, permite la solución geométrica de las ecuaciones cuadráticas.

LOS MÁS ANTIGUOS DOCUMENTOS DEL ÁLGEBRA GEOMÉTRICA
DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES


ΠΕΡΙΕΧΟΜΕ[ΝΩ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩ . . . .
έ ΕΑΝ ΕΥΘΕΙΑ ΓΡΑΜΜΗ
ΤΜΗΘΗ ΕΙC ΙCΑ ΚΑΙ ΑΝ
ΙCΑ ΤΟ ΥΠΟ ΤΩΝ ΑΝΙ
CΩΝ ΤΗC ΟΛΗC ΤΜΗΜ[ΑΤ]ΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟΝ
ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΝ ΜΕΤΑ Τ[Ο]Υ ΑΠΟ ΤΗC ΜΕΤΟΞΥ
ΤΩΝ ΤΟΜΩΝ ΤΕΤ[ΡΑ]ΓΩΝΟΥ ΙCΟΝ ΕCΤΙΝ
ΤΩ ΑΠΟ ΤΗC ΗΜΙCΕΙ
ΑC ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΥ έ

Fragmento de un papiro, que data de 75-125 d.C. Es quizá el más antiguo resto de diagramas de proposiciones de *Los Elementos* de Euclides. Fue encontrado en excavaciones de los años 1986-87 en una antigua torre de Oxyrhynchus, cerca de Behnesa (Egipto). Se conserva en la Universidad de Pennsylvania. El fragmento contiene el enunciado en griego y una figura auxiliar de la Proposición II.5 de *Los Elementos* de Euclides.



Página de un manuscrito en griego de una edición medieval del año 888 de *Los Elementos* de Euclides. Se llama «*Bodleian Manuscript*» por pertenecer a *Bodleian Library*. Se exhiben los folios 35[v] y 36[r], que contienen las proposiciones de *Los Elementos* II.5 y II.6 del Álgebra Geométrica griega.

- Proposición II.8. Si se divide de una forma cualquiera una recta, cuatro veces el rectángulo comprendido por la recta entera y por una de sus partes, más el cuadrado de la otra parte, equivalen al cuadrado construido sobre la recta entera más la parte considerada.

  $[4(a+b)\cdot a+b^2= [(a+b)+a]^2$, ó $4a\cdot b+(a–b)^2=(a+b)^2]$.

- Proposición II.9. Si se divide una recta en partes iguales y desiguales, los cuadrados de las partes desiguales de la recta entera son el doble del cuadrado de la mitad de la recta entera, más el cuadrado de la recta situada entre los puntos de sección.

  $$\left[a^2+b^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right] \text{ o } [(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)].$$

- Proposición II.10. Si una línea recta se divide en dos partes iguales y se le añade, en línea recta, otra recta; el cuadrado de la recta entera más la recta añadida y el cuadrado de la añadida, juntos, son el doble del cuadrado construido sobre la recta mitad más el cuadrado construido sobre la recta compuesta por la mitad y la recta añadida, tomadas como una sola recta.

  $[(2a+b)^2+b^2= 2[a^2+(a+b)^2]$, o $(a+b)^2+(b–a)^2=2(a^2+b^2)]$.

- Proposición II.11. Dividir una recta de tal forma que el rectángulo comprendido por la recta entera y por una de sus partes sea equivalente al cuadrado de la otra parte.

  [Solución geométrica de la ecuación cuadrática $ax+x^2=a^2$, división de un segmento en media y extrema razón, véase VI.30].

- Proposición II.12. En los triángulos obtusángulos, el cuadrado del lado que subtiende [opuesto] el ángulo obtuso es mayor que los cuadrados de los lados que lo comprenden en dos veces el rectángulo comprendido por aquél de los del ángulo obtuso sobre el que cae la perpendicular y por la recta exterior cortada por la perpendicular, hasta el ángulo obtuso.

  [Teorema del cuadrado del lado opuesto a un ángulo obtuso].

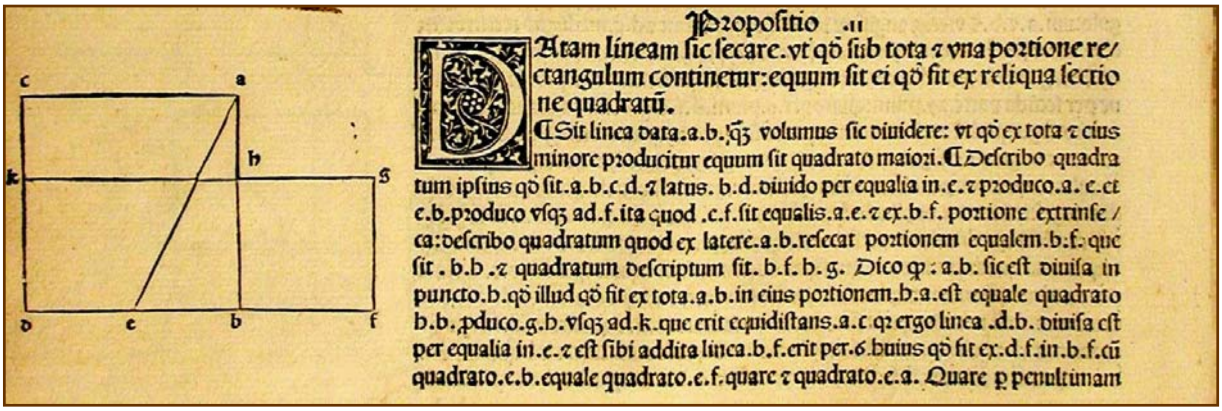
- Proposición II.13. En los triángulos acutángulos, el cuadrado del lado que subtiende un ángulo agudo es menor que los cuadrados de los lados que lo comprenden en dos veces el rectángulo comprendido por uno de los lados del ángulo agudo sobre el que cae la perpendicular y por la recta interior cortada por la perpendicular, hasta el ángulo agudo.

  [Teorema del cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo].

- Proposición II.14. Construir un cuadrado equivalente a una figura rectilínea dada.

  [Cuadratura de figuras poligonales].

LA DIVINA PROPORCIÓN EN *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES



Propositio .11

Datam lineam sic secare. vt qd sub tota & vna portione rectangulum continetur: equum sit ei qd fit ex reliqua sectione quadratū.

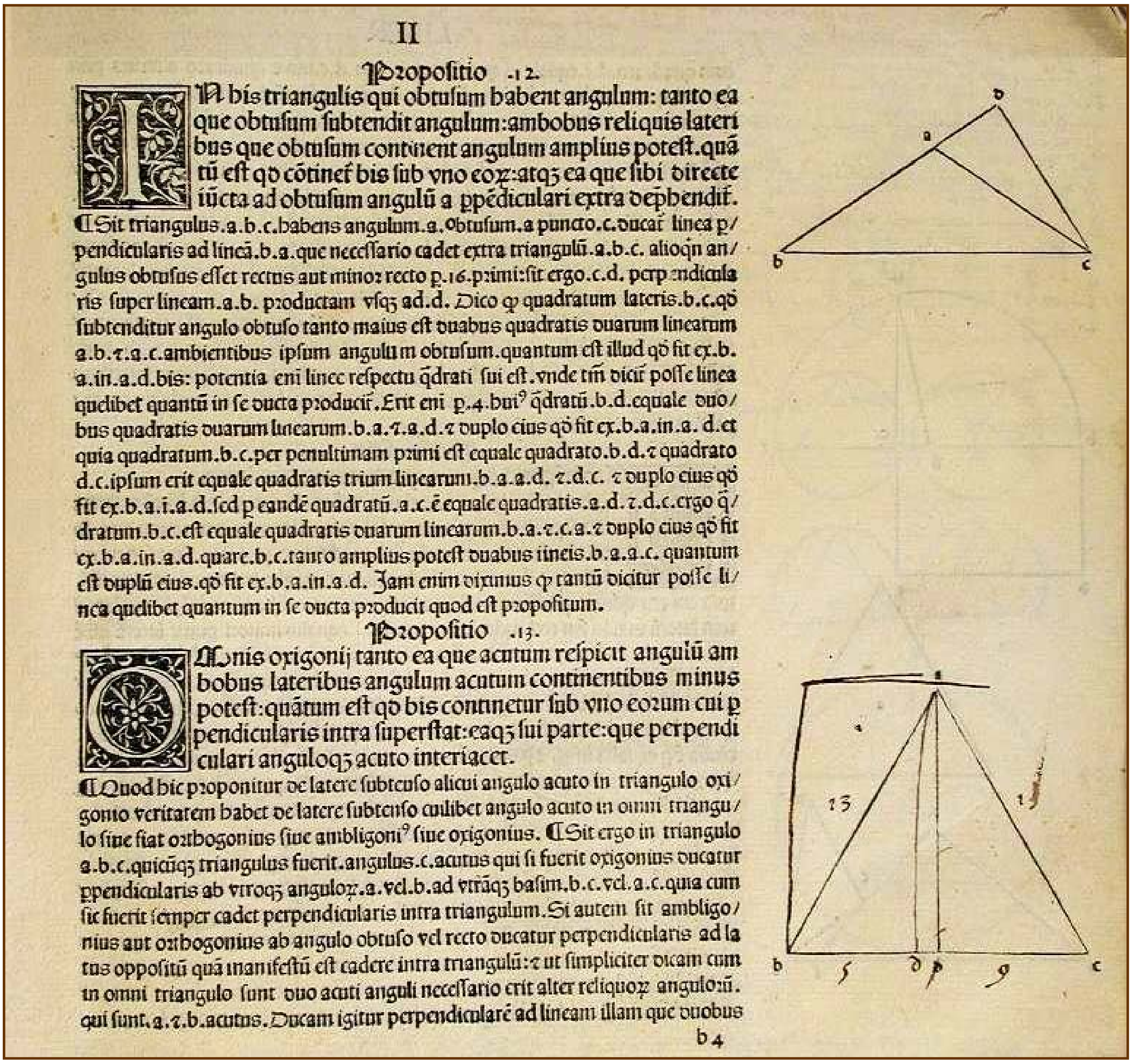
¶Sit linea data.a.b.:q3 volumus sic diuidere: vt qd ex tota & eius minore producitur equum sit quadrato maiori. ¶Describo quadratum ipsius qd sit.a.b.c.d.& latus. b.d.diuido per equalia in.e.& produco.a. e.et e.b.produco vsq3 ad.f.ita quod .c.f.sit equalis.a.e.& ex.b.f. portione extrinseca:describo quadratum quod ex latere.a.b.resecat portionem equalem.b.f.quae sit . b.b .& quadratum descriptum sit. b.f. b. g. Dico q : a.b. sic est diuisa in puncto.b.qd illud qd fit ex tota.a.b.in eius portionem.b.a.est equale quadrato b.b.pduco.g.b.vsq3 ad.k.que erit equidistans.a.c q2 ergo linea .d.b. diuisa est per equalia in.e.& est sibi addita linea.b.f.erit per.6.huius qd fit ex.d.f.in.b.f.cū quadrato.e.b.equale quadrato.e.f.quare & quadrato.e.a. Quare p penultimam

La Proposición II.11 del Álgebra Geométrica del Libro II de *Los Elementos* de Euclides contiene el fundamento geométrico de la *Seción Áurea* mediante la solución geométrica de la ecuación cuadrática $ax+x^2=a^2$.

LAS PROPOSICIONES II.12, II.13 DE *LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES*

GENERALIZACIONES DEL *TEOREMA DE PITÁGORAS*

Y ANTECEDENTES DEL *TEOREMA DEL COSENO*



II

Propositio .12.

IN bis triangulis qui obtusum habent angulum: tanto ea que obtusum subtendit angulum: ambobus reliquis lateribus que obtusum continent angulum amplius potest. quantum est qd cõtinet bis sub vno eoꝝ: atq; ea que sibi directe iũcta ad obtusum angulũ a ꝑpẽdiculari extra deꝑhendit.

¶ Sit triangulus. a. b. c. habens angulum. a. obtusum. a puncto. c. ducat linea perpendicularis ad lineã. b. a. que necessario cadet extra triangulũ. a. b. c. alioqn angulus obtusus esset rectus aut minor recto p. 16. primi: sit ergo. c. d. perpendicularis super lineam. a. b. productam vsq; ad. d. Dico q quadratum lateris. b. c. qd subtenditur angulo obtuso tanto maius est duabus quadratis duarum linearum a. b. ⁊. a. c. ambientibus ipsum angulum obtusum. quantum est illud qd fit ex. b. a. in. a. d. bis: potentia eni linee respectu qdrati sui est. vnde tñ dicit posse linea qlibet quantũ in se ducta producit. Erit eni p. 4. hui⁹ qdratũ. b. d. equale duobus quadratis duarum linearum. b. a. ⁊. a. d. ⁊ duplo eius qd fit ex. b. a. in. a. d. et quia quadratum. b. c. per penultimam primi est equale quadrato. b. d. ⁊ quadrato d. c. ipsum erit equale quadratis trium linearum. b. a. a. d. ⁊. d. c. ⁊ duplo eius qd fit ex. b. a. i. a. d. sed p eandẽ quadratũ. a. c. ẽ equale quadratis. a. d. ⁊. d. c. ergo quadratum. b. c. est equale quadratis duarum linearum. b. a. ⁊. c. a. ⁊ duplo eius qd fit ex. b. a. in. a. d. quare. b. c. tanto amplius potest duabus lineis. b. a. a. c. quantum est duplũ eius. qd fit ex. b. a. in. a. d. Jam enim diximus q tantũ dicitur posse linea qlibet quantum in se ducta producit quod est propositum.

Propositio .13.

OMnis oxigonij tanto ea que acutum respicit angulũ ambobus lateribus angulum acutum continentibus minus potest: quãtum est qd bis continetur sub vno eorum cui perpendicularis intra superstat: eaq; sui parte: que perpendiculari anguloq; acuto interiacet.

¶ Quod hic proponitur de latere subtenso alicui angulo acuto in triangulo oxigonio veritatem habet de latere subtenso cuilibet angulo acuto in omni triangulo siue fiat orthogonius siue ambligoni⁹ siue oxigonius. ¶ Sit ergo in triangulo a. b. c. quicũq; triangulus fuerit. angulus. c. acutus qui si fuerit oxigonius ducatur perpendicularis ab vtroq; anguloꝝ. a. vel. b. ad vtrãq; basim. b. c. vel. a. c. quia cum sic fuerit semper cadet perpendicularis intra triangulum. Si autem sit ambligonius aut orthogonius ab angulo obtuso vel recto ducatur perpendicularis ad latus oppositũ quã manifestũ est cadere intra triangulũ: ⁊ ut simpliciter dicam cum in omni triangulo sunt duo acuti anguli necessario erit alter reliquoꝝ angulorũ. qui sunt. a. ⁊. b. acutus. Ducam igitur perpendicularẽ ad lineam illam que duobus

b 4

Las Proposiciones II.12 y II.13 de *Los Elementos de Euclides* (edición de E.Ratdolt, Venecia, 1482).

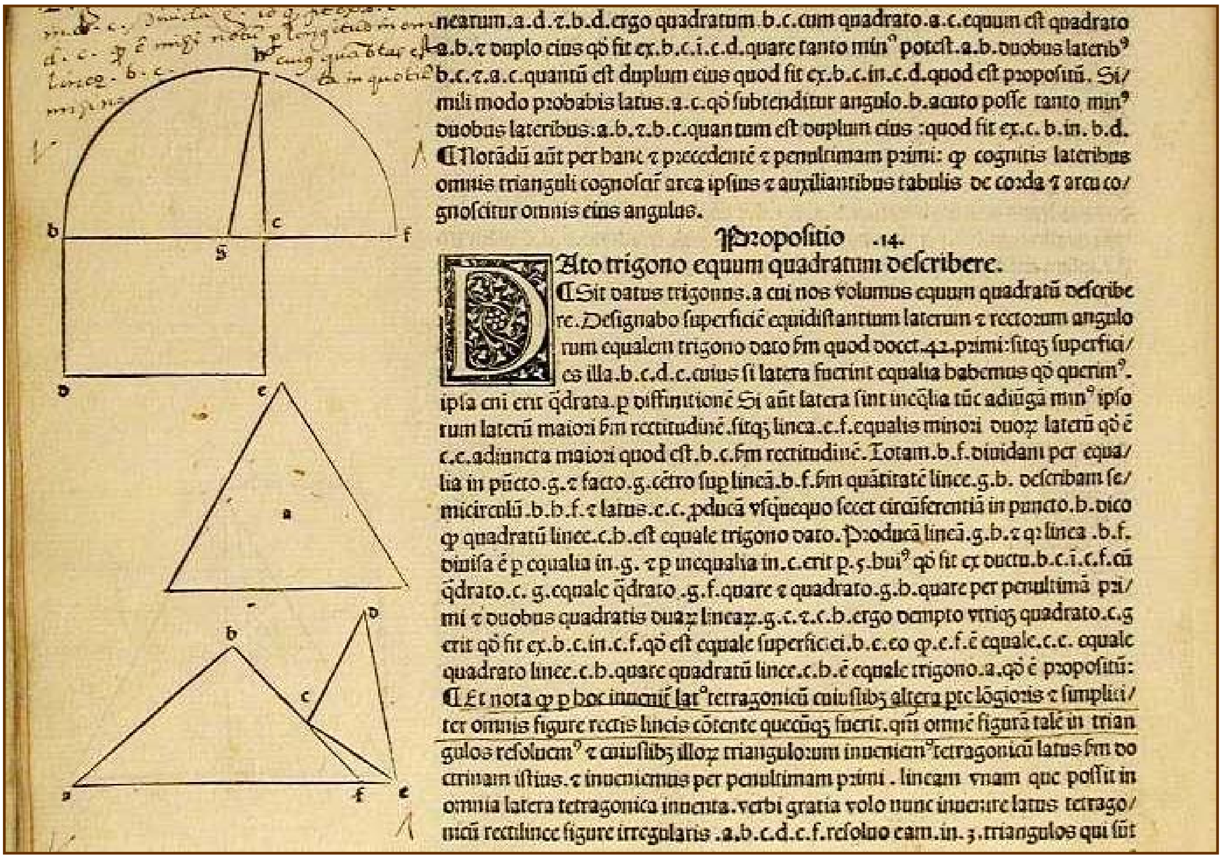
Estas proposiciones de Euclides, llamadas habitualmente «*Teorema del cuadrado del lado opuesto a un ángulo obtuso de un triángulo*» y «*Teorema del cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo de un triángulo*», forman parte ineludible –como el propio *Teorema de Pitágoras*– de la matemática escolar elemental.

Ambos teoremas son tanto una generalización de la Proposición I.47 –el *Teorema de Pitágoras*– para triángulos cualesquiera como una versión geométrica pre-trigonométrica de los *Teoremas del coseno* de los triángulos.

El matemático alejandrino del siglo I d.C. Herón –célebre por su famosa fórmula para el cálculo del área S de un triángulo tomando como datos los tres lados, a, b, c, $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ –, demostró ciertos teoremas inversos, en cierto modo, de las proposiciones II.12 y II.13, de manera que en conjunto cada teorema y su inverso permiten caracterizar a los triángulos obtusángulos y acutángulos tal como las Proposiciones I.47 y I.48 caracterizan los triángulos rectángulos.

- **Un triángulo es rectángulo si y sólo si el cuadrado del lado opuesto al ángulo recto –hipotenusa– es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados –catetos–.**
- **Un triángulo es obtusángulo si y sólo si el cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso es mayor que la suma de los cuadrados de los otros dos lados.**
- **Un triángulo es acutángulo si y sólo si el cuadrado de cualquier lado es menor que la suma de los cuadrados de los otros dos lados.**

LA CUADRATURA DE FIGURAS POLIGONALES EN EL LIBRO II DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES



nearum.a.d.z.b.d.ergo quadratum.b.c.cum quadrato.a.c.equum est quadrato
a.b.z duplo eius qd fit ex.b.c.i.c.d.quare tanto min⁹ potest.a.b.duobus laterib⁹
b.c.z.a.c.quantũ est duplum eius quod fit ex.b.c.in.c.d.quod est propositũ. Si/
mili modo probabis latus.a.c.qd subtenditur angulo.b.acuto posse tanto min⁹
duobus lateribus:a.b.z.b.c.quantum est duplum eius :quod fit ex.c.b.in.b.d.
Notãdũ aũt per hanc z precedentẽ z penultimam primi: q cognitis lateribus
omnis trianguli cognoscit̃ area ipsius z auxiliantibus tabulis de corda z arcu co/
gnoscitur omnis eius angulus.

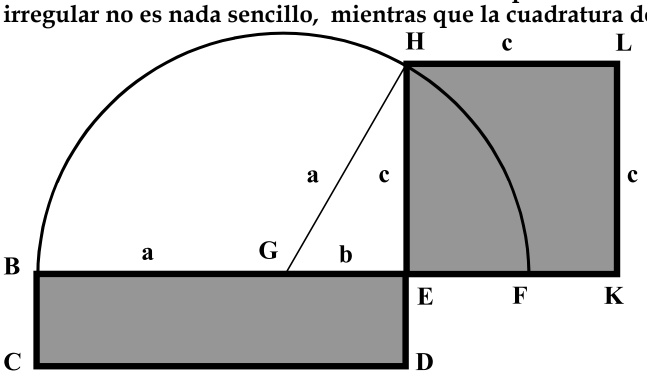
Propositio .14.

Dato trigono equum quadratum describere.
Sit datus trigonus.a cui nos volumus equum quadratũ describe
re. Designabo superficiẽ equidistantium laterum z rectorum angulo
rum equalem trigono dato ſm quod docet.42.primi:sitq3 superfici/
es illa.b.c.d.e.cuius si latera fuerint equalia habemus qd querim⁹.
ipsa eni erit q̃drata.p diffinitionẽ Si aũt latera sint inequalia tũc adiũgã min⁹ ipso
rum laterũ maiori ſm rectitudinẽ.sitq3 linea.e.f.equalis minori duoꝝ laterũ qd ẽ
e.e.adiuncta maiori quod est.b.e.ſm rectitudinẽ. Totam.b.f.diuidam per equa/
lia in pũcto.g.z facto.g.cẽtro sup lineã.b.f.ſm quãtitatẽ lineẽ.g.b. describam se/
micirculũ.b.h.f.z latus.e.c.pducã vsquequo secet circũferentiã in puncto.h.dico
q quadratũ lineẽ.e.h.est equale trigono dato. Producã lineã.g.h.z q: linea .b.f.
diuisa ẽ p equalia in.g. z p inequalia in.e.erit p.5.hui⁹ qd fit ex ductu.b.e.i.e.f.cũ
q̃drato.e.g.equale q̃drato .g.f.quare z quadrato.g.h.quare per penultimã pri/
mi z duobus quadratis duaꝝ lineaꝝ.g.e.z.e.h.ergo dempto vtriq3 quadrato.e.g
erit qd fit ex.b.e.in.e.f.qd est equale superficiei.b.c.eo q.e.f.ẽ equale.e.c. equale
quadrato lineẽ.e.h.quare quadratũ lineẽ.e.h.ẽ equale trigono.a.qd ẽ propositũ:
Et nota q p hoc inuenit̃ lat⁹ tetragonicũ cuiuslib3 altera pte lõgioris z simplici/
ter omnis figure rectis lineis cõtente quecũq3 fuerit.qm omnẽ figurã talẽ in trian
gulos resoluem⁹ z cuiuslib3 illoꝝ triangulorum inueniem⁹ tetragonicũ latus ſm do
ctrinam istius.z inueniemus per penultimam primi . lineam vnam que possit in
omnia latera tetragonica inuenta.verbi gratia volo nunc inuenire latus tetrago/
nicũ rectilinee figure irregularis .a.b.c.d.e.f.resoluo eam.in.3.triangulos qui sũt

La Proposición II.14 de *Los Elementos* de Euclides sobre cuadratura de figuras poligonales.

Termina el Libro II con uno de los problemas más importantes de *Los Elementos* de Euclides y de toda la Geometría griega, la cuestión de las cuadraturas de las figuras geométricas.

La cuadratura de una figura plana es la construcción, con regla compás, de un cuadrado con la misma superficie que la figura inicial. El problema –que fascinó a la cultura griega por su obsesión por reducir lo complejo a lo simple (como simple es la regularidad simétrica del cuadrado), en un mundo natural gobernado por la razón, la perfección, la belleza y el orden– tiene un enorme interés desde un punto de vista práctico, ya que la determinación del área de una figura irregular no es nada sencillo, mientras que la cuadratura de una figura reduce el cálculo de su área al de un cuadrado.



El primer paso en estos problemas es la cuadratura es la cuadratura del rectángulo que aparece en esta Proposición II.14 de *Los Elementos* de Euclides:

Sea BCDE un rectángulo cualquiera. Se debe construir, con regla y compás, un cuadrado que tenga por área la del rectángulo BCDE. Con la regla se prolonga la recta BE, y se utiliza el compás para señalar el segmento EF de longitud igual a ED. A continuación se halla el punto medio G de BF y se describe un semicírculo de centro G y diámetro BE. Finalmente desde E se traza la línea EH perpendicular a BF, siendo H el punto de intersección de esta perpendicular con el semicírculo. El segmento EH es el lado del cuadrado EHLK buscado.

En efecto, sean: a=HG, b=EG, c=EH. Ahora se tiene:

- **$a^2 = b^2 + c^2$ (*Teorema de Pitágoras* , I.47).**
- **FG = BG = HG=a, al ser todos radios del semicírculo.**
- **EF = FG – EG = a–b , BE =BG + GE = a+b**
- **Área del rectángulo BCDE = BE x ED =BE x EF = $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2 = c^2$ = Área del cuadrado EKLH.**

Así pues, se ha demostrado que el área del rectángulo inicial BCDE es igual al área del cuadrado EKLH, construido con regla y compás. Se ha resuelto, por tanto, el problema de la cuadratura del rectángulo.

El segundo paso es la cuadratura de un triángulo lo cual es trivial al ser el triángulo la mitad de un rectángulo.

El tercero y último paso es la cuadratura de una figura poligonal cualquiera lo que se realiza mediante su partición en triángulos, cada uno de los cuales es cuadrable. La aplicación del *Teorema de Pitágoras* de forma reiterada para «*dados dos cuadrados construir un cuadrado de área la suma de ambos*» nos permite finalmente realizar la cuadratura de cualquier figura poligonal rectilínea por irregular que sea.

La cuadratura de figuras curvilíneas, de una complejidad muy superior, nos lleva a la famosa cuadratura de las *Lúnulas de Hipócrates* –que está fuera de *Los Elementos* de Euclides– y a la *Teoría de la Proporción y Método de Exhaución y Cuadraturas y Cubaturas de los* Libros V, X y XII de *Los Elementos* de Euclides, respectivamente, y sobre todo a las Obras de Arquímedes.

El Libro III

El Libro III de *los Elementos* de Euclides, cuya procedencia se atribuye a los pitagóricos y a Hipócrates de Quíos, contiene 11 definiciones que introducen los objetos matemáticos y 37 proposiciones sobre la geometría del círculo que estudian las propiedades de arcos, cuerdas, segmentos y sectores, tangentes y secantes, intersecciones de círculos, ángulos centrales y ángulos inscritos, todos ellos problemas muy familiares en los libros de texto de la Matemática Elemental.

En las cuatro primeras proposiciones se estudian cuestiones en relación con el centro del círculo, se demuestra que todas las cuerdas son interiores al círculo, que un diámetro la corta en dos partes iguales y que los diámetros perpendiculares a una cuerda la bisecan. En las dos siguientes, 5 y 6, se obtiene que los círculos secantes o tangentes no pueden ser concéntricos. Después se discute las distancias mínimas y máximas entre la circunferencia y un punto interior o exterior. Las que siguen hasta la 13 estudian propiedades de los círculos tangentes y secantes. El Libro III continúa hasta la 19 con propiedades de tangentes. De la 20 a la 30 se tratan los ángulos inscritos y las relaciones entre cuerdas y arcos.

El estudio de la tangente a la circunferencia hace aparecer en este Libro por primera vez en la Historia de las Matemáticas la noción de «*Ángulo de contingencia*» (III.16), es un ángulo mixtilíneo de gran trascendencia geométrica y metafísica.

También se estudia en este Libro uno de los famosos teoremas de Tales (III.31) sobre ángulos inscritos en un semicírculo y otros resultados equivalentes a los teoremas sobre «*potencia de un punto respecto de una circunferencia*» (III.35, III.36, III.37) sin utilizar la semejanza, sino por medios de la *Aplicación de las Áreas* del *Álgebra Geométrica* .

A pesar de que este Libro está dedicado al círculo, no aparecen en él, ni en ningún otro Libro de *Los Elementos* de Euclides resultados sobre la longitud de la circunferencia o el área del círculo. Estos problemas, considerados de índole no elemental serán tratados por Arquímedes mediante el *Método de Exhaución* de Eudoxo, introducido en el libro X.

Definiciones:

D.III.1. Círculos iguales son aquellos cuyos diámetros [o radios] son iguales.

D.III.2. Una recta es tangente a un círculo cuando, tocando al círculo y siendo prolongada, no corta a la círculo.

D.III.3. Dos círculos son tangentes cuando, tocándose mutuamente, no se cortan.

D.III.4. En un círculo las rectas están a la misma distancia del centro, cuando las perpendiculares trazadas desde el centro hasta ellas, son iguales.

D.III.5. Se dice que está a mayor distancia aquella recta sobre la que cae la perpendicular mayor.

D.III.6. Un segmento de un círculo es la figura comprendida por una recta [una cuerda] y el arco de círculo subtendido por ella.

D.III.7. Un ángulo de un segmento es el comprendido por una recta y un arco de un círculo.

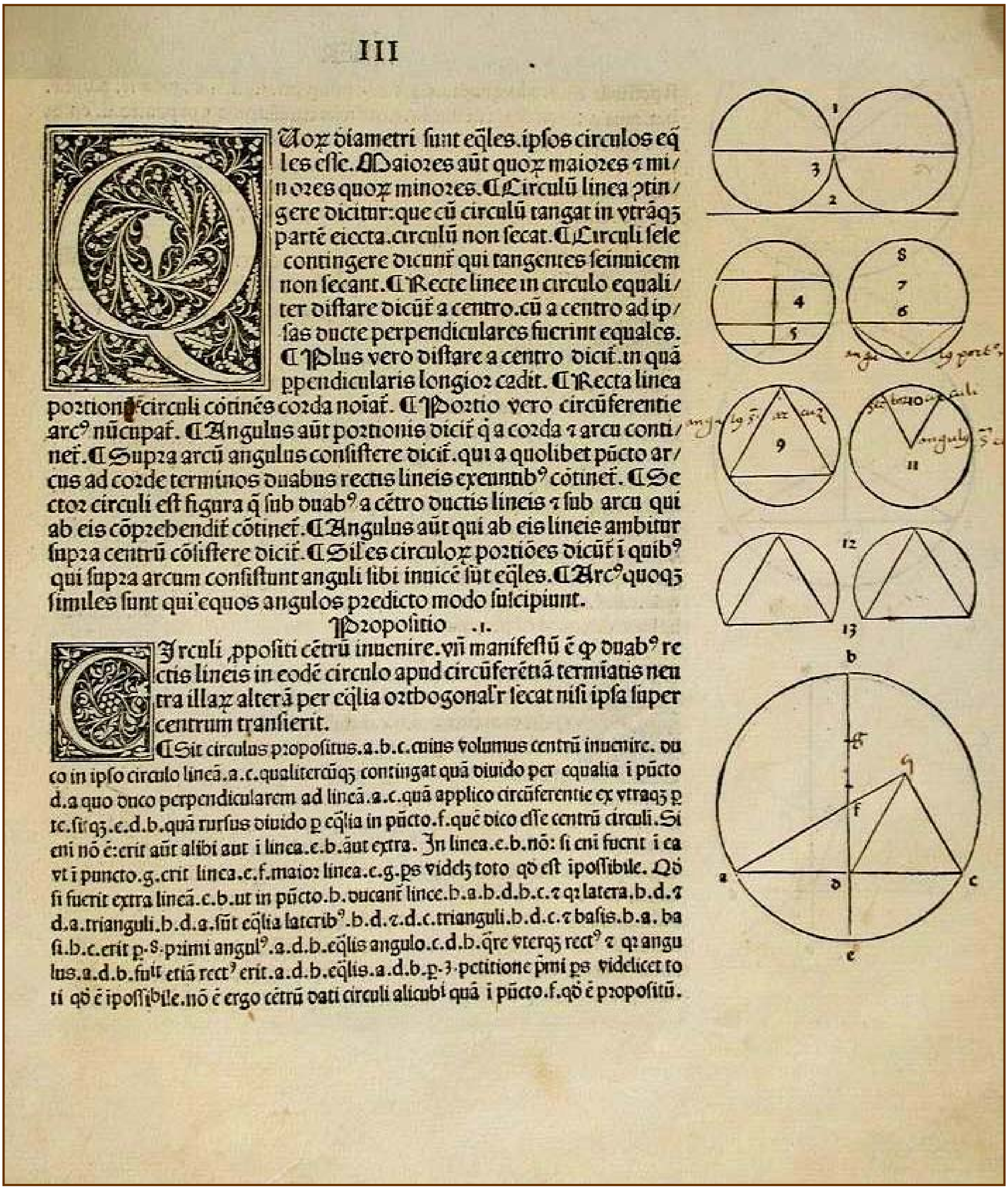
D.III.8. Ángulo en un segmento es el ángulo que, cuando se toma un punto sobre el arco del segmento y se trazan rectas desde él hasta los extremos de la recta que es la base del segmento, está comprendido por las rectas trazadas.

D.III.9. Cuando las rectas que comprenden el ángulo cortan a una circunferencia se dice que el ángulo está sobre ella.

D.III.10. Un sector de un círculo es la figura que, cuando se construye un ángulo en el centro del círculo, está comprendida por las rectas que comprenden el ángulo y la circunferencia cortada por ellas.

D.III.11. Segmentos semejantes de un círculo son los que admiten ángulos iguales, o aquellos en los que los ángulos son iguales entre sí.

LA GEOMETRÍA DEL CÍRCULO
EN EL LIBRO III DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES



III

Quorum diametri sunt eq̄les. ipsos circulos eq̄les esse. Maiores aūt quorum maiores & minores quorum minores. Circulū linea ꝯtingere dicitur: que cū circulū tangat in vtraqꝫ partē eiecta. circulū non secat. Circuli sese contingere dicunt qui tangentes seinuicem non secant. Recte linee in circulo equaliter distare dicūt a centro. cū a centro ad ipsas ducte perpendiculares fuerint equales. Plus vero distare a centro dicit. in quā ppendicularis longior cadit. Recta linea portionis circuli cōtinēs corda noiat. Portio vero circūferentie arc⁹ nūcupat. Angulus aūt portionis dicit q̄ a corda & arcu contineī. Supra arcū angulus consistere dicit. qui a quolibet pūcto arcus ad corde terminos duabus rectis lineis exeuntib⁹ cōtinet. Sector circuli est figura q̄ sub duab⁹ a cētro ductis lineis & sub arcu qui ab eis cōprehendit cōtinet. Angulus aūt qui ab eis lineis ambitur supra centrū cōsistere dicit. Similes circulorum portiōes dicūt i quib⁹ qui supra arcum consistunt anguli sibi inuicē sūt eq̄les. Arc⁹ quoqꝫ similes sunt qui equos angulos predicto modo suscipiunt.

Propositio .1.

Circuli ꝓpositi cētrū inuenire. vñ manifestū ē ꝙ duab⁹ rectis lineis in eodē circulo apud circūferētiā terminatis neutra illarum alterā per eq̄lia orthogonal'r secat nisi ipsa super centrum transierit.

Sit circulus propositus. a. b. c. cuius volumus centrū inuenire. duco in ipso circulo lineā. a. c. qualitercūqꝫ contingat quā diuido per equalia i pūcto d. a quo duco perpendicularem ad lineā. a. c. quā applico circūferentie ex vtraqꝫ parte. sitqꝫ. e. d. b. quā rursus diuido p eq̄lia in pūcto. f. quē dico esse centrū circuli. Si eni nō ē: erit aūt alibi aut i linea. e. b. aut extra. In linea. e. b. nō: si eni fuerit i ea vt i puncto. g. erit linea. e. f. maior linea. e. g. ps videlꝫ toto qđ est ipossibile. Qđ si fuerit extra lineā. e. b. ut in pūcto. b. ducant linee. b. a. b. d. b. c. & q2 latera. b. d. & d. a. trianguli. b. d. a. sūt eq̄lia laterib⁹. b. d. & d. c. trianguli. b. d. c. & basis. b. a. basi. b. c. erit p. 8. primi angul⁹. a. d. b. eq̄lis angulo. c. d. b. q̄re vterqꝫ rect⁹ & q2 angulus. a. d. b. fuit etiā rect⁹ erit. a. d. b. eq̄lis. a. d. b. p. 3. petitione pmi ps videlicet toti qđ ē ipossibile. nō ē ergo cētrū dati circuli alicubi quā i pūcto. f. qđ ē propositū.

Primera página con las definiciones y la primera proposición «*Encontrar el centro de un círculo dado*» del Libro III de *Los Elementos* de Euclides en la edición de E.Ratdolt (Venecia, 1482). Este ejemplar procede de la Biblioteca Monástica de Yuso del Monasterio de San Millán de la Cogolla.

El Libro III de *Los Elementos* de Euclides es, sin duda alguna, uno de los que más se ha escolarizado a lo largo de la Historia de la Educación Matemática, y aún en la actualidad sigue formando parte de Matemática académica en la Enseñanza Elemental.

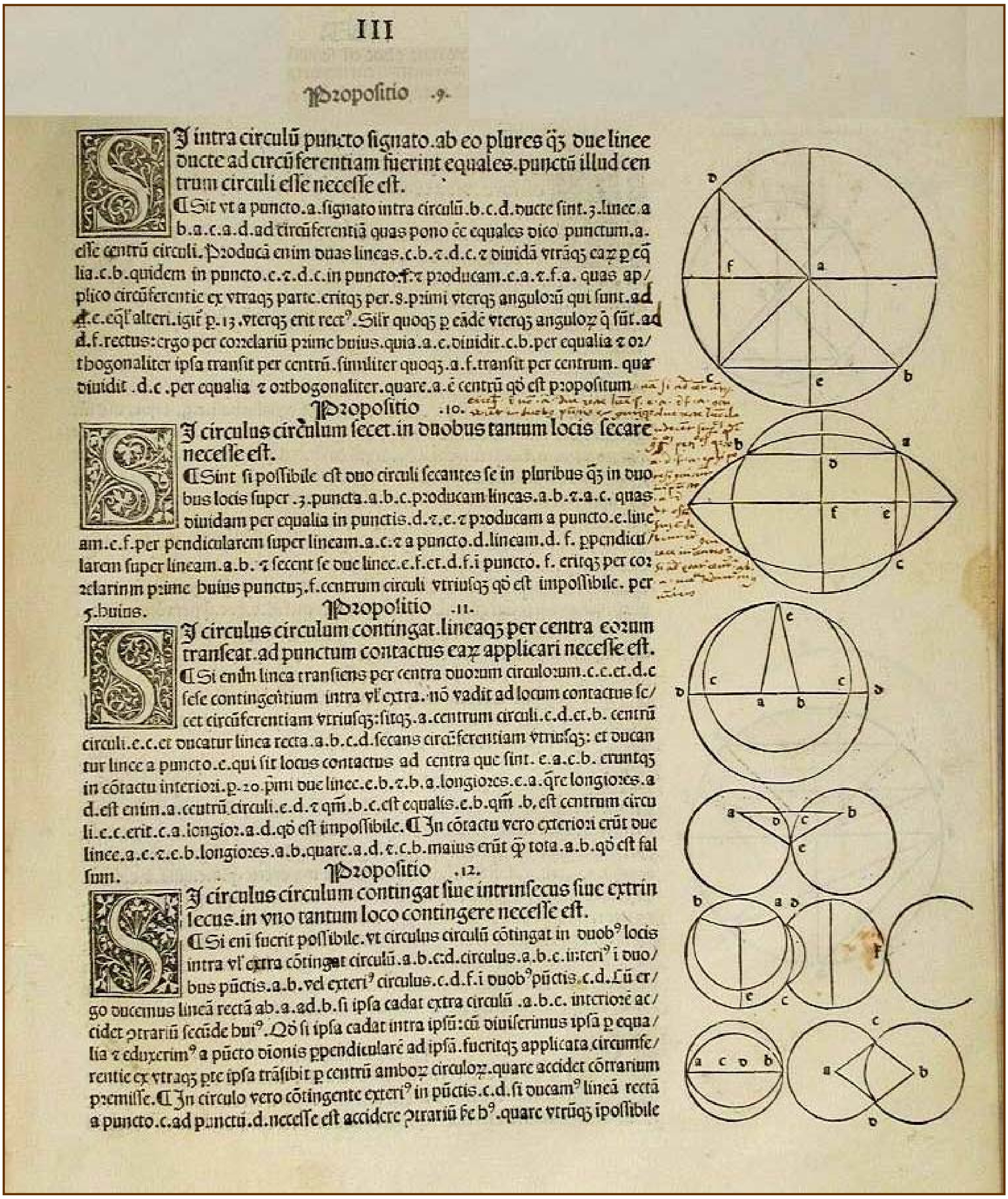
Proposiciones:

- Proposición III.1. Encontrar el centro de un círculo dado.
- Proposición III.2. La recta que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia de un círculo cae dentro del círculo.
- Proposición III.3. Si en un círculo una recta dibujada a través del centro divide en dos partes iguales a otra recta no dibujada a través del centro, la corta en ángulos rectos; y si la corta en ángulos rectos, la divide en dos partes iguales.
- Proposición III.4. Si en un círculo se cortan entre sí dos rectas que no pasan por el centro, no se dividen entre sí en dos partes iguales.
- Proposición III.5. Si dos círculos se cortan, sus centros no coinciden.
- Proposición III.6. Si dos círculos se tocan el uno al otro, sus centros no coinciden.

  [Según las proposiciones 5 y 6, las circunferencias concéntricas no tiene puntos en común y la circunferencia de centro y radio dado es única, véase el tercer postulado del libro I].

- Proposición III.9. Si se toma un punto dentro de un círculo y del punto al círculo caen más de dos rectas iguales, el punto tomado es el centro del círculo.
- Proposición III.10. Dos círculos no se cortan en más de dos puntos.
- Proposición III.11. Si dos círculos se tocan interiormente, la recta que une sus centros, prolongada, pasa por el punto de contacto.
- Proposición III.12. Si dos círculos se tocan el uno al otro exteriormente, la recta que une sus centros pasa por el punto de contacto.
- Proposición III.13. Dos círculos no se tocan más que en un punto, ya sea interior o exteriormente.
- Proposición III.14. En un círculo les rectas iguales están a la misma distancia del centro, y las que están a la misma distancia del centro son iguales.
- Proposición III.15. En un círculo el diámetro es la recta mayor y de las otras, la más próxima al centro es siempre mayor que la más lejana.
- Proposición III.16. La recta perpendicular en el extremo de un diámetro cae fuera del círculo; entre esta recta y la circunferencia no se interpone ninguna otra y el ángulo del semicírculo es mayor que cualquier ángulo rectilíneo agudo y lo restante menor («*ángulo córneo*» o «*ángulo de contingencia*»).
- Proposición III.17. Desde un punto trazar una recta tangente a un círculo dado.
- Proposición III.18. Si una recta es tangente a un círculo y se traza el radio en el punto de contacto, este radio es perpendicular a la tangente.
- Proposición III.19. Si una recta es tangente a un círculo y desde el punto de contacto se traza una perpendicular a la tangente, el centro del círculo está en esa perpendicular.
- Proposición III.20. En un círculo el ángulo que tiene su vértice en el centro del círculo es doble del que lo tiene en la circunferencia si ambos ángulos abarcan el mismo arco.
- Proposición III.21. En un círculo los ángulos que abarcan el mismo segmento circular son iguales entre sí.
- Proposición III.22. En los cuadriláteros colocados en un círculo los ángulos opuestos equivalen a dos rectos.
- Proposición III.23. Sobre la misma recta y al mismo lado de ella no se pueden construir dos segmentos circulares semejantes y desiguales.
- Proposición III.24. Los segmentos circulares semejantes sobre rectas iguales son iguales.

LA GEOMETRÍA DEL CÍRCULO EN EL LIBRO III DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES



III

Propositio .9.

Si intra circulũ puncto signato.ab eo plures q̃ȝ due linee ducte ad circũferentiam fuerint equales.punctũ illud centrum circuli esse necesse est.

Sit vt a puncto.a.signato intra circulũ.b.c.d.ducte sint.3.linee.a b.a.c.a.d.ad circũferentiã quas pono ẽe equales dico punctum.a. esse centrũ circuli. Producã enim duas lineas.c.b.ꝛ.d.c.ꝛ diuidã vtrãqȝ earꝝ ꝑ eq̃lia.c.b.quidem in puncto.e.ꝛ.d.c.in puncto.f.ꝛ producam.e.a.ꝛ.f.a. quas applico circũferentie ex vtraqȝ parte.eritqȝ per.8.primi vterqȝ angulorũ qui sunt.ad e.eq̃l alteri.igiẽ p.13.vterqȝ erit rect⁹.Silr quoqȝ ꝑ eãdẽ vterqȝ angulorꝝ q̃ sũt.ad f.rectus:ergo per correlariũ prime huius.quia.a.e.diuidit.c.b.per equalia ꝛ orthogonaliter ipsa transit per centrũ.similiter quoqȝ.a.f.transit per centrum. quare diuidit .d.c .per equalia ꝛ orthogonaliter.quare.a.ẽ centrũ qđ est propositum

Propositio .10.

Si circulus circulum secet.in duobus tantum locis secare necesse est.

Sint si possibile est duo circuli secantes se in pluribus q̃ȝ in duobus locis super .3.puncta.a.b.c.producam lineas.a.b.ꝛ.a.c. quas diuidam per equalia in punctis.d.ꝛ.e.ꝛ producam a puncto.e.lineam.e.f.perpendicularem super lineam.a.c.ꝛ a puncto.d.lineam.d. f. ꝑpendicularem super lineam.a.b. ꝛ secent se due linee.e.f.et.d.f.i puncto. f. eritqȝ per correlarium prime huius punctuȝ.f.centrum circuli vtriusqȝ qđ est impossibile. per 5.huius.

Propositio .11.

Si circulus circulum contingat.lineaqȝ per centra eorum transeat.ad punctum contactus earꝝ applicari necesse est.

Si enim linea transiens per centra duorum circulorum.e.c.et.d.c sese contingentium intra vl̃ extra.nõ vadit ad locum contactus secet circũferentiam vtriusqȝ:sitqȝ.a.centrum circuli.c.d.et.b. centrũ circuli.e.c.et ducatur linea recta.a.b.c.d.secans circũferentiam vtriusqȝ: et ducantur linee a puncto.c.qui sit locus contactus ad centra que sint. e.a.c.b. eruntqȝ in cõtactu interiori.p.20.pⁱmi due linee.c.b.ꝛ.b.a.longiores.c.a.q̃re longiores.a d.est enim.a.centrũ circuli.c.d.ꝛ q̃m.b.c.est equalis.e.b.q̃m .b.est centrum circuli.e.c.erit.c.a.longior.a.d.qđ est impossibile. In cõtactu vero exteriori erũt due linee.a.c.ꝛ.c.b.longiores.a.b.quare.a.d.ꝛ.c.b.maius erũt q̃ tota.a.b.qđ est falsum.

Propositio .12.

Si circulus circulum contingat siue intrinsecus siue extrinsecus.in vno tantum loco contingere necesse est.

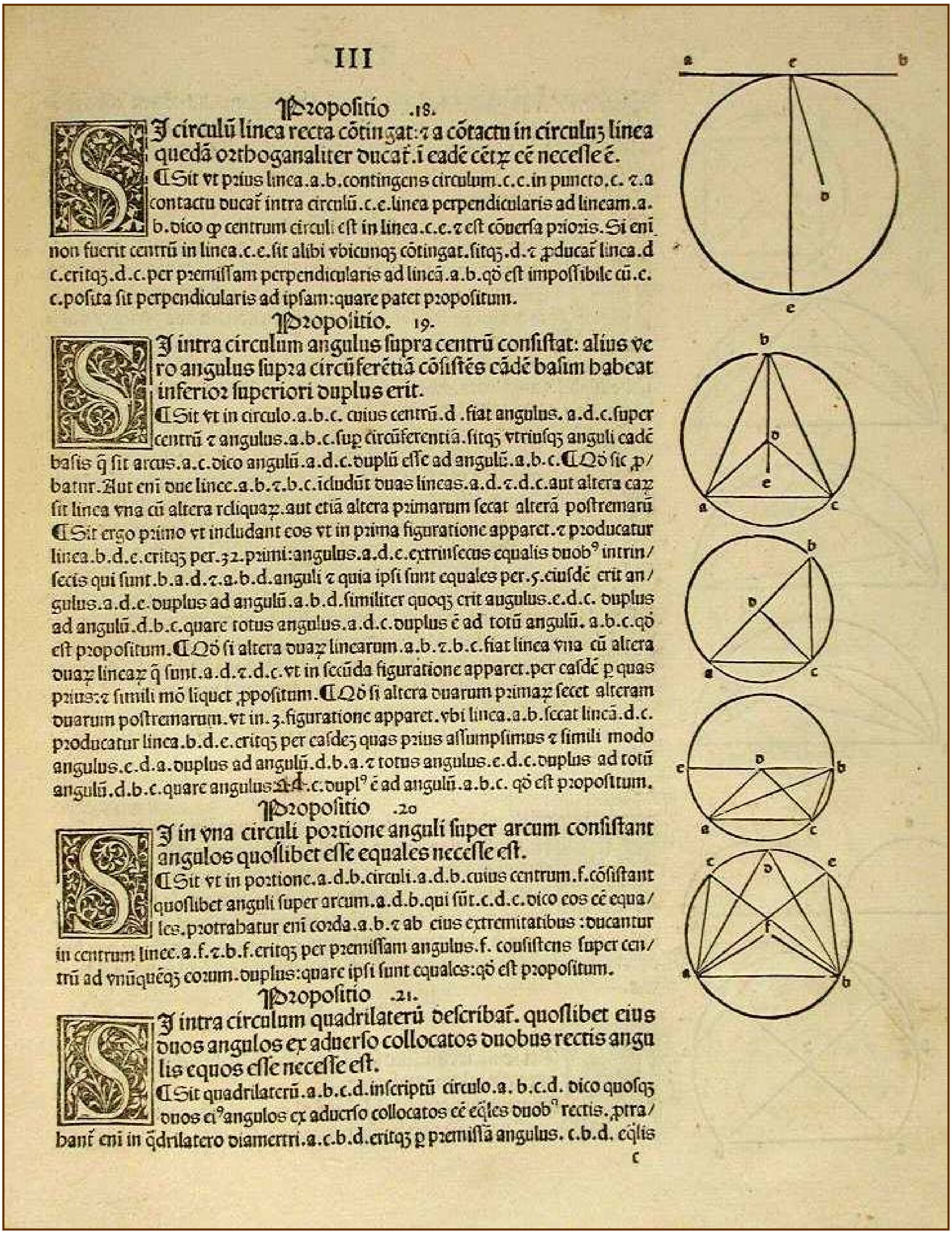
Si eñi fuerit possibile.vt circulus circulũ cõtingat in duob⁹ locis intra vl̃ extra cõtingat circulũ.a.b.c.d.circulus.a.b.e.interi⁹ i duobus pũctis.a.b.vel exteri⁹ circulus.c.d.f.i duob⁹ pũctis.c.d.Cũ ergo ducemus lineã rectã ab.a.ad.b.si ipsa cadat extra circulũ .a.b.c. interiorẽ accidet ꝯtrariũ secũde hui⁹.Qđ si ipsa cadat intra ipsũ:cũ diuiserimus ipsã ꝑ equalia ꝛ eduxerim⁹ a pũcto diuisionis ꝑpendicularẽ ad ipsã.fueritqȝ applicata circumferentie ex vtraqȝ pte ipsa trãsibit ꝑ centrũ amborꝝ circulorꝝ.quare accidet cõtrarium premisse. In circulo vero cõtingente exteri⁹ in pũctis.c.d.si ducam⁹ lineã rectã a puncto.c.ad punctũ.d.necesse est accidere ꝯtrariũ se b⁹.quare vtrũqȝ impossibile

Las Proposiciones 9, 10, 11 y 12 del Libro III de *Los Elementos* de Euclides en la edición de E.Ratdolt (Venecia, 1482).

La Proposición 9 trata de una propiedad del centro del círculo y las otras estudian propiedades de los círculos tangentes y secantes.

LA GEOMETRÍA DEL CÍRCULO

EN EL LIBRO III DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES



III

Propositio .18.

SI circulũ linea recta cõtingat: ⁊ a cõtactu in circulũ linea quedã orthoganaliter ducat̃. i eadẽ cẽtꝝ ẽẽ necesse ẽ.
¶ Sit vt prius linea.a.b.contingens circulum.c.e.in puncto.c. ⁊.a contactu ducat̃ intra circulũ.c.e.linea perpendicularis ad lineam.a.b.dico ꝙ centrum circuli est in linea.c.e.⁊ est cõuersa prioris. Si eni non fuerit centrũ in linea.c.e.sit alibi vbicunqꝫ cõtingat.sitqꝫ.d.⁊ ꝑducat̃ linea.d c.eritqꝫ.d.c.per premissam perpendicularis ad lineã.a.b.qḋ est impossibile cũ.c. c.posita sit perpendicularis ad ipsam: quare patet propositum.

Propositio. 19.

SI intra circulum angulus supra centrũ consistat: alius vero angulus supra circũferẽtiã cõsistẽs eãdẽ basim habeat inferior superiori duplus erit.
¶ Sit vt in circulo.a.b.c. cuius centrũ.d. fiat angulus. a.d.c.super centrũ ⁊ angulus.a.b.c.sup circũferentiã.sitqꝫ vtriusqꝫ anguli eadẽ basis q̃ sit arcus.a.c.dico angulũ.a.d.c.duplũ esse ad angulũ.a.b.c.¶ Qḋ sic ꝓbatur. Aut eni due linee.a.b.⁊.b.c.icludũt duas lineas.a.d.⁊.d.c.aut altera earꝫ sit linea vna cũ altera reliquarꝫ.aut etiã altera primarum secat alterã postremarũ
¶ Sit ergo primo vt includant eos vt in prima figuratione apparet.⁊ producatur linea.b.d.e.eritqꝫ per.32.primi: angulus.a.d.e.extrinsecus equalis duob⁹ intrinsecis qui sunt.b.a.d.⁊.a.b.d.anguli ⁊ quia ipsi sunt equales per.5.eiusdẽ erit angulus.a.d.e.duplus ad angulũ.a.b.d.similiter quoqꝫ erit angulus.e.d.c. duplus ad angulũ.d.b.c.quare totus angulus.a.d.c.duplus ẽ ad totũ angulũ. a.b.c.qḋ est propositum. ¶ Qḋ si altera duarꝫ linearum.a.b.⁊.b.c.fiat linea vna cũ altera duarꝫ linearꝫ q̃ sunt.a.d.⁊.d.c.vt in secũda figuratione apparet.per easdẽ ꝑ quas prius: ⁊ simili mõ liquet ꝓpositum. ¶ Qḋ si altera duarum primarꝫ secet alteram duarum postremarum. vt in.3.figuratione apparet. vbi linea.a.b.secat lineã.d.c. producatur linea.b.d.e.eritqꝫ per easdeꝫ quas prius assumpsimus ⁊ simili modo angulus.e.d.a.duplus ad angulũ.d.b.a.⁊ totus angulus.e.d.c.duplus ad totũ angulũ.d.b.c.quare angulus.a.d.c.dupl⁹ ẽ ad angulũ.a.b.c. qḋ est propositum.

Propositio .20

SI in vna circuli portione anguli super arcum consistant angulos quoslibet esse equales necesse est.
¶ Sit vt in portione.a.d.b.circuli.a.d.b.cuius centrum.f.cõsistant quoslibet anguli super arcum.a.d.b.qui sũt.c.d.e.dico eos ẽẽ equales. protrahatur eni corda.a.b.⁊ ab eius extremitatibus: ducantur in centrum linee.a.f.⁊.b.f.eritqꝫ per premissam angulus.f. consistens super centrũ ad vnũquẽqꝫ eorum.duplus: quare ipsi sunt equales: qḋ est propositum.

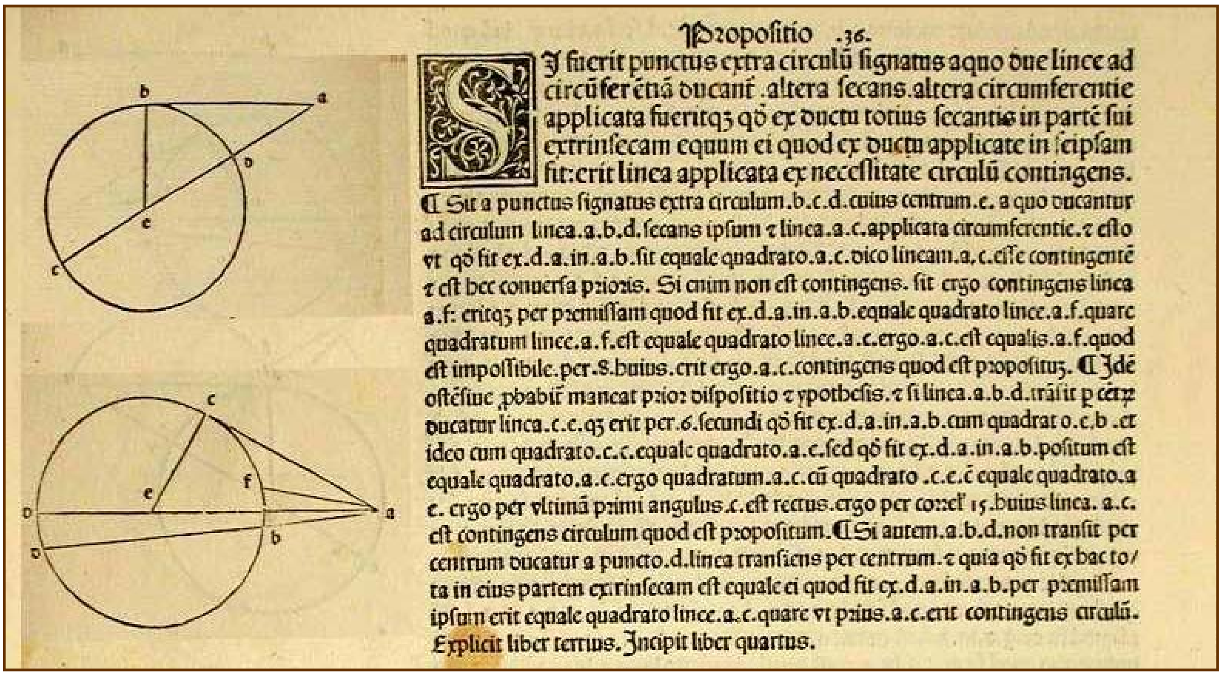
Propositio .21.

SI intra circulum quadrilaterũ describat̃. quoslibet eius duos angulos ex aduerso collocatos duobus rectis angulis equos esse necesse est.
¶ Sit quadrilaterũ.a.b.c.d.inscriptũ circulo.a. b.c.d. dico quosqꝫ duos ei⁹ angulos ex aduerso collocatos ẽẽ eq̃les duob⁹ rectis. ꝓtrahant̃ eni in q̃drilatero diametri.a.c.b.d.eritqꝫ ꝑ premissã angulus. c.b.d. eq̃lis
c

Las Proposiciones 18, 19, 20 y 21 del Libro III de *Los Elementos* de Euclides en la edición de E.Ratdolt (Venecia, 1482).

Estas Proposiciones son importantes resultados sobre tangentes y ángulos en el círculo.

- Proposición III.25. Dado un segmento de círculo, completar el círculo al que pertenece.
- Proposición III.26. En círculos iguales, los ángulos iguales abarcan arcos iguales, tanto si tienen el vértice en el centro como si lo tienen en la circunferencia.
- Proposición III.27. En círculos iguales, los ángulos que abarcan arcos iguales son iguales, tanto si tienen el vértice en el centro como si lo tienen en la circunferencia.
- Proposición III.28. En círculos iguales rectas iguales subtienden arcos iguales, el mayor con el mayor y el menor con el menor.
- Proposición III.29. En círculos iguales arcos iguales subtienden rectas iguales.
- Proposición III.30. Dividir un arco en dos partes iguales.
- Proposición III.31. En un círculo el ángulo colocado en el semicírculo es recto [*Teorema de Tales*]; el que está en el segmento mayor es menor que un ángulo recto; el que está en el segmento menor es mayor que un ángulo recto; y además, el ángulo del segmento mayor es mayor que un ángulo recto y el ángulo del segmento menor es menor que un ángulo recto.
- Corolario. Cuando un ángulo de un triángulo equivale a los otros dos juntos, es recto.
- Proposición III.33. Sobre una recta dada, construir un segmento de círculo que comprenda un ángulo igual a un ángulo dado [arco capaz de un ángulo].
- Proposición III.35. Si dos rectas se cortan en el interior de un círculo, el rectángulo comprendido por los segmentos de una recta es igual al comprendido por los segmentos de la otra [«*Potencia de un punto respecto de una circunferencia*»].
- Proposición III.36. Si desde un punto exterior a un círculo se trazan dos rectas, una de las cuales lo corta y la otra sólo lo toca [es tangente], el rectángulo comprendido por toda la secante y su parte exterior entre el punto y la circunferencia convexa del círculo, equivale al cuadrado construido sobre la tangente.
- Proposición III.37. Si desde un punto exterior a un círculo se trazan dos rectas, una de las cuales lo corta y la otra lo toca, y el rectángulo comprendido por toda la secante y su parte exterior entre el punto y la circunferencia cóncava, equivale al cuadrado de la recta que lo toca, ésta es tangente al círculo.


Propositio .36.

Si fuerit punctus extra circulū signatus a quo due linee ad circūferētiā ducant .altera secans.altera circumferentie applicata fueritqȝ qd̓ ex ductu totius secantis in partē sui extrinsecam equum ei quod ex ductu applicate in seipsam fit:erit linea applicata ex necessitate circulū contingens.

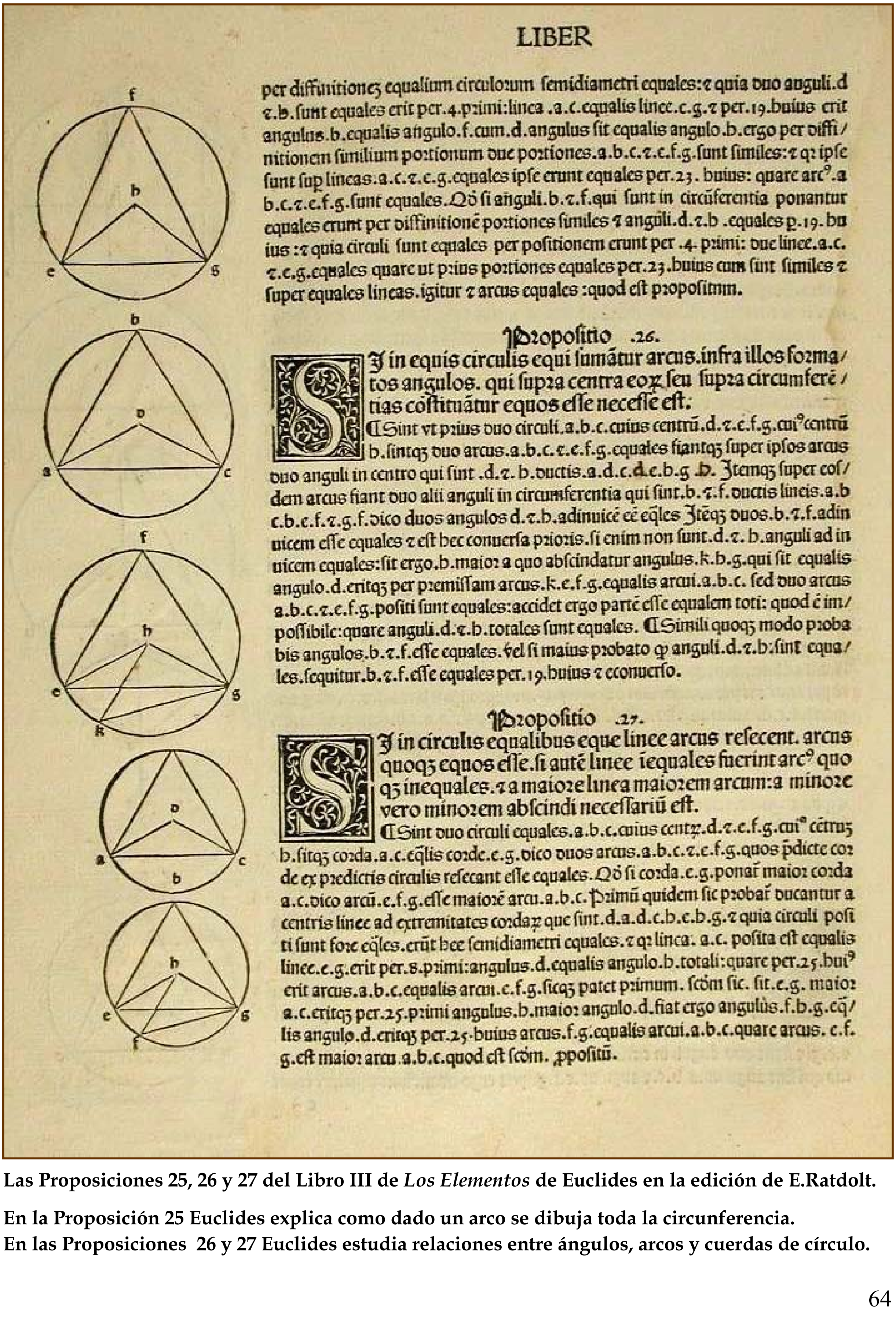
Sit a punctus signatus extra circulum.b.c.d.cuius centrum.e. a quo ducantur ad circulum linea.a.b.d.secans ipsum ⁊ linea.a.c.applicata circumferentie.⁊ esto vt qd̓ fit ex.d.a.in.a.b.fit equale quadrato.a.c.dico lineam.a.c.esse contingentē ⁊ est hec conuersa prioris. Si enim non est contingens. sit ergo contingens linea a.f: eritqȝ per premissam quod fit ex.d.a.in.a.b.equale quadrato linee.a.f.quare quadratum linee.a.f.est equale quadrato linee.a.c.ergo.a.c.est equalis.a.f.quod est impossibile.per.8.huius.erit ergo.a.c.contingens quod est propositū. Idē ostēsiue pbabit̄ maneat prior dispositio ⁊ ypothesis.⁊ si linea.a.b.d.trāsit p centrū ducatur linea.c.e.qȝ erit per.6.secundi qd̓ fit ex.d.a.in.a.b.cum quadrato.c.b .et ideo cum quadrato.c.e.equale quadrato.a.e.sed qd̓ fit ex.d.a.in.a.b.positum est equale quadrato.a.c.ergo quadratum.a.c.cū quadrato .c.e.ē equale quadrato.a e. ergo per vltimā primi angulus.c.est rectus.ergo per corel' 15.huius linea. a.c. est contingens circulum quod est propositum. Si autem.a.b.d.non transit per centrum ducatur a puncto.d.linea transiens per centrum.⁊ quia qd̓ fit ex hac tota in eius partem extrinsecam est equale ei quod fit ex.d.a.in.a.b.per premissam ipsum erit equale quadrato linee.a.c.quare vt prius.a.c.erit contingens circulū.

Explicit liber tertius. Incipit liber quartus.

La proposición 36 del Libro III de *Los Elementos* de Euclides en la edición de E.Ratdolt.

A partir de las proposiciones III.36, III.36 y III.37, el geómetra J.Steiner (1796-1863) introdujo el concepto de *potencia de un punto respecto de una circunferencia*.

LA GEOMETRÍA DEL CÍRCULO
EN EL LIBRO III DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES



LIBER

per diffinitione equalium circulorum semidiametri equales: ⁊ quia duo anguli .d ⁊ .b. sunt equales erit per .4. primi: linea .a.c. equalis linee .e.g. ⁊ per .19. huius erit angulus .b. equalis angulo .f. cum .d. angulus sit equalis angulo .b. ergo per diffinitionem similium portionum due portiones .a.b.c. ⁊ .e.f.g. sunt similes: ⁊ quia ipse sunt sup lineas .a.c. ⁊ .e.g. equales ipse erunt equales per .23. huius: quare arcus .a b.c. ⁊ .e.f.g. sunt equales. Quod si anguli .b. ⁊ .f. qui sunt in circumferentia ponantur equales erunt per diffinitionem portiones similes ⁊ anguli .d. ⁊ .b .equales per .19. huius: ⁊ quia circuli sunt equales per positionem erunt per .4. primi: due linee .a.c. ⁊ .e.g. equales quare ut prius portiones equales per .23. huius cum sint similes ⁊ super equales lineas. igitur ⁊ arcus equales: quod est propositum.

Propositio .26.

Si in equis circulis equi sumantur arcus. infra illos formatos angulos. qui supra centra eorum seu supra circumferentias constituantur equos esse necesse est.

Sint ut prius duo circuli .a.b.c. cuius centrum .d. ⁊ .e.f.g. cuius centrum .h. sintque duo arcus .a.b.c. ⁊ .e.f.g. equales fiantque super ipsos arcus duo anguli in centro qui sint .d. ⁊ .h. ductis .a.d.c. ⁊ .e.h.g .h. Itemque super eosdem arcus fiant duo alii anguli in circumferentia qui sint .b. ⁊ .f. ductis lineis .a.b c.b.e.f. ⁊ .g.f. dico duos angulos .d. ⁊ .h. adinvicem esse equales Itemque duos .b. ⁊ .f. adinvicem esse equales ⁊ est hec conversa prioris. si enim non sunt .d. ⁊ .h. anguli adinvicem equales: sit ergo .h. maior a quo abscindatur angulus .k.h.g. qui sit equalis angulo .d. eritque per premissam arcus .k.e.f.g. equalis arcui .a.b.c. sed duo arcus .a.b.c. ⁊ .e.f.g. positi sunt equales: accidet ergo partem esse equalem toti: quod est impossibile: quare anguli .d. ⁊ .h. totales sunt equales. Simili quoque modo probabis angulos .b. ⁊ .f. esse equales. vel si maius probato quod anguli .d. ⁊ .h. sint equales. sequitur .b. ⁊ .f. esse equales per .19. huius ⁊ econverso.

Propositio .27.

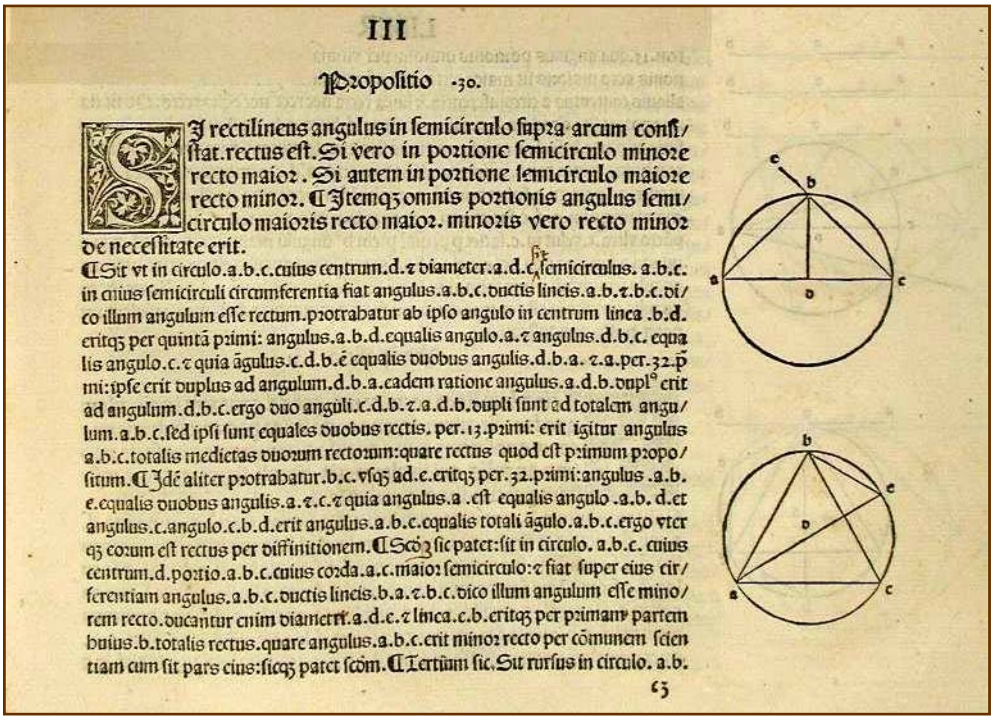
Si in circulis equalibus eque linee arcus resecent. arcus quoque equos esse. si autem linee inequales fuerint arcus quoque inequales. ⁊ a maiore linea maiorem arcum: a minore vero minorem abscindi necessarium est.

Sint duo circuli equales .a.b.c. cuius centrum .d. ⁊ .e.f.g. cuius centrum .h. sitque corda .a.c. equalis corde .e.g. dico duos arcus .a.b.c. ⁊ .e.f.g. quos predicte corde ex predictis circulis resecant esse equales. Quod si corda .e.g. ponatur maior corda .a.c. dico arcum .e.f.g. esse maiorem arcu .a.b.c. Primum quidem sic probatur ducantur a centris linee ad extremitates cordarum que sint .d.a.d.c.h.e.h.g. ⁊ quia circuli positi sunt fore equales. erunt hee semidiametri equales. ⁊ quia linea .a.c. posita est equalis linee .e.g. erit per .8. primi: angulus .d. equalis angulo .h. totali: quare per .25. huius erit arcus .a.b.c. equalis arcui .e.f.g. sicque patet primum. secundum sic. sit .e.g. maior .a.c. eritque per .25. primi angulus .h. maior angulo .d. fiat ergo angulus .f.h.g. equalis angulo .d. eritque per .25. huius arcus .f.g. equalis arcui .a.b.c. quare arcus .e.f. g. est maior arcu .a.b.c. quod est secundum propositum.

Las Proposiciones 25, 26 y 27 del Libro III de *Los Elementos* de Euclides en la edición de E.Ratdolt.

En la Proposición 25 Euclides explica como dado un arco se dibuja toda la circunferencia.
En las Proposiciones 26 y 27 Euclides estudia relaciones entre ángulos, arcos y cuerdas de círculo.

LA GEOMETRÍA DEL CÍRCULO
EN EL LIBRO III DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES



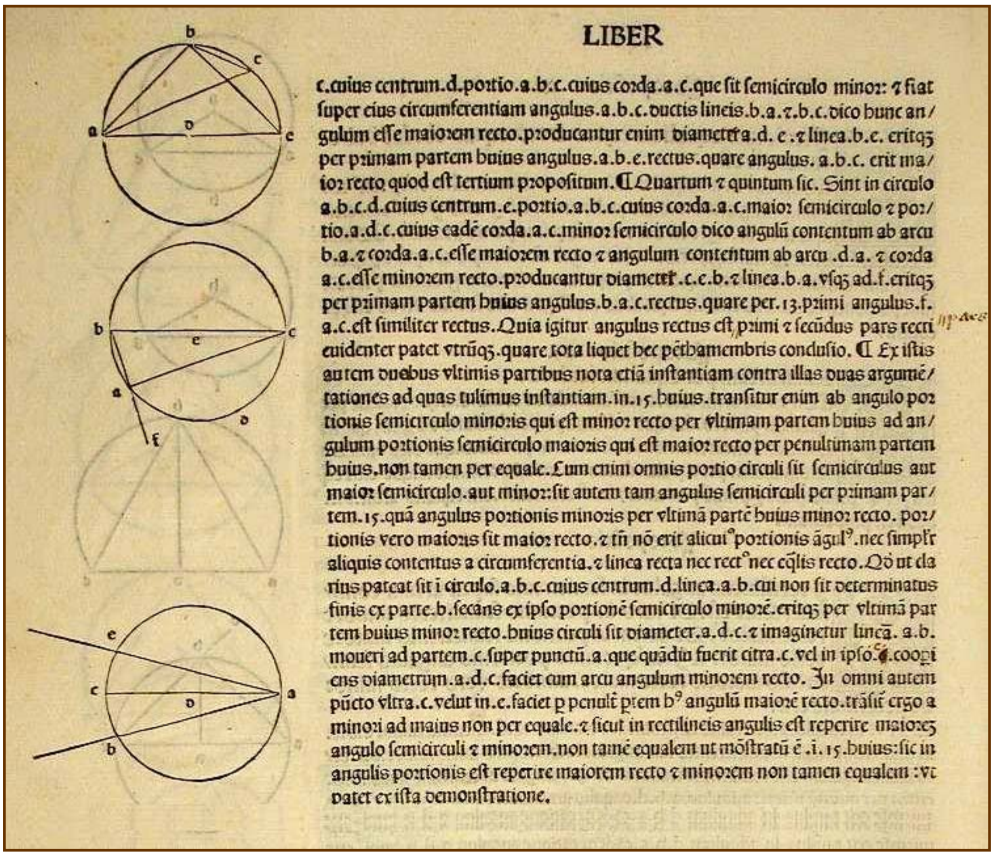
III

Propositio .30.

Si rectilineus angulus in semicirculo supra arcum constitat. rectus est. Si vero in portione semicirculo minore recto maior. Si autem in portione semicirculo maiore recto minor. ¶ Itemq; omnis portionis angulus semicirculo maioris recto maior. minoris vero recto minor de necessitate erit.

¶ Sit ut in circulo. a.b.c. cuius centrum. d. & diameter. a.d.c. semicirculus. a.b.c. in cuius semicirculi circumferentia fiat angulus. a.b.c. ductis lineis. a.b. & b.c. dico illum angulum esse rectum. protrahatur ab ipso angulo in centrum linea. b.d. eritq; per quintã primi: angulus. a.b.d. equalis angulo. a. & angulus. d.b.c. equalis angulo. c. & quia ãgulus. c.d.b. é equalis duobus angulis. d.b.a. & a. per. 32. p̃mi: ipse erit duplus ad angulum. d.b.a. eadem ratione angulus. a.d.b. dupl⁹ erit ad angulum. d.b.c. ergo duo anguli. c.d.b. & a.d.b. dupli sunt ad totalem angulum. a.b.c. sed ipsi sunt equales duobus rectis. per. 13. primi: erit igitur angulus a.b.c. totalis medietas duorum rectorum: quare rectus quod est primum propositum. ¶ Idẽ aliter protrahatur. b.c. usq; ad. e. eritq; per. 32. primi: angulus. a.b.e. equalis duobus angulis. a. & c. & quia angulus. a. est equalis angulo. a.b.d. et angulus. c. angulo. c.b.d. erit angulus. a.b.e. equalis totali ãgulo. a.b.c. ergo uterq; eorum est rectus per diffinitionem. ¶ Scõ3 sic patet: sit in circulo. a.b.c. cuius centrum. d. portio. a.b.c. cuius corda. a.c. maior semicirculo: & fiat super eius circumferentiam angulus. a.b.c. ductis lineis. b.a. & b.c. dico illum angulum esse minorem recto. ducantur enim diametrr. a.d.e. & linea. e.b. eritq; per primam partem huius. b. totalis rectus. quare angulus. a.b.c. erit minor recto per cõmunem scientiam cum sit pars eius: sicq; patet scõm. ¶ Tertiũm sic. Sit rursus in circulo. a.b.

65



LIBER

c. cuius centrum. d. portio. a.b.c. cuius corda. a.c. que sit semicirculo minor: & fiat super eius circumferentiam angulus. a.b.c. ductis lineis. b.a. & b.c. dico hunc angulum esse maiorem recto. producantur enim diametrr. a.d.e. & linea. b.e. eritq; per primam partem huius angulus. a.b.e. rectus. quare angulus. a.b.c. erit maior recto quod est tertium propositum. ¶ Quartum & quintum sic. Sint in circulo a.b.c.d. cuius centrum. e. portio. a.b.c. cuius corda. a.c. maior semicirculo & portio. a.d.c. cuius eadẽ corda. a.c. minor semicirculo dico angulũ contentum ab arcu b.a. & corda. a.c. esse maiorem recto & angulum contentum ab arcu. d.a. & corda a.c. esse minorem recto. producantur diametrr. c.e.b. & linea. b.a. usq; ad. f. eritq; per primam partem huius angulus. b.a.c. rectus. quare per. 13. primi angulus. f. a.c. est similiter rectus. Quia igitur angulus rectus est primi & secũdus pars recti evidenter patet utrũq;. quare tota liquet hec pẽthamembris conclusio. ¶ Ex istis autem duobus ultimis partibus nota etiã instantiam contra illas duas argumẽtationes ad quas tulimus instantiam. in. 15. huius. transitur enim ab angulo portionis semicirculo minoris qui est minor recto per ultimam partem huius ad angulum portionis semicirculo maioris qui est maior recto per penultimam partem huius. non tamen per equale. Cum enim omnis portio circuli sit semicirculus aut maior semicirculo. aut minor: sit autem tam angulus semicirculi per primam partem. 15. quã angulus portionis minoris per ultimã partẽ huius minor recto. portionis vero maioris sit maior recto. & tñ nõ erit alicui⁹ portionis ãgul⁹. nec simplr aliquis contentus a circumferentia. & linea recta nec rect⁹ nec eq̃lis recto. Qð ut clarius pateat sit i circulo. a.b.c. cuius centrum. d. linea. a.b. cui non sit determinatus finis ex parte. b. secans ex ipso portionẽ semicirculo minorẽ. eritq; per ultimã partem huius minor recto. huius circuli sit diameter. a.d.c. & imaginetur lineã. a.b. moueri ad partem. c. super punctũ. a. que quãdiu fuerit citra. c. vel in ipso. c. coopiens diametrum. a.d.c. faciet cum arcu angulum minorem recto. In omni autem pũcto ultra. c. velut in. e. faciet p penult ptem h⁹ angulũ maiorẽ recto. trãsit ergo a minori ad maius non per equale. & sicut in rectilineis angulis est reperire maiorem angulo semicirculi & minorem. non tamẽ equalem ut mõstratũ é. i. 15. huius: sic in angulis portionis est reperire maiorem recto & minorem non tamen equalem: ut patet ex ista demonstratione.

La Proposición III.31 de *Los Elementos* de Euclides.
En la edición de E.Ratdolt ocupa el lugar 30 y está situada en dos páginas.

Esta es una de las famosas proposiciones que procede de Tales, según la cual «*cualquier ángulo inscrito en el círculo que abarque un semicírculo es recto*».

El Libro IV

El contenido del Libro IV de *los Elementos* de Euclides también se atribuye, como el tercero, a los pitagóricos y a Hipócrates de Quíos. Contiene 7 definiciones y 16 proposiciones relativas a polígonos regulares inscritos y circunscritos en círculos. Concretamente Euclides describe cómo se pueden construir con regla y compás polígonos regulares de 3, 4, 5, 6 y 15 lados.

En la primera proposición se expone cómo inscribir un segmento en un círculo. En la segunda y tercera se explica cómo inscribir y circunscribir un triángulo en círculos, y en la cuarta y quinta cómo inscribir y circunscribir un círculo en un triángulo. En particular, en las proposiciones sobre el triángulo inscrito y circunscrito aparecen, respectivamente, las importantes cuestiones geométricas escolares de las bisectrices (y su punto de intersección, el incentro) y las mediatrices (y su punto de intersección, el circuncentro).

Desde la proposición sexta a la novena, Euclides estudia los mismos problemas para el cuadrado, es decir, la manera de inscribir y circunscribir un cuadrado en un círculo y viceversa. También de la proposición onceava a la decimocuarta, Euclides estudia los mismos problemas para el pentágono regular.

Previo a las construcciones relativas al pentágono, en la proposición décima, Euclides construye el llamado *Triángulo Áureo*, que es un triángulo isósceles en el que los ángulos iguales tienen amplitud doble del desigual. Este triángulo es utilizado para las construcciones sobre el pentágono.

En la decimoquinta proposición, Euclides estudia el problema de inscribir un hexágono regular en un círculo. Finalmente en la decimosexta y última proposición del Libro IV Euclides expone la forma de inscribir pentadecágono –polígono regular de 15 lados– en un círculo.

Como en otros muchos problemas geométricos, los geómetras griegos y matemáticos posteriores derrocharon considerables esfuerzos infructuosos en los intentos de construcción del resto de los polígonos regulares, dentro del marco general de la llamada limitación platónica a los instrumentos euclídeos, la regla y el compás.

LIBRO QVARTO
DELOS ELEMENTOS DE EVCLI
des Megarenſe philoſopho griego.

¶Definiciones.

1. ¶Dizeſe deſcribir ſe vna figura rectilinea ẽ otra figura rectilinea quando cada angulo dela figura inſcripta toca a cada lado de la figura en la qual ſe deſcribe.

2. ¶Dela miſmamanera vna figura ſe dize deſcribirſe a otra figura quãdo cada vn lado de la deſcripta a la redonda toca a cada angulo de aquella en cuyo derredor ſe deſcribe.

3. ¶Vna figura rectilinea ſe dize deſcribirſe ẽ vn circulo quãdo cada angulo de la figura inſcripta toca a la circũferẽcia del circulo

4 ¶Vn circulo, ſe dize dſcribirſe al derredor de vna figura rectilinea quando la circunferencia del circulo toca a cada angulo de aquella en cuyo derredor ſe deſcribe.

EVCLIDES. 69.

5. ¶El circulo ſe dize deſcribirſe ẽ vna figura rectilinea quando la circũferẽcia del circulo toca a cada lado de aquella en la qual ſe deſcribe.

6. Dizeſe deſcrebirſe vna figurarectilinea al derredor de vn circulo quando cada lado dela que ſe deſcribe al derredor toca en la circunferencia del circulo.

7. ¶Vna linea recta ſe dize aſſentarſe, quando ſus extremidades caen en la circunferẽcia del circulo.

Problema.1. Propoſicion.1.

¶En vn circulo dado aſſentar vna linea recta ygual a vna linea recta dada, que no es mayor que el diametro del circulo.

Sea el circulo dado. A B C. y la linea recta dada que no es mayor que el diametro ſea. D. Conuiene aora en el circulo. A B C. aſſentar a vna linea recta ygual a la linea recta. D. Tireſe el diametro del circulo. A B C. y ſea. B C. Si la, B C. es ygual a la. D. ya eſta hecho lo que ſe propone. Porque en el circulo dado. A B C. Eſta aſſentada la linea. B C. ygual a la miſma; D. Pero ſino mayor es la. B C. que no la. D. Pongaſe por la. 3. del. 1.) la. C E. ygual ala. D. y ſobre el centro. C. y el eſpacio. C E (por la tercera peticion.) deſcribaſe el circulo.

EL Libro IV de *Los Elementos* de Euclides.

Frontispicio con las definiciones y la primera proposición en la edición de Rodrigo Çamorano, primera en idioma castellano, Sevilla, 1576.

Definiciones:

D.IV.1. Se dice que una figura rectilínea está inscrita en otra figura rectilínea, cuando cada uno de los ángulos de la figura inscrita toca los lados respectivos de la figura en la que se inscribe.

D.IV.2. De manera semejante, se dice que una figura está circunscrita en torno de otra figura, cuando cada lado de la figura circunscrita toca los ángulos respectivos de la figura a la que circunscribe.

D.IV.3. Se dice que una figura rectilínea está inscrita en un círculo, cuando cada ángulo de la figura inscrita toca la circunferencia del círculo.

D.IV.4. Se dice que una figura rectilínea está circunscrita en torno a un círculo, cuando cada lado de la figura circunscrita toca a la circunferencia del círculo.

D.IV.5. De manera semejante, se dice que un círculo está inscrito en una figura, cuando la circunferencia del círculo toca cada lado de la figura en la que está inscrita.

D.IV.6. Se dice que un círculo está circunscrito en torno de una figura, cuando la circunferencia del círculo toca cada ángulo de la figura en torno a la que está circunscrito.

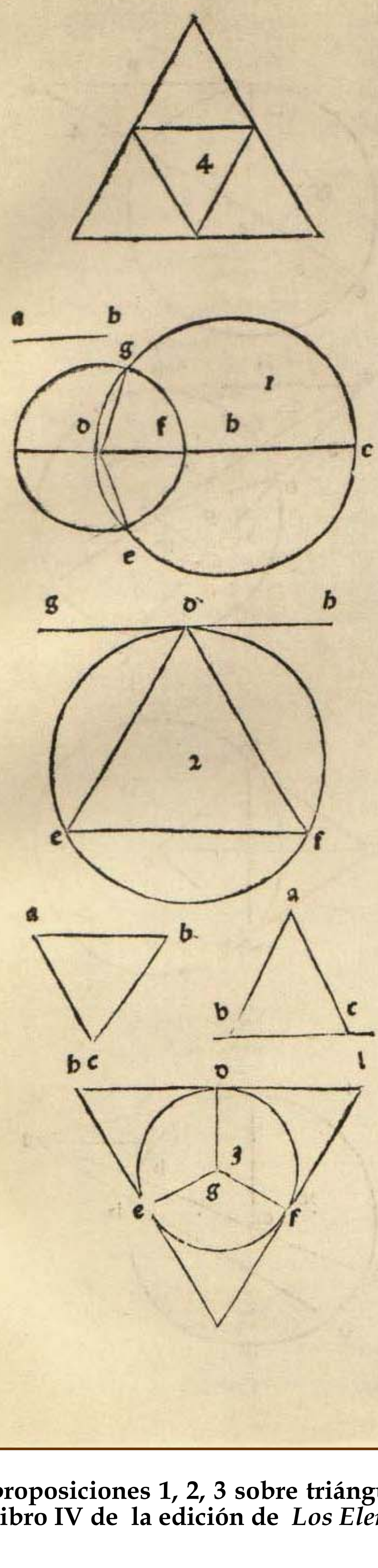
D.IV.7. Se dice que una recta está adaptada a un círculo, cuando sus extremos están en la circunferencia del círculo.

Proposiciones:

- Proposición IV.1. Adaptar a un círculo dado una recta igual a una recta dada que no sea mayor que el diámetro del círculo.
- Proposición IV.2. Inscribir en un círculo dado un triángulo de ángulos iguales a los de un triángulo dado.
- Proposición IV.3. Circunscribir a un círculo dado un triángulo de ángulos iguales a los de un triángulo dado.
- Proposición IV.4. Inscribir un círculo en un triángulo dado [las bisectrices de un triángulo se cortan en un punto, el incentro, que es el centro de la circunferencia circunscrita].
- Proposición IV.5. Circunscribir un círculo en un triángulo dado [solución al problema de encontrar la circunferencia que pasa por tres puntos, las mediatrices de un triángulo se cortan en un punto, el circuncentro, que es el centro de la circunferencia circunscrita].
- Proposición IV.6. Inscribir un cuadrado en un círculo dado.
- Proposición IV.7. Circunscribir un cuadrado en un círculo dado.
- Proposición IV.8. Inscribir un círculo en un cuadrado dado.
- Proposición IV.9. Circunscribir un círculo a un cuadrado dado.
- Proposición IV.10. Construir un triángulo isósceles cada uno de cuyos ángulos en la base sea doble del ángulo en el vértice [*Triángulo Áureo*, construcción de la estrella pitagórica, (símbolo de identificación de los pitagóricos)].
- Proposición IV.11. Inscribir un pentágono regular en un círculo dado.
- Proposición IV.12. Circunscribir un pentágono regular en un círculo dado.
- Proposición IV.13. Inscribir un círculo en un pentágono regular dado.
- Proposición IV.14. Circunscribir un círculo a un pentágono regular dado.
- Proposición IV.15. Inscribir un hexágono regular en un círculo dado.
- Proposición IV.16. Inscribir un pentadecágono regular en un círculo dado.

CONSTRUCCIÓN DE POLÍGONOS INSCRITOS Y CIRCUNSCRITOS EN EL CÍRCULO

EN EL LIBRO IV DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES



LIBER

¶ De figurarum vnius alteri inſcriptione ⁊ circumſcriptio
ne Liber quartus. Euclidis ex ſuprema Campani īterpretatio
ne. Magiſtro Luca paciolo de burgo. Sancti Sepulcri Ordi
nis minorum caſtigatore feruentiſſimo. Incipit.

Figura intra figuram dicit̄ inſcri
bi quādo ea que inſcribitur eius
in qua inſcribit̄. latera vnoquoq;
ſuorum angulorum ab interiore
parte contingit. ¶ Circumſcribi
vero figura figure perhibet̄ quo
tiens ea quidem figura eius cui
circumſcribit̄ ſuis lateribus om
nibus omnes angulos cōtingit.

Propoſitio .1.

Intra datum circulū date linee recte que diame
tro minime maior exiſtat equam rectam lineam
coaptare.
¶ Sit linea data. a. b. circulusq; datus. c. d. e. cuius diameter
c. d. qua non eſt maior linea. a. b. uolo intra datum circu
lum coaptare lineam equalem. a. b. q̄ ſi fuerit equalis dia
metro conſtat propoſitum. Si āt minor, ex diametro ſumatur. d. f. ſibi
equalis. & ſuper punctum. d. ſm quantitatem linee. d. f. deſcribatur circu
lus. f. e. g. ſecans datum circulum in punctis. g. & . e. ad alterū quorum duca
tur linea a puncto. d. ut. d. e. uel. d. g. eritq; utralibet earum equalis linee
a. b. eo q̄ utraq; earum eſt equalis linee. d. f. per diffinitionem circuli: qua
re habemus propoſitum.

Propoſitio .2.

Intra aſſignatum circulum triangulum triangu
lo aſſignato equiangulum collocare.
¶ Sit aſſignatus triangulus. a. b. c. aſſignatusq; circulus. d.
e. f. nolo intra hunc circulum collocare unum triāgulum
equiangulum triangulo. a. b. c. equilaterum enim non eſt
neceſſarium eſſe ſed eſt poſſibile. Produco. g. d. h. cōtin
gentem circulum in puncto. d. ſuper quem facio angulum. h. d. f. ducta li
nea. d. f. equalem angulo. c. & angulum. g. d. e. ducta linea. d. e. equalem
angulo. b. & protraho lineam. e. f. eritq; per. 31. tertii angulus. e. equalis an 31
gulo. c. quia uterq; eſt equalis angulo. h. d. f. c. quidem per poſitionem. e.
uero per. 31. tertii eadem ratione erit angulus. f. equalis angulo. b. quare p 31
2. primi. d. tertius erit equalis. a. tertio. quare habemus propoſitum. 32

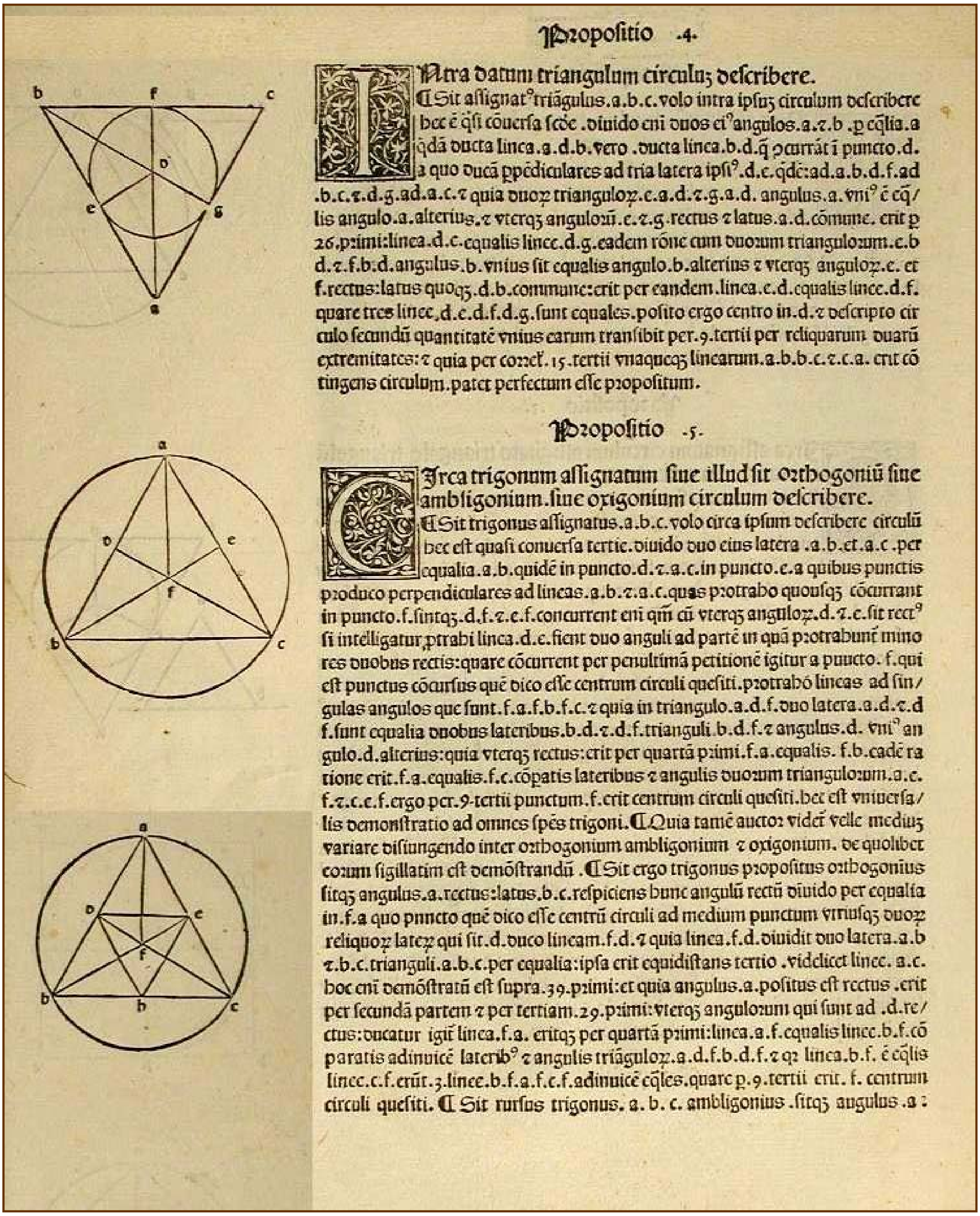
Propoſitio. .3.

Circa aſſignatum circulum aſſignato triangulo tri
angulum equiangulum deſcribere
¶ Sint ut prius aſſignatus triangulus. a. b. c. aſſignatusq;
circulus. d. e. f. cuius centrum. g. circa hunc circulum uolo
deſcribere unum triangulum eqangulum triangulo. a. b. c.
equilaterum enim non eſt neceſſarium ſed ē poſſibile. Pro
ducam baſim. b. c. in utranq; ptem. ut fiant duo anguli extrinſeci. & a cen
tro. g. Producam lineam. g. d. ad circumferentiam. & conſtituam angu
lum. d. g. e. ducta linea. g. e. equalē angulo. b. extrinſeco. & . d. g. f. ducta li
nea. g. f. equalē. c. extrinſeco. & a punctis. d. e. f. producam in utranq; partē
lineas orthogonaliter que per correlarium. 15. tertii erūt contingentes cir 15

Las proposiciones 1, 2, 3 sobre triángulos inscritos y circunscritos a un círculo en el Folio 26 verso del Libro IV de la edición de *Los Elementos* de Euclides de Paganius Paganinus (Venecia, 1509).

CONSTRUCCIÓN DE POLÍGONOS INSCRITOS Y CIRCUNSCRITOS EN EL CÍRCULO

EN EL LIBRO IV DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES



Propositio .4.

Intra datum triangulum circulū describere.

¶ Sit assignatꝰ triāgulus.a.b.c.volo intra ipsū circulum describere hec ē q̄si cōuersa scōe .diuido eni duos eiꝰ angulos.a.ꝛ.b .ꝑ eq̄lia.a q̄dā ducta linea.a.d.b.vero .ducta linea.b.d.q̄ ꝯcurrāt ī puncto.d. a quo ducā ꝑpēdiculares ad tria latera ipsiꝰ.d.e.q̄dē:ad.a.b.d.f.ad .b.c.ꝛ.d.g.ad.a.c.ꝛ quia duoꝝ trianguloꝝ.e.a.d.ꝛ.g.a.d. angulus.a.vniꝰ ē eq̄lis angulo.a.alterius.ꝛ vterq̄ angulorū.e.ꝛ.g.rectus ꝛ latus.a.d.cōmune. erit ꝑ 26.primi:linea.d.e.equalis linee.d.g.eadem rōne cum duorum triangulorum.e.b d.ꝛ.f.b:d.angulus.b.vnius sit equalis angulo.b.alterius ꝛ vterq̄ angulorum.e. et f.rectus:latus quoq̄.d.b.commune:erit per eandem.linea.e.d.equalis linee.d.f. quare tres linee,d.e.d.f.d.g.sunt equales.posito ergo centro in.d.ꝛ descripto circulo secundū quantitatē vnius earum transibit per.9.tertii per reliquarum duarū extremitates:ꝛ quia per concl.15.tertii vnaqueq̄ linearum.a.b.b.c.ꝛ.c.a. erit cōtingens circulum.patet perfectum esse propositum.

Propositio .5.

Circa trigonum assignatum siue illud sit orthogoniū siue ambligonium.siue oxigonium circulum describere.

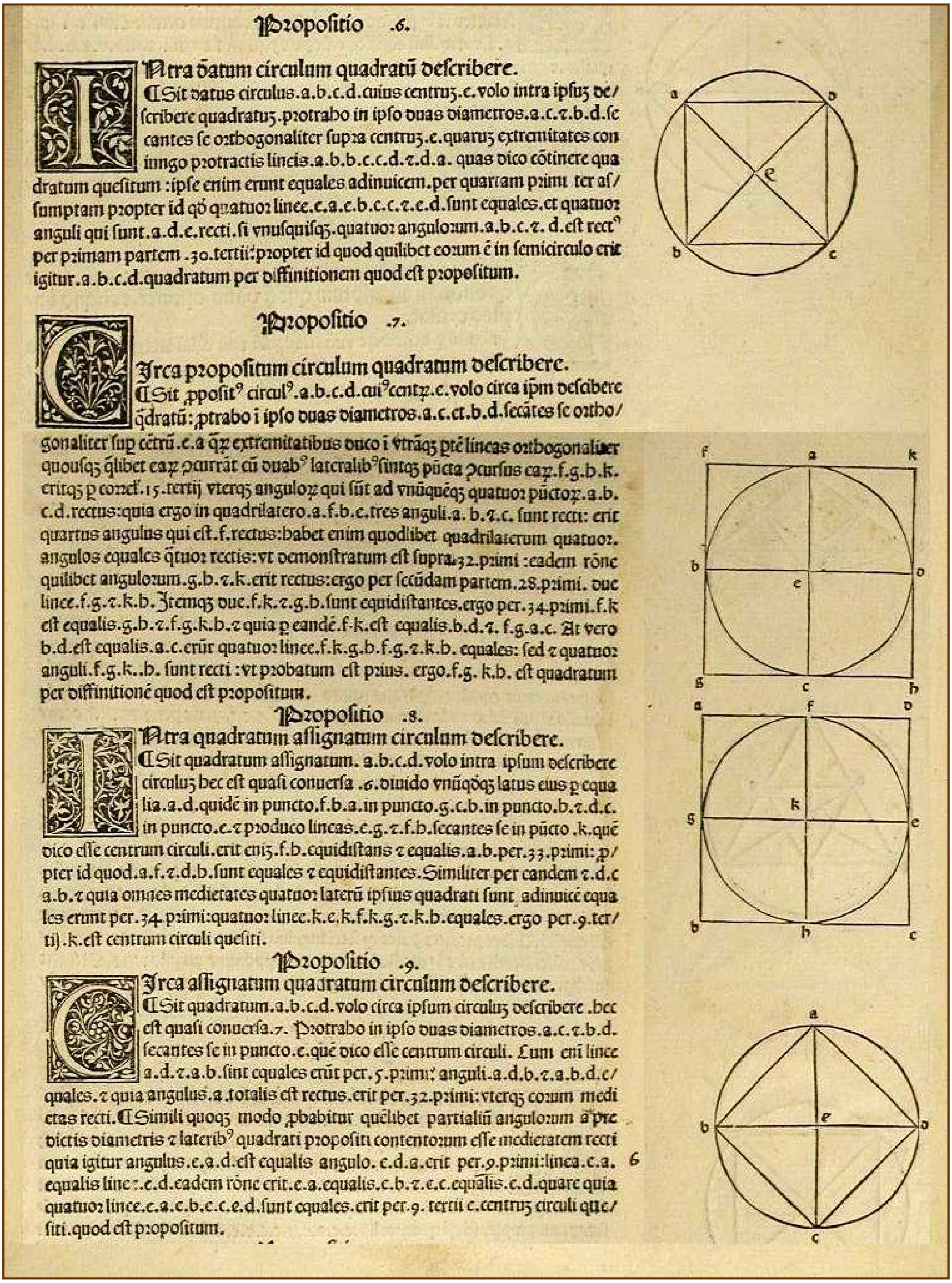
¶ Sit trigonus assignatus.a.b.c.volo circa ipsum describere circulū hec est quasi conuersa tertie.diuido duo eius latera .a.b.et.a.c .per equalia.a.b.quidē in puncto.d.ꝛ.a.c.in puncto.e.a quibus punctis produco perpendiculares ad lineas.a.b.ꝛ.a.c.quas protraho quousq̄ cōcurrant in puncto.f.sintq̄.d.f.ꝛ.e.f.concurrent eni q̄m cū vterq̄ angulorum.d.ꝛ.e.sit rectꝰ si intelligatur ꝓtrahi linea.d.e.fient duo anguli ad partē in quā protrahunt minores duobus rectis:quare cōcurrent per penultimā petitionē igitur a puncto. f.qui est punctus cōcursus quē dico esse centrum circuli quesiti.protrahō lineas ad singulas angulos que sunt.f.a.f.b.f.c.ꝛ quia in triangulo.a.d.f.duo latera.a.d.ꝛ.d f.sunt equalia duobus lateribus.b.d.ꝛ.d.f.trianguli.b.d.f.ꝛ angulus.d. vniꝰ angulo.d.alterius:quia vterq̄ rectus:erit per quartā primi.f.a.equalis. f.b.eadē ratione erit.f.a.equalis.f.c.cōparis lateribus ꝛ angulis duorum triangulorum.a.e. f.ꝛ.c.e.f.ergo per.9.tertii punctum.f.erit centrum circuli quesiti.hec est vniuersalis demonstratio ad omnes spēs trigoni.¶ Quia tamē auctor videt velle mediū variare disiungendo inter orthogonium ambligonium ꝛ oxigonium. de quolibet eorum sigillatim est demōstrandū .¶ Sit ergo trigonus propositus orthogonius sitq̄ angulus.a.rectus:latus.b.c.respiciens hunc angulū rectū diuido per equalia in.f.a quo puncto quē dico esse centrū circuli ad medium punctum vtriusq̄ duorum reliquorum laterum qui sit.d.duco lineam.f.d.ꝛ quia linea.f.d.diuidit duo latera.a.b ꝛ.b.c.trianguli.a.b.c.per equalia:ipsa erit equidistans tertio .videlicet linee. a.c. hoc eni demōstratū est supra.39.primi:et quia angulus.a.positus est rectus .erit per secundā partem ꝛ per tertiam.29.primi:vterq̄ angulorum qui sunt ad .d.rectus:ducatur igit linea.f.a. eritq̄ per quartā primi:linea.a.f.equalis linee.b.f.cōparatis adinuicē laterībꝰ ꝛ angulis triāgulorum.a.d.f.b.d.f.ꝛ quia linea.b.f. ē eq̄lis linee.c.f.erūt.3.linee.b.f.a.f.c.f.adinuicē eq̄les.quare p.9.tertii erit. f. centrum circuli quesiti. ¶ Sit rursus trigonus. a. b. c. ambligonius .sitq̄ angulus .a:

Las Proposiciones IV.4 y V.5 de *Los Elementos* de Euclides (edición de E.Ratdolt, Venecia, 1482).

En estas dos proposiciones Euclides resuelve los problemas de la Matemática escolar de inscribir y circunscribir un triángulo dado en un círculo, relacionados con las importantes cuestiones geométricas de las bisectrices (y su punto de intersección, el incentro) y las mediatrices (y su punto de intersección, el circuncentro que es el centro de la circunferencia circunscrita).

CONSTRUCCIÓN DE POLÍGONOS INSCRITOS Y CIRCUNSCRITOS EN EL CÍRCULO

EN EL LIBRO IV DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES


Propositio .6.

Intra datum circulum quadratū describere.

¶Sit datus circulus.a.b.c.d.cuius centrū.e.volo intra ipsū de/scribere quadratū.protrabo in ipso duas diametros.a.c.ꝛ.b.d.se cantes se orthogonaliter supra centrū.e.quarū extremitates con iungo protractis lineis.a.b.b.c.c.d.ꝛ.d.a. quas dico cōtinere qua dratum quesitum :ipse enim erunt equales adinuicem.per quartam primi ter as/sumptam propter id qd quatuor linee.e.a.e.b.e.c.ꝛ.e.d.sunt equales.et quatuor anguli qui sunt.a.d.c.recti.si vnusquisq3.quatuor angulorum.a.b.c.ꝛ. d.est rect[us] per primam partem .30.tertii:propter id quod quilibet eorum ē in semicirculo erit igitur.a.b.c.d.quadratum per diffinitionem quod est propositum.

Propositio .7.

Circa propositum circulum quadratum describere.

¶Sit ꝓposit[us] circul[us].a.b.c.d.cui[us] centꝝ.e.volo circa ipm describere q̄dratū: ꝓtrabo i ipso duas diametros.a.c.et.b.d.secātes se ortho/gonaliter sup cētrū.e.a q̄r extremitatibus duco i vtraq3 ptē lineas orthogonaliter quousq3 q̄libet eaꝝ ꝯcurrāt cū duab[us] lateralib[us] sintq3 pūcta ꝯcursus eaꝝ.f.g.h.k. eritq3 p correl.15.tertij vterq3 anguloꝝ qui sūt ad vnūquēq3 quatuor pūctoꝝ.a.b. c.d.rectus:quia ergo in quadrilatero.a.f.b.e.tres anguli.a. b.ꝛ.e. sunt recti: erit quartus angulus qui est.f.rectus:habet enim quodlibet quadrilaterum quatuor. angulos equales q̄tuor rectis:vt demonstratum est supra.32.primi :eadem rōne quilibet angulorum.g.h.ꝛ.k.erit rectus:ergo per secūdam partem.28.primi. due linee.f.g.ꝛ.k.h.Itemq3 due.f.k.ꝛ.g.h.sunt equidistantes.ergo per.34.primi.f.k est equalis.g.h.ꝛ.f.g.k.h.ꝛ quia p eandē.f.k.est equalis.b.d.ꝛ. f.g.a.c. At vero b.d.est equalis.a.c.erūt quatuor linee.f.k.g.h.f.g.ꝛ.k.h. equales: sed ꝛ quatuor anguli.f.g.k..h. sunt recti :vt probatum est prius. ergo.f.g. k.h. est quadratum per diffinitionē quod est propositum.

Propositio .8.

Intra quadratum assignatum circulum describere.

¶Sit quadratum assignatum. a.b.c.d.volo intra ipsum describere circulū hec est quasi conuersa .6.diuido vnūq̄d3 latus eius p equa lia.a.d.quidē in puncto.f.b.a.in puncto.g.c.b.in puncto.h.ꝛ.d.c. in puncto.e.ꝛ produco lineas.e.g.ꝛ.f.h.secantes se in pūcto .k.quē dico esse centrum circuli.erit enī.f.h.equidistans ꝛ equalis.a.b.per.33.primi: ꝓpter id quod.a.f.ꝛ.b.h.sunt equales ꝛ equidistantes.Similiter per eandem ꝛ.d.c a.b.ꝛ quia omnes medietates quatuor laterū ipsius quadrati sunt adinuicē equa les erunt per.34.primi:quatuor linee.k.e.k.f.k.g.ꝛ.k.h.equales.ergo per.9.ter/tij.k.est centrum circuli quesiti.

Propositio .9.

Circa assignatum quadratum circulum describere.

¶Sit quadratum.a.b.c.d.volo circa ipsum circulū describere .hec est quasi conuersa.7. Protrabo in ipso duas diametros.a.c.ꝛ.b.d. secantes se in puncto.e.quē dico esse centrum circuli. Cum enī linee a.d.ꝛ.a.b.sint equales erūt per.5.primi: anguli.a.d.b.ꝛ.a.b.d.e/quales.ꝛ quia angulus.a.totalis est rectus.erit per.32.primi:vterq3 eorum medi etas recti.¶Simili quoq3 modo ꝓbabitur quelibet partialiū angulorum a pre dictis diametris ꝛ laterib[us] quadrati propositi contentorum esse medietatem recti quia igitur angulus.e.a.d.est equalis angulo. e.d.a.erit per.9.primi:linea.e.a. equalis line ꝛ.e.d.eadem rōne erit.e.a.equalis.e.b.ꝛ.e.c.equalis.e.d.quare quia quatuor linee.e.a.e.b.e.c.e.d.sunt equales.erit per.9. tertii e.centrū circuli que/siti.quod est propositum.

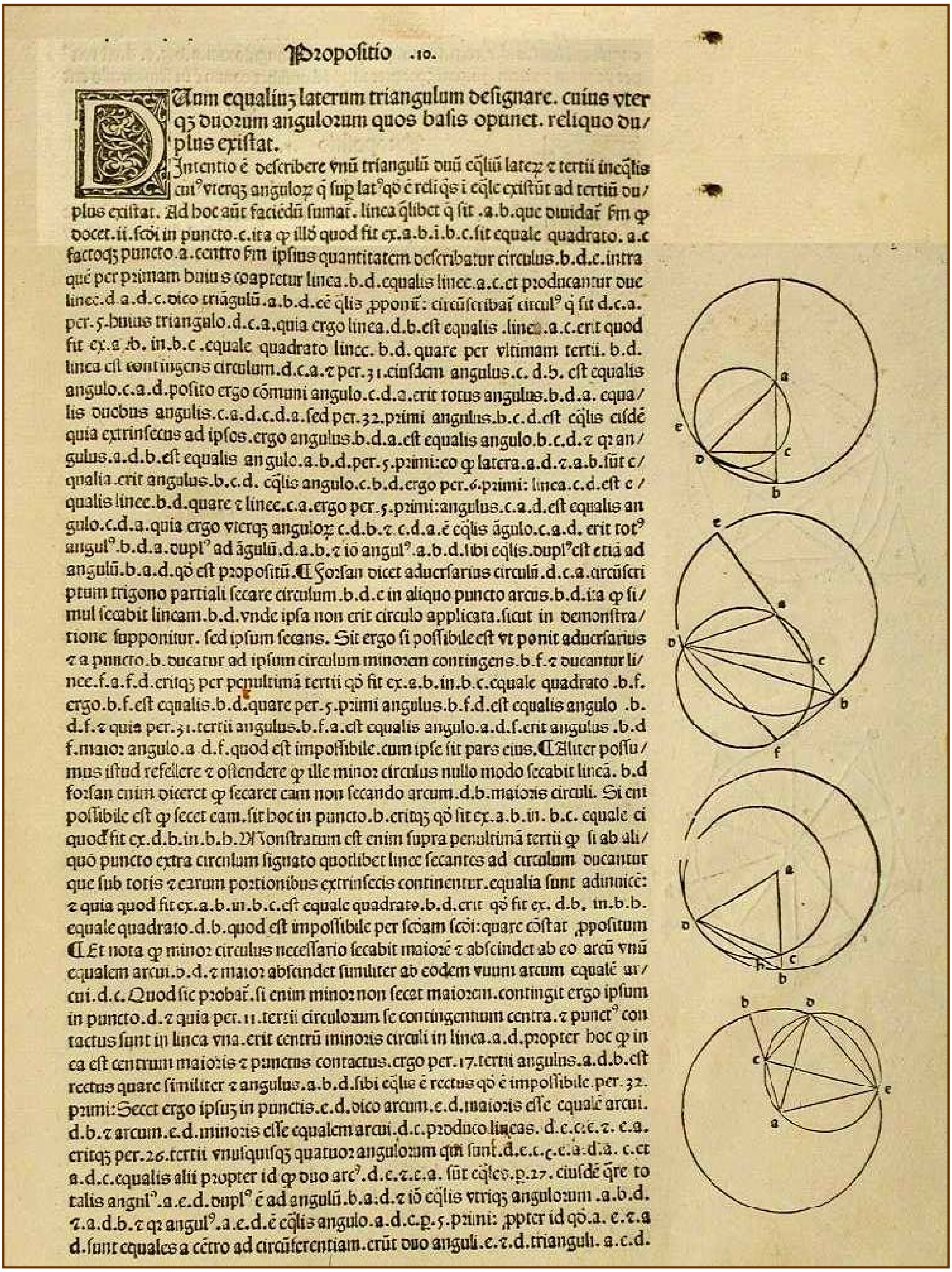
6

Las Proposiciones 6, 7, 8, 9 del Libro IV de *Los Elementos* de Euclides en la edición de E.Ratdolt (Venecia, 1482).

En estas dos proposiciones Euclides resuelve los problemas de inscribir y circunscribir un cuadrado dado en un círculo y a la inversa un círculo en un cuadrado.

EL TRIÁNGULO ÁUREO

EN EL LIBRO IV DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES



Propositio .10.

Duum equaliu3 laterum triangulum designare. cuius vterq3 duorum angulorum quos basis optinet. reliquo duplus existat.

Intentio ē describere vnū triangulū duū eq̄liū lateꝝ ⁊ tertii ineq̄lis cui⁹ vterq3 anguloꝝ q̄ sup lat⁹ q̄d ē reliq̄s i eq̄le existūt ad tertiū duplus existat. Ad hoc aūt faciēdū sumaī. linea q̄libet q̄ sit .a.b. que diuidaī fm q̄ docet .11. sc̄di in puncto .c. ita q̄ illō quod fit ex .a.b. i .b.c. sit equale quadrato .a.c factoq3 puncto .a. centro fm ipsius quantitatem describatur circulus .b.d.e. intra quē per primam huius coaptetur linea .b.d. equalis linee .a.c. et producantur due linee .d.a. d.c. dico triāgulū .a.b.d. eē q̄lis ꝓponiī: circūscribaī circul⁹ q̄ sit d.c.a. per .5. huius triangulo .d.c.a. quia ergo linea .d.b. est equalis linee .a.c. erit quod fit ex .a.b. in .b.c. equale quadrato linee .b.d. quare per vltimam tertii .b.d. linea est contingens circulum .d.c.a. ⁊ per .31. eiusdem angulus .c.d.b. est equalis angulo .c.a.d. posito ergo cōmuni angulo .c.d.a. erit totus angulus .b.d.a. equalis duobus angulis .c.a.d. ⁊ c.d.a. sed per .32. primi angulus .b.c.d. est eq̄lis eidē quia extrinsecus ad ipsos. ergo angulus .b.d.a. est equalis angulo .b.c.d. ⁊ q2 angulus .a.d.b. est equalis angulo .a.b.d. per .5. primi: eo q̄ latera .a.d. ⁊ .a.b. sūt equalia erit angulus .b.c.d. eq̄lis angulo .c.b.d. ergo per .6. primi: linea .c.d. est equalis linee .b.d. quare ⁊ linee .c.a. ergo per .5. primi: angulus .c.a.d. est equalis angulo .c.d.a. quia ergo vterq3 anguloꝝ .c.d.b. ⁊ .c.d.a. ē eq̄lis āgulo .c.a.d. erit tot⁹ angul⁹ .b.d.a. dupl⁹ ad āgulū .d.a.b. ⁊ iō angul⁹ .a.b.d. sibi eq̄lis dupl⁹ est etiā ad angulū .b.a.d. qd̄ est ppositū. ¶ Forsan dicet aduersarius circulū .d.c.a. circūscriptum trigono partiali secare circulum .b.d.e in aliquo puncto arcus .b.d. ita q̄ simul secabit lineam .b.d. vnde ipsa non erit circulo applicata. sicut in demonstratione supponitur. sed ipsum secans. Sit ergo si possibile est vt ponit aduersarius ⁊ a puncto .b. ducatur ad ipsum circulum minorem contingens .b.f. ⁊ ducantur linee .f.a. f.d. eritq3 per penultimā tertii qd̄ fit ex .a.b. in .b.c. equale quadrato .b.f. ergo .b.f. est equalis .b.d. quare per .5. primi angulus .b.f.d. est equalis angulo .b.d.f. ⁊ quia per .31. tertii angulus .b.f.a. est equalis angulo .a.d.f. erit angulus .b.d f. maior angulo .a d.f. quod est impossibile. cum ipse sit pars eius. ¶ Aliter possumus istud refellere ⁊ ostendere q̄ ille minor circulus nullo modo secabit lineā .b.d forsan enim diceret q̄ secaret eam non secando arcum .d.b. maioris circuli. Si enim possibile est q̄ secet eam. sit hoc in puncto .b. eritq3 qd̄ fit ex .a.b. in .b.c. equale ei quod fit ex .d.b. in .b.h. Monstratum est enim supra penultimā tertii q̄ si ab aliquō puncto extra circulum signato quotlibet linee secantes ad circulum ducantur que sub totis ⁊ earum portionibus extrinsecis continentur. equalia sunt adinuicē: ⁊ quia quod fit ex .a.b. in .b.c. est equale quadrato .b.d. erit qd̄ fit ex. d.b. in .b.b. equale quadrato .d.b. quod est impossibile per sc̄dam sc̄di: quare cōstat ꝓpositum ¶ Et nota q̄ minor circulus necessario secabit maiorē ⁊ abscindet ab eo arcū vnū equalem arcui .b.d. ⁊ maior abscindet similiter ab eodem vnum arcum equalē arcui .d.c. Quod sic probaī. si enim minor non secet maiorem. continget ergo ipsum in puncto .d. ⁊ quia per .11. tertii circulorum se contingentium centra ⁊ punct⁹ contactus sunt in linea vna. erit centrū minoris circuli in linea .a.d. propter hoc q̄ in ea est centrum maioris ⁊ punctus contactus. ergo per .17. tertii angulus .a.d.b. est rectus quare similiter ⁊ angulus .a.b.d. sibi eq̄lis ē rectus qd̄ ē impossibile per .32. primi: Secet ergo ipsu3 in punctis .e.d. dico arcum .e.d. maioris esse equalē arcui .d.b. ⁊ arcum .e.d. minoris esse equalem arcui .d.c. produco lineas .d.c. d.e. ⁊ .e.a. eritq3 per .26. tertii vnusquisq3 quatuor angulorum qui sunt .d.e.c. e.a.d. a.c.d. et a.d.c. equalis alii propter id q̄ duo arc⁹ .d.c. ⁊ .e.a. sūt eq̄les .p.27. eiusdē q̄re totalis angul⁹ .a.e.d. dupl⁹ ē ad angulū .b.a.d. ⁊ iō eq̄lis vtriq3 angulorum .a.b.d. ⁊ .a.d.b. ⁊ q2 angul⁹ .a.e.d. ē eq̄lis angulo .a.d.e. p .5. primi: ꝓpter id qd̄ .a. e. ⁊ .a d. sunt equales a cētro ad circūferentiam. erūt duo anguli .e. ⁊ .d. trianguli .a.c.d.

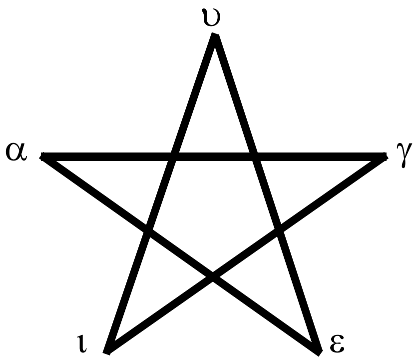
La Proposición IV.10 de *Los Elementos* de Euclides en la edición de E.Ratdolt (Venecia, 1482).

En la Proposición IV.10 Euclides construye el *Triángulo Áureo*– un triángulo isósceles que tiene los ángulos iguales dobles del ángulo desigual– como preliminar de la Proposición IV.10 donde inscribe un pentágono regular en un círculo dado.

El *Triángulo Áureo* tiene una gran importancia en la formación del *Pentagrama místico pitagórico*.

EL TRIÁNGULO ÁUREO

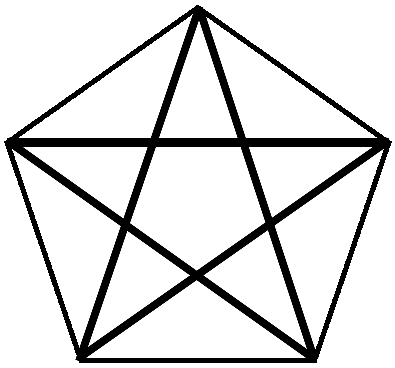
Y EL *PENTAGRAMA MÍSTICO PITAGÓRICO*



Buena parte de la Geometría pitagórica en relación con la sección áurea, tuvo que ver con el pentágono regular. La figura de la estrella de cinco puntas que se forma al trazar las cinco diagonales de una cara pentagonal, llamada pentágono estrellado o *pentagrama místico,* parece haber sido una especie de símbolo de identificación, a modo de anagrama, de la Escuela Pitagórica. Por eso los pitagóricos estudiaron exhaustivamente la construcción y propiedades del *Pentagram*a haciendo de él uno de los tópicos geométricos más importantes por sus bellísimas propiedades geométricas de las que nace su simbolismo.

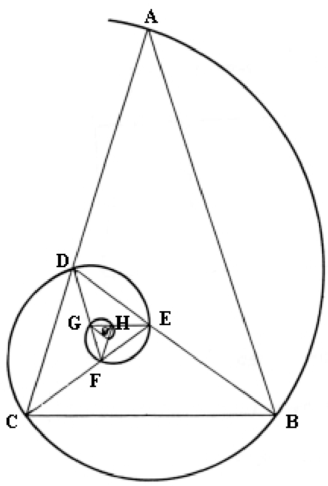
Además, el *Pentagrama místico* pudo estar en la base del más importante hallazgo científico de los pitagóricos: el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables, una de las causas de la profunda crisis que arruinó a la cofradía pitagórica.

Una de las curiosas propiedades del *Pentagrama,* que imponía respeto a los pitagóricos era su «*unicursalidad*»: «*la estrella pentagonal puede ser trazada por el movimiento de un punto sin pasar dos veces por el mismo lado*».



Como se ve en la figura, el *Pentagrama* se construye a base de tres triángulos isósceles iguales –por eso al *pentagrama pitagórico* se le llama también «*tripletriángulo*»– que tienen los ángulos iguales dobles del ángulo desigual, es decir, que son *Triángulos Áureos*. Este tipo de triángulo se construye, como hemos visto, en la Proposición 10 del Libro IV de *Los Elementos* de Euclides, cuyo contenido es de raíz pitagórica. En la siguiente Proposición, la IV.11, se construye efectivamente el pentagrama a base de inscribir en un círculo un pentágono regular y trazar las diagonales.

las cuales de forma sorprendente se cortan determinando segmentos que están en *proporción áurea* siendo el segmento mayor igual al lado del pentágono (*Euclides* XIII.8). Esta propiedad es equivalente a que los lados de los *Triángulos Áureos* están en *proporción áurea*, y de aquí procede su nombre.

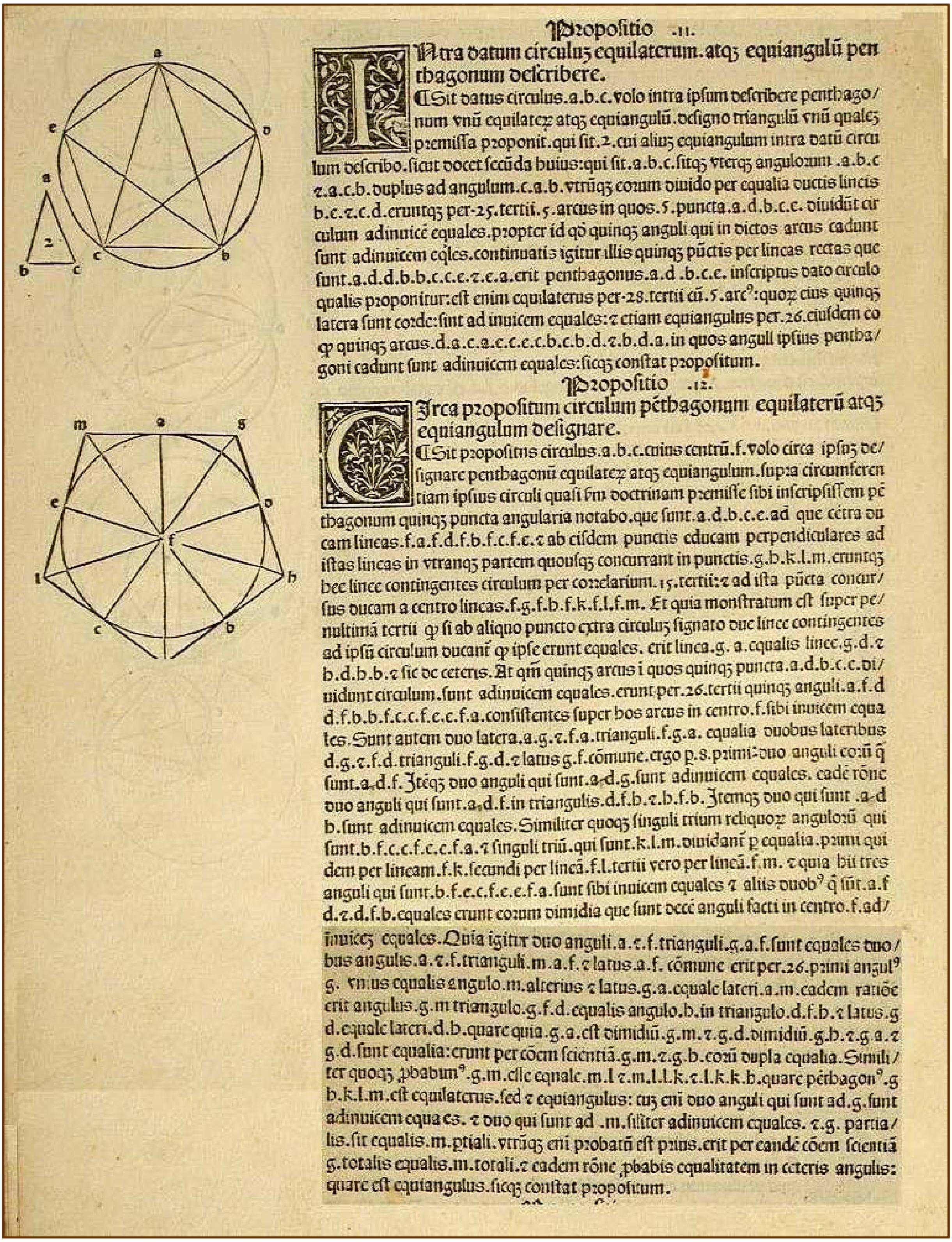


El *Triángulo Áureo*» tiene ángulos en la base de 72º y en el vértice de 36º, y es «*auto-reproductivo*» :

Partiendo del triángulo ABC, la bisectriz del ángulo B corta a AC in D de forma áurea. El triángulo BCD siendo semejante al original ABC resulta ser un *triángulo áureo*. La bisectriz del ángulo C corta a BD en el punto E de forma áurea y el triángulo CDE resulta ser áureo. Este proceso, que es una forma de crecimiento gnomónico, es indefinido, obteniéndose una sucesión de triángulos áureos que convergen hacia el polo de una espiral logarítmica que pasa por los sucesivos vértices de los triángulos.

CONSTRUCCIÓN DE POLÍGONOS INSCRITOS Y CIRCUNSCRITOS EN EL CÍRCULO

EN EL LIBRO IV DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES



Propositio .11.

Intra datum circulũ equilaterum. atq; equiangulũ penthagonum describere.

¶ Sit datus circulus. a. b. c. volo intra ipsum describere penthagonum vnũ equilaterũ atq; equiangulũ. designo triangulũ vnũ qualẽ premissa proponit. qui sit. 2. cui aliũ equiangulum intra datũ circulum describo. sicut docet secũda huius: qui sit. a. b. c. sitq; vterq; angulorum. a. b. c et. a. c. b. duplus ad angulum. c. a. b. vtrũq; eorum diuido per equalia ductis lineis b. c. et. c. d. eruntq; per. 25. tertii. 5. arcus in quos. 5. puncta. a. d. b. c. e. diuidũt circulum adinuicẽ equales. propter id qđ quinq; anguli qui in dictos arcus cadunt sunt adinuicem eq̃les. continuatis igitur illis quinq; pũctis per lineas rectas que sunt. a. d. d. b. b. c. c. e. et. e. a. erit penthagonus. a. d. b. c. e. inscriptus dato circulo qualis proponitur: est enim equilaterus per. 28. tertii cũ. 5. arcꝰ: quorũ eius quinq; latera sunt corde: sint ad inuicem equales: et etiam equiangulus per. 26. eiusdem eo qđ quinq; arcus. d. a. c. a. c. e. c. e. c. b. c. b. d. et. b. d. a. in quos anguli ipsius penthagoni cadunt sunt adinuicem equales: sicq; constat propositum.

Propositio .12.

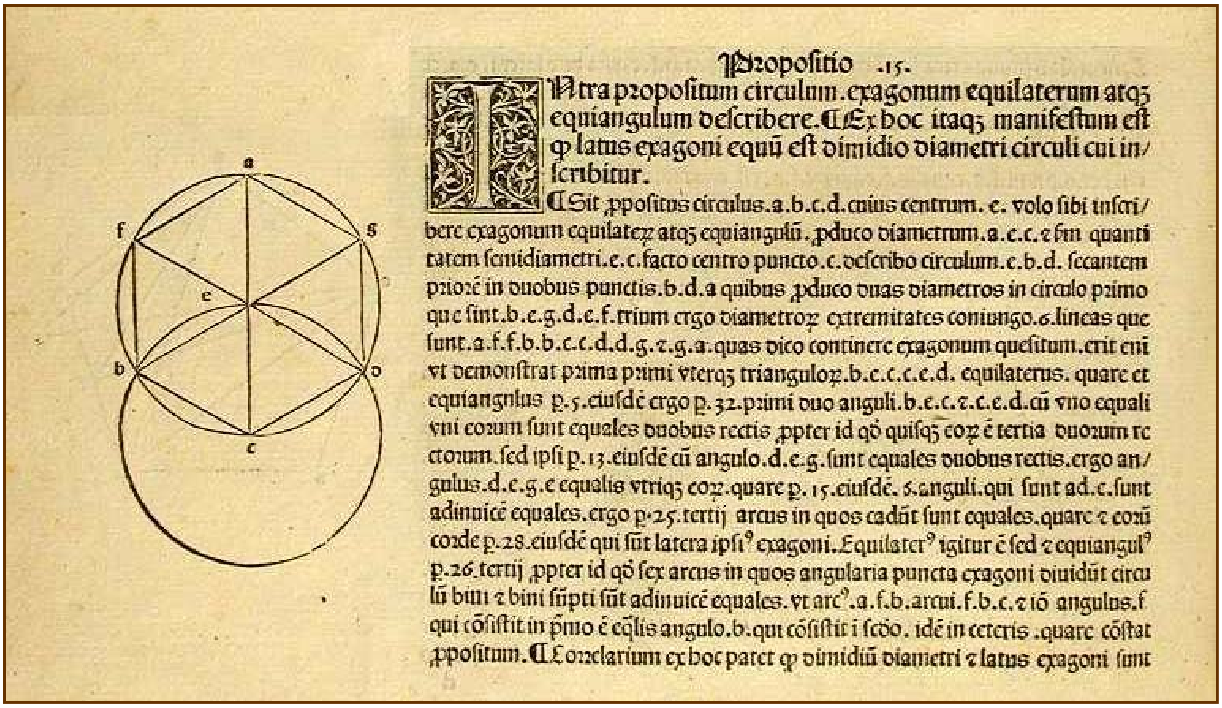
Circa propositum circulum pẽthagonum equilaterũ atq; equiangulum designare.

¶ Sit propositus circulus. a. b. c. cuius centrũ. f. volo circa ipsũ designare penthagonũ equilaterũ atq; equiangulum. supra circumferentiam ipsius circuli quasi s̃m doctrinam premisse sibi inscripsissem pẽthagonum quinq; puncta angularia notabo. que sunt. a. d. b. c. e. ad que cẽtro ducam lineas. f. a. f. d. f. b. f. c. f. e. et ab eisdem punctis educam perpendiculares ad istas lineas in vtranq; partem quousq; concurrant in punctis. g. h. k. l. m. eruntq; hee linee contingentes circulum per corelarium. 15. tertii: et ad ista pũcta concursus ducam a centro lineas. f. g. f. h. f. k. f. l. f. m. Et quia monstratum est super penultimã tertii qđ si ab aliquo puncto extra circulũ signato due linee contingentes ad ipsũ circulum ducanĩ qđ ipse erunt equales. erit linea. g. a. equalis linee. g. d. et h. d. h. b. et sic de ceteris. At qm̃ quinq; arcus ĩ quos quinq; puncta. a. d. b. c. e. diuidunt circulum. sunt adinuicem equales. erunt per. 26. tertii quinq; anguli. a. f. d d. f. b. b. f. c. c. f. e. e. f. a. consistentes super hos arcus in centro. f. sibi inuicem equales. Sunt autem duo latera. a. g. et. f. a. trianguli. f. g. a. equalia duobus lateribus d. g. et. f. d. trianguli. f. g. d. et latus g. f. cõmune. ergo p. 8. primi: duo anguli eorũ q̃ sunt. a. d. f. Itẽq; duo anguli qui sunt. a. d. g. sunt adinuicem equales. eadẽ rõne duo anguli qui sunt. a. d. f. in triangulis. d. f. h. et. h. f. b. Itemq; duo qui sunt. a. d b. sunt adinuicem equales. Similiter quoq; singuli trium reliquorũ angulorũ qui sunt. b. f. c. c. f. e. e. f. a. et singuli triũ. qui sunt. k. l. m. diuidanĩ p equalia. primi quidem per lineam. f. k. secundi per lineã. f. l. tertii vero per lineã. f. m. et quia hii tres anguli qui sunt. b. f. c. c. f. e. e. f. a. sunt sibi inuicem equales et aliis duobꝰ q̃ sũt. a. f d. et. d. f. b. equales erunt eorum dimidia que sunt decẽ anguli facti in centro. f. adinuicẽ equales. Quia igitur duo anguli. a. et. f. trianguli. g. a. f. sunt equales duobus angulis. a. et. f. trianguli. m. a. f. et latus. a. f. cõmune erit per. 26. primi angulꝰ g. vnius equalis angulo. m. alterius et latus. g. a. equale lateri. a. m. eadem ratiõe erit angulus. g. in triangulo. g. f. d. equalis angulo. h. in triangulo. d. f. h. et latus. g d. equale lateri. d. h. quare quia. g. a. est dimidiũ. g. m. et. g. d. dimidiũ. g. h. et. g. a. et g. d. sunt equalia: erunt per cõem scientiã. g. m. et. g. h. eorũ dupla equalia. Similiter quoq; pbabimꝰ. g. m. esse equale. m. l et. m. l. l. k. et. l. k. k. h. quare pẽthagonꝰ. g h. k. l. m. est equilaterus. sed et equiangulus: cũ eñi duo anguli qui sunt ad. g. sunt adinuicem equales. et duo qui sunt ad. m. siliter adinuicem equales. et. g. partialis. sit equalis. m. ptiali. vtrũq; eñi probatũ est prius. erit per eandẽ cõem scientiã g. totalis equalis. m. totali. et eadem rõne pbabis equalitatem in ceteris angulis: quare est equiangulus. sicq; constat propositum.

Las Proposiciones 11 y 12 del Libro IV de *Los Elementos* de Euclides (edición de E.Ratdolt).

En estas dos proposiciones Euclides resuelve los problemas de inscribir y circunscribir un pentágono regular en un círculo.

CONSTRUCCIÓN DE POLÍGONOS INSCRITOS
EN EL LIBRO IV DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES

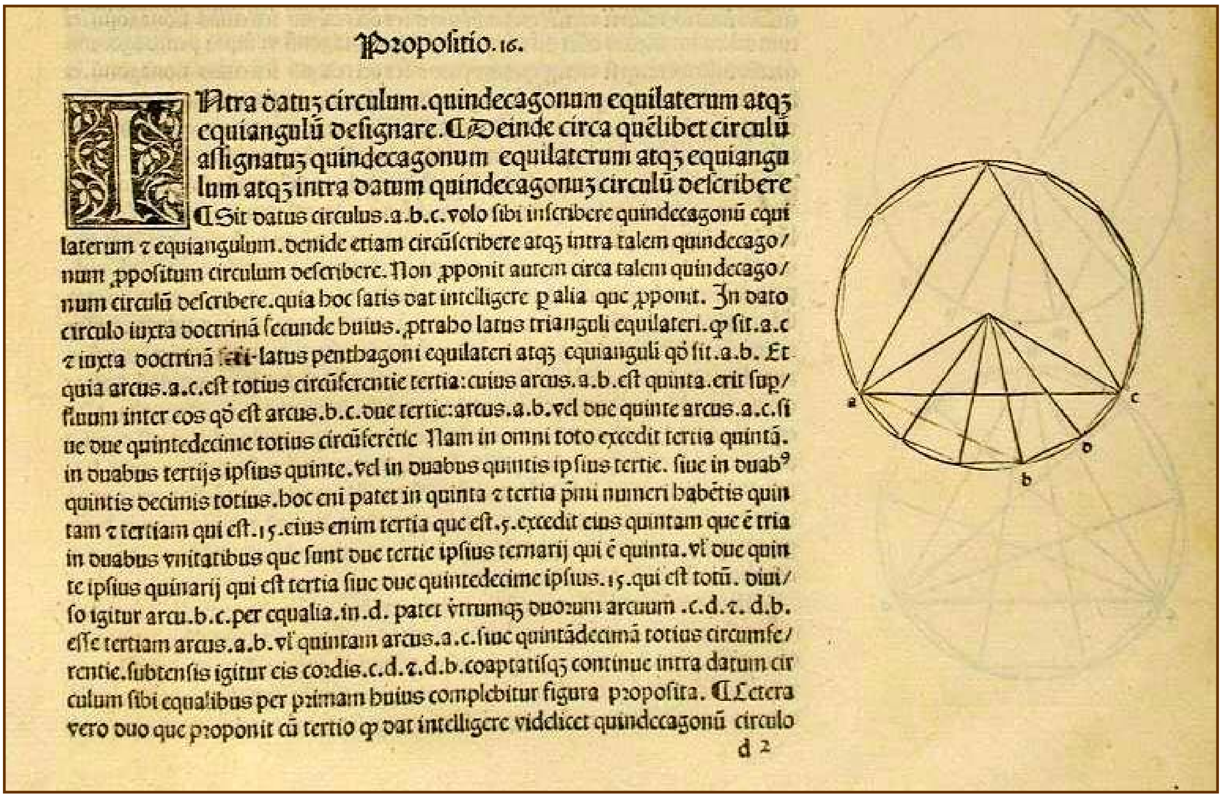


Propositio .15.

Intra propositum circulum. exagonum equilaterum atq; equiangulum describere. ¶ Ex hoc itaq; manifestum est q latus exagoni equū est dimidio diametri circuli cui inscribitur.

¶ Sit ꝓpositus circulus. a. b. c. d. cuius centrum. e. volo sibi inscribere exagonum equilaterꝫ atq; equiangulū. ꝑduco diametrum. a. e. c. & sm quantitatem semidiametri. e. c. facto centro puncto. c. describo circulum. e. b. d. secantem priorē in duobus punctis. b. d. a quibus ꝑduco duas diametros in circulo primo que sint. b. e. g. d. e. f. trium ergo diametroꝝ extremitates coniungo. 6. lineas que sunt. a. f. f. b. b. c. c. d. d. g. & g. a. quas dico continere exagonum quesitum. erit eni vt demonstrat prima primi vterq; trianguloꝝ. b. e. c. c. e. d. equilaterus. quare et equiangulus p. 5. eiusdē ergo p. 32. primi duo anguli. b. e. c. & c. e. d. cū vno equali vni eorum sunt equales duobus rectis ꝓpter id qð quisq; eoꝝ ē tertia duorum rectorum. sed ipsi p. 13. eiusdē cū angulo. d. e. g. sunt equales duobus rectis. ergo angulus. d. e. g. e equalis vtriq; eoꝝ. quare p. 15. eiusdē. 6. anguli. qui sunt ad. e. sunt adinuicē equales. ergo p. 25. tertij arcus in quos cadūt sunt equales. quare & eorū corde p. 28. eiusdē qui sūt latera ipsi9 exagoni. Equilater9 igitur ē sed & equiangul9 p. 26. tertij ꝓpter id qð sex arcus in quos angularia puncta exagoni diuidūt circulū bini & bini sūpti sūt adinuicē equales. vt arc9. a. f. b. arcui. f. b. c. & iō angulus. f qui cōsistit in ꝑmo ē eq̄lis angulo. b. qui cōsistit i scðo. idē in ceteris. quare cōstat ꝓpositum. ¶ Corelarium ex hoc patet q dimidiū diametri & latus exagoni sunt

La Proposición 15 del Libro IV de *Los Elementos* de Euclides (edición de E.Ratdolt).
En esta proposición Euclides resuelve el problema de inscribir un hexágono regular en un círculo.



Propositio. 16.

Intra datuꝫ circulum. quindecagonum equilaterum atq; equiangulū designare. ¶ Deinde circa quēlibet circulū assignatuꝫ quindecagonum equilaterum atq; equiangulum atq; intra datum quindecagonuꝫ circulū describere

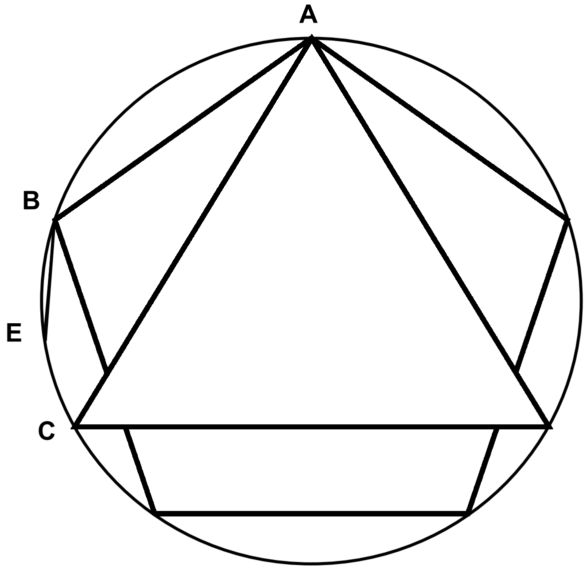
¶ Sit datus circulus. a. b. c. volo sibi inscribere quindecagonū equilaterum & equiangulum. deinde etiam circūscribere atq; intra talem quindecagonum ꝓpositum circulum describere. Non ꝓponit autem circa talem quindecagonum circulū describere. quia hoc satis dat intelligere p alia que ꝓponit. In dato circulo iuxta doctrinā secunde huius. ꝓtrabo latus trianguli equilateri. q sit. a. c & iuxta doctrinā [illegible] latus penthagoni equilateri atq; equianguli qð sit. a. b. Et quia arcus. a. c. est totius circūferentie tertia: cuius arcus. a. b. est quinta. erit superfluum inter eos qð est arcus. b. c. due tertie: arcus. a. b. vel due quinte arcus. a. c. siue due quintedecime totius circūferētie Nam in omni toto excedit tertia quintā. in duabus tertijs ipsius quinte. vel in duabus quintis ipsius tertie. siue in duab9 quintis decimis totius. hoc eni patet in quinta & tertia ꝑmi numeri habētis quintam & tertiam qui est. 15. eius enim tertia que est. 5. excedit eius quintam que ē tria in duabus vnitatibus que sunt due tertie ipsius ternarij qui ē quinta. vl' due quinte ipsius quinarij qui est tertia siue due quintedecime ipsius. 15. qui est totū. diuiso igitur arcu. b. c. per equalia. in. d. patet vtrumq; duorum arcuum. c. d. & d. b. esse tertiam arcus. a. b. vl' quintam arcus. a. c. siue quintādecimā totius circumferentie. subtensis igitur eis cordis. c. d. & d. b. coaptatisq; continue intra datum circulum sibi equalibus per primam huius complebitur figura proposita. ¶ Cetera vero duo que proponit cū tertio q dat intelligere videlicet quindecagonū circulo

d 2

La Proposición 16 del Libro IV de *Los Elementos* de Euclides (edición de E.Ratdolt).
Euclides corona el Libro IV con esta proposición en la que construye el pentadecágono regular, es decir, el polígono regular de 15 lados.

LA CONSTRUCCIÓN DE LOS POLÍGONOS REGULARES EN *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES

Si en la Proposición I.1 Euclides construye, con regla y compás, un triángulo regular o equilátero y en la I.46 construye un cuadrado sobre un segmento dado, en el Libro IV Euclides ampliará el catálogo de construcciones a polígonos regulares de mayor número de lados, a base de inscribir en un círculo un pentágono regular (para lo que construye previamente el *triángulo áureo*, isósceles en el que los ángulos iguales valen el doble del desigual) y el hexágono regular.



El libro IV termina con la construcción del pentadecágono (polígono regular de 15 lados) mediante una construcción donde queda patente la vinculación subrepticia de la Geometría y la Aritmética. Euclides inscribe, en el mismo círculo y con un vértice común, un triángulo equilátero de lado AC (que produce arcos de un tercio de circunferencia) y un pentágono regular de lado AB (que determina arcos de un quinto de circunferencia). La diferencia entre el arco del triángulo y el del pentágono (1/3 – 1/5 = 2/15), proporciona un arco BC que al bisectarlo nos da un arco BE que divide la circunferencia en 15 partes iguales. La cuerda correspondiente es el lado del polígono de 15 lados, el pentadecágono.

***Los Elementos* de Euclides no dicen nada más acerca del resto de los polígonos regulares, aunque hay que sobreentender que dejan implícita la posibilidad de obtener otros muchos por el aludido proceso de bisección, de modo que a partir del triángulo resultarían los polígonos regulares de 6, 12, 24, 48, ... lados; a partir del cuadrado los polígonos regulares de 8, 16, 32, 64, ...; a partir del pentágono los de 10, 20, 40, 80, ... lados; y, a partir del pentadecágono los de 30, 60, 120, ... lados.**

Los geómetras griegos disponían de un gran repertorio de polígonos construibles. Pero no todos los polígonos están presentes en la lista. Faltan los polígonos regulares de 7, 9, 11, 13, 17, 19, ... lados, que no encajan en el canon de duplicación que se ha visto con la construcción del el pentadecágono. Al igual que en otras cuestiones, como por ejemplo los llamados «*problemas clásico*» –cuadratura del círculo, duplicación del cubo y trisección del ángulo– los matemáticos griegos y los geómetras posteriores invirtieron ingentes esfuerzos en los intentos de conseguir la construcción del resto de los polígonos regulares, hasta, tal vez, llegar al convencimiento de que –aunque Euclides no lo diga en ningún texto– los únicos polígonos construibles son los descritos en el Libro IV de *Los Elementos*, de modo que todos los demás escaparían a las posibilidades que ofrece la limitación geométrica platónica de la regla y el compás.

A tenor de esta situación, se puede entender la conmoción que causó en los ambientes científicos que un adolescente de 17 años, C.F. Gauss, descubriera en 1794 cómo construir el polígono de 17 lados. El resultado ahora consta en la Sección VII de su obra *Disquisitiones Arithmeticae*. Gauss investigó la constructibilidad de los p–ágonos regulares (polígonos de p lados), donde p es un número primo. Hasta entonces sólo se conocía la construcción para p=3 y p=5. Gauss descubrió que:

> **«*El p–ágono regular es construible si y sólo si p es un número primo de Fermat*»,**

es decir, si p es de la forma: $p = 2^{2^k} + 1$. Los primeros números de Fermat son 3, 5, 17, 257, 65537.

Según Courant (¿Qué es la Matemática?, Aguilar, Madrid, 1971, p.129):

> ***«Tan entusiasmado se sintió el joven Gauss por su descubrimiento, que renunció a su intención de hacerse filólogo y resolvió dedicar su vida a la Matemática y sus aplicaciones. Gauss siempre recordó la primera de sus proezas con particular orgullo. Después de su muerte le fue erigida en Gotinga una estatua de bronce, y no pudo encontrarse honor más adecuado que el de dar a su pedestal la forma de un polígono regular de 17 lados.»***

El pedestal de la estatua de bronce tiene el simbolismo de epitafio icónico en honor de uno de los matemáticos más brillantes y más prolíficos de toda la Historia de la más antigua de las Ciencias.

El Libro V

Tal como se ha visto hasta ahora, los primeros cuatro libros de *Los Elementos* de Euclides tratan sobre las propiedades básicas de figuras rectilíneas –triángulos y polígonos en general y círculos–. Euclides ha construido una gran parte de la Geometría elemental sin aplicar los importantes conceptos de proporción y semejanza.

Los pitagóricos habían elaborado un gran desarrollo geométrico con multitud de teoremas (en particular sobre semejanza de figuras) que aplicaban proporciones en la creencia de que todas las magnitudes geométricas eran conmensurables (es decir, expresables su magnitud como cociente entre dos números enteros). La aparición de los inconmensurables en el horizonte geométrico de la escuela pitagórica invalidaba las pruebas de estos teoremas, de ahí la terrible confusión lógica que introdujo este fenómeno, que llegó a producir una crisis de fundamentos, sin precedentes en la Historia de la Matemática. Es precisamente la necesidad de reconstruir las pruebas geométricas de los teoremas pitagóricos, fundamentándolas en un nuevo rigor, lo que produce, como reacción ante la crisis, la aparición de *Los Elementos* de Euclides, donde la Matemática elemental de los griegos queda rígidamente estructurada con el severo rigor que impone el método axiomático. Pero la revisión de los fundamentos traerá como secuela el desarrollo de la Geometría al margen de la Aritmética, la ausencia de un Álgebra en sentido algorítmico y simbólico y por tanto un enfoque exclusivamente geométrico de toda la Matemática griega.

Pues bien, es Eudoxo de Cnido, de la Escuela platónica, quien emprende la magnífica tarea de colmar el abismo lógico y proporcionar una base firme a la Matemática griega, al introducir de forma brillante una teoría satisfactoria de la proporción, que al tratarse de forma geométrica tiene la inmensa ventaja de ser aplicable indistintamente a magnitudes conmensurables e inconmensurables, como por ejemplo, longitudes, áreas, volúmenes, etc., y que será recogida por Euclides en el Libro V de *Los Elementos*. He aquí la explicación de por qué Euclides retrasa, tanto como puede, el uso de proporciones. Pero era evidente que tarde o temprano tendrían que aparecer sino se quería mutilar gran parte del legado matemático pitagórico y ahora es el momento. El Libro V proporcionaría, pues, una base lógica firme a toda doctrina que en la Geometría griega tuviera que ver con proporciones.

En la *Teoría de la Proporción* de Eudoxo juegan un papel trascendental las definiciones cuarta y quinta. La definición V.4 en el fondo es un enunciado algo impreciso del llamado *Axioma de Eudoxo-Arquímedes* o *Axioma de continuidad* que viene a decir que «*dadas dos magnitudes siempre se puede superar a la mayor considerando a la menor un número determinado de veces*», lo que supone en el fondo la existencia de magnitudes «*tan grandes como se quiera*» o «*tan pequeñas como se quiera*» que excluye las cantidades infinitamente pequeñas (llamadas después *infinitésimos*), es decir, no cabe razón entre dos magnitudes, si una de ellas es tan pequeña, que no hay ningún múltiplo entero de ella que exceda a la otra. También excluye las magnitudes infinitamente grandes, que no serían superadas por ningún múltiplo entero de la cantidad menor. Así pues, la definición V.4 permite conjurar la presencia del infinito, desterrado de la Matemática griega cuando aparecen los inconmensurables. La definición V.4 es una advertencia que exige que siempre que se hable de igualdad o desigualdad de razones (según la definición V.5) el par de magnitudes que se comparan debe cumplir *a fortiori* la condición de V.4.

Las proposiciones del Libro V comienzan con diversas formas de la propiedad distributiva del producto respecto de la suma y la resta, la propiedad asociativa del producto, las abundantes leyes que rigen las desigualdades, es decir, las propiedades del «*menor que*» y del «*mayor que*» y en general las propiedades tan habituales de las proporciones expuestas en forma geométrica, pero válidas para cualquier tipo de magnitud.

La *Teoría de la Proporción* de Eudoxo (que hace del Libro V uno de los logros más importantes de la obra euclídea) tuvo una profunda influencia sobre la concepción decimonónica de los números irracionales, sobre todo en la versión de las *Cortaduras* de Dedekind, de modo que bastantes proposiciones del Libro V nos reflejan muchas de las familiares propiedades de los números reales.

Definiciones:

D.V.1. Una magnitud es parte [submúltiplo o parte alícuota] de una magnitud, la menor de la mayor, cuando mide a la mayor [exactamente].

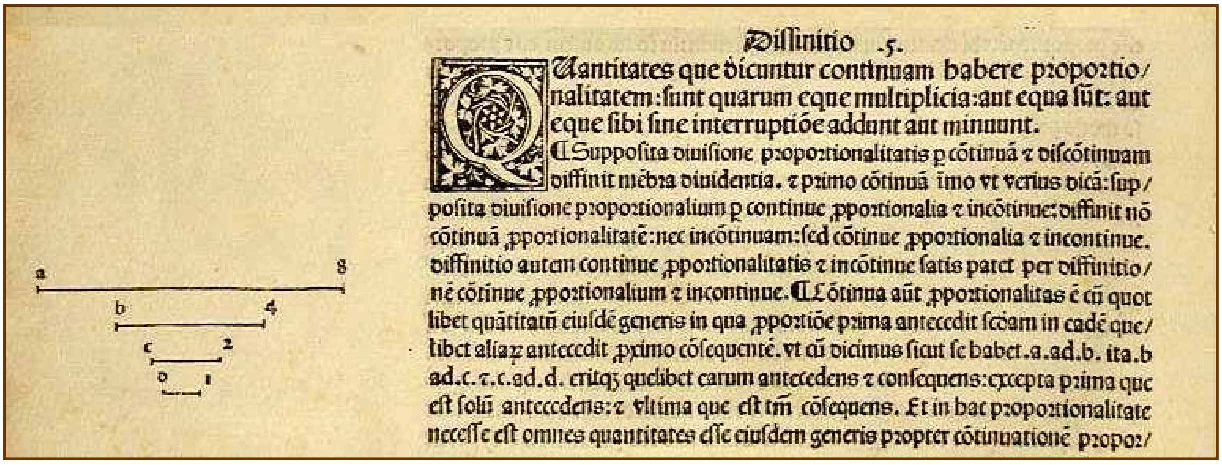
D.V.2. Y la mayor es múltiplo de la menor cuando es medida por la menor.

D.V.3. Una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas.

D.V.4. Se dice que guardan razón entre sí las magnitudes que, al multiplicarse, puedan exceder una a la otra.

D.V.5. Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda magnitud, que una tercera magnitud con una cuarta magnitud, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera exceden a la par, sean iguales a la par o sean inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente.

[a/b=c/d si dados dos números enteros cualesquiera m,n, es na>mb cuando nc>md ó na<mb cuando nc<md ó na>mb cuando nc=md. Es el criterio necesario y suficiente de proporcionalidad, piedra angular de la *Teoría de la Proporción de Eudoxo*, superadora de la crisis pitagórica de los inconmensurables].



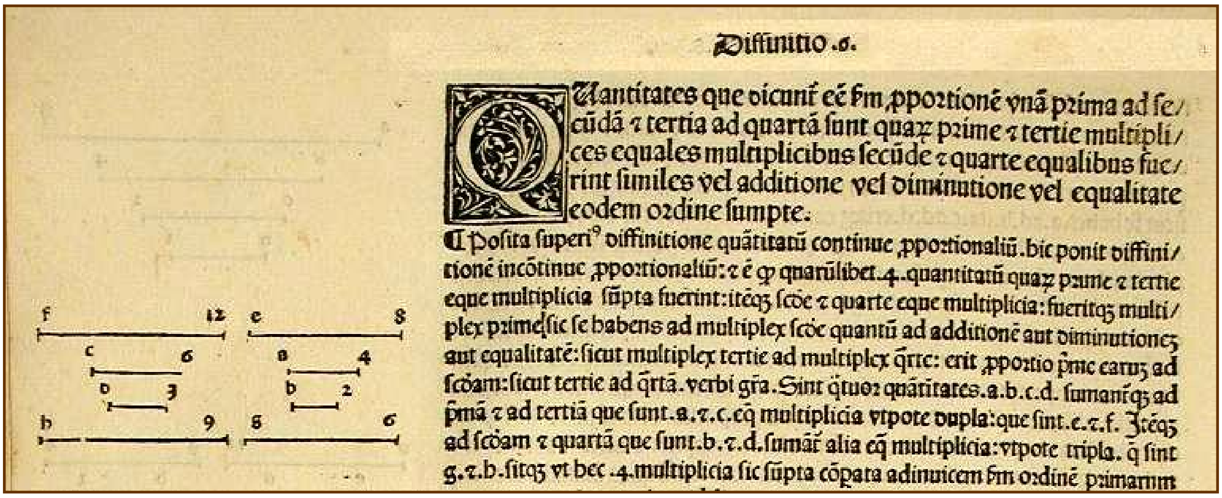
Diffinitio .5.

Quantitates que dicuntur continuam habere proportionalitatem: sunt quarum eque multiplicia: aut equa sũt: aut eque sibi sine interruptiõe addunt aut minuunt.

¶ Supposita diuisione proportionalitatis p cõtinuã z discõtinuam diffinit mẽbra diuidentia. z primo cõtinuã imo vt verius dicã: supposita diuisione proportionalium p continue pportionalia z incõtinue: diffinit nõ cõtinuã pportionalitatẽ: nec incõtinuam: sed cõtinue pportionalia z incontinue. diffinitio autem continue pportionalitatis z incõtinue satis patet per diffinitionẽ cõtinue pportionalium z incontinue. ¶ Cõtinua aũt pportionalitas ẽ cũ quotlibet quãtitatũ eiusdẽ generis in qua pportiõe prima antecedit scdam in eadẽ quelibet aliaz antecedit pximo cõsequentẽ. vt cũ dicimus sicut se habet .a. ad .b. ita .b ad .c. z .c. ad .d. eritq3 quelibet earum antecedens z consequens: excepta prima que est solũ antecedens: z vltima que est tm̃ cõsequens. Et in hac proportionalitate necesse est omnes quantitates esse eiusdem generis propter cõtinuationẽ propor/

Las Definiciones V.4 y V.5 del Libro V de *Los Elementos* de Euclides, en la edición de E. Ratdolt (Venecia, 1482). En esta edición las definiciones 4 y 5 ocupan los lugares 5 y 6, respectivamente.

Las Definiciones V.4 (*Axioma de Eudoxo-Arquímedes* o *Axioma de continuidad*) y V.5 (*Igualdad de razones*) son el fundamento de la *Teoría de la Proporción* de Eudoxo del Libro V de *Los Elementos* de Euclides.



Diffinitio .6.

Quantitates que dicunt ee͂ sm pportionẽ vnã prima ad secũdã z tertia ad quartã sunt quaz prime z tertie multiplices equales multiplicibus secũde z quarte equalibus fuerint similes vel additione vel diminutione vel equalitate eodem ordine sumpte.

¶ Posita superi9 diffinitione quãtitatũ continue pportionaliũ. hic ponit diffinitionẽ incõtinue pportionaliũ: z ẽ q quarũlibet .4. quantitatũ quaz prime z tertie eque multiplicia sũpta fuerint: itẽq3 scõe z quarte eque multiplicia: fueritq3 multiplex prime sic se habens ad multiplex scõe quantũ ad additionẽ aut diminutione3 aut equalitatẽ: sicut multiplex tertie ad multiplex q̃rte: erit pportio p̃me earu3 ad scõam: sicut tertie ad q̃rtã. verbi grã. Sint q̃tuor quãtitates .a.b.c.d. sumanẽq3 ad p̃mã z ad tertiã que sunt .a. z .c. eq̃ multiplicia vtpote dupla: que sint .e. z .f. Itẽq3 ad scõam z quartã que sunt .b. z .d. sumãt alia eq̃ multiplicia: vtpote tripla. q̃ sint g. z .h. sitq3 vt hec .4. multiplicia sic sũpta cõpata adinuicem sm ordinẽ primarum

D.V.6. Se llaman proporcionales las magnitudes que guardan la misma razón.

D.V.7. Entre los equimúltiplos, cuando el múltiplo de la primera excede al múltiplo de la segunda pero el múltiplo de la tercera no excede al múltiplo de la cuarta, entonces se dice que la primera guarda con la segunda una razón mayor que la tercera con la cuarta.

D.V.8. Una proporción entre tres términos es la menor posible.

[Proporción continua $a/b=b/c$].

D.V.9. Cuando tres magnitudes son proporcionales [están en proporción continua], se dice que la primera guarda con la tercera una razón duplicada [es el cuadrado] de la que guarda con la segunda [$a/b=b/c \Rightarrow (a/b)\cdot(a/b)= (a/b)\cdot(b/c)=a/c$].

D.V.10. Cuando cuatro magnitudes son proporcionales [están en proporción continua], se dice que la primera guarda con la cuarta una razón triplicada [es el cubo] de la que guarda con la segunda, y así siempre, sucesivamente, sea cual sea la proporción.

[$a/b=b/c=c/d \Rightarrow (a/b)\cdot(a/b)\cdot(a/b)= a/d$].

D.V.11. Se llaman magnitudes correspondientes las antecedentes en relación con las antecedentes y las consecuentes con las consecuentes.

D.V.12. Una razón por alternancia consiste en tomar el antecedente en relación con el antecedente y el consecuente en relación con el consecuente.

[$a/b=c/d \Rightarrow a/c=b/d$].

D.V.13. Una razón por inversión consiste en tomar el consecuente como antecedente en relación con el antecedente como consecuente.

[$a/b=c/d \Rightarrow b/a=d/c$].

D.V.14. La composición de una razón consiste en tomar el antecedente junto con el consecuente como una sola magnitud en relación con el propio consecuente.

[a/b, $(a+b)/b$].

D.V.15. La separación de una razón consiste en tomar el exceso por el que el antecedente excede al consecuente en relación con el propio consecuente.

[a/b, $(a–b)/b$].

D.V.16. La conversión de una razón consiste en tomar el antecedente en relación con el exceso por el que el antecedente excede al consecuente.

[a/b, $a/(a–b)$].

D.V.17. Una razón por igualdad se da cuando, habiendo diferentes magnitudes y otras iguales a las primeras en número que, tomadas de dos a dos, guardan la misma razón, sucede que como la primera es a la última –entre las primeras magnitudes–, así –entre las segundas magnitudes– la primera es a la última; o dicho de otro modo, consiste en tomar los extremos sin considerar los medios.

[$a_1/b_1=a_2/b_2= \cdots =a_n/b_n \Rightarrow a_1/a_n=b_1/b_n$].

D.V.18. Una proporción perturbada se da cuando habiendo tres magnitudes y otras iguales a ellas en número, sucede que como que el antecedente es al consecuente –entre las primeras magnitudes–, así –entre las segundas magnitudes– el antecedente es al consecuente, y como el consecuente es a alguna otra magnitud –entre las primeras magnitudes– ,así –entre las segundas magnitudes– alguna otra magnitud es al antecedente.

[(a,b,c), (m,n,p), $a/b=n/p$ y $b/c=m/n$].

Proposiciones:

- Proposición V.1. Si hay un número cualquiera de magnitudes respectivamente equimúltiplos de cualesquiera otras iguales en número, cuantas veces una sea múltiplo de otra, tantas veces lo serán todas de todas.

  [si ma_1, ma_2, ... ,ma_n son equimúltiplos de a_1, a_2, ... ,$a_n \Rightarrow ma_1+ ma_2+ \cdots + ma_n = m(a_1+ a_2+ \cdots +a_n)$].

- Proposición V.2. Si una primera magnitud es el mismo múltiplo de una segunda que una tercera lo es de una cuarta, y una quinta es también el mismo múltiplo de la segunda que una sexta de la cuarta, la suma de la primera y la quinta será el mismo múltiplo de la segunda que la suma de la tercera y la sexta de la cuarta.

  [$a=nb$, $c=nd$; $e=mb$, $f=md \Rightarrow a+e=nb+mb=(n+m)b$, $c+f=nd+md=(n+m)d$].

- Proposición V.3. Si una primera magnitud es el mismo múltiplo de una segunda que una tercera lo es de una cuarta, y se toman equimúltiplos de la primera y la tercera, también por igualdad cada una de las dos magnitudes tomadas serán equimúltiplos, respectivamente, una de la segunda y la otra de la cuarta.

  [$a=nb$, $c=nd \Rightarrow ma=pb$, $mc=pd$].

- Proposición V.4. Si una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda que una tercera con una cuarta, cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera guardaran la misma razón con cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta respectivamente, tomados en el orden correspondiente.

  [$a/b= c/d \Rightarrow na/mb=nc/md$].

- Proposición V.5. Si una magnitud es el mismo múltiplo de otra que una quitada de la primera lo es de otra quitada a la segunda, la magnitud restante de la primera tiene con la magnitud restante de la segunda la misma razón que las magnitudes totales.

  [$a=nb$, $a–c=n(b–d) \Rightarrow a/b= (a–c)/(b–d)$].

- Proposición V.6. Si dos magnitudes son equimúltiplos de dos magnitudes y ciertas magnitudes quitadas de ellas son equimúltiplos de estas dos segundas, las restantes también son o iguales a las mismas o equimúltiplos de ellas.

  [$a=nb$, $c=nd \Rightarrow (a–mb)/(c–md)=b/d$].

- Proposición V.7. Las magnitudes iguales guardan la misma razón con una misma magnitud y la misma magnitud guarda la misma razón con las magnitudes iguales.

  [$a=b \Rightarrow a/c=b/c$, $c/a=c/b$].

- Proposición V.8. De magnitudes desiguales, la mayor guarda con una misma magnitud una razón mayor que la menor, y la misma magnitud guarda con la menor una razón mayor que con la mayor.

  [$a>b \Rightarrow a/c>b/c$, $c/b>c/a$].

- Proposición V.9. Las magnitudes que guardan con una misma magnitud la misma razón son iguales entre sí; y aquellas con las que una misma magnitud guarda la misma razón, son iguales.

  [$a/c=b/c \Rightarrow a=b$, (recíproco de la Proposición V.7)].

- Proposición V.10. De las magnitudes que guardan razón con una misma magnitud, la que guarda una razón mayor, es mayor. Y aquella con la que la misma magnitud guarda una razón mayor, es menor.

  [recíproco de la Proposición V.8; $a/c>b/c \Rightarrow a>b$; $c/a>c/b \Rightarrow a<b$].

  Proposición V.11. Las razones que son iguales a una misma razón son iguales también entre sí. [$a/b= n/m$, $c/d=n/m \Rightarrow a/b= c/d$].

- Proposición V.12. Si un número cualquiera de magnitudes fueran proporcionales, como sea una de las antecedentes a una de las consecuentes, así lo serán todas las antecedentes a las consecuentes.

  [Aristóteles, *Ética a Nicómaco* V.7, 1131 b 14: «*El todo es al todo como cada parte es a cada parte*»; $a_1/b_1= a_2/b_2= \cdots = a_n/b_n \Rightarrow a_i/b_i=(a_1+a_2+ \cdots +a_n)/(b_1+b_2+ \cdots +b_n)$].

- Proposición V.13. Si una primera magnitud guarda con una segunda la misma razón que una tercera con una cuarta, y la tercera guarda con la cuarta una razón mayor que una quinta con una sexta, la primera guardará también con la segunda una razón mayor que la quinta con la sexta.

  [$a/b= c/d,\ c/d>e/f \Rightarrow a/b= c/d>e/f$].

- Proposición V.14. Si una primera magnitud guarda con una segunda la misma razón que una tercera con una cuarta y la primera es mayor que la tercera, la segunda será también mayor que la cuarta, y si es igual, será igual, y si es menor, será menor.

  [Aristóteles, *Meteorología*, III.5, 376 a 11-14; $a/b= c/d$, $a>c$ (respect. $a<c$) $\Rightarrow b>d$ (respect. $b<d$)].

- Proposición V.15. Las partes guardan la misma razón entre sí que sus múltiplos, tomados en el orden correspondiente.

  [$a/b= na/nb$].

- Proposición V.16. Si cuatro magnitudes son proporcionales, también por alternancia serán proporcionales.

  [$a/b=c/d \Rightarrow a/c= b/d$].

- Proposición V.17. Si unas magnitudes son proporcionales por composición, también serán proporcionales por separación.

  [$a/b=c/d \Rightarrow (a-b)/b=(c-d)/d$].

- Proposición V.18. Si unas magnitudes son proporcionales por separación, también serán proporcionales por composición.

  [$a/b=c/d \Rightarrow (a+b)/b=(c+d)/d$].

- Proposición V.19. Si un todo tiene con otro todo la misma razón que la parte quitada de uno a la parte quitada de otro, las partes restantes también estarán entre sí como los todos.

  [$c/d=a/b$ ($c<a$, $d<b$) $\Rightarrow (a-c)/(b-d)=a/b$].

- Proposición V.20. Si hay tres magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón, y si, por igualdad, la primera es mayor que la tercera, también la cuarta será mayor que la sexta; y si es igual, igual, y si es menor, menor.

  [(a,b,c), (m,n,p), $a/b=m/n$, $b/c=n/p$, $a>=<c$ (respectivamente) $\Rightarrow$ $m>=<p$ (respectivamente)].

- Proposición V.21. Si hay tres magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón y su proporción es perturbada, y si, por igualdad, la primera es mayor que la tercera, también la cuarta será mayor que la sexta; y si es igual, igual; y si es menor, menor.

  [(a,b,c), (m,n,p), $a/b=n/p$, $b/c=m/n$, $a>=<c$ (respectivamente) $\Rightarrow$ $m>=<p$ (respectivamente)].

- Proposición V.22. Si hay un número cualquiera de magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guarden la misma razón, por igualdad guardarán también la misma razón menor. [(a,b,c), (m,n,p), $a/b=m/n$, $b/c=n/p \Rightarrow a/c=m/p$].

- Proposición V.23. Si hay tres magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón, y su proporción es perturbada, por igualdad guardarán también la misma razón.

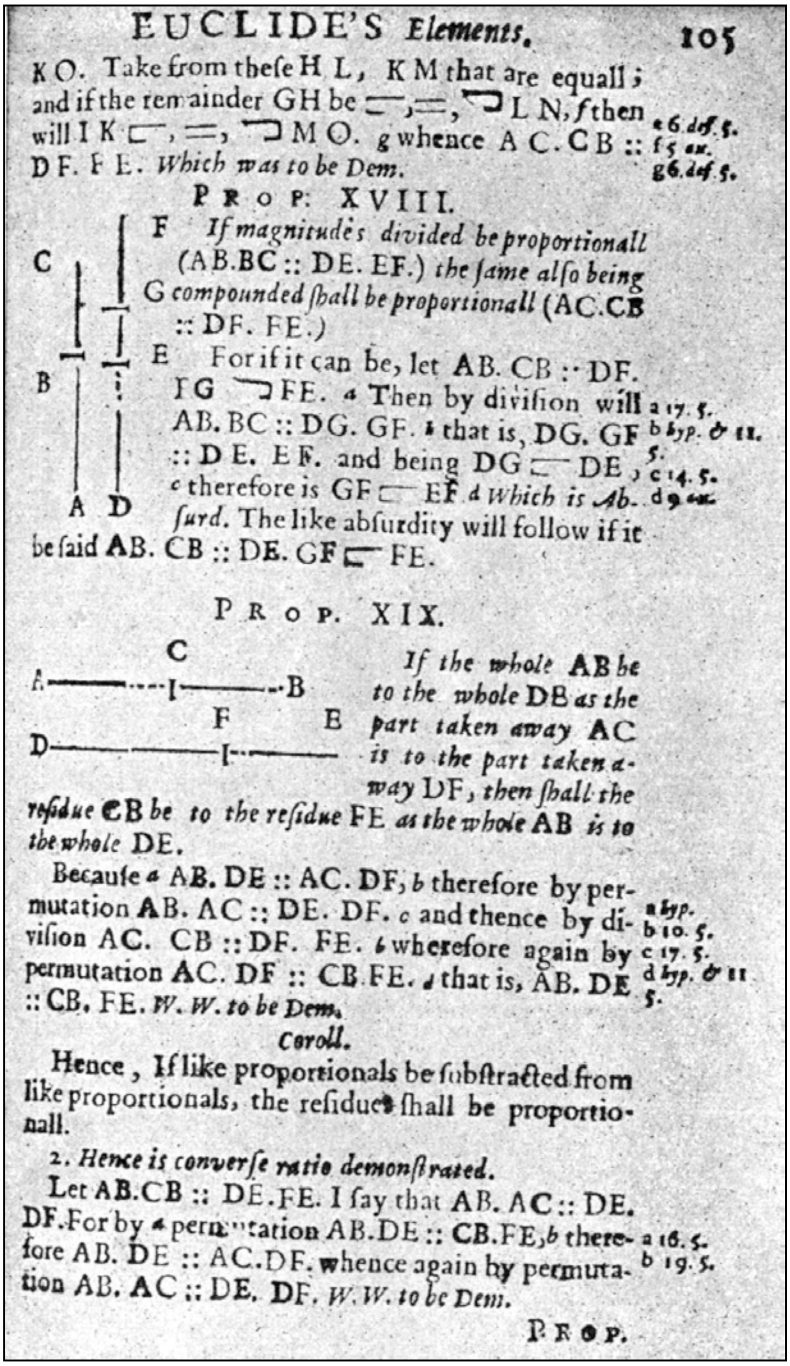
  [(a,b,c), (m,n,p), a/b=n/p, b/c=m/n $\Rightarrow$ a/c=m/p (respectivamente)].

- Proposición V.24. Si una primera magnitud guarda con una segunda la misma razón que una tercera con una cuarta, y una quinta guarda con la segunda la misma razón que la sexta con la cuarta, la primera y la quinta, tomadas juntas, guardarán también la misma razón con la segunda que la tercera y la sexta con la cuarta.

  [a/b=c/d , e/b=f/d $\Rightarrow$ (a+e)/b= (c+f)/d].

- Proposición V.25. Si cuatro magnitudes son proporcionales, la mayor y la menor juntas son mayores que las dos que quedan.

  [a/b=c/d , a>b>c>d $\Rightarrow$ a+d>=b+c].



EUCLIDE'S *Elements.* 105

KO. Take from these HL, KM that are equall; and if the remainder GH be ⊏, =, ⊐ LN, *f* then will IK ⊏, =, ⊐ MO. *g* whence AC.CB :: DF.FE. *Which was to be Dem.* e 6. def. 5. f 5 ax. g 6. def. 5.

PROP. XVIII.

If magnitudes divided be proportionall (AB.BC :: DE.EF.) the same also being compounded shall be proportionall (AC.CB :: DF.FE.)

For if it can be, let AB.CB :: DF.IG ⊐ FE. *a* Then by division will AB.BC :: DG.GF. *b* that is, DG.GF :: DE.EF. and being DG ⊏ DE, *c* therefore is GF ⊏ EF *d Which is Absurd.* The like absurdity will follow if it be said AB.CB :: DE.GF ⊏ FE. a 17. 5. b hyp. & 11. 5. c 14. 5. d 9 ax.

PROP. XIX.

If the whole AB be to the whole DE as the part taken away AC is to the part taken away DF, then shall the residue CB be to the residue FE as the whole AB is to the whole DE.

Because *a* AB.DE :: AC.DF, *b* therefore by permutation AB.AC :: DE.DF. *c* and thence by division AC.CB :: DF.FE. *b* wherefore again by permutation AC.DF :: CB.FE. *d* that is, AB.DE :: CB.FE. *W.W. to be Dem.* a hyp. b 16. 5. c 17. 5. d hyp. & 11. 5.

Coroll.

Hence, If like proportionals be substracted from like proportionals, the residues shall be proportionall.

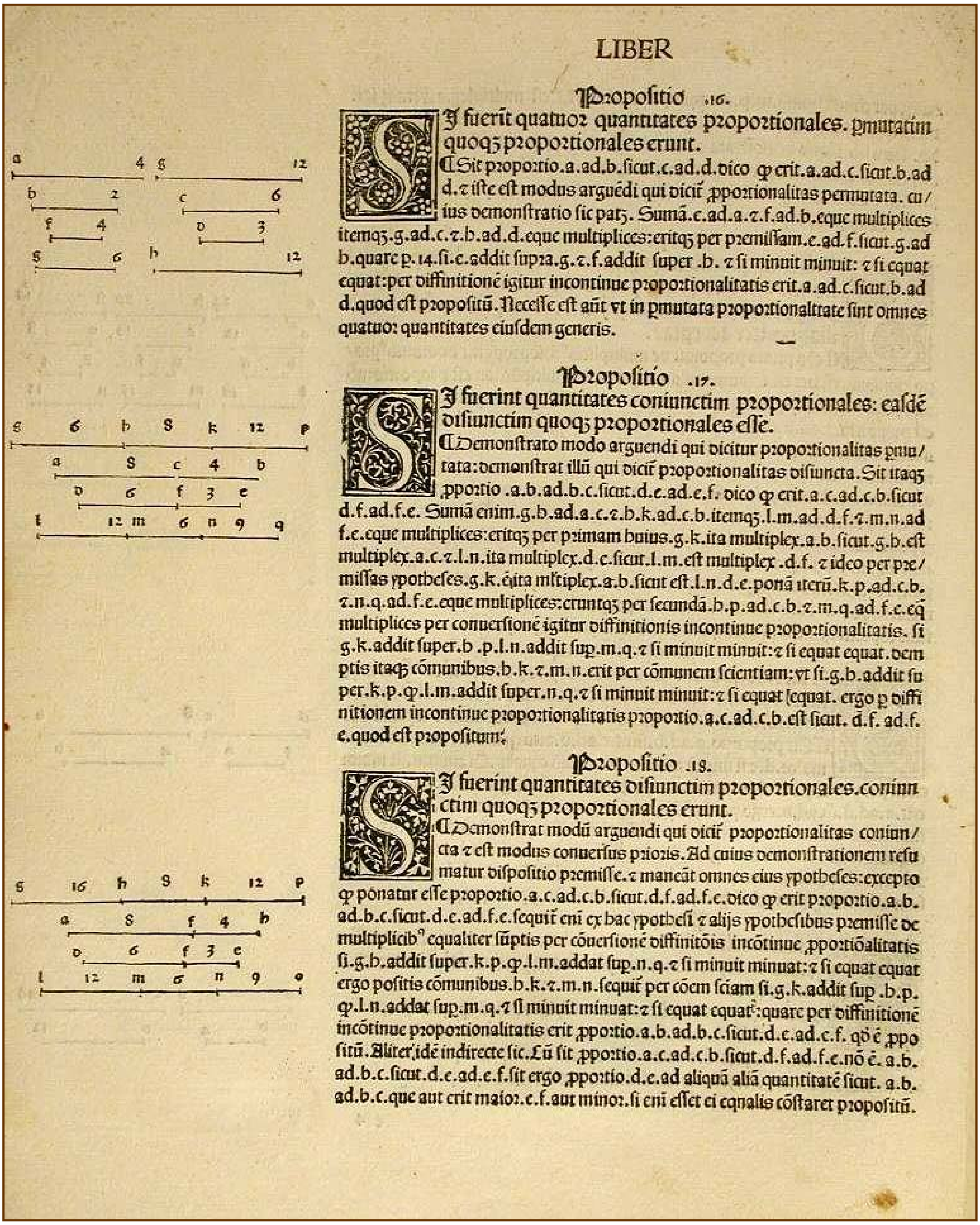
2. *Hence is converse ratio demonstrated.*

Let AB.CB :: DE.FE. I say that AB.AC :: DE.DF. For by *a* permutation AB.DE :: CB.FE, *b* therefore AB.DE :: AC.DF. whence again by permutation AB.AC :: DE.DF. *W.W. to be Dem.* a 16. 5. b 19. 5.

PROP.

Las proposiciones 18 y 19 sobre propiedades de las proporciones en el Libro V de *Los Elementos* de Euclides de la edición de Isaac Barrow (Londres, 1678).

PROPOSICIONES DEL LIBRO V
DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES



LIBER

Propositio .16.

Si fuerit quatuor quantitates proportionales. pmutatim quoqꝫ proportionales erunt.

Sit proportio .a. ad .b. sicut .c. ad .d. dico ꝙ erit .a. ad .c. sicut .b. ad .d. ꝛ iste est modus arguẽdi qui dicitur ꝓportionalitas permutata. cuius demonstratio sic patꝫ. Sumã .e. ad .a. ꝛ .f. ad .b. eque multiplices itemqꝫ .g. ad .c. ꝛ .h. ad .d. eque multiplices: eritqꝫ per premissam .e. ad .f. sicut .g. ad .h. quare p .14. si .e. addit supra .g. ꝛ .f. addit super .h. ꝛ si minuit minuit: ꝛ si equat equat: per diffinitionẽ igitur incontinue proportionalitatis erit .a. ad .c. sicut .b. ad .d. quod est propositũ. Necesse est aũt vt in pmutata proportionaltate sint omnes quatuor quantitates eiusdem generis.

Propositio .17.

Si fuerint quantitates coniunctim proportionales: easdẽ disiunctim quoqꝫ proportionales esse.

Demonstrato modo arguendi qui dicitur proportionalitas pmutata: demonstrat illũ qui dicit proportionalitas disiuncta. Sit itaqꝫ ꝓportio .a.b. ad .b.c. sicut .d.e. ad .e.f. dico ꝙ erit .a.c. ad .c.b. sicut .d.f. ad .f.e. Sumã enim .g.h. ad .a.c. ꝛ .h.k. ad .c.b. itemqꝫ .l.m. ad .d.f. ꝛ .m.n. ad .f.e. eque multiplices: eritqꝫ per primam huius .g.k. ita multiplex .a.b. sicut .g.h. est multiplex .a.c. ꝛ .l.n. ita multiplex .d.e. sicut .l.m. est multiplex .d.f. ꝛ ideo per premissas ypotheses .g.k. ẽita mltiplex .a.b. sicut est .l.n. .d.e. ponã iterũ .k.p. ad .c.b. ꝛ .n.q. ad .f.e. eque multiplices: eruntqꝫ per secundã .h.p. ad .c.b. ꝛ .m.q. ad .f.e. eq̃ multiplices per conuersionẽ igitur diffinitionis incontinue proportionalitatis. si .g.k. addit super .h.p. .l.n. addit sup .m.q. ꝛ si minuit minuit: ꝛ si equat equat. dẽptis itaqꝫ cõmunibus .h.k. ꝛ .m.n. erit per cõmunem scientiam: vt si .g.h. addit super .k.p. ꝙ .l.m. addit super .n.q. ꝛ si minuit minuit: ꝛ si equat equat. ergo p diffinitionem incontinue proportionalitatis proportio .a.c. ad .c.b. est sicut .d.f. ad .f.e. quod est propositum.

Propositio .18.

Si fuerint quantitates disiunctim proportionales. coniunctim quoqꝫ proportionales erunt.

Demonstrat modũ arguendi qui dicitur proportionalitas coniuncta ꝛ est modus conuersus prioris. Ad cuius demonstrationem resumatur dispositio premisse. ꝛ maneãt omnes eius ypotheses: excepto ꝙ ponatur esse proportio .a.c. ad .c.b. sicut .d.f. ad .f.e. dico ꝙ erit proportio .a.b. ad .b.c. sicut .d.e. ad .f.e. sequitur enim ex hac ypothesi ꝛ alijs ypothesibus premisse de multiplicib⁹ equaliter sũptis per cõuersionẽ diffinitõis incõtinue ꝓportiõalitatis si .g.h. addit super .k.p. ꝙ .l.m. addat sup .n.q. ꝛ si minuit minuat: ꝛ si equat equat ergo positis cõmunibus .h.k. ꝛ .m.n. sequitur per cõem sciam si .g.k. addit sup .h.p. ꝙ .l.n. addat sup .m.q. ꝛ si minuit minuat: ꝛ si equat equat: quare per diffinitionẽ incõtinue proportionalitatis erit ꝓportio .a.b. ad .b.c. sicut .d.e. ad .e.f. qđ ẽ ꝓpositũ. Aliter idẽ indirecte sic. Cũ sit ꝓportio .a.c. ad .c.b. sicut .d.f. ad .f.e. nõ ẽ .a.b. ad .b.c. sicut .d.e. ad .e.f. sit ergo ꝓportio .d.e. ad aliquã aliã quantitatẽ sicut .a.b. ad .b.c. que aut erit maior .e.f. aut minor. si enĩ esset ei equalis cõstaret propositũ.

Las Proposiciones 17, 18 y 19 del Libro V de *Los Elementos* de Euclides, en la edición de E. Ratdolt.

Estas proposiciones, redactadas en lenguaje geométrico, de forma retórica y casi críptica son equivalentes a los siguientes importantes resultados sobre proporciones:

- **Proposición 17: [a/b=c/d ⇒ a/c= b/d].**
- **Proposición 18: [a/b=c/d ⇒ (a−b)/b=(c−d)/d].**
- **Proposición 19: [a/b=c/d ⇒ (a+b)/b=(c+d)/d].**

LA INCONMENSURABILIDAD DE $\sqrt{2}$

- **Demostración aritmética de la inconmensurabilidad de $\sqrt{2}$**

Sea p/q una fracción irreducible tal que $(p/q)^2=2$. Se verifica:

$p^2/q^2=2$; $p^2=2q^2$, de modo que p^2 (y por tanto p) es un número par; es decir: p=2s. de donde $2q^2=p^2=(2s)^2=4s^2$.

Así pues: $q^2=2s^2$, de modo que q^2 (y por tanto q) es un número par; es decir : p=2r.

El carácter par de p y q contradice la hipótesis de que p/q es una fracción irreducible. En consecuencia no puede existir ningún segmento cuyo cuadrado sea 2.

Esta demostración es de raíz aristotélica. El método indirecto por reducción al absurdo hace improbable que fuera la base del descubrimiento pitagórico original de los inconmensurables.
La demostración aritmética de la inconmensurabilidad de $\sqrt{2}$ exhibida, equivalente según el *Teorema de Pitágoras* a la inconmensurabilidad de la diagonal de un cuadrado con respecto al lado –que debe ser medida por un segmento cuyo cuadrado sea 2–, se ha interpolado en los textos apócrifos de *Los Elementos* de Euclides como proposición X.117.

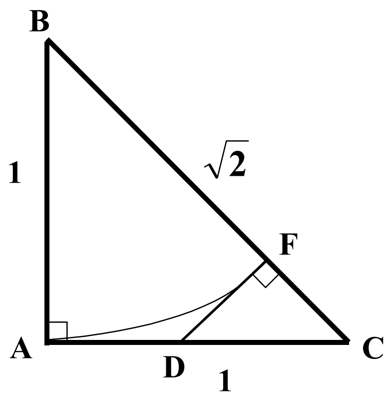
La demostración esta basada en la distinción entre lo par y lo impar y ya había sido aludida por Aristóteles (*Lógica. Analítica Primera*. Libro I, Cap. 23, 41a):

> ***«Se demuestra que la diagonal del cuadrado es inconmensurable con los lados, mostrando que si se supone que es conmensurable, los números pares serán igual a los números impares.»***

El eminente matemático ingles G.H. Hardy escribe un auténtico panegírico de esta demostración en su conocida obra *Apología de un matemático*, donde describe su concepción de la Matemática (Nivola, Madrid, 1999. p.91):

> **«[La demostración aristotélica de la irracionalidad de $\sqrt{2}$] *es un teorema simple, tanto en su idea como en su ejecución, pero no hay duda de que es un teorema de la mayor categoría. Conserva la frescura y el significado del momento de su descubrimiento; y los más de 2000 años transcurridos no lo han desgastado un ápice.»***

- **Demostración geométrica de la inconmensurabilidad de $\sqrt{2}$**



Supongamos que existe un segmento HK que divide a los segmentos AB (cateto) y a BC (hipotenusa), es decir: HK | AB, HK | BC.
De la geometría de la figura se deduce:

- **AB = FB [radios]**
- **FD = AD [tangentes]**
- **FC = BC–AB (1)**
- **FD = FC [Δ(FDC) isósceles (<D=<B=<C)]**
- **DC = AC–AD = AC–FD = AC–FC (2)**

De (1) y (2) se deduce: HK | FC, HK | DC

Este proceso se puede reiterar indefinidamente, con el resultado de que se van obteniendo triángulos isósceles que pueden llegar a ser «*tan pequeños como se quiera*», en los que el segmento fijo HK divide simultáneamente al cateto y a la hipotenusa, lo cual es manifiestamente imposible. Esto lleva a la conclusión de que no puede haber una unidad de longitud que mida simultáneamente el cateto y la hipotenusa del triángulo, es decir, estos dos segmentos no son conmensurables

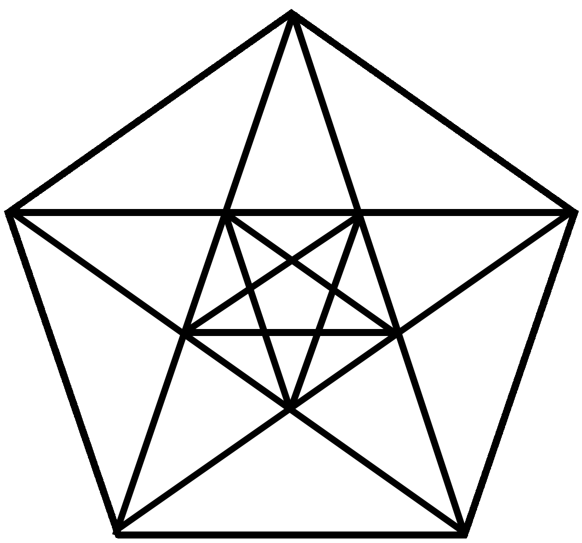
LA HIPÓTESIS DEL PENTÁGONO Y EL PENTAGRAMA EN EL DESCUBRIMIENTO PITAGÓRICO DE LA INCONMENSURABILIDAD

Kurt von Fritz. *The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum* (Annals of Mathematics, 46, 242-64, 1945).

El descubrimiento de la inconmensurabilidad es uno de los más asombrosos y trascendentales logros de la primitiva matemática griega . (p. 242)

Sabemos que los pitagóricos usaban el pentagrama, es decir, el pentágono regular con los lados prolongados hasta el punto de intersección, como símbolo de reconocimiento. (p. 256).

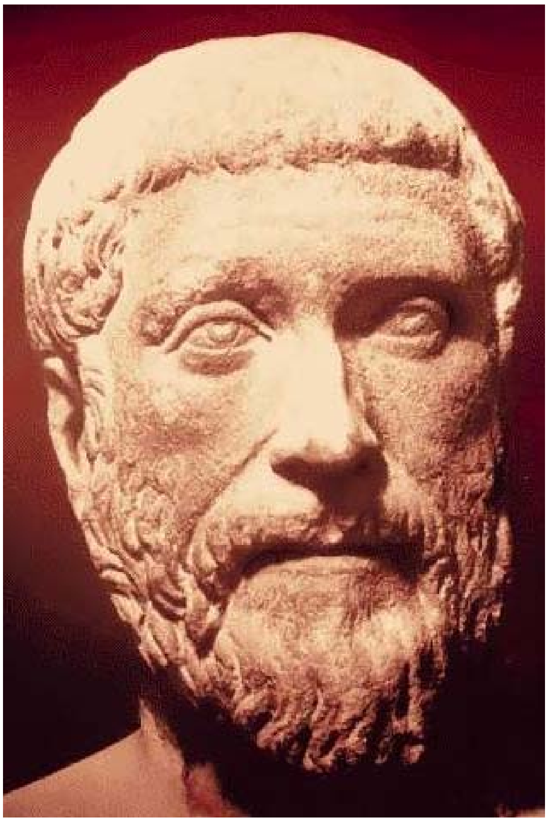
Hipasos debió intentar encontrar números y razones incorporados en el pentagrama y el pentágono regular [...] únicas figuras geométricas en las que la inconmensurabilidad puede ser fácilmente probada. Había un antiguo método, conocido por los artesanos como regla empírica muchos siglos antes del comienzo de la filosofía y de la ciencia en Grecia, a saber, el método de la sustracción recíproca, por el cual se halla la mayor medida común. Naturalmente no es posible descubrir la inconmensurabilidad en la forma como lo practicaban los artesanos, pero sí trazando todas las diagonales dentro del pentágono, que forman otro pentágono regular en el centro, con el que se puede practicar la misma operación, y así hasta el infinito, y por tanto reiterar de forma indefinida el proceso de sustracción recíproca, de modo que no puede haber una medida común de la diagonal y el lado del pentágono. Así pues, es aparente casi a primera vista que la relación entre la diagonal y el lado no puede ser expresada en números enteros, por grandes que sean. [...]. (p. 257).



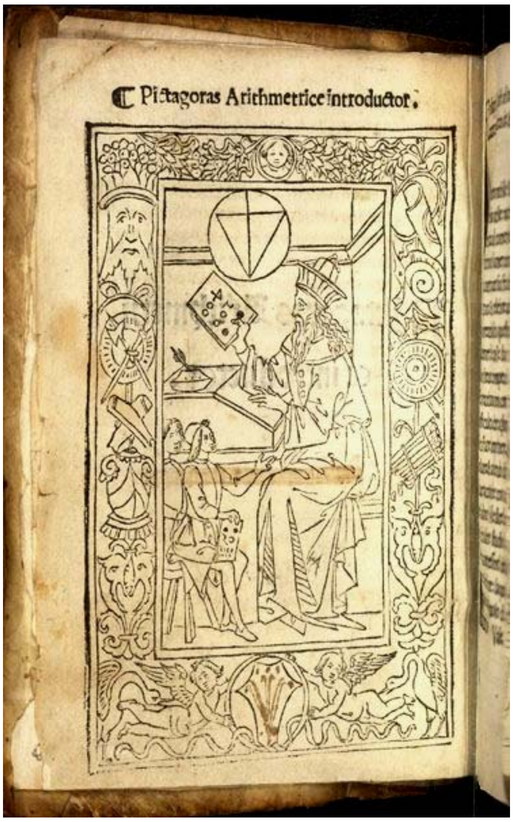
En el curso de la sustracción recíproca podemos ver que la diferencia entre la diagonal y el lado del pentágono más grande es igual a la diagonal del pentágono más pequeño, y la diferencia entre el lado del pentágono más grande y la diagonal del pentágono más pequeño es igual al lado del pentágono más pequeño, y a su vez la diferencia entre la diagonal del pentágono más pequeño y su lado es igual a la diagonal del siguiente pentágono más pequeño, y así sucesivamente hasta el infinito. Ya que cada nuevo pentágono regular se obtiene trazando diagonales, es evidente que el proceso de sustracción recíproca se puede seguir realizando indefinidamente, y por tanto no se puede encontrar ninguna medida común de la diagonal y el lado del pentágono regular se puede encontrar. (p. 258)

El descubrimiento de la inconmensurabilidad debió provocar una enorme impresión en los círculos pitagóricos porque de golpe destruía la creencia de que todo podía ser expresado en términos de números enteros, lo que constituía la base de toda la Filosofía pitagórica. Esta impresión es claramente reflejada en algunas leyendas que aseguran que Hipasos fue castigado por los dioses por haber hecho público el terrible descubrimiento. (p. 260).

LOS INCONMENSURABLES QUIEBRAN LA FILOSOFÍA PITAGÓRICA



Pitágoras. Museo Capitolino de Roma. Quizá la efigie más conocida de Pitágoras.



Portada de la *Aritmética* de F.Calandri (Florencia, 1492) representando a Pitágoras como maestro de Aritmética.

Aunque Proclo en su famoso *Comentario al Libro I de Los Elementos de Euclides* atribuye al propio Pitágoras el primer reconocimiento de inconmensurables cuando escribe:

> «*Pitágoras* [...] *investigó los teoremas de un modo inmaterial e intelectual y descubrió la dificultad de los números irracionales*»,

la tradición lo atribuye al pitagórico Hipasos de Metaponto, hacia el 480 a.C. La sacudida que la aparición del nuevo ente provocó en la Matemática griega puede calibrarse por la leyenda que relata un viejo escolio –atribuido a Proclo– del Libro X de *Los Elementos* de Euclides:

> «*Es fama que el primero en dar al dominio público la teoría de los irracionales, perecería en un naufragio, y ello porque lo inexpresable e inimaginable debería siempre haber permanecido oculto. En consecuencia, el culpable, que fortuitamente tocó y reveló este aspecto de las cosas vivientes, fue trasladado a su lugar de origen, donde es flagelado a perpetuidad por las olas*.»

La cosmovisión pitagórica establecía que toda la naturaleza estaba regida por un orden matemático y acuñaba el término *Cosmos* para describir un universo armonioso y ordenado por unas leyes cognoscibles e inteligibles por el hombre a través de número, germen elemental y «*esencia de todas las cosas*». Si el número es el instrumento radical de intelección del mundo –el físico y el espiritual–, la aparición del inconmensurable –elemento que al está fuera de la inteligibilidad– produce un disturbio radical en el orden numérico que resquebraja los cimientos aritméticos de la Filosofía pitagórica, que eran principios racionales basados en el número entero. El descubrimiento de los inconmensurables es un desafío lanzado por la naturaleza a la Aritmética que refuta la creencia pitagórica en la omnipotencia de los números.

La súbita emergencia de la inconmensurabilidad sometió el pensamiento pitagórico a un desafío filosófico –ya que la irracionalidad atentaba contra el sincretismo aritmético-físico que establecía la preeminencia del número como esencia del Cosmos– y otro matemático –ya que a partir de entonces en Geometría era imposible medir siempre con exactitud y los inconmensurables exigían la reconstrucción de todas las pruebas pitagóricas de los teoremas que utilizaban proporciones–.

V.Gómez Pin escribe en su obra *La tentación pitagórica* (Síntesis, Madrid, 1999, pp. 55, 56):

> «*Esta imposibilidad* **[de expresar raíz cuadrada de dos en forma de fracción]** *dejó necesariamente atónito y acaso espantado al pitagórico. Pues no podía negar que* $\sqrt{2}$ *era un número, ya que entonces dejaría de tener valor general el Teorema de Pitágoras* [...].*irreductible a la aritmética racional,* $\sqrt{2}$ *es, sin embargo, perfectamente representable en el orden geométrico* **[aplicando el *Teorema de Pitágoras*]**.

Según J. Babini (Arquímedes: *El Método*. Eudeba, Buenos Aires, 1966, p.15):

> «*El descubrimiento pitagórico de los irracionales mostró su incompatibilidad con su metafísica* [...]. *La inconmensurabilidad de la diagonal y el lado de un cuadrado planteaba a los pitagóricos una tremenda alternativa: de mantener su metafísica, mutilaban la geometría; de mantener la geometría anulaban su metafísica*.»

LA *TEORÍA DE LA PROPORCIÓN* DE EUDOXO EN EL LIBRO V DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES

Dos segmentos de recta pueden ser comparados con regla y compás para determinar cuál tiene mayor longitud y pueden yuxtaponerse para obtener un tercer segmento. La *Aplicación de las Áreas* del Libro II de *Los Elementos* de Euclides permite realizar las mismas operaciones con áreas, ya que según la Proposición II.14 toda figura rectilínea puede transformarse en un rectángulo con el mismo área y un altura prefijada. Las áreas de dos rectángulos con la misma altura pueden compararse cotejando las longitudes de sus bases (Proposición VI.1) y se pueden yuxtaponer para obtener un tercer rectángulo. Al repetir la adición de una magnitud geométrica (longitud, área o volumen) consigo misma, se realiza la operación de multiplicar por un entero positivo.

- **La definición pitagórica de Proporción:**

  Para los griegos la palabra número significa «*número entero positivo*»; una fracción a/b indicaría no un número racional sino una relación entre los números enteros a y b, «*la razón*» entre a y b. En sentido actual sería un par ordenado de números.

  Para los pitagóricos dos razones a/b, c/d, se dice que son «*proporcionales*»:

  a/b=c/d, cuando existen enteros p,q,m,n, tales que a=mp, b=mq, c=np, d=nq;

  por ejemplo: 12/15=16/20, porque 12 contiene cuatro de las cinco partes de 15, al igual que 16 contiene cuatro de las cinco partes de 20.

  A partir de esta base se desarrolló inicialmente la teoría pitagórica de la proporcionalidad. La visión de número como tamaño se aplicó a las magnitudes geométricas: longitudes, áreas y volúmenes, en la creencia de que dos segmentos de línea eran siempre conmensurables, es decir que existía una unidad común de la que ambos serían múltiplos. De esta forma la doctrina de razones enteras y proporciones se podía extender a longitudes, áreas y volúmenes de figuras simples como segmentos, rectángulos y paralelepípedos.

  El descubrimiento pitagórico de los inconmensurables inutilizaba la teoría pitagórica de proporciones enteras para la comparación de razones de magnitudes geométricas y en consecuencia quedaban afectadas y debían ser reconstruidas todas las pruebas pitagóricas de los teoremas que utilizaran proporciones. La profunda crisis de fundamentos de la Geometría que se desencadenó fue resuelta por un matemático de la Academia platónica, Eudoxo de Cnido, mediante una nueva definición de proporcionalidad de razones de magnitudes geométricas.

- **La definición de Eudoxo de igualdad de razones (*Elementos* de Euclides, definición V.5):**

  Si a,b son dos magnitudes geométricas del mismo tipo y c,d son también del mismo tipo (aunque no necesariamente del mismo tipo que a y b), Eudoxo define que las razones

  a/b y c/d son proporcionales: a/b=c/d,

  cuando para cualquier par de enteros positivos n y m, se tiene:

  na>mb y nc>md ó na=mb y nc=md, ó na<mb y nc<md .

- **La definición de Eudoxo de proporción generaliza la noción pitagórica de proporcionalidad de razones de enteros:**

1. **Si a/b = c/d en sentido pitagórico, existen enteros p,q,m,n positivos, tales que a=mp, b=mq, c=np, d=nq.**

   Sean h, k, enteros positivos cualesquiera. Se tiene:

   $$ha\ (>,=,<)\ kb \Rightarrow hmp\ (>,=,<)\ kmq \Rightarrow hp\ (>,=,<)\ kq \Rightarrow hnp\ (>,=,<)\ knq \Rightarrow hc\ (>,=,<)\ kd\ .$$

   Por tanto se ha demostrado que a/b = c/d sentido de Eudoxo.

2. **Si a/b = c/d en sentido de Eudoxo, donde a,b,c,d, son enteros positivos. Existen enteros, r,s, tales que: ra = sb, y por tanto: rc = sd.**

   Sea h=mcd(r,s), entonces: r=qh, s=ph, donde mcd(q,p)=1. Ahora se verifica:

   $$ra = sb \Rightarrow qha = phb \Rightarrow qa = pb \Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{Teorema de Euclides}\\ \text{Elementos, VII.30}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} a = p\alpha \\ b = q\beta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha=\beta=m \Rightarrow \left\{\begin{matrix} a = pm \\ b = qm \end{matrix}\right\}$$

   $$rc = sd \Rightarrow qhc = phd \Rightarrow qc = pd \Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{Teorema de Euclides}\\ \text{Elementos, VII.30}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} c = p\chi \\ b = q\delta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \chi=\delta=n \Rightarrow \left\{\begin{matrix} c = pn \\ d = qn \end{matrix}\right\}$$

   Por tanto se ha demostrado que a/b = c/d en sentido pitagórico.

LA *TEORÍA DE LA PROPORCIÓN* DE EUDOXO EN EL LIBRO V DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES

Sorprende la similitud de la definición de Eudoxo de igualdad de razones con *las cortaduras* que utilizó Dedekind en el siglo XIX para la fundamentación del conjunto de los números reales.

Dadas dos magnitudes inconmensurables a y b, la definición de Eudoxo de proporcionalidad de razones de magnitudes geométricas separa el conjunto de todo los número racionales m/n en dos conjuntos disjuntos: Un conjunto I de números para los cuales m/n < a/b, y otro conjunto D para los cuales m/n > a/b. El par de conjuntos (I,D) en el que todo número de I es menor que todo número de D se llama una «*cortadura* » de Dedekind, que define precisamente un número real. De esta forma el gran matemático alemán volvió sobre el terreno arado por Eudoxo 2500 años antes.

Con base en la definición de igualdad de razones , Eudoxo diseña una nueva *Teoría de la Proporción* que será muy alabada por G.H. Hardy en su obra *Apología de un matemático* (pp.98–99):

> «*Eudoxo construyó una profunda teoría que aparece descrita en el Libro V de Los Elementos de Euclides, y que es considerada por muchos matemáticos modernos como el logro más depurado de las Matemáticas griegas. Esta teoría es sorprendentemente moderna en espíritu, y puede ser considerada como el principio de la moderna teoría de números irracionales, que ha revolucionado el Análisis Matemático y ha tenido mucha influencia en la filosofía reciente.*»

Eudoxo prescinde del número irracional y opera con magnitudes que se pueden hacer menores que otras arbitrariamente prefijadas para lo que introduce lo que hoy llamamos el «*Axioma de Eudoxo-Arquímedes*» o «*Axioma de continuidad*», que aparece inocuamente como una definición en *Los Elementos* de Euclides (Definición V.4) :

> «*Dos magnitudes tienen razón cuando se puede multiplicar una de ellas de modo que supere a la otra.*»

La asunción de Euclides fue considerada por Arquímedes como un principio o postulado, de ahí el nombre con el que ha pasado a la literatura Matemática. La importancia del axioma la ha remarcado Hilbert, en su obra *Los principios fundamentales de la Geometría*, donde le asigna un papel fundamental en la estructura de la Geometría. Arquímedes lo enuncia en el postulado V del Libro I de su obra *Sobre la Esfera y el Cilindro* y lo repite en la carta a Dositeo de *Sobre la Cuadratura de la Parábola* asegurando que fue utilizado por los geómetras anteriores para demostrar los teoremas del Libro XII de *Los Elementos* sobre el círculo, las esferas, los cilindros, las pirámides y los conos.

El *Axioma de Eudoxo-Arquímedes* juega un papel crucial en la *Teoría de la Proporción* de Eudoxo, lo que se ilustra fehacientemente en la demostración de la Proposición V.9 de *Los Elementos*:

Si $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ se verifica: a = b .

Supongamos que a > b. Entonces existe un entero n tal que n(a–b) > c . Sea mc el múltiplo más pequeño de c que supera a nb. Entonces, se tiene: mc > nb ≥ (m-1)c. De donde resulta:

na > mc, mientras que nb <mc, lo que contradice la definición de la proporcionalidad $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.

Así pues, se sigue por necesidad que a=b, c.q.d.

Veamos otra aplicación a la importante Proposición 16 del Libro VI:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si y sólo si ad=bc [«*El producto de los medios es igual al producto de los extremos*»] .

En primer lugar, se tiene: $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$ [Proposición V.15] ya que según la definición V.5:

na>mb $\Rightarrow$ nad>mbd; na=mb $\Rightarrow$ nad=mbd; na<mb $\Rightarrow$ nad < mbd .

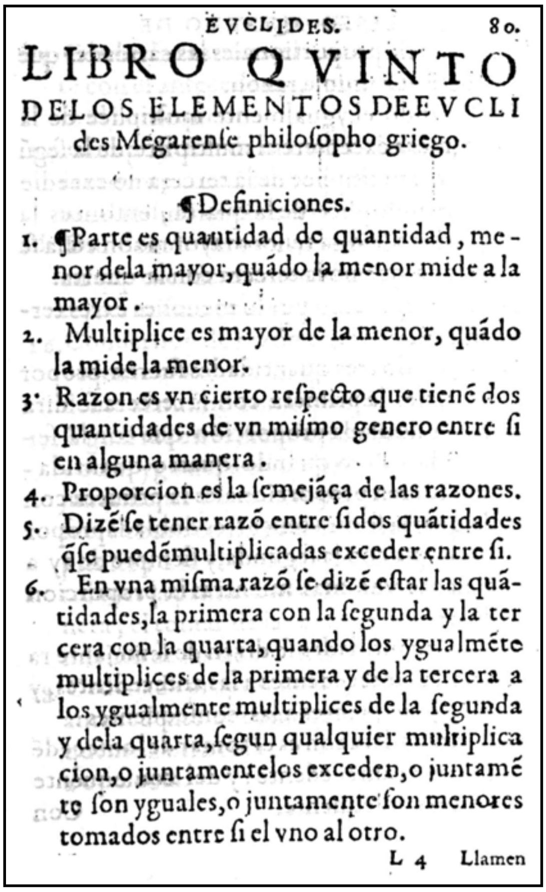
Análogamente, se tiene: $\frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$, que junto con $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$ y la hipótesis $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, dan: $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$, de donde según la Proposición V.9, demostrada más arriba, resulta: ad=bc, c.q.d.

Las pruebas exhibidas son un buen patrón de cómo se demuestran las habituales propiedades de las proporciones en el Libro V de *Los Elementos* de Euclides. Esta *Teoría de la Proporción*, forjada por Eudoxo, permitió a la Matemática griega manejar razones de magnitudes geométricas de la misma forma y con la misma finalidad con que la Matemática actual opera con números reales, y sobre la base establecida, Eudoxo procedió a establecer pruebas geométricas rigurosas de los resultados del Libro XII de *Los Elementos* de Euclides, sobre áreas de círculos y volúmenes de pirámides y conos, que Hipócrates y Demócrito habían vislumbrado unos 50 años antes, más o menos.

LA *TEORÍA DE LA PROPORCIÓN* DE EUDOXO EN EL LIBRO V DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES

LOS SEIS LIBROS
PRIMEROS DELA GEOMETRIA
DE EVCLIDES.
Traduzidos en légua Española por Rodrigo çamorano Astrologo y Mathematico, y Cathedraticô de Cosmographia por su Magestad en la casa de la Contratació de Seuilla
Dirigidos al jllustre señor Luciano de Negrô, Canonigo dela sancta yglesia de Seuilla.

Con licencia del Consejo Real.
En Seuilla en casa de Alonso de la Barrera.
1576.
Esta tassado en



EVCLIDES. 80.

LIBRO QVINTO
DELOS ELEMENTOS DE EVCLIDES Megarense philosopho griego.

¶Definiciones.

1. ¶Parte es quantidad de quantidad, menor dela mayor, quádo la menor mide a la mayor.
2. Multiplice es mayor de la menor, quádo la mide la menor.
3. Razon es vn cierto respecto que tiené dos quantidades de vn mismo genero entre si en alguna manera.
4. Proporcion es la semejáça de las razones.
5. Dizé se tener razó entre si dos quátidades q̃ se puedé multiplicadas exceder entre si.
6. En vna misma razó se dizé estar las quátidades, la primera con la segunda y la tercera con la quarta, quando los ygualméte multiplices de la primera y de la tercera a los ygualmente multiplices de la segunda y dela quarta, segun qualquier multiplicacion, o juntamente los exceden, o juntamété son yguales, o juntamente son menores tomados entre si el vno al otro.

L 4 Llamen

1. Portada de la primera edición en idioma castellano de *Los Elementos* de Euclides (Rodrigo Çamorano, Sevilla, 1576). En 1997 con motivo de la celebración en Salamanca de las VIII Jornadas de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, se hizo una edición facsimilar de esta edición. De ella proceden las ilustraciones.
2. Portada del Libro V de la edición de R.Çamorano. Contiene las primeras definiciones de la *Teoría de la Proporción* de Eudoxo, que resuelve la crisis del inconmensurable, pero como otras ediciones coetáneas, interpola entre la 3 y la 4 la siguiente : «4. *Proporción es la semejanza de las razones*», que está sacada de las obras de Aritmética, aunque Aristóteles ya había definido proporción, referida a números, como «*igualdad de las relaciones entre términos en número de cuatro por lo menos*», es decir: «*igualdad de razones*» (Ética a Nicómaco, LibroV, cap.3, 1131a). De esta forma las importantes definiciones V.4 (*axioma de continuidad* de Eudoxo–Arquímedes) y V.5 (igualdad de razones) quedan desplazadas al quinto y sexto lugar, respectivamente.

Sobre el trabajo de Eudoxo citemos tres textos de tres importantes historiadores de la Matemática:

E.Bell. *Les grands mathématiciens*. Payot. París, 1950, pp.36,37:

> «*Eudoxo está en la cumbre de las matemáticas griegas por su Teoría de las Proporciones.* [...]. *Eudoxo ha encontrado el primer método lógicamente satisfactorio, que Euclides ha reproducido en el Libro V de sus Elementos, para resolver los problemas de la continuidad, los enigmas del infinito y los dédalos de los números irracionales.*»

J.Itard. La Ciencia helénica: Platón (en *Historia general de las Ciencias*. Orbis. Barcelona, 1988, vol.1, Lib.1, cap.3, p.279). R.Taton (compilador). p.350

> «*Con el Libro V* [de *Los Elementos* de Euclides] *nos encontramos ante una de las cimas del pensamiento matemático, y puede afirmarse que este libro fue en verdad asimilado y superado tan sólo hace un siglo, más o menos.*»

J. Babini (Arquímedes: *El Método*. Eudeba, Buenos Aires, 1966, p.15):

> «*La definición de Eudoxo* [de igualdad de razones] *evita la dificultad que había presentado la razón entre cantidades inconmensurables, por carecer los griegos del concepto de nuestro "numero irracional", definiendo, no esa razón, sino la igualdad de razones; es decir, la proporción, de una manera tal de soslayar esa carencia. Para ello, mediante desigualdades y números enteros, logra definir la proporcionalidad, sean conmensurables o no las cantidades proporcionales. Esta definición de la proporcionalidad* [Euclides V.5] *es la que luego servirá de base a la teoría de la semejanza que aparece en los Elementos de Euclides* [Libro VI].»

LA *TEORÍA DE LA PROPORCIÓN* DE EUDOXO EN EL LIBRO V DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES Y LA ENSEÑANZA MODERNA DE LA GEOMETRÍA

Felix Klein. Matemática elemental desde un punto de vista superior

Vol. II. Geometría. Biblioteca Matemática. Dr: J.Rey Pastor. Madrid, 1931. pp.255–278

Una de las diferencias más importantes entre la Matemática moderna y la Matemática griega estriba en que los griegos no poseían ni Aritmética independiente, ni fracciones decimales que tanto facilitan el cálculo numérico, ni el cálculo literal general, que son invenciones del Renacimiento; solamente tenían un cálculo en forma geométrica, en el cual en vez de operar con números se operaba por medio d construcciones con segmentos y otras magnitudes geométricas, lo que naturalmente, era extraordinariamente más complicado que nuestra Aritmética. También carecían de los números negativos, que tanta flexibilidad dan a la Aritmética y al Álgebra, y como consecuencia de ello les faltaba la generalidad del método que permite reunir en una sola fórmula todos los casos posibles, de modo que se encontraban continuamente embarazados por la consideración de numerosos casos particulares. (p.255)

En la Geometría estas diferencias se acentúan más aún donde [en la matemática moderna] basta emplear el auxilio de medios analíticos para lograr una generalidad completa y evitar la distinción de casos particulares. (p.255–256). [...]

El Libro V de *Los Elementos* de Euclides es el más profundo, puesto que en él se introduce el *equivalente geométrico de los números reales positivos*, esto es la razón a/b de dos segmentos a y b cualesquiera, llamada por Euclides *logos* [...] El punto esencial de esta teoría está en la *definición de igualdad de dos razones* a/b, c/d que debe ser general válida también, por lo tanto, para el caso de que a/b sea un número irracional en el concepto moderno; es decir, para el caso en que los segmentos a y b sean, como dice Euclides, «*asymmetroi*» esto es, sin medida común o *inconmensurables* como después se ha traducido. (p.256)

Euclides procede de la siguiente manera: toma dos números m y n enteros, y compara las magnitudes ma y nb de una parte, las mc y nd de otra, con lo cual resulta una de las tres relaciones:

$$ma \begin{smallmatrix}>\\=\\<\end{smallmatrix} nb \;, \quad mc \begin{smallmatrix}>\\=\\<\end{smallmatrix} nd$$

Cuando en ambas relaciones aparece siempre el mismo *sig*no, *cualesquiera que sean los números* m y n *elegidos* dice que *a/b =c/d*. Se ve inmediatamente que este, procedimiento es en esencia el mismo que el de *Dedekind,* para definir el número real por una *cortadura.*

Euclides continua después con el estudio del cálculo con igualdades entre razones, y desarrolla su renombrada *teoría de las proporciones;* es decir, una teoría geométrica de todas las transformaciones algebraicas posibles de la ecuación *a/b =c/d*

En el tratado de Euclides la proporción se llama «*analogía*», lo que indica que *el «Iogos»* de dos pares de magnitudes es el mismo, concepto muchísimo más restringido que el *de proporción* que tenemos en la actualidad. Unicamente en alguna parte de la Matemática conserva todavía su primitivo significado como en las *analogías de Neper.*

La teoría de las Proporciones es un ejemplo característica de la tenacidad con que la tradición euclídea se conserva en la enseñanza geométrica, ya que en muchas, quizá en la mayor parte de las escuelas, se enseña como un, *capítulo especial de la Geometría*, a pesar de que está por completo incluida en la Aritmética moderna y de que en ella se enseña dos veces; una al estudiar la regla de tres y otra en los principios del cálculo literal. Ningún motivo hay para enseñar lo mismo por tercera vez, presentándolo en una oscura forma geométrica, que de seguro resultará para el discípulo completramente ininteligible, como no sea el ajustarse por completo a las normas euclídeas. Los que tal hacen, olvidan, sin embargo, que el objeto de Euclides era sustituir así a la Aritmética que le faltaba y que, por lo tanto, nosotros no necesitamos de tal teoría. (p.256).

LA *TEORÍA DE LA PROPORCIÓN* DE EUDOXO EN EL LIBRO V DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES Y LA ENSEÑANZA MODERNA DE LA GEOMETRÍA

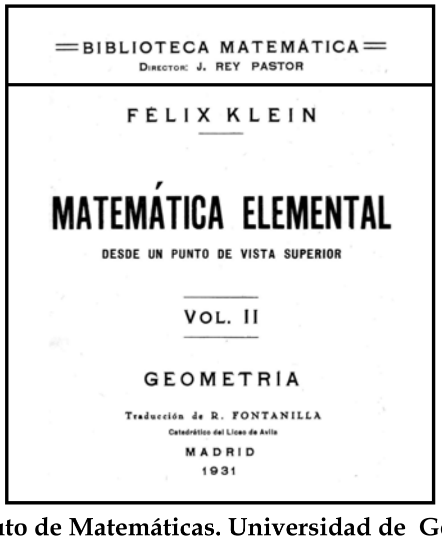
F. Klein. Matemática elemental desde un punto de vista superior

Vol. II. Geometría. Biblioteca Matemática. Dr: J.Rey Pastor. Madrid, 1931. pp.258–274

Esta crítica a la actual manera de tratar las proporciones no disminuye en nada *la importancia científica del quinto Libro* de Euclides, que es tanto mayor, cuanto que en él se establece por primera vez *la licitud del cálculo con números irracionales*, sobre la base de definiciones rigurosas. Esto demuestra que el tratado de Euclides no tiene el carácter didáctico que tan erróneamente se le ha dado, sino que, por el contrario, está destinado a lectores familiarizados con las más puras abstracciones científicas. [...] Según la tradición, este quinto libro no fue escrito por Euclides, sino por Eudoxo de Cnido (hacia 350 a.C.). (p.258), [...].

Vamos, ahora, a resaltar uno de los aciertos más brillantes de *Los Elementos* de Euclides. En el quinto libro se estudia, como ya se ha dicho, la razón (*logos*) de dos magnitudes geométricas homogéneas a y b, lo que equivale a dar la noción general de número. Euclides no establece esta razón sin indicar que para ello es preciso *que puedan existir dos números enteros* m y n, tales que $ma>b$ y $a<nb$, siendo sus palabras textuales éstas: «*Dos magnitudes tiene razón cuando un múltiplo de cada una puede ser mayor que la otra*». Esta condición se designa actualmente con el nombre de *axioma de Arquímedes*, evidentemente impropio, puesto que Euclides estuvo en posesión de este axioma mucho tiempo antes que Arquímedes, y antes todavía que Euclides probablemente Eudoxo, por lo cual hoy va abriéndose camino la denominación de *axioma de Eudoxo–Arquímedes*. p.273).

Este axioma aparece como uno de los más importantes postulados de continuidad en las modernas investigaciones sobre fundamentos de la Geometría y de la Aritmética. Con él coincide, como se ve inmediatamente, el postulado que se da en la fundamentación de la Geometría, que dice que «*por repetición de un segmento de una semirrecta se puede alcanzar o pasar cualquier punto de ella*». También se habla de este postulado cuando se dice que: «*una magnitud* r *recibe el nombre de infinitamente pequeño actual respecto de otra* b, *o, recíprocamente,* b, *infinitamente grande actual respecto a la* a, *cuando multiplicándola por cualquier número finito el producto se conserva siempre inferior a* b». Euclides al adoptar tal sistema de magnitudes geométricas, excluye completamente la consideración de *infinitamente pequeños* o *infinitamente grandes* actuales, exclusión imprescindible para su teoría de las proporciones, ya que ésta no es otra cosa, como hemos hecho notar, que una forma de la moderna teoría de números irracionales. Euclides 274 (o bien Eudoxo), procede –y esto es lo más admirable– del mismo modo que se ha procedido en las investigaciones modernas sobre la noción de número y utiliza exactamente los mismos medios auxiliares. (p.273–274).



BIBLIOTECA MATEMÁTICA
DIRECTOR: J. REY PASTOR

FELIX KLEIN

MATEMÁTICA ELEMENTAL
DESDE UN PUNTO DE VISTA SUPERIOR

VOL. II

GEOMETRIA

Traducción de R. FONTANILLA
Catedrático del Liceo de Avila

MADRID
1931

Retrato de F.Klein por von Max Liebermann. Instituto de Matemáticas. Universidad de Göttingen.

Felix Klein (1849–1925), brillante matemático y magnífico profesor, escribió hace más de cien años Libros de Texto para Profesores de Matemáticas, con reflexiones científicas y didácticas que siguen estando vigentes en la formación pedagógica de la profesión docente.

EUDOXO DE CNIDO, ENTRE PITÁGORAS Y EUCLIDES

ARTÍFICE DE LA SOLUCIÓN A LA CRISIS DE FUNDAMENTOS PRODUCIDA POR LA APARICIÓN DE LAS MAGNITUDES INCONMENSURABLES

P.Tannery. *La géométrie grecque*.

Gauthier-Villars, París,1887, pp.95–98.

Por su contribución de una importancia capital a la constitución de *Los Elementos* de Euclides [...] debemos conceder a Eudoxo de Cnido un rango entre los primeros genios de la antigüedad. [...].

En su origen [en la Geometría griega] se fundaba la correlación entre la Geometría y la Aritmética sobre la proporción geométrica en la hipótesis de la conmensurabilidad de todas las magnitudes, hipótesis ciertamente tan natural como falsa [tras el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables], y, que, en la época en que Platón escribía las *Leyes*, estaba todavía muy extendida.

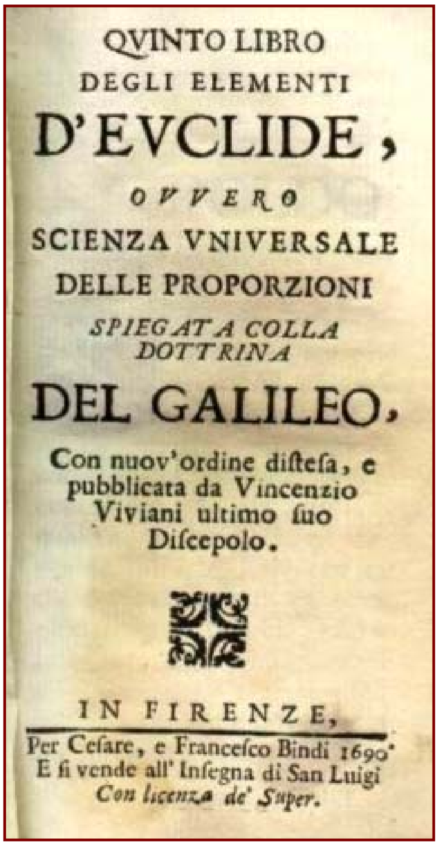
El descubrimiento de la inconmensurabilidad por Pitágoras debió causar, en Geometría, un verdadero escándalo lógico, y, para superarlo, se tendió a restringir tanto como fuera posible el empleo del principio de semejanza, esperando que se llegara a establecer sobre una teoría de la proporcionalidad independiente de la hipótesis de la conmensurabildad [La Teoría de la Proporción del Eudoxo del Libro V de *Los Elementos* de Euclides].

Es a Eudoxo a quien pertenece la gloria de haber creado esta teoría, objeto del Libro V de *Los Elementos* de Euclides; el rigor es incontestable, y, si lo embarazoso de su forma geométrica ha sido uno de los motivos para abandonarla, sería fácil despejarse de ella [de la forma geométrica], de modo que al hacerlo mantiene entonces sin ninguna desventaja la comparación con las exposiciones modernas, a menudo tan defectuosas.

Parece, por consiguiente que , entre Pitágoras y Euclides, La Geometría plana ha sufrido en su conjunto una revisión profunda, cuyo momento decisivo ha sido el trabajo de Eudoxo sobre las proporciones.

1. **Imagen atribuida a la efigie de Eudoxo, aunque no es seguro que sea tal porque también se atribuye a Ptolomeo. La confusión puede provenir de la importante dedicación de ambos matemáticos a la Astronomía.**
2. ***Tratado de las esferas* de Eudoxo. Papiro egipcio del Siglo II d.C. Museo de Louvre. París.**

LOS INCONMENSURABLES EN *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES



QVINTO LIBRO
DEGLI ELEMENTI
D'EVCLIDE,
OVVERO
SCIENZA VNIVERSALE
DELLE PROPORZIONI
SPIEGATA COLLA
DOTTRINA
DEL GALILEO,
Con nuov'ordine distesa, e
pubblicata da Vincenzio
Viviani ultimo suo
Discepolo.

IN FIRENZE,
Per Cesare, e Francesco Bindi 1690.
E si vende all' Insegna di San Luigi
Con licenza de' Super.

1. *Quinto libro degli Elementi d'Euclide, ovvero scienza universale delle proporzioni spiegata colla dottrina del Galileo*, ... **Libro V de la edición de Viviani de *Los Elementos* de Euclides (Florencia, 1690)**
2. **Euclides. Pintura de Max Ernst (1945). Menil Foundation, Houston.**

Los pitagóricos habían elaborado un gran desarrollo geométrico con multitud de teoremas –en particular sobre semejanza de figuras– que aplicaban proporciones, en la creencia de que dos magnitudes geométricas eran siempre conmensurables –es decir, había un segmento común que medía a ambas, y por tanto eran expresables su magnitud como cociente entre dos números enteros–. La aparición de los inconmensurables en el horizonte geométrico de la escuela pitagórica invalidaba las pruebas de todos los teoremas que utilizaban proporciones, de ahí la terrible confusión lógica que introdujo este fenómeno en la Geometría griega, que llegó a producir una crisis de fundamentos, sin precedentes en la Historia de la Matemática.

Es precisamente la necesidad de reconstruir las pruebas geométricas de los teoremas pitagóricos, a base de fundamentarlas en un nuevo rigor, lo que produce, como reacción ante la crisis, la aparición de *Los Elementos* de Euclides, donde la Matemática elemental de los griegos queda rígidamente estructurada con el severo rigor que impone el método axiomático. Así pues, uno de los objetivos principales de *Los Elementos* de Euclides debió ser la plasmación enciclopédica de la Geometría griega elemental en un Corpus geométrico, organizado de forma lógico-deductiva, que debía normativizar la forma definitiva en que debía de quedar el conocimiento matemático después de la aparición de los inconmensurables. En este sentido, el Libro V contendría el instrumento para llevar a cabo el programa euclídeo y por eso es uno de los más importantes de esta Biblia matemática.

La solución de Eudoxo, de la Academia platónica, llamada *Teoría de la Proporción* –que al ser de naturaleza geométrica se aplica indistintamente a magnitudes conmensurables o inconmensurables como longitudes, áreas y volúmenes–, no es plasmada por Euclides en *Los Elementos* hasta llegar al Libro V, lo que le obliga a remodelar de forma muy ingeniosa la doctrina geométrica de los cuatro libros anteriores que es de origen pitagórico, sustituyendo las pruebas pitagóricas por demostraciones independientes de la citada teoría. El Libro V de *Los Elementos* proporcionaría, pues, una base lógica firme a todo resultado que en la Geometría griega tuviera que ver con proporciones –en particular las proposiciones pitagóricas sobre figuras semejantes del Libro VI, es decir, teoremas relativos a razones y proporciones que se presentan en el estudio de triángulos, paralelogramos y otros polígonos semejantes–. De esta forma pudo actualizarse con todo rigor y preservarse para la posteridad el legado geométrico pitagórico.

Galileo sentía un especial admiración por Euclides, siendo uno de los pocos matemáticos que cita, junto con Arquímedes y Apolonio. No es extraño entonces, que a pesar de los desarrollos algebraicos del momento y de la emergencia de la Geometría Analítica como instrumento algorítmico de resolución de problemas, Galileo fundamentara *La nueva ciencia del movimiento* en la base matemática de la *Teoría de la Proporción* de Eudoxo del Libro V de Los Elementos de Euclides y su aplicación geométrica del Libro VI.

LOS INCONMENSURABLES
LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES
Y LA EVOLUCIÓ DE LA GEOMETRÍA GRIEGA

La idea de que dos magnitudes, y más concretamente dos segmentos, tienen siempre una parte alícuota común, es decir que son conmensurables, es sin duda una etapa primigenia inevitable en el desarrollo del pensamiento intuitivo matemático tanto en el horizonte histórico como en el escolar, y por supuesto en el ámbito artesanal, por necesidades de la medida siempre aproximada de longitudes.

La aparición de las magnitudes inconmensurables marcó una inflexión radical en la evolución histórica de la Geometría griega, ya que puso fin al sueño filosófico pitagórico acerca del número como esencia del universo, eliminó de la Geometría la posibilidad de medir siempre con exactitud y fue lo que imprimió a la Matemática griega una orientación geométrico-deductiva plasmada en la compilación enciclopédica de *Los Elementos* de Euclides. Los inconmensurables conducen a un trastorno lógico que estremece los cimientos de la Geometría griega, ya que al invalidar todas las pruebas pitagóricas de los teoremas que utilizaban proporciones producen la primera crisis de fundamentos en la Historia de la Matemática.

El sagaz matemático de la Academia platónica, Eudoxo de Cnido, resuelve de forma brillante y rigurosa, aunque provisional –durante dos mil años–, la antinomia radical entre finito e infinito, mediante su *Teoría de la Proporción* –plasmada en el Libro V de *Los Elementos* de Euclides–. Pero el progreso de La Geometría al margen y en detrimento de la Aritmética, la ausencia de un Álgebra simbólica, y es más, la transformación de toda la Matemática griega en Geometría, con un apodíctico estilo sintético de exposición que oculta la vía heurística del descubrimiento, fue el efecto más inmediato.

La incidencia histórica del descubrimiento pitagórico de los inconmensurables y de la solución de Eudoxo A la consiguiente crisis de fundamentos de la Matemática griega que se resuelve en *Los Elementos* de Euclides, podemos sintetizarla en los siguientes puntos:

- **Geometría al margen de la Aritmética y del Álgebra.**
- **Conversión de toda la Matemática griega en Geometría.**
- **Limitación operacional que impide asignar a las figuras geométricas números que midan sus longitudes, áreas y volúmenes.**
- **Compilación de la Geometría griega elemental en *Los Elementos* de Euclides.**
- ***Teoría de la Proporción* de Eudoxo (Libros V, VI de *Los Elementos* de Euclides).**
- **Inauguración en el mundo griego de los problemas infinitesimales.**
- **Aparición de la idea de «*tan pequeño como se quiera*» del *Método de Exhaución* que produce resultados infinitesimales análogos al ulterior *cálculo de límites***
- ***Álgebra Geométrica*. *Aplicación de las áreas* (Libro II de *Los Elementos* de Euclides).**
- **Horror al infinito en la cultura griega.**
- ***Teoría de la Potencia el acto. Hilemorfismo* de Aristóteles.**
- **Énfasis en el rigor como supremo valor de la Matemática.**
- **Estilo sintético-apodíctico de exposición (*ars disserendi*) que oculta la vía heurística del descubrimiento (*ars inveniendi*) alcanzado por vía analítica o mecánica.**
- **El estilo axiomático deductivo de *Los Elementos* de Euclides se convierte en paradigma canónico de exposición y demostración (Obras de Arquímedes, Cónicas de Apolonio, ...)**

El Libro VI

El Libro VI que contiene 5definiciones y 33 proposiciones es la aplicación geométrica de la *Teoría General de la Proporción* de Eudoxo a la fundamentación del concepto de semejanza, noción que por su carácter intuitivo se aplicaba instintivamente desde hacía centurias. Una vez desarrollada la *Teoría de la Proporción* en el Libro V, Euclides la utiliza en el Libro VI para reconstruir las proposiciones pitagóricas sobre figuras semejantes, es decir, para demostrar teoremas relativos a razones y proporciones que se presentan en el estudio de triángulos, paralelogramos y otros polígonos semejantes, y lo hace sin hacer distinción entre magnitudes conmensurables e inconmensurables. De acuerdo con el contenido del Libro V, sus argumentos son válidos en ambos casos.

La definición de semejanza que intuitivamente corresponde a la percepción de que dos figuras tienen la misma forma, exige dos condiciones –ángulos iguales y lados proporcionales–. Euclides demuestra que para la semejanza de triángulos una sola de las dos condiciones basta, de ahí la gran importancia que le da a los triángulos en los argumentos sobre semejanza de figuras.

El Libro VI contiene importantísimos resultados de la Matemática escolar secundaria. Las primeras proposiciones estudian la proporcionalidad de triángulos. En la primera proposición Euclides prueba que el área del triángulo es proporcional a la longitud de su base. Siguen proposiciones referentes a los llamados el *Teorema de la bisectriz* (VI.2), el *Teorema de Tales* (VI.2), los criterios de semejanza de triángulos (VI.4, VI.5, VI.6) y el *Teorema del cateto y de la altura* (VI.8).

A continuación se trata de la división de una línea en partes proporcionales y se explica cómo se realizan las construcciones de la tercera proporcional de dos segmentos (VI.11), la cuarta proporcional de tres segmentos (VI.12) y la media proporcional de dos segmentos (VI.13).

La Proposición 16 equivale, en forma geométrica, a la propiedad básica de las fracciones numéricas que establece: $a/b = c/d$ si y sólo si $a\cdot d = b\cdot c$.

Las siguientes proposiciones de la 18 a la 23 exponen la construcción y las propiedades de las figuras semejantes. En particular en las Proposiciones VI.19 y VI.20 se estudia la relación entre la razón de semejanza y la razón entre las áreas.

En las Proposiciones 27, 28 y 29 se estudian propiedades de los paralelogramos construidos sobre un segmento dado a los que se les añade o se les quita otro paralelogramo semejante a uno conocido. Estas proposiciones proporcionan una excelente generalización del *Álgebra Geométrica*, es decir, la *Aplicación de las Áreas* y la solución mediante procedimientos puramente geométricos de las ecuaciones cuadráticas del Libro II, que al aprovechar la sólida base que la *Teoría de la Proporción* de Eudoxo ha construido para el concepto de semejanza, generaliza los resultados del Libro II, al sustituir los rectángulos por paralelogramos y aplicar a un segmento dado un paralelogramo igual a una figura rectilínea dada y que exceda o sea deficiente en un paralelogramo semejante a otro dado. En concreto en las Proposiciones 28 y 29 los segmentos pedidos son las soluciones de las ecuaciones $ax=bc+x^2$, $ax+x^2=bc$, respectivamente. Naturalmente para garantizar la solubilidad, Euclides impone unas condiciones llamadas por los griegos «*diorismos*», término con el que se calificaban ciertas «*condiciones límites*» subsidiarias, que debían añadirse de forma complementaria al enunciado de un problema, generalmente de construcción, para garantizar su solución en términos generales. En esta caso se trata de condiciones equivalentes a las habituales restricciones sobre lo que nosotros llamamos el *discriminante* de la ecuación.

Además, la Proposición 27 y el *diorismo* aplicado en ella tuvo un gran influencia en el primer problema de máximos y mínimos que resolvió Fermat en la memoria el *Methodus*.

Tras una aplicación de lo anterior a la *Sección Áurea* (VI.30), el libro VI casi termina con una interesante generalización del *Teorema de Pitágoras* que sustituye los cuadrados sobre los lados por figuras semejantes

Definiciones:

D.VI.1. Figuras rectilíneas semejantes son las que tienen los ángulos iguales y proporcionales los lados que comprenden los ángulos iguales [Aristóteles, *Segundos Analíticos*, II.17, 99a13].

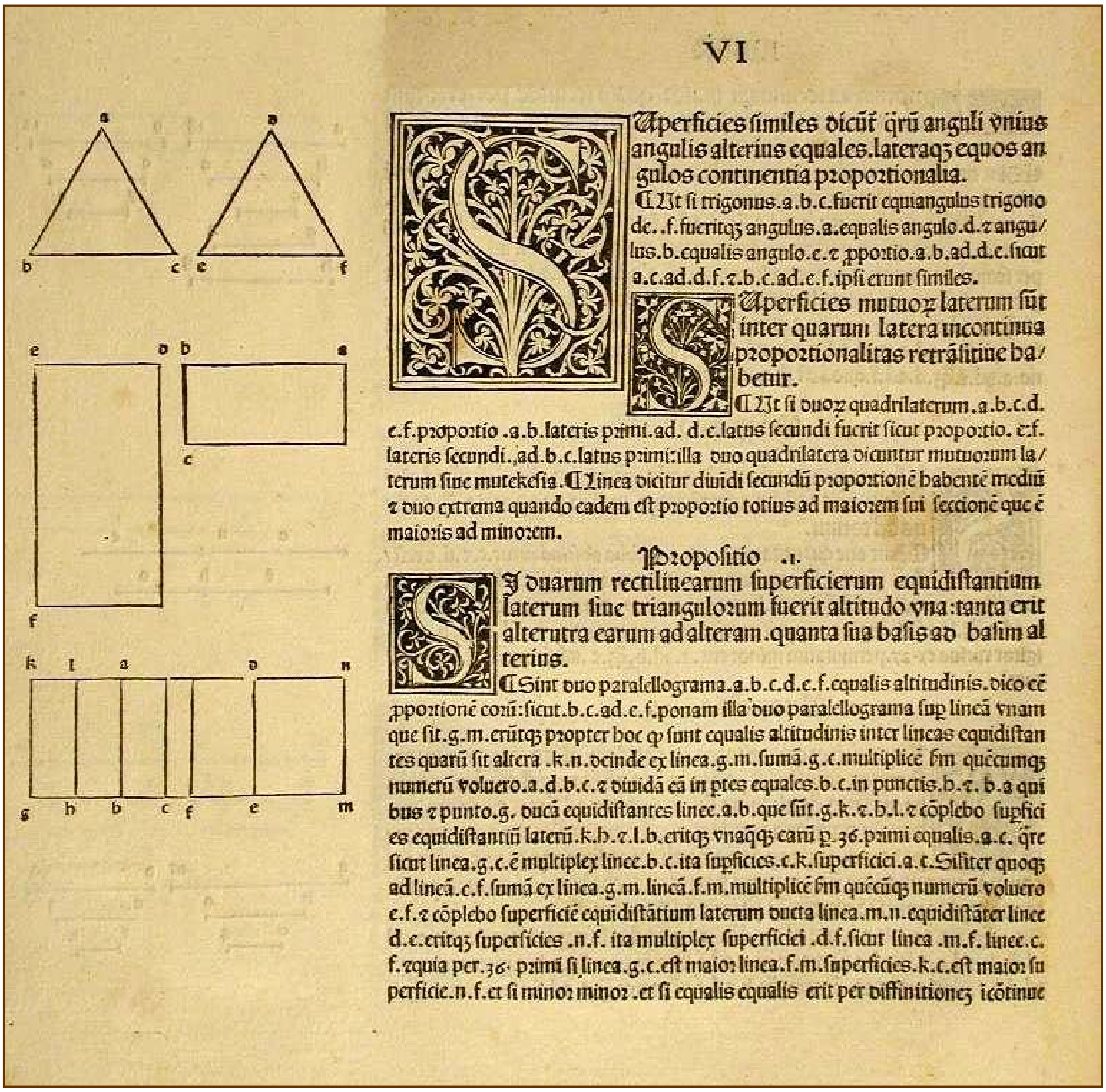
D.VI.2. Figuras inversamente proporcionales son las que tienen sus lados inversamente proporcionales a los ángulos opuestos iguales.

D.VI.3. Se dice que una recta está dividida en «*media y extrema razón*» cuando la recta total es a la parte mayor como ésta a la menor.

D.VI.4. Altura de una figura es la perpendicular desde el vértice a la base.

D.VI.5. Se dice que una razón está compuesta de razones cuando los tamaños de las razones multiplicadas por sí mismas producen alguna razón.

EL LIBRO VI DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES



VI

Superficies similes dicũt qrũ anguli vnius angulis alterius equales. lateraq; equos angulos continentia proportionalia.

Ut si trigonus .a.b.c. fuerit equiangulus trigono de. .f. fueritq; angulus .a. equalis angulo .d. et angulus .b. equalis angulo .c. et pportio .a.b. ad .d.e. sicut a.c. ad .d.f. et .b.c. ad .e.f. ipsi erunt similes.

Superficies mutuoꝝ laterum sũt inter quarum latera incontinua proportionalitas retrãsitiue habetur.

Ut si duoꝝ quadrilaterum .a.b.c.d. e.f. proportio .a.b. lateris primi .ad. d.e. latus secundi fuerit sicut proportio. e.f. lateris secundi. ,ad .b.c. latus primi: illa duo quadrilatera dicuntur mutuorum laterum sine mutekefia. Linea dicitur diuidi secundũ proportionẽ habentẽ mediũ et duo extrema quando eadem est proportio totius ad maiorem sui sectionẽ que ẽ maioris ad minorem.

Propositio .1.

Si duarum rectilinearum superficierum equidistantium laterum siue triangulorum fuerit altitudo vna: tanta erit alterutra earum ad alteram. quanta sua basis ad basim alterius.

Sint duo paralellograma .a.b.c.d.e.f. equalis altitudinis. dico eẽ pportionẽ corũ: sicut .b.c. ad .e.f. ponam illa duo paralellograma sup lineã vnam que sit .g.m. eruntq; propter hoc q sunt equalis altitudinis inter lineas equidistantes quarũ sit altera .k.n. deinde ex linea .g.m. sumã .g.c. multiplicẽ sm quẽcumq; numerũ voluero .a.d.b.c. et diuidã eã in ptes equales .b.c. in punctis .b. et. b. a quibus et punto .g. ducã equidistantes linee .a.b. que sũt .g.k. et .b.l. et cõplebo supficies equidistantiũ laterũ .k.b. et .l.b. eritq; vnaq̃q; earũ p. 36. primi equalis .a.c. q̃re sicut linea .g.c. ẽ multiplex linee .b.c. ita supficies .c.k. superficiei .a.c. Siliter quoq; ad lineã .c.f. sumã ex linea .g.m. lineã .f.m. multiplicẽ sm quẽcũq; numerũ voluero e.f. et cõplebo superficiẽ equidistãtium laterum ducta linea .m.n. equidistãter linee d.e. eritq; superficies .n.f. ita multiplex superficiei .d.f. sicut linea .m.f. linee .c.f. et quia per .36. primi si linea .g.c. est maior linea .f.m. superficies .k.c. est maior superficie .n.f. et si minor minor. et si equalis equalis erit per diffinitionẽ icõtinue

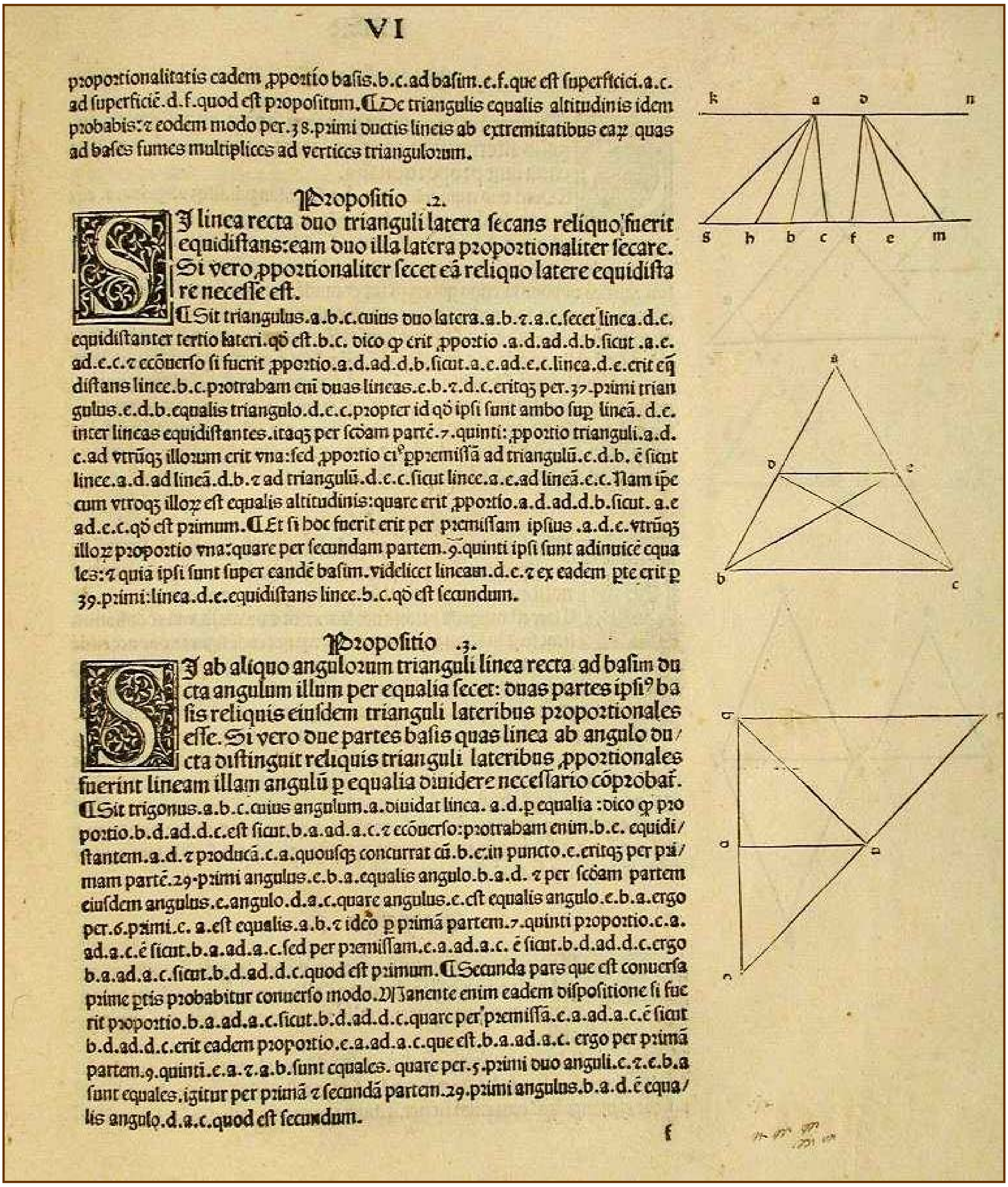
El comienzo del Libro VI de *Los Elementos* de Euclides con las definiciones y parte de la primera proposición en la edición de Ratdolt.

En esta edición sólo aparecen las dos primeras definiciones.

Proposiciones:

- Proposición VI.1. Los triángulos y paralelogramos que tienen la misma altura son entre sí como sus bases.
- Proposición VI.2. Si se traza una recta paralela a uno de los lados de un triángulo, cortará proporcionalmente los lados del triángulo. Y si se cortan proporcionalmente los lados de un triángulo, la recta que une los puntos de sección será paralela al lado restante del triángulo [*Teorema de Tales*].
- Proposición VI.3. Si se divide en dos partes iguales el ángulo de un triángulo, y la recta que corta el ángulo corta también a la base, los segmentos de la base guardarán la misma razón que los lados del triángulo; y, si los segmentos de la base guardan la misma razón que los lados restantes del triángulo, la recta trazada desde el vértice hasta la sección dividirá en dos partes iguales al ángulo del triángulo [*Teorema de la bisectriz*].
- Proposición VI.4. En los triángulos equiángulos, los lados opuestos a los ángulos iguales son proporcionales y los lados que subtienden los ángulos iguales son homólogos.
- Proposición VI.5. Si dos triángulos tienen sus lados proporcionales, serán equiángulos y tendrán iguales los ángulos a los que subtienden los lados correspondientes.
- Proposición VI.6. Si dos triángulos tienen un ángulo igual el uno del otro, y tienen proporcionales los lados que comprenden los ángulos iguales, los triángulos serán equiángulos y tendrán iguales los ángulos a los que subtienden los lados correspondientes.
- Proposición VI.7. Si dos triángulos tienen un ángulo igual el uno del otro y tienen proporcionales los lados que comprenden a los otros ángulos, y tienen los restantes ángulos parejamente menores o no menores que un ángulo recto, los triángulos serán equiángulos y tendrán iguales los ángulos que comprenden los lados proporcionales.
- Proposición VI.8. Si en un triángulo rectángulo se traza la perpendicular desde el vértice del ángulo recto a la base, los triángulos adyacentes a la perpendicular son semejantes al triángulo total y entre sí [*Teoremas del cateto y de la altura*].
- Proposición VI.9. Obtener una recta alícuota de una recta limitada dada [*dividir un segmento en un número determinado de partes iguales*].
- Proposición VI.10. Dividir una recta en partes proporcionales a las de otra recta dada.
- Proposición VI.11. Construir la tercera proporcional a dos rectas dadas.
- Proposición VI.12. Construir la cuarta proporcional a tres rectas dadas.
- Proposición VI.13. Construir la media proporcional entre dos rectas dadas [*construcción de una raíz cuadrada, Proposición II.14*].
- Proposición VI.14. En los paralelogramos equivalentes y equiángulos entre sí, los lados que comprenden los ángulos iguales están inversamente relacionados, y los paralelogramos equiángulos que tienen los lados que comprenden los ángulos iguales inversamente relacionados, son iguales.
- Proposición VI.15. En los triángulos equivalentes que tienen un ángulo igual, los lados que comprenden los ángulos iguales están inversamente relacionados. Y los triángulos que tienen un ángulo igual e inversamente relacionados los lados que comprenden los ángulos iguales, son equivalentes.
- Proposición VI.16. Si cuatro rectas son proporcionales, el rectángulo comprendido por las extremas es equivalente al rectángulo comprendido por las medias; y si el rectángulo comprendido por las extremas es equivalente al rectángulo comprendido por las medias, las cuatro rectas serán proporcionales [$a/b = c/d$ si y sólo si $ad=bc$].
- Proposición VI.17. Si tres rectas son proporcionales, el rectángulo comprendido por las extremas es equivalente al cuadrado de la media; y si el rectángulo comprendido por las extremas es equivalente al cuadrado de la media, las tres rectas serán proporcionales.

LA PROPORCIONALIDAD EN TRIÁNGULOS EN EL LIBRO VI DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES



VI

proportionalitatis eadem pportio basis.b.c.ad basim.e.f.que est superficiei.a.c. ad superficie.d.f.quod est propositum. ¶De triangulis equalis altitudinis idem probabis: et eodem modo per.38.primi ductis lineis ab extremitatibus earum quas ad bases sumes multiplices ad vertices triangulorum.

Propositio .2.

Si linea recta duo trianguli latera secans reliquo fuerit equidistans: eam duo illa latera proportionaliter secare. Si vero pportionaliter secet eã reliquo latere equidistare necesse est.

¶Sit triangulus.a.b.c.cuius duo latera.a.b.et.a.c.secet linea.d.e. equidistanter tertio lateri.quod est.b.c. dico quod erit pportio .a.d.ad.d.b.sicut .a.e. ad.e.c.et econuerso si fuerit pportio.a.d.ad.d.b.sicut.a.e.ad.e.c.linea.d.e.erit equidistans linee.b.c.protraham enim duas lineas.e.b.et.d.c.eritque per.37.primi triangulus.e.d.b.equalis triangulo.d.e.c.propter id quod ipsi sunt ambo sup lineã. d.e. inter lineas equidistantes.itaque per scdam partẽ.7.quinti: pportio trianguli.a.d. e.ad vtrũque illorum erit vna:sed pportio eius pp premissã ad triangulũ.e.d.b. ẽ sicut linee.a.d.ad lineã.d.b.et ad triangulũ.d.e.c.sicut linee.a.e.ad lineã.e.c.Nam ipse cum vtroque illorum est equalis altitudinis:quare erit pportio.a.d.ad.d.b.sicut. a.e ad.e.c.quod est primum. ¶Et si hoc fuerit erit per premissam ipsius .a.d.e.vtrũque illorum proportio vna:quare per secundam partem.9.quinti ipsi sunt adinuicẽ equales:et quia ipsi sunt super eandẽ basim.videlicet lineam.d.e.et ex eadem pte erit p 39.primi:linea.d.e.equidistans linee.b.c.quod est secundum.

Propositio .3.

Si ab aliquo angulorum trianguli linea recta ad basim ducta angulum illum per equalia secet: duas partes ipsius basis reliquis eiusdem trianguli lateribus proportionales esse. Si vero due partes basis quas linea ab angulo ducta distinguit reliquis trianguli lateribus pportionales fuerint lineam illam angulũ p equalia diuidere necessario cõprobatur.

¶Sit trigonus.a.b.c.cuius angulum.a.diuidat linea. a.d.p equalia :dico quod proportio.b.d.ad.d.c.est sicut.b.a.ad.a.c.et econuerso:protraham enim.b.c. equidistantem.a.d.et producã.c.a.quousque concurrat cũ.b.e.in puncto.e.eritque per primam partẽ.29.primi angulus.e.b.a.equalis angulo.b.a.d. et per scdam partem eiusdem angulus.e.angulo.d.a.c.quare angulus.e.est equalis angulo.e.b.a.ergo per.6.primi.e. a.est equalis.a.b.et ideo p primã partem.7.quinti proportio.e.a. ad.a.c.ẽ sicut.b.a.ad.a.c.sed per premissam.e.a.ad.a.c. ẽ sicut.b.d.ad.d.c.ergo b.a.ad.a.c.sicut.b.d.ad.d.c.quod est primum. ¶Secunda pars que est conuersa prime ptis probabitur conuerso modo. Manente enim eadem dispositione si fuerit proportio.b.a.ad.a.c.sicut.b.d.ad.d.c.quare per premissã.e.a.ad.a.c.ẽ sicut b.d.ad.d.c.erit eadem proportio.e.a.ad.a.c.que est.b.a.ad.a.c. ergo per primã partem.9.quinti.e.a.et.a.b.sunt equales. quare per.5.primi duo anguli.e.et.e.b.a sunt equales.igitur per primã et secundã partem.29.primi angulus.b.a.d.ẽ equalis angulo.d.a.c.quod est secundum.

f

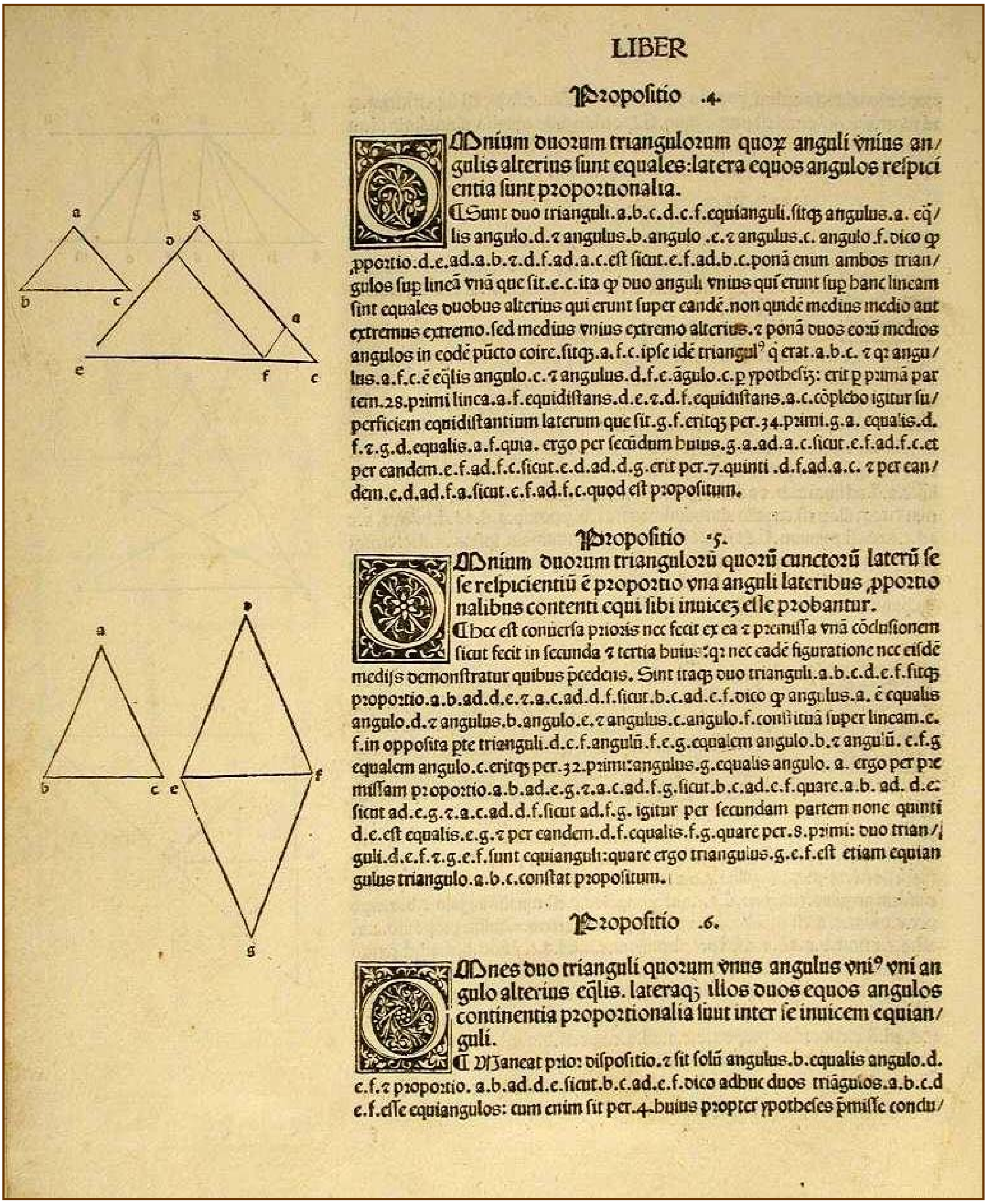
Las tres primeras proposiciones del Libro VI de *Los Elementos* de Euclides en la edición de Ratdolt.

Según la Proposición I el área de triángulos y paralelogramos es proporcional alas bases.

La Proposición II establece uno de los teoremas más importantes de la Matemática escolar elemental –el famoso *Teorema de Tales*– que afirma que «*Si se traza una paralela a la base de un triángulo los segmentos determinados en los lados son proporcionales*».

La Proposición III es el conocido *teorema de la bisectriz* : «*En todo triángulo la bisectriz de un ángulo interior divide al lado opuesto en partes proporcionales a los lados adyacentes*».

LA PROPORCIONALIDAD EN TRIÁNGULOS EN EL LIBRO VI DE *LOS ELEMENTOS* DE



LIBER

Propositio .4.

Omnium duorum triangulorum quorum anguli unius angulis alterius sunt equales: latera equos angulos respicientia sunt proportionalia.

¶ Sunt duo trianguli .a.b.c.d.e.f. equianguli. sitq angulus .a. equalis angulo .d. ⁊ angulus .b. angulo .e. ⁊ angulus .c. angulo .f. dico q proportio .d.e. ad .a.b. ⁊ .d.f. ad .a.c. est sicut .e.f. ad .b.c. ponã enim ambos triangulos sup lineã unã que sit .e.c. ita q duo anguli unius qui erunt sup hanc lineam sint equales duobus alterius qui erunt super eandẽ. non quidẽ medius medio aut extremus extremo. sed medius unius extremo alterius. ⁊ ponã duos eorũ medios angulos in eodẽ pũcto coire. sitq3 .a.f.c. ipse idẽ triangulus q erat .a.b.c. ⁊ q2 angulus .a.f.c. ẽ eqlis angulo .e. ⁊ angulus .d.f.e. ãgulo .c. p ypothesi3: erit p primã partem .28. primi linea .a.f. equidistans .d.e. ⁊ .d.f. equidistans .a.c. cõplebo igitur superficiem equidistantium laterum que sit .g.f. eritq3 per .34. primi .g.a. equalis .d.f. ⁊ .g.d. equalis .a.f. quia. ergo per secũdum huius .g.a. ad .a.c. sicut .e.f. ad .f.c. et per eandem .e.f. ad .f.c. sicut .e.d. ad .d.g. erit per .7. quinti .d.f. ad .a.c. ⁊ per eandem .e.d. ad .f.a. sicut .e.f. ad .f.c. quod est propositum.

Propositio .5.

Omnium duorum triangulorũ quorũ cunctorũ laterũ se se respicientiũ ẽ proportio una anguli lateribus pportionalibus contenti equi sibi invice3 esse probantur.

¶ Hec est conversa prioris nec fecit ex ea ⁊ premissa unã cõclusionem sicut fecit in secunda ⁊ tertia huius: q2 nec eadẽ figuratione nec eisdẽ medijs demonstratur quibus pcedens. Sint itaq3 duo trianguli .a.b.c.d.e.f. sitq3 proportio .a.b. ad .d.e. ⁊ .a.c. ad .d.f. sicut .b.c. ad .e.f. dico q angulus .a. ẽ equalis angulo .d. ⁊ angulus .b. angulo .e. ⁊ angulus .c. angulo .f. constituã super lineam .e.f. in opposita pte trianguli .d.e.f. angulũ .f.e.g. equalem angulo .b. ⁊ angulũ .e.f.g equalem angulo .c. eritq3 per .32. primi: angulus .g. equalis angulo .a. ergo per premissam proportio .a.b. ad .e.g. ⁊ .a.c. ad .f.g. sicut .b.c. ad .e.f. quare .a.b. ad .d.e. sicut ad .e.g. ⁊ .a.c. ad .d.f. sicut ad .f.g. igitur per secundam partem none quinti .d.e. est equalis .e.g. ⁊ per eandem .d.f. equalis .f.g. quare per .8. primi: duo trianguli .d.e.f. ⁊ .g.e.f. sunt equianguli: quare ergo triangulus .g.e.f. est etiam equiangulus triangulo .a.b.c. constat propositum.

Propositio .6.

Omnes duo trianguli quorum unus angulus uni⁹ uni angulo alterius eqlis. lateraq3 illos duos equos angulos continentia proportionalia sunt inter se invicem equianguli.

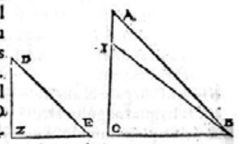
¶ Maneat prior dispositio. ⁊ sit solũ angulus .b. equalis angulo .d. e.f. ⁊ proportio .a.b. ad .d.e. sicut .b.c. ad .e.f. dico adhuc duos triãgulos .a.b.c.d e.f. esse equiangulos: cum enim sit per .4. huius propter ypotheses pmisse condu-

Las Proposiciones 4, 5 y 6 del Libro VI de *Los Elementos* de Euclides en la edición de Ratdolt. Estas proposiciones establecen los diversos criterios de semejanza de triángulos.

LA PROPORCIONALIDAD EN TRIÁNGULOS EN EL LIBRO VI DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES

LIBRO SEXTO DE

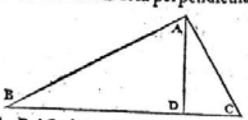
tãpoco es menor q̃recto el angulo.B I C.luego(por la.17.del.1.)los dos angulos del triãgulo.B I C.no ſon menores q̃dos rectos, lo qual es impoſſible. No luego otra vez es deſigual el angulo.A B C.al angulo. D E Z.luego es ygual. Y es el angulo.A.ygual al angulo.D.luego el angulo.C.q̃ reſta es ygual al reſtante.Z.luego el triãgulo.ABC.es equiãgulo al triãgulo D E Z.Luego ſi dos triãgulos tuuierẽ el vn ãgulo ygual al vn angulo y proporcionales los lados de junto a los otros angulos, pero el vno y el otro delos q̃ reſtã juntamente o menor, o no menor que recto, ſerã equiãgulos los triãgulos, y tẽdrã yguales los angulos, jũto a los quales los lados ſon proporcionales. Lo qual conuino demoſtrarſe.



Theorema.8. Propoſicion. 8.

¶Si enel triangulo rectãgulo ſe tirare vna perpendicular ſobre la baſis, deſde el angulo recto, los triangulos de ſobre la perpendicular, ſon ſemejantes al todo, y entre ſi.

Sea el triãgulo rectãgulo.A B C.q̃ tiene recto el ãgulo.B A C. y tireſe(por la.12.del.1.)deſde.A.ſobre.B C. la perpendicular A D.Digo q̃ cada vno de los dos triangulos. A B D.A D C.es ſemejante a todo el triãgulo.A B C. y tãbien entre ſi. Porq̃ es(por la.4.peticion)ygual el angulo.B AC.al angulo.A D B.porque el vno



EVCLIDES. 102

vno y el otro es recto, y el angulo.B.es comun delos miſmos dos triangulos.A B C.A B D.luego el angulo que reſta.A CB es ygual al angulo que reſta.B A D(por la.32.del.1.) luego el triangulo.A B C.es equiãgulo al triangulo.A B D.luego(por la.4.del. 6.)como ſe ha la.C B. oppueſta al angulo recto del triangulo.B A C.a la.B A.oppueſta al angulo recto del triangulo.B A D aſſi la miſma.A B.oppueſta al angulo.C.del triãgulo.A B C.a la.B D.oppueſta al angulo ygual.B A D,del triangulo miſmo.A B D.y tambien la.A C.a la.A D. opueſta al angulo.B.comũ delos dos triangulos.Luego el triangulo. A B C.es equiangulo al triãgulo.A B D.(por la.7. del 6.)y tiene proporcionales los lados que eſtan junto a yguales angulos Luego el triangulo.A B C.es ſemejante al triangulo. A B D.(por la primera diffinicion del ſexto)Dela miſma ſuerte demoſtraremos tambien que el triangulo.A D C. es ſemejante al triangulo, A B C.luego cada vno de los dos triãgulos. A B D.A D C.es ſemejante a todo.A B C. Digo tambien que aun entre ſi ſon ſemejantes los triangulos.A B D.A D C, porque el angulo recto.B D A.es ygual al angulo recto. AD C(por la quarta peticion)y eſta demoſtrado que tambien es ygual el angulo.B A D al angulo.C.Luego el angulo.B.que reſta es ygual al angulo q̃ reſta.D A C.luego el triangulo.A B D. es equiangulo al triangulo.A D C.luego como ſe ha la.BD.opueſta al angulo.B A D.del triangulo.A B D,cõ la.D A. opueſta al angulo.C.del triangulo.A D C.ygual al angulo.B A D.aſſi la.A D.opueſta al angulo.B.del triangulo.A B D. con la.D C oppueſta al angulo.D A C.del triangulo.A D C. ygual al angulo,B.y demas deſto la.B A,con la.A C.que eſtã oppueſtas a los angulos rectos.Luego el triangulo.A B D. es ſemejante al triangulo.A D C.Luego ſi enel triangulo rectangulo ſe tirare vna perpendicular ſobre la baſis deſde el angulo recto, los triangulos de ſobre la perpendicular ſon ſemejãtes al todo, y entre ſi.Lo qual conuino demoſtrarſe.

Corelario.

O 3 De

Las Proposiciones 8, 9 10 del Libro VI de *Los Elementos* de Euclides en la edición de R.Çamorano.

La Proposición 8 establece el *Teorema del Cateto*: «*En un triángulo rectángulo un cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella*» y el *Teorema de la Altura*: «*En un triángulo rectángulo la altura sobre la hipotenusa es media proporcional entre los segmentos en que divide a ésta*». Ambos teoremas, junto con el *Teorema de Tales* y el *Teorema de Pitágoras*, son, sin duda, los más importantes de toda la Geometría escolar Elemental.

Proposiciones 9 y 10 permiten dividir un segmento en partes iguales o proporcionales.

LIBRO SEXTO DE

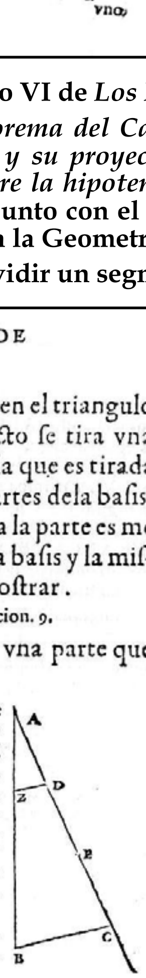
Corelario.

¶De aqui es manifieſto que ſi en el triangulo rectangulo deſde el angulo recto ſe tira vna perpendicular ſobre la baſis, la que es tirada es media proporcional a las partes dela baſis: y de mas deſto el lado de jũto a la parte es medio proporçional entre toda la baſis y la miſma parte: que ſe hauia de demoſtrar.

Problema.1. Propoſicion. 9.

¶Dada vna linea recta, cortar vna parte que nos mandan.

Sea la linea recta dada. A B. conuiene de la miſma. A B. cortar vna parte q̃ nos mandan. Mandeſe vna tercera parte, y tire ſe deſde. A.la linea recta. A C.que haga con la.A B.angulo, y tomeſe enla.A C.vn puncto a caſo, y ſea.D.y hagaſe(por la.2.del.1.)la.D E.ygual a la.A D.y tambien la E C.y tireſe.B C.y por el puncto.D.(por la,31.del.1.)tireſe la.DZ.parallela ala.BC Pues porque al vn lado. B C.del triãgulo A B C.ſe tiro la.Z D. parallela, luego es proporcionalmẽte(por la.2.del.6.) q̃ como la.C D.cõ la.D A.aſſi la.B Z.cõ la.ZA y la.C D. es dupla a la.D A. luego tãbien es dupla la. B Z.a la.Z A.luego la.B A.es tripla a la.A Z, luego dada la linea recta.A B.ſe corto la tercera parte.A Z. que ſe mando.Lo qual conuino hazerſe.



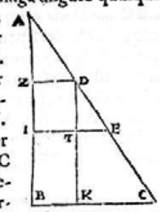
Pro-

EVCLIDES. 104

Problema. 2. Propoſicion.10.

¶Dada vna linea recta no diuidida, diuidirla ſemejãtemẽte a vna linea recta dada cortada

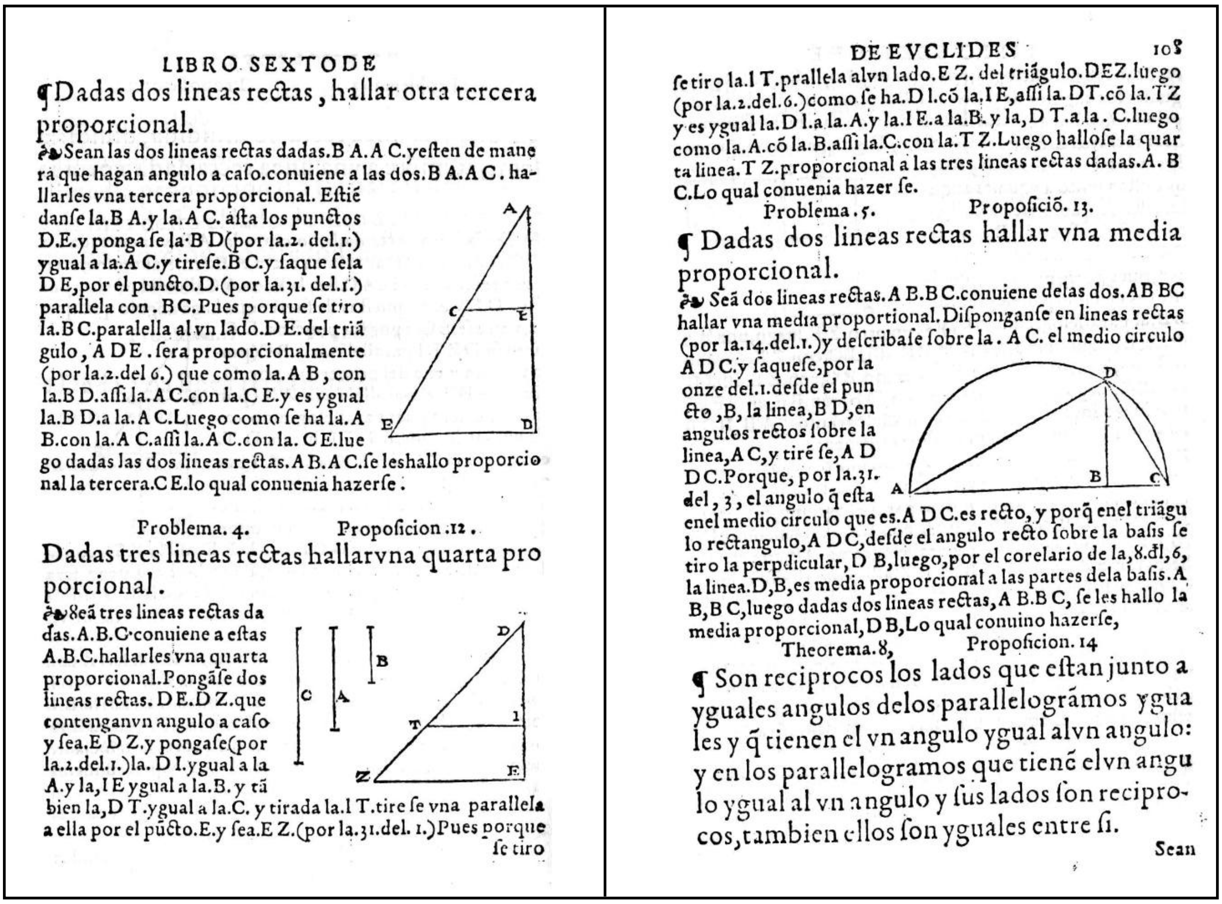
Sea la linea recta dada no cortada. A B. y la cortada ſea. A C, conuiene cortar la linea recta. A B.ſemejantemente a la linea recta cortada. A C.Sea la linea. A C.diuidida en los punctos.D.E.y eſten pueſtas de ſuerte que hagã angulo qualquiera, y tire ſe.B C.y por los punctos. D E. tiren ſe.D Z.E I.parallelas.a la.B C(por la treynta y vna del primero) y por. D. ſaque ſe.D T K.parallela a la. A B.(por la miſma)ſera pues parallelogramo cada vno de los dos.Z T.T B.luego. D T. es ygual a la.Z I.y la. T K. a la.I B.Y por que al vn lado.K C.del triangulo.D K C ſe tiro parallela la linea recta. T E. luego(por la ſegunda del. 6.)ſera proporcionalmente, que como la.C E.con la.E D.aſſi la.K T. con la T D.y la.K T.es ygual a la.B I.y la.T D.a la. I Z. Luego ſera (por la ſegunda del quinto)que como.C E.con la.E D, aſſi la B I.con la.I Z. Otro ſi porque ſe tiro la.Z D.parallela al vn lado.I E.del triangulo.A I E.luego es proporcionalmẽte(por la primera del.6)que como la.E D.con la, D A.aſſi la.I Z.con la.Z A.y demoſtroſe que como la.C E.con la.E D. aſſi la. B I. con la.I Z.luego ſera que como la.C E.con la.E D. aſſi la.B I. con la.I Z.y como la.E D.con la.D A.aſſi la. I Z. con la. Z A. luego dada la linea recta no cortada.A B. cortoſe ſemejantemente a la linea recta dada cortada. A C. Lo qual conuenia hazerſe.



Problema. 3. Propoſicion. 11.

O 4 Dadas

TERCERA, CUARTA MEDIA PROPORCIONAL EN EL LIBRO VI DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES



LIBRO SEXTO DE

¶ Dadas dos lineas rectas, hallar otra tercera proporcional.

Sean las dos lineas rectas dadas. B A. A C. y eſten de manera que hagan angulo a caſo. conuiene a las dos. B A. A C. hallarles vna tercera proporcional. Eſtiendanſe la. B A. y la. A C. aſta los punctos D. E. y ponga ſe la B D (por la. 2. del. 1.) ygual a la. A C. y tireſe. B C. y ſaque ſe la D E, por el puncto. D. (por la. 31. del. 1.) parallela con. B C. Pues porque ſe tiro la. B C. paralella al vn lado. D E. del triãgulo, A D E. ſera proporcionalmente (por la. 2. del 6.) que como la. A B, con la. B D. aſſi la. A C. con la. C E. y es ygual la. B D. a la. A C. Luego como ſe ha la. A B. con la. A C. aſſi la. A C. con la. C E. luego dadas las dos lineas rectas. A B. A C. ſe les hallo proporcional la tercera. C E. lo qual conuenia hazerſe.

Problema. 4. Propoſicion. 12.

Dadas tres lineas rectas hallar vna quarta proporcional.

Seã tres lineas rectas dadas. A. B. C. conuiene a eſtas A. B. C. hallarles vna quarta proporcional. Pongãſe dos lineas rectas. D E. D Z. que contengan vn angulo a caſo y ſea. E D Z. y pongaſe (por la. 2. del. 1.) la. D I. ygual a la A. y la, I E ygual a la. B. y tãbien la, D T. ygual a la. C. y tirada la. I T. tire ſe vna parallela a ella por el pũcto. E. y ſea. E Z. (por la. 31. del. 1.) Pues porque ſe tiro

DE EVCLIDES 108

ſe tiro la. I T. prallela al vn lado. E Z. del triãgulo. D E Z. luego (por la. 2. del. 6.) como ſe ha. D I. cõ la, I E, aſſi la. D T. cõ la. T Z y es ygual la. D I. a la. A. y la. I E. a la. B. y la, D T. a la. C. luego como la. A. cõ la. B. aſſi la. C. con la. T Z. Luego halloſe la quarta linea. T Z. proporcional a las tres lineas rectas dadas. A. B C. Lo qual conuenia hazer ſe.

Problema. 5. Propoſiciõ. 13.

¶ Dadas dos lineas rectas hallar vna media proporcional.

Seã dos lineas rectas. A B. B C. conuiene delas dos. A B B C hallar vna media proportional. Diſponganſe en lineas rectas (por la. 14. del. 1.) y deſcribaſe ſobre la. A C. el medio circulo A D C. y ſaqueſe, por la onze del. 1. deſde el puncto, B, la linea, B D, en angulos rectos ſobre la linea, A C, y tiré ſe, A D D C. Porque, por la. 31. del, 3, el angulo q̃ eſta enel medio circulo que es. A D C. es recto, y porq̃ enel triãgulo rectangulo, A D C, deſde el angulo recto ſobre la baſis ſe tiro la perpdicular, D B, luego, por el corelario de la, 8. d̃l, 6, la linea. D, B, es media proporcional a las partes dela baſis. A B, B C, luego dadas dos lineas rectas, A B. B C, ſe les hallo la media proporcional, D B, Lo qual conuino hazerſe,

Theorema. 8, Propoſicion. 14

¶ Son reciprocos los lados que eſtan junto a yguales angulos delos parallelogrãmos yguales y q̃ tienen el vn angulo ygual al vn angulo: y en los parallelogramos que tiené el vn angulo ygual al vn angulo y ſus lados ſon reciprocos, tambien ellos ſon yguales entre ſi.

Sean

Las Proposiciones 11, 12 Y 13 del Libro VI de *Los Elementos* de Euclides en la edición de Çamorano.

En las Proposiciones 11, 12 Y 13 Euclides construye con regla y compás la tercera proporcional de dos segmentos, la cuarta proporcional de tres segmentos y la media proporcional de dos segmentos.

En una proporción corriente $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, cada uno de los términos se llama *Cuarta proporcional* entre los otros tres. En general hallar el cuarto proporcional, x en la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$ es equivalente a hacer lo que se llama una *regla de tres*.

Una proporción se llama *continua* cuando hay un término que se repite: $\frac{a}{b}=\frac{b}{d}$.

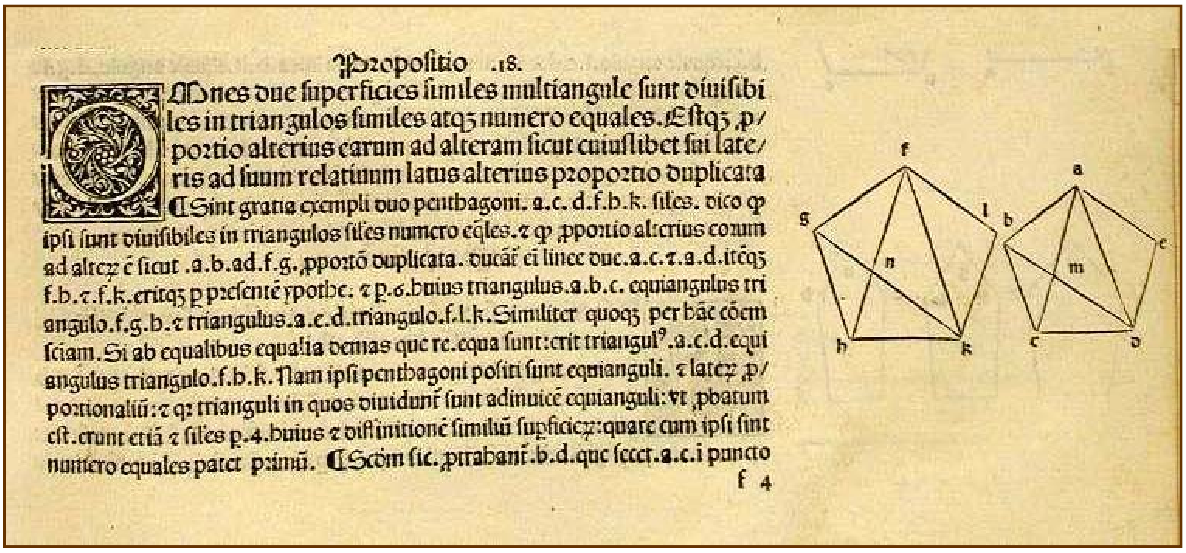
En una proporción *continua*, cada uno de los dos términos distintos se llama *Tercera proporcional* entre los dos restantes. Por ejemplo, en $\frac{a}{b}=\frac{b}{d}$, a es *Tercera proporcional* entre a y b.

En una proporción *continua*, el término que se repite se llama *Media proporcional* entre los otros dos. Así, en $\frac{a}{b}=\frac{b}{d}$, b es *Media proporcional* entre a y b.

Hallar la *Media proporcional* es equivalente a calcular la raíz cuadrada, ya que si $\frac{a}{x}=\frac{x}{d}$, se cumple que $x^2 = a\cdot b$, es decir: $x=\sqrt{a\,b}$.

Además, de $x^2 = a\cdot b$ se deduce resulta que el problema de hallar la *Media proporcional* equivale a realizar la cuadratura de un rectángulo –Hallar un cuadrado de área igual a la de un rectángulo–, problema ya resuelto por Euclides en la ultima proposición del Libro II, la II.14. La diferencia es que ahora, en el Libro VI, se resuelve la cuestión con el lenguaje de Proporciones del Libro V.

- Proposición VI.18. Sobre una recta dada construir una figura semejante a otra y semejantemente dispuesta.
- Proposición VI.19. Los triángulos semejantes son entre sí como las razones duplicadas [*los cuadrados*] de los lados homólogos.
- Proposición VI.20. Los polígonos semejantes se dividen en triángulos semejantes e iguales en número y homólogos a los polígonos enteros y un polígono guarda con el otro una razón duplicada de la que guarda el lado correspondiente con el lado correspondiente.


Propositio .18.
Omnes due superficies similes multiangule sunt diuisibiles in triangulos similes atq; numero equales. Estq; proportio alterius earum ad alteram sicut cuiuslibet sui lateris ad suum relatiuum latus alterius proportio duplicata
¶ Sint gratia exempli duo penthagoni. a.c. d.f.b.k. siles. dico q ipsi sunt diuisibiles in triangulos siles numero eqles. z q pportio alterius eorum ad alteq e sicut .a.b.ad.f.g. pportio duplicata. ducant ei linee due.a.c.z.a.d.iteq; f.b.z.f.k.eritq; p presente ypothe: z p.6.huius triangulus.a.b.c. equiangulus triangulo.f.g.b.z triangulus.a.c.d.triangulo.f.l.k.Similiter quoq; per hac coem sciam. Si ab equalibus equalia demas que re.equa sunt: erit triangul⁹.a.c.d.equiangulus triangulo.f.b.k. Nam ipsi penthagoni positi sunt equianguli. z lateq proportionaliu: z q; trianguli in quos diuidunt sunt adinuice equianguli: vt pbatum est. erunt etia z siles p.4.huius z diffinitione similiu supficieq: quare cum ipsi sint numero equales patet primu. ¶ Scdm sic. ptrahant.b.d.que secet.a.c.i puncto
f 4

La Proposición 20 del Libro VI de *Los Elementos* de Euclides en la edición de Ratdolt.

Esta proposición, que en esta edición ocupa el lugar 18, establece: «*La razón entre las áreas* de dos polígonos semejantes *es igual al cuadrado de la razón de semejanza*.»

- Proposición VI.21. Les figuras semejantes a una misma figura rectilínea son también semejantes entre sí.
- Proposición VI.22. Si cuatro rectas son proporcionales, les figuras rectilíneas semejantes y construidas de manera semejante a partir de ellas serán también proporcionales; y si, las figuras semejantes y construidas de manera semejante a partir de ellas son proporcionales, las propias rectas serán también proporcionales.
- Proposición VI.23. Los paralelogramos equiángulos guardan entre sí la razón compuesta de las razones de sus lados.
- Proposición VI.24. En todo paralelogramo, los paralelogramos situados alrededor de su diagonal son semejantes al paralelogramo entero y entre sí.
- Proposición VI.25. Construir una misma figura semejante a una figura rectilínea dada, e igual a otra figura dada.
- Proposición VI.26. Si de un paralelogramo se quita un paralelogramo semejante y semejantemente dispuesto y que tenga un ángulo común con él, los dos paralelogramo tendrán la misma diagonal.
- Proposición VI.27. Entre todos los paralelogramos aplicados sobre la misma recta y deficientes de paralelogramos semejantes al construido sobre la mitad de esta recta, y semejantemente dispuestos, el mayor es el aplicado a la mitad de la recta y semejante a su defecto.
- Proposición VI.28. Aplicar a una recta dada un paralelogramo equivalente a una figura rectilínea dada y deficiente de otro paralelogramo semejante a uno dado. Es preciso que la figura rectilínea dada no sea mayor que el paralelogramo construido sobre la mitad de la recta dada y semejante al defecto del deficiente [solución geométrica de la ecuación cuadrática $ax=bc+x^2$, con la necesaria restricción sobre el discriminante, equivalente al *diorismo* exigido].

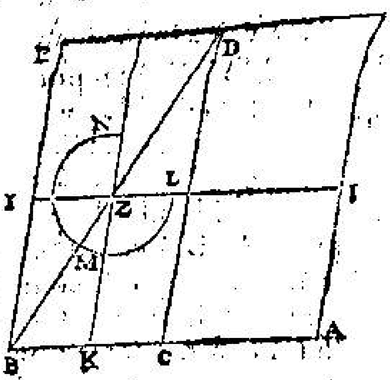
UN PROBLEMA DE MÁXIMO EN LA PROPOSICIÓN VI.27 DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES

LIBRO SEXTO DE EVCLIDES 108

Theorema.20. Propoſicion.27.

¶ De todos los parallelogrãmos pueſtos ſobre vna miſma linea recta y faltos por figuras parallelogramas ſemejantes y ſemejantemẽte pueſtas a aquel que es deſcrito de la media, el mayor parallelogramo es el q̃ eſta pueſto ſobre la media, ſiendo ſemejante al tomado.

Sea la linea recta. A B. y corte ſe, por la. 10. del. 1. por medio en el puncto. C. y haga ſe tambien, por la. 18. del. 6, ſobre la linea recta. A B. el parallelogrãmo. A D. falto por la figura parallelogrãma. D B. ſemejante y ſemejantemente pueſta al de *la mitad de la. A B. eſto es, C B, Digo que de todos los pa*rallelogramos pueſtos ſobre la. A B. y faltos por figuras pallelogramas ſemejantes y ſemejantemẽte pueſtas al parallelogrãmo. D B. el mayor es, A D. Põgaſe ſobre la linea recta. AB. el parallelogrãmo A Z. falto por la figura pallelogrãma, Z B, ſemejante y ſemejantemente pueſta al. D A. Digo que mayor es. A D. que no. A Z, Porque es ſemejante. D B, parallelogrãmo al parallelogrãmo. Z B. luego eſtan ſobre la miſma diagonal (por la. 36 del ſexto) Saque ſe ſu diagonal. D B. y haga ſe la figura. Pues porque (por la. 42. de el. 1.) es ygual. Z C. al miſmo. Z E, ponga ſe comun. Z B, luego todo. C T. es ygual a todo. K E, pero C T. es ygual al. C I (por la. 36. del. 1.) porque la linea recta. AC es ygual a la linea recta. C B. luego. I C. es ygual al. E K. ponga ſe comun. C Z. luego todo. A Z. es ygual a todo el gnomon. L M N. por lo qual el parallelogrãmo. D B, eſto es, A D. es mayor que el parallelogrãmo. A Z. Luego de todos los parallelogrãmos que eſtan ſobre vna miſma linea recta, y faltos por figuras parallelogrãmas, ſemejantes y ſemejantemente pueſtas a aquel que es deſcrito de la media el mayor parallelogrãmo es el que eſta pueſto ſobre la media, ſiendo ſemejãte al tomado. Lo qual conuenia demoſtrarſe.



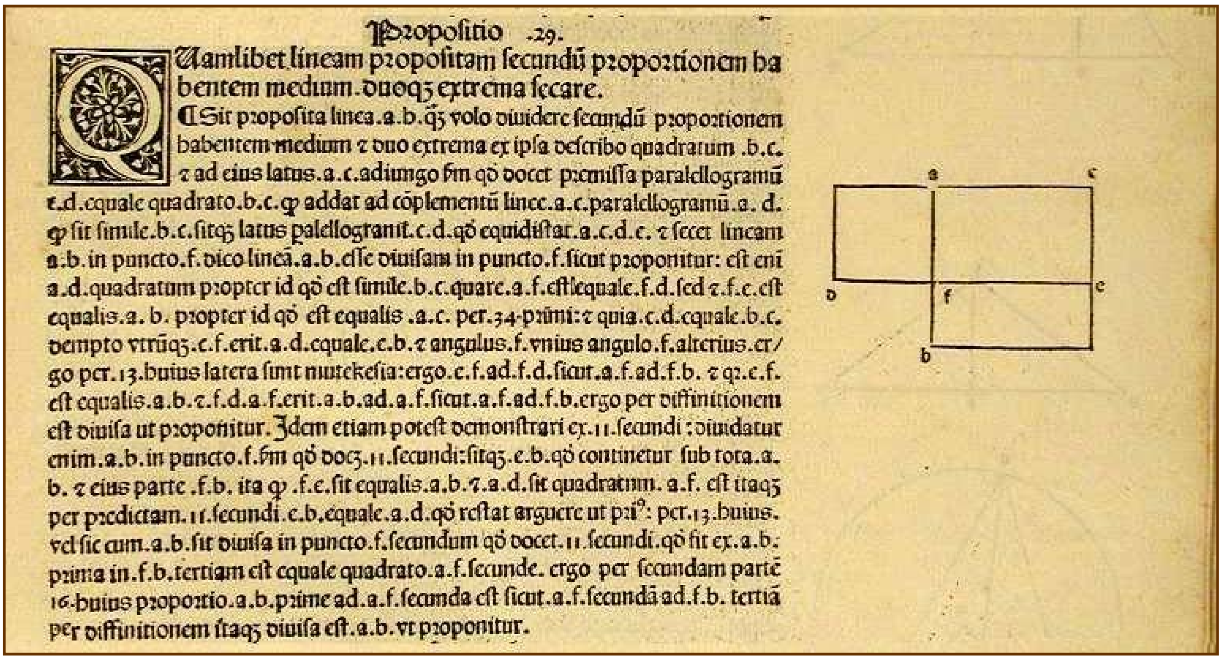
La Proposición VI.27 de *Los Elementos* de Euclides en la edición de R.Çamorano.

En particular, al tomar el paralelogramo como un rectángulo, la proposición resuelve el problema de «*dividir un segmento AB en dos, de manera que el área del rectángulo que determinan sea máxima*», que seguramente es la primera aproximación histórica a los problemas de máximos y mínimos. Este es Precisamente el primer problema que resuelve Fermat en sus métodos de máximos y mínimos y tangentes.

- Proposición VI.29. Aplicar a una recta dada un paralelogramo equivalente a una figura rectilínea dada y que exceda de otro paralelogramo semejante a uno dado. [solución geométrica de la ecuación cuadrática $ax+x^2=bc$].
- Proposición VI.30. Dividir una recta en media y extrema razón [caso particular de VI.29, solución geométrica de la ecuación cuadrática $ax+x^2= a^2$].

Propositio .28.
Super datam lineam date superficiei trilatere equum pa/ralellogramum constituere .qd addat super cõpletionem date linee superficiem equidistantium lateru3 date super/ficiei equidistantium laterum similem.
¶Sit vt prius data linea.a.b.z datus triangulus.c.datumq3 para/lellogramum.d.volo super lineam.a.b.constituere palellogramũ equale triangu/lo.c.qd addat super totam lineã.a.b.palellogramũ simile.d.diuido lineam.a.b.p equalia in puncto.e.z super eius medietatem.c.b.facio.e.f.similem.d.sm qd do/cet.19.huius. z sm doctrinam .25.huius.facio.k.l.cui9 diametrũ.g.b.similem.d z equalem duabus superficiebus.e.f.z.c.eritq3 per.20.huius.k.l.similis.e.f.sup/posita igitur superficie.k.l.supficiei.e.f.ita q abe cõmunicet in angulo.g.erit per 23.huius superficies.e.f.consistens circa diametrum superficiei.k.l.quare pũcũ

La Proposiciones 29 y 30 del Libro VI de *Los Elementos* de Euclides en la edición de Ratdolt.
Estas proposiciones, que en esta edición ocupan el lugar 28 y 29, permiten la solución geométrica de la ecuaciones cuadráticas $ax+x^2=bc$ y $ax+x^2=a^2$, de forma que generalizan los mismos procedimientos del *Álgebra* del Libro II.
En particular la Proposición 30 resuelve el problema de la « *divión de un segmento en media y extrema razón*», es decir de forma áurea



Propositio .29.
Quamlibet lineam propositam secundũ proportionem ha/bentem medium duoq3 extrema secare.
¶Sit proposita linea.a.b.q3 volo diuidere secundũ proportionem habentem medium z duo extrema ex ipsa describo quadratum .b.c. z ad eius latus.a.c.adiungo sm qd docet premissa paralellogramũ c.d.equale quadrato.b.c.q addat ad cõplementũ linee.a.c.paralellogramũ.a.d. q sit simile.b.c.sitq3 latus palellogramũ.c.d.qd equidistat.a.c.d.e. z secet lineam a.b.in puncto.f.dico lineã.a.b.esse diuisam in puncto.f.sicut proponitur: est enĩ a.d.quadratum propter id qd est simile.b.c.quare.a.f.estequale.f.d.sed z.f.c.est equalis.a.b.propter id qd est equalis .a.c.per.34.primi:z quia.c.d.equale.b.c. dempto vtrũq3.c.f.erit.a.d.equale.c.b.z angulus.f.vnius angulo.f.alterius.er/go per.13.huius latera sunt mutekesia:ergo.e.f.ad.f.d.sicut.a.f.ad.f.b. z q2.e.f. est equalis.a.b.z.f.d.a.f.erit.a.b.ad.a.f.sicut.a.f.ad.f.b.ergo per diffinitionem est diuisa ut proponitur. Idem etiam potest demonstrari ex.11.secundi:diuidatur enim.a.b.in puncto.f.sm qd doc3.11.secundi:sitq3.e.b.qd continetur sub tota.a. b. z eius parte .f.b. ita q .f.e.sit equalis.a.b.z.a.d.sit quadratum. a.f. est itaq3 per predictam.11.secundi.e.b.equale.a.d.qd restat arguere ut pri9: per.13.huius. vel sic cum.a.b.sit diuisa in puncto.f.secundum qd docet.11.secundi.qd fit ex.a.b. prima in.f.b.tertiam est equale quadrato.a.f.secunde. ergo per secundam partẽ 16.huius proportio.a.b.prime ad.a.f.secunda est sicut.a.f.secundã ad.f.b. tertiã per diffinitionem itaq3 diuisa est.a.b.vt proponitur.

- Proposición VI.31. En los triángulos rectángulos la figura construida sobre el lado opuesto al ángulo recto es equivalente a las semejante y semejantemente dispuestas construidas sobre los otros dos lados [*Generalización del Teorema de Pitágoras, atribuido por Proclo al propio Euclides*].
- Proposición VI.32. Si dos triángulos tienen dos lados de uno proporcionales a dos lados del otro, y se construyen unidos por un ángulo de modo que sus lados correspondientes sean paralelos, los lados restantes de los triángulos estarán en línea recta.
- Proposición VI.33. En los círculos iguales, los ángulos guardan la misma razón que las circunferencias sobre las que están, tanto si están en el centro como si están en las circunferencias.

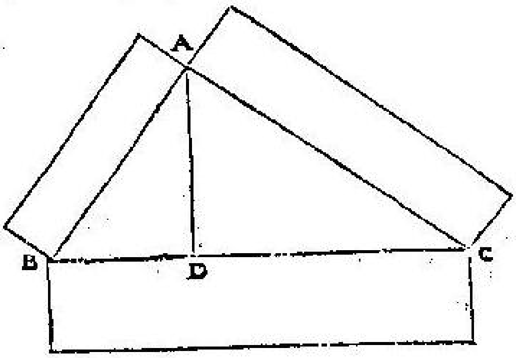
LA GENERALIZACIÓN DEL *TEOREMA DE PITÁGORAS* EN LA PROPOSICIÓN VI.31 DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES

LIBRO SEXTO DE

Theorema. 31. Propoſicion. 31.

¶ En los triãgulos rectãgulos la figura q̃ ſe haze del lado opueſto al angulo recto es ygual a las figuras ſemejãtes y ſemejãtemente hechas delos lados que cõprehẽden al angulo recto

Sea el triangulo. A B C, que tiene el angulo recto, B A C. digo que la figura que ſe haze dela. B C. es ygual a aquellas figuras ſemejantes y ſemejantemente hechas dela. B A, y dela A C. Saqueſe. (por la. 12. del. 1.) la perpẽdicular. A D. pues por que enel triangulo rectangulo, A B C. deſde el angulo recto A. ſobre la baſis. B C. ſe tiro la perpendicular. A D. los triangulos. A B D. A D C dejunto a la perpẽdicular ſon ſemejãtes al todo. A B C. y tãbien entre ſi (por la. 8. d̃l. 6). Y porq̃ ſemejante. A B C, al, miſmo. ABD. luego es q̃ como. C B. con B A. aſsi. A B. cõ. B D y porq̃ tres lineas



rectas ſon proporcionales luego (por el corelario. 2, dela. 20 del. 6.) es que como la, primera con la tercera aſsi la figura que es deſcripta dela primera cõ aquella que dela ſegũda, ſemejante y ſemejantemente: Luego como. C B. cõ, B D. aſsi la figura que dela. B C, con la que es deſcripta de la. B A. ſemejante y ſemejantemente, Y tambien por lo miſmo como. B C con. C D. aſsi la figura que es dela, B C. con la que de la. C A, Por lo qual como la, B C, con la, B D, y la, D C, aſsi la figura que ſe haze dela, B C, con aquellas que debajo de, B A, y de, A C, ſon deſcriptas ſemejantes y ſemejantemente, Pero es ygual la, B C. a, B D, y, D C, luego es ygual la figura que ſe haze de la. B C. a aquellas figuras ſemejantes y ſemejantemente hechas de la, B A, y de la, A C. Luego en los triangulos rectangulos la figura que ſe haze de el lado opueſto al angulo recto es ygual a las figuras ſemejantes y ſemejantemente hechas de los lados que comprehenden al angulo recto, lo qual conuino demoſtrarſe,

La Proposición VI.31 de *Los Elementos* de Euclides es una interesante generalización del *Teorema de Pitágoras* que sustituye los cuadrados sobre los lados por figuras semejantes.

En sus *Comentarios al Libro I de Los Elementos* de Euclides, Proclo atribuye al propio Euclides este resultado en el mismo texto en el que le ensalza por la demostración de I.47.

> ***Mientras admiro a los que han observado la verdad de este teorema, ensalzo más todavía al escritor de Los Elementos, no sólo porque consiguió una demostración mucho más lúcida, sino también porque obtuvo un teorema mucho más general, mediante los irrefutables argumentos del Libro VI.***

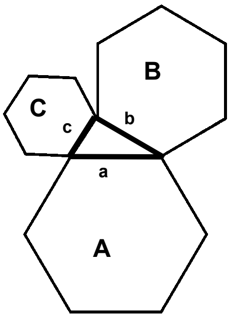
APLICACIONES GEOMÉTRICAS DE LA PROPOSICIÓN VI.31 DEL LIBRO VI DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES

Proposición VI.31: ***«En los triángulos rectángulos, la figura construida a partir del lado que subtiende el ángulo recto es equivalente a las figuras semejantes y construidas de manera semejante a partir de los lados que comprenden el ángulo recto.»***

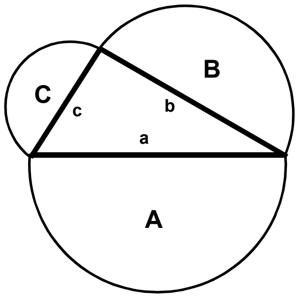
La Proposición VI.31 se puede aplicar, en particular, a figuras poligonales regulares y a círculos en las que el área es una función del cuadrado del lado. De modo que podríamos enunciar los siguientes teoremas

a. El área de un polígono regular construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo, es igual a la suma de las áreas de los polígonos regulares semejantes construidos sobre los catetos del triángulo.

b. El área de un círculo (o semicírculo) construido sobre la hipotenusa (tomada como diámetro) de un triángulo rectángulo, es igual a la suma de las áreas de los círculos (o semicírculos) construidos sobre los catetos.



A = B + C



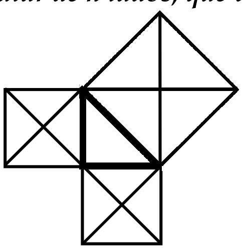
A = B + C

a. El área de un polígono regular construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo, es igual a la suma de las áreas de los polígonos regulares semejantes construidos sobre los catetos del triángulo.

b. El área de un círculo (o semicírculo) construido sobre la hipotenusa (tomada como diámetro) de un triángulo rectángulo, es igual a la suma de las áreas de los círculos (o semicírculos) construidos sobre los catetos.

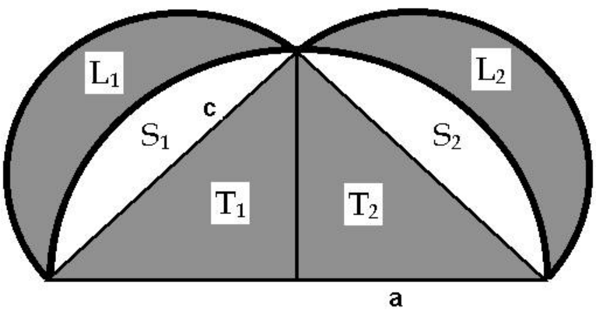
La Proposición VI.31 de *Los Elementos* de Euclides resuelve también el problema siguiente:

«Dados dos polígonos regulares P y Q, ambos de n lados, calcular el lado del polígono regular de n lados, que tenga por área la suma de las áreas de los polígonos P y Q.»



En particular en este resultado, al tomar los polígonos P y Q iguales, resuelve el problema de la duplicación de cualquier polígono regular –dado un polígono regular construir un polígono regular del mismo número de lados y de área doble–, generalización del problema platónico del diálogo *El Menón* (82d–83e) de la «*duplicación del cuadrado*».

La Proposición VI.31 de *Los Elementos* de Euclides se puede aplicar también a la cuadratura de las lúnulas de Hipócrates



LAS LÚNULAS DE HIPÓCRATES

D = Semicírculo de radio a.

D_1 , D_2 = Semicírculos iguales de diám. c.

S_1 , S_2 = Segmentos iguales.

T_1 , T_2 = Triángulos iguales.

L_1 , L_2 = Lúnulas iguales.

$D = D_1 + D_2$ Euclides, VI.31

$D - (S_1 + S_2) = (D_1 - S_1) + (D_2 - S_2)$

$L_1 + L_2 = T_1 + T_2$

$L_1 = T_1$; $L_2 = T_2$

LA RECONSTRUCCIÓN DEL LEGADO GEOMÉTRICO PITÁGÓRICO MEDIANTE LA *TEORÍA DE LA PROPORCIÓN* DE EUDOXO EN EL LIBRO VI DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES

Recordemos la definición pitagórica de Proporción:

Dos razones, a/b y c/d, se dice que son «*proporcionales*» (en sentido pitagórico):

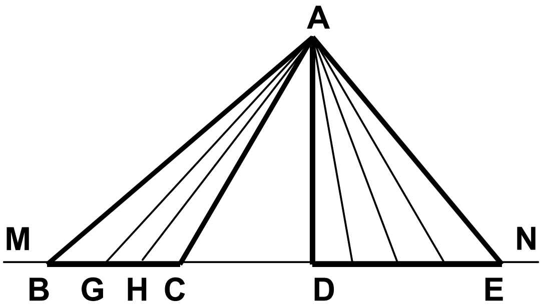
a/b=c/d, cuando existen enteros p,q,m,n, tales que a=mp, b=mq, c=np, d=nq;

Veamos como con el descubrimiento de los inconmensurables se afectan y quedan deslegitimadas las pruebas pitagóricas de los teoremas que utilizaran proporciones.

Por ejemplo para demostrar la Proposición VI.1 de *Los Elementos* de Euclides:

«*Los triángulos que tienen la misma altura, son entre sí como sus bases*»,

los primeros pitagóricos actuarían de la siguiente manera:



Sean los triángulos ABC y ADE, con bases BC y DE sobre la recta MN. BC y DE tendrán alguna unidad común de medida; sea GH contenido p veces en BC y q veces en DE. Marquemos los puntos de división sobre BC y DE y unámoslos con el vértice A.

Los triángulos ABC y ADE quedan divididos respectivamente en p y q triángulos menores, que según la Proposición I.38 de *Los Elementos* («*los triángulos que tienen igual base y altura son equivalentes*») tienen el mismo área.

Por tanto la razón de los triángulos ABC/ADE = p/q = BC/DE, como se quería probar.

Es evidente que la aparición de magnitudes inconmensurables invalida la prueba geométrica exhibida en esta proposición y en todas las pruebas pitagóricas en las que haya que comparar razones de magnitudes geométricas.

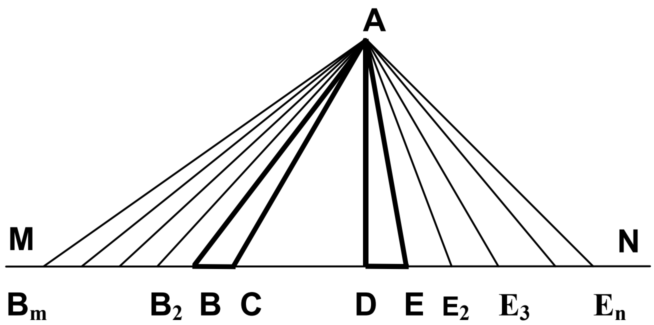
Recordemos la definición de Eudoxo de igualdad de razones (*Elementos* de Euclides, Def. V.5):

Si a,b son dos magnitudes geométricas del mismo tipo y c,d son también del mismo tipo las razones a/b y c/d son proporcionales: a/b=c/d,

cuando para cualquier par de enteros positivos n y m, se tiene:

na>mb y nc>md ó na=mb y nc=md, ó na<mb y nc<md .

Veamos con esta nueva definición de proporcionalidad la demostración rigurosa de la Proposición VI.1 de Los Elementos de Euclides:



Sobre la recta CB, tracemos a partir de B, m-1 segmentos iguales a CB y unamos los puntos de división B2,B3,...,Bm con el vértice A. De forma similar tracemos a partir de E n-1 segmentos iguales a DE y unamos los puntos de división E2,E3,...,En con el vértice A.

Se tiene BmC=m(BC), ABmC=m(ABC), EnD=n(ED), AEnD=n(AED).

Ahora según la Proposición I.38 de *Los Elementos* y su consecuencia: «*de triángulos que tienen la misma altura tiene mayor área el que tiene mayor base*», se deduce que el triángulo AB_mC es mayor, igual o menor que el triángulo AE_nD según que m(BC) sea mayor, igual o menor que n(DE), por tanto según la definición de Eudoxo de proporción se tiene la tesis de la proposición ABC/ADE=BC/DE.

Se observa que no se menciona la naturaleza conmensurable o inconmensurable de las magnitudes geométricas; la definición de Eudoxo se aplica a ambos casos.

Esta prueba de la Proposición VI.1 de *Los Elementos* es una buena muestra de cómo a partir de la definición de Eudoxo las magnitudes geométricas pueden compararse a través de razones; y es sobre esta base que Eudoxo procedió a la demostración rigurosa de los resultados pitagóricos sobre proporciones del Libro VI de *Los Elementos* de Euclides, así como de los teoremas de Hipócrates y Demócrito sobre áreas de círculos y volúmenes de pirámides y conos que aparecen en el Libro XII de *Los Elementos* de Euclides.