La influencia histórica de *Los Elementos* de Euclides

Como se ha dicho, *Los Elementos* de Euclides son el marco inevitable de referencia en toda la Historia de la Geometría griega. El conjunto de sus trece libros dedicados al desarrollo lógico, ordenado y sistemático de los fundamentos de la Geometría griega elemental, es la obra cumbre de la Matemática griega. Los defectos que puedan constatarse en la magnífica obra euclidiana son insignificantes comparados con el extraordinario mérito de haber construido un edificio científico deductivo a partir del cúmulo de heterogéneos conocimientos dispersos que constituían la Matemática griega anterior. La influencia de Euclides en el período helénico ulterior fue tan profunda que todos los matemáticos griegos posteriores se sintieron, de una forma o de otra, deudores de su obra.

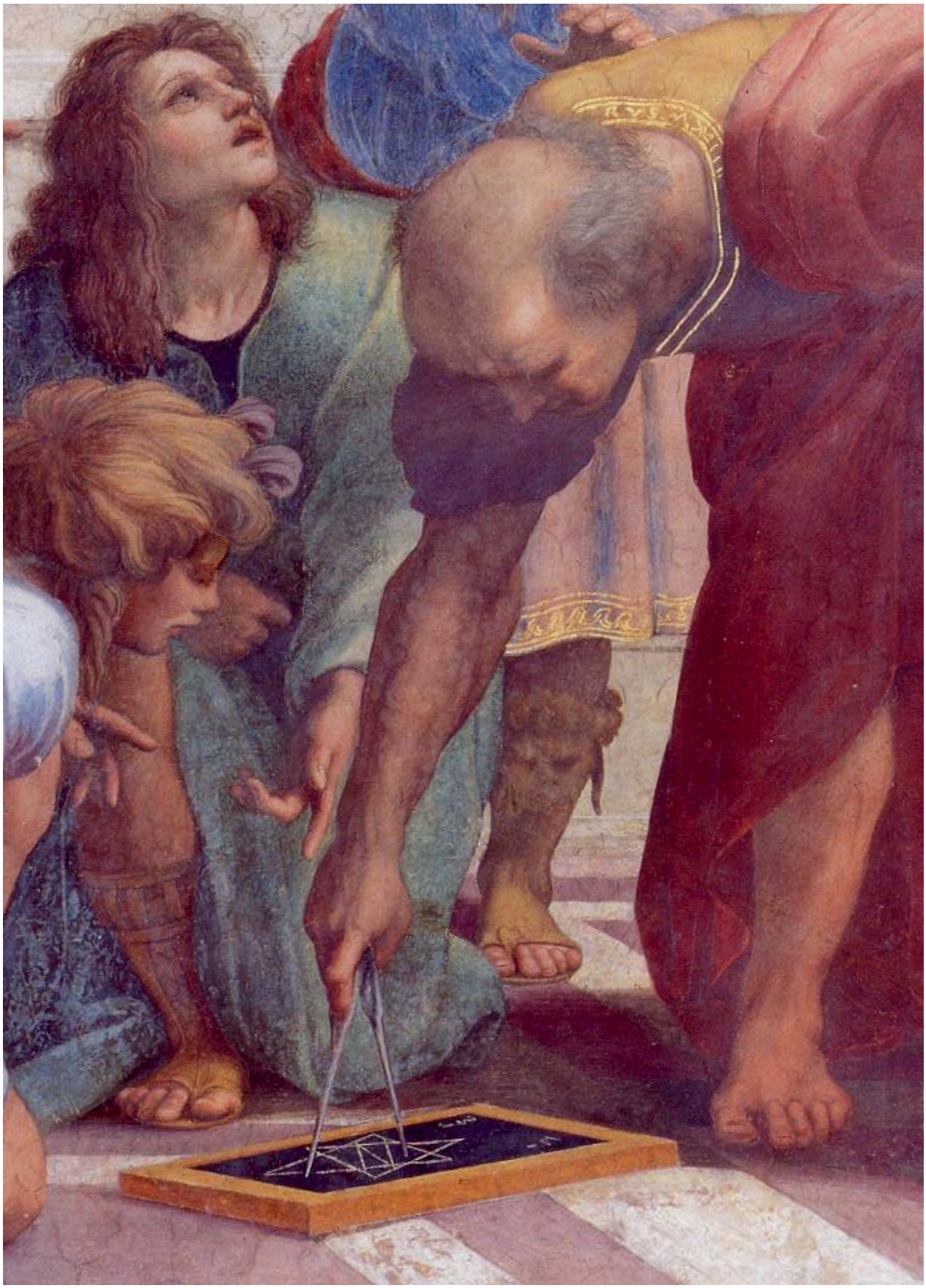
Pero este influjo de la obra euclidiana se extiende a toda la Historia de la Matemática, al ser el punto de partida de casi todas las investigaciones matemáticas hasta por lo menos el siglo XVII, en que aparece en escena la Geometría Analítica como poderoso instrumento algorítmico de resolución de problemas geométricos y herramienta indispensable para el conocimiento y dominio de la naturaleza. No obstante, la Geometría Analítica no llega a oscurecer a la Geometría euclídea, sino que la resitúa en el ámbito de la llamada Geometría Sintética, de modo que siguen ambas a partir de ahora un curso paralelo, al establecerse dos métodos de resolución de los problemas geométricos, que se utilizan indistintamente según el objetivo o la naturaleza del problema, o también según el gusto y el sentido estético.

Los Elementos de Euclides han sido la fuente más importante de conocimiento matemático. Utilizados generación tras generación, han influido sobre el rumbo de las Matemáticas más que ningún otro texto. La composición magistral de Euclides, como tratado geométrico magníficamente organizado con una inefable habilidad expositiva, además de ser la primera obra matemática fundamental que ha llegado hasta nosotros, ha sido la más venerada y ha tenido más ascendencia que ningún otro texto matemático, oscureciendo cualquier otro trabajo precedente sobre la materia, de modo que la obra euclidiana se ha convertido en un texto paradigmático, hasta el punto de que cuando para apoyar una demostración un matemático alude por ejemplo a XII.2 se sobreentiende que la referencia es a la Proposición 2 del Libro XII de *Los Elementos* de Euclides. A este respecto escribe L.Vega (*La Trama de la Demostración*. Alianza Universidad. Madrid, 1990, pág. 387):

> *No es casual que un aspecto institucional característico de Los Elementos de Euclides sea la calidad de archivo de la Matemática elemental que confieren al tratado los usos, citas y alusiones posteriores: en él han cristalizado los conocimientos y las técnicas básicas en materia de Geometría. Constituye un depósito de teoremas y de procedimientos de libre disposición, un repertorio de resultados que cabe aducir por una simple mención o por su uso tácito, sin otros requisitos de prueba ni mayor justificación que el hecho de ser proposiciones de Los Elementos: allí constan y por ende son cosa sabida. Por otro lado, facilita un tipo peculiar de desarrollo de la disciplina geométrica: su crecimiento normal por sucesivas adiciones que irán completando lo que falte, según había previsto Aristóteles.*

Es muy difícil valorar el grado de originalidad del texto euclidiano. El mismo Euclides jamás formula ninguna pretensión al respecto, de modo que se siente tributario de los matemáticos anteriores, pero aparte de que algunas demostraciones sean originales (por ejemplo la del Teorema de Pitágoras – Proposiciones I.47 y I.48– y la generalización de la Proposición VI.31, según testimonio de Proclo), y aunque el estilo de presentación de *Los Elementos* pudiera haber sido utilizado por alguno de sus predecesores –en particular por Hipócrates de Quíos–, sí son atribuibles a Euclides el proyecto de reunir en un *Corpus único* todos los tratados de Geometría existentes, la forma y la organización general del conjunto de la obra, es decir, la elección de los axiomas y postulados, la explícita concreción de cada una de las definiciones, la encadenada secuenciación lógica de los teoremas desde lo más simple a lo más complejo, el rigor incostestable de las pruebas, el refinamiento lógico hasta una ordenación final de la Matemática elemental en un sólido cuerpo geométrico.

EUCLIDES EN *LA ESCUELA DE ATENAS* DE RAFAEL



***Euclides enseñando Geometría a sus discípulos*. Fragmento de *La Escuela de Atenas* de Rafael (1509–1510). Estancia de la Signatura, Vaticano. Rafael pintó a Euclides con el rostro de Bramante.**

La importancia histórica de *Los Elementos* de Euclides viene definida por el profundo impacto que esta obra ha tenido sobre el pensamiento científico, y no sólo en el ámbito matemático, de modo que ha sido un tratado estudiado, analizado, comentado y editado hasta la saciedad. De hecho, después de la Biblia es la obra que más veces se ha editado (se cree que más de un millar de ediciones a lo largo de los siglos); y así no sorprende el que algún estudioso entusiasta llame a *Los Elementos* de Euclides la *Biblia de las Matemáticas*. Más allá incluso del terreno matemático, donde su estilo se impuso de forma normativa, *Los Elementos* de Euclides, con esa economía y brillante claridad que preside el tránsito hacia los teoremas, con la idea de pruebas directas o indirectas, desde las hipótesis básicas hasta las conclusiones más sutiles, han sido un modelo ideal de método de exposición hipotético-deductivo para autores como Arquímedes en el ámbito de la Estática y la Hidrostática, Ptolomeo en la Astronomía, Galeno en la Medicina y Galileo en la Física, en el panorama propiamente científico pero también en otras disciplinas, digamos humanísticas, sobre todo para Spinoza en la Ética o Hobbes en la Filosofía Política, donde se refleja la preocupación por el deseo de certeza ante las evidentes debilidades del razonamiento puramente persuasivo de la Retórica o la Dialéctica.

La Ética de Spinoza de título *Ethica Ordine Geometrico Demonstrata* (*Ética demostrada según el orden geométrico*) toma como modelo expositivo la obra euclídea con axiomas, definiciones, postulados, teoremas, demostraciones, corolarios, etc., siguiendo una rigurosa lógica deductiva. Para Spinoza «*todo lo real es racional*» y por tanto para explicar la realidad escoge la forma más racional de hacerlo que no es otra que el método deductivo de la Geometría euclídea. Asimismo, Hobbes, padre de la Filosofía Política moderna, impulsado por la idea de la unidad del saber y la unidad de método para alcanzarlo, escribe *Leviatán*, donde a partir de unas definiciones iniciales se deducen toda una serie de combinaciones conceptuales siguiendo el modelo geométrico euclídeo. En las obras de Spinoza y Hobbes no hay concesiones literarias y los mensajes responden a la firma voluntad de persuasión científica emulando a Euclides, a base de sustituir el silogismo aristotélico por la deducción geométrica (el *more geometrico*) como paradigma de prueba concluyente.

Los Elementos de Euclides como modelo real de organización deductiva y de exposición metódica de la ciencia, establecen el arquetipo general de ciencia rigurosa y producen, por tanto, una repercusión cultural que traspasa los límites disciplinares de la Geometría y de la Matemática y el espacio temporal del mundo helenístico. Esta incidencia externa del paradigma euclidiano se llama a veces *el estilo euclídeo*, queriendo indicar una normativa reguladora de la organización sistemática de la ciencia y una modalidad del discurso científico, que se proyecta sobre campos del conocimiento con pretensiones científicas. El poder de normalización que *Los Elementos* de Euclides ejercieron sobre la Geometría se aplicará a las demás ciencias, siendo *el estilo euclídeo* el patrón canónico y el criterio del rigor deductivo que debe corresponder a la demostración científica en general.

A principios de siglo XIX, la especulación desinteresada del espacio, sin los estímulos de la Física, produce un renacimiento de la Geometría pura y emerge la figura de Euclides para producir dos efectos importantes. Por una parte se advierten algunos pequeños defectos de una obra que había resistido la crítica de veintidós siglos, y por otra, tras las múltiples investigaciones en torno al famoso quinto postulado, hacen su aparición las llamadas Geometrías no Euclídeas, de modo que a partir de entonces debemos decir que la Geometría de *Los Elementos* de Euclides no es *la Geometría* sino una de las Geometrías.

M. Caveing, en su artículo *Euclides* (en *El Saber griego*. Akal, Madrid, 2000, pp.479, 480, 482, 485) escribe:

> «*El nombre de Euclides ha atravesado los siglos hasta nuestros días, cargado con un valor simbólico para la totalidad de las Matemáticas, tal como la concebían idealmente los sabios y pensadores*. [...]. *Constituyen el cuerpo de doctrina central de las ciencias matemáticas, del que se puede derivar el resto*. [...]. *Los Elementos de Euclides fuero el principal vehículo de la transmisión del saber matemático de base en las épocas helenística y romana*. [...]. *Los Elementos de Euclides permanecen como núcleo de investigaciones dinámicas y su carrera, en este sentido, todavía no ha concluido*.»

El sustrato filosófico de *Los Elementos* de Euclides

Aparte de su posible formación de juventud en la Academia de Atenas, como miembro destacado del *Museo* y la *Biblioteca*, Euclides respiraría en Alejandría la influencia aristotélica y sobre todo la platónica, que había estipulado el idealismo científico, en el sentido de que las ciencias, sobre todo las Matemáticas, deberían basarse en el puro razonamiento y ser independientes de toda experiencia sensible y de todo aspecto práctico de la realidad sensorial. Así lo declara Proclo cuando escribe en su *Comentario*:

> «*Euclides era platónico en cuanto a su opinión y la filosofía del maestro le era muy familiar*, [...] »,

lo que parece confirmarse con la culminación de *Los Elementos* de Euclides en la exhaustiva y casi monográfica dedicación del último Libro a los *Sólidos Platónicos* como queriendo dar consistencia geométrica a la doctrina mística del *Timeo* de Platón.

Para Proclo –en su *Comentario*–, *Los Elementos* de Euclides debían contener las proposiciones necesarias y suficientes para forjar un *Corpus* geométrico nuclear que ofreciera una línea directriz general del desarrollo deductivo de donde poder progresar más allá de los conocimientos adquiridos para poder derivar los nuevos resultados que se pueden obtener en todas la ciencias matemáticas. Así pues, *Los Elementos* de Euclides no contendrían la totalidad de todo el saber matemático de la época sino sólo una parte esencial cuidadosamente seleccionada bajo un estricto criterio prefijado que convirtió una serie de conocimientos anteriores, muy dispersos, en un sistema unitario, estructurado y jerarquizado según un método, llamado axiomático, preconizado ya por Aristóteles como único a seguir en toda ciencia deductiva y que resultó ser más tarde el método general utilizado en la Matemática y en otras ciencias.

Según escribe B.Levi en su obra *Leyendo a Euclides* (Zorzal, Buenos Aires, 2001, p.61):

> «*Los Elementos de Euclides construyen, por primera vez, la Geometría fuera del dominio de los objetos físicos, sobre ideas primitivas (según el término moderno) que sólo actúan por sus propiedades explícitamente enunciadas (nociones comunes, axiomas, postulados, los que Sócrates llama repetidamente hipótesis*.»

En efecto, todo el conjunto de proposiciones y construcciones del sistema euclídeo se deducen, sin otro recurso que la Lógica, de un número exiguo de principios que han de admitirse sin demostración. El sistema y el método euclídeos fue de tal fecundidad que la obra euclídea eclipsó otros *Elementos* redactados con anterioridad –se cree que hasta cinco en el seno de la Academia platónica, cada uno readaptando los anteriores–, y además, con posterioridad a Euclides no se conocen, durante más de dos mil años, obras de naturaleza similar, signo manifiesto de su éxito como texto científico y didáctico.

El instrumento básico que le permitió a Euclides componer su magnífico edificio fue la Lógica de Aristóteles, que actuando como cemento vinculaba con una ilación impecable unas proposiciones a otras. El *Organon* aristotélico debió de inspirar a Euclides el modelo a seguir para construir el andamiaje lógico de su obra, ya que según Aristóteles:

> «*La Geometría es una ciencia deductiva o racional, es decir, que puede adoptar la forma de un sistema de conclusiones obtenidas de un cierto número de premisas fundamentales por medio de sucesivos silogismos*. [...]. *Los fundamentos de la Geometría son, pues, los axiomas, las definiciones y las hipótesis*.»

A este respecto, escribe también B.Levi (*Leyendo a Euclides*, pp.83–84):

> «*Una de las características de Los Elementos de Euclides es la conducta lógica formal de la exposición, que recuerda la teoría aristotélica del silogismo: sistemática división de proposiciones; en cada proposición enunciación primero de una tesis en términos generales; luego nueva enunciación aplicada a una figura particular. Finalmente demostración sobre la figura. La demostración dividida en una serie de conclusiones particulares en cadena y terminando regularmente con la afirmación "lo que se quería demostrar".*»

FILOSOFÍA Y MATEMÁTICA

La Filosofía **instruyendo a los pensadores Sócrates, Platón, Aristóteles y Séneca. Fragmento de un fresco de la Biblioteca de El Escorial de P.Tibaldi. 1586.**

La Filosofía está ubicada en el centro de la composición como una bella matrona de grandes proporciones. Tiene ante sí una esfera que representa la tierra o el universo como símbolo de la idea de que la Filosofía domina todos los conocimientos y es la fuente de toda ciencia. Mientras Sócrates y Séneca aparecen en animada conversación como filósofos de la moral, Platón está absorto escuchando a la Filosofía como madre ciencia y Aristóteles parece estar en plena conversación con ella. El gesto de su mano indicando la esfera parece ratificar su interés por la Filosofía como ciencia natural.

Alegoría de la Matemática en sus dos vertientes: la Aritmética y la Geometría.

Fragmentos de frescos de la Biblioteca de El Escorial. Pellegrino Tibaldi. 1586.

La Aritmética y la Geometría están representadas por figuras femeninas de gran belleza con sus diversos atributos de cálculo y medida, necesarios para «*medir proporciones*» trasunto de comprender, ya que «*proporción*» es uno de los sentidos del término *logos* de la Filosofía. Tanto sus atributos como su propia situación en el espacio vaporoso de las nubes indica su importancia en la explicación racional del universo, finalidad primigenia de la Filosofía.

Ya se vio, además, que procedía de Aristóteles la distinción clara que hizo Euclides entre axiomas y postulados, así como que la fuente de muchas de las definiciones de *Los Elementos* residía en ciertas obras del filósofo estagirita (*Ética a Nicómaco*, *Meteorología*, *Segundos Analíticos*, *Del Cielo*, *Tópicos*, *Metafísica*, ...). En la acepción moderna, *postulado y axioma*, son palabras equivalentes para indicar proposiciones indemostradas y estructuras gramaticales formadas por la conjunción de las ideas primitivas y de términos lógicos, con el propósito de servir de fundamento a la teoría deductiva. Para Aristóteles, los *axiomas* son verdades evidentes por sí mismas y por tanto indemostrables. A estos axiomas, que en griego significan *dignidades*, Aristóteles los llama indistintamente *principios, opiniones, noticias* y *nociones comunes*. Euclides elige el término aristotélico de «*nociones comunes*» para designar a los *axiomas*, como queriendo indicar no sólo la evidencia aristotélica, sino el principio innato del conocimiento demostrativo, adoptando para el término *común* el sentido no solamente de emplearse en varias ciencias, sino ante todo el de pertenencia al pensamiento de todos los hombres.

Los *Postulados* euclídeos se diferencian de los *axiomas* por su menor grado de evidencia y suelen ser afirmaciones de operaciones geométricas que se pueden efectuar –trazar una recta o una circunferencia, determinar la intersección de dos rectas, etc.–. A veces son afirmaciones de existencia y determinación unívoca de ciertas figuras. Aunque aparezcan expresiones operativas y cinemáticas como trazar, prolongar, etc., deben concebirse –al menos en la Geometría plana de los seis primeros Libros de *Los Elementos*– con significado abstracto y estático. M. Caveing en el artículo aludido (*Euclides*, p.484) escribe:

> «*Es función de los postulados la de ser hipótesis que aseguran la aplicabilidad de la matemática euclidiana a un mundo en el que los cuerpos físicos son invariantes por el grupo de los desplazamientos (traslaciones y/o rotaciones). Esta opción le asegura el privilegio de aparecer como "natural" durante un tiempo plurisecular que no terminaría hasta el siglo XIX*.»

Las *definiciones* aclaran el sentido y el significado de las palabras o expresiones cortas que se utilizan par evitar algún molesto rodeo y describen las propiedades suficientes para calificar las entidades de las que se habla. Las definiciones euclídeas están reunidas muchas de ellas al principio de la obra, antes incluso que los postulados y axiomas, después aparecen al principio de algunos Libros con significado un poco más técnico. Al igual que los *axiomas*, las *definiciones* son indemostrables y su objeto se reduce a decir qué es lo definido, sin afirmar su existencia, la cual es objeto de las hipótesis que la declaran explícitamente. No obstante, según Aristóteles mientras que la existencia de los conceptos fundamentales se puede admitir sin demostración, la de la cosa definida a veces debe ser objeto de las proposiciones demostrables –*teoremas* y *problemas*–.

Por otra parte, más allá de la Metafísica y la Lógica aristotélicas, el espíritu de *Los Elementos* de Euclides rezuma por doquier un aroma platónico. Una de las características de la Geometría de *Los Elementos* es precisamente la imposición de limitaciones a los conceptos y formas de razonamiento para escapar del empirismo. En este sentido continúa el texto de B.Levi (*Leyendo a Euclides*, pp.83–84):

> «*Es bien posible que tal formalismo* [euclidiano] *imitara de cerca algo de la dialéctica sofística y por nada es absurdo que tal forma adoptara un discípulo de* Sócrates [En sentido figurado, Euclides, discípulo de Sócrates a través de Platón] *, el fustigador de sus contemporáneos sofistas, pues lo que Sócrates combate no es la forma, que hasta cierto punto conserva él también en sus análisis dialogados, sino el error que se oculta en deducir, por razonamientos formalmente exactos, de premisas variables y engañosas; valía la pena mostrar qué distinto es el resultado cuando se parte de axiomas claros y unívocos. La maravilla de los Elementos consistía precisamente en demostrar, con el ejemplo, cómo podía la inteligencia del hombre, guiada por el razonamiento riguroso, llegar de esas pocas premisas simples a las verdades que el secular conocimiento empírico podía haber enseñado*.»

El ambiente científico alejandrino donde trabajaba y escribía Euclides estaba dominado por el idealismo platónico que despreciaba la dimensión sensible de la realidad y las aplicaciones prácticas de la Geometría y la Aritmética por considerarlas corruptoras y

degradantes. En toda la obra geométrica euclídea no aparece ni una sola aplicación práctica. Tampoco figura ni un sólo ejemplo numérico, aunque el tratado tiene tres libros de Aritmética, pero los números están disfrazados de segmentos y las operaciones entre ellos se realizan mediante construcciones geométricas. Las cuestiones calculísticas eran objeto de una actividad subalterna que los griegos llamaban *Logística*, de rango intelectual inferior a la Aritmética y, de modo análogo, una actividad también inferior que llamaban *Geodesia* se ocupaba de las utilización práctica de la Geometría. Ambas actividades eran propias de los esclavos o como mucho de los artesanos e impropias de los filósofos.

Aunque suele decirse que la Geometría de Euclides es la «*Geometría de la regla y el compás*», debe entenderse como metáfora, ya que no hay en *Los Elementos* ninguna mención a estos instrumentos ni a ningún otra herramienta geométrica material. En puridad habría que decir que la Geometría de Euclides sólo admite construcciones con rectas y circunferencias y veta todo instrumento geométrico de acuerdo con la condena de todo pragmatismo en la Filosofía platónica que trasluce el siguiente pasaje de Plutarco (*Vidas paralelas*: *vida de Marcelo*, XIV):

> «[....]. *Platón se indispuso e indignó contra ellos* [contra Arquitas de Tarento y Eudoxo de Cnido], *porque degradaban y echaban a perder lo más excelente de la Geometría con trasladarla de lo incorpóreo e intelectual a lo sensible y emplearla en los cuerpos que son objeto de oficios toscos y manuales*.»

Por herencia pitagórica, para Platón la Matemática no sólo es una realidad perfecta sino la auténtica realidad. Por tanto los conceptos de la Matemática son independientes de la experiencia y tienen una realidad propia; se los descubre, no se los inventa o crea. Los juicios geométricos son eternos y apriorísticos, y corresponden a una realidad intemporal e inmutable, que es la auténtica realidad, más real que la engañosa, imperfecta e incompleta realidad sensible. De acuerdo con su idealismo geométrico, Platón subraya que los razonamientos que hacemos en Geometría no se refieren a las figuras concretas que dibujamos sino a las ideas absolutas que ellas representan (*República*, 510d–510e):

> «[Los matemáticos] *se sirven de figuras visibles que dan pie para sus razonamientos, pero en realidad no piensan en ellas, sino en aquellas cosas a las que se parecen*. *Y así, por ejemplo, cuando tratan del cuadrado en sí y de su diagonal, no tienen en el pensamiento el que dibujan y otras cosas por el estilo. Las mismas cosas que modelan y dibujan, cuyas imágenes nos las ofrecen las sombras y los reflejos del agua son empleadas por ellos con ese carácter de imágenes, pues bien saben que la realidad de esas cosas no podrá ser percibida sino con el pensamiento*.»

De esta visión platónica idealista podría derivar la distinción que en la Grecia clásica se hizo, como se ha dicho, entre Aritmética y Geometría como factores espirituales de elevación hacia la Filosofía y Logística y Geodesia como instrumentos materiales y utilitarios de los artesanos y técnicos. Así pues, debido a la influencia de Platón, la Geometría permanecería a partir de entonces ligada a un modelo teórico de la Matemática pura, que rechaza de forma elitista sus aplicaciones prácticas y desprecia los aspectos sensoriales de la realidad. Como consecuencia de esta Filosofía de la Geometría, puede haber sido Platón el responsable de la restricción predominante en las construcciones geométricas griegas a aquellas que pueden realizarse sólo con regla y compás.

Pues bien, *Los Elementos* de Euclides representan la culminación del idealismo platónico en Matemáticas. Los griegos hacen Geometría «*por el mero honor del espíritu humano*», como muchos siglos más tarde diría Jacobi, y la utilidad es un valor añadido. Es más, para los griegos la raíz etimológica del término Geometría sería incluso paradójico, porque Geometría significa «*medida de la tierra*», pero fueron precisamente los geómetras griegos quienes la independizaron de tal menester y de cualquier otra finalidad práctica, a lo que dedicaban, como se ha dicho, la actividad artesanal llamada *Geodesia*. Para los griegos las actividades más dignas desde una perspectiva intelectual eran las que, como en su Geometría, carecían de utilidad inmediata y atendían sólo a la curiosidad intelectual mediata presidida por la reflexión serena, independiente de todo pragmatismo y no espoleada por la urgencia biológica de la satisfacción de las necesidades vitales inmediatas.

LA INFLUENCIA DE PLATÓN Y LA ACADEMIA SOBRE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES

Platón dando una lección de Geometría a sus discípulos en *La Academia de Atenas* (Mosaico procedente de Pompeya. Mansión de Siminio Estéfano, siglo I a.C. Museo Arqueológico, Nápoles). Según otras interpretaciones, este mosaico podría representar a los Siete Sabios de Grecia.

Según el testimonio de Proclo, en su *Comentario al Libro I de Los Elementos de Euclides*, todo el desarrollo de la Matemática del siglo anterior a Euclides estuvo dominado por la Academia de Platón, a quien describe como alguien que estimuló a sus discípulos en el estudio de las ciencias matemáticas al incluir con mucha frecuencia textos de contenido matemático en sus obras, despertando la pasión y el encanto por la Geometría en los estudiosos de la Filosofía:

> **«*Después de los pitagóricos vivió Platón, que dio a las Matemáticas en general, y a la Geometría en particular, inmenso impulso gracias al celo que desplegó por ellas y del que son testimonio suficiente sus escritos llenos de discursos matemáticos, y que, a cada momento, despiertan el entusiasmo por estas ciencias en aquellos que se entregan a la Filosofía*.»**

Con la fundación en 387 a.C. de *La Academia de Atenas*, Platón crea el centro más importante de especulación matemática y filosófica de la Antigüedad y ejerce un importante mecenazgo sobre sus discípulos, a quienes se debe –bajo su influencia– la recepción y asimilación del legado matemático pitagórico, su fundamentación y su magnífica ampliación hasta conformar la mayor parte del contenido de *Los Elementos* de Euclides.

El texto de Proclo nos informa sobre la naturaleza de la actividad matemática de los miembros de Academia platónica, en una forma que nos permite entender la decisiva influencia sobre Euclides:

- **«*Multiplicaron los teoremas y los pusieron en un orden más sistemático*.»**
- **«*Añadieron muchas soluciones a los problemas anteriores*.»**
- **«*Ampliaron considerablemente los conocimientos precedentes y compusieron Elementos muy superiores por el número y por la importancia de las demostraciones*.»**
- **«*Hicieron uso del Análisis para resolver las cuestiones suscitadas por Platón*.»**
- **«*Perfeccionaron el conjunto de la Geometría al convertir en generales muchas definiciones y proposiciones particulares*.»**
- **«*Se distinguieron tanto en Matemáticas como en el resto de la Filosofía***
- **«*Todos estos sabios se reunían en la Academia y realizaban sus investigaciones en común*.»**
- **«*Realizaron investigaciones siguiendo las instrucciones de Platón planteándose cuestiones acerca de lo que podía contribuir a la Filosofía de su maestro*.»**

En la obra de B.Levi (*Leyendo a Euclides*. Zorzal, Buenos Aires, 2001) podemos leer:

> **«*Los Elementos de Euclides aparecen como el fruto de las concepciones del círculo de matemáticos y filósofos de la Academia platónica*, [...] . *La Geometría de Euclides* [está latente] *en el pensamiento expresado en los Diálogos de Platón*» (p.16).**
>
> **«*La Academia platónica es una escuela que mira a la Geometría como una audacia del espíritu, remolque del alma hacia la verdad e impulso al pensamiento filosófico*» (p.49).**

MATEMÁTICA Y FILOSOFÍA
INFLUENCIA DE PLATÓN Y ARISTÓTELES EN *LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES*

Platón y Aristóteles. Fragmento del cuadro de Rafael *La Escuela de Atenas* (1509–1510). Estancia de la Signatura. Vaticano.

Platón y Aristóteles, en un claro ejercicio de jerarquía intelectual, ocupan la parte central del cuadro de Rafael. El artista plasma a los dos filósofos como complementarios en su armonía amistosa: Platón sostiene en una mano *El Timeo* (*Diálogo* de raíz pitagórica donde expone su cosmogonía) y eleva hacia el cielo el dedo índice de la otra mano como indicando lo ideal y lo sublime, mientras Aristóteles sostiene con una mano *La Ética* y tiende hacia delante el otro brazo con la palma de la mano vuelta hacia el suelo, como señalando lo inmediato, lo concreto y lo terrenal. En los gestos de ambos filósofos el artista Rafael sintetiza la esencia de sus doctrinas con una capacidad casi milagrosa de concentrar en imágenes simples las más complejas ideas.

Platón es el líder y mecenas del grupo de matemáticos de la Academia, que se enfrentan a los problemas de fundamentación de la Matemática griega, tras la crisis de la aparición de los inconmensurables. Entre ellos sobresale Eudoxo que idea *La Teoría de la Proporción* y *El Método de Exhaución* como base de ataque de los primeros problemas infinitesimales, que tendrá gran influencia ulterior sobre la teoría de la potencia y el acto del *Hilemorfismo* aristotélico. Platón y los matemáticos de la Academia contribuyeron a la organización y estructuración deductiva de las Matemáticas, al discutir los fundamentos, clarificar algunas definiciones y reorganizar las hipótesis de partida, todo ello de una influencia decisiva sobre la gestación de *Los Elementos* de Euclides.

***Los Elementos* de Euclides representan el clímax del idealismo platónico en Matemáticas, al consumar el proceso que inician con los pitagóricos de transformar el saber geométrico en «*ciencia liberal y desinteresada*», independiente de toda práctica empírica, es decir, en disciplina puramente teórica, que investiga los teoremas de manera inmaterial mediante del discurso mental que se remonta a los principios generales y estudia los teoremas de forma abstracta mediante la inteligencia pura.**

El *Organon* aristotélico debió de inspirar a Euclides el aparato lógico-deductivo del estilo euclidiano. De Aristóteles procede la distinción clara que hizo Euclides entre axiomas y postulados. Por otra parte la fuente de muchas de las definiciones de *Los Elementos* residía en obras del filósofo estagirita. Aristóteles aporta explícitamente en los *Segundos Analíticos* la definición de las bases formales del método de razonamiento axiomático-deductivo (premisas, definiciones, hipótesis, axiomas, postulados, demostración, etc.) de influencia decisiva sobre la estructuración lógica de *Los Elementos* de Euclides.

LA MATEMÁTICA DE LA ACADEMIA PLATÓNICA Y *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES

La Academia de Atenas. Fragmento de un fresco de la Biblioteca de El Escorial de P.Tibaldi. 1586.

Platón y su entorno académico tuvieron una decisiva incidencia en el desarrollo y en la estructura que han configurado la Matemática como ciencia. En la Academia platónica, que se convirtió en el centro matemático del mundo, la Matemática fue siempre considerada como fundamento de todo el saber humano y por tanto como propedéutica esencial para el estudio de la Filosofía.

En la Academia trabajaron los principales investigadores del siglo IV a.C., célebres matemáticos que además de magnificar de forma considerable el patrimonio matemático, debatieron y resolvieron, en sus discusiones académicas, cuestiones trascendentales de las Matemáticas relacionadas con sus propios fundamentos y con la metodología de la investigación y el razonamiento matemáticos. Fruto de las exigencias de Platón sobre los principios y los objetos de la Matemática, la Academia sistematiza las reglas de la demostración rigurosa e inicia una ordenación de los teoremas según una jerarquía lógica que culminaría Euclides con *Los Elementos*. No sabemos si Platón empezó a establecer las bases axiomáticas pero lo que si se sabe es que desde Platón la demostración deductiva, a partir de los principios, se consideró necesaria y consustancial con la propia naturaleza de la Matemática, estableciendo un paradigma de actuación en Matemática que nunca ha sido relevado hasta ahora.

Los matemáticos de la Academia establecieron, pues, las bases y los presupuestos de *Los Elementos* de Euclides, cuya paternidad en su mayor parte, tanto en contenido como en estructura lógica, les corresponde al haber reconstruido las demostraciones de los teoremas pitagóricos que habían quedado invalidados por la aparición de los inconmensurables (resultados que pasarán a los cuatro primeros libros de *Los Elementos* de Euclides), tras la resolución por Eudoxo de la correspondiente crisis de fundamentos con la *Teoría de la Proporción* que Euclides incluyó en el Libro V, y en la que basó toda la Geometría de la semejanza del Libro VI. Eudoxo introduce también el *Método de Exhaución* que resuelve de forma rigurosa problemas infinitesimales que aparecen en el Libro XII de *Los Elementos*. Mientras tanto Teeteto realiza el exhaustivo estudio de los irracionales cuadráticos que Euclides inserta en el prolijo Libro X, y el no menos completo y profundo estudio geométrico de los Poliedros regulares, tan queridos y admirados por su maestro Platón, con el que se corona de forma brillante, en el Libro XIII, la gran Biblia euclídea de *Los Elementos*, una construcción ontológica y antológica de la Matemática geometrizada de los griegos, que, por su indudable ascendencia platónica, bien podemos suscribir las palabras que escribe G. Reale en su obra Platón *En búsqueda de la sabiduría secreta* (Herder, Barcelona, 2001, p.213):

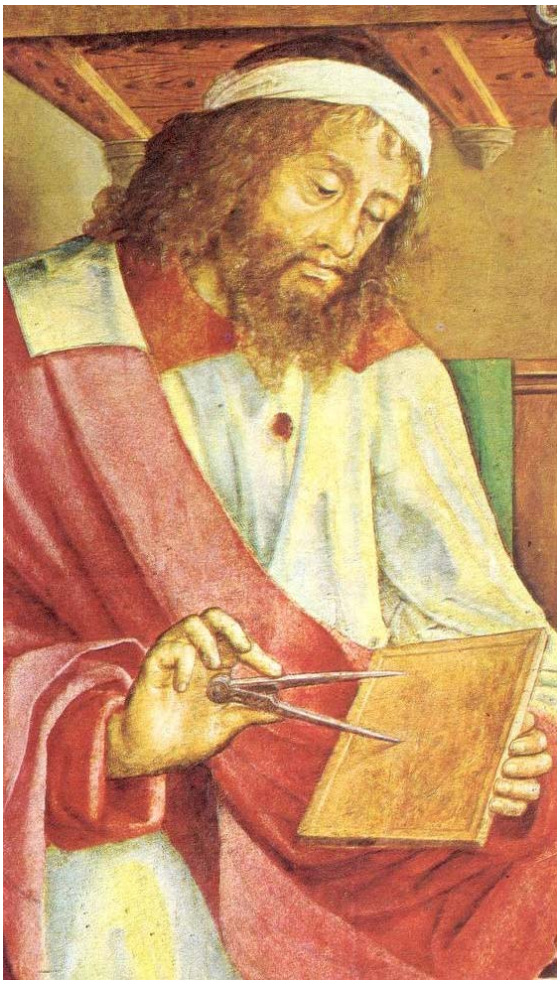
«*Con todo derecho la Geometría de Euclides habría que denominarla Geometría platónica*.»

En este sentido, *Los Elementos* de Euclides consuman el proceso que empieza con los pitagóricos de transformar el saber geométrico en disciplina puramente teórica, que investiga los teoremas de manera inmaterial, es decir, intelectualmente libre de instrumentos y mediciones, sin referencia a materiales concretos y sólo por medio de la intuición de ideas y del discurso mental que se remonta a los principios generales y estudia los teoremas de forma abstracta mediante la inteligencia pura. Esto es lo que significa para los griegos que la Matemática es una «*ciencia liberal y desinteresada*», independiente de toda práctica empírica, de la utilidad inmediata y de toda aplicación de instrumentos materiales, con la sublime «*misión pedagógica de formar mentes bien hechas, para cumplir* [según Platón] *con el fin propedéutico de servir de introducción al estudio de la Filosofía*» A este respecto recordemos la anécdota de Euclides y el pragmático discípulo que le interrogaba al maestro con la pregunta *¿para qué sirve estudiar Geometría*?.

Según esta Filosofía, en las Matemáticas no se debe ver otro objeto que el conocimiento en sí mismo. Así lo proclamará de forma reiterada Platón en varios pasajes de *La República*:

> «[...] *Incluso aquellos que tengan escasos conocimientos de Geometría no pondrán en duda que esta ciencia es todo lo contrario de lo que supondría la terminología de los geómetras* [...]. *Es un lenguaje sumamente ridículo y forzado, pues hablan como si sus explicaciones tuvieran alguna finalidad práctica, y emplean toda clase de términos tan pomposos como cuadrar, prolongar, adicionar, cuando en verdad esta ciencia se cultiva con el único objeto de conocer*» (*República,* 527a)

> «[...] *La parte más elevada de esta ciencia* [la Geometría] *nos conduce a una contemplación más factible de la idea de bien* [...]. *La Geometría nos obliga a contemplar la esencia* [...]. *Es una ciencia del conocimiento del ser, no de lo que está sujeto al cambio o desaparición* [...]. *Conducirá el alma hacia la verdad y dispondrá la mente del filósofo para que eleve su mirada hacia arriba*» (*República*, 526e, 527b).



Euclide immaginato. Justus van Ghent (siglo XV).

Y más allá de Platón y de la Geometría, el carácter de la Matemática como ciencia del conocimiento en sí, es proclamado por la denominación misma de los términos «*Matemáticas*» y «*matemáticos*», que en la mayoría de las lenguas europeas son de origen griego, derivados del verbo «*conocer*» o «*aprender*». En efecto, el término *Matemática* (acuñado como el de *Filosofía* por Pitágoras), deriva etimológicamente del griego «*mathema*», que significaba «*lo que se enseña y se aprende*», es decir lo formativo, «*todas las formas de conocimiento*», antes de que el término derivado, en plural, «*Matemáticas*» adquiera el sentido más especializado que nosotros le damos actualmente. Así pues, las Matemáticas, según los griegos, deben estudiarse por la afición y el amor al saber en sí mismo, es decir las Matemáticas deben estudiarse por Filosofía y para la Filosofía.

Estos objetivos espirituales debían cubrir la codificación enciclopédica de la Matemática racional en un cuerpo axiomático-demostrativo, *Los Elementos* de Euclides, modelo de ciencia abstracta, única y sintética, liberal y desinteresada, sin ningún tipo de grieta apodíctica, rasgos de indiscutible sello platónico.

La transmisión de *Los Elementos* de Euclides. Las diversas ediciones

No existen manuscritos de ninguna obra de Euclides, así que *Los Elementos*, que fueron escritos hacia el año 300 a.C., han tenido que ser reconstruidos a partir de multitud de comentarios y recensiones de otros escritores, por tanto es probable que se hayan deslizado errores, interpolaciones y variaciones inevitables. Dos de las recensiones primitivas más importantes fueron la de Herón de Alejandría (hacia el año 100 a.C.) que se ha conservado parcialmente en árabe y se guía por la preocupación de completar y perfeccionar el tratado euclidiano y la de Pappus de Alejandría (hacia 325 a.C.), de la que se ha preservado una versión en árabe de su comentario al Libro X. También se deben citar los comentarios del neoplatónico Porfirio de Tiro que pondera ante todo la precisión de los enunciados y el rigor apodíctico de las demostraciones, así como el examen del aristotélico Simplicio que en su comentario, a modo de Introducción a la Geometría, extractos de la cual se conservan en árabe, se fijó ante todo en los principios.

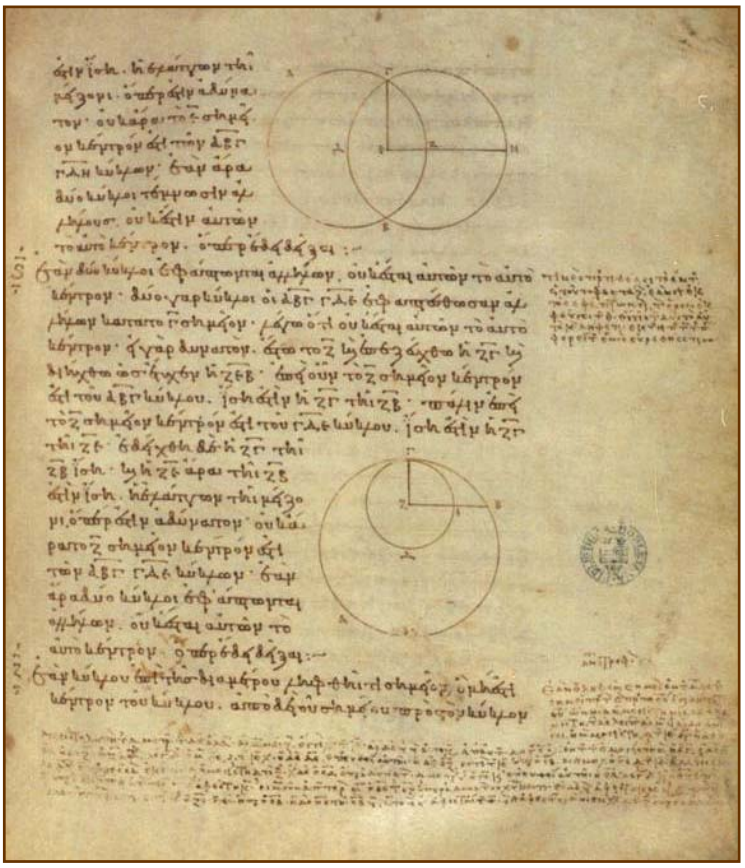
Pero sin duda alguna el más importante análisis de la obra euclidiana lo realiza Proclo en el reiteradamente citado *Comentario al Libro* I *de Los Elementos de Euclides*, que se ha conservado en griego. El testimonio de Proclo aborda numerosos aspectos del texto y del contexto de la obra de Euclides, desde la perspectiva histórica, matemática, lógica, filosófica y epistemológica, por lo que es una referencia ineludible sobre la ubicación de *Los Elementos* en el ámbito general de la ciencia griega, en general, y de la matemática griega, en particular, y también sobre su origen, su importancia, su intención, su significado, sus dificultades, sus logros, etc.

Se puede asegurar que *Los Elementos* de Euclides son el más importante de los vehículos de transmisión del conocimiento matemático esencial, desde luego en la época helenística y grecorromana, pero también durante la Edad Media, tanto en el mundo cristiano –latino y bizantino– como en el musulmán.

Hacia el año 370 d.C. el matemático Teón de Alejandría, realizó, con fines didácticos, una edición de *Los Elementos* de Euclides que tiene un gran valor histórico porque de ella derivan todos los manuscritos griegos de *Los Elementos* conocidos hasta comienzos del siglo XIX. La edición de Teón tiene un valor añadido –sentimental y casi mitológico– porque en ella pudo tal vez intervenir su célebre hija Hipatia de Alejandría, una de las figuras más románticas de la Historia de la Ciencia por su terrible muerte violenta a manos del fanatismo iletrado en el año 415, episodio que se considera simbólicamente como el final del desarrollo matemático en el emporio alejandrino. La obra de Teón fue copiada una y otra vez sobre todo en el imperio bizantino. Por ejemplo, se conserva en Oxford un códice *–Bodleian Manuscript–* de una copia de *Los Elementos* realizada y anotada en el año 888 por la mano de Aretas, arzobispo de Cesarea.

A partir del siglo IX los califas de Bagdad estimularon mucho la traducción al árabe de *Los Elementos* de Euclides. Una de las dos más importantes ediciones procede de la primera traducción que es de al–Haggag; la otra se hizo a partir de un trabajo de Ishaq Ibn Hunayn (mitad del siglo IX) que fue revisado por el importante matemático Tâbit ibn Qurra, célebre entre otras cuestiones por sus famosas demostraciones del *Teorema de Pitágoras.* En estas traducciones y ediciones se confrontan los manuscritos griegos para intentar la mejora del texto euclidiano con fines tanto didácticos, como lógicos y matemáticos.

Con base en estas versiones de *Los Elementos* el panorama científico árabe aparece inundado por una amplia literatura euclidiana compuesta de comentarios, recensiones, extractos, resúmenes, compendios, enmiendas, aspectos discutibles en los principios, etc. Puede decirse que todos los grandes filósofos y matemáticos árabes comentaron, entre los siglos IX y XIII, aspectos de la obra de Euclides, en particular la cuestión del quinto postulado en relación con las paralelas (al–Jawari, Tâbit ibn Qurra, al–Haytham, Omar Jayyan...), la *Teoría de la Proporción* del Libro V (al–Mahani, Omar Jayyan...) y la *Teoría de los inconmensurables* del Libro X. A título de ejemplo, se debe mencionar la obra de al–Mahani *Tratado sobre las dificultades concernientes a la proporción* (siglo IX) y la de Omar Jayyan *Comentarios sobre aspectos dudosos en los postulados del libro de Euclides* (hacia 1077) de la que hay una copia manuscrita en la Biblioteca Nacional de París.



EDICIONES MEDIEVALES DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES

1. **Edición medieval del año 888. Códice MS D'Orville 301, fol. 46r. Bodleian Library. University of Oxford.**

   El manuscrito está escrito en griego y es una de les primeras ediciones que se conocen de *Los Elementos* de Euclides.

2. **Página con la primera proposición de *Los Elementos* de Euclides en un manuscrito en árabe de autor y fecha desconocido.**

3. **Página de un manuscrito persa de *Los Elementos* de Euclides, comentados por Nasir al-Din al-Tusi (siglo XIII).**

الرابعة ٩٣

المقالة الرابعة وفيها ست عشر شكلا

الحدود

اذا كان محيط دايرة يماس جميع اضلاع شكل مضلع او جميع زواياه او جميع اضلاع شكل مضلع يماس جميع زوايا مضلع اخر يقال للمحيط منهما انه مرسوم علي المحاط والمحاط انه مرسوم في المحيط ❊

الاشكال

آ

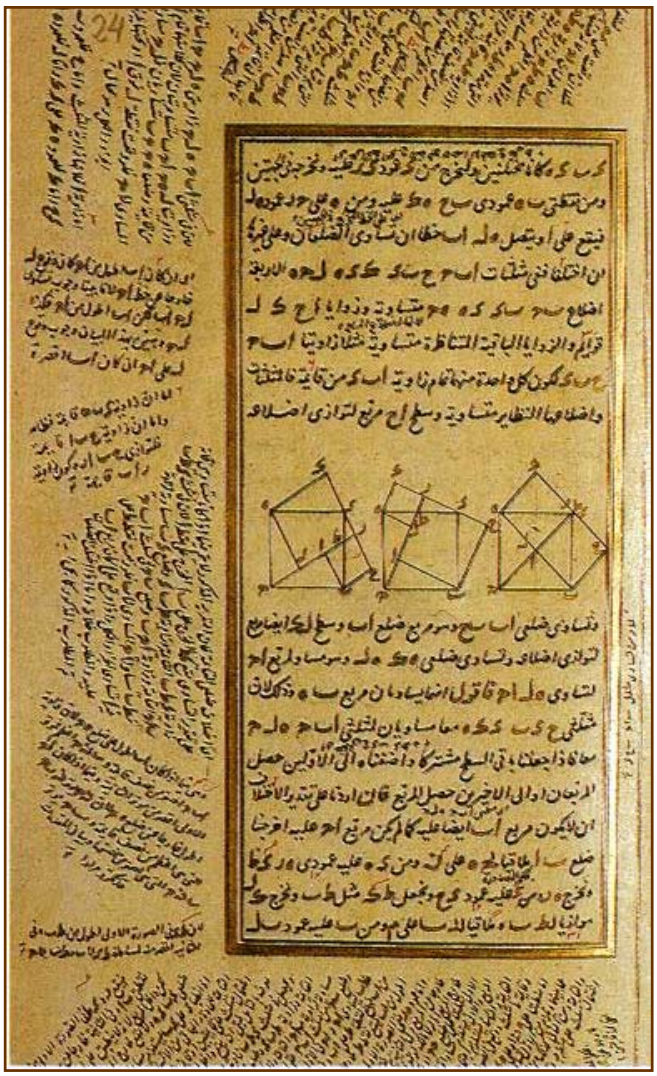
كل دايرة مفروضة معلومة لنا ان نرسم فيها وتر ايساوي خطا مستقيما معلوما مفروضا ليس باطول من قطرها ❊

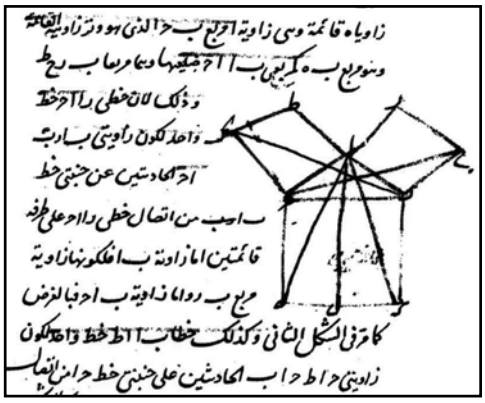
ليكن الدايرة آب ح والخط المفروض دة فنجد مركز الدايرة بالشكل الاول من الثالث وليكون نقطة ر ونرسم علي محيطها نقطة ولتكن نقطة ب ونصل بينها وبين المركز بخط مستقيم ونخرجه في جهة ر الي ان ينتهي الي نقطة ح اعني محيط جانبها الاخر محيط ب ح قطرها فان كان الخط المفروض مساويا لخط ب ح فهو المطلوب والا نفصل منه خطا يساوي خط دة بالشكل الثالث من الاولي ولتكن هو خط ح ونرسم علي نقطة ح وببعد ح ح دايرة آ ح ط فبقطع محيطها محيط دايرة آ ب ح علي نقطتي آ ط ونصل بين نقطتي آ ح بخط مستقيم فهو يقع داخل دايرة آ ب ح بالشكل الثاني من الثالثة فلان خط ح آ يساوي ح ح وكان دة يساوي ح ح فخط ح آ يساوي دة فالحكم ثابت وذلك ما اردنا ان نبين ❊

ب

كل دايرة مفروضة معلومة لنا ان نرسم فيها مثلثا يساوي كل واحدة من زواياه لنظيرتها من

٩٣





Compendio de Geometría según Euclides. **Manuscrito de Benaxraf de Samarcanda. Biblioteca del Monasterio de El Escorial.**

Los comentarios y ediciones árabes sobre *Los Elementos* de Euclides producen un debate científico en la Cultura árabe oriental que, por una parte, ejerce una gran influencia sobre el desarrollo del pensamiento matemático árabe, y por otra, desempeña un papel importante en la transmisión de la obra de Euclides al Occidente latino medieval, que en la alta Edad Media sólo había conocido *Los Elementos* a través de compilaciones de fragmentos de una antigua traducción latina posiblemente realizada por Boecio (hacia 510).

En el siglo XII aparecen dos traducciones latinas muy relevantes, la de Gerardo de Cremona, el más prolífico de los traductores de Toledo, hecha sobre la tradición de Ishaq Ibn Hunayn y la de Adelardo de Bath.

Sintetizando mucho, se pueden considerar ocho estadios en la transmisión de *Los Elementos* de Euclides. Si se puede hablar de editor en épocas tan tempranas, el primero fue Teón de Alejandría que normalizó el texto griego, del que procede la tradición central de las versiones, exposiciones y comentarios del tratado. El segundo estadio corresponde a las traducciones árabes que comienzan en el siglo IX. El tercero es el que marcan las traducciones latinas de las versiones árabes, de las que la más importante es la del filósofo escolástico inglés Adelardo de Bath que data de 1142.

El cuarto estadio consiste en la impresión de las versiones y exposiciones en latín a finales del siglo XV. La primera impresión de *Los Elementos* tiene lugar en Venecia en 1482 y se debe al impresor E.Ratdolt que recoge una versión arábigo-latina (reelaboración de la versión de Adelardo de Bath) comentada por Campano de Novara, a mediados del siglo XIII. Parece ser que este texto contiene la primera impresión de figuras geométricas en un libro de contenido matemático, realizadas mediante una tecnología *ad hoc*.

El quinto estadio tiene lugar con la edición de traducciones latinas a partir del griego, entre las que sobresalen la de Zamberti de 1505, que al traducir directamente sobre manuscritos de la tradición de Teón supone una cierta descalificación de la versión arábigo-latina de Campano impresa por Ratdolt, lo que intentará neutralizar Luca Pacioli en una versión (Venecia, 1509) que reedita a Campano. En este quinto estadio también se debe incluir la edición latina de Commandino (Pesaro, 1572), que en un proceso de depuración fija el contenido de *Los Elementos* hasta la edición de Peyrard (París, 1819) y despeja la confusión tradicional entre el verdadero autor de los Elementos y el filósofo Euclides de Megara, discípulo de Platón.

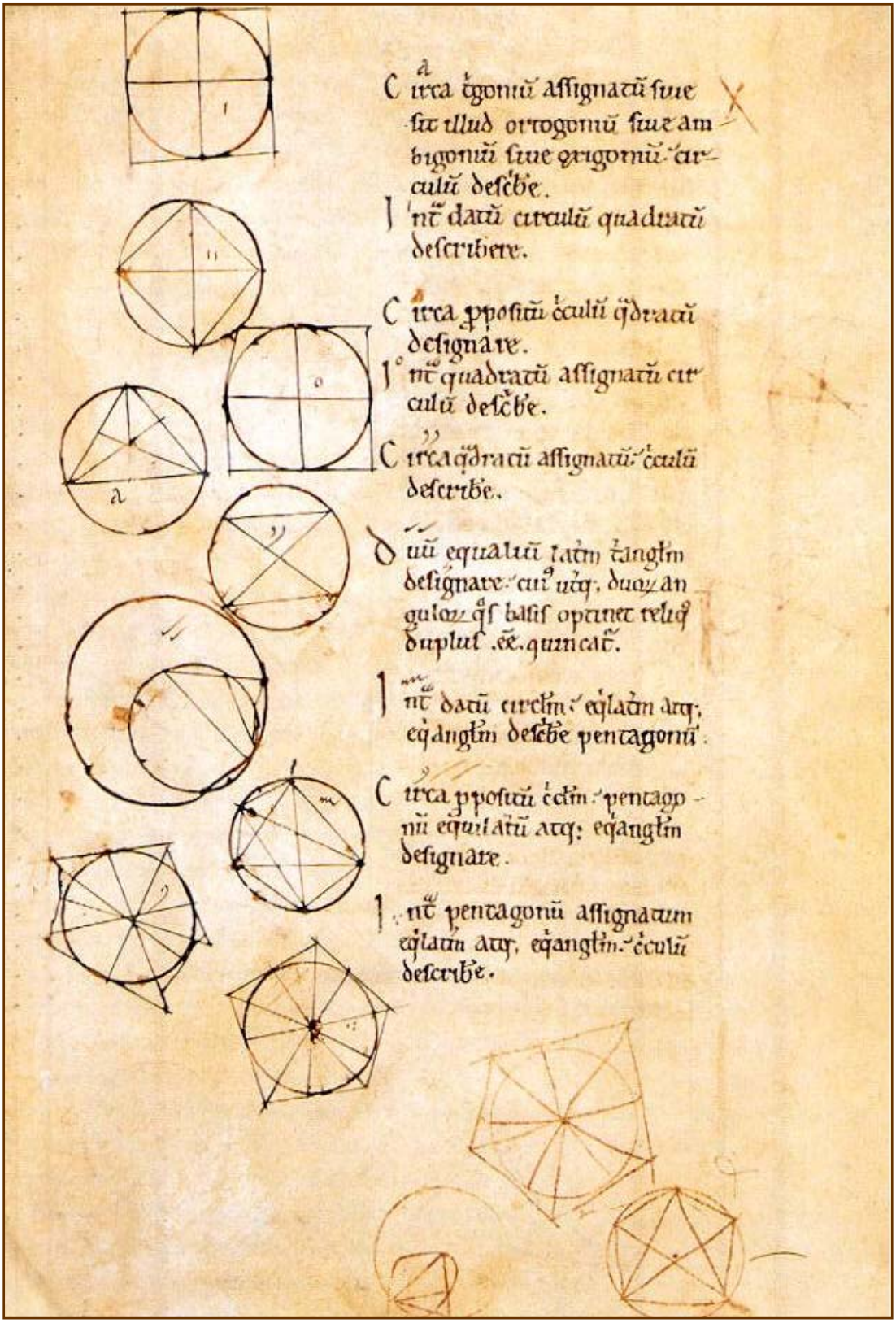
Mientras tanto se fija el texto griego, en lo que sería el sexto estadio: la *editio princeps* del propio texto griego. El editor fue S.Grynaeus *el viejo* (Basilea, 1533) con base en dos manuscritos griegos: uno de Venecia (*codex venetus marcianus* 301) y otro de París (*codex Paris* gr. 2343) que han sido identificados por J.L.Heiberg.

Al tiempo que se editaban *Los Elementos* de Euclides, una y otra vez, en griego y en latín, el séptimo estadio lo constituye, desde mediados del siglo XVI, las primeras ediciones en las lenguas vernáculas. Las más importantes citadas cronológicamente son las siguientes:

- Italiano: Tartaglia, Venecia, 1543, 1565, 1569, 1585, 1586. Commandino, Urbino, 1575.
- Alemán: J. Scheubel, Augsburg, 1555. Wilhelm Holtzman (conocido como Xylander). Basilea, 1562.
- Francés: Pierre Forcadel de Beziers, París,1565.
- Inglés: Sir Henry Billingsley, Londres, 1570.
- Español: Rodrigo Çamorano, Sevilla, 1576 .

Otras primeras ediciones en otras lenguas vernáculas son: Holandés (1602), Ruso (1739), Sueco (1744) y Danés (1745).

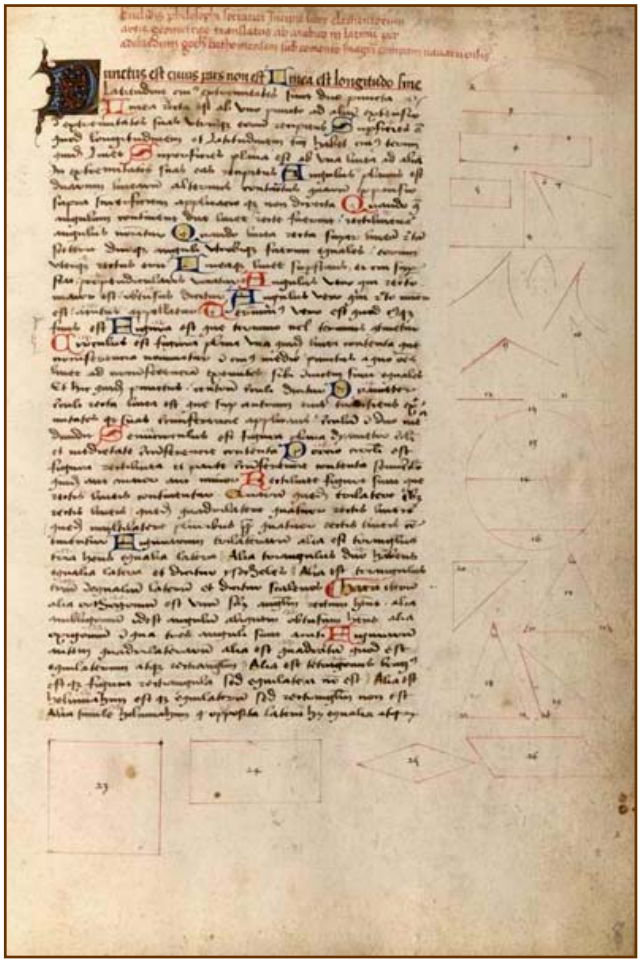
LA TRADUCCIÓN DEL ÁRABE AL LATÍN DE ADELARDO DE BATH DE *LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES*



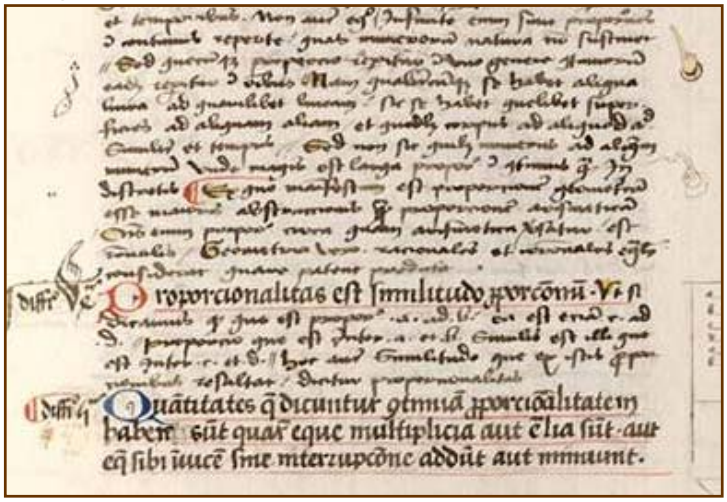
Traducción medieval del árabe al latín de una página de *Los Elementos de Euclides*, realizada por Adelardo de Bath en 1142 Las proposiciones se exponen someramente mediante diversas figuras y diagramas, y los únicos comentarios a las demostraciones se encuentran en el Libro I del manuscrito, quizá reafirmando la idea de que las enseñanzas medievales de Matemáticas se limitaban a los conocimientos más sencillos de los primeros libros de *Los Elementos*.

Adelardo de Bath realizó tres versiones de *Los Elementos* de Euclides: una traducción, un resumen comentado y un a edición integral sobre la tradición árabe de al–Haggag de la que se conservan numerosos manuscritos

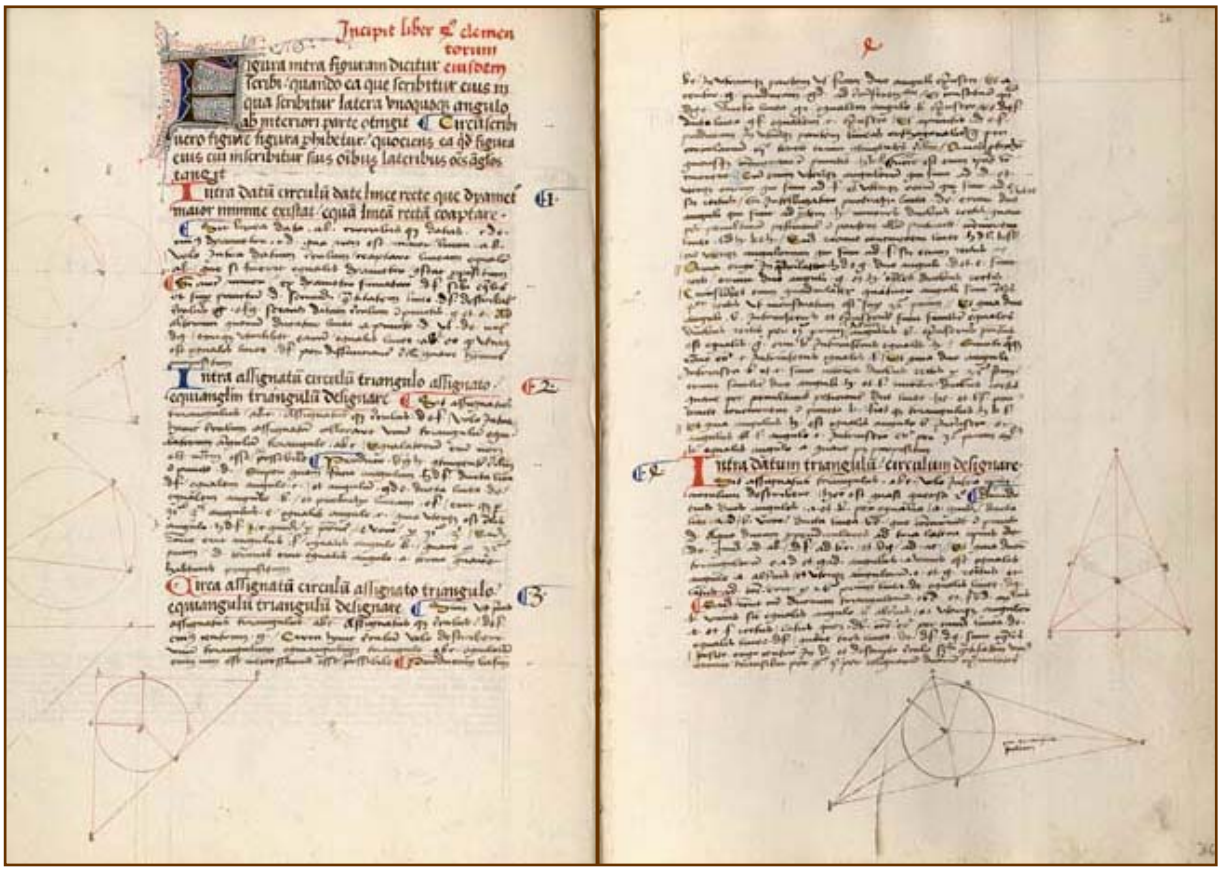
LA TRADUCCIÓN DEL ÁRABE AL LATÍN DE ADELARDO DE BATH DE *LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES*



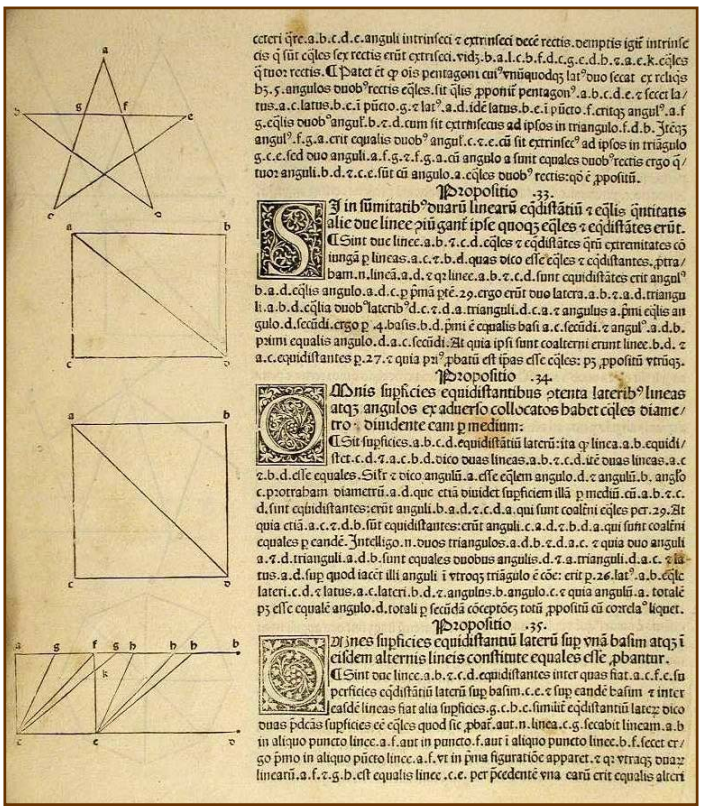
Copia manuscrita de la traducción medieval de Adelardo de Bath de *Los Elementos* de Euclides. El manuscrito fue escrito en Francia en 1480, dos años antes de la primera impresión de Ratdolt. Se conserva en la Universidad de Glasgow.



Las proposiciones y las pruebas se distinguen por el uso de dos escrituras diferentes, como se puede apreciar. Las proposiciones se escriben en un estilo y una textura más enfatizados, y las pruebas en una cursiva corriente mucho más pequeña. La evidencia del uso del manuscrito por los lectores se pone de manifiesto por la variedad de símbolos y notas empleadas como ayudas mnemotécnicas para señalar rápidamente la información significativa. Marcando el texto aquí aparece la popular mano así como un símbolo abstracto de una flor.



FAMOSAS EDICIONES IMPRESAS DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES



ceteri ẽre.a.b.c.d.e.anguli intrinseci ⁊ extrinseci decẽ rectis. demptis igit̃ intrinsecis q̃ sũt cũles sex rectis erũt extrinseci. vidz.b.a.l.c.b.f.d.c.g.c.d.b.⁊.a.e.k. cũles q̃ tuor rectis. ¶ Patet ẽt q̃ ois pentagoni cui⁹ vnũquodq; lat⁹ duo secat ex reliqs b3.5.angulos duob⁹ rectis cũles. sit q̃lis ,ppoñ pentagon⁹.a.b.c.d.e.⁊ secet latus.a.c.latus.b.c.i p̃cto.g.⁊ lat⁹.a.d.idẽ latus.b.e.i p̃cto.f.ertq; angul⁹.a.f g.cũlis duob⁹ angul⁹.b.e.d.cum sit extrinsecus ad ipsos in triangulo.f.d.b. Itẽq; angul⁹.f.g.a.erit equalis duob⁹ angul⁹.c.e.cũ sit extrinsec⁹ ad ipsos in triãgulo g.c.e.sed duo anguli.a.f.g.⁊.f.g.a.cũ angulo a sunt equales duob⁹ rectis ergo q̃ tuor anguli.b.d.⁊.c.e.sũt cũ angulo.a.cũles duob⁹ rectis: qõ é ,ppositũ.

Propositio .33.

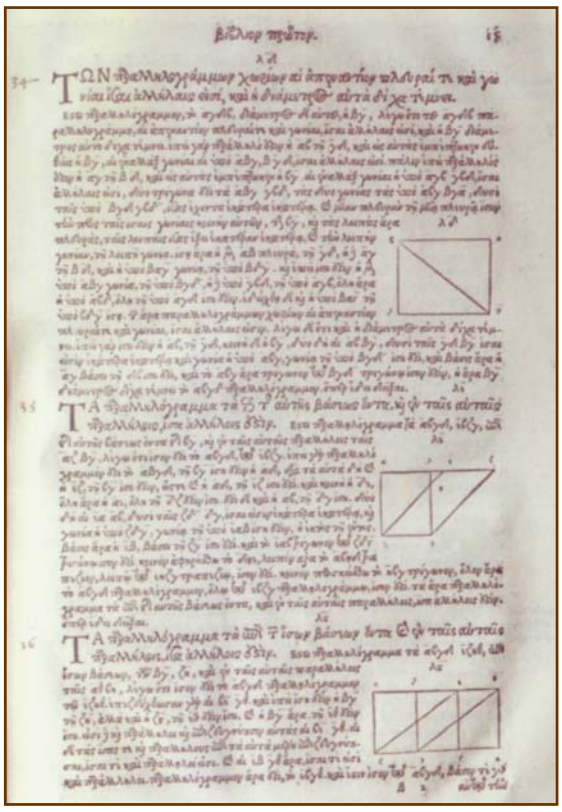
Si in sũmitatib⁹ duarũ linearũ eq̃distãtiũ ⁊ eq̃lis q̃ntitatis alie due linee p̃iũgant ipse quoq; eq̃les ⁊ eq̃distãtes erũt. ¶ Sint due linee.a.b.⁊.c.d.cũles ⁊ eq̃distãtes q̃rũ extremitates cõiungã p lineas.a.c.⁊.b.d.quas dico esse cũles ⁊ eq̃distantes. ,ptra/ bam.n.linea.a.d.⁊ q3 linee.a.b.⁊.c.d.sunt equidistãtes erit angul⁹ b.a.d.eq̃lis angulo.a.d.c.p p̃mã ptẽ.29.ergo erũt duo latera.a.b.⁊.a.d.triangu li.a.b.d.eq̃lia duob⁹ laterib⁹ d.c.⁊.d.a.trianguli.d.c.a.⁊ angulus a.p̃mi eq̃lis an gulo.d.secũdi.ergo p .4.basis.b.d.p̃mi ẽ equalis basi a.c.secũdi.⁊ angul⁹.a.d.b. p̃imi equalis angulo.d.a.c.secũdi.At quia ipsi sunt coalterni erunt linee.b.d. ⁊ a.c.equidistantes p.27.⁊ quia p̃i⁹ ,pbatũ est ipas esse cũles: p3 ,ppositũ vtrũq3.

Propositio .34.

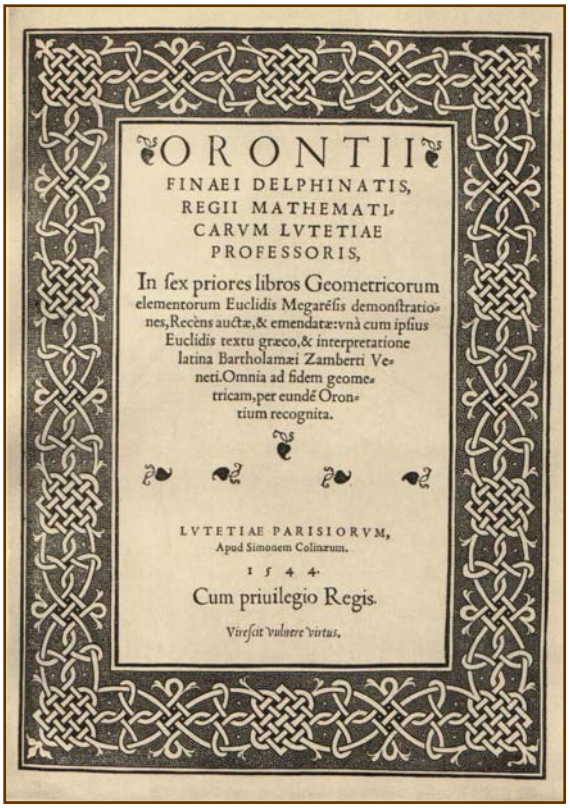
Omnis superficies equidistantibus otenta laterib⁹ lineas atq3 angulos ex aduerso collocatos habet cũles diame/ tro: diuidente eam p medium: ¶ Sit supficies.a.b.c.d. equidistãtiũ laterũ: ita q̃ linea.a.b. equidi/ stet.c.d.⁊.a.c.b.d. dico duas lineas.a.b.⁊.c.d.ut̃ duas lineas.a.c ⁊.b.d.esse equales. Sit⁊ dico angulũ.a.esse eq̃lem angulo.d.⁊ angulũ.b. angulo c.p;otraham diametrũ.a.d.que ẽtã dividet supficiem illã p mediũ.cũ.a.b.⁊.c. d.sunt eq̃distantes: erũt anguli.b.a.d.⁊.c.d.a. qui sunt coalterni eq̃les per.29.Et quia etiã.a.c.⁊.d.b.sũt equidistantes: erũt anguli.c.a.d.⁊.b.d.a. qui sunt coalterni equales p eandẽ. Intelligo.n. duos triangulos.a.d.b.⁊.d.a.c. ⁊ quia duo anguli a.⁊.d.trianguli.a.d.b.sunt equales duobus angulis.d.⁊.a.trianguli.d.a.c. ⁊ latus.a.d.sup quod iacẽt illi anguli i vtroq3 triãgulo ẽ cõe: erit p.26.lat⁹.a.b.eq̃le lateri.c.d.⁊ latus.a.c.lateri.b.d.⁊.angulus.b.angulo.c.⁊ quia angulũ.a. totale p3 esse equalẽ angulo.d.totali p secũdã cõceptõ; totũ ,ppositũ cũ corolla⁹ liquet.

Propositio .35.

Omnes supficies equidistantũ laterũ sup vnã basim i eisdem alternis lineis constitute equales esse ,pbantur. ¶ Sint duc linee.a.b.⁊.c.d.equidistantes inter quas fiat.a.c.f.c.superficies eq̃distãtiũ laterũ sup basim.c.e.⁊ sup eandẽ basim ⁊ inter easdẽ lineas fiat alia supficies.g.e.b.c.similit eq̃distantiũ laterũ dico duas pdcas supficies cẽ eq̃les quod sic ,pbaf. aut.n.linea.c.g. secabit lineam.a.b in aliquo puncto linee.a.f.aut in puncto.f.aut i aliquo puncto linee.b.f.fecet ergo p̃mo in aliquo p̃cto linee.a.f.vt in p̃ma figuratiõe apparet.⁊ q3 vtraq3 duaz linearũ.a.f.⁊.g.b.est equalis linee.c.e. per p̃cedentẽ vna earũ erit equalis alteri



1. **Página con las Proposiciones 33, 34 y 35 de la primera impresión de *Los Elementos de Euclides* (E.Ratdolt, Venecia, 1482). Ejemplar de la Biblioteca del Monasterio de San Millán de Yuso.**
2. **Página con las Proposiciones 34, 35 y 36 de la *Editio princeps* de *Los Elementos* de Euclides (S.Grynaeus *el viejo*, Basilea, 1533). Ejemplar de la Biblioteca del Monasterio de El escorial.**

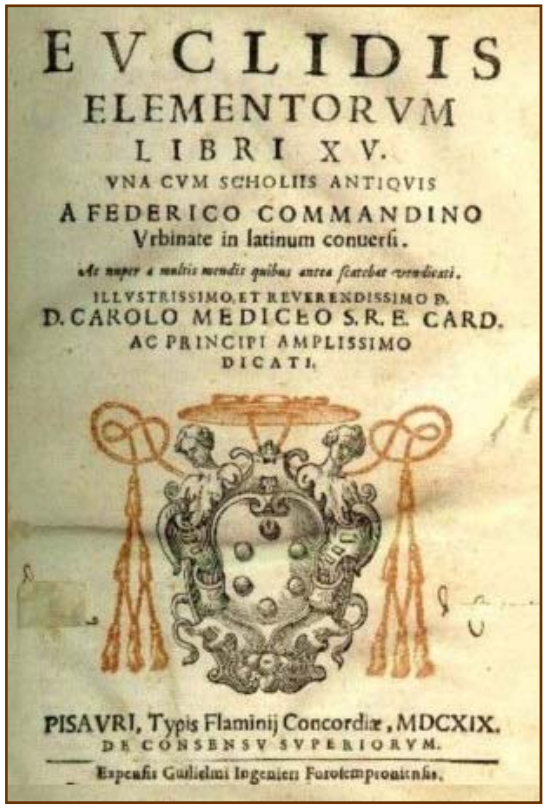


ORONTII
FINAEI DELPHINATIS,
REGII MATHEMATI.
CARVM LVTETIAE
PROFESSORIS,

In sex priores libros Geometricorum elementorum Euclidis Megarẽsis demonstrationes, Recẽns auctæ, & emendatæ: vnà cum ipsius Euclidis textu græco, & interpretatione latina Bartholamæi Zamberti Veneti. Omnia ad fidem geometricam, per eundẽ Orontium recognita.

LVTETIAE PARISIORVM,
Apud Simonem Colinæum.
1544.
Cum priuilegio Regis.

Virescit vulnere virtus.



EVCLIDIS
ELEMENTORVM
LIBRI XV.
VNA CVM SCHOLIIS ANTIQVIS
A FEDERICO COMMANDINO
Vrbinate in latinum conuersi.
Ac nuper a multis mendis quibus antea scatebat vindicati.
ILLVSTRISSIMO, ET REVERENDISSIMO D.
D. CAROLO MEDICEO S.R.E. CARD.
AC PRINCIPI AMPLISSIMO
DICATI.

PISAVRI, Typis Flaminij Concordiæ, MDCXIX.
DE CONSENSV SVPERIORVM.
Expensis Guilielmi Ingenieri Forolimpronitanis.

Ediciones en latín de *Los Elementos* de Euclides traducidos directamente del griego.
1. **Edición de Zamberti de 1544. La primera fue en 1505.**
2. **Edición de Commandino de 1619. La primera fue en 1572.**

OTRAS EDICIONES IMPRESAS DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES

Euclidis Megarensis accutissimi mathematici elementorum liber primus ex traditione Theonis Bartholameo Zāberto Uene. interp̄te ĩcipit aue foelici.

Diffinitio prima.

Signum est cuius pars nulla.

Diffinitio. ii.

Linea uero longitudo illatabilis.

Diffinitio. iii.

Lineæ autem limites sunt signa.

Diffinitio. iiii.

Recta linea ē q̄ ex æq̄li sua iteriacet signa.

Diffinitio. v.

Superficies est quę longitudinem: latitudinemque tantum habet.

Diffinitio. vi.

Superficiei extrema sunt lineæ.

Diffinitio. vii.

Plana superficies est quæ ex æquali suas interiacet lineas.

Diffinitio. viii.

Planus angulus ē: duarū linearum in plano se se tangentium: & non in dirrecto iacentium ad alterutram inclinatio.

Diffinitio. ix.

Quando autem quę angulū continent lineæ rectæ fuerint: recti lineus angulus nuncupatur.

Diffinitio. x.

Cum uero recta linea super rectam consistens lineam utrobiq; angulos æquales ad inuicem fecerit: rectus est uterq; æqualium angulorū: & quę supstat recta linea perpēdicularis uocitat' sup q̄ steterit.

Diffinitio. xi.

Obtusus angulus maior est recto.

Diffinitio. xii.

Accutus uero minor est recto.

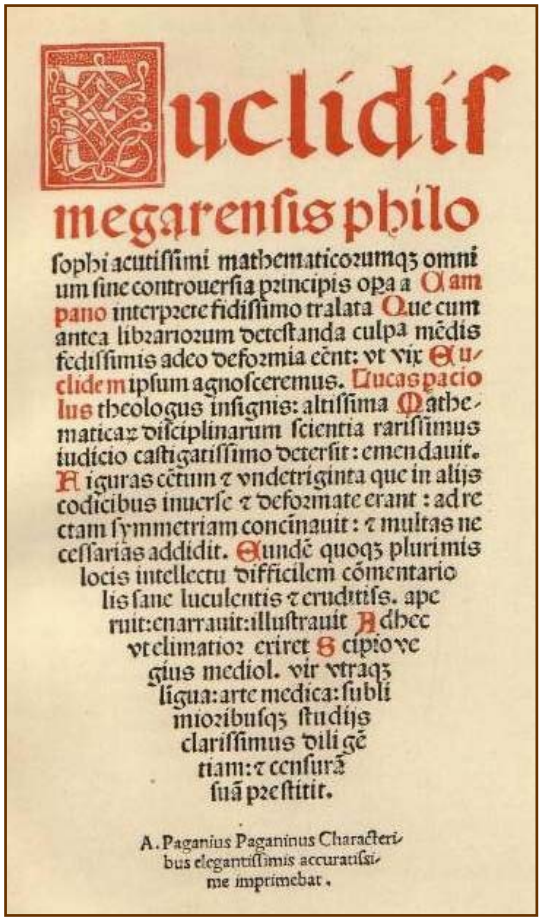
Diffinitio. xiii.

Terminus est quod cuiusq; finis est.

5. **Página con las definiciones de *Los Elementos de Euclides*, en el Folio 11 recto de la impresión de J.Tacuinus (Venecia, 1505). Es una edición latina profusamente ilustrada. Ejemplar de la Biblioteca nacional de Francia.**

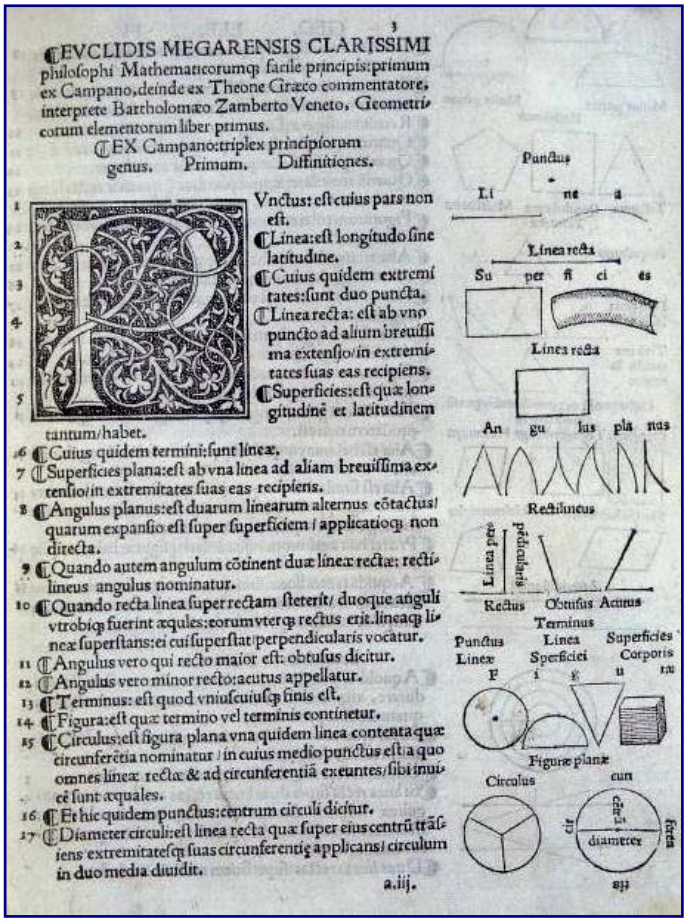
6. **Primera pagina de la edición latina de *Los Elementos de Euclides* de Paganius Paganinus (Venecia, 1509). Ejemplar de la Biblioteca de Cataluña.**

7. **Página con las definiciones de Los *Elementos de Euclides* en la edición latina de H.Stephanus. París, 1516. Ejemplar de la Biblioteca de la Universidad Complutense de Madrid (Marqués de Valdecilla).**



Euclidis megarensis philosophi acutissimi mathematicorumq; omnium sine controuersia principis opa a Campano interprete fidissimo tralata Que cum antea librariorum detestanda culpa mēdis fedissimis adeo deformia cēnt: vt vix Euclidem ipsum agnosceremus. Lucas paciolus theologus insignis: altissima Mathematicarum disciplinarum scientia rarissimus iudicio castigatissimo detersit: emendauit. Figuras cētum ⁊ vndetriginta que in alijs codicibus inuerse ⁊ deformate erant: ad rectam symmetriam concinauit: ⁊ multas necessarias addidit. Eundē quoq; plurimis locis intellectu difficilem cōmentariolis sane luculentis ⁊ eruditis. aperuit: enarrauit: illustrauit Adhec vt climatior exiret Scipio vegius mediol. vir vtraq; lingua: arte medica: sublimioribusq; studijs clarissimus diligētiam: ⁊ censurā suā prestitit.

A. Paganius Paganinus Characteribus elegantissimis accuratissime imprimebat.



3

EVCLIDIS MEGARENSIS CLARISSIMI philosophi Mathematicorumq; facile principis: primum ex Campano, deinde ex Theone Græco commentatore, interprete Bartholomæo Zamberto Veneto, Geometricorum elementorum liber primus.

EX Campano: triplex principiorum genus. Primum. Diffinitiones.

1 Punctus: est cuius pars non est.

2 Linea: est longitudo sine latitudine.

3 Cuius quidem extremitates: sunt duo puncta.

4 Linea recta: est ab vno puncto ad alium breuissima extensio/ in extremitates suas eas recipiens.

5 Superficies: est quæ longitudinē et latitudinem tantum/ habet.

6 Cuius quidem termini: sunt lineæ.

7 Superficies plana: est ab vna linea ad aliam breuissima extensio/ in extremitates suas eas recipiens.

8 Angulus planus: est duarum linearum alternus cōtactus/ quarum expansio est super superficiem/ applicatioq; non directa.

9 Quando autem angulum cōtinent duæ lineæ rectæ: rectilineus angulus nominatur.

10 Quando recta linea super rectam steterit/ duoque anguli vtrobiq; fuerint æqules: eorum vterq; rectus erit. lineaq; lineæ superstans: ei cui superstat/ perpendicularis vocatur.

11 Angulus vero qui recto maior est: obtusus dicitur.

12 Angulus vero minor recto: acutus appellatur.

13 Terminus: est quod vniuscuiusq; finis est.

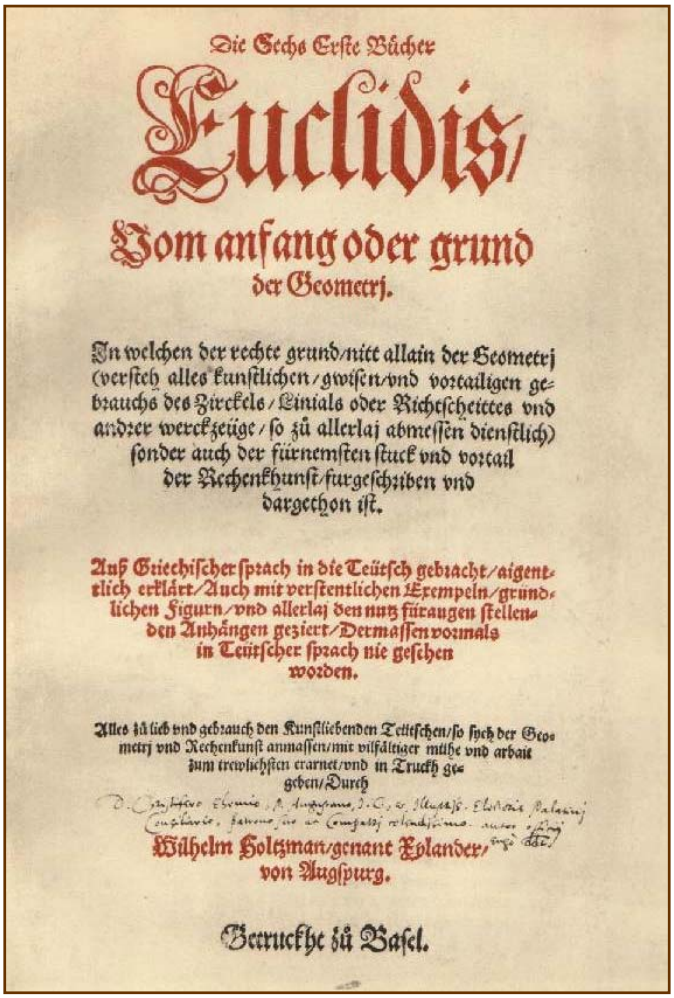
14 Figura: est quæ termino vel terminis continetur.

15 Circulus: est figura plana vna quidem linea contenta quæ circunferētia nominatur/ in cuius medio punctus est/ a quo omnes lineæ rectæ & ad circunferentiā exeuntes/ sibi inuicē sunt æquales.

16 Et hic quidem punctus: centrum circuli dicitur.

17 Diameter circuli: est linea recta quæ super eius centrū trāsiens extremitatesq; suas circunferentię applicans/ circulum in duo media diuidit.

a.iij.



Die Sechs Erste Bücher

Euclidis/

Vom anfang oder grund der Geometrj.

In welchen der rechte grund/nitt allain der Geometrj (verſteh alles kunſtlichen/gwiſen/vnd vortailigen gebrauchs des Zirckels/Linials oder Richtſcheittes vnd andrer werckzeüge/ſo zů allerlaj abmeſſen dienſtlich) ſonder auch der fürnemſten ſtuck vnd vortail der Rechenkhunſt/furgeſchriben vnd dargethon iſt.

Auß Griechiſcher ſprach in die Teütſch gebracht/aigentlich erklárt/Auch mit verſtentlichen Exempeln/gründlichen Figurn/vnd allerlaj den nutz füraugen ſtellenden Anhängen geziert/Dermaſſen vormals in Teutſcher ſprach nie geſehen worden.

Alles zů lieb vnd gebrauch den Kunſtliebenden Teütſchen/ſo ſych der Geometrj vnd Rechenkunſt anmaſſen/mit vilfáltiger mühe vnd arbait zum trewlichſten erarnet/vnd in Truckh gegeben/Durch

Wilhelm Holtzman/genant Xylander/ von Augſpurg.

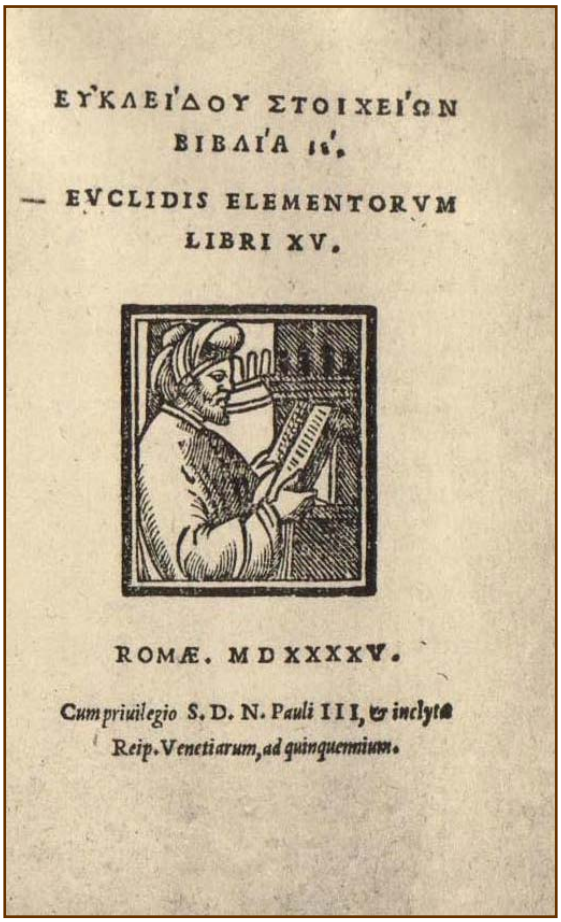
Getruckht zů Basel.

OTRAS EDICIONES IMPRESAS DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES

1. **Primera página de la edición en alemán de *Los Elementos de Euclides de* J.Kündig. Basilea, 1562.**

2. **Primera página de la edición en latín de *Los Elementos de Euclides de* A.Blado. Roma, 1545.**

3. **Primera página de la edición en latín de *Los Elementos de Euclides de* V.Bapst. Leipzig, 1549.**



ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛΙΑ ιε'.

— EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBRI XV.

ROMÆ. MDXXXV.

Cum priuilegio S. D. N. Pauli III, & inclytæ Reip. Venetiarum, ad quinquennium.

Εὐκλείδου στοιχείων βιβλία ἓξ.

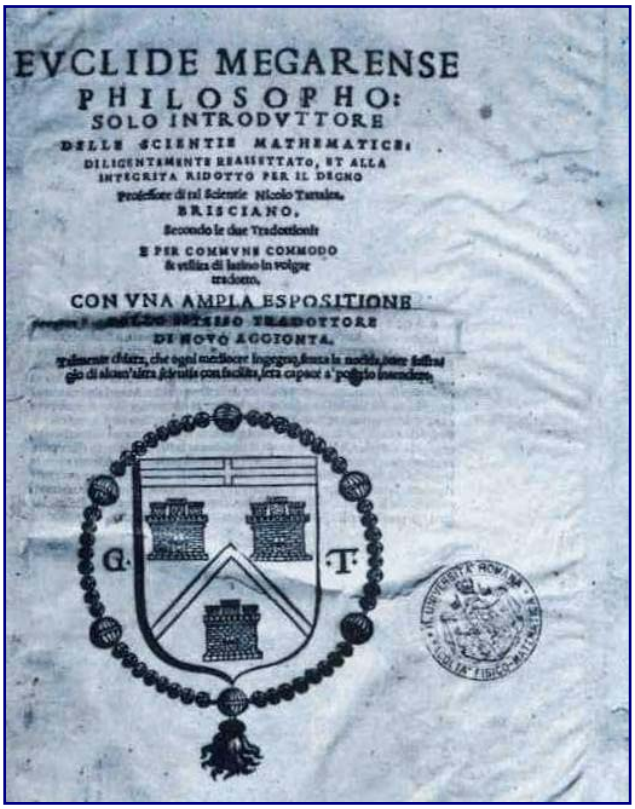
EVCLIDIS ELEMENTORVM GEOMETRICORVM LIBRI SEX, CONVERSI IN LATINVM sermonem à Ioach. Camerario.

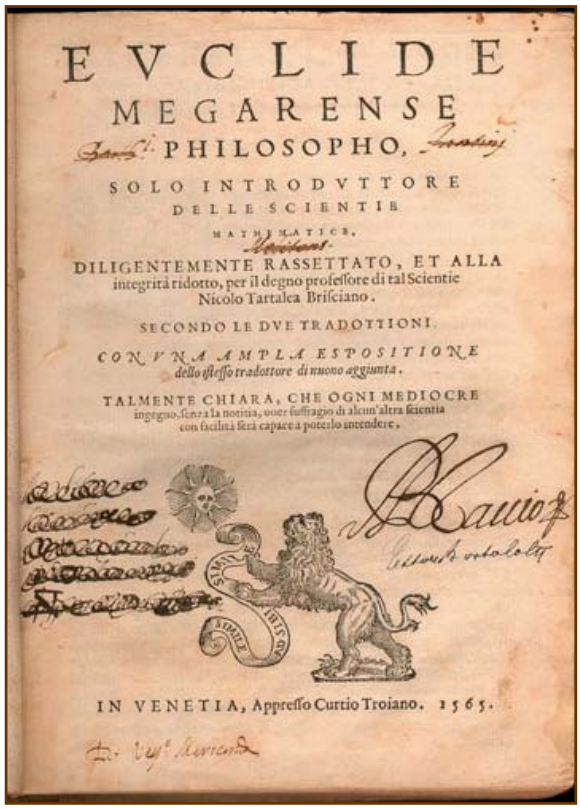
Edebat Lipsiæ Georg. Ioach. Rhet.

OBELISCVS.

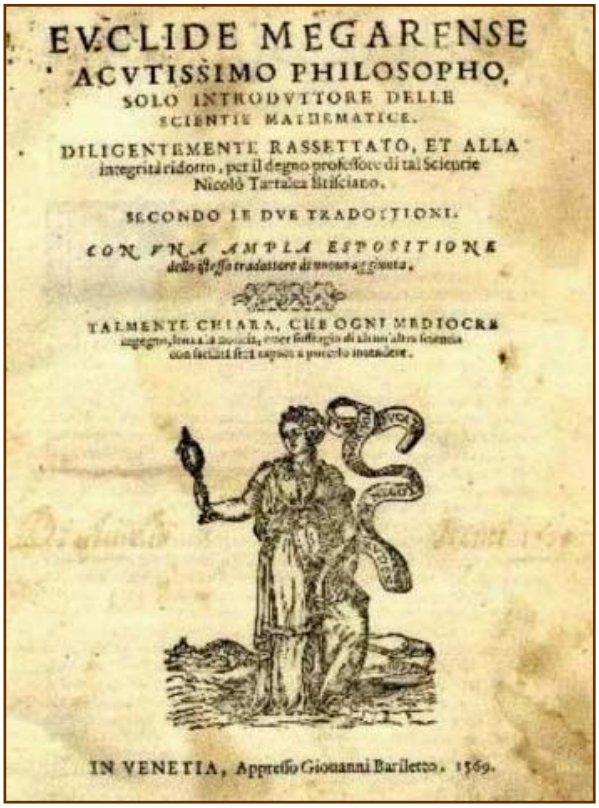
EXPRIMENTE VALENTINO PAPA. ANNO M. D. XLIX.

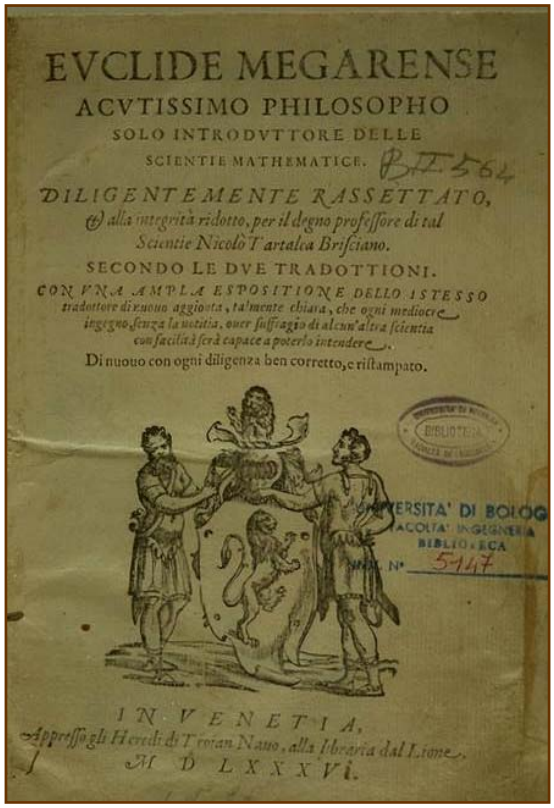
LAS PRIMERAS EDICIONES DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES EN LENGUAS VERNÁCULAS. LA EDICIÓN EN ITALIANO LAS EDICIONES DE TARTAGLIA (Venecia, 1543, 1565, 1569, 1586)


EVCLIDE MEGARENSE
PHILOSOPHO:
SOLO INTRODVTTORE
DELLE SCIENTIE MATHEMATICE:
DILIGENTEMENTE RASSETTATO, ET ALLA
INTEGRITA RIDOTTO PER IL DEGNO
Professore di tal Scientie Nicolo Tartalea.
BRISCIANO.
Secondo le due Tradottioni
E PER COMMVNE COMMODO
& vtilita di latino in volgar
tradotto.
CON VNA AMPLA ESPOSITIONE
DI NOVO AGGIONTA.

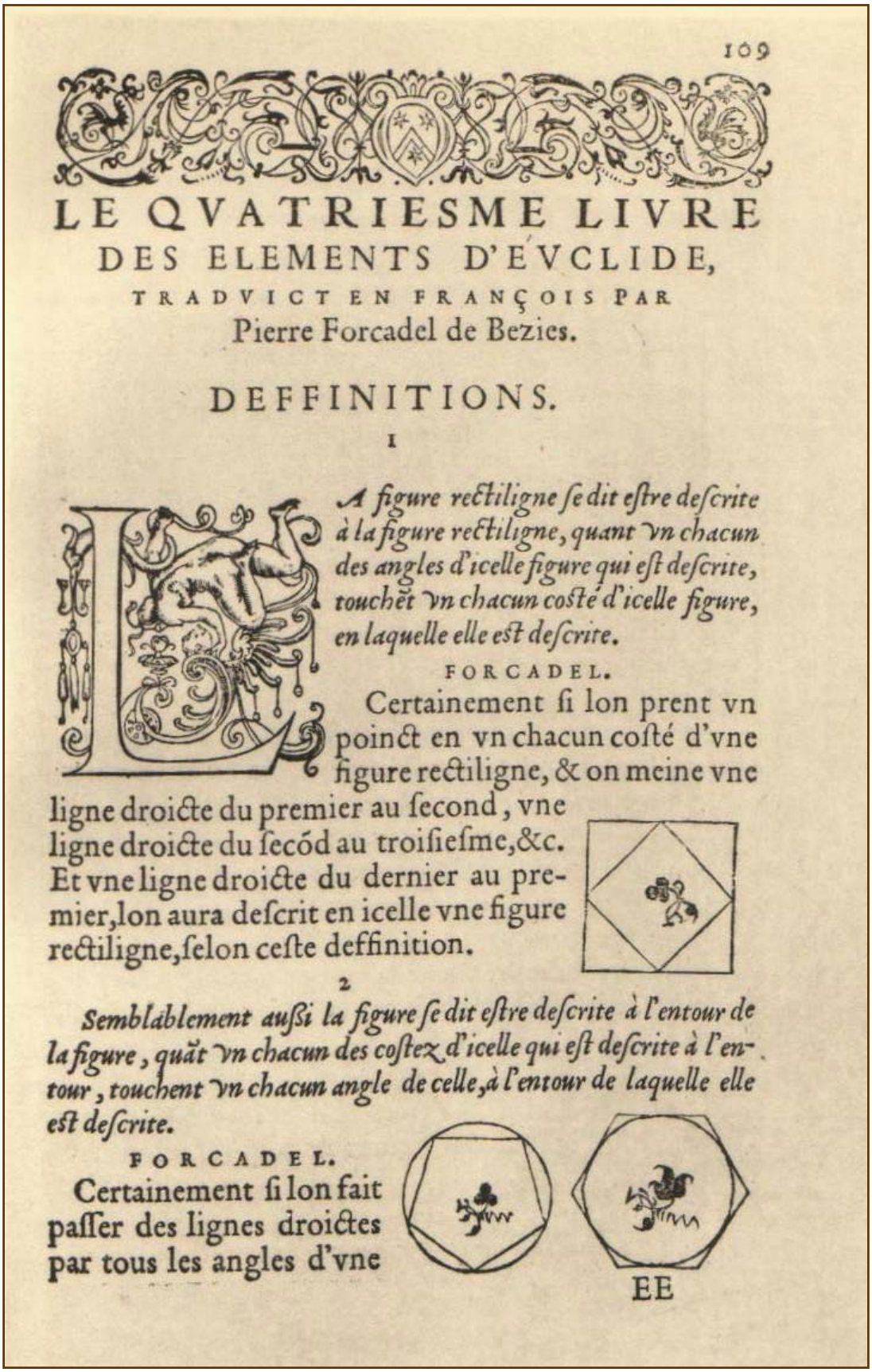

EVCLIDE
MEGARENSE
PHILOSOPHO,
SOLO INTRODVTTORE
DELLE SCIENTIE
DILIGENTEMENTE RASSETTATO, ET ALLA
integrità ridotto, per il degno professore di tal Scientie
Nicolo Tartalea Brisciano.
SECONDO LE DVE TRADOTTIONI.
CON VNA AMPLA ESPOSITIONE
dello istesso tradottore di nuouo aggiunta.
TALMENTE CHIARA, CHE OGNI MEDIOCRE
ingegno, senza la notitia, ouer suffragio di alcun'altra scientia
con facilità sarà capace à poterlo intendere.
IN VENETIA, Appresso Curtio Troiano. 1565.

Euclide Megarense philosopho solo introduttore delle scientie mathematice. Diligentemente rassettato, et alla integrità ridotto, per... Nicolò Tartalea Brisciano. Secondo le due tradottioni. Con una ampla espositione dello stesso tradottore di nuono. ...


EVCLIDE MEGARENSE
ACVTISSIMO PHILOSOPHO,
SOLO INTRODVTTORE DELLE
SCIENTIE MATHEMATICE.
DILIGENTEMENTE RASSETTATO, ET ALLA
integrità ridotto, per il degno professore di tal Scientie
Nicolò Tartalea Brisciano.
SECONDO LE DVE TRADOTTIONI.
CON VNA AMPLA ESPOSITIONE
dello istesso tradottore di nuouo aggiunta.
TALMENTE CHIARA, CHE OGNI MEDIOCRE
ingegno, senza la notitia, ouer suffragio di alcun'altra scientia
con facilità sarà capace a poterlo intendere.
IN VENETIA, Appresso Gionanni Bariletto. 1569.


EVCLIDE MEGARENSE
ACVTISSIMO PHILOSOPHO
SOLO INTRODVTTORE DELLE
SCIENTIE MATHEMATICE.
DILIGENTEMENTE RASSETTATO,
& alla integrità ridotto, per il degno professore di tal
Scientie Nicolò Tartalea Brisciano.
SECONDO LE DVE TRADOTTIONI.
CON VNA AMPLA ESPOSITIONE DELLO ISTESSO
tradottore di nuouo aggiunta, talmente chiara, che ogni mediocre
ingegno, senza la notitia, ouer suffragio di alcun'altra scientia
con facilità sarà capace a poterlo intendere.
Di nuouo con ogni diligenza ben corretto, e ristampato.
IN VENETIA,
Appresso gli Heredi di Troian Nauo, alla Libraria dal Lione.
M D LXXXVI.

LAS PRIMERAS EDICIONES DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES EN LENGUAS VERNÁCULAS. LA EDICIÓN EN FRANCÉS



109

LE QVATRIESME LIVRE
DES ELEMENTS D'EVCLIDE,
TRADVICT EN FRANÇOIS PAR
Pierre Forcadel de Bezies.

DEFFINITIONS.
1

A figure rectiligne ſe dit eſtre deſcrite à la figure rectiligne, quant vn chacun des angles d'icelle figure qui eſt deſcrite, touchet vn chacun coſté d'icelle figure, en laquelle elle eſt deſcrite.

FORCADEL.

Certainement ſi lon prent vn poinct en vn chacun coſté d'vne figure rectiligne, & on meine vne ligne droicte du premier au ſecond, vne ligne droicte du ſecód au troiſieſme,&c. Et vne ligne droicte du dernier au premier,lon aura deſcrit en icelle vne figure rectiligne,ſelon ceſte deffinition.

2

Semblablement auſsi la figure ſe dit eſtre deſcrite à l'entour de la figure, quãt vn chacun des coſtez d'icelle qui eſt deſcrite à l'entour, touchent vn chacun angle de celle,à l'entour de laquelle elle eſt deſcrite.

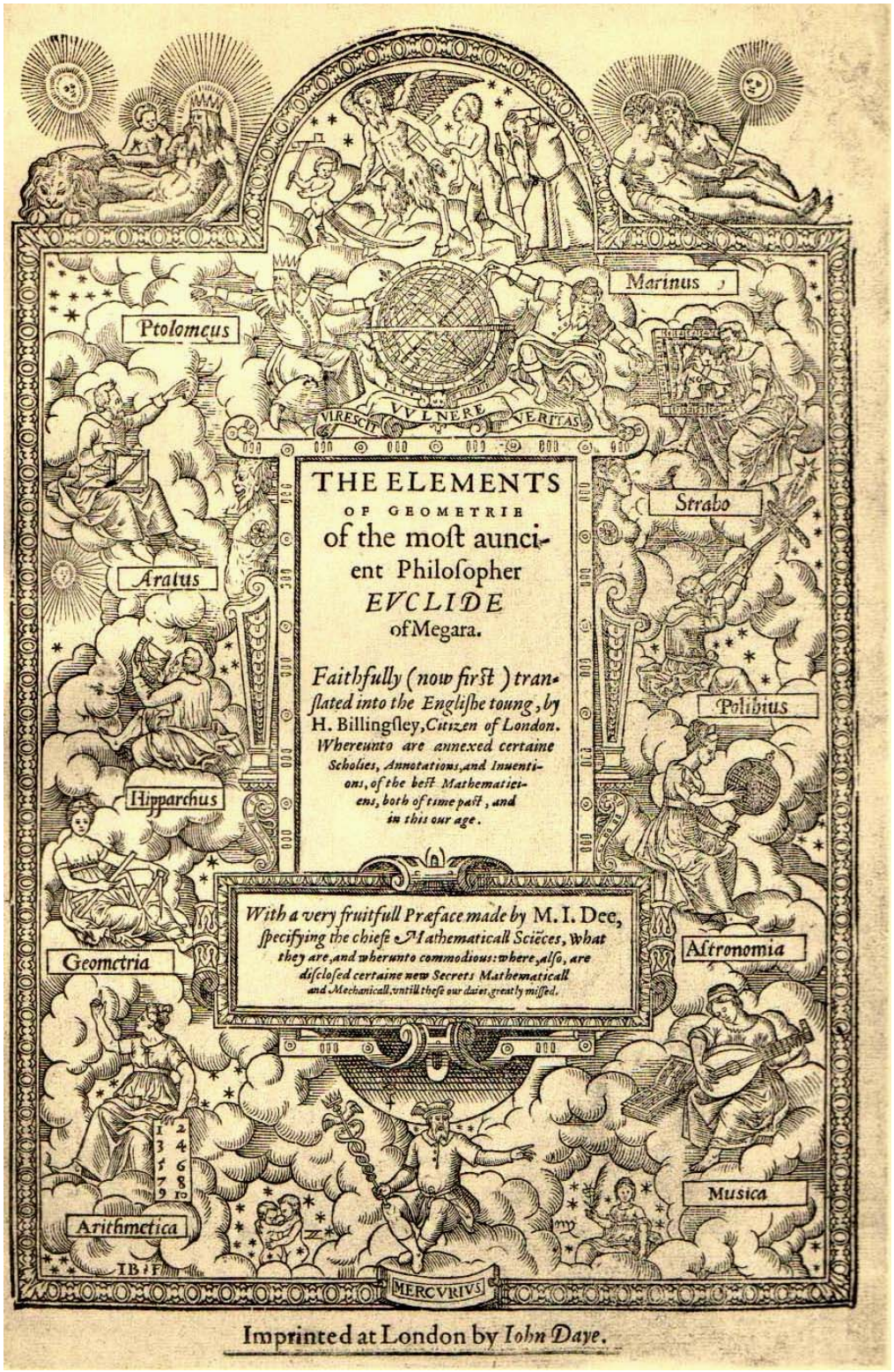
FORCADEL.

Certainement ſi lon fait paſſer des lignes droictes par tous les angles d'vne

EE

Primera página con las definiciones del Libro IV de la primera edición en francés de *Los Elementos* de Euclides (Libros I–IX). Se debe a Pierre Forcadel de Beziers (París, 1565).

LAS PRIMERAS EDICIONES DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES EN LENGUAS VERNÁCULAS. LA EDICIÓN EN INGLÉS



Frontispicio de la primera impresión en inglés (Londres, 1570) de *Los Elementos* de Euclides. Se dice que la traducción es de Sir Henry Billingsley, aunque cierta crítica histórica se la atribuye a Jhon Dee, autor del prefacio. Esta portada está profusamente ilustrada con alegorías referentes a las *Artes Liberales* del *Cuadrivium* pitagórico y a actividades de famosos geómetras y escritores clásicos.

Como anuncia el título, esta edición ofrece «*numerosos escolios, anotaciones e invenciones de los más importantes matemáticos antiguos y modernos*» y mantiene la tradicional confusión entre el autor de *Los Elementos* y el filósofo de Megara.

LAS PRIMERAS EDICIONES DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES EN LENGUAS VERNÁCULAS. LA EDICIÓN EN ESPAÑOL

LOS SEIS LIBROS
PRIMEROS DELA GEOMETRIA
DE EVCLIDES.
Traduzidos en légua Eſpañola por Rodrigo çamorano Aſtrolo
go y Mathematico, y Cathedratico de Coſmographia por
ſu Mageſtad en la caſa de la Contratació de Seuilla
Dirigidos al jlluſtre ſeñor Luciano de Negró,
Canonigo dela ſancta yglesia de Seuilla.

Con licencia del Conſejo Real.
En Seuilla en caſa de Alonſo de la Barrera.
1576.

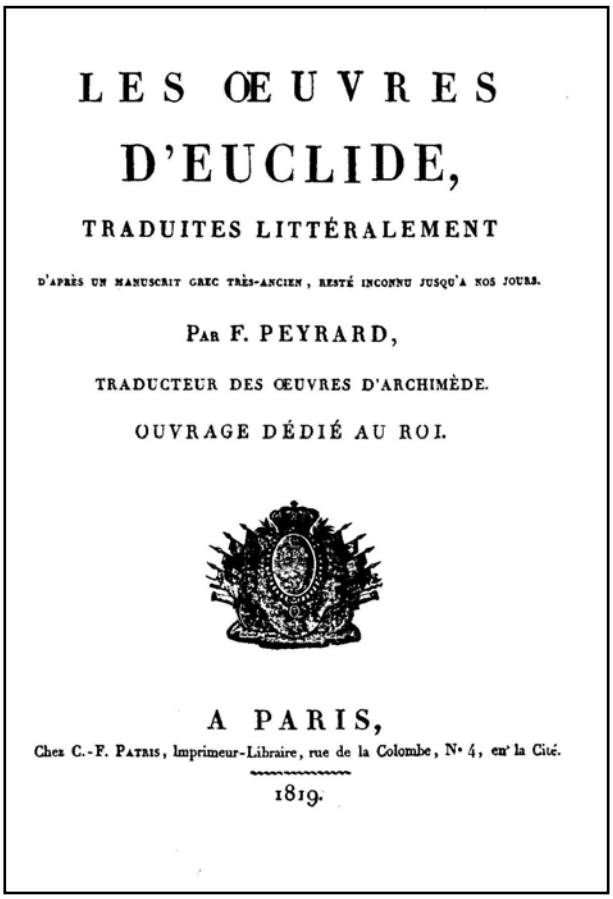
Eſta taſſado en

Primera edición en español de *Los Elementos* de Euclides. Sevilla, 1576.

El manuscrito de la primera edición en español se debe de R.Çamorano, Catedrático de Cosmografía de la Casa de Contratación de Sevilla. Contiene los seis primeros libros de *Los Elementos* de Euclides, redactados muy posiblemente a partir de la edición latina de Ratdolt. Esta edición reproduce la errónea alusión al filósofo Euclides de Megara. El manuscrito original de Çamorano se conserva en la Biblioteca Nacional de Madrid y perteneció al político catalán Pi i Margall, presidente de la primera República Española.

La edición de R.Çamorano contiene sólo los seis primeros libros de los *Los Elementos*. La primera edición completa en español no aparece hasta 1739.

A partir de la edición *princeps* en griego de Grynaeus y la edición latina de Commandino, Gregory realiza (Oxford, 1703) la primera edición completa de las Obras de Euclides en griego y en latín.



LES ŒUVRES

D'EUCLIDE,

TRADUITES LITTÉRALEMENT

D'APRÈS UN MANUSCRIT GREC TRÈS-ANCIEN, RESTÉ INCONNU JUSQU'A NOS JOURS.

PAR F. PEYRARD,

TRADUCTEUR DES ŒUVRES D'ARCHIMÈDE.

OUVRAGE DÉDIÉ AU ROI.

A PARIS,

Chez C.-F. PATRIS, Imprimeur-Libraire, rue de la Colombe, N° 4, en la Cité.

1819.

La edición de F. Peyrard de *Los Elementos* de Euclides (París 1819).

Una versión hallada en un manuscrito del siglo X (procedente de la Biblioteca Vaticana), basada en una copia anterior a Teón, fue traída por Napoleón de Roma a París. Examinada por F.Peyrard, la utilizó en su edición en francés de *Les Oeuvres d'Euclide, traduites littéralement, d'après un manuscrit grec très-ancien, resté inconnu jusqu'a nos jours* (París, 1819). J.Itard ha publicado una edición crítica de esta versión (París, Blanchard, 1966), que constituye la versión estándar en francés.

El octavo y último estadio es la edición crítica, *Euclidis Opera Omnia* (Tomos I–IV. Leipzig, 1883–86) de J.L. Heiberg y H.Menge, que por haber cotejado las restantes versiones y utilizado numerosos manuscritos, noticias, comentarios, referencias y recensiones de Pappus, Sexto Empírico, Proclo, Simplicio y otros autores, debe ser la versión más fidedigna, fijando definitivamente el texto griego tal como hoy lo conocemos. El texto de Heiberg está considerado, según opinión general, como la cumbre de la Ciencia filológica. Al texto griego le acompaña, además, una traducción latina del texto original.

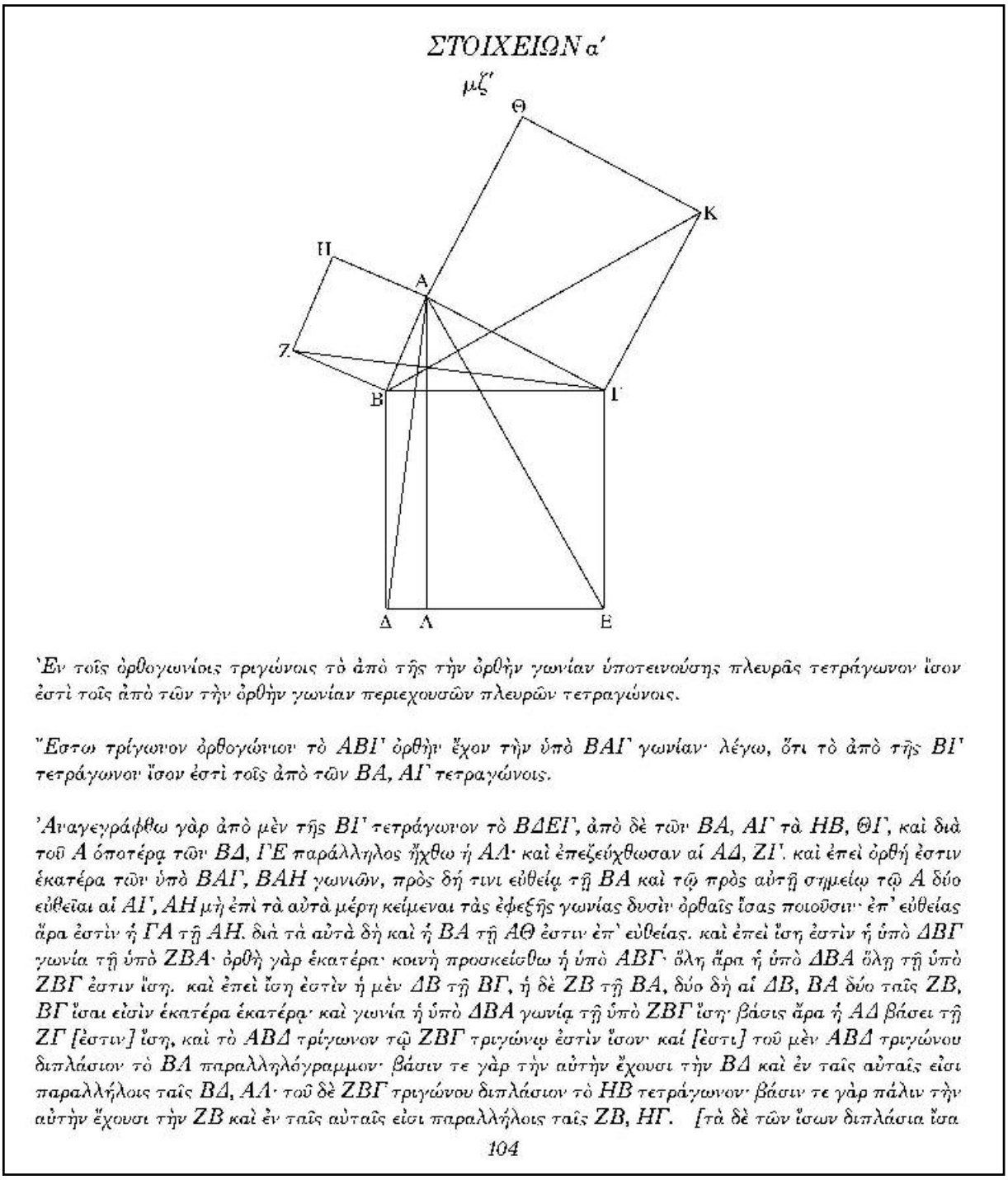
En la actualidad, la fuente más completa de información sobre *Los Elementos* de Euclides y la versión común de referencia entre los historiadores de la Matemática, tomada como la traducción estándar a partir del texto establecido por Heiberg, es la monumental obra de Sir Thomas Heath, *Euclid, the thirteen books of The Elements* (Cambridge, 1909), cuya edición de Dover (New York, 1956) en tres volúmenes, con su detallada introducción y sus copiosas y generosas notas y referencias a lo largo del texto, nos ha sido de gran utilidad.

En lengua castellana, una de las versiones más útiles de *Los Elementos* de Euclides es la edición crítica de M.L.Puertas (Gredos, Madrid, 1996), que dispone de un aparato crítico, sobre todo de carácter filológico, que nos aclara cuestiones textuales. Además, tiene una larga y magnífica introducción de Luis Vega sobre Euclides, *Los Elementos* y su transmisión en versiones y ediciones a lo largo de la historia, incluyendo las españolas.

También es muy digna de mención la edición en lengua castellana de F.Vera de *Los Elementos* de Euclides que forma parte de su enciclopédica obra *Científicos griegos* (Aguilar, Madrid, 1970), en las páginas 689-980, y cuyas frecuentes y amplias notas, sobre todo las de índole didáctica hacen más inteligible el texto euclidiano, aunque hay un manifiesto abuso de notaciones modernas.

En cuanto a la edición de F.Enriques (CSIC, Madrid, 1954), *Los Elementos de Euclides y la crítica antigua y moderna*, como reza el subtítulo contiene multitud de observaciones críticas procedentes de las principales ediciones, así como un repaso sintético de las noticias históricas sobre el origen de los teoremas, las variaciones y los aditamentos más notables que los sucesivos comentaristas han ido añadiendo. Por desgracia esta obra solo alcanza a los cuatro primeros libros de *Los Elementos*.

LA EDICIÓN CRÍTICA DE HEIBERG DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES



ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ α'

μζ'

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν· λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνοις.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ μὲν τῆς ΒΓ τετράγωνον τὸ ΒΔΕΓ, ἀπὸ δὲ τῶν ΒΑ, ΑΓ τὰ ΗΒ, ΘΓ, καὶ διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΒΔ, ΓΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΛ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΖΓ. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΒΑΗ γωνιῶν, πρὸς δή τινι εὐθείᾳ τῇ ΒΑ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΑΗ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΑ τῇ ΑΗ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΒΑ τῇ ΑΘ ἐστιν ἐπ' εὐθείας. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΒΑ· ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΑ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΒΓ, ἡ δὲ ΖΒ τῇ ΒΑ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΑ δύο ταῖς ΖΒ, ΒΓ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΒΑ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΖΓ [ἐστιν] ἴση, καὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΖΒΓ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον· καί [ἐστι] τοῦ μὲν ΑΒΔ τριγώνου διπλάσιον τὸ ΒΛ παραλληλόγραμμον· βάσιν τε γὰρ τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν ΒΔ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς ΒΔ, ΑΛ· τοῦ δὲ ΖΒΓ τριγώνου διπλάσιον τὸ ΗΒ τετράγωνον· βάσιν τε γὰρ πάλιν τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν ΖΒ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς ΖΒ, ΗΓ. [τὰ δὲ τῶν ἴσων διπλάσια ἴσα

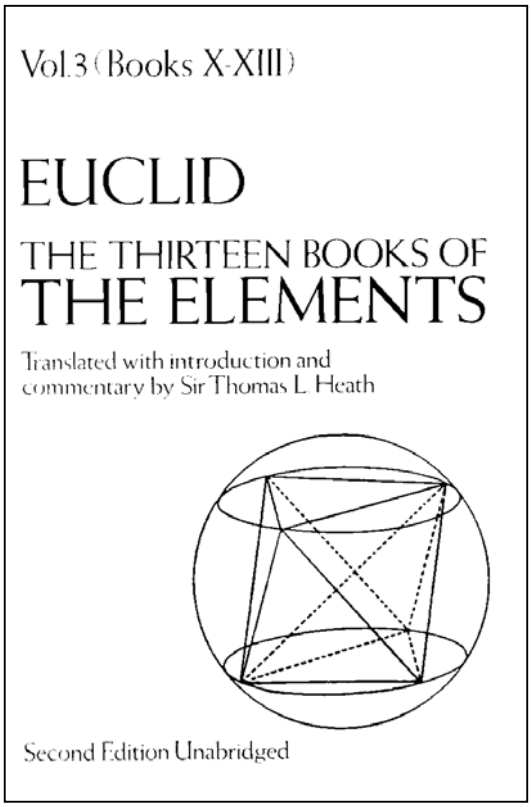
104

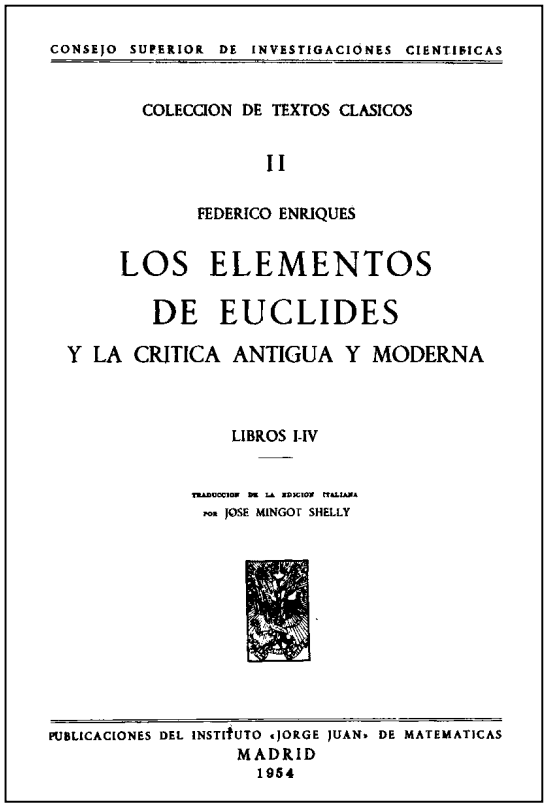
La Proposición I.47 (*Teorema de Pitágoras*) en la edición de Heiberg de *Los Elementos* de Euclides.

El texto de la edición de Heiberg de *Los Elementos* de Euclides (*Euclidis Opera Omnia*, Tomos I–IV. Elementa, Leipzig, 1883–86) se considera como el más aproximado al original. Esta edición se hizo cotejando siete manuscritos considerados principales y un palimpsesto del museo Británico. Heiberg también consultó diversas notas y escolios presentes en los comentarios y referencias de Pappus, Sexto Empírico, Proclo, Simplicio y otros. Para el abordaje de todo esta documentación, el gran helenista Heiberg pudo contar con la crítica textual de finales del siglo XIX realizando un eminente trabajo de coordinación y conciliación de las diversas tradiciones euclídeas.

La edición de Heiberg ha sido revisada por E.S.Stamatis en *Euclidis Elementa* (Leipzig, Teubneriana, 1969–73, vols. I–IV; vol. V. *Prolegomena critica, Libros XIV, XV Scholia*, Leipzig, 1977), de cuyo examen resulta la confirmación de la normalización del texto griego establecido por Heiberg.

EDICIONES MODERNAS DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES

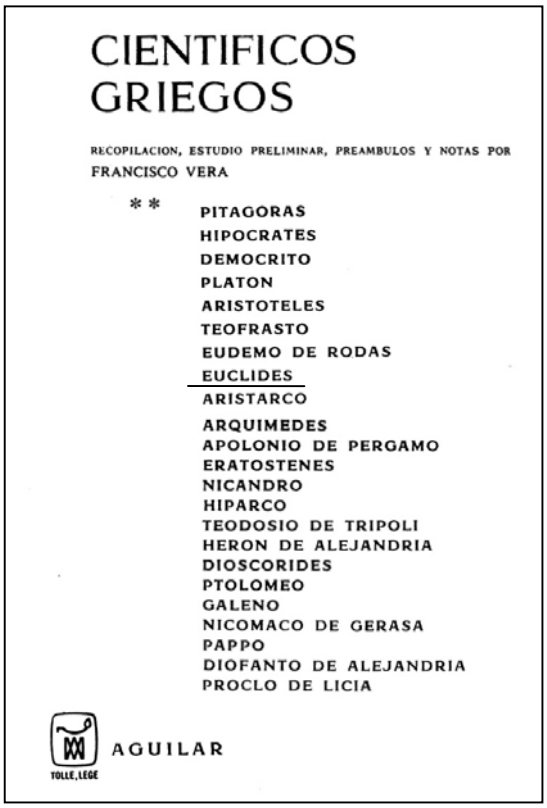


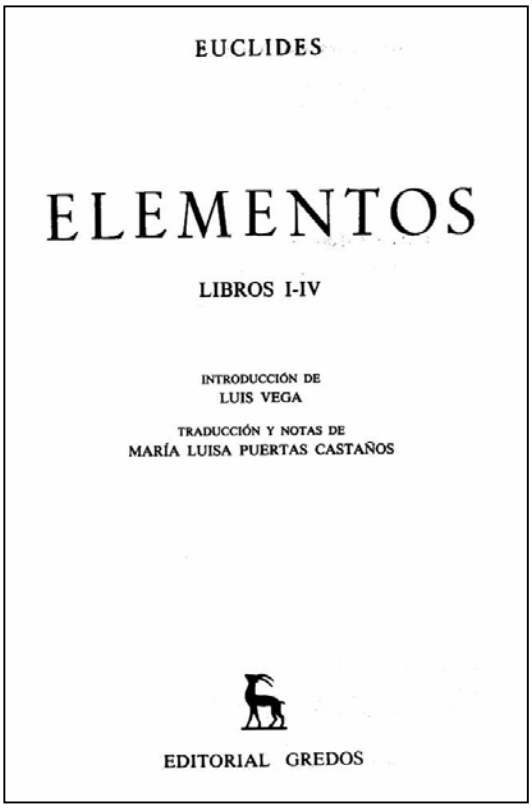


Portadas de diversas ediciones modernas de *Los Elementos* de Euclides.

1. ***Euclid, The thirteen books of The Elements*. Edición en 3 volúmenes de T.HEAT, Dover. New York, 1956.**
2. ***Los Elementos de Euclides*. Edición de F. Enriques. CSIC, Madrid. 1954.**
3. ***Elementos de Euclides*. Edición de F.Vera (en *Científicos griegos*, págs. 689-980 , Aguilar. Madrid, 1970.)**
4. ***Los Elementos* de Euclides. Edición en 3 volúmenes de M.L.Puertas. Gredos. Madrid,1996.**

Estas magníficas ediciones de *Los Elementos* de Euclides disponen de una brillante introducción y de unas generosas notas de carácter histórico, filológico y matemático, aclaratorias y extensivas del texto original que coadyuvan sobremanera a su intelección.





La dimensión escolar y el valor didáctico de *Los Elementos* de Euclides

En la introducción general de Luis Vega de la magnífica edición de *Los Elementos* de Euclides en español de la Editorial Gredos, podemos leer (p.123):

> «*Ninguna otra fuente clásica de conocimiento ha tenido una historia tan rica y variopinta de versiones, ediciones, epítomes y comentarios*. [...] *Los Elementos de Euclides, con todas sus virtudes, no fueron recibidos como un texto sagrado, sino como un patrimonio perteneciente a una tradición viva, dispuesta a mejorar y añadir lo que al parecer hiciera falta*.»

Ya desde la época de Teón en el siglo IV d.C. empiezan las modificaciones de *Los Elementos* de Euclides inspiradas en razones de orden didáctico que van reconvirtiendo la obra euclídea en multitud de manuales con funciones escolares, a base de introducir lemas en la antesala de las proposiciones, de interpolar diversos escolios, de añadir suplementos y explicaciones de algunos pasajes, todo ello con la finalidad académica de hacer el texto euclidiano más inteligible. De esta manera se van desarrollando a lo largo de toda la Historia de la Educación matemática los aspectos disciplinarios que irán metamorfoseando el Libro de Euclides en una manual básico de Geometría. Además, como libro matemático, *Los Elementos* de Euclides se han visto afectados por la evolución de la notación, es decir el alfabeto matemático, ingrediente esencial de la Matemática como soporte de los conceptos, de modo que la obra sufre la tendencia natural a normalizar el lenguaje matemático del tratado. Como escribe Luis Vega en la aludida versión de *Los Elementos* de Euclides (p.124): «[...] *Así quedo sellada su suerte histórica*].»

En la tradición escolar de la universidad medieval ocupaba un lugar privilegiado la enseñanza de *Los Elementos* de Euclides, aunque limitada sólo a los seis primeros libros de la obra, que componían la parte de Aritmética y Geometría del *Cuadrivium pitagórico*, base principal del *currículum* medieval. El estudiante del Medioevo empezaba estudiando Filosofía en los tratados de Aristóteles. Tras los estudios de Lógica y Retórica se introducía en las Matemáticas (Aritmética y Geometría), a lo que seguía ciencias físicas, tales como Astronomía y Óptica.

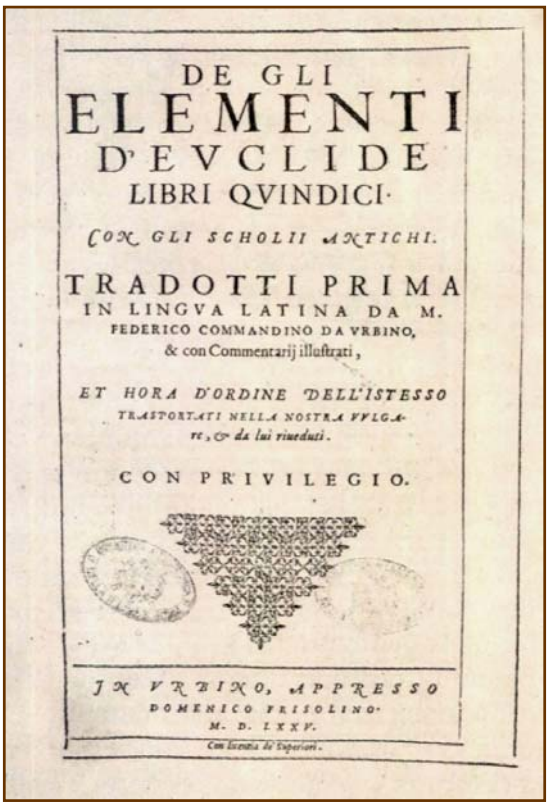
Aunque en la Edad Media los libros eran la base para el aprendizaje, eran muy caros y a menudo muy difícil de encontrar, de modo que los textos medievales en general pertenecía al maestro. La enseñanza se basaba en el dictado en lectura pública de los textos, seguido de comentarios del maestro y debate posterior de los alumnos sobre los asuntos tratados.

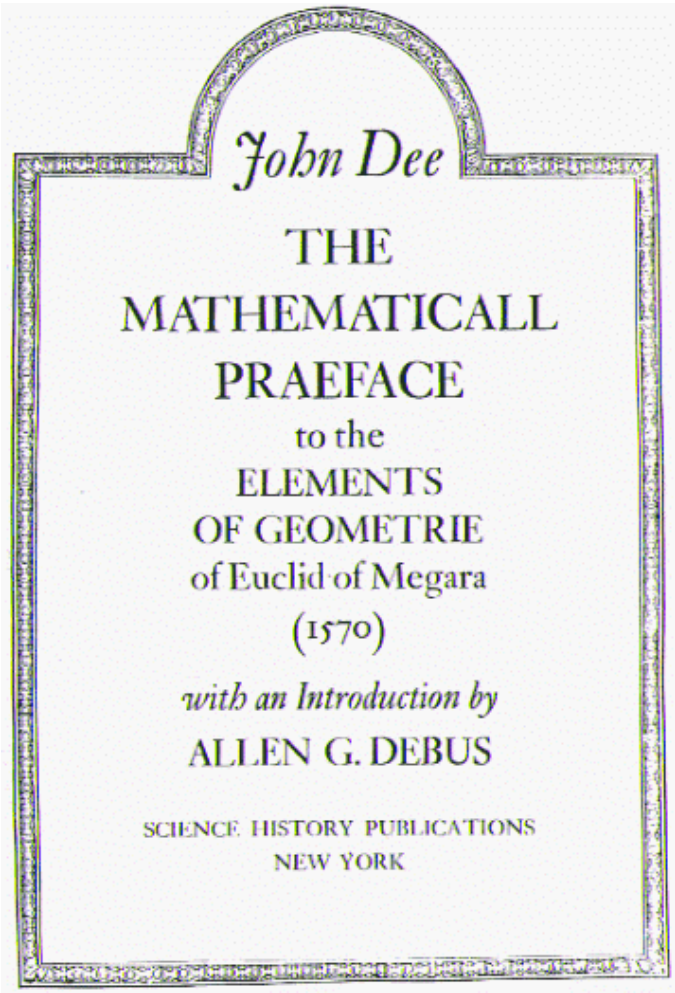
Muchas de las versiones de *Los Elementos* de Euclides sobre todo las escritas en lenguas vernáculas aparecen en el marco renacentista de la recuperación, restauración y divulgación del legado clásico y animadas por motivos prácticos y escolares derivados de las necesidades técnicas del momento e inspirados en programas de innovación cultural y educativa, a veces incluso al margen de la universidad tradicional.

Se había dicho al principio que en lenguaje actual «*Euclides es un gran maestro y su obra fundamental un Libro de Texto*». Con las ediciones vernáculas de *Los Elementos*, se generaliza, como se ha visto, la sustitución del silogismo por el «*more geometrico*» como modelo demostrativo, de modo que Euclides se convierte no sólo en Profesor de Geometría sino también y sobre todo en Profesor de Lógica. Así sucede sobre todo en la edición de Commandino, que lleva unos prolegómenos muy ilustrativos con una peculiar visión del desarrollo histórico de la Matemática y un énfasis en el rigor de las pruebas geométricas euclídeas como modelo paradigmático de la transmisión escolar del trabajo matemático.

Como contrapunto a las ideas de Commandino, digno es de mención otro prefacio euclídeo coetáneo. Se trata del *Mathematical Preface* de John Dee que antecede a la versión vernácula inglesa de Billinsgsley de 1570. Según Dee las contribuciones de los matemáticos modernos que han bebido en las fuentes euclídeas pueden compararse a las de los clásicos. Pero si Commandino destacaba de las Matemáticas ante todo el valor demostrativo apodíctico como *ars disserendi*, Dee pondera, por encima de cualquier otro valor, las capacidades heurísticas como *ars inveniendi*, tan útiles a las múltiples aplicaciones prácticas de las Matemáticas como la ingeniería, la construcción, la astronomía, la cartografía, la navegación, el comercio, la tributación, etc.

LA ESCOLARIZACIÓN DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES


DE GLI
ELEMENTI
D'EVCLIDE
LIBRI QVINDICI·
CON GLI SCHOLII ANTICHI.
TRADOTTI PRIMA
IN LINGVA LATINA DA M.
FEDERICO COMMANDINO DA VRBINO,
& con Commentarij illustrati,
ET HORA D'ORDINE DELL'ISTESSO
TRASPORTATI NELLA NOSTRA VVLGA-
re, & da lui riueduti.
CON PRIVILEGIO.
IN VRBINO, APPRESSO
DOMENICO FRISOLINO·
M. D. LXXV.

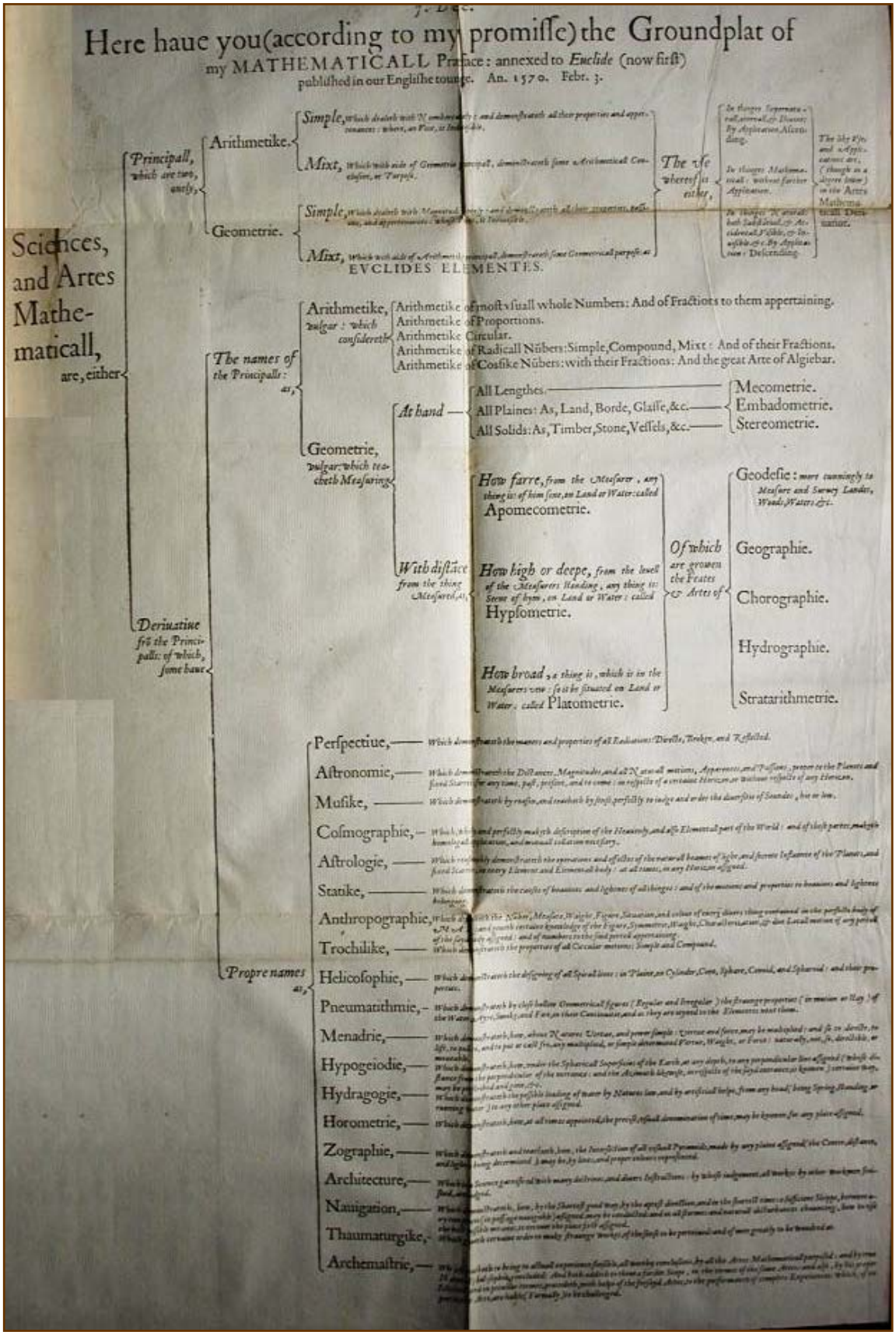

John Dee
THE
MATHEMATICALL
PRAEFACE
to the
ELEMENTS
OF GEOMETRIE
of Euclid of Megara
(1570)
with an Introduction by
ALLEN G. DEBUS
SCIENCE HISTORY PUBLICATIONS
NEW YORK

1. **La edición de Commandino, en italiano, de *Los Elementos* de Euclides (Urbino 1575).**
2. **El *Mathematical Preface* de John Dee que precede a la versión vernácula inglesa de Billinsgsley de 1570.**

Hay algunas otras ediciones de *Los Elementos* de Euclides que toman como base el texto euclidiano, pero quieren ser auténticas exposiciones didácticas de la Geometría elemental, y, en efecto, resultan ser las herederas o al menos guardan relación con la tradición académica de la universidad medieval. Una de ellas es la del jesuita alemán C.Clavius, profesor de Matemáticas en el Colegio Romano de Roma, gran inspirador de la Enseñanza de la Matemática en la época de Descartes, que incluía *La Ratio Studiorum* de los Jesuitas.

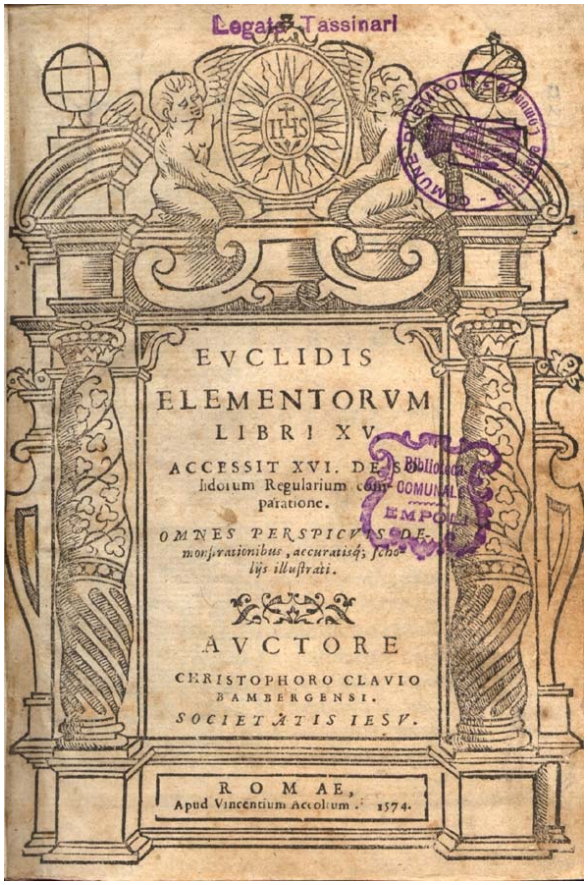
Clavius organizó un verdadero seminario de jóvenes matemáticos, destinados a proveer de profesores de Matemáticas a los colegios jesuitas. Aparte de excelente profesor, Clavius se reveló como un magnífico escritor de libros de texto: *Aritmética Práctica* (1583), *Geometría Práctica* (1604), *Álgebra* (1608), una edición comentada de la *Sphera* de Sacrobosco (1591), un compendio de Trigonometría y Astronomía ampliamente utilizado y muy encomiado por Kepler y tuvo una importante intervención en la reforma gregoriana del calendario. Clavius publica en 1574 su célebre edición de *Los Elementos de Euclides*, que tuvo reediciones en 1589, 1591, 1603, 1607, 1612 y 1674, lo que da idea de su valor. Además, a través de los viajes de los Jesuitas a Extremo Oriente, gracias a Clavius, *Los Elementos* de Euclides pudieron ser conocidos en la China y el Japón. Clavius relaciona en sus ediciones un total de 1234 proposiciones, ya que añade a las de los trece libros, los dos apócrifos y otras 671 proposiciones propias. La exposición de Clavius con su análisis y reelaboración de la Geometría de *Los Elementos* va pergeñando un modelo de exposición matemática que abre la vía de lo que hoy conocemos como Geometría Euclídea.

EL PREFACIO A LA EDICIÓN BILLINGSLEY DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES



El diagrama esquemático de las Ciencias y las Artes matemáticas del Prefacio de Jhon Dee de la edición de Billingsley de *Los Elementos* de Euclides (Londres, 1570).

LAS EDICIONES DE C.CLAVIUS DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES



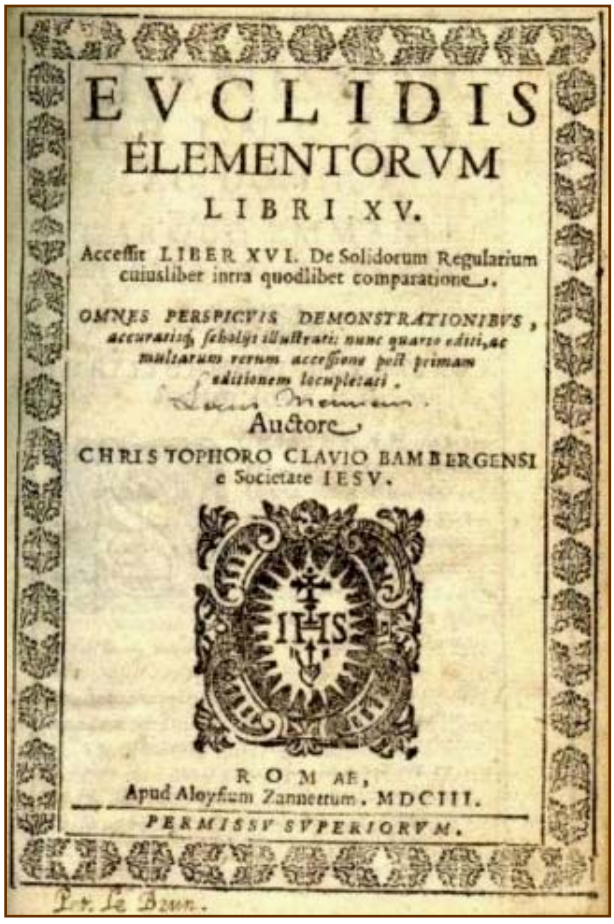
1. **Portada del Libro XV de la primera edición de C.Clavius de *Los Elementos de Euclides* (Roma, 1574).**
2. **Portada del Libro XV de la edición de 1603 de C.Clavius de *Los Elementos de Euclides.***
3. **Página de la edición anterior con la enumeración de las proposiciones del Libro I.**

Las numerosas ediciones de *Los Elementos* de Euclides de Clavius (1574, 1589, 1591, 1603, 1607, 1612 y 1674) realizan una auténtica paráfrasis y reelaboración del contenido de la obra euclídea, ya que tienen, como sus otros manuales, una verdadera finalidad claramente didáctica, actuando como *Libros de Texto*, para impartir, en los colegios de la orden de los Jesuitas, el currículum de Matemáticas de la *Ratio Studiorum*. Gracias al trabajo magistral de Clavius, el siglo de Descartes podía disponer de un Euclides, no filológicamente impecable, pero sí matemáticamente muy instructivo.

A las 486 proposiciones de los 15 libros que atribuye a Euclides (incluye los dos libros apócrifos), Clavius añade otras 748 de su propia cosecha, además de numerosos corolarios y escolios hasta alcanzar un total de 1234 proposiciones («*in universum ergo 1234 propositiones in nostro Euclide demonstrantur*»).

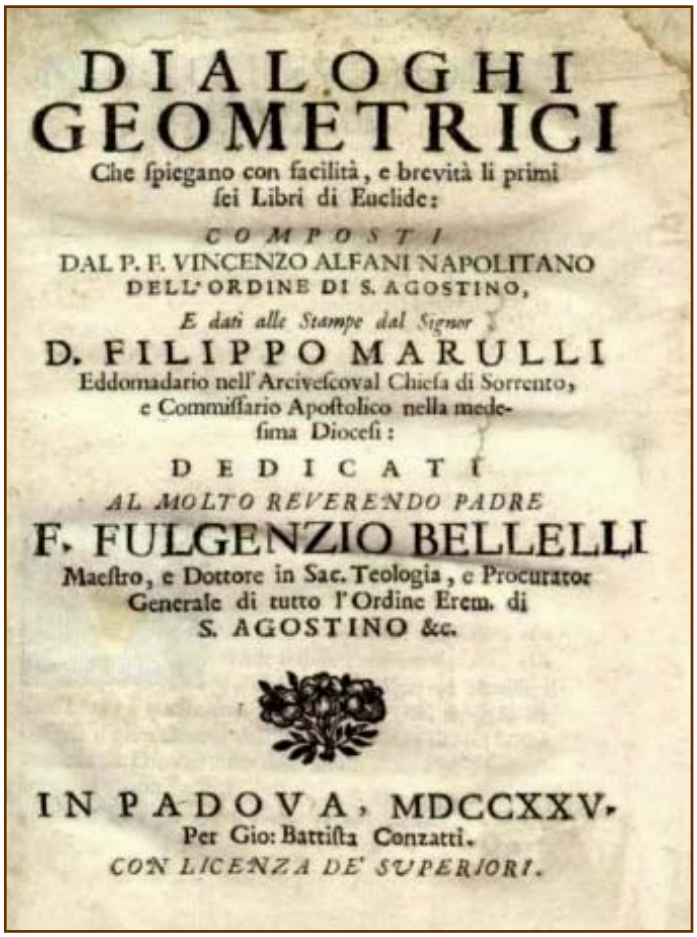
La magna empresa euclídea de Clavius tiene un inmenso valor didáctico por la ingente cantidad de material auxiliar y comentarios sustanciales que contiene. Por todo ello las ediciones de Clavius ejercieron una influencia decisiva en las subsiguientes versiones de *Los Elementos* de Euclides, durante más de doscientos años.

Clavius que fue profesor del Colegio Romano fue reconocido por sus coetáneos como el «*nuevo Euclides*».


EVCLIDIS
ELEMENTORVM
LIBRI XV.
Accessit LIBER XVI. De Solidorum Regularium cuiuslibet intra quodlibet comparatione.
OMNES PERSPICVIS DEMONSTRATIONIBVS, accuratisq; scholijs illustrati: nunc quarto editi, ac multarum rerum accessione post primam editionem locupletati.
Auctore
CHRISTOPHORO CLAVIO BAMBERGENSI e Societate IESV.
ROMAE,
Apud Aloysium Zannettum. MDCIII.
PERMISSV SVPERIORVM.

INDEX PROPOS.
PROPOSITIONES OMNIVM XVI. Librorum, quarum eas, quæ in lib. 5. 14. 15. & 16. Euclidis non sunt, quamuis in numerum propositionum relatæ sint, alio charactere expressimus.
PRIMI LIBRI.
1 VPER data recta linea terminata triangulum æquilaterum constituere.
2 AD datum punctum, datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere.
3 DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, de maiore æqualem minori rectam lineam detrahere.
4 SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, vtrumque vtrique, habeant vero & angulum angulo æqualem sub æqualibus rectis lineis contentum: Et basim basi æqualem habebunt; eritque triangulum triangulo æquale; ac reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, vterque vtrique, sub quibus æqualia latera subtenduntur.
5 ISOSCELIVM triangulorum, qui ad basim sunt, anguli inter se sunt æquales: Et productis æqualibus rectis lineis, qui sub basi sunt, anguli inter se æquales erunt.
6 SI trianguli duo anguli æquales inter se fuerint: Et sub æqualibus angulis subtensa latera æqualia inter se erunt.
7 SVPER eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, vtraque vtrique, non constituentur, ad aliud atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdemque terminos cum duabus ini-
tio

OTRAS EDICIONES ESCOLARES DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES


DIALOGHI
GEOMETRICI
Che ſpiegano con facilità, e brevità li primi
ſei Libri di Euclide:
COMPOSTI
DAL P. F. VINCENZO ALFANI NAPOLITANO
DELL' ORDINE DI S. AGOSTINO,
E dati alle Stampe dal Signor
D. FILIPPO MARULLI
Eddomadario nell' Arcivescoval Chiesa di Sorrento,
e Commissario Apostolico nella mede-
sima Diocesi:
DEDICATI
AL MOLTO REVERENDO PADRE
F. FULGENZIO BELLELLI
Maestro, e Dottore in Sac. Teologia, e Procurator
Generale di tutto l'Ordine Erem. di
S. AGOSTINO &c.
IN PADOVA, MDCCXXV.
Per Gio: Battista Conzatti.
CON LICENZA DE' SUPERIORI.

ELEMENTI GEOMETRICI
PIANI, E SOLIDI
DI EUCLIDE
POSTI BREVEMENTE IN VOLGARE
DAL REVERENDISS. PADRE ABATE
D. GUIDO GRANDI
CAMALDOLESE
PROFESSORE DI MATEMATICA
NELL' UNIVERSITA' DI PISA.
IN VENEZIA, MDCCLXXX.
Appresso PIETRO SAVIONI
Sul Ponte de' Baretteri all' Insegna della NAVE.
CON LICENZA DE' SUPERIORI, E PRIVILEGIO.

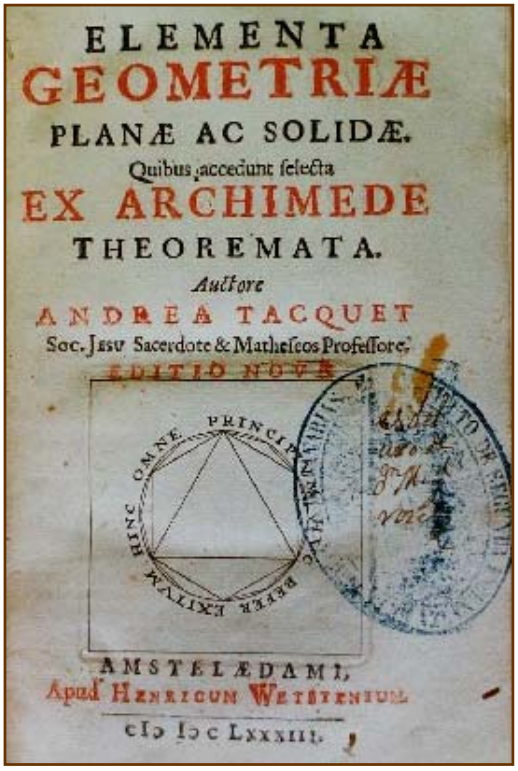
1. **F.Marulli:** ***Dialoghi geometrici che spiegano con facilità, e brevità li primi sei Libri di Euclide,*** **Padua (1725).**

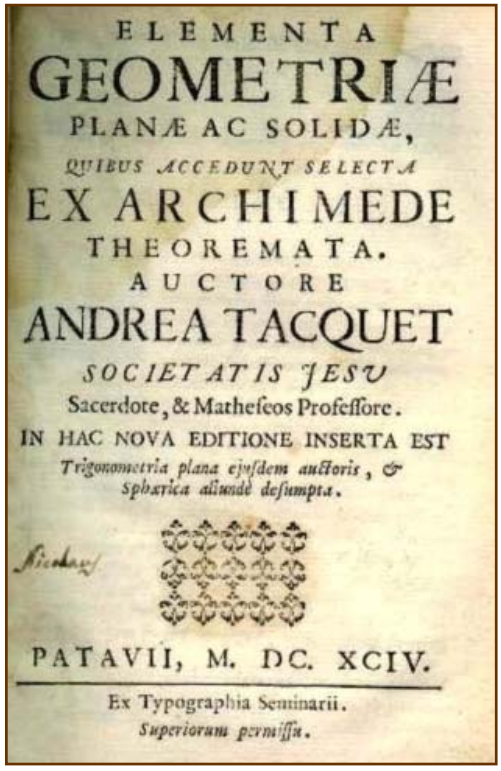
   En la Introducción de esta obra aparece una declaración de principios dirigida «*al lettore*» donde el autor dice que la obra es «*un compendio de los seis primeros libros de Los Elementos de Euclides*» que tiene la misión de facilitar la práctica de la Matemática elemental para «*favorecer el ingreso de los jóvenes en esta ciencia y en toda otra ciencia*».
2. **G. Grandi,** ***Elementi geometrici piani e solidi di Euclide,*** **Venecia (1780).**

En otras ediciones de *Los Elementos* de Euclides se apura más todavía las licencias de la paráfrasis, obviando el rigor en la traducción y la reflexión humanista sobre el significado cultural y la base filosófica, de acuerdo con la línea de los tiempos, puesto que el objetivo ya no es de índole sistematizadora y crítica sino más bien de carácter práctico, didáctico y formativo, con el propósito principal de adaptar la obra de Euclides a las demandas de dominio de la base matemática necesaria para atender la imprescindible formación científica y capacitación técnica, exigidas sobre todo por la construcción y la ingeniería civil y militar.

Entre las ediciones de esta índole sobresale *Elementa Geometriae Planae ac Solidae* de A.Tacquet, publicada en (1654), que por su alto nivel ejerció una considerable influencia con una gran difusión que llegó acumular hasta 20 reediciones. El jesuita belga A.Tacquet fue Profesor de Matemáticas en Lovaina y Amberes. Tanto sus ediciones de *Los Elementos* de Euclides como otros numerosos y excelentes tratados de Matemáticas elementales fueron utilizados, como libros de texto para la Orden.

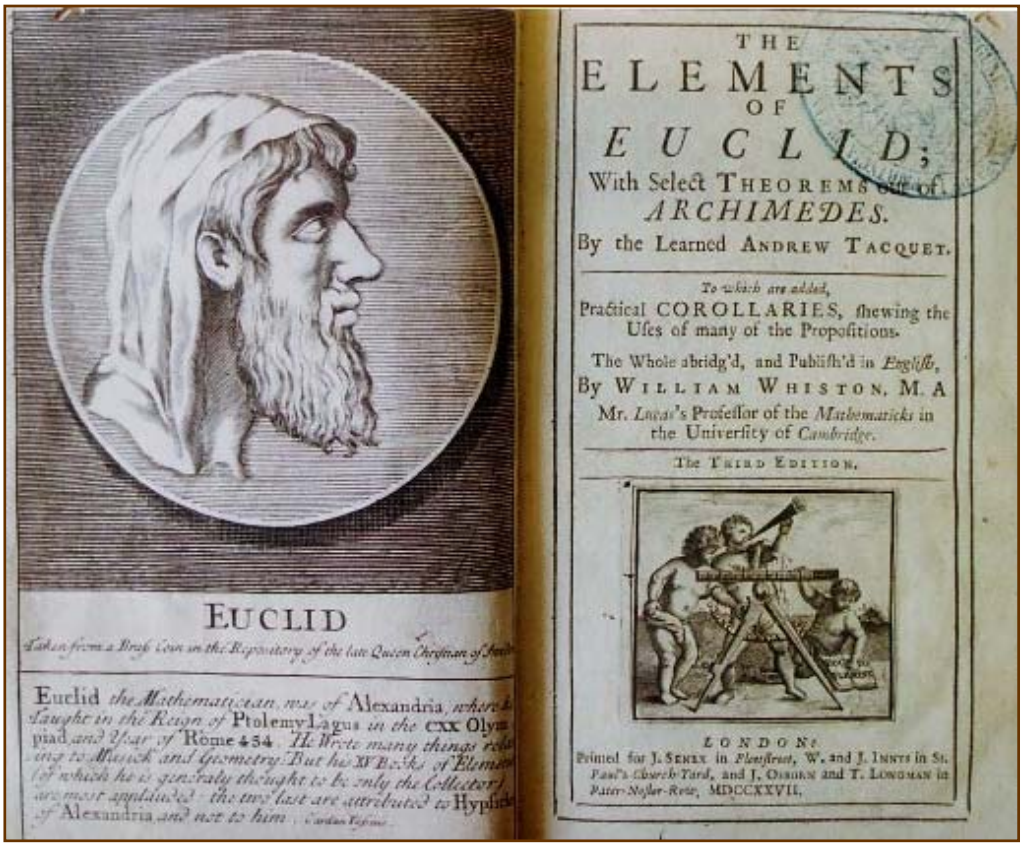
LAS EDICIONES DE A.TACQUET DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES


ELEMENTA
GEOMETRIÆ
PLANÆ AC SOLIDÆ.
Quibus accedunt selecta
EX ARCHIMEDE
THEOREMATA.
Auctore
ANDREA TACQUET
Soc. Jesu Sacerdote & Matheseos Professore.
EDITIO NOVA
AMSTELÆDAMI,
Apud HENRICUM WETSTENIUM
cIↃ IↃ c Lxxxiii.

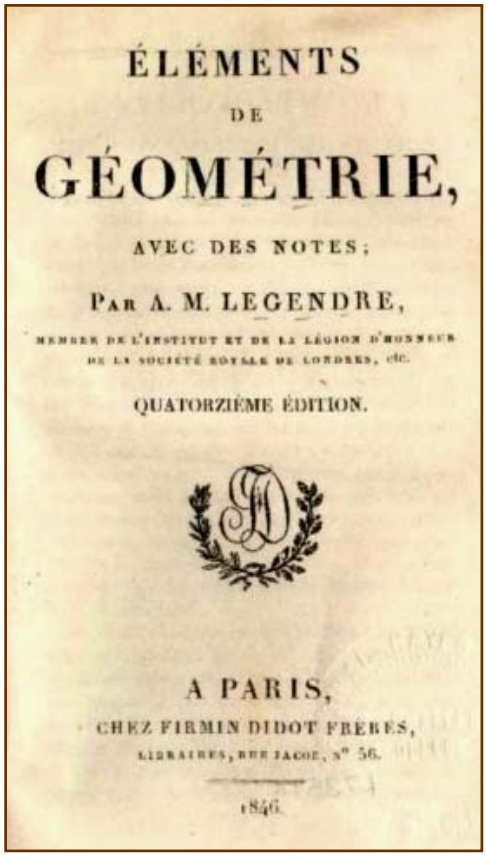

ELEMENTA
GEOMETRIÆ
PLANÆ AC SOLIDÆ,
QUIBUS ACCEDUNT SELECTA
EX ARCHIMEDE
THEOREMATA.
AUCTORE
ANDREA TACQUET
SOCIETATIS JESU
Sacerdote, & Matheseos Professore.
IN HAC NOVA EDITIONE INSERTA EST
Trigonometria plana ejusdem auctoris, & Sphærica aliunde desumpta.
PATAVII, M. DC. XCIV.
Ex Typographia Seminarii.
Superiorum permissu.

1. *Elementa geometriae planae* **(Padua, 1694).**
2. *Elementa Geometriae Planae et Solidae* **Amsterdam (1683).**
3. *The elements of Euclid* **(Londres, 1727).**

Estas ediciones de *Los Elementos* de Euclides que contienen, además, diversos teoremas de Arquímedes, son verdaderos manuales académicos que realizan una escolarización del texto euclidiano para su adaptación didáctica a las necesidades prácticas de formación científica e instrucción técnica de los profesionales, con fundamento en una determinada base matemática.


EUCLID
THE
ELEMENTS
OF
EUCLID;
With Select THEOREMS out of
ARCHIMEDES.
By the Learned ANDREW TACQUET.
To which are added,
Practical COROLLARIES, shewing the Uses of many of the Propositions.
The Whole abridg'd, and Publish'd in English,
By WILLIAM WHISTON, M. A
Mr. Lucas's Professor of the Mathematicks in the University of Cambridge.
The THIRD EDITION.
LONDON:
Printed for J. SENEX in Fleetstreet, W. and J. INNYS in St. Paul's Church-Yard, and J. OSBORN and T. LONGMAN in Pater-Noster-Row, MDCCXXVII.

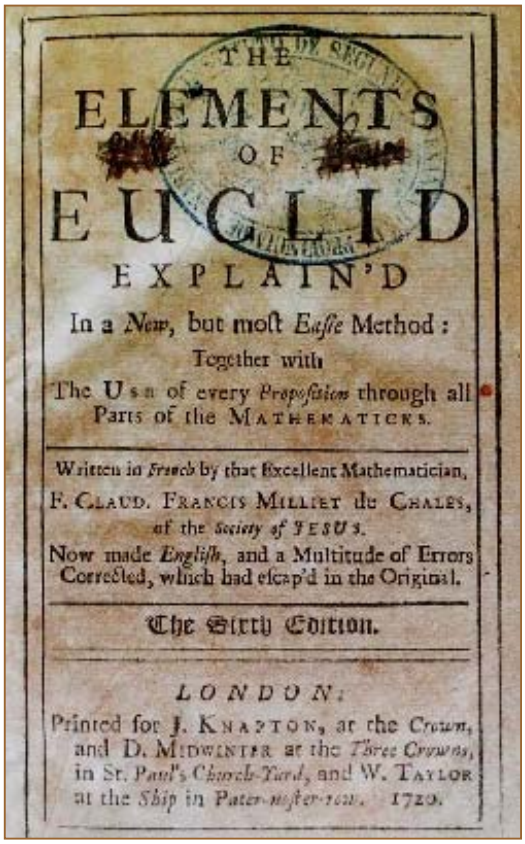
La divulgación de partes del contenido de *Los Elementos* de Euclides, que interesaban a las necesidades prácticas, conduce a una progresiva simplificación y escolarización del texto euclidiano, tras múltiples procesos de paráfrasis, adecuación, aclaración, reducción y compendio, que desbaratan más o menos los propósitos originales y seculares de las múltiples ediciones anteriores, pero lo adaptan positivamente a las necesidades académicas de la Escuela, en un proceso imparable en el que la introducción de los poderosos algoritmos del Álgebra, la Geometría Analítica y el Cálculo Infinitesimal, transforman la faz de la Matemática, con el correspondiente reflejo en la transmisión didáctica del conocimiento matemático.


ÉLÉMENTS
DE
GÉOMÉTRIE,
AVEC DES NOTES;
PAR A. M. LEGENDRE,
MEMBRE DE L'INSTITUT ET DE LA LÉGION D'HONNEUR
DE LA SOCIÉTÉ ROYALE DE LONDRES, etc.
QUATORZIÈME ÉDITION.
A PARIS,
CHEZ FIRMIN DIDOT FRÈRES,
LIBRAIRES, RUE JACOB, N° 56.
1846.

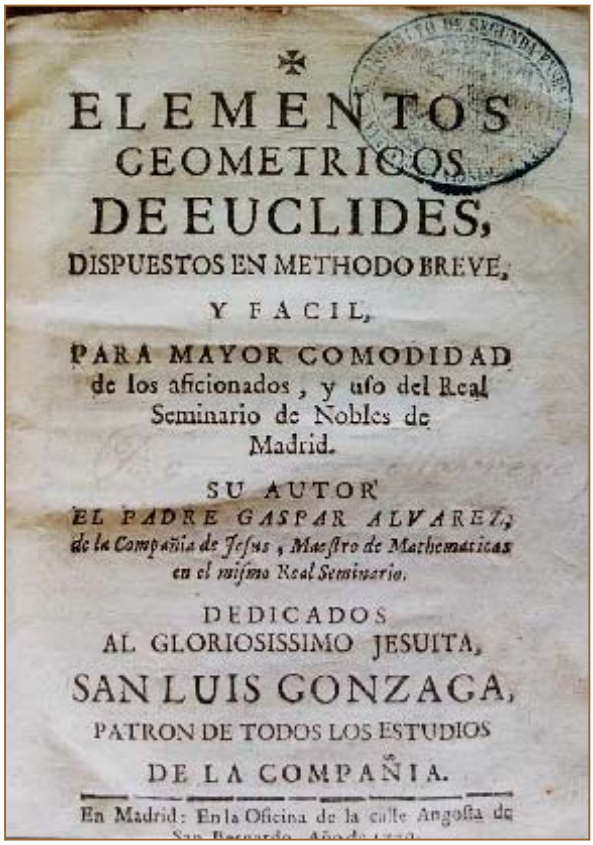
***Éléments de Géométrie* de A.M.Legendre, (París, 1846, XIV edición).**

Por fortuna, todavía algunas importantes figuras matemáticas como Legendre valoraban las cualidades intelectuales de la obra de Euclides para intentar resucitarlas en su obra *Éléments de Géométrie* de 1794. Como dice en el prólogo, su finalidad es presentar una Geometría que «*dé satisfacción al espíritu*». Legendre escribe que su objeto era «*componer unos Elementos de Geometría muy rigurosos*». La obra de Legendre fue concebida como Libro de texto con el afán didáctico de facilitar la comprensión de las ideas clásicas euclidianas a los estudiantes de su época. Mediante un viraje hacia el rigor lógico y la demostración, aunque sin desdeñar la aplicación de consideraciones intuitivas a la deducción de los teoremas geométricos –cada paso lógico está evidenciado intuitivamente–, Legendre realiza algunas modificaciones sobre la obra de Euclides, que al introducir de forma consciente ciertos recursos de Aritmética y de Álgebra, ajenos a *Los Elementos*, facilitan la intelección del texto sin alterar la materia geométrica. El libro de Legendre dominó la enseñanza de la Geometría durante más de cien años y tuvo hasta veinte ediciones en vida de su autor –después de los propios *Los Elementos* de Euclides es el libro de Geometría más difundido–, incorporando en cada una de ellas, en un segundo nivel de lectura, los nuevos resultados geométricos que iban apareciendo.

En la línea didáctica de hacer todo lo inteligible que se pueda y facilitar el aprendizaje de los teoremas del texto euclidiano, uno se puede encontrar versiones de *Los Elementos* de Euclides para todos los gustos. Pero sin duda una de las más originales y curiosas es la publicada en Londres (1847) por el matemático Oliver Byrne, cuyo largo título explicativo es bien descriptivo de su naturaleza, *The first six books of the Elements of Euclid, in which coloured diagrams and symbols are used instead of letters for the greater ease of learners* (véase el anexo con algunas de las más importantes proposiciones de esta edición desde el punto de vista escolar y didáctico). Es realmente una edición inusual y muy atractiva que cubre los seis primeros libros, es decir, la Geometría Plana elemental y las Teorías de la Proporción y de la Semejanza. En esta versión se utiliza muy poco texto, la literatura matemática imprescindible, porque su mayor parte ha sido sustituida por ilustraciones coloreadas que son verdaderos diagramas explicativos de las construcciones de Euclides, en los que juega un papel fundamental no sólo la forma sino sobre todo el color. La edición de Byrne es seguramente lo más alejado del idealismo del espíritu platónico que intentaba plasmar Euclides en *Los Elementos*, pero tiene un alto valor didáctico, casi de Geometría empírica, que nos retrotrae a la Escolástica medieval en el sentido de la necesidad de la percepción como antesala del entendimiento.



THE
ELEMENTS
OF
EUCLID
EXPLAIN'D
In a *New*, but moſt *Eaſie* Method:
Together with
The Uſe of every *Propoſition* through all
Parts of the MATHEMATICKS.
Written in *French* by that Excellent Mathematician,
F. CLAUD. FRANCIS MILLIET de CHALES,
of the *Society of* JESUS.
Now made *Engliſh*, and a Multitude of Errors
Corrected, which had eſcap'd in the Original.
The Sixth Edition.
LONDON:
Printed for J. KNAPTON, at the *Crown*,
and D. MIDWINTER at the *Three Crowns*,
in St. *Paul's Church-Yard*, and W. TAYLOR
at the *Ship* in *Pater-noſter-row*. 1720.



ELEMENTOS
GEOMETRICOS
DE EUCLIDES,
DISPUESTOS EN METHODO BREVE,
Y FACIL,
PARA MAYOR COMODIDAD
de los aficionados, y uſo del Real
Seminario de Nobles de
Madrid.
SU AUTOR
EL PADRE GASPAR ALVAREZ,
de la Compañia de Jeſus, Maeſtro de Mathematicas
en el miſmo Real Seminario.
DEDICADOS
AL GLORIOSISSIMO JESUITA,
SAN LUIS GONZAGA,
PATRON DE TODOS LOS ESTUDIOS
DE LA COMPAÑIA.
En Madrid: En la Oficina de la calle Angoſta de

1. *The elements of Euclid explain'd in a new, but most easie method ... / Written in French by ... F. Claud. Francis Milliet de Chales ... - 6th. ed.* **Londres (1720).**
2. *Elementos geometricos de Euclides, dispuestos en methodo breve y fácil para mayor comodidad de los aficionados, y uso del real Seminario de Nobles de Madrid. Su autor ... Gaspar Alvarez de la Compañia de Jesus...* **Madrid (1739).**

Estas ediciones de *Los Elementos* de Euclides, como otras muchas que invaden el mundo académico e ilustrado, pretenden una progresiva y audaz simplificación del texto euclidiano para adecuarlo a una mejor escolarización y proporcionar mayor facilidad y comodidad de intelección a estudiosos y aficionados.

El alto valor educativo que tienen *Los Elementos* de Euclides es un lugar común al que se hace referencia de múltiples formas en muchos de los compendios didácticos, ponderando el gran valor formativo de *Los Elementos* en lo que concierne al orden y al rigor demostrativo, de modo que, como señala un anónimo traductor español del siglo XVIII que titula su versión de Euclides como *Tratado de Geometría*, la lectura de Euclides «*no sólo hace geómetras* [a los jóvenes] *, sino que insensiblemente los va habituando a ser excelentes lógicos*.».

En suma, la obra euclidiana, por su gran valor didáctico y su carácter de síntesis, ha tenido una amplia y fructífera dimensión escolar; ha sido un cuerpo de doctrina de lectura obligada para todos los estudiantes de Geometría durante veintitrés siglos; ha inspirado todos los manuales escolares de Matemáticas, algunos de los cuales han copiado literalmente definiciones y teoremas de *Los Elementos* de Euclides, que aún hoy siguen siendo la base toda disciplina científica matemática en la Enseñanza Secundaria, determinando el orden lógico secuencial y por tanto la ordenación curricular de los diversos capítulos de los libros de texto de la Matemática elemental. Esto en cuanto al ámbito informativo de la Matemática escolar. Pero también hay mucho que decir sobre los aspectos formativos. La obra de Euclides se convirtió de inmediato en modelo paradigmático del razonar deductivo del intelecto humano, donde la ilación irreprochable de los diversos argumentos remontándose en última instancia a los principios admitidos, dan una coherencia general al sistema, imponiéndose el rigor apodíctico de la demostración por encima de la intuición, la opinión y el juego retórico de la persuasión, primando la sencillez y la exactitud matemáticas y la univocidad semántica sobre la sinonimia, conjurando el riesgo de la equivocidad. Como bien señala J. de Lorenzo (*Introducción al estilo matemático*. Tecnos, Madrid, 1971, pág.57):

> «*La expresión more geometrico se llegó a convertir en sinónimo de more lógico. El término geómetra todavía hoy designa al insigne matemático. Y no sólo modelo del razonar, modelo de*

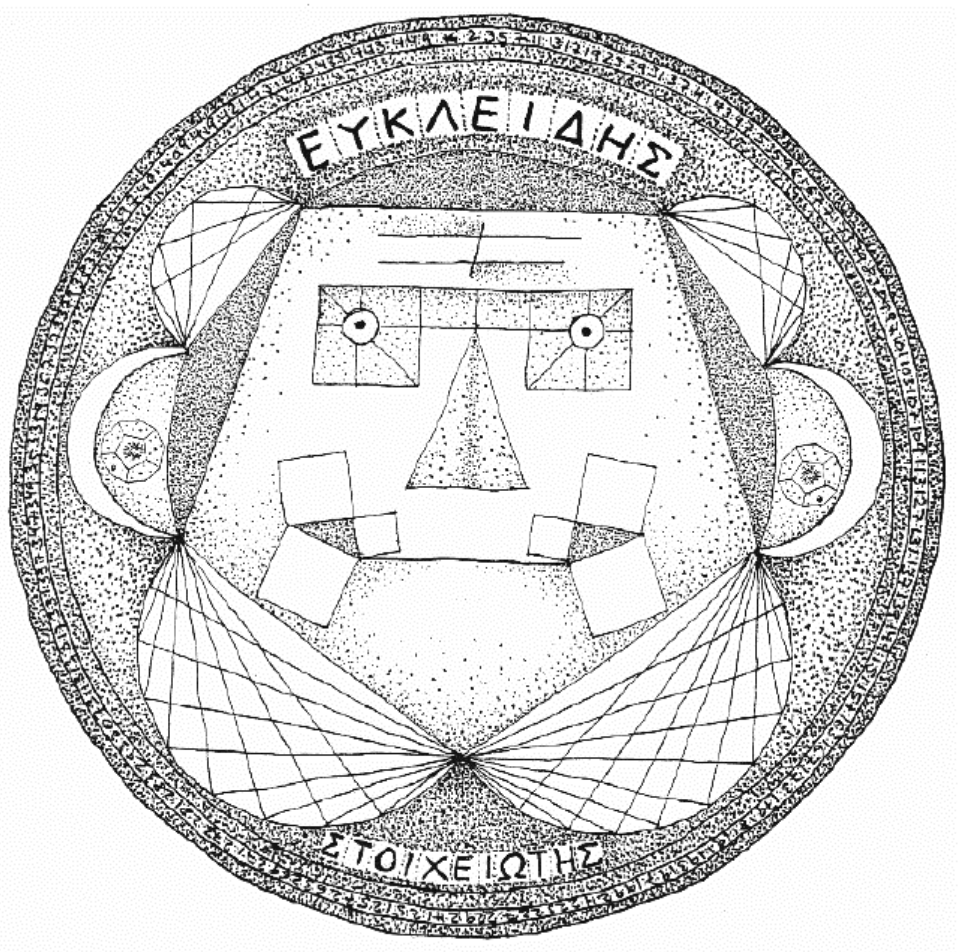
lenguaje. Todavía se ha mantenido [*Los Elementos* de Euclides] *como enseñanza obligatoria del escolar tanto por su aspecto deductivo como por el aspecto del manejo preciso, riguroso, de los términos, de las proposiciones.*»

Desde los tiempos de Platón se ha proclamado que las Matemáticas ejercen una influencia educativa decisiva en la formación y desarrollo de la inteligencia, por lo que es una obligación del Estado proporcionar a la juventud una buena formación matemática. Así lo proclama Platón en un tono solemne, metafísico y casi religioso, de estilo pitagórico, en forma de diálogo entre Sócrates y Glaucón, poco después del *Mito de la Caverna,* en el Libro VI de *La República* (525a–533b):

«[...] *Convendrá imponer esta enseñanza* [la Geometría] *por medio de una ley y convencer a los que deban ocupar los puestos de gobierno de la ciudad para que desarrollen su gusto por estas ciencias*. [...] *Con estas ciencias se purifica y reaviva el órgano del alma, cegado por las demás actividades*. [...] *Cuidemos de que aquellos a los que hemos de instruir no se apliquen a un estudio imperfecto de estas ciencias.* [...] *Por ellas puede elevarse la mejor parte del alma a la contemplación del mejor de los seres*. [...] *A ellas atribuimos la aprehensión de una parte del ser*.»

De hecho el término pitagórico *Matemática* derivado, como se ha dicho, del griego *mathema*, significa «*lo enseñable por antonomasia*», precepto recogido por la tradición pedagógica que ha considerado siempre a la Matemática como la clave para la forja del intelecto, de ahí el puesto de honor que le ha reservado en todo tiempo y lugar.

Concluyendo, más allá de su inconmensurable valor científico o como documento histórico relevante, construidos bajo la línea programática del idealismo platónico reiteradamente apuntado, los argumentos apuntados otorgan a *Los Elementos* de Euclides, en la Historia de la Educación, un valor pedagógico añadido.



Caricatura del rostro de Euclides realizada con componentes geométricos de algunos teoremas de *Los Elementos*: cuadrados del *Teorema de Pitágoras*, poliedros, ángulos en semicírculos, paralelas, *aplicación de las áreas*, etc. EL autor es B.Artmann, autor de *Euclid–The Creation of Mathematics*. Springer. New York, 1996.

Consideraciones finales sobre *Los Elementos* de Euclides

Con alguna ligera laguna u omisión, *Los Elementos* de Euclides constituyen una magnífica estructura de ingeniería lógica y matemática, hilvanada en 465 proposiciones, todas verdaderas, que han resistido la implacable prueba del tiempo. Ninguna otra obra científica coetánea resiste una mínima comparación con *Los Elementos*. ¿quién basaría hoy la explicación del movimiento de los planetas o el funcionamiento del corazón en los textos clásicos griegos? Sin embargo la confianza en Euclides es prácticamente ilimitada. Su obra es imperecedera, porque su legitimidad se basa en la sagacidad y en la sutileza de la razón y no depende de nueva acumulación de datos o de la construcción de instrumentos más perfeccionados.

B.Levi escribe en el prólogo de la mencionada obra *Leyendo a Euclides* (pp.20, 21):

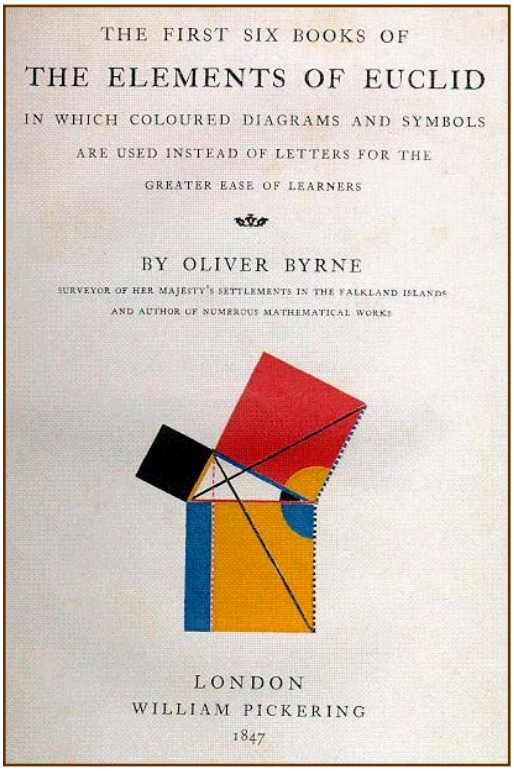
> «*Los Elementos de Euclides constituyen la composición científica más antigua y extensa que nos ha llegado en una integridad casi perfecta; y, suerte singular, composición de una ciencia que no ha cambiado desde entonces sus fundamentos; de modo que su lectura, todos lo saben, ha quedado en todo actual; suerte singular*, [...] *cuando pensamos que no le han faltado a veces, y aun en tiempos recientes, los ataques del empirismo para quitarle su aureola de verdad física, los que sin embrago han dejado inalterada su importancia como verdad práctica y como fundamento teórico de toda matemática*.»
>
> *¿Serán Los Elementos de Euclides una recopilación más o menos buena que un modesto profesor ha redactado en forma de apuntes útiles para sus alumnos y que ha tenido la suerte de parecer útiles también a muchas personas cultas y a muchos alumnos de las generaciones siguientes? ¿o será desatinado emprender la lectura imaginando al filósofo matemático, que tiene fe en el valor moral de la capacidad razonadora del hombre, y que prueba sus fuerzas en la construcción de un monumento deductivo, que no tiene otro fin que el alegrase al mirar cómo parece la realidad plegarse para hacerse espejo de la invención abstracta*.»

Los Elementos de Euclides marcan uno de los hitos más importantes de la Historia de la Cultura y de la Ciencia porque como codificación de los fundamentos de la Geometría de la regla y el compás establecieron un férreo paradigma de exposición y de demostración en Matemáticas, convirtiéndose en una obra maestra canónica que ha permanecido vigente e insuperada durante 2300 años, siendo para profesionales y aficionados a las Matemáticas, lectura tras lectura, una fuente inagotable de fruición intelectual, de goce supremo por la agudeza, el ingenio y el artificio de una elegante argumentación matemática.

Cada versión de *Los Elementos* de Euclides ha sido un nuevo monumento a la persistencia de la memoria de su cabal autor, en homenaje de quién recordamos de nuevo todas las citas de textos de ilustres personajes, científicos, historiadores y pedagogos, que hemos ido a las que, ahora, añadimos las siguientes referencias:

- Se dice que Lincoln presumía de «*haber aprendido a pensar con lógica leyendo los Elementos de Euclides*»; así lo da a entender en un esbozo autobiográfico: «*Tras la lectura de todas las proposiciones de los seis primeros libros de Euclides, encontré el sentido de lo que significa demostrar*» (J.Mellon: *The Face of Lincoln*, Viking, New York, 1979, p.67).
- Einstein refiriéndose a Euclides y a *Los Elementos*, decía: «*Es maravilloso que un hombre sea capaz de alcanzar tal grado de certeza y pureza haciendo uso exclusivo de su pensamiento*» (Sketch autobiográfico sobre A.Einstein. *Philosopher-Scientist*. P.A.Schilpp, 1951); y también: «*Si Euclides no es capaz de encender tu entusiasmo juvenil, entonces no has nacido pasa ser un pensador científico*» (Americam Mathematical Montly, vol.99, nº8, 10/1992, p.773).
- Hilbert pondera la obra euclídea con estas palabras: «*la importancia de un trabajo científico como Los Elementos de Euclides puede medirse por el número de publicaciones previas que convierte en lectura superflua*».
- En el mundo de la ficción el propio Dr.Watson comparaba los poderes de deducción de Sherlock Holmes con la capacidad demostrativa de Euclides: «*Sus conclusiones fueron tan infalibles como las numerosas proposiciones de Euclides*.»

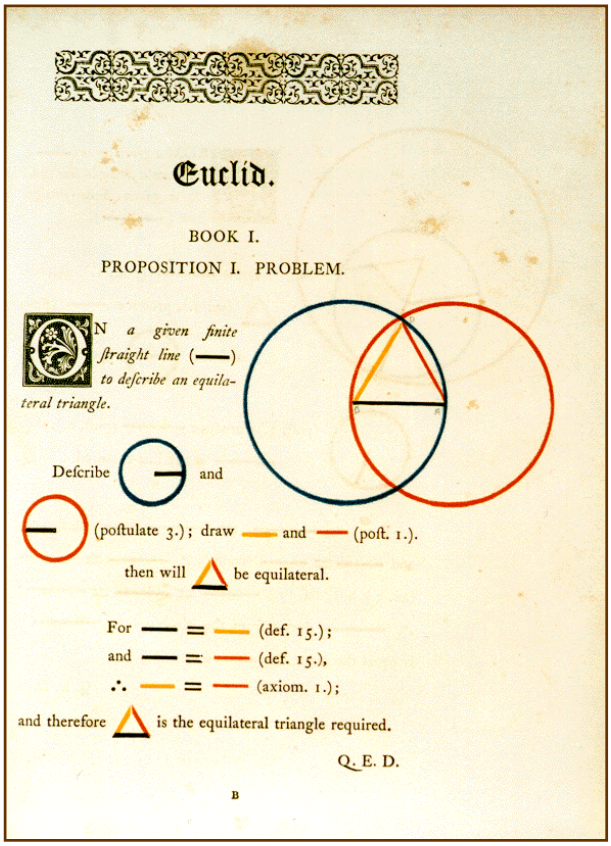
LA EDICIÓN DE O.BYRNE (1847)
DE *LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES*
Colbeck collection (Library of the University of British Columbia)


THE FIRST SIX BOOKS OF
THE ELEMENTS OF EUCLID
IN WHICH COLOURED DIAGRAMS AND SYMBOLS
ARE USED INSTEAD OF LETTERS FOR THE
GREATER EASE OF LEARNERS
BY OLIVER BYRNE
SURVEYOR OF HER MAJESTY'S SETTLEMENTS IN THE FALKLAND ISLANDS
AND AUTHOR OF NUMEROUS MATHEMATICAL WORKS
LONDON
WILLIAM PICKERING
1847

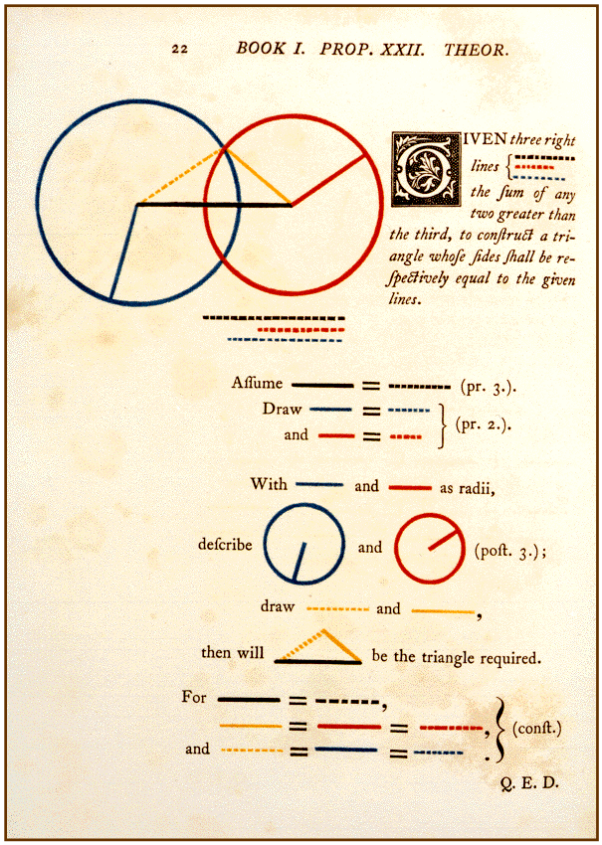
La edición de Oliver Byrne de *Los Elementos de Euclides* : *The first six books of the Elements of Euclid, in which coloured diagrams and symbols are used instead of letters for the greater ease of learners.*

Es una versión muy peculiar de los seis primeros libros de Euclides, es decir, la Geometría Plana elemental, en la que el matemático Byrne, reduce al mínimo el texto aclaratorio de las proposiciones y teoremas euclídeos, siendo reemplazado por un despliegue inusitado de preciosas ilustraciones en color que son magníficos diagramas descriptivos de las construcciones de Euclides, que «*entran por los ojos*», y en los que la fuerza sensorial de la percepción visual de las figuras refuerza la intelección de los teoremas y problemas geométricos. Por ejemplo, la igualdad de ciertas magnitudes se prueba mediante la identidad de forma y color, de modo que, como escribe Byrne en su larga introducción explicativa, la verdad se pone de manifiesto con la «*demostración ocular*», en la que juega un papel fundamental no sólo la forma sino sobre todo el color. La edición de Byrne es un sacrilegio para el idealismo platónico que presidía *Los Elementos de Euclides*, pero tiene un alto valor didáctico, casi de Geometría empírica.

PROPOSICIONES DEL LIBRO I EN LA EDICIÓN DE O.BYRNE

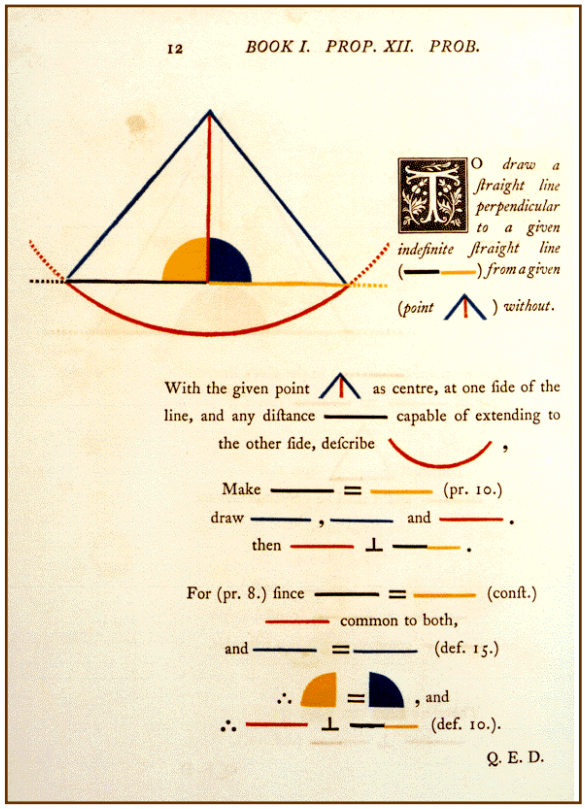

Euclid.
BOOK I.
PROPOSITION I. PROBLEM.
ON a given finite straight line ( ) to describe an equilateral triangle.
Describe and
(postulate 3.); draw and (post. 1.).
then will be equilateral.
For = (def. 15.);
and = (def. 15.),
∴ = (axiom. 1.);
and therefore is the equilateral triangle required.
Q. E. D.
B

Proposición I.1. Construir un triángulo equilátero sobre un segmento dado.

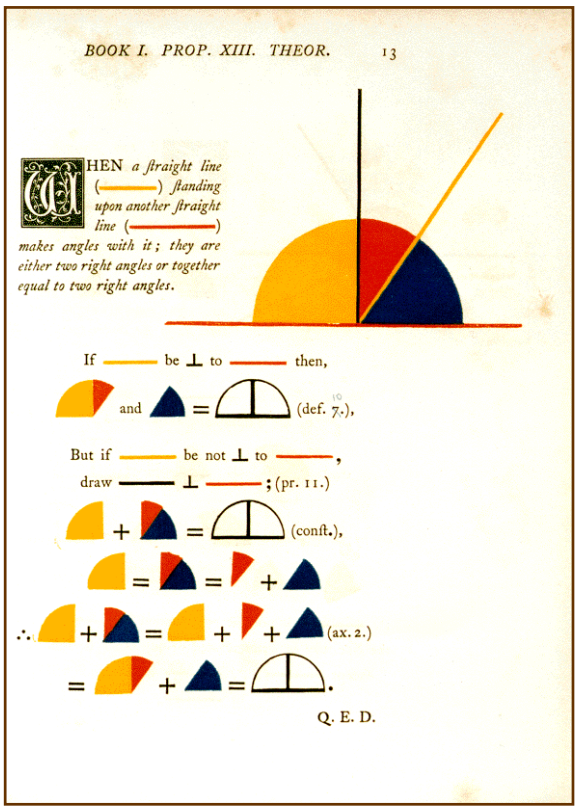

22 BOOK I. PROP. XXII. THEOR.
GIVEN three right lines { } the sum of any two greater than the third, to construct a triangle whose sides shall be respectively equal to the given lines.
Assume = (pr. 3.).
Draw = } (pr. 2.).
and = }
With and as radii,
describe and (post. 3.);
draw and ,
then will be the triangle required.
For = ,
= = , } (const.)
and = = .
Q. E. D.

Proposición I.22. Construir un triángulo con tres segmentos iguales a otros tres dados.

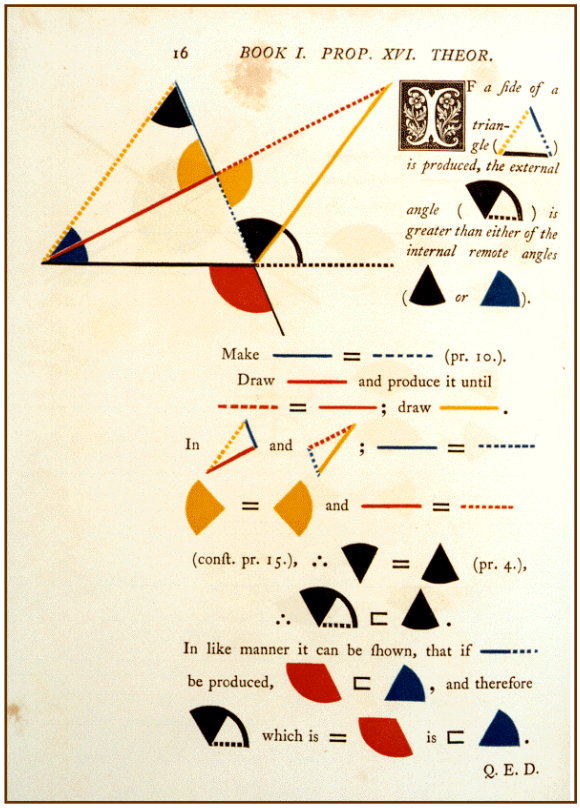
PROPOSICIONES DEL LIBRO I EN LA EDICIÓN DE O.BYRNE



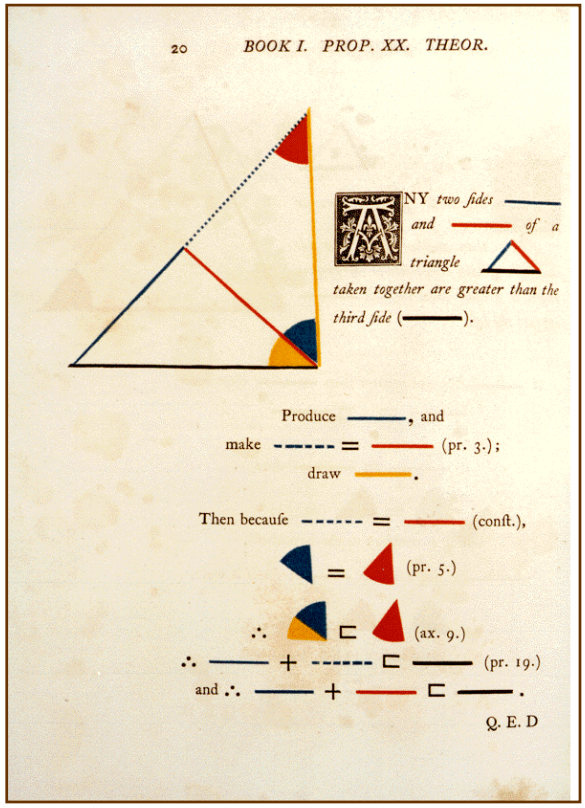
Proposición I.12. Dada una recta indefinida, trazar desde un punto que no esté sobre ella una recta perpendicular.



Proposición I.13. Si una recta levantada sobre otra forma ángulos, serán rectos o igual a dos rectos.

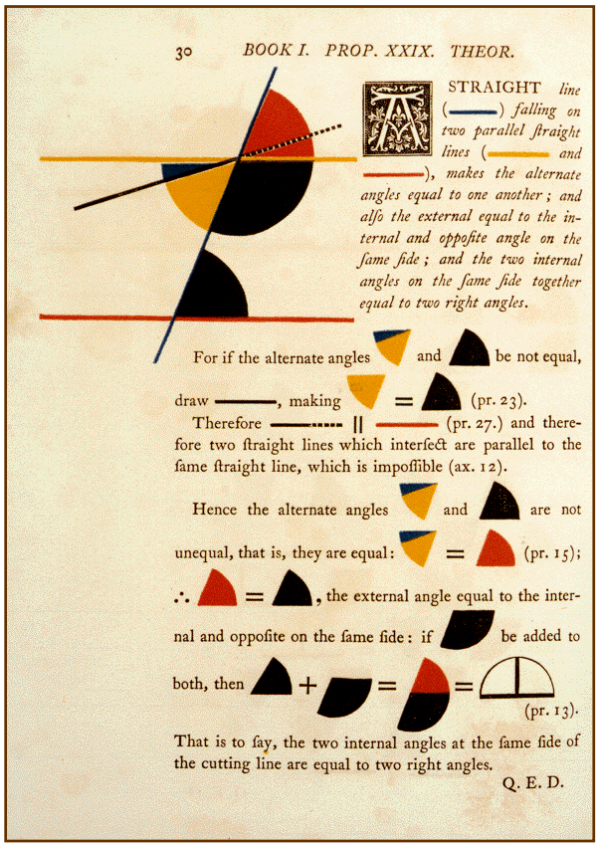


Proposición I.16. Si se prolonga uno de los lados de un triángulo, el ángulo externo es mayor que cada uno de los ángulos internos y opuestos.

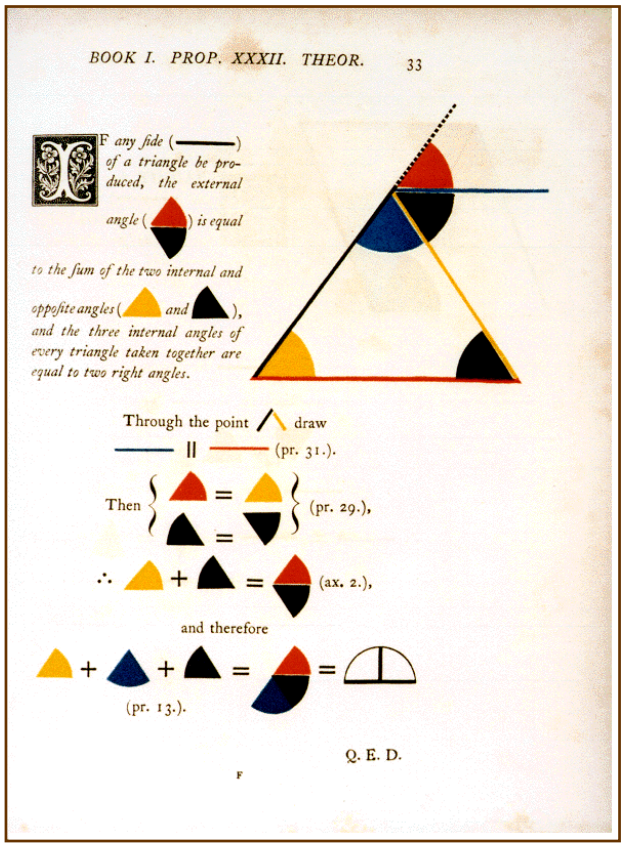


Proposición I.20. En todo triángulo dos lados cualesquiera en conjunto, son mayores que el otro lado [*desigualdad triangular*].

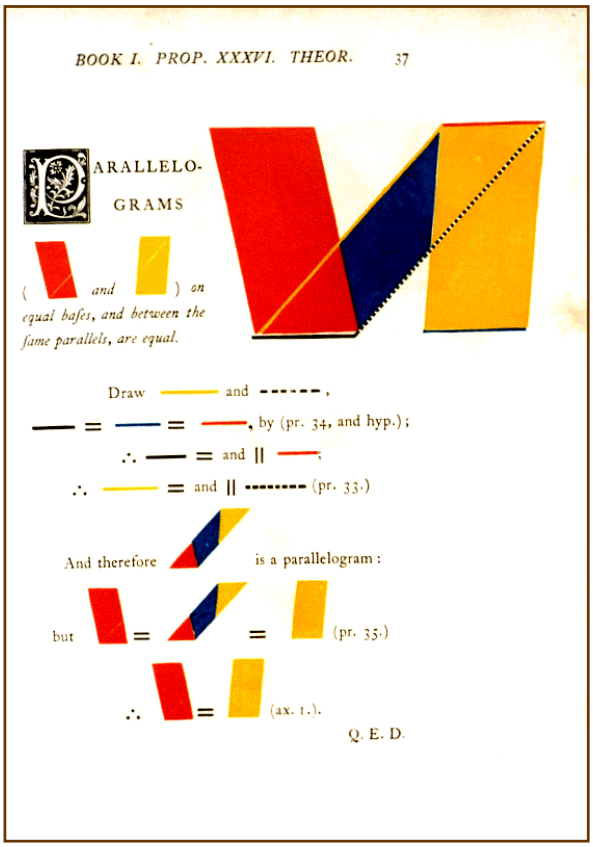
PROPOSICIONES DEL LIBRO I EN LA EDICIÓN DE O.BYRNE



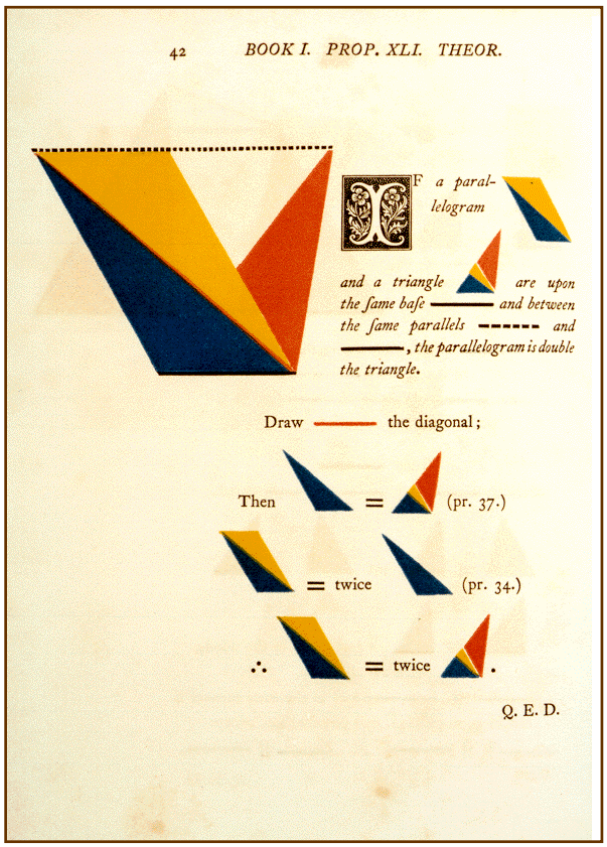
Proposición I.29. Una recta que incide sobre dos paralelas forma ángulos alternos iguales entre sí.



Proposición I.32. Los tres ángulos internos del triángulo son iguales a dos rectos.

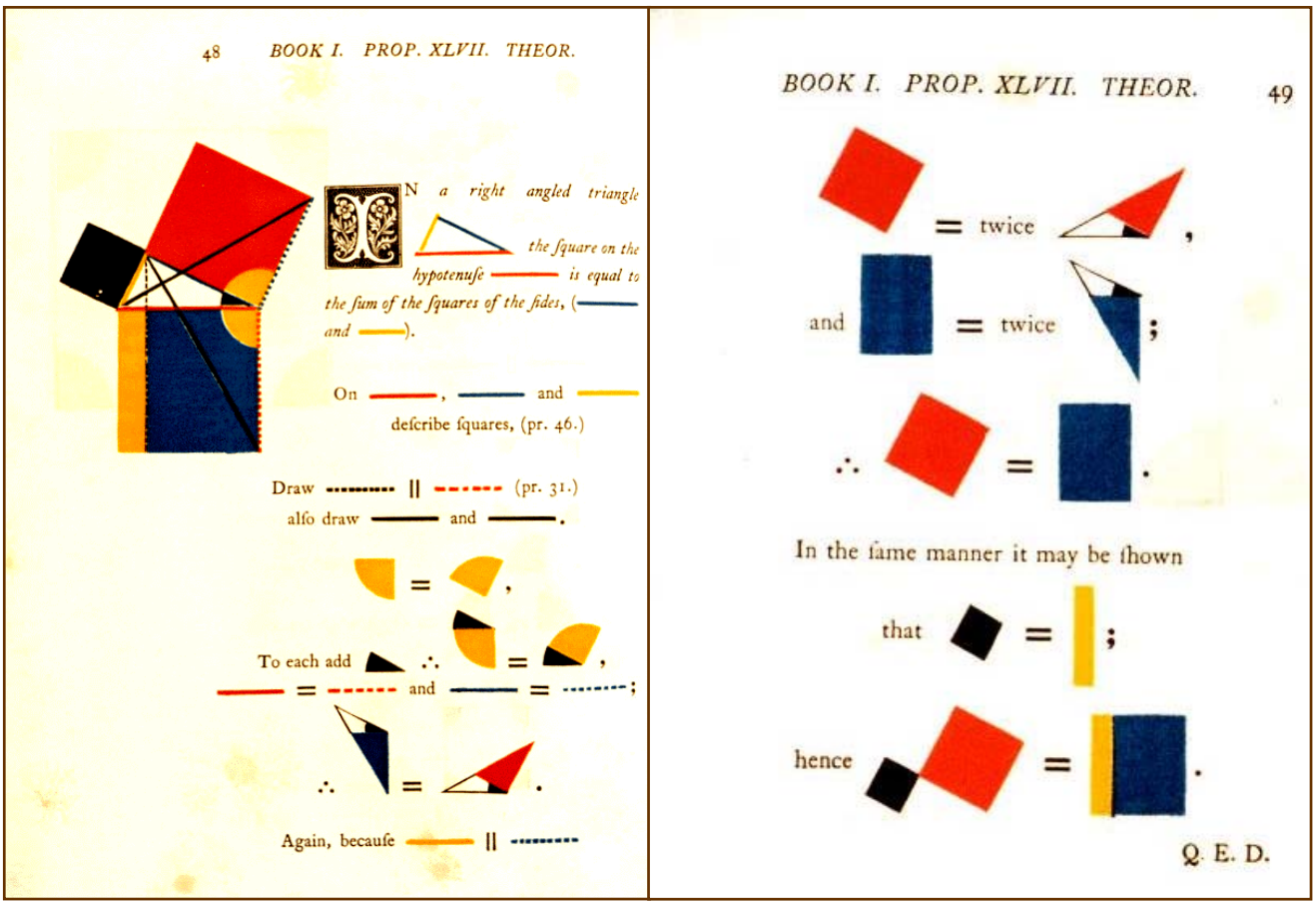


Proposición I.36. Los paralelogramos colocados sobre bases iguales y entre las mismas paralelas son equivalentes.



Proposición I.41. Si un paralelogramo tiene la misma base que un triángulo y están colocados entre las mismas paralelas, el paralelogramo es doble que el triángulo.

EL TEOREMA DE PITÁGORAS (I.47, I48 y VI.31)
EN LA EDICIÓN DE O.BYRNE DE *LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES*



48 BOOK I. PROP. XLVII. THEOR.

IN a right angled triangle the ſquare on the hypotenuſe is equal to the ſum of the ſquares of the ſides, (— and —).

On —, — and — deſcribe ſquares, (pr. 46.)

Draw ····· || ------ (pr. 31.)
alſo draw — and —.

= ,

To each add ∴ = ,

— = ------ and — = ·····;

∴ = .

Again, becauſe — || ·····

BOOK I. PROP. XLVII. THEOR. 49

= twice ,

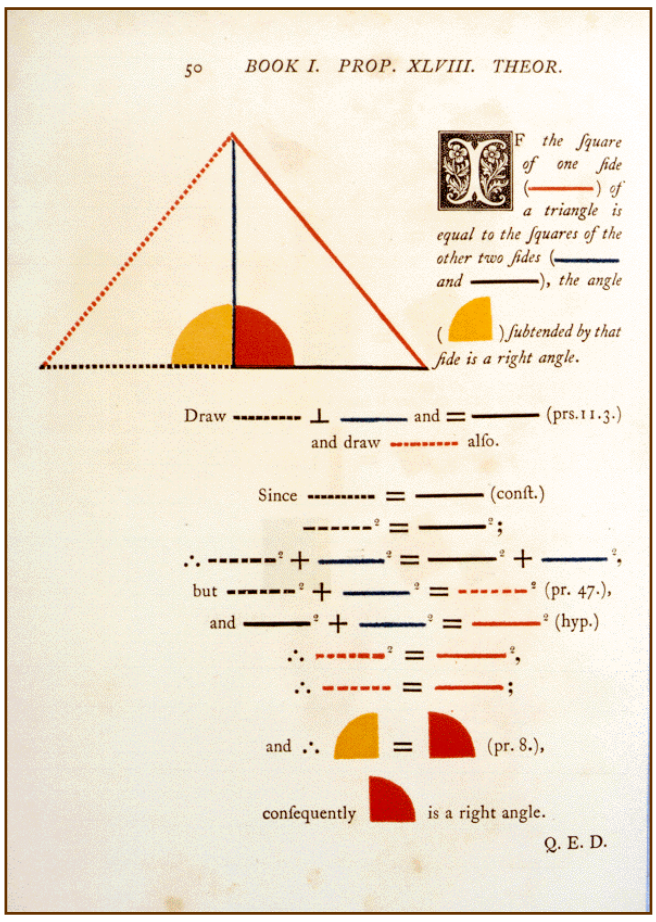
and = twice ;

∴ = .

In the ſame manner it may be ſhown that = ;

hence = .

Q. E. D.



50 BOOK I. PROP. XLVIII. THEOR.

IF the ſquare of one ſide (—) of a triangle is equal to the ſquares of the other two ſides (— and —), the angle ( ) ſubtended by that ſide is a right angle.

Draw ····· ⊥ — and = — (prs.11.3.)
and draw ····· alſo.

Since ····· = — (conſt.)

------² = —²;

∴ ------² + —² = —² + —²,

but ------² + —² = ------² (pr. 47.),

and —² + —² = —² (hyp.)

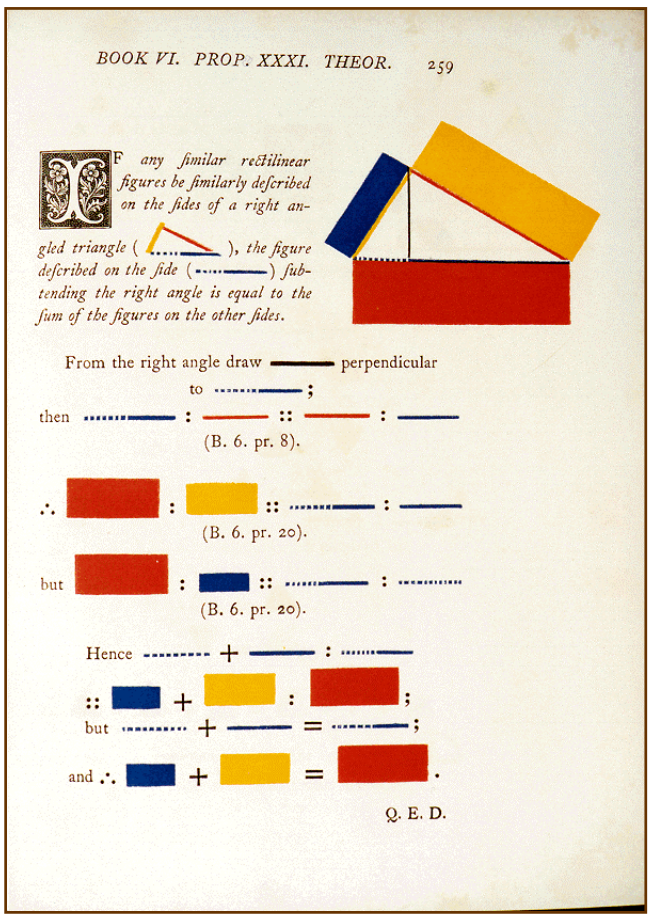
∴ ------² = —²,

∴ ------ = —;

and ∴ = (pr. 8.),

conſequently is a right angle.

Q. E. D.



BOOK VI. PROP. XXXI. THEOR. 259

IF any ſimilar rectilinear figures be ſimilarly deſcribed on the ſides of a right angled triangle ( ), the figure deſcribed on the ſide (—) ſubtending the right angle is equal to the ſum of the figures on the other ſides.

From the right angle draw — perpendicular to ·····;

then ····· : — :: — : —

(B. 6. pr. 8).

∴ : :: ····· : —

(B. 6. pr. 20).

but : :: ····· : ·····

(B. 6. pr. 20).

Hence ····· + — : ·····

:: + : ;

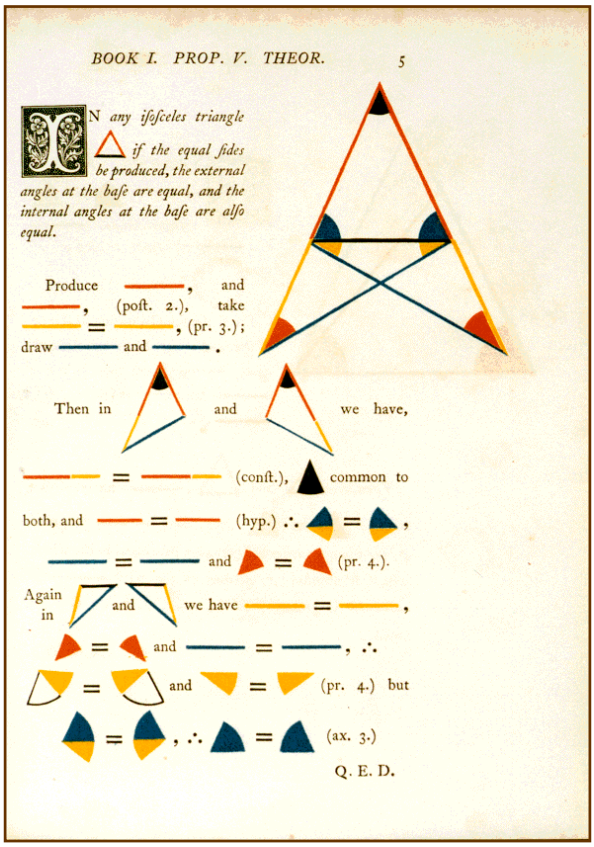
but ····· + — = ·····;

and ∴ + = .

Q. E. D.

TEOREMAS DE TALES (I.5, I.15, I.26)

EN LA EDICIÓN DE O.BYRNE DE *LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES*



BOOK I. PROP. V. THEOR. 5

IN *any iſoſceles triangle* △ *if the equal ſides be produced, the external angles at the baſe are equal, and the internal angles at the baſe are alſo equal.*

Produce ——, and ——, (poſt. 2.), take —— = ——, (pr. 3.); draw —— and ——.

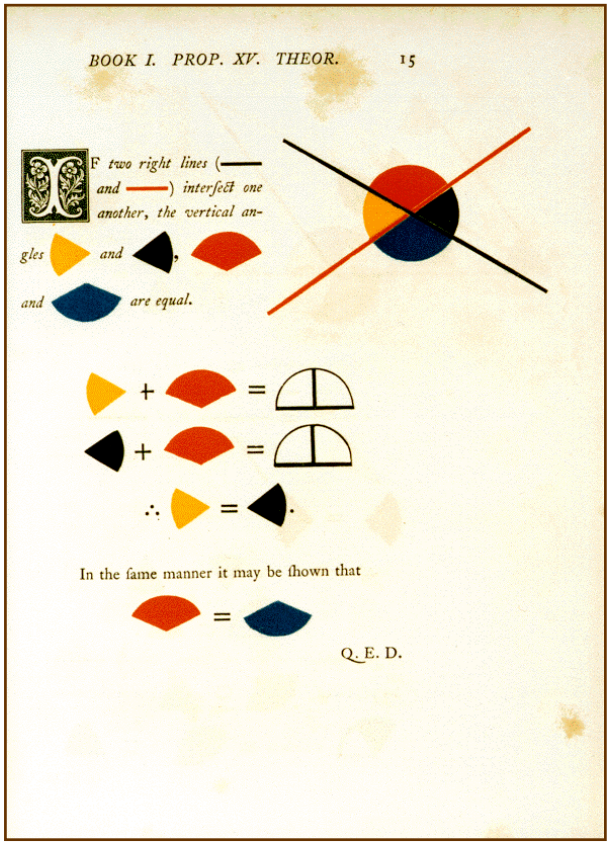
Then in △ and △ we have,

—— = —— (conſt.), ∠ common to both, and —— = —— (hyp.) ∴ ∠ = ∠, —— = —— and ∠ = ∠ (pr. 4.).

Again in △ and △ we have —— = ——, ∠ = ∠ and —— = ——, ∴ ∠ = ∠ and ∠ = ∠ (pr. 4.) but ∠ = ∠, ∴ ∠ = ∠ (ax. 3.)

Q. E. D.

Proposición I.5. En los triángulos isósceles, los ángulos en la base son iguales entre sí [*Pons asinorum* medieval].



BOOK I. PROP. XV. THEOR. 15

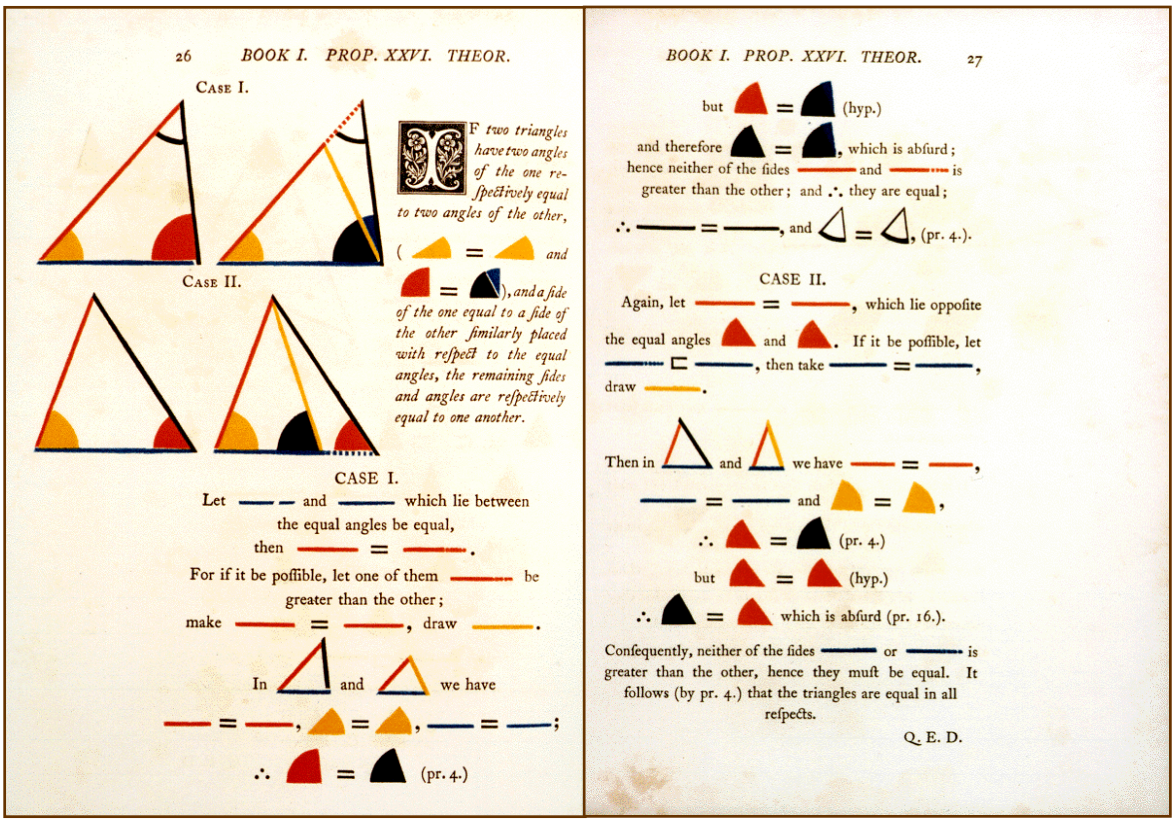
IF *two right lines* (—— *and* ——) *interſect one another, the vertical angles* ∠ *and* ∠, ∠ *and* ∠ *are equal.*

∠ + ∠ = ∠
∠ + ∠ = ∠
∴ ∠ = ∠.

In the ſame manner it may be ſhown that ∠ = ∠

Q. E. D.

Proposición I.15. Si dos rectas se cortan, forman ángulos opuestos por el vértice iguales.



26 BOOK I. PROP. XXVI. THEOR.

CASE I.

CASE II.

IF *two triangles have two angles of the one reſpectively equal to two angles of the other,* (∠ = ∠ *and* ∠ = ∠), *and a ſide of the one equal to a ſide of the other ſimilarly placed with reſpect to the equal angles, the remaining ſides and angles are reſpectively equal to one another.*

CASE I.

Let —— and —— which lie between the equal angles be equal, then —— = ——.

For if it be poſſible, let one of them —— be greater than the other; make —— = ——, draw ——.

In △ and △ we have

—— = ——, ∠ = ∠, —— = ——;

∴ ∠ = ∠ (pr. 4.)

BOOK I. PROP. XXVI. THEOR. 27

but ∠ = ∠ (hyp.)

and therefore ∠ = ∠, which is abſurd; hence neither of the ſides —— and —— is greater than the other; and ∴ they are equal;

∴ —— = ——, and ∠ = ∠, (pr. 4.).

CASE II.

Again, let —— = ——, which lie oppoſite the equal angles ∠ and ∠. If it be poſſible, let —— ⊏ ——, then take —— = ——, draw ——.

Then in △ and △ we have —— = ——,

—— = —— and ∠ = ∠,

∴ ∠ = ∠ (pr. 4.)

but ∠ = ∠ (hyp.)

∴ ∠ = ∠ which is abſurd (pr. 16.).

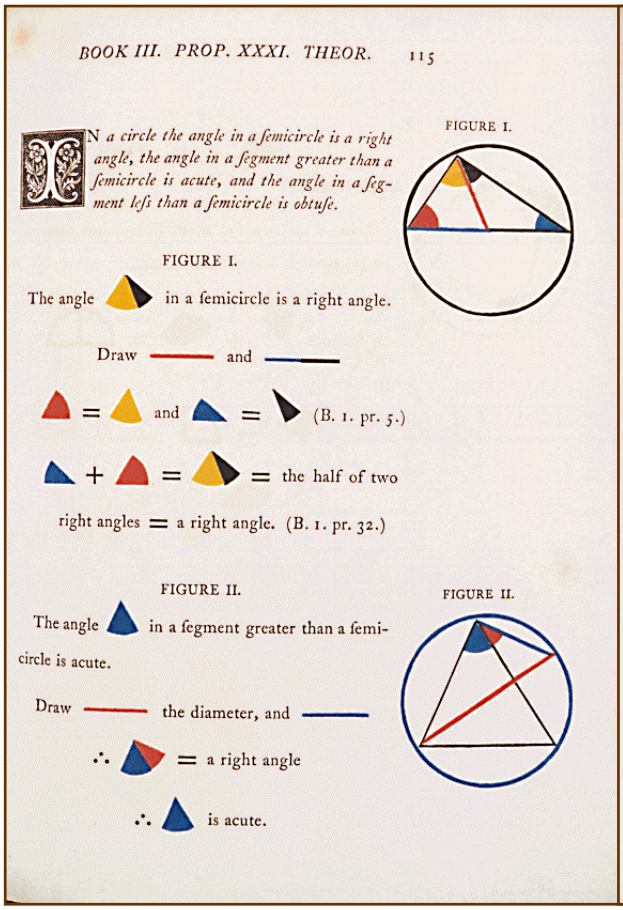
Conſequently, neither of the ſides —— or —— is greater than the other, hence they muſt be equal. It follows (by pr. 4.) that the triangles are equal in all reſpects.

Q. E. D.

Proposición I.26. Si dos triángulos tienen dos ángulos y un lado iguales, ya sea este lado el situado entre los ángulos iguales o el subtendido por uno de los ángulos iguales, tendrán iguales los otros dos lados y el tercer ángulo.

TEOREMAS DE TALES (III.31, VI.2)

EN LA EDICIÓN DE O.BYRNE DE *LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES*



BOOK III. PROP. XXXI. THEOR. 115

IN *a circle the angle in a ſemicircle is a right angle, the angle in a ſegment greater than a ſemicircle is acute, and the angle in a ſegment leſs than a ſemicircle is obtuſe.*

FIGURE I.

The angle in a ſemicircle is a right angle.

Draw and

= and = (B. 1. pr. 5.)

\+ = = the half of two right angles = a right angle. (B. 1. pr. 32.)

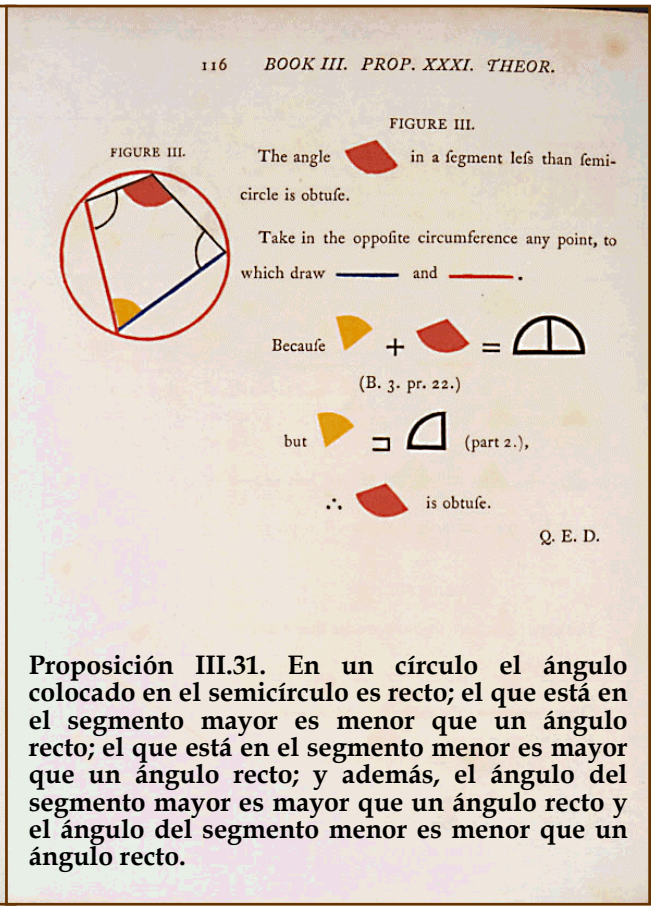
FIGURE II.

The angle in a ſegment greater than a ſemicircle is acute.

Draw the diameter, and

∴ = a right angle

∴ is acute.



116 BOOK III. PROP. XXXI. THEOR.

FIGURE III.

The angle in a ſegment leſs than ſemicircle is obtuſe.

Take in the oppoſite circumference any point, to which draw and .

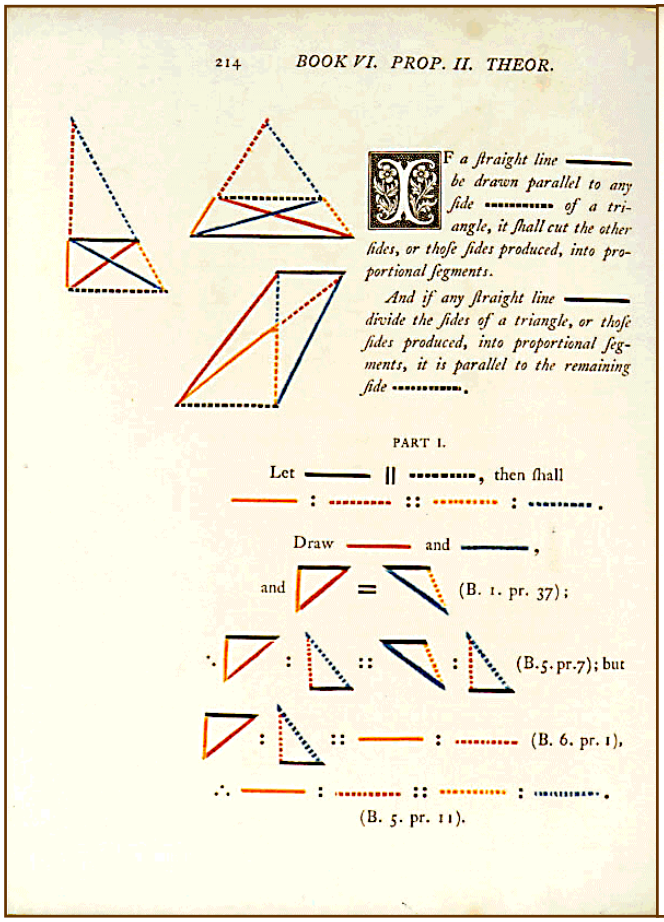
Becauſe + = (B. 3. pr. 22.)

but ⊐ (part 2.),

∴ is obtuſe.

Q. E. D.

Proposición III.31. En un círculo el ángulo colocado en el semicírculo es recto; el que está en el segmento mayor es menor que un ángulo recto; el que está en el segmento menor es mayor que un ángulo recto; y además, el ángulo del segmento mayor es mayor que un ángulo recto y el ángulo del segmento menor es menor que un ángulo recto.



214 BOOK VI. PROP. II. THEOR.

IF *a ſtraight line be drawn parallel to any ſide of a triangle, it ſhall cut the other ſides, or thoſe ſides produced, into proportional ſegments.*

And if any ſtraight line divide the ſides of a triangle, or thoſe ſides produced, into proportional ſegments, it is parallel to the remaining ſide.

PART I.

Let ∥ , then ſhall : :: : .

Draw and ,

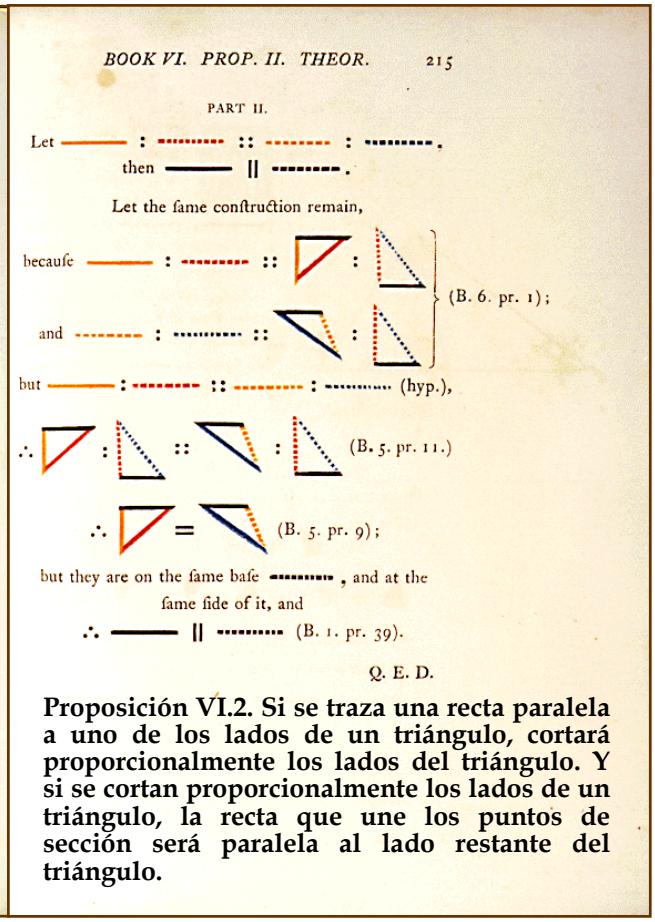
and = (B. 1. pr. 37);

∴ : :: : (B. 5. pr. 7); but

: :: : (B. 6. pr. 1),

∴ : :: : .

(B. 5. pr. 11).



BOOK VI. PROP. II. THEOR. 215

PART II.

Let : :: : ,

then ∥ .

Let the ſame conſtruction remain,

becauſe : :: : } (B. 6. pr. 1);

and : :: : }

but : :: : (hyp.),

∴ : :: : (B. 5. pr. 11.)

∴ = (B. 5. pr. 9);

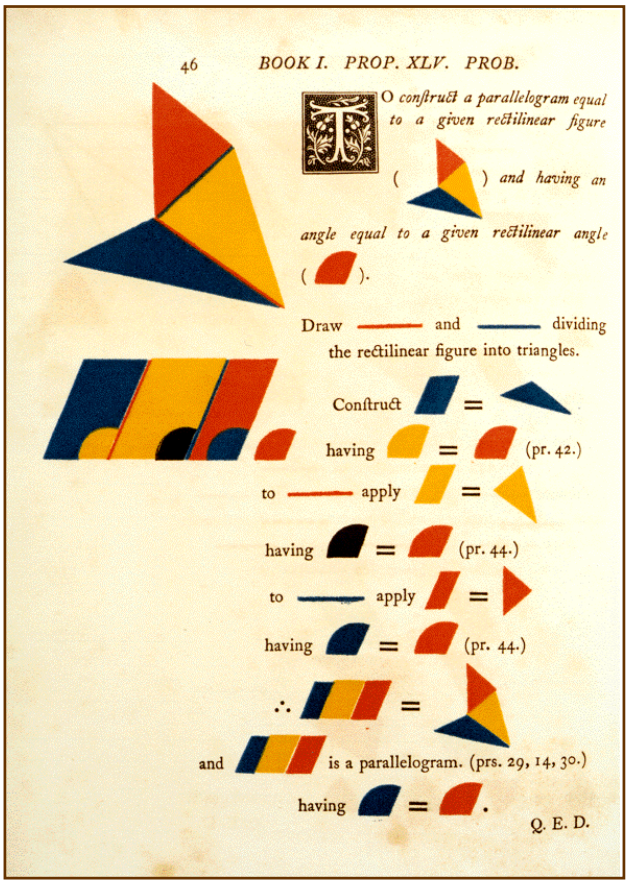
but they are on the ſame baſe , and at the ſame ſide of it, and

∴ ∥ (B. 1. pr. 39).

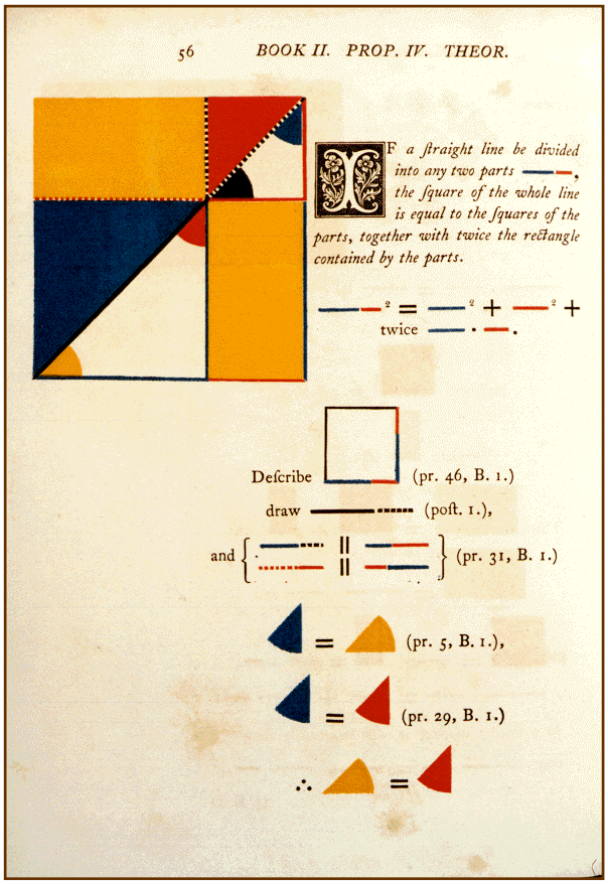
Q. E. D.

Proposición VI.2. Si se traza una recta paralela a uno de los lados de un triángulo, cortará proporcionalmente los lados del triángulo. Y si se cortan proporcionalmente los lados de un triángulo, la recta que une los puntos de sección será paralela al lado restante del triángulo.

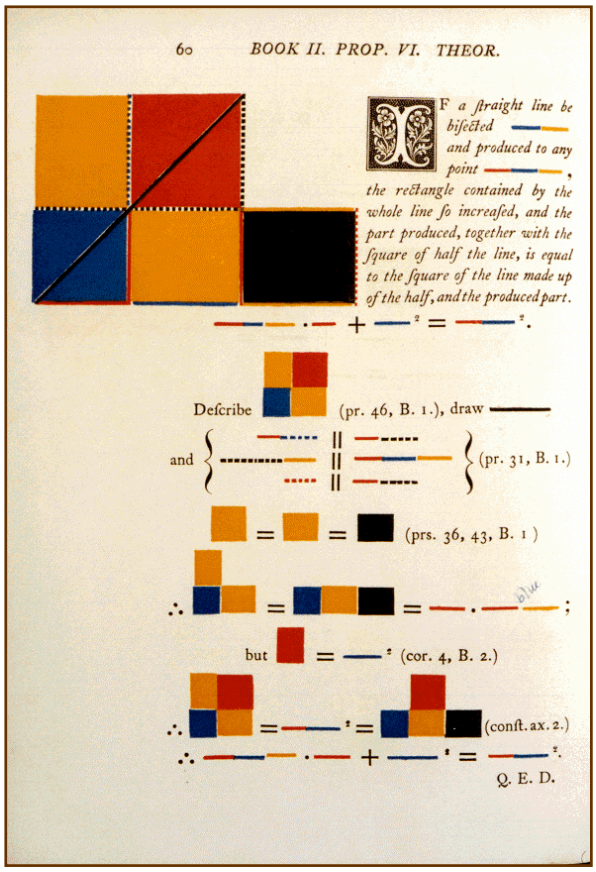
LOS TEOREMAS DE *APLICACIÓN DE LAS ÁREAS* DE LOS LIBROS I y II ENLA EDICIÓN DE O.BYRNE DE *LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES*



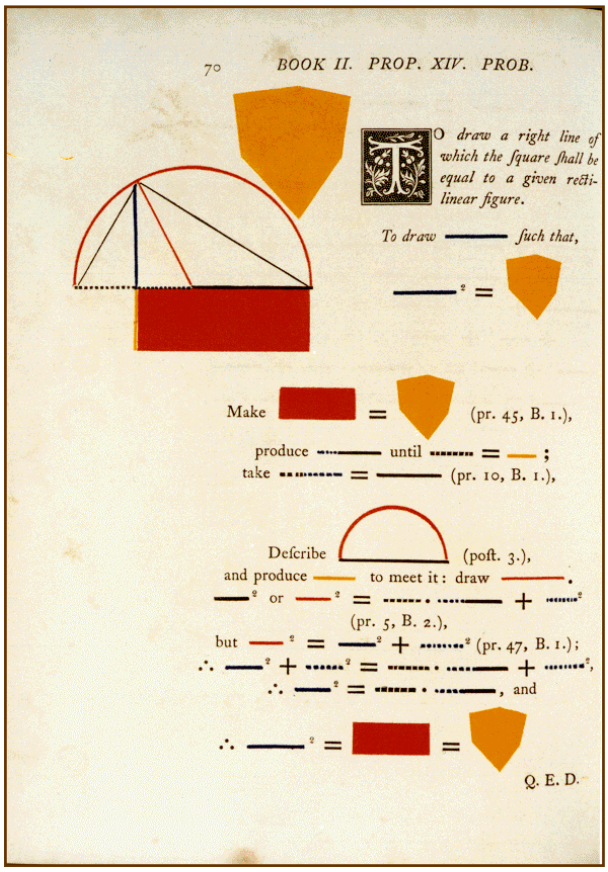
Proposición I.45. Construir en un ángulo rectilíneo dado un paralelogramo equivalente a una figura rectilínea dada.



Proposición II.4. Cuadrado de un binomio: $(a+b)^2=a^2+b^2+2a\cdot b$.

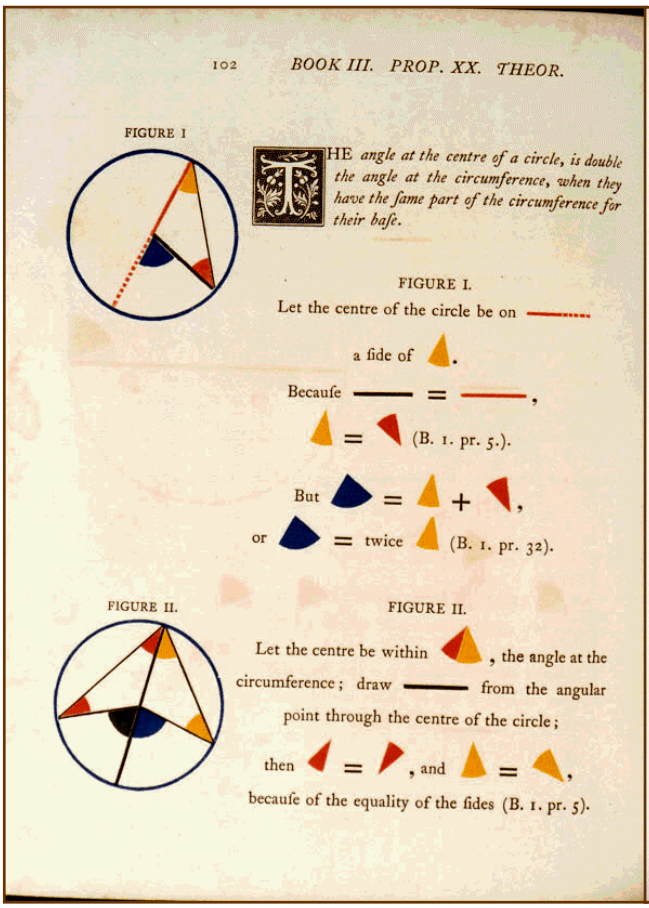


Proposición II.6. Solución geométrica de la ecuación cuadrática $ax+x^2=b^2$



Proposición II.14. Construir un cuadrado equivalente a una figura rectilínea dada

PROPOSICIONES DEL LIBRO III EN LA EDICIÓN DE O.BYRNE



102 BOOK III. PROP. XX. THEOR.

FIGURE I

THE *angle at the centre of a circle, is double the angle at the circumference, when they have the same part of the circumference for their base.*

FIGURE I.

Let the centre of the circle be on ——— a side of .

Because ——— = ———,

= (B. 1. pr. 5.).

But = + ,

or = twice (B. 1. pr. 32).

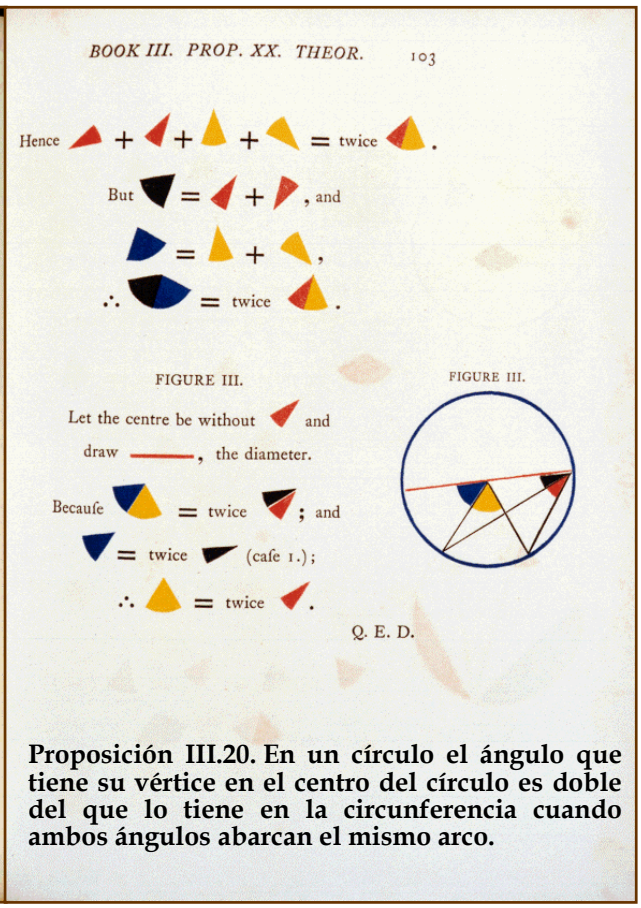
FIGURE II.

FIGURE II.

Let the centre be within , the angle at the circumference; draw ——— from the angular point through the centre of the circle;

then = , and = ,

because of the equality of the sides (B. 1. pr. 5).



BOOK III. PROP. XX. THEOR. 103

Hence + + + = twice .

But = + , and

= + ,

∴ = twice .

FIGURE III.

Let the centre be without and draw ———, the diameter.

Because = twice ; and

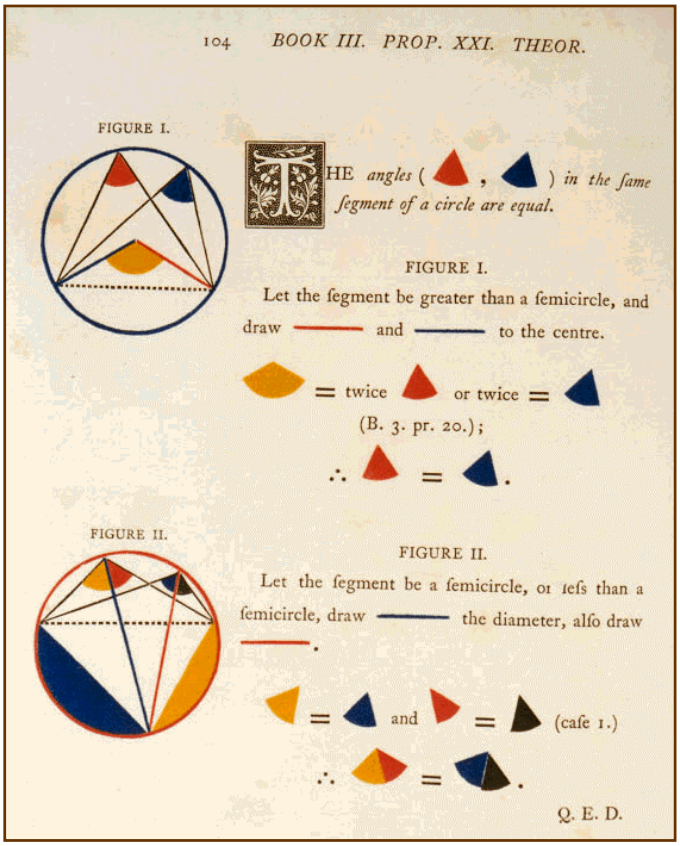
= twice (case 1.);

∴ = twice .

FIGURE III.

Q. E. D.

Proposición III.20. En un círculo el ángulo que tiene su vértice en el centro del círculo es doble del que lo tiene en la circunferencia cuando ambos ángulos abarcan el mismo arco.



104 BOOK III. PROP. XXI. THEOR.

FIGURE I.

THE *angles* (,) *in the same segment of a circle are equal.*

FIGURE I.

Let the segment be greater than a semicircle, and draw ——— and ——— to the centre.

= twice or twice =

(B. 3. pr. 20.);

∴ = .

FIGURE II.

FIGURE II.

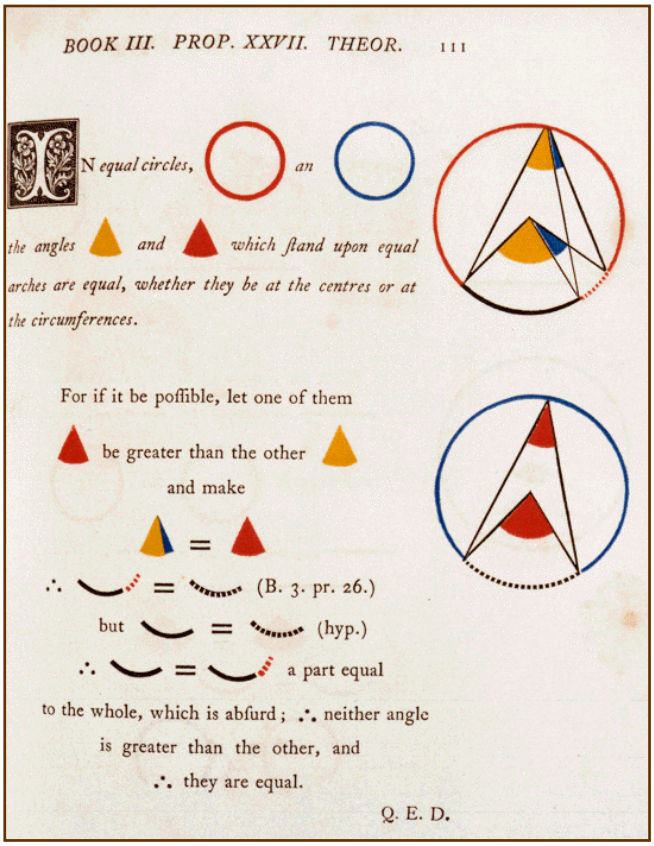
Let the segment be a semicircle, or less than a semicircle, draw ——— the diameter, also draw ———.

= and = (case 1.)

∴ = .

Q. E. D.

Proposición III.21. En un círculo los ángulos que abarcan el mismo segmento circular son iguales entre sí.



BOOK III. PROP. XXVII. THEOR. 111

IN *equal circles, an* *the angles* *and* *which stand upon equal arches are equal, whether they be at the centres or at the circumferences.*

For if it be possible, let one of them be greater than the other and make

=

∴ = (B. 3. pr. 26.)

but = (hyp.)

∴ = a part equal

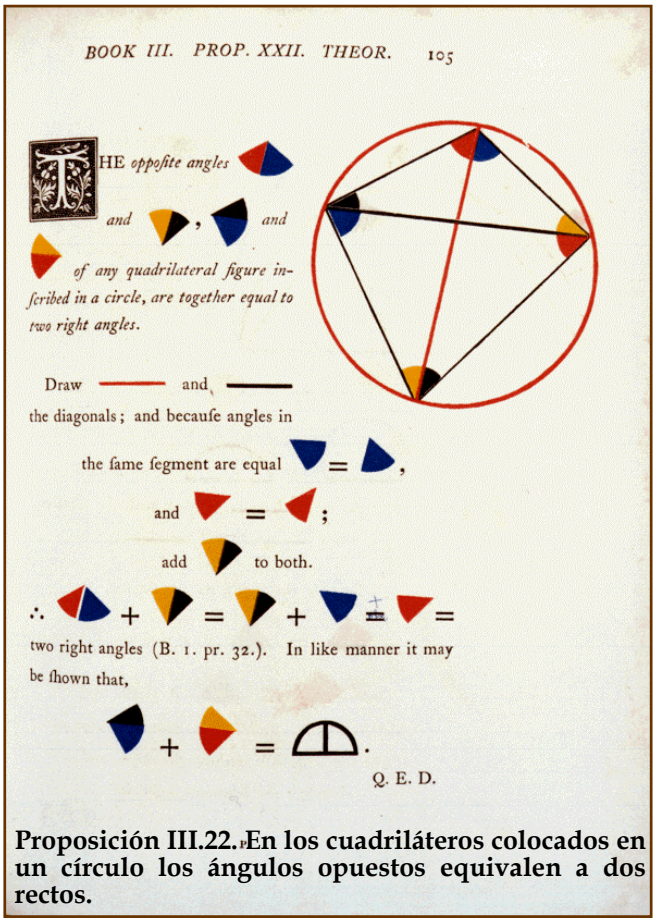
to the whole, which is absurd; ∴ neither angle is greater than the other, and

∴ they are equal.

Q. E. D.

Proposición III.27. En círculos iguales, los ángulos que abarcan arcos iguales son iguales, tanto si tienen el vértice en el centro como si lo tienen en la circunferencia.

PROPOSICIONES DEL LIBRO III EN LA EDICIÓN DE O.BYRNE



BOOK III. PROP. XXII. THEOR. 105

THE *oppoſite angles* and , and *of any quadrilateral figure inſcribed in a circle, are together equal to two right angles.*

Draw and the diagonals; and becauſe angles in the ſame ſegment are equal = ,

and = ;

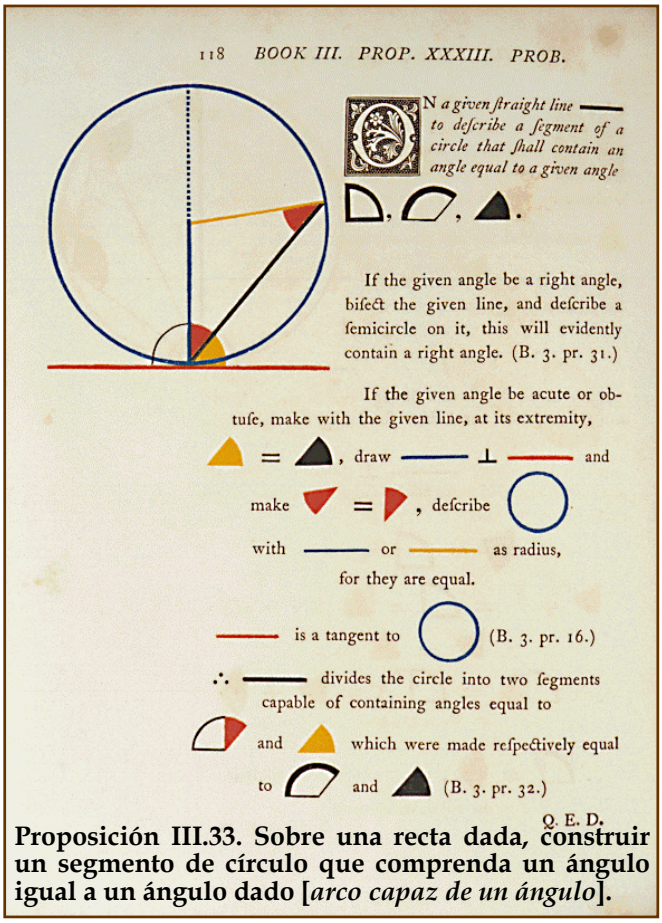
add to both.

∴ + = + = two right angles (B. 1. pr. 32.). In like manner it may be ſhown that,

+ = .

Q. E. D.

Proposición III.22. En los cuadriláteros colocados en un círculo los ángulos opuestos equivalen a dos rectos.



118 BOOK III. PROP. XXXIII. PROB.

ON *a given ſtraight line* — *to deſcribe a ſegment of a circle that ſhall contain an angle equal to a given angle* , , .

If the given angle be a right angle, biſect the given line, and deſcribe a ſemicircle on it, this will evidently contain a right angle. (B. 3. pr. 31.)

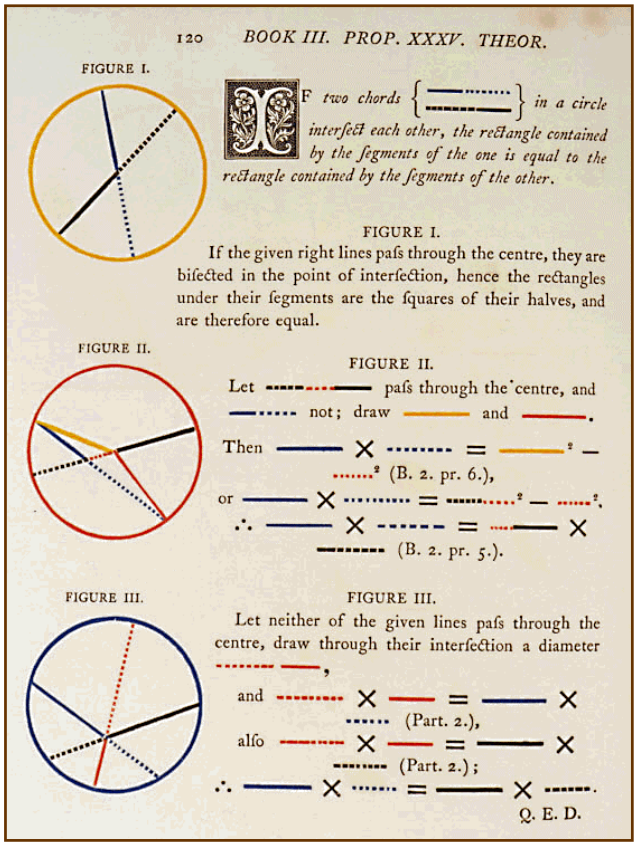
If the given angle be acute or obtuſe, make with the given line, at its extremity, = , draw ⊥ and make = , deſcribe with or as radius, for they are equal.

is a tangent to (B. 3. pr. 16.)

∴ divides the circle into two ſegments capable of containing angles equal to and which were made reſpectively equal to and (B. 3. pr. 32.)

Q. E. D.

Proposición III.33. Sobre una recta dada, construir un segmento de círculo que comprenda un ángulo igual a un ángulo dado [*arco capaz de un ángulo*].



120 BOOK III. PROP. XXXV. THEOR.

FIGURE I.

IF *two chords* { , } *in a circle interſect each other, the rectangle contained by the ſegments of the one is equal to the rectangle contained by the ſegments of the other.*

FIGURE I.

If the given right lines paſs through the centre, they are biſected in the point of interſection, hence the rectangles under their ſegments are the ſquares of their halves, and are therefore equal.

FIGURE II.

FIGURE II.

Let paſs through the centre, and not; draw and .

Then × = ² − ² (B. 2. pr. 6.),

or × = ² − ²,

∴ × = × (B. 2. pr. 5.).

FIGURE III.

FIGURE III.

Let neither of the given lines paſs through the centre, draw through their interſection a diameter ,

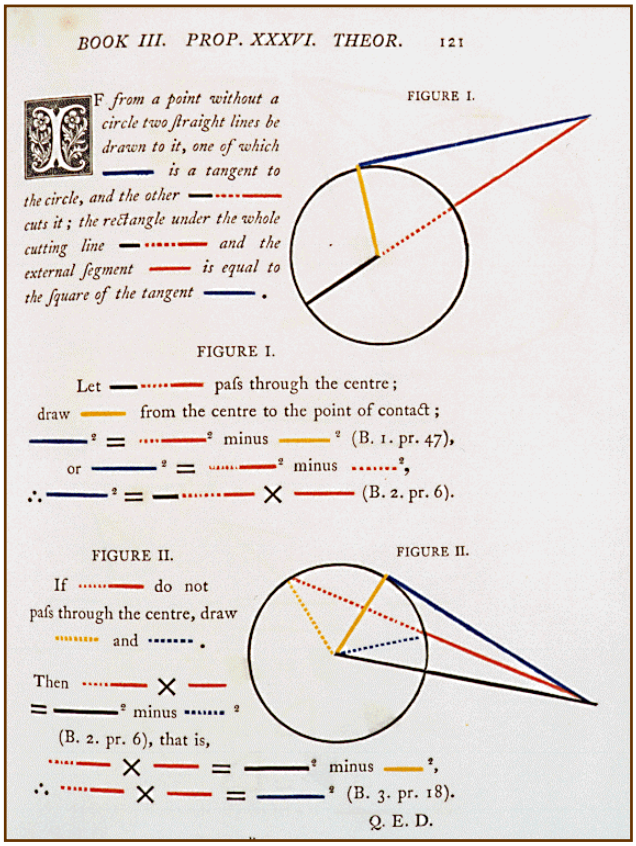
and × = × (Part. 2.),

alſo × = × (Part. 2.);

∴ × = × .

Q. E. D.

Proposición III.35. Potencia de un punto interior respecto de una circunferencia.



BOOK III. PROP. XXXVI. THEOR. 121

IF *from a point without a circle two ſtraight lines be drawn to it, one of which* — *is a tangent to the circle, and the other cuts it; the rectangle under the whole cutting line and the external ſegment is equal to the ſquare of the tangent* .

FIGURE I.

FIGURE I.

Let paſs through the centre;

draw from the centre to the point of contact;

² = ² minus ² (B. 1. pr. 47),

or ² = ² minus ²,

∴ ² = × (B. 2. pr. 6).

FIGURE II.

FIGURE II.

If do not paſs through the centre, draw and .

Then × = ² minus ²

(B. 2. pr. 6), that is,

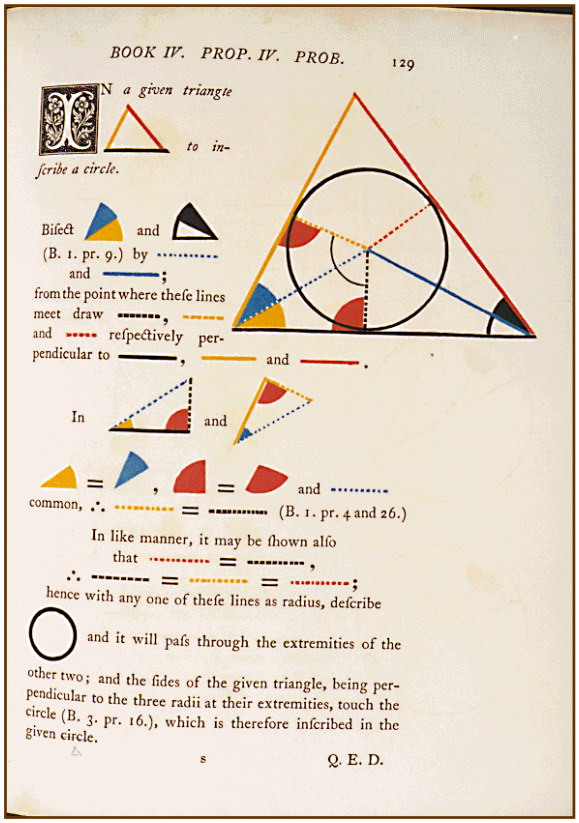
× = ² minus ²,

∴ × = ² (B. 3. pr. 18).

Q. E. D.

Proposición III.36. Potencia de un punto exterior respecto de una circunferencia

PROPOSICIONES DEL LIBRO IV EN LA EDICIÓN DE O.BYRNE



BOOK IV. PROP. IV. PROB. 129

IN *a given triangle* to *inſcribe a circle.*

Biſect and (B. 1. pr. 9.) by and ; from the point where theſe lines meet draw , and reſpectively perpendicular to , and .

In and

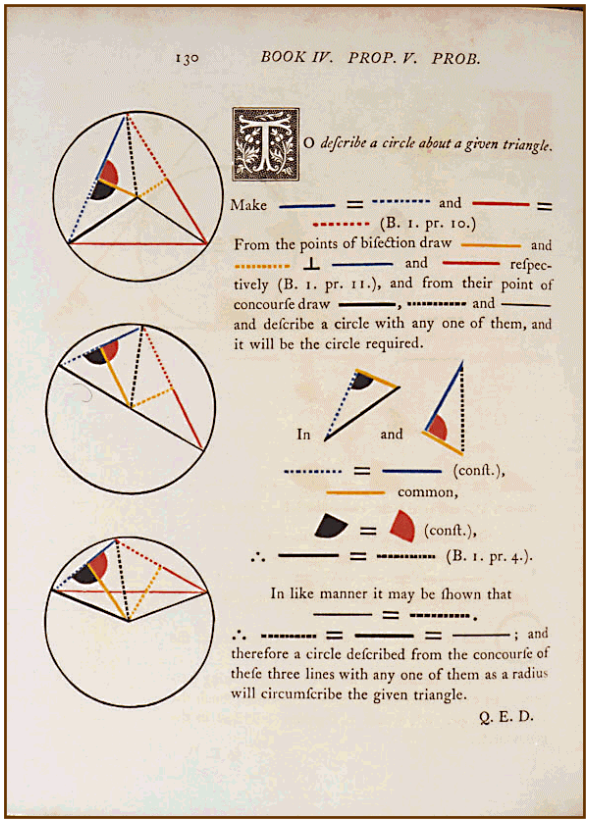
= , = and common, ∴ = (B. 1. pr. 4 and 26.)

In like manner, it may be ſhown alſo that = ,

∴ = = ; hence with any one of theſe lines as radius, deſcribe and it will paſs through the extremities of the other two; and the ſides of the given triangle, being perpendicular to the three radii at their extremities, touch the circle (B. 3. pr. 16.), which is therefore inſcribed in the given circle.

Q. E. D.

Proposición IV.4. Inscribir un círculo en un triángulo dado [*las bisectrices de un triángulo se cortan en un punto, el incentro, que es el centro de la circunferencia circunscrita*].



130 BOOK IV. PROP. V. PROB.

TO *deſcribe a circle about a given triangle.*

Make = and = (B. 1. pr. 10.)

From the points of biſection draw and ⊥ and reſpectively (B. 1. pr. 11.), and from their point of concourſe draw , and and deſcribe a circle with any one of them, and it will be the circle required.

In and

= (conſt.), common,

= (conſt.),

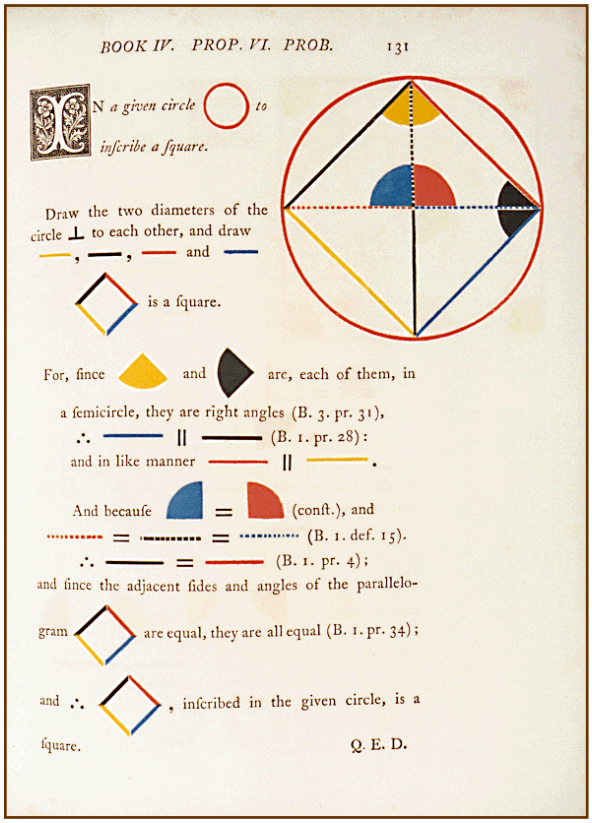
∴ = (B. 1. pr. 4.).

In like manner it may be ſhown that = .

∴ = = ; and therefore a circle deſcribed from the concourſe of theſe three lines with any one of them as a radius will circumſcribe the given triangle.

Q. E. D.

Proposición IV.5. Circunscribir un círculo a un triángulo dado [*las mediatrices de un triángulo se cortan en un punto, el circuncentro, que es el centro de la circunferencia circunscrita*].



BOOK IV. PROP. VI. PROB. 131

IN *a given circle* to *inſcribe a ſquare.*

Draw the two diameters of the circle ⊥ to each other, and draw , , and is a ſquare.

For, ſince and are, each of them, in a ſemicircle, they are right angles (B. 3. pr. 31),

∴ ‖ (B. 1. pr. 28):

and in like manner ‖ .

And becauſe = (conſt.), and = = (B. 1. def. 15).

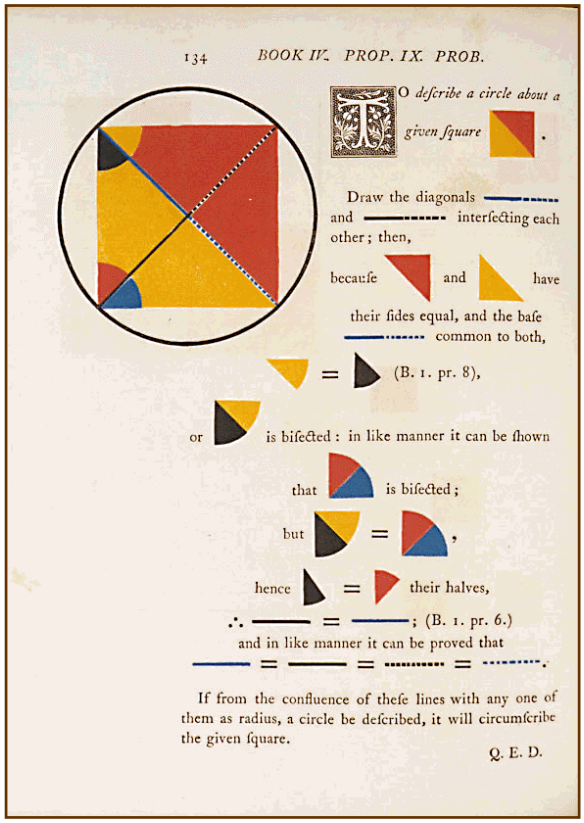
∴ = (B. 1. pr. 4);

and ſince the adjacent ſides and angles of the parallelogram are equal, they are all equal (B. 1. pr. 34);

and ∴ , inſcribed in the given circle, is a ſquare.

Q. E. D.

Proposición IV.6. Inscribir un cuadrado en un círculo dado.



134 BOOK IV. PROP. IX. PROB.

TO *deſcribe a circle about a given ſquare* .

Draw the diagonals and interſecting each other; then,

becauſe and have their ſides equal, and the baſe common to both,

= (B. 1. pr. 8),

or is biſected: in like manner it can be ſhown that is biſected;

but = ,

hence = their halves,

∴ = ; (B. 1. pr. 6.)

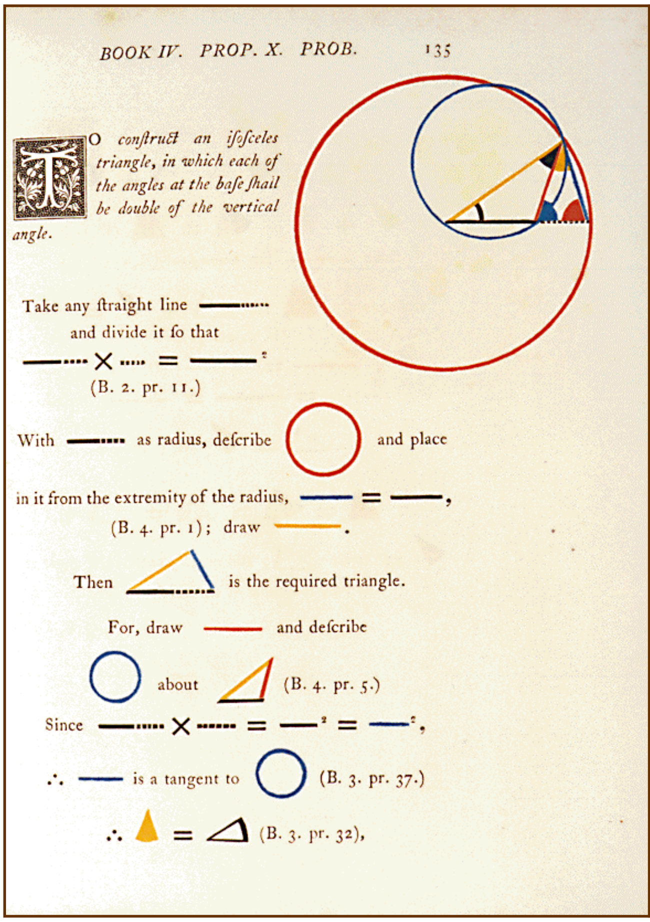
and in like manner it can be proved that = = = .

If from the confluence of theſe lines with any one of them as radius, a circle be deſcribed, it will circumſcribe the given ſquare.

Q. E. D.

Proposición IV.9. Circunscribir un círculo a un cuadrado dado.

PROPOSICIONES DEL LIBRO IV EN LA EDICIÓN DE O.BYRNE



BOOK IV. PROP. X. PROB. 135

TO conſtruct an iſoſceles triangle, in which each of the angles at the baſe ſhall be double of the vertical angle.

Take any ſtraight line and divide it ſo that × = ². (B. 2. pr. 11.)

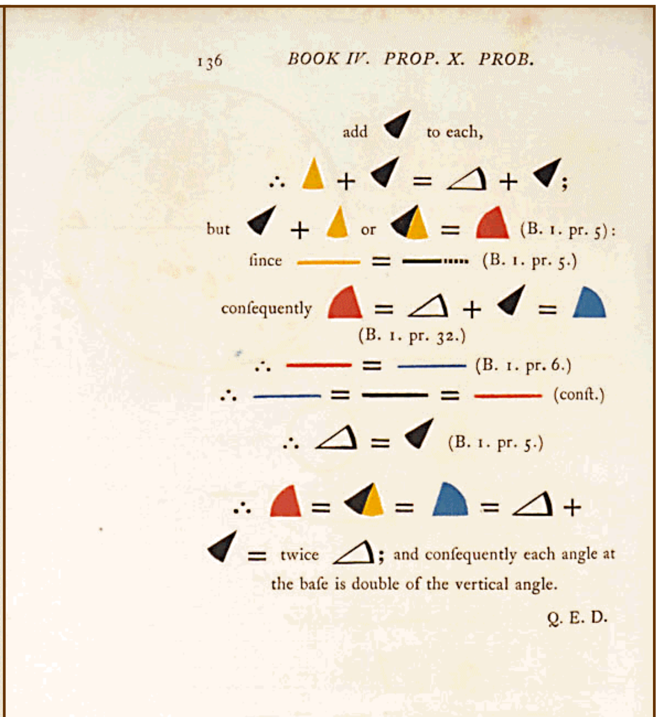
With as radius, deſcribe and place in it from the extremity of the radius, = , (B. 4. pr. 1); draw .

Then is the required triangle.

For, draw and deſcribe about (B. 4. pr. 5.)

Since × = ² = ², ∴ is a tangent to (B. 3. pr. 37.)

∴ = (B. 3. pr. 32),



136 BOOK IV. PROP. X. PROB.

add to each,

∴ + = + ;

but + or = (B. 1. pr. 5):

ſince = (B. 1. pr. 5.)

conſequently = + = (B. 1. pr. 32.)

∴ = (B. 1. pr. 6.)

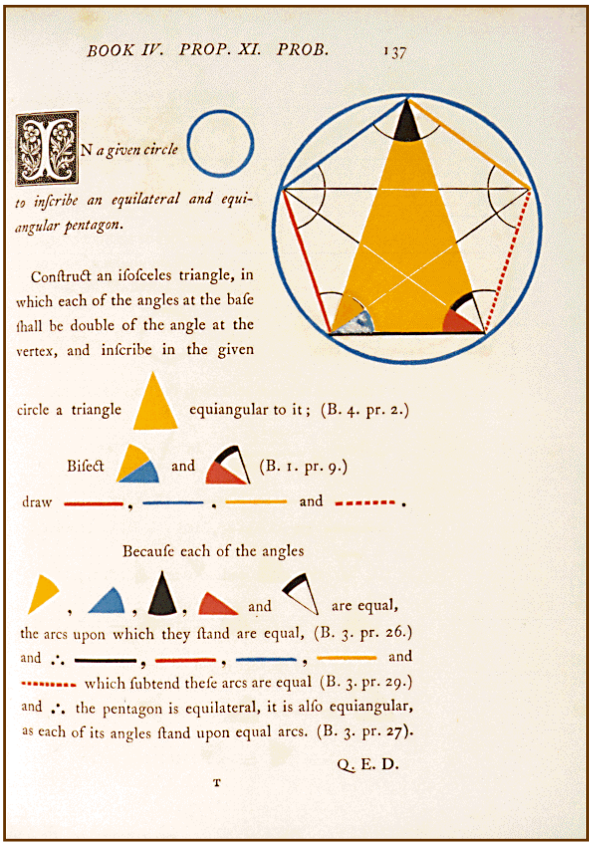
∴ = = (conſt.)

∴ = (B. 1. pr. 5.)

∴ = = = + = twice ; and conſequently each angle at the baſe is double of the vertical angle.

Q. E. D.

Proposición IV.10. Construir un triángulo isósceles cada uno de cuyos ángulos en la base sea doble del ángulo en el vértice [*Triángulo Áureo, construcción de la estrella pitagórica*]



BOOK IV. PROP. XI. PROB. 137

IN a given circle to inſcribe an equilateral and equiangular pentagon.

Conſtruct an iſoſceles triangle, in which each of the angles at the baſe ſhall be double of the angle at the vertex, and inſcribe in the given circle a triangle equiangular to it; (B. 4. pr. 2.)

Biſect and (B. 1. pr. 9.)

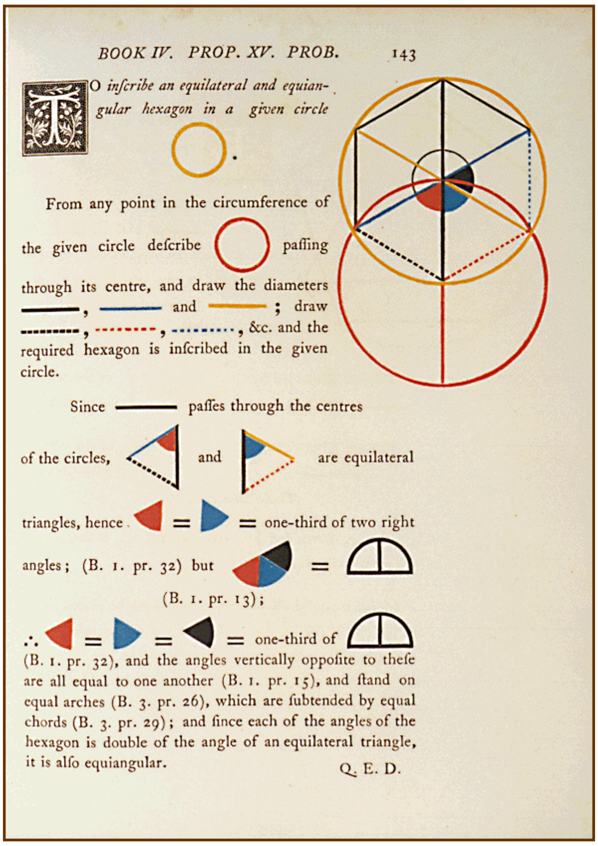
draw , , and .

Becauſe each of the angles , , , and are equal, the arcs upon which they ſtand are equal, (B. 3. pr. 26.) and ∴ , , , and which ſubtend theſe arcs are equal (B. 3. pr. 29.) and ∴ the pentagon is equilateral, it is alſo equiangular, as each of its angles ſtand upon equal arcs. (B. 3. pr. 27).

Q. E. D.

T

Proposición IV.11. Inscribir un pentágono regular en un círculo dado.



BOOK IV. PROP. XV. PROB. 143

TO inſcribe an equilateral and equiangular hexagon in a given circle .

From any point in the circumference of the given circle deſcribe paſſing through its centre, and draw the diameters , and ; draw , , , &c. and the required hexagon is inſcribed in the given circle.

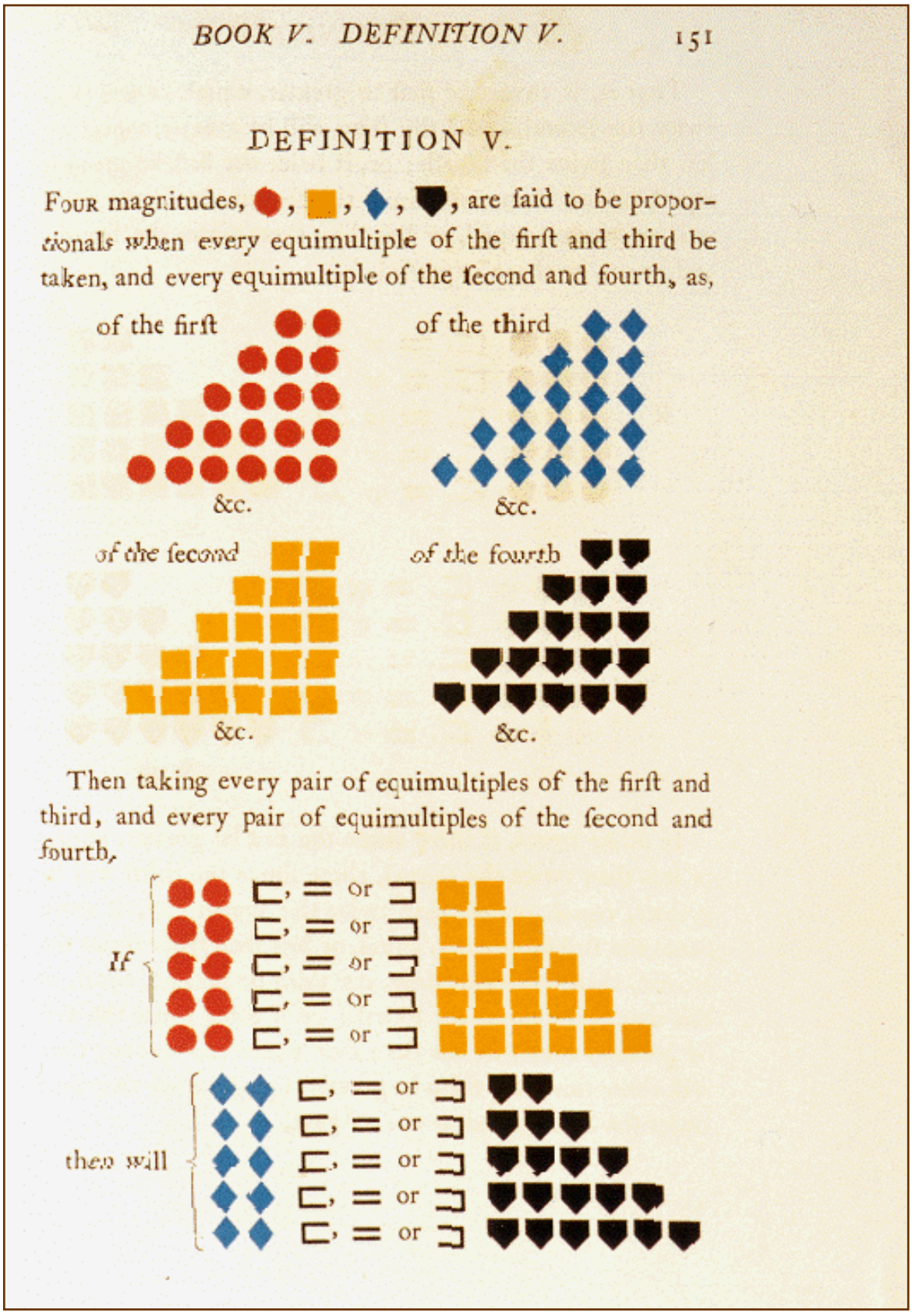
Since paſſes through the centres of the circles, and are equilateral triangles, hence = = one-third of two right angles; (B. 1. pr. 32) but = (B. 1. pr. 13);

∴ = = = one-third of (B. 1. pr. 32), and the angles vertically oppoſite to theſe are all equal to one another (B. 1. pr. 15), and ſtand on equal arches (B. 3. pr. 26), which are ſubtended by equal chords (B. 3. pr. 29); and ſince each of the angles of the hexagon is double of the angle of an equilateral triangle, it is alſo equiangular.

Q. E. D.

Proposición IV.15. Inscribir un hexágono regular en un círculo dado.

PROPOSICIONES DEL LIBRO V EN LA EDICIÓN DE O.BYRNE



BOOK V. DEFINITION V. 151

DEFINITION V.

Four magnitudes, ●, ■, ◆, ▼, are ſaid to be proportionals when every equimultiple of the firſt and third be taken, and every equimultiple of the ſecond and fourth, as,

of the firſt

&c.

of the third

&c.

of the ſecond

&c.

of the fourth

&c.

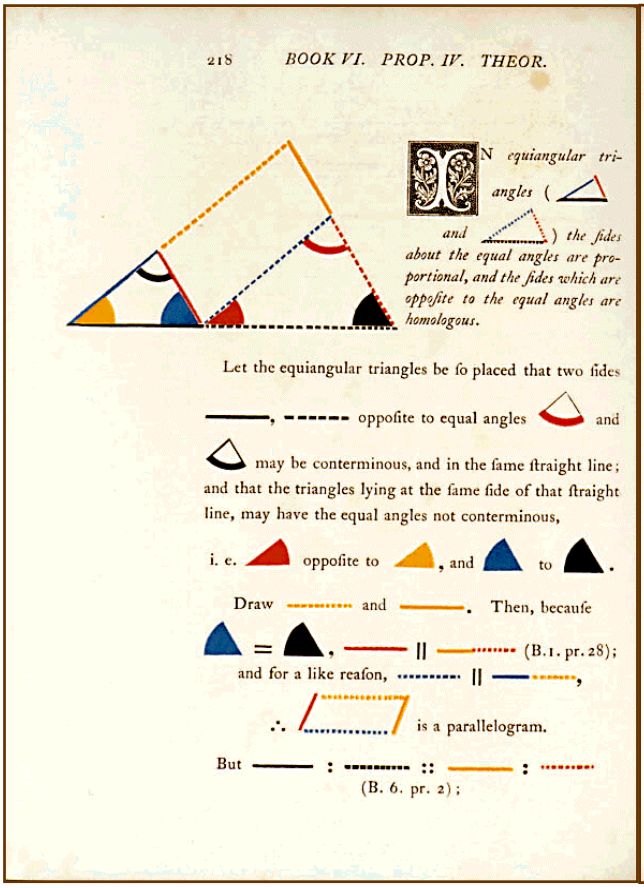
Then taking every pair of equimultiples of the firſt and third, and every pair of equimultiples of the ſecond and fourth,

If ⊏, = or ⊐

then will ⊏, = or ⊐

Definición V.5 de *Igualdad de razones, Principio Fundamental de la Teoría de la Proporción,* introducido por Eudoxo para superar la crisis de fundamentos que trajo el descubrimiento pitagórico de las magnitudes inconmensurables

PROPOSICIONES DEL LIBRO VI EN LA EDICIÓN DE O.BYRNE
CRITERIOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS



218 BOOK VI. PROP. IV. THEOR.

IN *equiangular triangles* (and) *the ſides about the equal angles are proportional, and the ſides which are oppoſite to the equal angles are homologous.*

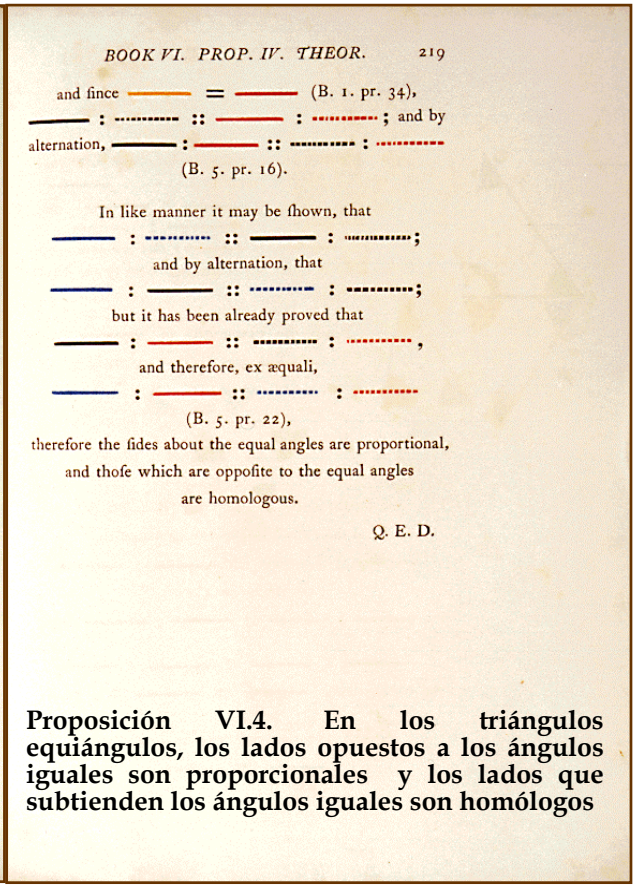
Let the equiangular triangles be ſo placed that two ſides , oppoſite to equal angles and may be conterminous, and in the ſame ſtraight line; and that the triangles lying at the ſame ſide of that ſtraight line, may have the equal angles not conterminous,

i. e. oppoſite to , and to .

Draw and . Then, becauſe = , || (B. 1. pr. 28); and for a like reaſon, || ,

∴ is a parallelogram.

But : :: : (B. 6. pr. 2);



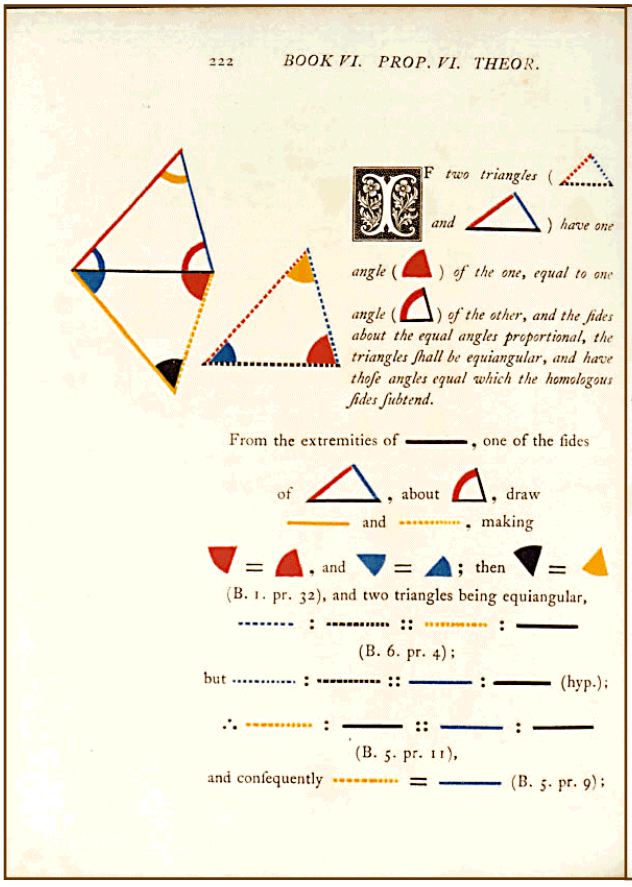
BOOK VI. PROP. IV. THEOR. 219

and ſince = (B. 1. pr. 34), : :: : ; and by alternation, : :: : (B. 5. pr. 16).

In like manner it may be ſhown, that : :: : ; and by alternation, that : :: : ; but it has been already proved that : :: : , and therefore, ex æquali, : :: : (B. 5. pr. 22), therefore the ſides about the equal angles are proportional, and thoſe which are oppoſite to the equal angles are homologous.

Q. E. D.

Proposición VI.4. En los triángulos equiángulos, los lados opuestos a los ángulos iguales son proporcionales y los lados que subtienden los ángulos iguales son homólogos



222 BOOK VI. PROP. VI. THEOR.

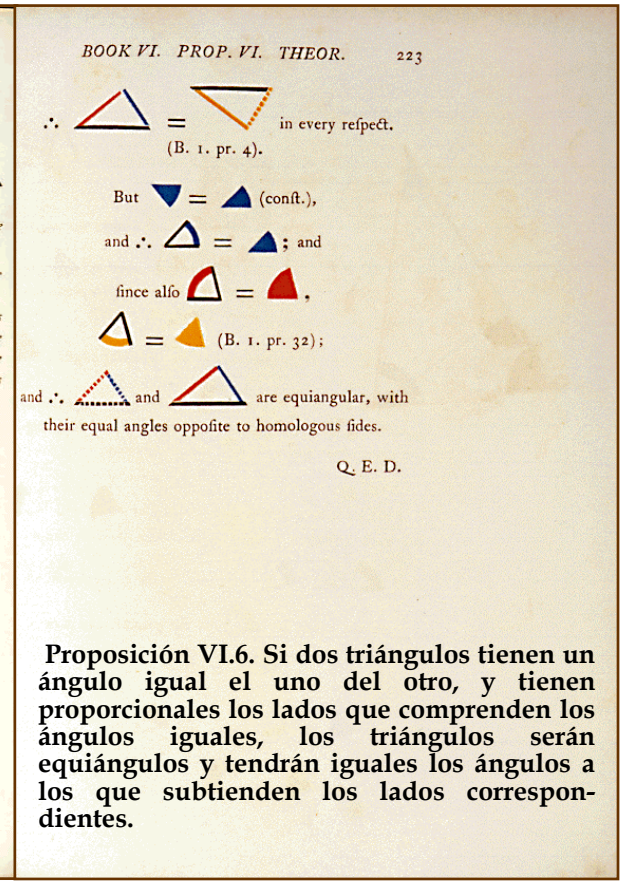
IF *two triangles* (and) *have one angle ( ) of the one, equal to one angle ( ) of the other, and the ſides about the equal angles proportional, the triangles ſhall be equiangular, and have thoſe angles equal which the homologous ſides ſubtend.*

From the extremities of , one of the ſides of , about , draw and , making = , and = ; then = (B. 1. pr. 32), and two triangles being equiangular, : :: : (B. 6. pr. 4);

but : :: : (hyp.);

∴ : :: : (B. 5. pr. 11),

and conſequently = (B. 5. pr. 9);



BOOK VI. PROP. VI. THEOR. 223

∴ = in every reſpect. (B. 1. pr. 4).

But = (conſt.), and ∴ = ; and ſince alſo = , = (B. 1. pr. 32);

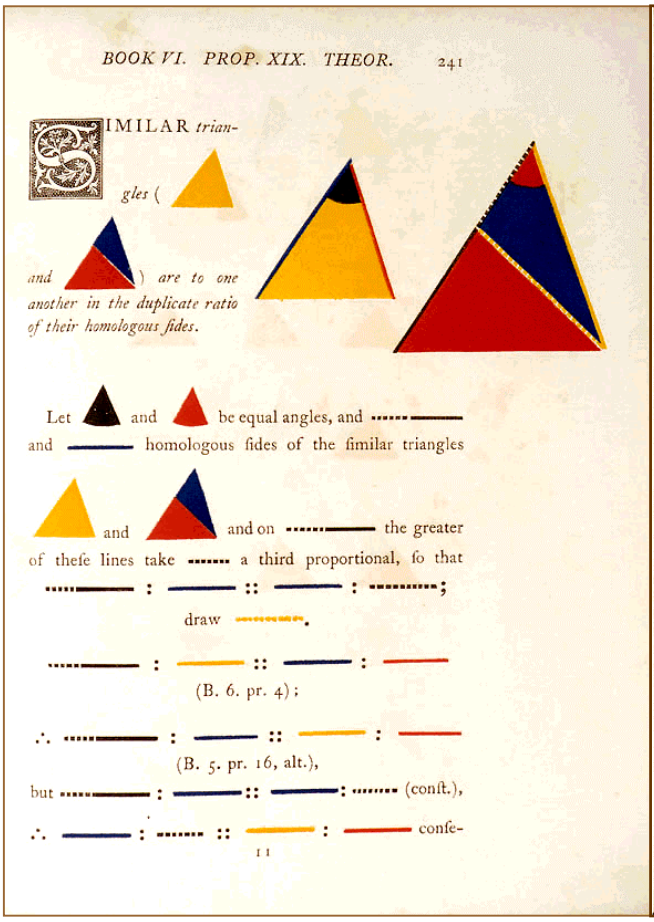
and ∴ and are equiangular, with their equal angles oppoſite to homologous ſides.

Q. E. D.

Proposición VI.6. Si dos triángulos tienen un ángulo igual el uno del otro, y tienen proporcionales los lados que comprenden los ángulos iguales, los triángulos serán equiángulos y tendrán iguales los ángulos a los que subtienden los lados correspondientes.

OTRAS PROPOSICIONES DEL LIBRO VI EN LA EDICIÓN DE O.BYRNE

RAZÓN DE SEMEJANZA Y RAZÓN DE ÁREAS



BOOK VI. PROP. XIX. THEOR. 241

SIMILAR *triangles* ( ) *and* ( ) *are to one another in the duplicate ratio of their homologous ſides.*

Let and be equal angles, and ——— and ——— homologous ſides of the ſimilar triangles and , and on ——— the greater of theſe lines take ——— a third proportional, ſo that ——— : ——— :: ——— : ———;

draw ———.

——— : ——— :: ——— : ———

(B. 6. pr. 4);

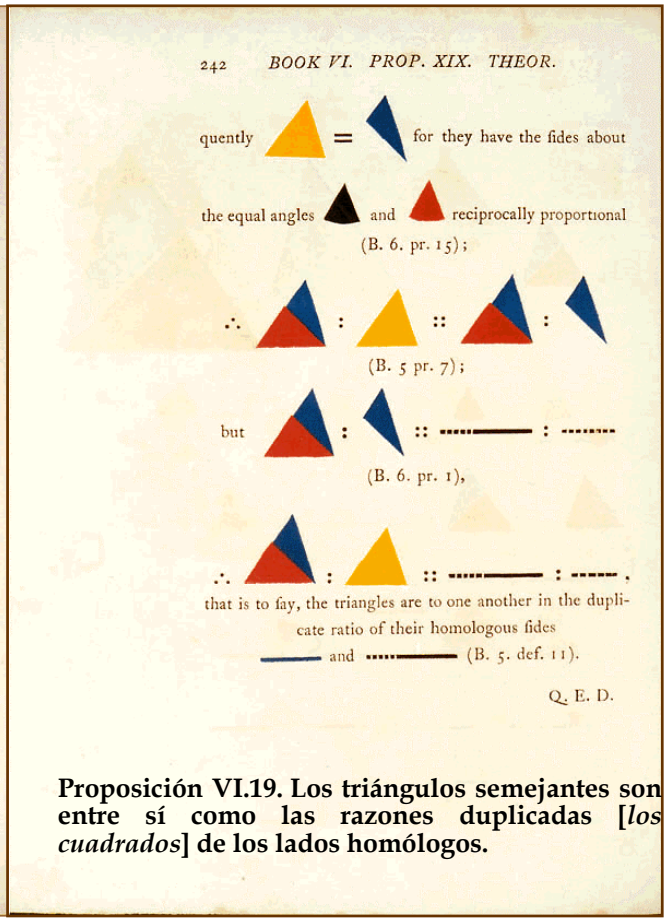
∴ ——— : ——— :: ——— : ———

(B. 5. pr. 16, alt.),

but ——— : ——— :: ——— : ——— (conſt.),

∴ ——— : ——— :: ——— : ——— conſe-

11



242 BOOK VI. PROP. XIX. THEOR.

quently = for they have the ſides about the equal angles and reciprocally proportional

(B. 6. pr. 15);

∴ : :: :

(B. 5 pr. 7);

but : :: ——— : ———

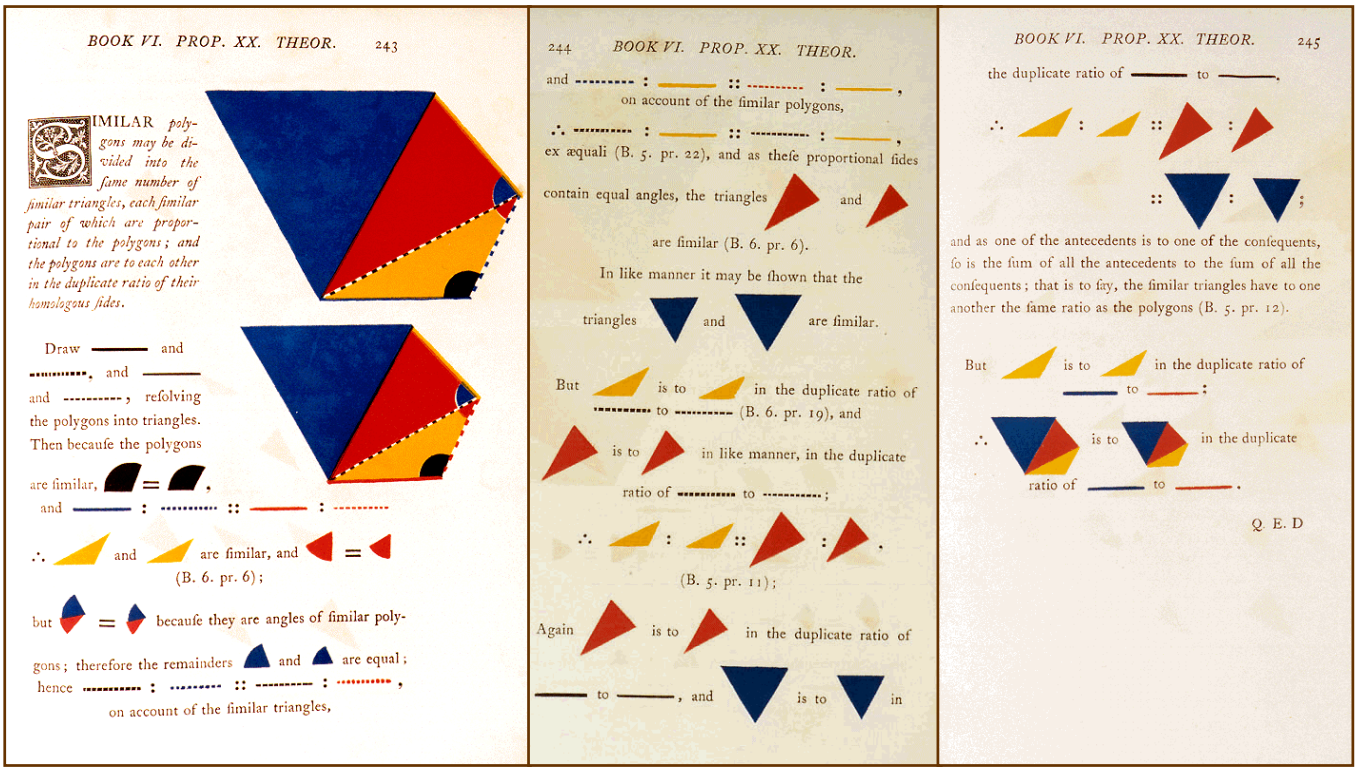
(B. 6. pr. 1),

∴ : :: ——— : ———,

that is to ſay, the triangles are to one another in the duplicate ratio of their homologous ſides ——— and ——— (B. 5. def. 11).

Q. E. D.

Proposición VI.19. Los triángulos semejantes son entre sí como las razones duplicadas [*los cuadrados*] de los lados homólogos.



BOOK VI. PROP. XX. THEOR. 243

SIMILAR *polygons may be divided into the ſame number of ſimilar triangles, each ſimilar pair of which are proportional to the polygons; and the polygons are to each other in the duplicate ratio of their homologous ſides.*

Draw ——— and ———, and ——— and ———, reſolving the polygons into triangles. Then becauſe the polygons are ſimilar, =,

and ——— : ——— :: ——— : ———

∴ and are ſimilar, and =

(B. 6. pr. 6);

but = becauſe they are angles of ſimilar polygons; therefore the remainders and are equal; hence ——— : ——— :: ——— : ———,

on account of the ſimilar triangles,

244 BOOK VI. PROP. XX. THEOR.

and ——— : ——— :: ——— : ———,

on account of the ſimilar polygons,

∴ ——— : ——— :: ——— : ———,

ex æquali (B. 5. pr. 22), and as theſe proportional ſides contain equal angles, the triangles and are ſimilar (B. 6. pr. 6).

In like manner it may be ſhown that the triangles and are ſimilar.

But is to in the duplicate ratio of ——— to ——— (B. 6. pr. 19), and is to in like manner, in the duplicate ratio of ——— to ———;

∴ : :: :

(B. 5. pr. 11);

Again is to in the duplicate ratio of ——— to ———, and is to in

BOOK VI. PROP. XX. THEOR. 245

the duplicate ratio of ——— to ———,

∴ : :: :

:: : ;

and as one of the antecedents is to one of the conſequents, ſo is the ſum of all the antecedents to the ſum of all the conſequents; that is to ſay, the ſimilar triangles have to one another the ſame ratio as the polygons (B. 5. pr. 12).

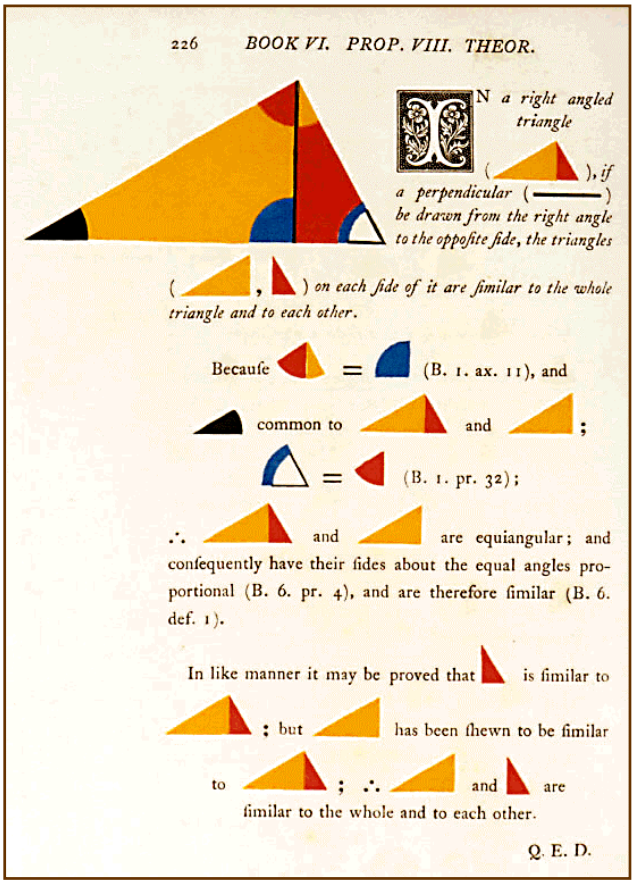
But is to in the duplicate ratio of ——— to ———;

∴ is to in the duplicate ratio of ——— to ———.

Q. E. D

Proposición VI.20. Los polígonos semejantes se dividen en triángulos semejantes e iguales en número y homólogos a los polígonos enteros y un polígono guarda con el otro una razón duplicada de la que guarda el lado correspondiente con el lado correspondiente.

OTRAS PROPOSICIONES DEL LIBRO VI EN LA EDICIÓN DE O.BYRNE



226 BOOK VI. PROP. VIII. THEOR.

IN *a right angled triangle* ( ), *if a perpendicular* ( ) *be drawn from the right angle to the oppoſite ſide, the triangles* (,) *on each ſide of it are ſimilar to the whole triangle and to each other.*

Becauſe = (B. 1. ax. 11), and common to and ;

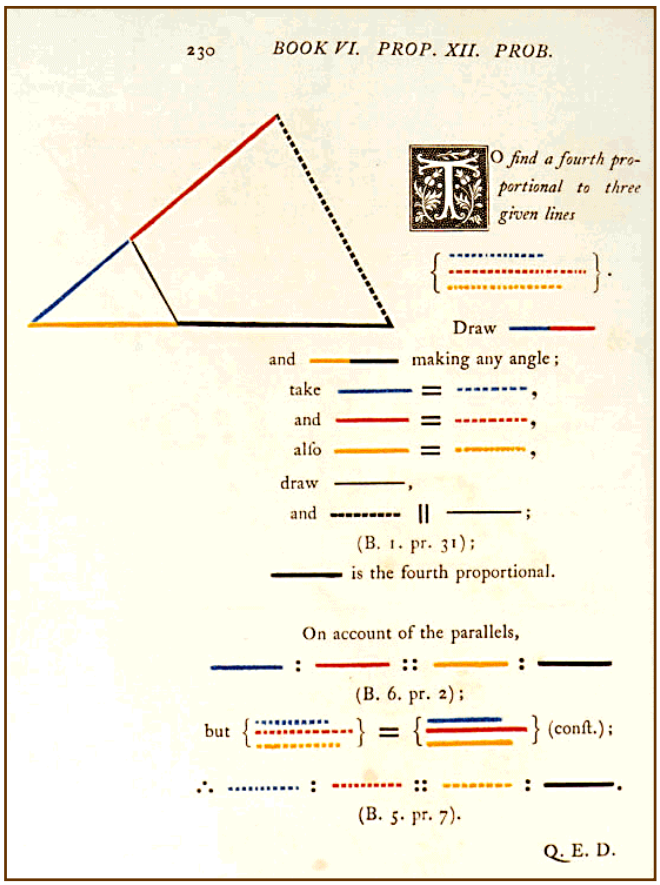
= (B. 1. pr. 32);

∴ and are equiangular; and conſequently have their ſides about the equal angles proportional (B. 6. pr. 4), and are therefore ſimilar (B. 6. def. 1).

In like manner it may be proved that is ſimilar to ; but has been ſhewn to be ſimilar to ; ∴ and are ſimilar to the whole and to each other.

Q. E. D.

Proposición VI.8. ***Teoremas del cateto y de la altura***



230 BOOK VI. PROP. XII. PROB.

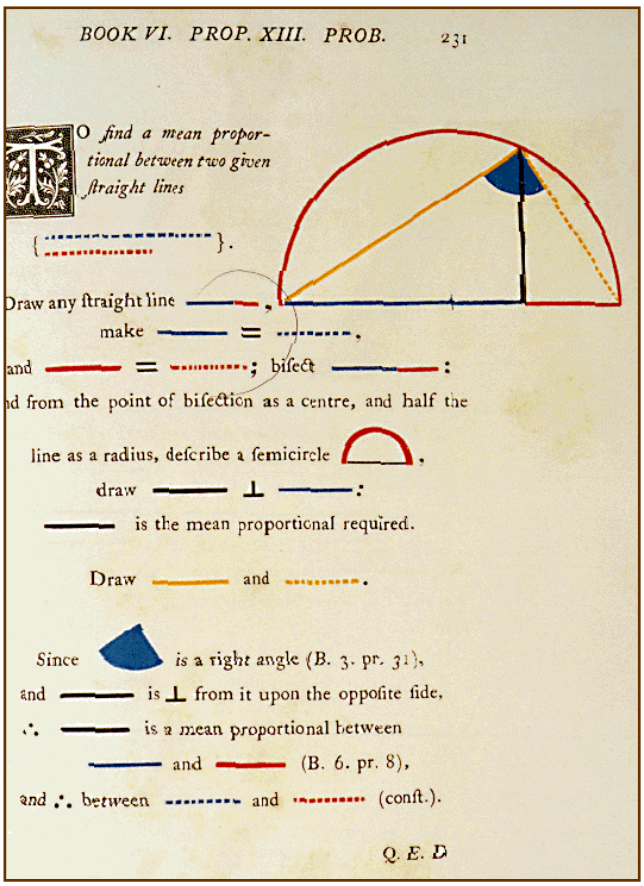
TO *find a fourth proportional to three given lines* { }.

Draw and making any angle;
take = ,
and = ,
alſo = ,
draw ,
and || ;
(B. 1. pr. 31);
is the fourth proportional.

On account of the parallels,
: :: : .
(B. 6. pr. 2);
but { } = { } (conſt.);
∴ : :: : .
(B. 5. pr. 7).

Q. E. D.

Proposición VI.12. Construir la cuarta proporcional a tres rectas dadas.



BOOK VI. PROP. XIII. PROB. 231

TO *find a mean proportional between two given ſtraight lines* { }.

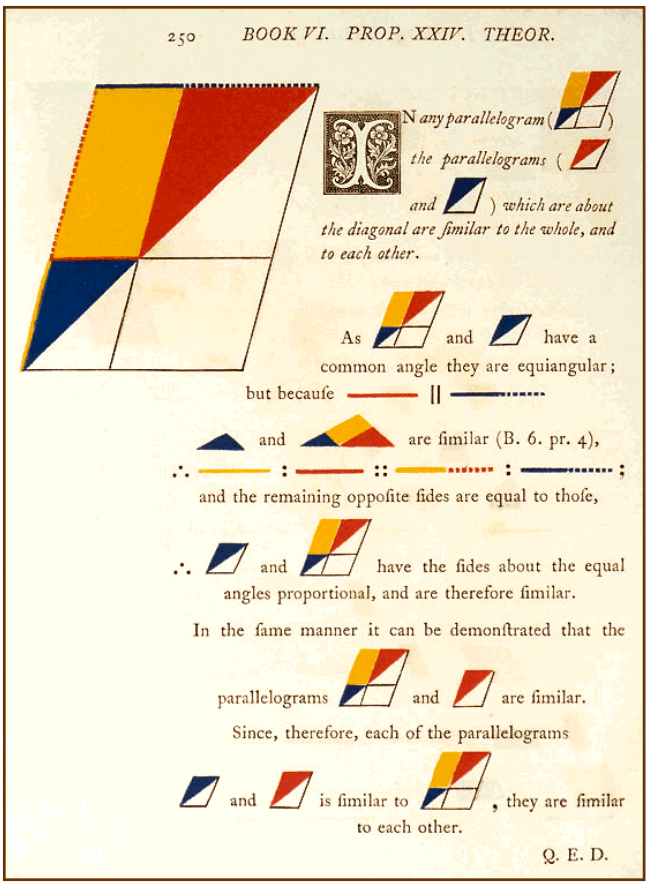
Draw any ſtraight line ,
make = ,
and = ; biſect :
d from the point of biſection as a centre, and half the line as a radius, deſcribe a ſemicircle ,
draw ⊥ :
is the mean proportional required.

Draw and .

Since is a right angle (B. 3. pr. 31),
and is ⊥ from it upon the oppoſite ſide,
∴ is a mean proportional between and (B. 6. pr. 8),
and ∴ between and (conſt.).

Q. E. D.

Proposición VI.13. Construir la media proporcional entre dos rectas dadas



250 BOOK VI. PROP. XXIV. THEOR.

IN *any parallelogram* ( ) *the parallelograms* (and) *which are about the diagonal are ſimilar to the whole, and to each other.*

As and have a common angle they are equiangular;
but becauſe ||
and are ſimilar (B. 6. pr. 4),
∴ : :: : ;
and the remaining oppoſite ſides are equal to thoſe,
∴ and have the ſides about the equal angles proportional, and are therefore ſimilar.

In the ſame manner it can be demonſtrated that the parallelograms and are ſimilar.

Since, therefore, each of the parallelograms and is ſimilar to , they are ſimilar to each other.

Q. E. D.

Proposición VI.24. En todo paralelogramo, los paralelogramos situados alrededor de su diagonal son semejantes al paralelogramo entero y entre sí.

Bibliografía

Los Elementos de Euclides

1. ENRIQUES,F.: *Los Elementos de Euclides y la crítica antigua y moderna*. CSIC, Madrid. 1954.
2. EUCLIDES: *Elementos*. Traducción y notas de M.L.Puertas. Gredos. Madrid, 1996.
3. EUCLIDES: *Elementos*. Traducción y notas J.D. García Bacca. Univ. Nac. Autón. México, 1944.
4. EUCLIDES: *Los seis primeros libros de Los Elementos*. Traducción de Rodrigo Çamorano. Casa de Alonso de la Barrera. Sevilla, 1576. Nueva edición de 1999 de Ed. Universidad de Salamanca.
5. HEAT,T.L.: *Euclid, The thirteen books of The Elements*. 3 Vols. Dover. New York, 1956.
6. PEYRARD,F.: *Les Oeuvres d'Euclide*. Introduction par J.Itard. Blanchard, París, 1966.
7. VERA,F. *Elementos de Euclides* (en *Científicos griegos*. Aguilar. Madrid, 1970. pp. 689-980).

Los Elementos de Euclides en la Web

8. Joyce,D.: Euclid's *Elements*: The text of this version of Euclid's *Elements* is similar to Heath's edition which he translated from Heiberg's definitive edition in Greek, but it is slightly less literal to make it more readable. This edition of Euclid's *Elements* uses a *Java applet* called the *Geometry Applet* to illustrate the diagrams and figures in the *Elements*.
    - http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html

9. Domenech,J.: Euclides. Traducció total al català i parcial al castellà de la web de David Joyce, edició virtual of Euclid's *Elements*. Són pàgines dedicades a Euclides que contenen *Applets* de Java per il·lustrar i poder manipular les figures dels tretze llibres dels *Elements,* possibilitant la interactivitat.
    - http://www.euclides.org/

10. Heath,T.L. : Euclids elements, Books I-IX
    - http://www.headmap.org/unlearn/euclid/before/tradition.htm

11. Byrne,O.: Edition of Euclid. An unusual and attractive edition of Euclid was published in 1847 in England, edited by an unknown mathematician named Oliver Byrne. It covers the first 6 books of Euclid's *Elements of Geometry*, which range through most of elementary plane geometry and the theory of proportions. What distinguishes Byrne's edition is that he attempts to present Euclid's proofs in terms of pictures, using as little text - and in particular as few labels - as possible. What makes the book especially striking is his use of colour. Incidentally, at the time of its publication the first 6 books, which are the ones concerrned with plane geometry, made up the basic mathematics curriculum for many students.
    - http://www.math.ubc.ca/people/faculty/cass/Euclid/byrne.html

12. Fundación San Millán de la Cogolla: *Euclides. Opus Elementorum*... . 282 páginas. Edición íntegra y rarísima. Ratdolt. Venecia (1482).
    - http://www.fsanmillan.org/biblioteca/libro.jsp?libro=5

13. Fitzpatrick*,R.*: *Euclid's Elements in Greek and in English*. the definitive Ancient Greek text of *Euclid's Elements* edited by J.L. Heiberg with an accompanying English traslation (Books I–IV). University of Texas at Austin, 2005.
    - http://farside.ph.utexas.edu/euclid/elements/

14. Gallica*:* Euclide. Les quinze livres des éléments géométriques d'Euclide. Traduicts en françois par D. Henrion. París, 1632.
    - http://visualiseur.bnf.fr/Visualiseur?Destination=Gallica&O=NUMM-68013

Bibliografía de Historia de la Matemática

15. BABINI,J: *Historia sucinta de la Matemática*. Espasa-Calpe, Buenos Aires, 1969. Cap.13.
16. BABINI,J; REY PASTOR,J. *Historia de la Matemática*. Gedisa, Barcelona, 1984. Vol.1. Cap.4.2.
17. BOYER,C.B.: *Historia de las Matemáticas.* Alianza Universidad Textos, Madrid, 1986. Cap.7.
18. BUNT,L.: *The Historical Rootd of Elementary Mathematics*. Dover, NewYork, 1988. Cap.6.
19. COLERUS,E.: *Breve historia de las Matemáticas*, 2 vols. Doncel, Madrid, 1972. Caps.1, 2.
20. DUNHAM,W.: *Viaje a través de los genios*. Pirámide. Madrid, 1992. Caps.2, 3.
21. DUNHAM,W.: *El Universo de las Matemáticas*. Pirámide. Madrid, 1995. Cap.7.
22. EVES,H.: *An Introduction to the History of Mathematics*. CBS College Pub. N.York, 1983. Cap.5.
23. EVES,H.: *Great Moments in Mathematics*. 2 vols. The mathem. assoc. of America, 1977. Cap.4.
24. EDWARDS,H.: *The Historical Development of the Calculus***.** Springer-Verlag, N.York, 1979. Cap.1
25. GARCÍA BACCA,J.D.: *Textos clásicos para la Historia de las ciencias.* Univer.C, Caracas, 1961.
26. GONZÁLEZ URBANEJA,P.M.: *Las raíces del Cálculo Infinitesimal en el siglo* XVII. Alianza Universidad, Madrid, 1992. Cap.1.1.1.
27. GONZÁLEZ URBANEJA,P.M.: *Matemáticas y matemáticos en el mundo griego* (en *El legado de las Matemáticas: de Euclides a Newton, los genios a través de sus libros* pp.24-75).Universidad de Sevilla, 2000.
28. GONZÁLEZ URBANEJA,P.M.: *La aparición de los inconmensurables*. Mundo Científico, 220, pp.56-63. Barcelona, 2000.
29. GONZÁLEZ URBANEJA, P.:2001. *La implicació de la matemàtica en l'educació, segons Plató*. Bulletí 09/2001 ABEAM, pp.13-15, 2001.
30. GONZALEZ URBANEJA, P.M.: *Els sòlids pitagòricoplatònics. Geometria, Art, Mística i Filosofia.* BIAIX, núm. 21, pp.10-24, 12/03.
31. HEAT, T.: *A History of Greek Mathematics*. Dover, New York, 1981. Vol.1. Cap.11.
32. ITARD,J.: *Essais d'Histoire de les Mathematiques*. Blanchard, París, 1984. Cap. II.1.
33. KLINE, M.: *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*. Vol.1. Alianza Universidad, Madrid, 1992. Cap.4.
34. LORIA,G.: *Histoire des sciences mathématiques dans l'antiquité hellénique*. Gauthier-Villars, París, 1929. Cap.3.
35. MANKIEWICZ,R.: *Historia de las Matemáticas*. Barcelona, 2000. Cap.4.
36. MAZA,C.: *Las matemáticas de la antigüedad y su contexto histórico*. Universidad de Sevilla, Junta de Andalucía, RSME, SAEM Thales, 2000.Cap.7.4.
37. MILLÁN,A.: *Euclides, la fuerza del razonamiento matemático*. Nivola. Madrid, 2004.
38. MONTESINOS,J. (Coordinador): *Historia de la Geometría griega*. Actas del Seminario *Orotava* de Historia de la Ciencia. Tenerife, 1992. Caps.11, 12.
39. MONTUCLA,J.: *Histoire des Mathématiques*. Blanchard. París, 1968. Vol.1. Cap.1.4.
40. MORENO,R.: *omar Jayyam*. Nivola. Madrid, 2002. Cap.7.
41. NEUGEBAUER,O.: *The Exacts Sciences in Antiquity*. Dover. New York, 1957. Cap.6.
42. NICOLAU,F.: *La Matemàtica i els matemàtics.* Claret, Barcelona, 2000. Cap.8.
43. NOLLA,R. (2001): *Estudis i activitats sobre problemes clau de la Història de la Matemàtica. Per a una aproximació genètica al tractament de les idees matemàtiques*. Memòria de Llicència d'estudis. Departament d'Ensenyament, Generalitat de Catalunya. Caps. 1, 2, 5.
44. PEDOE,D.: *La Geometría en el arte*. Gustavo Gili, Barcelona, 1979, Cap.5.
45. PLUTARCO: *Vidas paralelas*: *vida de Marcelo* (en *Biógrafos griegos*, págs.340-343), Aguilar, Madrid, 1970)
46. REY,A.: *El apogeo de la ciencia técnica griega*. UTEHA, México 1962. Vol.1. Cap.4.
47. RÍBNIKOV,K.: *Historia de las Matemáticas*. MIR, Moscú, 1974. Cap.3.2.
48. ROUSE BALL,W: *Histoire des Mathématiques***.** Libr. scientifique A.Hermann, París, 1906. Cap.4.
49. SÁNCHEZ PÉREZ,J.: *La Aritmética en Grecia*. Instituto Jorge Juan. CSIC. Madrid. 1954. Cap.3.
50. SCOTT,J.: *A History of Mathematics***.** Taylor and Francis, New York, 1975. Cap.2.
51. SEGARRA,L.: *Els millors problemes. Un viatge matemàtic per Mesopotàmia, Egipte i Grècia*. Magrana, Barcelona.1998. Cap.3.
52. SMITH,D.: *History of Mathematics*. Dover. 2 Vols. New York, 1958. Vol.1, Cap.4.2.
53. TANNERY,P.: *La géométrie grecque*. Gauthier-Villars. París,1887. Ca.7.
54. TATON,R. (compilador): Historia general de las Ciencias*.* Orbis. Barna, 1988, vol.2, Lib.2, cap.2.
55. THE OPEN UNIVERSITY: *Topics in History of Mathematics*. Cap.1. La aparición de la Matemática griega. BBC, TV, Londres, 1987.
56. VAN DER WAERDEN,B.L.: *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*. Springer-Verlag. New York. 1983. Cap.3
57. VEGA, L.: *Las versiones de los Elementos como signos de los tiempos* (en *Contra los titanes de la rutina*), CSIC, Madrid, 1994, págs. 36-50.
58. VERA,F.: *Breve Historia de la Geometría*. Losada. Buenos Aires, 1963. Cap.4.2.

Bibliografía de Filosofía de la Matemática

59. ARISTÓTELES: *Analítica Primera*, *Metafísica*, *Física* (en Obras). Aguilar, Madrid, 1967.
60. ARTMANN,B.: *Euclid–The Creation of Mathematics*. Springer. New York, 1996.
61. BECKER,O.: *Magnitudes y límites del pensamiento matemático*. Rialp, Madrid, 1996. Cap.1.
62. BRUNSCHVICG,L.: *Les étapes de la Philosophie Mathématique*. Blanchard, París, 1972. Cap.6.
63. CAÑÓN,C.: *La Matemática, creación y descubrimiento*. Univ.P.Comillas. Madrid,1993.Cap. IV.
64. COLERUS,E.: *Breve historia de las Matemáticas*, 2 vols. Doncel, Madrid, 1972. Caps.1, 2.
65. COURANT, R ; ROBBINS, : ¿Qué es la Matemática?, Aguilar, Madrid, 1971. Cap.3.
66. DIVERSOS AUTORES: *Historia del Pensamiento*. Ediciones Orbis, Barcelona, 1983. Vol.1.
67. EGGERS,C.: *El nacimiento de la Matemática en Grecia*. EUDEBA. Buenos Aires,1995. Cap.3.
68. FOWLER,D.H.: *The Mathematics of Plato's Academia*. Oxford U.P. New York, 1999. Caps.3,5.
69. FRITZ,K.: *The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum*. Annals of Mathematics, 46, 242-64, 1945.
70. GARDIES,J.: *L'Héritage épistémologique d'Eudoxe de Cnide*. Librairie philosophique Vrin, París, 1988. Caps. 1,2,3,4,5.
71. GÓMEZ PIN,V.: *La tentación pitagórica*. Síntesis, Madrid, 1999. Caps. 2, 9.
72. GONZALEZ URBANEJA,P.M.: *Pitágoras, el filósofo del número*. Nivola, Madrid, 2001. Caps. 1, 5, 4, 6, 7.
73. HARDY,G.: *Apología de un matemático*. Nivola. Madrid, 1999.
74. HILL,J.M.: *The Theory of Proportion*. The Mathematical Gazette, VI, 324–332, 360–368, 1912.
75. JÁMBLICO. *Vida Pitagórica*. Etnos, Madrid, 1991. Cap. XXXIV. 246-247.
76. KLEIN,F.: *Matemática elemental desde un punto de vista superior*. Vol. II. Geometría Biblioteca Matemática. Dtor: J.Rey Pastor. Madrid, 1931. Cap. III.II.3.
77. KNORR,J.M.: *Archimedes and the preeuclidean proportion theory*. Archives Internat. History. Sciences, 28, 183–244,1978.
78. KNORR.W.: *Aristotle and Incommensurability: Some Further Reflections*. Archive for History of Exacts Sciences, 24, 1-9, 1981.
79. KNORR,W. *The evolution of the Euclidian Elements*. D.R.P.Company. Londres, 1990.
80. LEVI,B. *Leyendo a Euclides*. Zorzal, Buenos Aires, 2001.
81. LORENZO,J.: *Introducción al estilo matemático***.** Tecnos, Madrid, 1971. Cap.1.2.
82. PLATÓN: *Obras Completas*. Aguilar. Madrid, 1969.
83. PROCLO DE LICIA (en *Científicos griegos*. Aguilar. Madrid, 1970. pp. 1143–1184).
84. RUSSELL,B.: *Historia de la filosofía occidental*. Austral.Madrid,1995. Vol.1. Lib.1. Caps. 3, 15, 17.
85. SAGAN,C.: *Cosmos*. Planeta, Barcelona, 1980. Cap. 1.
86. VEGA,L.: *La Trama de la Demostración*. Alianza Universidad. Madrid, 1990. Cap.4.
87. SERRES,M. (Compilador): *El Saber griego*. Akal, Madrid, 2000. Caps. 3.3, 3.11, 4.8.
88. SPENGLER,O.: *El sentido de los números* (en *La decadencia de Occidente*. Cap.I.1). Austral, Madrid, 1998.