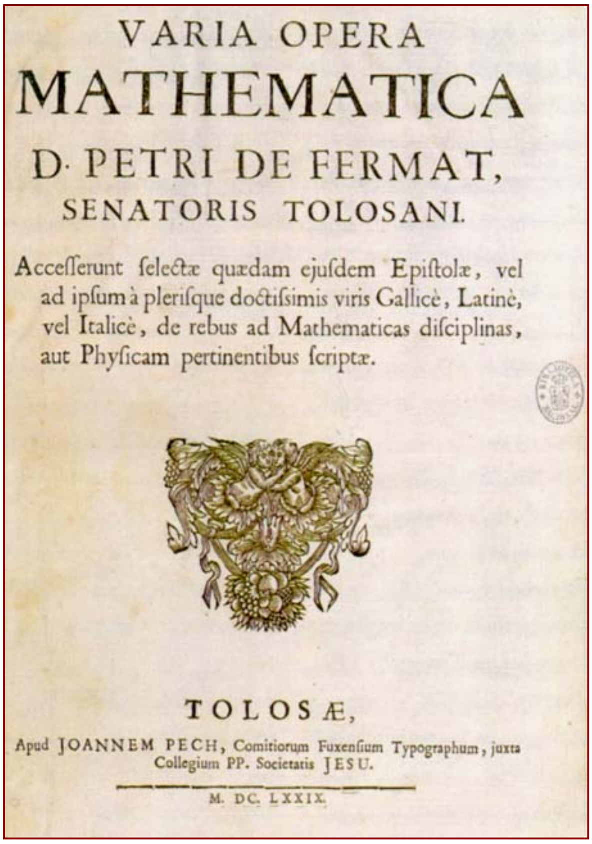
La Historia de la Matemática como recurso didáctico e instrumento de integración cultural de la Matemática

HISTORIA DE LA MATEMÁTICA PARA EL BACHILLERATO

ORÍGENES Y EVOLUCIÓN HISTÓRICA DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA



Pedro Miguel González Urbaneja
pgonzale@pie.xtec.es

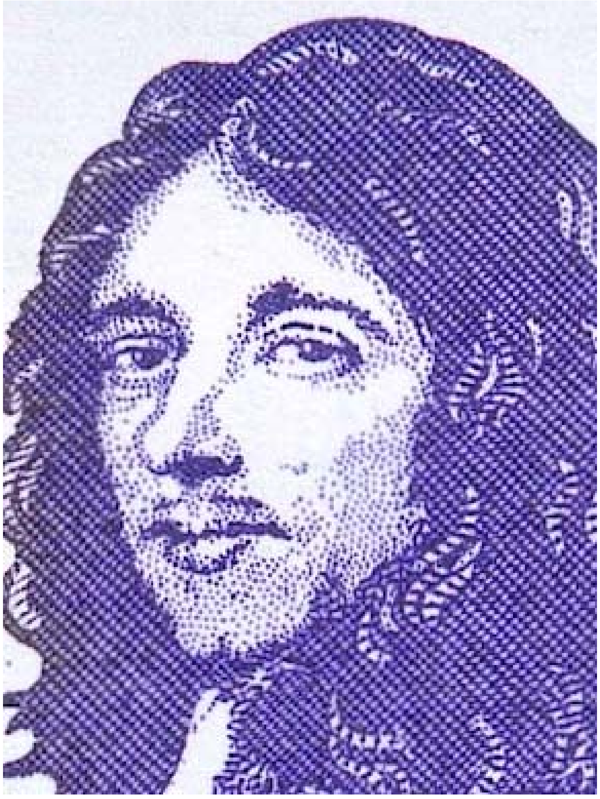
ORÍGENES Y EVOLUCIÓN HISTÓRICA DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

Todos los problemas de Geometría pueden reducirse fácilmente a términos tales, que no es necesario conocer de antemano más que la longitud de algunas líneas rectas para construirlos.
Descartes. *La Geometría* [G.AT.VI. 369].

Y yo espero que nuestros descendientes me estarán agradecidos no sólo por las cosas que aquí he explicado [en *La Geometría*]*, sino también por aquellas que he omitido voluntariamente a fin de dejarles el placer de descubrirlas.*
Descartes. *La Geometría* [G.AT.VI. 485].

Siempre que en una ecuación final se encuentran dos cantidades incógnitas, se tiene un lugar geométrico, describiendo el extremo de una de ellas una línea recta o curva.
Fermat. *Ad Locos Planos et Solidos Isagoge* [TH.OF.III.85]

La Geometría analítica, mucho más que cualquiera de sus especulaciones metafísicas, inmortaliza el nombre de Descartes y constituye el máximo paso hecho en el progreso de las ciencias exactas.
J. Stuart Mill. (citado por E.Bell en *Les grands mathématiciens*. Payot, París, 1950. p.46).



Pedro Miguel González Urbaneja
pgonzale@pie.xtec.es

ORÍGENES Y EVOLUCIÓN HISTÓRICA DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

Introducción: del Álgebra Geométrica a la Geometría Analítica

La Geometría Analítica es la parte de la Matemática que resuelve problemas geométricos bajo el concurso del Álgebra mediante el uso de sistemas de coordenadas. Sus orígenes se remontan por tanto a las raíces históricas de la Geometría y del Álgebra.

El Análisis Geométrico griego utilizaba un equivalente de las coordenadas pero sólo empleaba Álgebra Geométrica. El Arte Analítica de Vieta desarrolla el Álgebra Simbólica pero no usaba coordenadas. Al aunar ambos instrumentos, coordenadas y Álgebra literal, Fermat y Descartes alumbran la Geometría Analítica que establece un puente para transitar entre la Geometría y el Álgebra, al permitir asociar curvas y ecuaciones, a base de aplicar el Análisis algebraico de Vieta a los problemas de lugares geométricos de Apolonio y Pappus, definidos, en un sistema de coordenadas, por una ecuación indeterminada en dos incógnitas. He aquí una síntesis histórica que tomaremos como guía en el estudio de la evolución histórica del Álgebra Geométrica de los griegos hacia la Geometría Analítica de Fermat y Descartes como actuación de la Síntesis Algebraica del Arte Analítica de Vieta sobre el Análisis Geométrico de Apolonio y Pappus.

Se estudia la influencia de cada hito geométrico o algebraico en el hallazgo cartesiano que permite sustituir las complejas construcciones geométricas del *Álgebra Geométrica* de los griegos por sistemáticas operaciones algebraicas mediante un método analítico-sintético de resolución de problemas que posibilita no sólo reconstruir la Geometría clásica con claridad, elegancia, rapidez y plenitud, sino crear, además, una potente heurística geométrica, la Geometría Analítica, como poderoso instrumento de exploración e investigación, mediante el que Fermat y Descartes pudieron y resolver de forma admirable y prodigiosa importantes problemas geométricos, antiguos y nuevos.

Tal como la manejamos y la enseñamos actualmente, la Geometría Analítica cubre, a grandes rasgos, una sucesión de aspectos y etapas esenciales, que de forma simplificada reseñamos a continuación, siguiendo, más o menos, el orden de aparición histórica:

1. La introducción de las coordenadas.
2. El trazado de una curva construyendo ordenadas a partir de abscisas.
3. La aplicación del Álgebra simbólica a los problemas geométricos.
4. La derivación de ecuaciones de los lugares geométricos y la construcción geométrica de las soluciones de ecuaciones.
5. El estudio de las propiedades de las curvas dadas por sus ecuaciones sobre todo de las derivadas de ecuaciones lineales y cuadráticas.
6. La representación gráfica de una curva dada mediante la expresión analítica funcional.
7. La derivación de formulas fundamentales para resolver problemas sobre puntos notables, rectas, planos, ángulos, paralelismo, perpendicularidad, distancias, áreas, etc.
8. La clasificación general de curvas y superficies de segundo orden.

Con toda una serie de limitaciones que iremos apuntando acerca de la ausencia de Álgebra simbólica en la Geometría griega, el primer punto fue cubierto por los griegos, en particular por Menecmo y Apolonio; el segundo pertenece al trabajo de Oresme; Vieta desarrolló el tercero; Descartes se ocupó del cuarto punto y consideró brevemente algunos aspectos del quinto; Fermat se proyectó sobre el quinto apartado y resolvió algunos problemas relacionados con el cuarto; el sexto fue ampliamente cubierto por Euler; el séptimo es iniciado por Euler y continuado por Lagrange, Monge y Lacroix; y el octavo es comenzado por De Witt, Wallis y Stirling para la cónicas, cerrado para éstas por Euler, y ampliamente estudiado para las cuádricas por Euler y Monge.

De forma aproximada éste será el índice que seguiremos en esta exposición sobre los orígenes y la evolución de la Geometría Analítica a lo largo de la Historia de la Matemática. Pero al ser la Geometría Analítica ante todo un método de resolución de problemas geométricos, además de los temas y aspectos concretos reseñados, se presta gran atención a las cuestiones metodológicas como el Análisis geométrico griego del que la Geometría Analítica hereda no sólo el nombre sino también los procedimientos.

Vamos a rastrear los orígenes de la Geometría Analítica desde los primeros balbuceos de la

Matemática helénica, pero, sin menoscabar la importante intervención de Fermat, intentaremos desentrañar las raíces de la Geometría Analítica en el pensamiento de Descartes. Por eso se ha estudiado la importante cuestión del anclaje de *La Geometría* de Descartes en su obra filosófica y en particular en *El Discurso del Método* y en las *Reglas para la dirección del espíritu*, obras donde se sitúa la metodología cartesiana, en particular los preceptos del *Análisis* y la *Síntesis* que Descartes aplicará de forma constante en *La Geometría*.

Aunque a lo largo de este trabajo se alude de forma reiterada a la paternidad compartida de Fermat y Descartes de la Geometría Analítica, nos ha parecido interesante realizar un estudio comparado de las Geometrías de ambos matemáticos, es decir, *La Geometría* de Descartes y la *Isagoge* de Fermat, ya no sólo a base de analizar estos escritos como obras matemáticas, con algunas similitudes y grandes diferencias, en cuanto a estilo, método, aspectos didácticos, la notación, la aplicabilidad, la generalidad, etc., sino sobre todo apuntando al carácter complementario que tienen ambas visiones de la Geometría Analítica primigenia como nexos entre el Álgebra y la Geometría en sentidos opuestos, ya que Descartes estudia ecuaciones por medio de curvas mientras Fermat estudia curvas definidas por ecuaciones.

A continuación se relaciona de forma muy sucinta la rápida evolución de la Geometría Analítica poscartesiana, hasta situarnos en el umbral de la Geometría Analítica moderna, la que se imparte hoy académicamente, salvo en lo que se refiere al instrumento vectorial. Le sigue unas reflexiones sobre la función esencial que cumple el Álgebra en la Geometría Analítica desde el punto de vista del Análisis de los antiguos, con el fin de justificar el propio nombre de *Geometría Analítica*. Y a modo de conclusiones unas consideraciones sobre la trascendencia de una herramienta que arranca en el Álgebra Geométrica de los griegos, se refunda en el siglo XVII con la transformación del Análisis Geométrico de los antiguos en una especie de Geometría Algebraica que realizan Fermat y Descartes, y evoluciona, en los doscientos años siguientes, hasta convertirse en la llamada Geometría Analítica, uno de los instrumentos más potentes que se ha elaborado en la Historia del Pensamiento matemático, y que ha cambiado radicalmente la faz de muchas ramas de la Matemática y de la Ciencia.

Finalmente, reseñamos en un pequeño capítulo una breve cronología de aspectos y elementos de alguna forma vinculados al desarrollo histórico de la Geometría Analítica. Las fechas indicadas son el resultado del cotejo de numerosas obras de Historia de la Matemática, y tienen, por su carácter aproximado, un valor meramente orientativo.

Además de la consulta a diversos textos de Historia de la Matemática, Historia de la Filosofía, Filosofía de la Ciencia y de la Matemática, artículos de revistas científicas, etc., el manantial bibliográfico fundamental utilizado ha sido, por una parte, obras originales de los principales matemáticos griegos (Euclides, Apolonio, Diofanto y Pappus), y por otra de Oresme, Vieta, Fermat y Descartes. En concreto, dignas son de mención las ediciones de Blanchard, en francés, de Paul Ver Eecke de *Las Cónicas* de Apolonio, *La Aritmética* de Diofanto y *La Colección Matemática* de Pappus; las mismas obras en ediciones en español de F.Vera incluidas en *Científicos griegos* (Aguilar, Madrid, 1970). También se ha podido disponer de las *Oeuvres de Fermat*, publicadas tardíamente (entre 1891 y 1912), en cuatro tomos, por Paul Tannery y Charles Henry. La referencia concreta a un pasaje de ellas se hará indicando el tomo y la página a continuación de la partícula TH.OF., por ejemplo TH.OF.III.92 indicará que el texto al que se hace alusión se encuentra en la página 92 del tercer tomo. En cuanto a las obras de Descartes, aparte de diversas ediciones, en español, de *El Discurso del Método* y de las *Reglas para la dirección del espíritu*, la referencia esencial ha sido *Oeuvres de Descartes*, Publicadas por C.Adam et P.Tannery (Librairie philosophique J.Vrin, París, 1964-74), sobre todo el volumen VI que contiene *El Discours de la Méthode* y *La Géométrie* y el volumen X que contiene las *Regulae ad directionem ingenii*. Los textos originales de Descartes que se transcriben se han tomado de aquí. La referencia concreta a un texto de Descartes se hará indicando la página a continuación de la partícula DM.AT.VI. para de *El Discurso del Método*, R.AT.X. para las *Reglas para la dirección del espíritu*, y G.AT,VI, para *La Geometría*. Por ejemplo (G.AT,VI,372) indicará que el texto al que se hace alusión se encuentra en la página 372 del sexto tomo de las Oeuvres de Descartes, que contiene *La Geometría* de Descartes. También han sido de una gran utilidad las ediciones de *La Geometría*, en español (Espasa-Calpe y Alfaguara), inglés (Dover) y en especial la magnífica edición en catalán del Institut d'Estudis Catalans (Barcelona, 1999) con introducción y notas de Josep Pla y Pelegrí Viader.

La esencia de la Geometría Analítica

Para el público en general, incluso para el profesional de las Matemáticas, la Geometría Analítica es un invento de Descartes, de ahí la denominación que adopta a veces de Geometría Cartesiana, aludiendo a la forma latinizada del apellido del gran filósofo francés. De hecho al instrumento escolar básico de la Geometría Analítica se le llama «*coordenadas cartesianas*». Tal nombre no hace justicia a toda una pléyade de brillantes matemáticos que a lo largo de la Historia realizaron la transformación del Álgebra Geométrica de los griegos en la Geometría Analítica académica.

El método de las coordenadas es un procedimiento para determinar la posición de un punto mediante números. Por ejemplo, en el ámbito científico primitivo de la Geografía y la Astronomía ya se habían utilizado coordenadas para determinar la posición de un punto sobre la superficie terrestre –latitud y longitud– o de un astro en el cielo –ascensión recta y declinación–, respectivamente. También en la planificación de las ciudades, por ejemplo, los romanos consideraban dos ejes perpendiculares –el *Decimanus* (de este a oeste) y el *Cardo* (de norte a sur)– a los cuales referían la futura posición de casas, plazas, caminos, etc., tal como después se aplicó en el Plan Cerdà de Barcelona durante el siglo XIX, y antes en las ciudades americanas, donde se eligen como ejes dos calles principales perpendiculares entre sí, de modo que cuando una calle corta a una de las principales cambia de nombre –lo que equivale a la consideración de los signos de los cuadrantes–, produciendo la división en manzanas cuadradas y la asignación, a cada casa, de un número que expresa su distancia a la correspondiente calle principal.

En el juego de ajedrez se utilizan también unas coordenadas peculiares para determinar la situación de las piezas en el tablero mediante números –posición vertical– y letras –posición horizontal– lo que permite una sencilla codificación de cada partida.

La posición de un punto en el plano queda totalmente determinada por sus dos coordenadas con respecto a un sistema de referencia. ¿Pero qué podemos decir de la posición de un punto si sólo se conoce una de las coordenadas? Queda determinada, en general, una línea. He aquí la base del argumento de la novela de Julio Verne *Los hijos del capitán Grant*. Los héroes del relato sólo conocían una de las coordenadas –la latitud 37º 11'– del lugar del naufragio, por lo que la exploración de todos los lugares posibles del siniestro les obligó a dar la vuelta a la tierra a lo largo de un paralelo.

Una relación entre las coordenadas determina, en general, una figura formada por un conjunto de puntos que se llama un *lugar geométrico*. Por ejemplo, si las dos coordenadas son iguales, resulta una recta que es la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.

Vemos pues que la introducción de las coordenadas permite realizar una trasferencia desde el ámbito geométrico de puntos y figuras al ámbito algebraico de números y ecuaciones, de modo que los problemas de la Geometría se pueden plantear en términos algebraicos, donde la resolución es más operativa debido a los instrumentos del cálculo analítico, incluso se puede obviar el dibujo, a veces, debido a coordenadas muy grandes y además, la solución analítica –aritmética y algebraica– siempre será más exacta que la medición sobre la figura geométrica. Por otra parte la determinación de todos los elementos de la figura –por ejemplo, si tal o cual punto pertenece o no a la figura se reconduce a una mera comprobación aritmética sobre la *ecuación* de la figura que se convierte en un ente algebraico íntima y unívocamente vinculado a la figura, de modo que las características geométricas de la figura se pueden descubrir a partir de la naturaleza de su *ecuación*. Es más, las relaciones entre dos figuras se pueden investigar a través de la comparación de sus ecuaciones, y en particular sus puntos comunes resultan de un sistema de ecuaciones. Así, en los casos más sencillos, la mayoría de los problemas relacionados con rectas y circunferencias se reducen a ecuaciones de primer y segundo grado, para cuya resolución existen simples fórmulas generales.

La Geometría Analítica es un poderoso instrumento de ataque de los problemas geométricos que utiliza como herramienta básica el Álgebra. La esencia de su aplicación en el plano es el establecimiento de una correspondencia entre los puntos del plano y pares ordenados de números reales, es decir, un sistema de coordenadas, lo que posibilita una asociación entre curvas del plano y ecuaciones en dos variables, de modo que cada curva del plano tiene asociada una ecuación f(x,y)=0 y, recíprocamente, para cada ecuación en dos variables está definida una curva que determina un conjunto de puntos en el plano, siempre respecto de un sistema de coordenadas. En particular queda establecida una asociación entre rectas del plano y ecuaciones de la forma Ax+By+C=0. La Geometría Analítica es, pues, una especie de diccionario entre el Álgebra y la Geometría que asocia pares de números a puntos y ecuaciones a curvas. Pero esta asociación va mucho más allá de lo gramatical ya que vincula también las sintaxis del Álgebra y de la Geometría, es decir, las relaciones, vínculos y operaciones entre los elementos de ambas. Así pues, para hallar geométricamente la intersección de dos curvas f(x,y)=0, g(x,y)=0 –problema geométrico– habría que resolver algebraicamente el sistema formado por ambas ecuaciones –problema algebraico–. Además, para cada curva f(x,y)=0, la Geometría Analítica establece también una correspondencia entre las propiedades algebraicas y analíticas de la ecuación f(x,y)=0 y las propiedades geométricas de la curva asociada. De hecho, estas propiedades geométricas son el trasunto geométrico de la estructura algebraica de la expresión f(x,y)=0 y se establecen mediante el cálculo literal que permite el Álgebra. En particular la tarea de probar un teorema o resolver un problema en Geometría se traslada de forma muy eficiente a probarlo o resolverlo en Álgebra utilizando el cálculo analítico.

Es indiscutible que Fermat y Descartes son los verdaderos artífices de la Geometría Analítica. Descartes publica en 1637 *La Geometría* (G.AT,VI,367-485) junto con *La Dióptrica y Los Meteoros* como apéndices de su *Discurso del Método* (DM.AT,VI,1-78) o éste como prólogo de aquellos opúsculos. El mismo año, Fermat envía al Padre Mersenne sus investigaciones de alrededor de 1629 contenidas en la memoria (TH.OF.III.85-101) *Introducción a los Lugares Planos y Sólidos* (*Ad Locos Planos et Solidos Isagoge*). Las obras citadas de Descartes y Fermat contienen los fundamentos de la llamada más tarde Geometría Analítica. Estos matemáticos encontraron un terreno muy abonado por el Análisis Algebraico en que Vieta había transformado el Análisis Geométrico de los griegos con la intervención de su incipiente Álgebra simbólica. Así pues, a pesar de la gran aportación de Fermat y Descartes a la Geometría Analítica, con gran reconocimiento por parte del primero y algo menos en el caso del segundo, su pensamiento geométrico es tributario de casi todo el desarrollo matemático anterior, en especial de la Geometría griega –y en particular de Menecmo, Apolonio y Pappus–, y del llamado *Arte Analítica* de Vieta. Además, hay dos eslabones intermedios importantes: el *Álgebra sincopada* de Diofanto y *la Latitud de las formas* de Oresme.

Por su componente algebraico, la notación está intrínsecamente vinculada a los métodos de la Geometría Analítica. Tanto es así, que en todo estudio histórico sobre la Geometría Analítica una parte importante la ocupa la evolución histórica del simbolismo, que alcanza su clímax en los aportes del propio Descartes a la simplificación de la notación algebraica, ingrediente esencial del descubrimiento cartesiano.

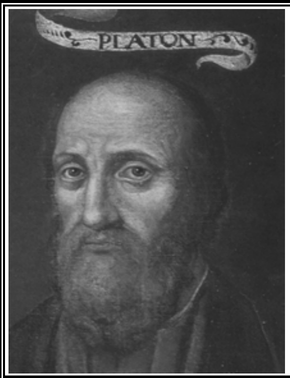
Para encontrar vestigios históricos de Geometría Analítica debemos definir y clarificar los problemas que resuelve esta parte de la Matemática, así como los instrumentos que utiliza, a fin de remontarse a los orígenes y rastrear en la Historia primigenia de la Geometría y del Álgebra todos estos elementos. Bajo este principio aquilataremos en qué dimensión, Menecmo, Euclides, Apolonio, Pappus, Oresme, Vieta e incluso Fermat y Descartes, alcanzaron ciertos desarrollos y aspectos parciales de Geometría Analítica, entendiendo por ésta lo que hemos descrito más arriba como su esencia y que ahora sintetizamos:

> «*La aplicación del Álgebra simbólica al estudio de problemas geométricos mediante la asociación de curvas y ecuaciones indeterminadas en un sistema de coordenadas*».

La Geometría Analítica es algo más que una mera combinación de Álgebra y Geometría. Para poder circular del Álgebra a la Geometría y de la Geometría al Álgebra se necesita como ingredientes ineludibles no sólo el carácter algorítmico operatorio del Álgebra simbólica sino también el uso de las coordenadas. Una aproximación al uso de éstas ya tuvo lugar en la Geometría griega, pero el Álgebra simbólica no se desarrolla de forma satisfactoria hasta los trabajos de Vieta. Al vincular ambos elementos en los desarrollos de Fermat y Descartes, emerge la Geometría Analítica de forma inexorable.

LOS FILÓSOFOS Y MATEMÁTICOS QUE MÁS PARTICIPARON

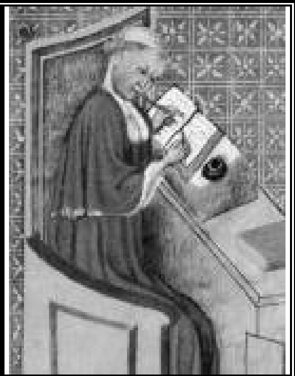
EN EL NACIMIENTO, DESARROLLO Y DIFUSIÓN DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA



PLATÓN

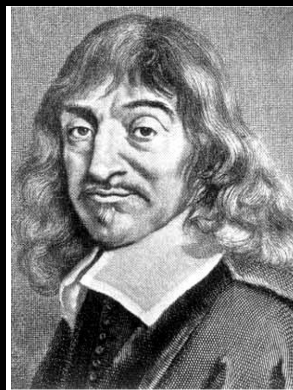

EUCLIDES


APOLONIO

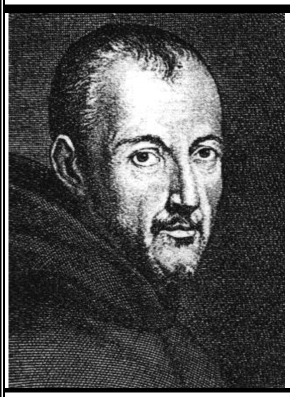

ORESME


VIETA


FERMAT

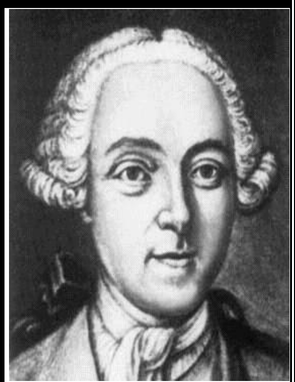

DESCARTES

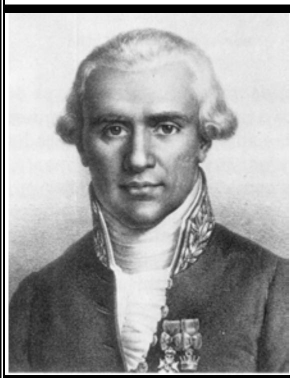

VAN SCHOOTEN

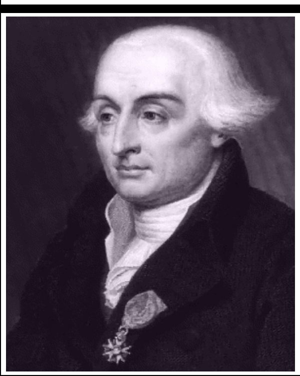

MERSENNE


WALLIS


DE WITT


EULER


MONGE


LAGRANGE


BIOT


TANNERY

Vestigios analíticos en la Matemática griega

El Álgebra Geométrica de *Los Elementos* de Euclides

El alumbramiento de la Geometría Analítica por parte de Fermat y Descartes supone un salto revolucionario sin precedentes en la Historia de la Matemática, por eso para ponderar en su justo valor el nuevo instrumento científico y comprender cómo tuvo lugar su gestación es imprescindible conocer la naturaleza que adoptó la Geometría griega ante la solución que le dio Eudoxo (hacia 370 a.C.), mediante la *Teoría de la Proporción*, a la tremenda crisis de fundamentos provocada por la aparición de los inconmensurables, con la consiguiente estructuración rígida de la Matemática griega elemental en la enciclopédica obra de *Los Elementos* de Euclides, que establece como paradigma un estilo sintético de exposición que oculta la vía heurística del descubrimiento, impulsa la Geometría al margen de la Aritmética, impide el desarrollo de un Álgebra en sentido algorítmico y simbólico y limita la introducción de nuevas curvas a su construcción mediante intersección de superficies o lugares geométricos definidos a través de relaciones de áreas o longitudes, en forma de proporción, y no por medio de ecuaciones.

La solución de Eudoxo, llamada *Teoría de Magnitudes* que se aplica indistintamente a magnitudes conmensurables o inconmensurables, no es plasmada por Euclides en *Los Elementos* hasta llegar al Libro V, lo que le obliga a remodelar con gran ingenio la doctrina geométrica de los cuatro libros anteriores, que son de origen pitagórico, sustituyendo las pruebas pitagóricas por demostraciones independientes de la citada teoría.

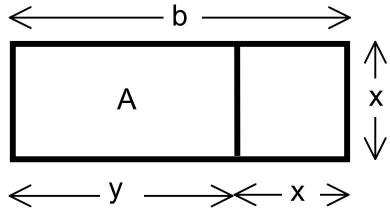
Como consecuencia de la aparición de las magnitudes inconmensurables, los griegos no podían reconocer la existencia de números irracionales, lo que les dificultaba el tratamiento numérico de longitudes, áreas, volúmenes y ángulos. Esta limitación operacional junto a un deficiente sistema de numeración que utilizaba las letras del alfabeto para representar los números enteros, con la consiguiente dificultad para realizar las operaciones, impedía asignar a las figuras geométricas números que midieran sus longitudes, áreas y volúmenes y por tanto los griegos tenían que tratar directamente con las figuras a modo de magnitudes. El abismo infranqueable que se había abierto entre número y magnitud continua impedía someter las magnitudes geométricas a manipulaciones algebraicas, como se hace con los números, lo que determinó la transformación del Álgebra oriental que los pitagóricos habían heredado de los babilonios en el *Álgebra Geométrica* del Libro II de *Los Elementos* de Euclides que juega un papel fundamental en la Geometría griega. Con gran habilidad en la práctica geométrica, los griegos hicieron de su *Álgebra Geométrica* un poderoso instrumento para la resolución de ecuaciones, mediante el método de la *Aplicación de las Áreas*, teoría que según Proclo sería de ascendencia pitagórica.

El *Álgebra Geométrica*, denominación acuñada por el historiador de la Matemática H.G. Zeuthen hacia 1886, viene a ser una geometrización de los métodos algebraicos practicados por los babilónicos, una especie de Geometría algebraica, en la que los números son sustituidos por segmentos de recta y las operaciones entre ellos se llevan a cabo –respetando escrupulosamente la homogeneidad de los términos– mediante construcciones geométricas de la siguiente forma:

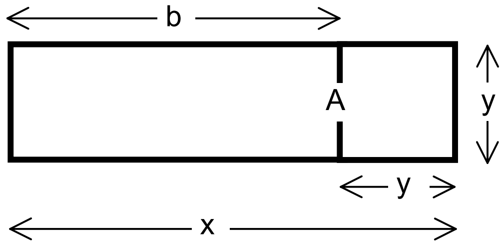
- **La suma de dos números se obtiene prolongando sobre el primero un segmento igual al segundo.**
- **La diferencia de dos números se obtiene recortando del primero un segmento igual al segundo.**
- **El producto de dos números es el área del rectángulo cuyos lados tienen como longitudes esos números.**
- **El cociente de dos números es la razón de los segmentos que los representan (según los principios del libro V de *Los Elementos* de Euclides).**
- **La suma y la diferencia de productos se reemplaza por la adición y sustracción de rectángulos.**
- **La extracción de una raíz cuadrada se establece mediante la construcción de un cuadrado de área equivalente a la de un rectángulo dado (*Euclides* II.14).**

Por ejemplo, el viejo problema mesopotámico en el que dada la suma o diferencia y el producto de los lados de un rectángulo, $x{\cdot}y=A$, $x\pm y=b$, se pedía hallar dichos lados, se interpretaba geométricamente de la siguiente forma:

$$\left.\begin{array}{l} x{\cdot}y = A \\ x+y=b \end{array}\right\} y=b-x \text{ , } x{\cdot}(b-x)=A \text{ , } bx-x^2=A$$

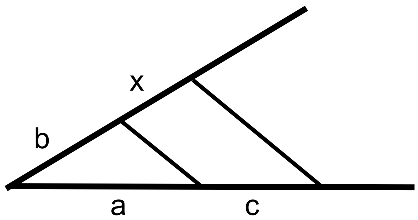


$$\left.\begin{array}{l} x{\cdot}y = A \\ x-y=b \end{array}\right\} x=b+y \text{ , } y{\cdot}(b+y)=A \text{ , } by+y^2=A$$



La solución geométrica lleva a la construcción sobre un segmento b de un rectángulo cuya altura desconocida x debe ser tal que el área del rectángulo en cuestión exceda del área dada A (en el caso de signo positivo) en el cuadrado de lado x; o difiera del área dada (en el caso de signo negativo) en el cuadrado de lado y.

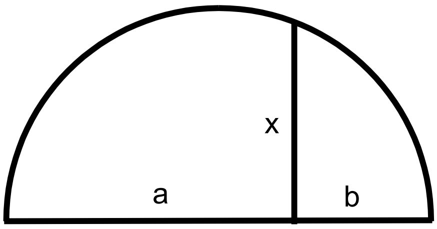
En su Álgebra Geométrica los griegos utilizaron principalmente dos métodos para resolver cierto tipo de ecuaciones, el método de las proporciones y el método de *Aplicación de las Áreas*. El método de las proporciones permite construir exactamente, como se hace hoy, un segmento de línea x dado por:



$$\frac{a}{b}=\frac{c}{x} \text{ , } a{\cdot}x=b{\cdot}c$$

Cuarta proporcional (*Euclides* VI.12)

o bien



$$\frac{a}{x}=\frac{x}{b} \text{ , } x^2=a{\cdot}b$$

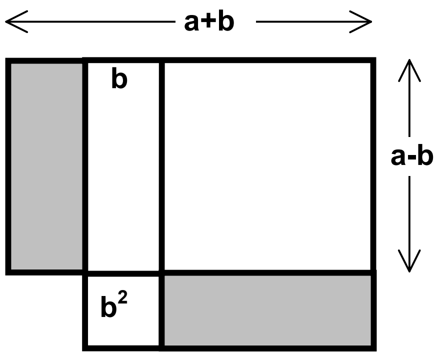
Media proporcional (*Euclides* VI.13)

No obstante la inseguridad provocada por las magnitudes inconmensurables, condujo al intento de evitar a toda costa el uso de razones en la Geometría elemental. Por eso el tratamiento de ecuaciones tan sencillas como $a{\cdot}x = bc$ y $x^2 = ab$, en forma de proporción, tiene lugar en el Libro VI de *Los Elementos* de Euclides, es decir, se retrasa hasta después de desarrollar la *Teoría de la Proporción* de Eudoxo en el libro V.

La parte más importante del *Álgebra Geométrica* de los griegos se encuentra en el Libro II de *Los Elementos* de Euclides. En la actualidad su contenido no juega ningún papel fundamental en los libros de texto modernos. Sin embargo en la Geometría griega ejerce una función primordial. La discrepancia radical entre los puntos de vista griego y moderno estriba en que hoy nosotros podemos disponer de un Álgebra simbólica y una Trigonometría, que han sustituido completamente a sus equivalentes geométricos clásicos, precisamente gracias a las Geometrías de Fermat y Descartes, que aplicando la naturaleza algorítmica del Álgebra a los problemas geométricos alumbraron sus Geometrías Analíticas.

Mientras nosotros representamos las magnitudes con letras que se sobreentiende son números conocidos o desconocidos, con las cuales operamos mediante las reglas algorítmicas del Álgebra, los griegos representaban las magnitudes rectilíneas mediante segmentos de línea recta que debían obedecer a los axiomas y teoremas de la Geometría. Con estos elementos los griegos disponían de un Álgebra –Geométrica– que cumplía a todos los efectos las mismas funciones que nuestra moderna Álgebra simbólica. Cierto es que el Álgebra moderna con su cálculo literal facilita de forma considerable la manipulación de las operaciones y las relaciones entre magnitudes geométricas, pero no es menos cierto que con su Álgebra Geométrica los griegos eran mucho más hábiles que nosotros en la práctica geométrica. Y es que el *Álgebra Geométrica* griega sorprende al estudioso moderno por ser bastante difícil y artificiosa, pero los griegos la utilizaron con soltura y para ellos debió ser una herramienta de utilización necesaria, básica y cómoda.

Así por ejemplo la Proposición II.5 de *Los Elementos* de Euclides:



***Euclides* II.5**
$(a+b)(a–b) +b^2=a^2$

«*Si se divide una recta en partes iguales y desiguales, el rectángulo comprendido por las partes desiguales de la recta entera, más el cuadrado de la diferencia entre las dos partes, es equivalente al cuadrado de la mitad de la recta dada*»

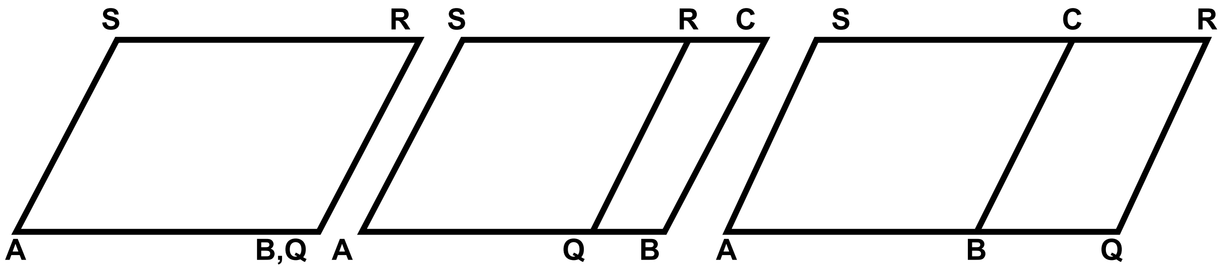
equivale (a pesar del circunloquio retórico) a la identidad algebraica:

$(a + b)\cdot(a–b) + b^2 = a^2$ ó $(a + b)\cdot(a – b) = a^2 – b^2$,

y no es más que la formulación geométrica de una de las leyes fundamentales de la Aritmética –suma por diferencia igual a diferencia de cuadrados–.

La evidencia visual de este teorema para un estudioso griego es muy superior a su contrapartida algebraica para un estudiante actual. Claro está que la demostración rigurosa de Euclides puede ocupar más de una página, pero ¿cuántos estudiantes de Enseñanza Secundaria podrían dar actualmente una demostración detallada y rigurosa de esta y otras reglas algebraicas que con tanta soltura aplican?

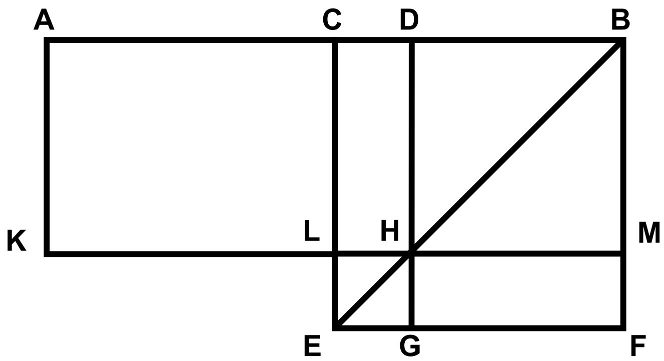
Para explicar de forma más efectiva el método de la aplicación de las áreas, consideremos un segmento de línea AB y un paralelogramo AQRS cuyo lado AQ está a lo largo de AB:



1. Cuando Q coincide con B, se dice que «*el paralelogramo AQRS se ha aplicado sobre el segmento AB*».
2. Cuando Q está entre A y B, se dice que «*el paralelogramo AQRS se ha aplicado sobre el segmento AB de forma elíptica o con defecto el paralelogramo QBCR*».

3. Cuando Q está en la prolongación de AB, se dice que «*el paralelogramo AQRS se ha aplicado sobre el segmento AB de forma hiperbólica o con exceso el paralelogramo QBCR*».

Volviendo a la Proposición II.5 de *Los Elementos* de Euclides, para su demostración consideremos la figura siguiente:



Sea AB el segmento de línea recta dado, dividido de forma igual por C y de forma desigual por D, la proposición establece que: $AD \cdot DB + CD^2 = CB^2$.

Tomando AB=2a, AC=a, CD=b, resulta la identidad algebraica:

$(a + b)\cdot(a–b) + b^2 = a^2$.

Simplificando el lenguaje retórico de Euclides tenemos:

$AD \cdot DB + CD^2$ = AKHD + LEGH = AKLC + CLHD + LEGH =

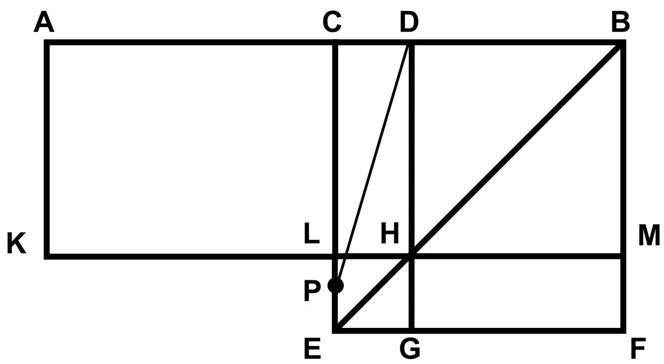
= CLMB + CLHD + LEGH = CLMB + HGFM + LEGH = CB^2.

Digamos que más importante que la demostración exhibida, es el diagrama que utiliza Euclides en esta demostración porque es un esquemas gráfico que jugarían un papel fundamental en la resolución geométrica de ecuaciones cuadráticas.

En efecto: sea resolver en la Geometría griega la ecuación $ax–x^2=b^2$, es decir, encontrar un segmento de línea x que cumpla la condición expresada por la ecuación $ax–x^2=b^2$, donde a,b son segmentos tales que a>2b.

Sea ahora AB=a, y sea C el punto medio de AB, levantemos por C una perpendicular CP de longitud igual a b. Con centro en P y radio a/2 tracemos una circunferencia que corte a AB en el punto D.

Construyamos sobre AB un rectángulo ABMK de anchura BM=BD y completemos el cuadrado BDHM. Este cuadrado es el área x^2 que cumple la condición expresada por la ecuación cuadrática. En lenguaje griego de la *Aplicación de las Áreas* se ha aplicado de *forma elíptica* al segmento AB=a un rectángulo AH de área $(a–x)\cdot x$, es decir $ax–x^2$, que es igual a un cuadrado dado b^2, y que es deficiente del rectángulo AM en un cuadrado DM. La demostración de este hecho viene dada por la Proposición Euclides II.5, según la cual el rectángulo ADHK es igual al polígono cóncavo CBFGHL, es decir, difiere de $(a/2)^2$ en el cuadrado LHGE cuyo lado es por construcción CD= $\left[\sqrt{(a/2)^2 - b^2}\right]$.



Sintetizando los cálculos geométricos:
AB=a, AC=CB

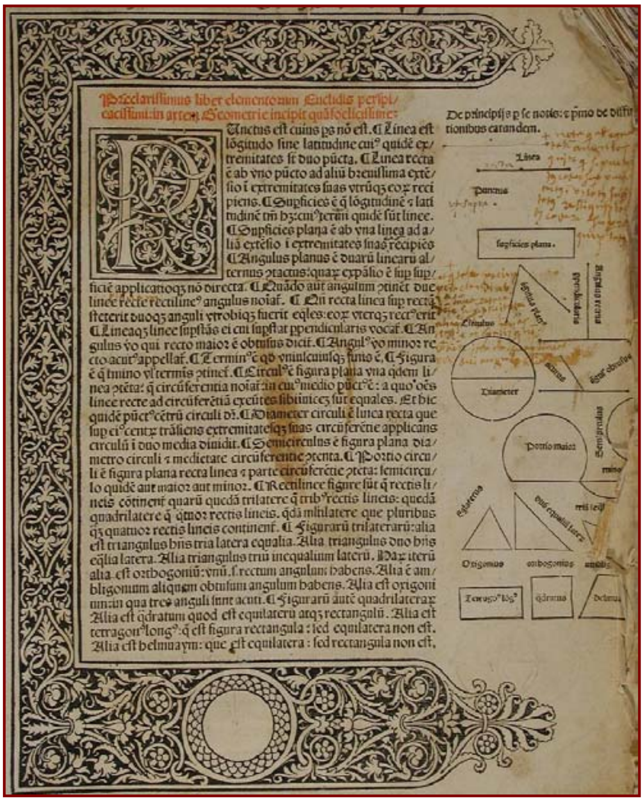
CP=b, PD=a/2, LH=CD=$\left[\sqrt{(a/2)^2 - b^2}\right]$.

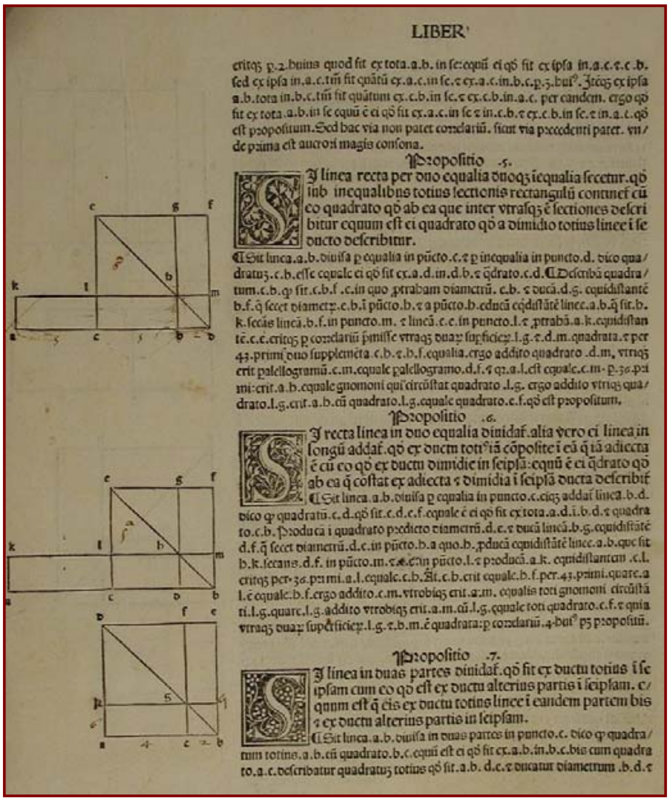
Rectángulo ABMK (BM=BD)
Cuadrado BDHM = x^2 .
Euclides II.5: $AD \cdot DB+CD^2=CB^2$.
ADHK + LHGE = CBFE ,
ADHK = ABMK – BDHM ,
ADHK = CBFE – LHGE ,
ABMK–BDHM=CBFE–LHGE

$ax – x^2 = (a/2)^2 – \left[\sqrt{(a/2)^2 - b^2}\right]^2 = b^2$.

De manera similar Euclides resuelve la ecuación cuadrática $ax+x^2=b^2$ en la Proposición II.6.

EL ÁLGEBRA GEOMETRICA DEL LIBRO II
DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES



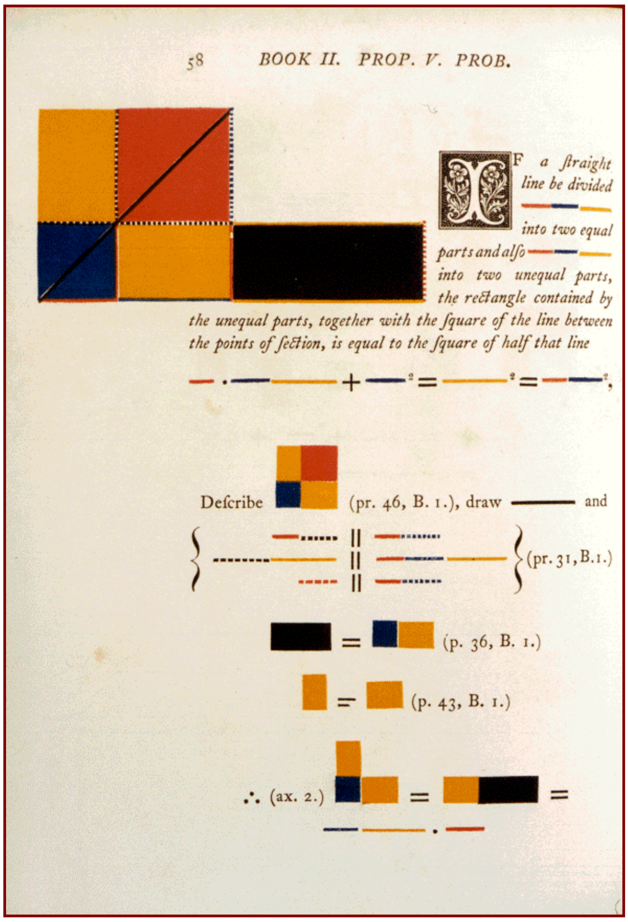


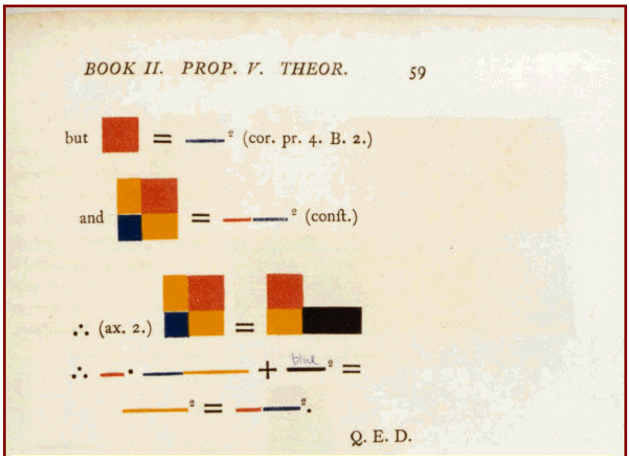
1. **Portada de la primera impresión de *Los Elementos de Euclides* (E.Ratdolt, Venecia, 1482). Esta edición se hizo a partir de una versión arábigo-latina comentada por Campano de Novara a mediados del siglo XIII. Seguramente este texto contiene la primera impresión de figuras geométricas en un libro de contenido matemático. Para ello dispone de un margen de 8 cm. Este ejemplar procede de la Biblioteca Monástica de Yuso del Monasterio de San Millán de la Cogolla.**
2. **Las Proposiciones II.5, II.6 y II.7 del Álgebra Geométrica del Libro II de *Los Elementos* de Euclides en esta edición.**

Los Elementos **son una compilación enciclopédica de la Geometría elemental griega en la que Euclides establece un estilo axiomático-deductivo de exposición y de demostración en Matemáticas, a base de ordenar en una secuencia jerárquica lógica los resultados geométricos de sus antecesores. En esta monumental obra, Euclides plasma en un cuerpo de doctrina geométrica la forma definitiva que debía estructurar toda la Matemática griega después de la solución que dio la *Academia* platónica a la tremenda crisis de fundamentos que produjo la aparición de las magnitudes inconmensurables. El sintético estilo euclídeo de exposición y demostración, que establece un severo e impecable rigor como supremo valor lógico y que oculta la vía heurística del descubrimiento alcanzado por vía analítica o mecánica, se impondrá como paradigma normativo en los más importantes tratados de la Matemática griega, en particular *Las Cónicas* de Apolonio y *Las Obras* de Arquímedes, y será duramente criticado por Descartes en la IV Regla de las *Reglas para la dirección del espíritu***

Tras la aparición de las magnitudes inconmensurables, los griegos no podían admitir la existencia de números irracionales y por tanto no había trato numérico de longitudes y áreas. Esta situación impedía asignar a las figuras geométricas números que midieran sus longitudes o áreas, de modo que no era factible someterlas a manipulaciones algebraicas, como se hace con los números, así que había que operar directamente con las figuras que se trataban como magnitudes. Así aparece el llamado *Álgebra Geométrica* de los griegos del Libro II de *Los Elementos* de Euclides como una especie de algoritmo geométrico que permitía resolver los problemas sin recurrir al cálculo literal. Los números son sustituidos por segmentos de recta y las operaciones entre ellos se llevan a cabo mediante construcciones geométricas, por ejemplo, la suma de dos números se realiza yuxtaponiendo segmentos, el producto se convierte en el área del rectángulo de lados las longitudes de esos números y la extracción de una raíz cuadrada es equivalente a la construcción de un cuadrado cuyo área es igual a la de un rectángulo dado. En las primeras diez proposiciones del Libro II Euclides establece la equivalencia geométrica de las principales identidades algebraicas muy habituales en la práctica escolar. Además, las figuras geométricas que utiliza Euclides permiten utilizar el *Álgebra Geométrica* como un eficaz instrumento para la resolución de ecuaciones cuadráticas, mediante el método de la *Aplicación de las áreas* (que se generalizará en el Libro VI), lo que supone que el Libro II juegue un papel fundamental en la Geometría griega.

LA PROPOSICIONES II.5 Y II.6 EN LA EDICIÓN DE OLIVER BYRNE DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES

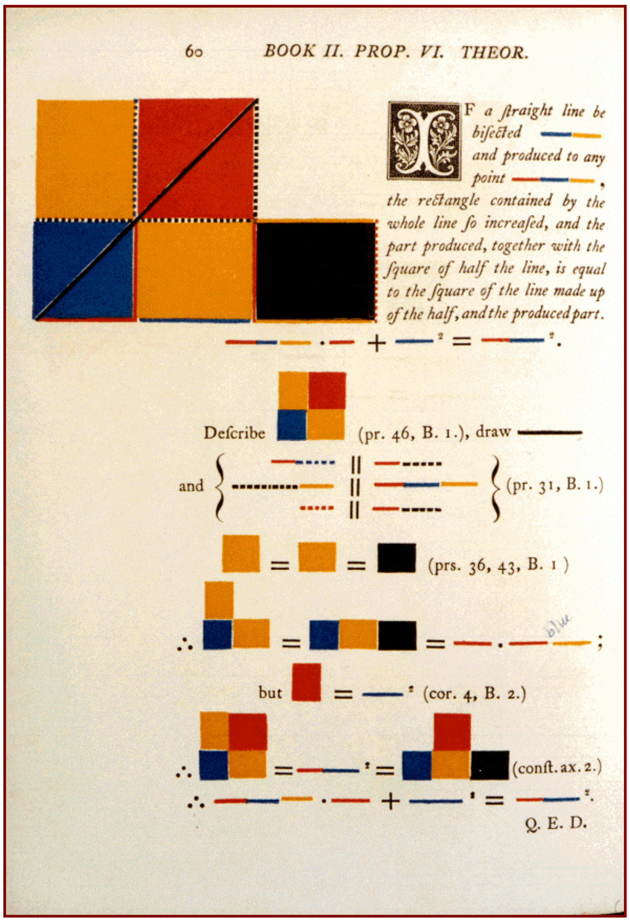


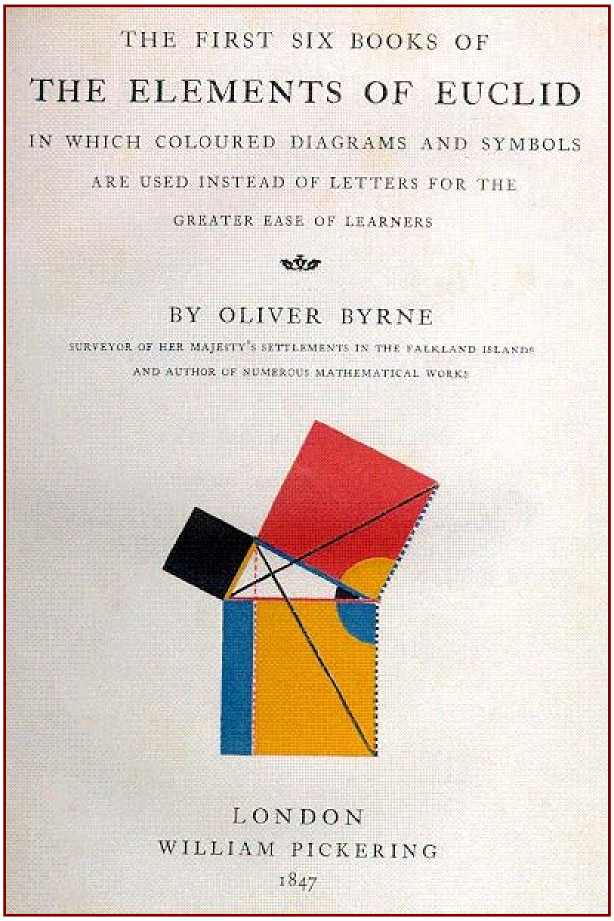


1. La Proposición II.5.
2. La Proposición II.6.
3. Portada. Colbeck collection (Library of the University of British Columbia.

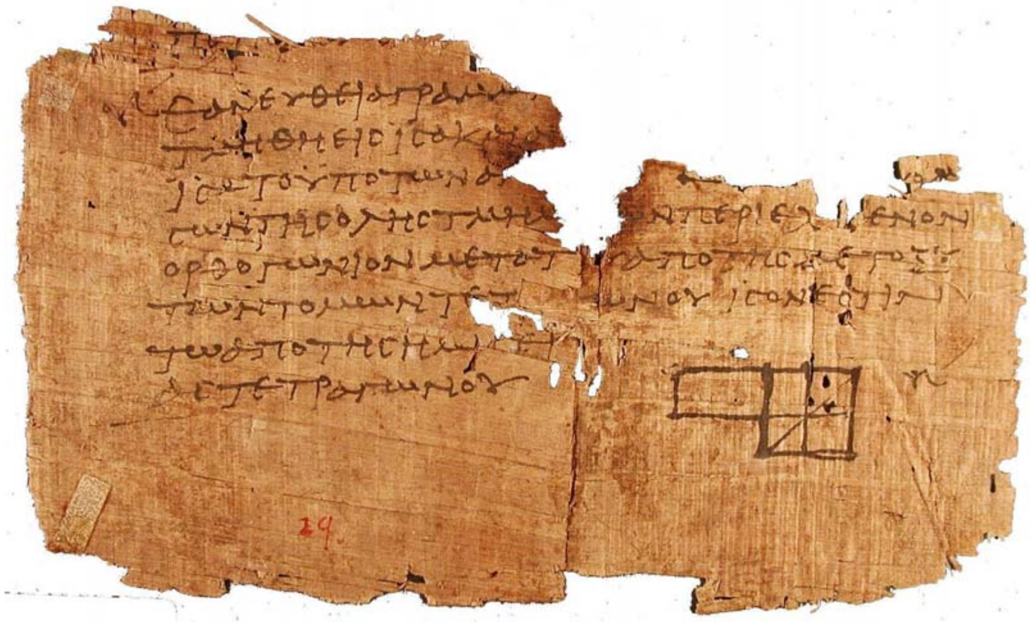
La edición de Oliver Byrne (Londres,1847) de *Los Elementos* de Euclides lleva por título: *The first six books of the Elements of Euclid, in which coloured diagrams and symbols are used instead of letters for the greater ease of learners.*.

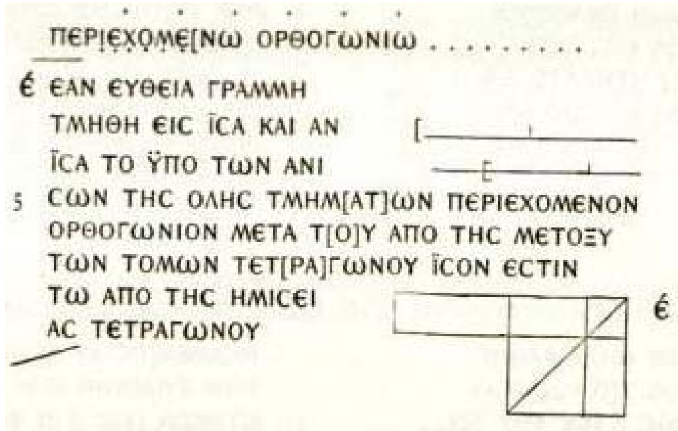
En esta edición hay un despliegue inusitado de preciosas ilustraciones en color que son magníficos diagramas descriptivos de las construcciones de Euclides, de modo que, como escribe Byrne, en su larga introducción explicativa, la verdad se pone de manifiesto con la «*demostración ocular*», en la que juega un papel fundamental no sólo la forma sino sobre todo el color.





EL MÁS ANTIGUO DOCUMENTO SOBRE LA *APLICACIÓN DE LAS ÁREAS*





Fragmento de un papiro, que data de 75-125 d.C. Es quizá el más antiguo resto de diagramas de proposiciones de *Los Elementos* de Euclides. Fue encontrado en excavaciones de los años 1986-87 en una antigua torre de Oxyrhynchus, cerca de Behnesa (Egipto). Se conserva en la Universidad de Pennsylvania. El fragmento contiene el enunciado en griego y una figura auxiliar de la Proposición II.5 de *Los Elementos* de Euclides.

La *Aplicación de las Áreas* se convirtió para los griegos en una de las técnicas más importantes en Geometría como útil instrumento de Álgebra Geométrica para la resolución de ecuaciones. En principio debió de ser ideado para sustituir al método de las proporciones, ya que el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables hizo prácticamente inviable el uso de las mismas en el tratamiento de los problemas geométricos, hasta la introducción por Eudoxo de la *Teoría general de la Proporción*. Las bases firmes de esta teoría permiten a Euclides en las Proposiciones 27, 28 y 29 del Libro VI una generalización del método de *Aplicación de las Áreas*, donde el libre uso del concepto de semejanza facilita la sustitución de los rectángulos del Libro II por paralelogramos, permitiendo aplicar a un segmento dado un paralelogramo igual a una figura rectilínea dada y que exceda o sea deficiente en un paralelogramo semejante a otro dado. Las construcciones correspondientes como las de las Proposiciones II.5, II.6 son en la práctica soluciones geométricas de las ecuaciones cuadráticas $ax \pm x^2 = bx$, sometidas a la restricción geométrica equivalente a que el discriminante sea no negativo, es decir, las aludidas Proposiciones VI.27, VI.28 y VI.29 son una especie de contrapartida geométrica de la forma algebraica más generalizada de ecuaciones cuadráticas con raíz real y positiva.

Además, desde el punto de vista histórico la *Aplicación de las Áreas* está en el punto de partida de la teoría de Apolonio (hacia 200 a.C.) de las secciones cónicas. De hecho los tres nombres acuñados por Apolonio para las cónicas no degeneradas provienen de la denominación de los tres tipos de aplicación de las áreas: *elíptico* (dado un segmento construir sobre una parte de él o sobre él mismo extendido, un paralelogramo igual en área a una figura rectilínea dada y resultando deficiente en un paralelogramo semejante a uno dado), *hiperbólico* (idem. resultando excedente) y *parabólico* (idem. resultando igual).

EUCLIDES, EL AUTOR DE *LOS ELEMENTOS*

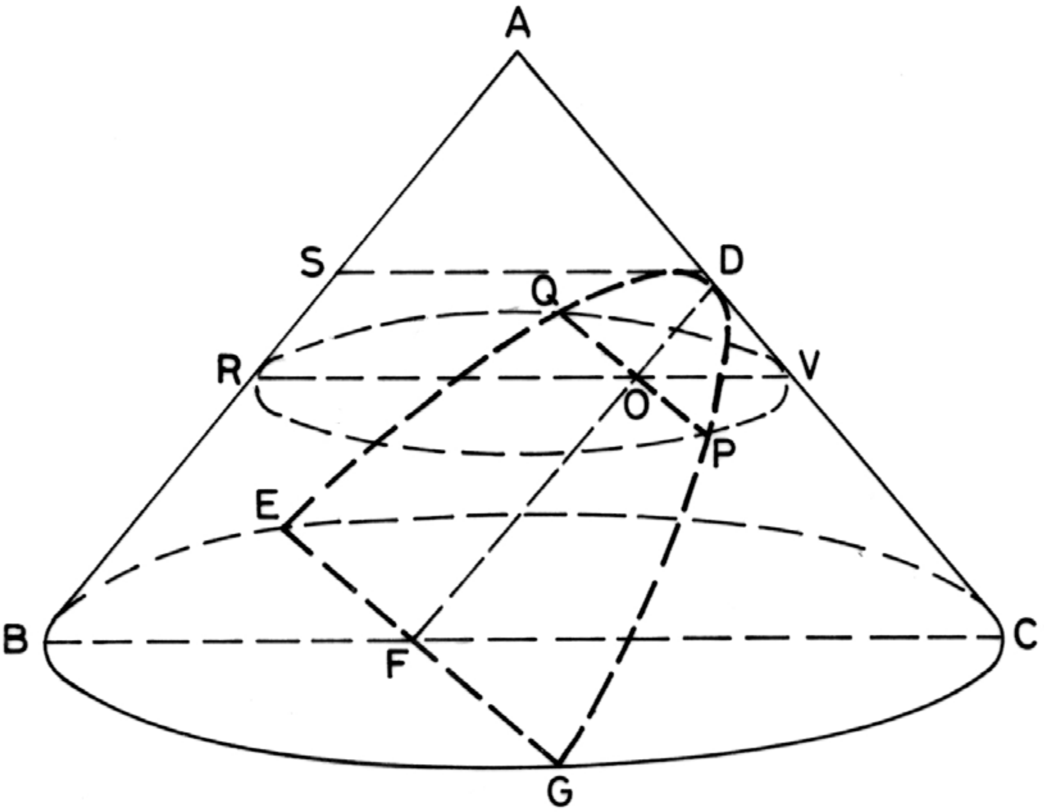
Euclides a los pies de la Geometría. Colección Cambó de Barcelona.

Las cónicas de Menecmo y el problema de la Duplicación del Cubo

Se atribuye a Menecmo (hacia 350 a.C.) de la *Academia* platónica –el más famoso de los discípulos de Eudoxo y maestro de Aristóteles y Alejandro Magno–, la introducción de las secciones cónicas, es decir, el descubrimiento de las curvas que después recibieron el nombre de elipse, parábola e hipérbola, la llamada «*Triada de Menecmo*». Veremos que el descubrimiento fue un feliz hallazgo en relación con el problema délico de la «*duplicación del cubo*». Menecmo detectó que para la resolución del problema había una familia de curvas adecuadas, los tres tipos de cónicas obtenidos por el mismo método, a partir de la sección por un plano perpendicular a la generatriz de conos rectos de tres tipos, según que el ángulo en el vértice fuera agudo, recto u obtuso.

Partiendo de un cono circular recto de una sola hoja con ángulo recto en el vértice, Menecmo descubrió que al cortar el cono por un plano perpendicular a una de sus generatrices, la curva intersección es tal que su *ecuación* (utilizando un anacronismo en términos de Geometría Analítica moderna) puede escribirse en la forma $y^2=lx$, donde l es una constante, que depende exclusivamente de la distancia del vértice del cono al plano de la sección. Ignoramos como obtuvo exactamente Menecmo esta propiedad, pero como quiera que depende nada más de algunos teoremas de la Geometría elemental, Menecmo utilizaría los conocimientos geométricos que serían familiares a los matemáticos de la Academia platónica.

Sea pues ABC el cono y sea EDG la curva obtenida al cortarlo por un plano perpendicular en el punto D a la generatriz ADC del cono. Sea P un punto cualquiera de la curva sección y un plano horizontal que corta al cono en la circunferencia PVQR, siendo Q el otro punto de intersección de la curva sección con esta circunferencia.



Por razones de simetría resulta que los segmentos PQ y RV son perpendiculares en el punto O, de modo que OP es la media proporcional entre RO y OV. Por tanto $OP^2=RO \cdot OV$.

Ahora de la semejanza de los triángulos ΔOVD y ΔBCA se tiene: $OV/DO = BC/AB$,

y de la semejanza de los triángulos ΔSDA y ΔABC se tiene: $SD/AS = BC/AB$.

Tomando OP=y, OD=x, como «*coordenadas*» del punto P, se tiene $y^2 = RO \cdot OV$, de modo que sustituyendo:

y^2 = OP^2=RO·OV= SD·OV=AS·(BC/AB)·D0·(BC/AB)=([AS·BC^2]/AB^2)·x.

Ya que los segmentos AS, BC y AB son los mismos para todos los puntos de la curva EQDPG, podemos escribir la *ecuación de la curva* o «*sección del cono rectángulo*» en la forma:

y^2=lx,

donde l es una constante que más tarde se llamaría el «*latus rectum*».

De una forma totalmente análoga para conos con ángulo agudo y obtuso en el vértice Menecmo obtendría expresiones de la forma:

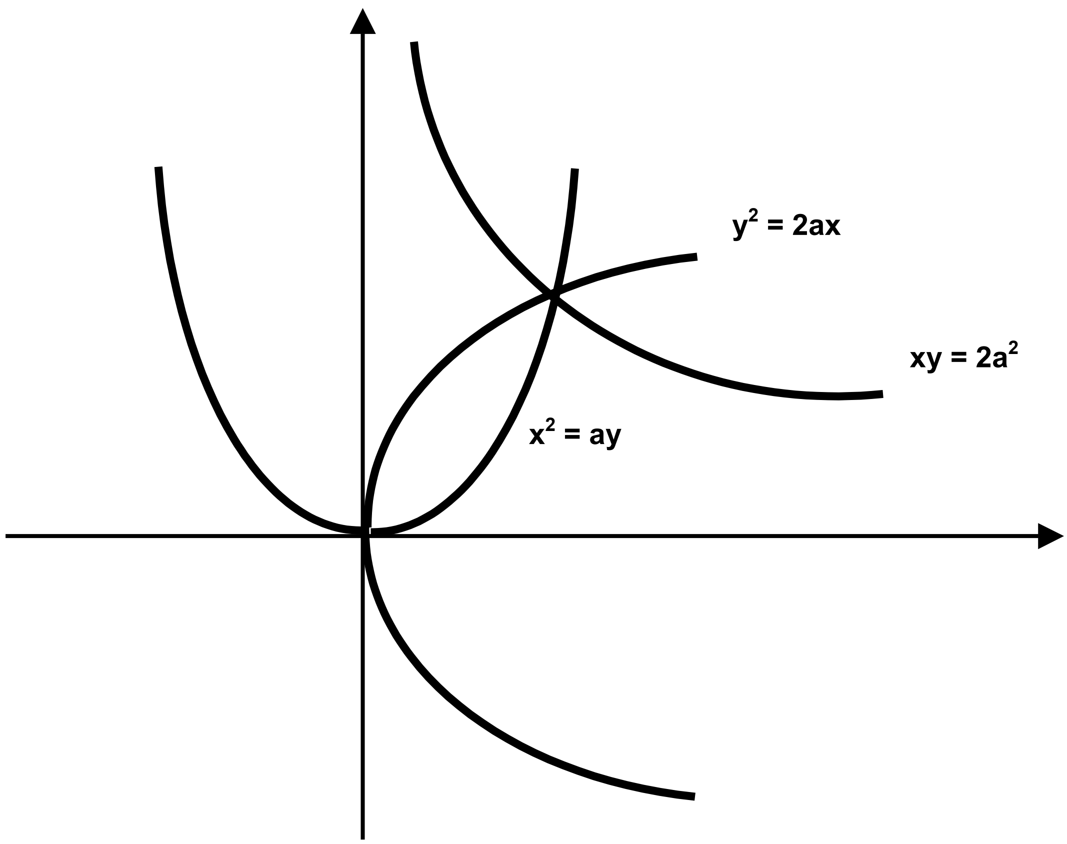
$y^2 = lx - (b^2/a^2) \cdot x^2$, *sección de cono acutángulo*,

$y^2 = lx + (b^2/a^2) \cdot x^2$, *sección de cono obtusángulo*.

donde a y b son constantes y el plano de corte es perpendicular, en ambos casos, a una generatriz.

Como vemos hay una gran similitud entre estos desarrollos de Menecmo en relación a expresiones equivalentes a ecuaciones y la utilización de coordenadas, lo que ha inducido a algunos historiadores a afirmar que este geómetra ya conocía ciertos aspectos de la Geometría Analítica. De hecho ignorando el lenguaje de ésta se hace difícil explicar el hallazgo de Menecmo.

Las cónicas de Menecmo tienen su origen en los intentos de Hipócrates de Quíos (hacia 400 a.C.) de resolución del problema clásico de la *duplicación del cubo* mediante la interpolación de dos medias proporcionales.



Sea un cubo de arista a. A partir de la proporción continua: $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$, resultado de interpolar dos medias proporcionales entre a y su doble 2a, se obtienen las parábolas x^2=ay, y^2=2ax, y la hipérbola equilátera xy=$2a^2$**.**Tanto la intersección de las dos parábolas como la intersección de una de las parábolas y la hipérbola proporciona x^3=$2a^3$, es decir, la arista del cubo de volumen doble.

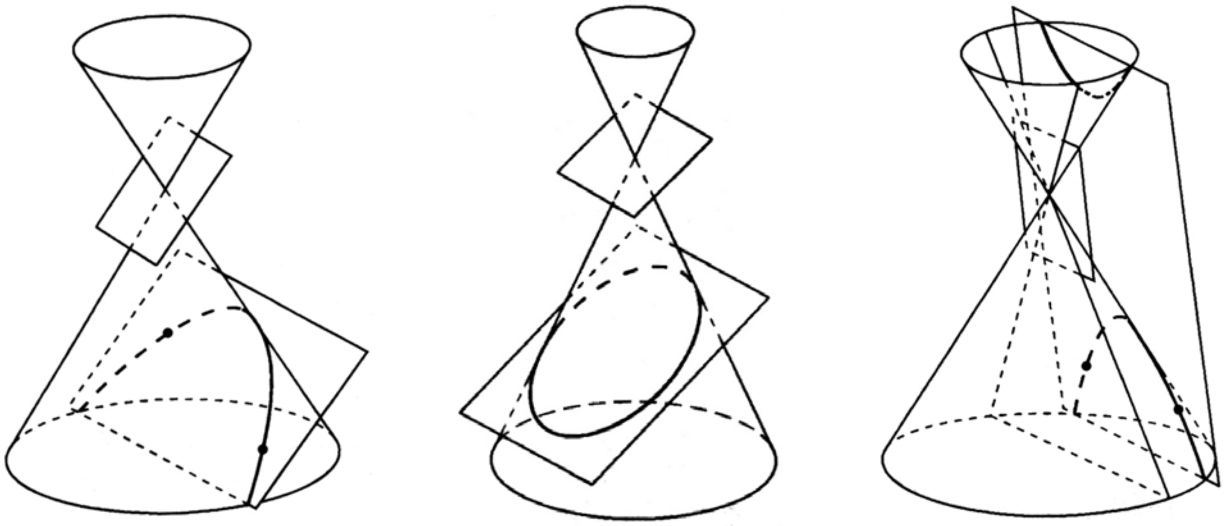
Lo que en nuestro lenguaje geométrico analítico realizamos utilizando las ecuaciones de las cónicas, Menecmo lo hallaría mediante la construcción de puntos de intersección de las cónicas obtenidas, desplazando convenientemente el plano de corte con el cono a fin de hallar cónicas con *latus rectum* conveniente al objetivo propuesto.

Aunque según el testimonio de Proclo y Eutocius fue Menecmo el primero que descubrió las secciones cónicas, tal vez no fue así, ya que antes Arquitas de Tarento (hacia 400 a.C.), gran político reformador y maestro y salvador de Platón, había estudiado el problema de la duplicación el cubo, obteniendo las dos medias proporcionales mediante una compleja intersección de un cono de revolución, un cilindro de revolución y una superficie tórica. Así pues, Arquitas pudo haber estudiado la elipse como sección oblicua del cilindro. Por otra parte, después de la línea recta, es la elipse la curva más habitual en la experiencia, ya que los objetos circulares mirados de forma oblicua, así como la sombra que arrojan son elípticos.

Se ha especulado a veces incluso con un origen de las cónicas por generación cinemática como la Cuadratriz de Hipias o la Espiral de Arquímedes, pero parece desmentirlo la persistencia hasta el siglo XVII del nombre que los griegos dieron de *Problemas sólidos* a los que dependían de las cónicas para su resolución, como si se quisiera insistir en su origen estereométrico.

Las cónicas se definen ahora como lugares de puntos en el plano para los que las distancias a una recta –directriz– y a un punto –foco– están en una determinada razón –excentricidad–. Esta definición se traslada de forma muy simple al lenguaje algebraico de ecuaciones de nuestra Geometría Analítica y además, la trigonometría permite mediante la rotación de ejes pasar fácilmente de la ecuación de la hipérbola referida a sus ejes a la referida a sus asíntotas. De modo que realmente impresiona la extraordinaria habilidad de Menecmo descubriendo la más útil familia de curvas de toda la Matemática y de toda la Ciencia y en ausencia del instrumento y el simbolismo algebraicos. Pero no sólo esto, sino que, independiente de su origen plano o estereométrico, Menecmo fue capaz de vincular ambos aspectos de las cónicas, mostrando que las secciones de los conos tenían importantes propiedades como lugares planos, traducibles en básicas expresiones geométricas (equivalentes a nuestras *ecuaciones*), que permitían deducir, a su vez, otras innumerables propiedades de las cónicas, que serían plasmadas por Apolonio en los primeros libros de *Las Cónicas*. Es bajo esta visión sobre el trabajo de Menecmo que algunos historiadores modernos (Zeuthen, Coolidge, Loria y Heath) reclaman para los griegos, y empezando por Menecmo, la paternidad de la Geometría Analítica, al establecer como la esencia de esta rama de la Matemática el estudio de los lugares por medio de *ecuaciones*. Debemos aquilatar ciertas afirmaciones en torno a elementos precursores de la Geometría Analítica, porque al señalar tales atribuciones, más o menos fundadas o infundadas, siempre nos encontraremos con las serias limitaciones impuestas por el carácter geométrico-sintético de la Geometría griega y por la ausencia de un Álgebra simbólica en sentido algorítmico, que es un componente ineludible de una verdadera Geometría Analítica general, y que a fin de cuentas es lo que permite la real y mutua correspondencia entre curvas y ecuaciones. Esto fue realmente lo que se plantearon y resolvieron Fermat y Descartes con el concurso del *Arte Analítica* de Vieta, al establecer que una ecuación arbitraria en dos cantidades indeterminadas determina, con respecto a un sistema dado de coordenadas, una curva en este plano, cuestión de capital importancia al ser una de las vertientes del *Principio fundamental* de la Geometría Analítica. La vertiente opuesta establece que una curva plana tiene asociada, con respecto a un sistema dado de coordenadas, una ecuación en dos cantidades indeterminadas. Con las reservas que se quieran apuntar (lenguaje retórico y sintético, ausencia de Álgebra simbólica, etc) basadas en la naturaleza de la Geometría griega, es indudable que esta segunda cara del *Principio fundamental de la* Geometría Analítica era muy familiar a los griegos, a partir de Menecmo y sobre todo de Apolonio, como veremos enseguida, al menos en el ámbito de las cónicas.

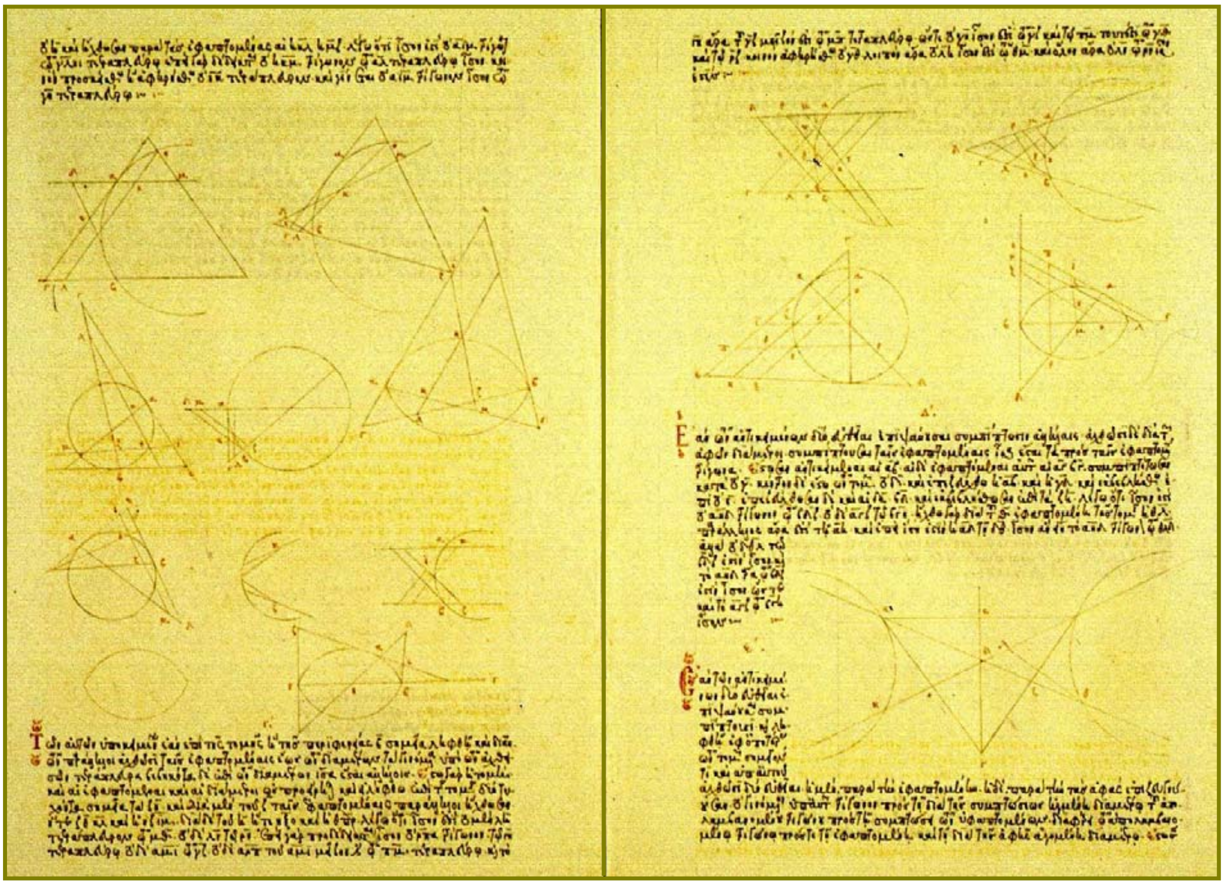
LA GENERACIÓN DE LAS CÓNICAS DE APOLONIO



Construcción de Apolonio de las tres secciones cónicas mediante un cono único, variando la inclinación del plano que corta al cono.

- **Parábola: el plano de corte es paralelo a una sola generatriz.**
- **Elipse: el plano de corte no es paralelo a ninguna generatriz.**
- **Hipérbola: el plano de corte es paralelo a dos de sus generatrices.**

LAS CÓNICAS DE APOLONIO EN LOS MANUSCRITOS VATICANOS



Páginas de *Las Cónicas de Apolonio*, quizá el más elegante de todos los manuscritos matemáticos griegos de la colección vaticana. Data de 1536.

Se exhiben, con excelentes figuras, las Proposiciones 2–4 del Libro III sobre la igualdad de áreas de triángulos y cuadriláteros formados por tangentes y diámetros de las cónicas, y por tangentes y líneas paralelas a las tangentes. (Vat. gr. 205 pp. 78-79 math07a NS.03).

Coordenadas en *Las Cónicas* de Apolonio

Euclides escribió, además de *Los Elementos*, otras muchas obras de las que tenemos constancia e incluso fragmentos a través de *El Tesoro del Análisis* de Pappus. Una de ellas fue un trabajo sobre secciones cónicas, incorporado más tarde a *Las Cónicas* de Apolonio. Asimismo y por desgracia, por haberse perdido, no tenemos más que ligeras referencias de *Los Porismas*. Según Pappus un *porisma* es un elemento matemático intermedio entre un teorema –donde se propone algo para ser demostrado– y un problema –donde se propone algo para ser construido–. Los griegos dividían las proposiciones geométricas en tres tipos: teoremas, problemas y porismas, según que hubiera que demostrar, construir o encontrar algo. Para otros autores, como Chasles (1793-1880), un *porisma* era una proposición en la que se anuncia la posibilidad de determinar ciertas cosas (y se hallan efectivamente), que tienen cierta relación con otras fijas y conocidas y con otras variables indeterminadas, estableciéndose una ley de variación, quizá una ligera aproximación al concepto de función en Grecia. Todavía para otros estudiosos un *porisma* sería algo parecido a la expresión retórica de una ecuación verbal de una curva. Según lo dicho, la doctrina de los *porismas* sería «*la geometría analítica*» de los antiguos griegos y el libro de Euclides podría haber representado una aproximación helénica a un cierto tipo de incipiente Geometría Analítica, donde el discurso retórico sustituiría al simbolismo y la construcción geométrica a las técnicas algebraicas.

El Tesoro del Análisis de *La Colección Matemática* de Pappus estaba constituido en gran parte por obras de Apolonio, perdidas o conservadas entonces de forma fragmentaria, que debían de incluir mucho material geométrico cuyo estudio forma parte hoy de la Geometría Analítica. Como veremos más adelante durante el siglo XVII hubo una auténtica obsesión, en particular por Fermat, por la reconstrucción de muchas de las obras perdidas de Apolonio y precisamente en esta labor estuvo el origen de su Geometría Analítica.

A título de ejemplo en *Los Lugares Planos* de Apolonio aparecen dos importantes lugares geométricos:

a) «*El lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de los cuadrados de sus distancias a dos puntos fijos* A, B, *es constante, es una recta perpendicular al segmento* AB»,

b) «*El lugar geométrico de los puntos cuya razón de distancias a dos puntos fijos es constante, es una circunferencia.*».

Asimismo en el libro *Secciones en una razón dada* se resuelven diversos casos del siguiente problema:

> «*Dada dos rectas y sendos puntos en ellas, trazar por un tercer punto otra recta que corte a las anteriores en segmentos, que medidos sobre ellas desde los respectivos puntos dados, estén en una razón dada.*»

Este problema conduce a una ecuación cuadrática de la forma $ax–x^2=bc$. También en el libro *Secciones en un área dada* se resuelve un problema similar que pide que los segmentos determinados por las intersecciones formen un rectángulo equivalente a otro dado. En este caso el problema lleva a una ecuación cuadrática de la forma $ax+x^2=bc$.

Finalmente en el Libro *Secciones determinadas*, Apolonio plantea el problema siguiente:

> «*Dados cuatro puntos* A, B, C, D, *sobre la misma recta, hállese un quinto punto* P *sobre ella, de modo que el rectángulo construido sobre* AP y CP *esté en una razón dada con el construido sobre* BP y DP.»

Como en los casos anteriores el problema es equivalente a la resolución de ecuaciones cuadráticas, con las que se tratan todas las variantes que se presentan en los datos y las correspondientes soluciones.

Durante más de cien años, las curvas introducidas por Menecmo se llamarían a partir de la descripción trivial de la forma cómo habían sido descubiertas, es decir, mediante las perífrasis: *sección* (perpendicular a una generatriz) *de cono acutángulo, rectángulo y obtusángulo* para la elipse, parábola e hipérbola, respectivamente.

Fue Apolonio en *Las Cónicas* quien no sólo demostró que de un cono único pueden obtenerse los tres tipos de secciones, variando la inclinación del plano que corta al cono, lo cual era un paso importante en el proceso de unificar el estudio de los tres tipos de curvas, sino que demostró que el cono no necesita ser recto y consideró, asimismo, el cono con dos hojas, con lo que identifica las dos ramas de la hipérbola.

Además, siguiendo probablemente una sugerencia de Arquímedes, Apolonio acuñó para la posteridad los nombres de *elipse*, *parábola* e *hipérbola* para las secciones cónicas. A lo largo de la Historia de la Matemática, los conceptos han sido siempre más importantes que la terminología utilizada, pero en este caso el cambio de nombre de las secciones cónicas debido a Apolonio, tiene una importancia más allá de lo meramente nominalista. Los términos adoptados en realidad no eran nuevos, sino que procedían, como sabemos, del lenguaje pitagórico de la solución de ecuaciones cuadráticas del método de *Aplicación de las Areas*. *Elipse* significa *deficiencia*; *Hipérbola* significa *exceso* (en el lenguaje ordinario una *hipérbole* es una *exageración*); y por ultimo *Parábola* significa *equiparación*. El cambio de nomenclatura envolvía un cambio conceptual, toda vez que las cónicas ya no serían descritas constructivamente, sino a través de relaciones de áreas y longitudes, que daban en cada caso la propiedad característica de definición de la curva. Por ejemplo, la conocida ecuación de la parábola con vértice en el origen es $y^2=lx$, donde l es el *latus rectum* o *parámetro dobles* que se representa por 2p. Esta expresión de la parábola en forma de *ecuación* sintetiza precisamente el farragoso y larguísimo enunciado de la Proposición I.11 de *Las Cónicas* en forma de propiedad que cumple *la sección cónica* considerada, bautizada por Apolonio justamente aquí con el nombre de *parábola*. Este enunciado muy resumido viene a decir:

> «*La parábola tiene la propiedad característica de que para todo punto tomado sobre la curva, el cuadrado construido sobre su ordenada y es exactamente igual al rectángulo construido sobre la abcisa x y el latus rectum l* [el rectángulo que aplicado sobre el *latus rectum* tiene como longitud la *abscisa*, en el lenguaje de la *Aplicación de las Áreas*]».

Análogamente, Apolonio hará lo propio para la hipérbola y la elipse en las dos proposiciones siguientes que redactadas en un retórico lenguaje abstruso y penoso, se puede simplificar en la forma siguiente Proposición I.12 (resp. I.13):

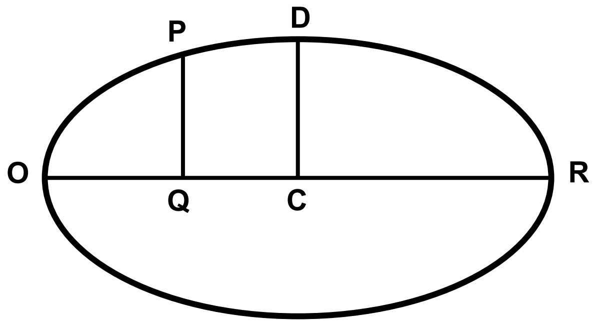
> «*En la sección cónica considerada* [llamada hipérbola (resp. llamada elipse)], *el cuadrado de la ordenada equivale a un área rectangular aplicada siguiendo el latus rectum, es decir, teniendo el latus rectum como altura, y teniendo la abscisa como base, aumentada (resp. disminuida) de otra área semejante a la que tenga el eje transverso o diámetro como base, y la mitad del latus rectum como altura*».

Simplificando todavía más, mediante *ecuaciones*, como en el caso de la parábola, el complejo lenguaje de Apolonio, designando: para la hipérbola a el eje transverso o diámetro y b el eje no transverso, para la elipse a y b los ejes, y para ambas cónicas y la ordenada, x la abscisa, y l el *latus rectum*, podemos traducir los enunciados de las proposiciones I.12 y I.13 en las relaciones:

- Hipérbola: $y^2 = lx + (b^2/a^2) \cdot x^2$ o bien $[(x+a)^2/a^2] - [y^2/b^2] = 1$
- Elipse: $y^2 = lx - (b^2/a^2) \cdot x^2$ o bien $[(x-a)^2/a^2] + [y^2/b^2] = 1$

ecuaciones de la hipérbola y de la elipse, respectivamente, referidas a uno de sus vértices como *origen de coordenadas* donde concurren como *ejes de coordenadas* un diámetro y la tangente a la cónica en su extremo, y donde el *latus rectum* o parámetro l es: $l=2b^2/a$.

Veamos, en efecto, como se llega a estas ecuaciones en el caso de la elipse:



Lo que demuestra Apolonio en la Proposición I.13 con un lenguaje retórico es que hay una relación constante entre ciertas áreas, el cuadrado de lado la cuerda PQ y el rectángulo determinado por los segmentos OQ, QR del diámetro.

En particular se verificará:

$$\frac{PQ^2}{CD^2} = \frac{OQ \cdot QR}{OC \cdot CR}\,.$$

Tomando coordenadas con origen en el vértice O, y llamando x, y, a, b y l, como antes, se tiene:

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x \cdot (2a - x)}{a^2}\,,$$

de donde resulta:

$$y^2 = \frac{2b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2\,,$$

es decir:

$$y^2 = lx - \frac{b^2}{a^2}x^2\,,$$

donde $l=2b^2/a$ es el *latus rectum*, como se quería probar.

Vemos que las relaciones de áreas de Apolonio que expresan propiedades intrínsecas de la curva se prestan con gran facilidad a ser traducidas en el ulterior lenguaje del Álgebra simbólica de ecuaciones que permitirá la asociación de curvas y ecuaciones en la Geometría Analítica.

A la vista de las expresiones obtenidas para las cónicas, trasunto de la propiedad fundamental que satisfacen como lugares planos, se aprecia que, en el caso de la elipse $y^2<lx$, mientras que para la hipérbola $y^2>lx$. Estas propiedades de las curvas expresadas por estas desigualdades son las que sugirieron, con base en el lenguaje griego ordinario, los nombres de las cónicas, parábola, elipse e hipérbola bautizadas por Apolonio hace más de dos mil años. Así los nombres no sólo no son arbitrarios sino que responden a la semántica de los términos y han sido tan afortunados que han quedado firmemente asociados a las cónicas para siempre.

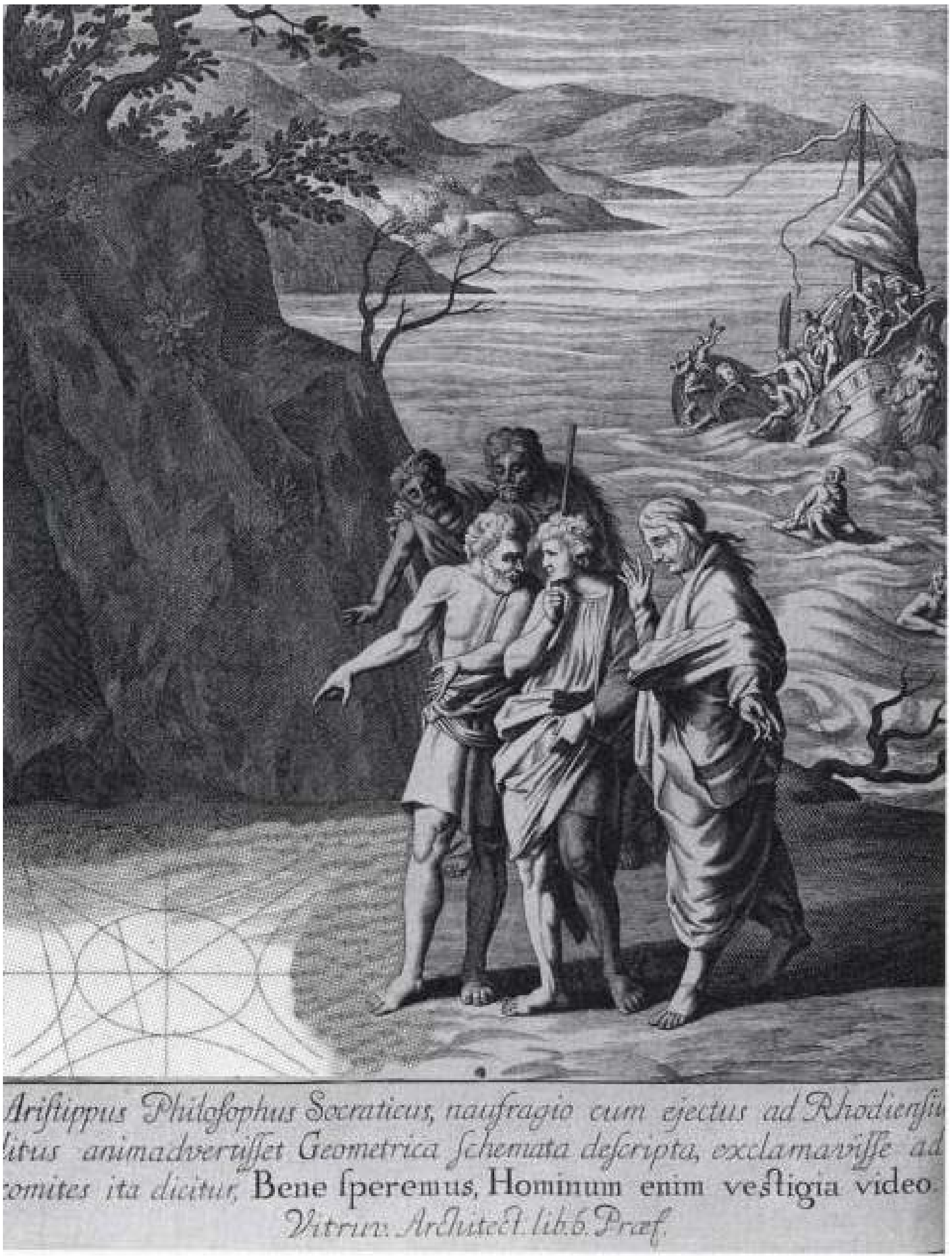
El Libro I de *Las Cónicas* de Apolonio se inicia con la generación de las cónicas, pero una vez que se obtienen mediante consideraciones estereométricas las relaciones básicas entre lo que llamaríamos las *coordenadas* de un punto de la curva en el plano, expresadas por las *ecuaciones* descritas, Apolonio se dedica a estudiar por métodos planimétricos las propiedades fundamentales de las cónicas, incluyendo tangentes y diámetros conjugados, a partir de esas *ecuaciones* planas, obviando toda referencia explícita al cono generador. Apolonio utiliza de forma sistemática un par de diámetros conjugados o un diámetro y una tangente como equivalente de un *sistema de coordenadas oblicuas*, habiendo demostrado previamente que si se traza una recta por un extremo de un diámetro de una elipse o de una hipérbola, paralela a su diámetro conjugado, la recta trazada es tangente a la cónica. El *sistema de referencia* diámetro–tangente se muestra de una significativa utilidad ante la invariancia de la *ecuación* de la cónica frente a un *cambio de referencia* diámetro–tangente de un punto a otro punto de la cónica (Proposiciones 41 a 49). En particular, Apolonio conocía las propiedades de la hipérbola equilátera referida a sus asíntotas $xy=a^2$.

LAS CÓNICAS DE APOLONIO

Las Cónicas **de Apolonio –en ocho libros, de los que conservamos siete gracias a los trabajos de Thabit ibn Qurra (hacia 856 d.C.) y de Halley– es una de las obras cumbres de la Matemática griega, que supera con creces y oscurece lo que con anterioridad habían escrito sobre el tema Menecmo, Aristeo y Euclides.**

Gracias a este texto, a Apolonio se le llamó «*el gran geómetra*», porque si entre los matemáticos griegos Euclides representa el maestro sistematizador y Arquímedes el genio investigador, el tercer talento del helenismo, Apolonio de Perga, personifica el virtuosismo geométrico.

La obra tuvo una importancia trascendental en el descubrimiento de la Geometrías Analíticas de Fermat y Descartes.



Frontispicio de la edición de Edmund Halley de *Las Cónicas* de Apolonio de 1710.

En la base aparece un texto en latín de gran valor emblemático y metafórico sobre el significado de la Geometría como ciencia del espíritu, tomado del epígrafe primero del Prefacio del Libro VI de *De Architectura* de Vitruvio. Se trata de una exclamación promovida por la súbita presencia ante unos náufragos, como evidencia de la presencia de la civilización, de figuras sobre hipérbolas de Apolonio, que reza en estos términos:

> «*Aristipo, filósofo socrático, habiendo naufragado en el mar de Rodas, y habiendo observado en la playa dibujos con diseños geométricos, se dice que exclamó ante sus compañeros*: *estamos de buena esperanza ya que veo huellas de hombre*.»

El Libro II abunda en nuevas propiedades y hace un estudio exhaustivo de las asíntotas. El Libro III estudia propiedades de las tangentes y una serie de hermosas propiedades focales, entre las que destacan las Proposiciones 51 y 52:

> «*En una hipérbola la diferencia de distancias de cada punto a los focos es constante e igual al eje transverso*»,
>
> «*en una elipse la suma de distancias de cada punto a los focos es constante e igual al eje mayor*»,

propiedades que permiten el trazado de estas cónicas mediante una composición de movimientos continuos y que sirven para definirlas de forma planimétrica como *lugares geométricos*.

En el Libro IV se estudian los puntos de intersección de las cónicas. Destaca la Proposición 9 que exhibe un método de trazar dos tangentes a una cónica desde un punto. El Libro V está dedicado a los *segmentos máximos y mínimos*, es decir, a la distancia máxima y mínima de un punto a los de una cónica –las rectas normales–. En este Libro encontramos el germen de la teoría de evolutas y evolventes que figura en la obra de Huygens *Horologium Oscilatorium* de 1673. Al intuir el concepto de curvatura, Apolonio se sitúa en las raíces de la Geometría Diferencial. El Libro VI está dedicado a la igualdad y semejanza de cónicas. El Libro VII relaciona numerosas propiedades de los diámetros conjugados entre las que sobresalen las de las Proposiciones 12 y 13 acerca de la constancia de la suma en la elipse y la diferencia en la hipérbola de los cuadrados de los diámetros conjugados.

El lenguaje de Apolonio es, desde luego, sintético, utilizando con una maestría sin par la vieja técnica pitagórica de la *Aplicación de las Áreas* pero sus métodos guardan una gran similitud con los de la Geometría Analítica sobre todo en el uso de unas rectas de referencia, en particular un diámetro y una tangente en uno de sus extremos. Las distancias medidas a lo largo del diámetro a partir del punto de tangencia son las *abscisas* y los segmentos paralelos a la tangente, interceptada por el diámetro y la curva, son las *ordenadas*. La relación obtenida entre las *abscisas* y las correspondientes *ordenadas* –que Apolonio llamaba el *symptoma* de la curva–, no es sino la forma retórica de la ecuación analítica de la curva en el lenguaje de la *Aplicación de las Áreas*, que en su evolución histórica daría lugar a la llamada por Fermat en su *Introducción a los Lugares Planos y Sólidos* –su *Geometría Analítica*– la *ecuación característica*.

Aquilatando la posición histórica de Apolonio en el camino hacia la Geometría Analítica digamos que, a pesar de los conceptos y elementos geométricos introducidos por Apolonio, que parecen emular la presencia de *sistemas de referencia con coordenadas –abscisas* y *ordenadas*– que permiten expresar las *ecuaciones* de las cónicas, estos *sistemas de coordenadas* aparecían siempre superpuestos *a posteriori* a las curvas para estudiar sus propiedades. En la Geometría griega, las *coordenadas*, *variables* y *ecuaciones* no eran elementos de partida, sino conceptos subsidiarios derivados de situaciones geométricas concretas de curvas que determinan las *ecuaciones* sin que se dé la situación inversa, el que las ecuaciones determinen las curvas, ya que estas siempre se producían mediante una construcción estereométrica como secciones de un sólido (tal es el caso de las cónicas de Menecmo y Apolonio) o de forma cinemática como composición de movimientos (tal es el caso de la Espiral de Arquímedes), de forma que el conjunto de curvas manejadas por los griegos fue necesariamente muy limitado. Como manifiesta C.Boyer en su *Historia de la Matemática* (Alianza Universidad, pág. 208):

> «*El hecho de que Apolonio, uno de los más grandes geómetras de la antigüedad, no consiguiese desarrollar de una manera efectiva la Geometría Analítica, se debe probablemente más a una pobreza en el número de curvas que de pensamiento; los métodos generales no son ni muy necesarios ni muy útiles cuando los problemas se refieren siempre a un número limitado de casos particulares. Por otra parte, es bien cierto que los primeros inventores de la Geometría Analítica tenían a su disposición todo el álgebra renacentista* [el Álgebra de los cosistas italianos y el Álgebra simbólica de Vieta], *mientras que Apolonio tuvo que trabajar con las herramientas del Álgebra Geométrica, mucho más rigurosa pero a la vez mucho más incómoda de manejar.*»

Efectivamente, el tratamiento sintético de los problemas esclaviza a depender de la estructura geométrica intrínseca de las figuras atomizando la casuística de los casos específicos, mientras que el enfoque analítico, siempre con el recurso algorítmico del Álgebra simbólica, permite, como veremos, la generalización de los métodos y la aplicación de las mismas técnicas a situaciones análogas.

No obstante lo dicho y con todas las limitaciones apuntadas, debemos ponderar la magnífica obra de Apolonio ya que no sólo sería decisiva sobre la revolución astronómica operada por Kepler sino que fue también incisiva sobre el pensamiento geométrico de Fermat y Descartes en el alumbramiento de sus Geometrías Analíticas.

Debemos mencionar, además, otros dos problemas históricos importantes que tienen su origen en los trabajos de Apolonio: *el Problema de Apolonio* y *el Problema de Pappus.*

En una de las obras perdidas, *Tangencias,* aparece el famoso «*Problema de Apolonio*» cuyo enunciado es:

> «*Dados tres elementos (punto, recta o circunferencia*)*, trácese una circunferencia que sea tangente a cada uno de los tres*».

El problema da lugar a diez casos diferentes. Los dos más sencillos son: circunferencia que pasa por tres puntos (*Euclides*, IV.5) y circunferencia inscrita a un triángulo (*Euclides*, IV.4). Sobre el más complicado: «*Dadas tres circunferencias hállese otra tangente a las tres*», durante lo siglos XVI y XVII los eruditos sospecharon que Apolonio no lo había resuelto por lo que algunos como Vieta (1540-1603) y Descartes se aplicaron a ello. Los matemáticos árabes Ibrahim ibn Sinan (909-946) y Ibn al-Haytham (965-1041) habían encontrado una solución mediante el Álgebra. En el siglo XVI, Regiomontano ensayó su resolución recurriendo a las secciones cónicas y Vieta da una solución puramente geométrica en su obra *Apollonius Gallus*. Después de haber dado la solución general, Vieta da cuatro soluciones particulares según que el cuarto círculo sea tangente en el interior o en el exterior de los otros tres. Descartes retoma el problema con los instrumentos algebraicos de *La Geometría* en su correspondencia de noviembre de 1643 con la princesa Elisabeth de Bohemia, donde más que resolver un problema geométrico (el problema ya lo habían resuelto otros matemáticos), se plantea un problema estético: *¿Cuál será la solución más hermosa*? Newton le dio una solución sólo con regla y compás en el problema XLVII de su *Arithmetica Universalis.*

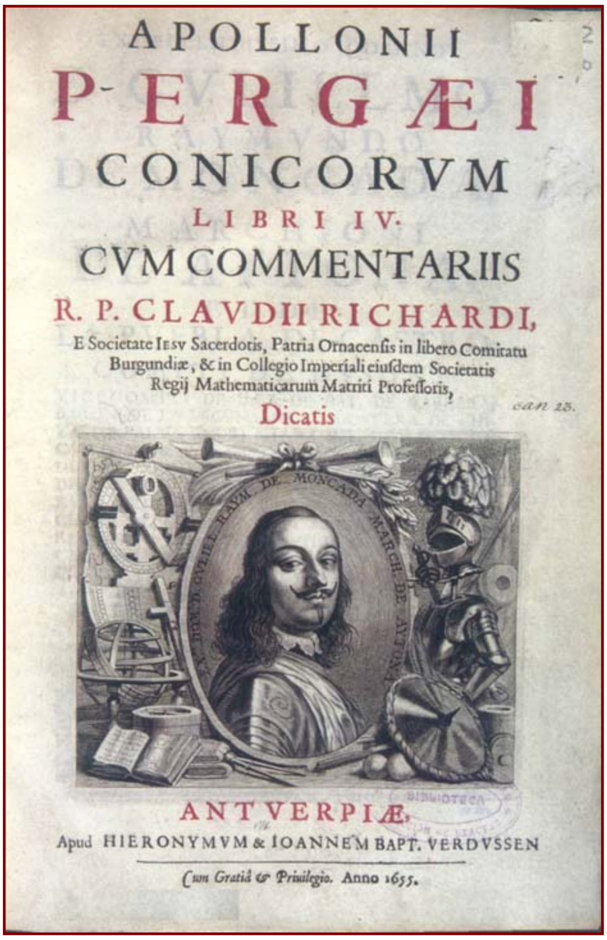
En la Dedicatoria de *las Cónicas*, Apolonio hace alusión a otro problema que con el tiempo se convertiría en uno de las cuestiones más difíciles e importantes sobre la que se probará la reconocida capacidad de la Geometría Analítica de Fermat y Descartes para resolver antiguos y nuevos problemas, se trata del famoso *Problema de Pappus* o «*lugar geométrico determinado por tres o cuatro rectas*»:

> «*Dadas tres (resp. cuatro) rectas en un plano, encuéntrese el lugar geométrico de un punto que se mueve de forma que el cuadrado de la distancia a una de las tres rectas es proporcional al producto de las distancias a las otras dos (resp. El producto de las distancias a dos de ellas es proporcional al producto de las distancias a las otras dos), si las distancias se miden en direcciones tales que formen ángulos dados con las líneas correspondientes.*»

Apolonio escribe al respecto :

«*El tercer libro contiene numerosos y curiosos teoremas que son útiles en la construcción de los lugares sólidos,... La mayor parte y los más bellos de estos teoremas son nuevos, y al concebirlos, me di cuenta de que Euclides sólo había tratado el lugar geométrico con respecto a tres o cuatro líneas* [en su obra perdida *Los lugares Sólidos*], *de una manera accidental y poco adecuada, pues no era posible conseguir su construcción sin mis descubrimientos complementarios.*»

LAS CÓNICAS DE APOLONIO


APOLLONII PERGÆI CONICORVM LIBRI IV. CVM COMMENTARIIS R. P. CLAVDII RICHARDI, E Societate Iesv Sacerdotis, Patria Ornacensis in libero Comitatu Burgundiæ, & in Collegio Imperiali eiusdem Societatis Regij Mathematicarum Matriti Professoris, Dicatis

ANTVERPIÆ, Apud HIERONYMVM & IOANNEM BAPT. VERDVSSEN

Cum Gratiâ & Priuilegio. Anno 1655.

Portada de *Apollonii Pergaei Conicorum Libri IV. Cum commentariis*.

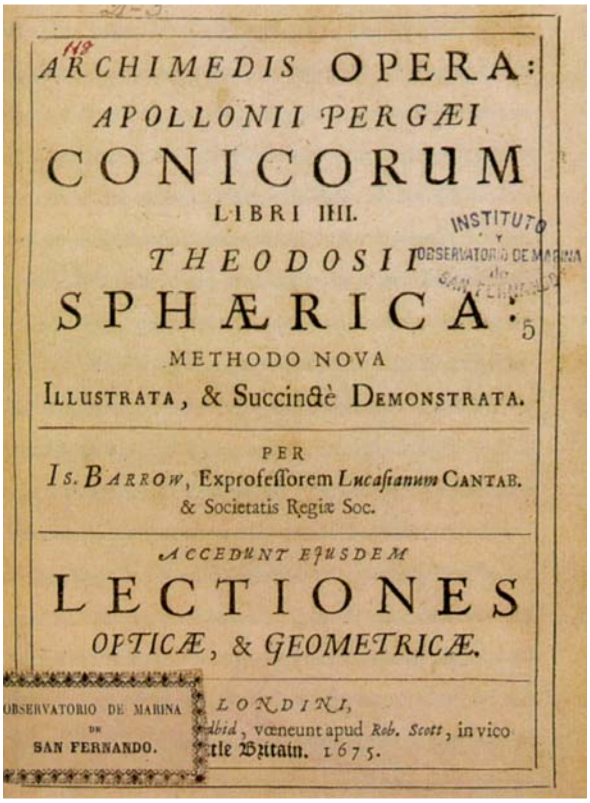
Edición de C. Richardi, Amberes, 1655.

***Las Cónicas* de Apolonio, junto con *Los Elementos* de Euclides, los grandes tratados de Arquímedes, *La Aritmética* de Diofanto y *La Colección Matemática* de Pappus son las obras más importantes de la Matemática griega.**

Su valor histórico y científico es de tal importancia que hace sombra a los trabajos anteriores de Euclides y Aristeo sobre el tema.

***Las Cónicas* de Apolonio contienen muchos aspectos que anticipan elementos de las Geometrías Analíticas de Fermat y Descartes. Empezando con su construcción a través de un único cono, Apolonio acuña con significado los nombres de Elipse, Parábola e Hipérbola –procedentes del lenguaje pitagórico de la *Aplicación de las Áreas*– como definición de las cónicas mediante relaciones de áreas y longitudes expresadas en forma de proporción que daban retóricamente la propiedad característica de la curva –el *symptoma* de la curva–, que en el devenir histórico se convertiría, para Fermat, en la *propiedad específica* de la curva.**

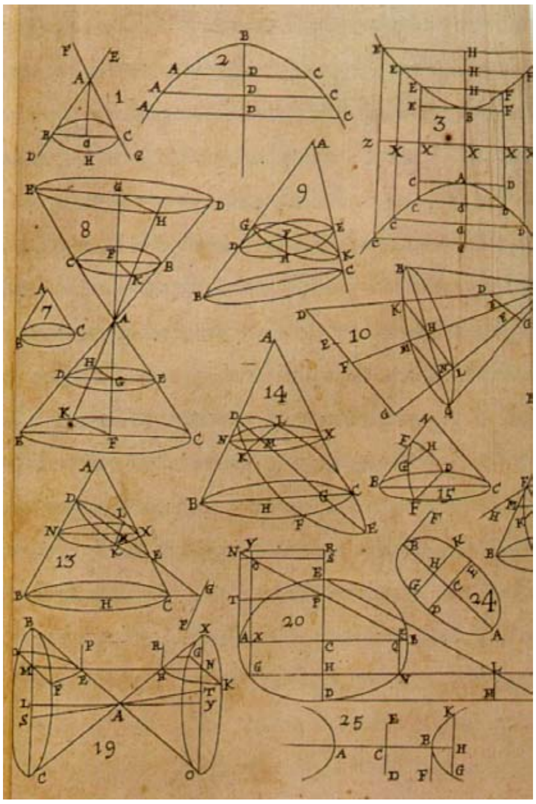
Como harán Descartes y Fermat, Apolonio considera ciertas *líneas de referencia* –diámetros conjugados o diámetro-tangente–, que jugando un papel de *coordenadas*, asocia a la curva dada, de modo que mediante Álgebra retórica son expresadas en función de esas líneas las propiedades geométricas de la curva equivalentes a su definición como lugares geométricos.


ARCHIMEDIS OPERA: APOLLONII PERGÆI CONICORUM LIBRI IIII. THEODOSII SPHÆRICA: METHODO NOVA ILLUSTRATA, & Succinctè DEMONSTRATA.

PER IS. BARROW, Exprofessorem Lucasianum CANTAB. & Societatis Regiæ Soc.

ACCEDUNT EJUSDEM LECTIONES OPTICÆ, & GEOMETRICÆ.

LONDINI, ...bid, vœneunt apud Rob. Scott, in vico ...tle Britain. 1675.



***Archimedis opera; Apollonii Pergaei conicorum libri IIII; Theodosii Sphaerica*. Edición de I.Barrow, de *Las Cónicas* de Apolonio (Londres, 1675). Contiene tambiéb obras de Arquímedes y de Teodosio.**

Las ilustraciones con la portada y las figuras de Apolonio procede de la Biblioteca del Real Instituto y Observatorio de la Armada de San Fernando (Cádiz).

LAS CÓNICAS DE APOLONIO

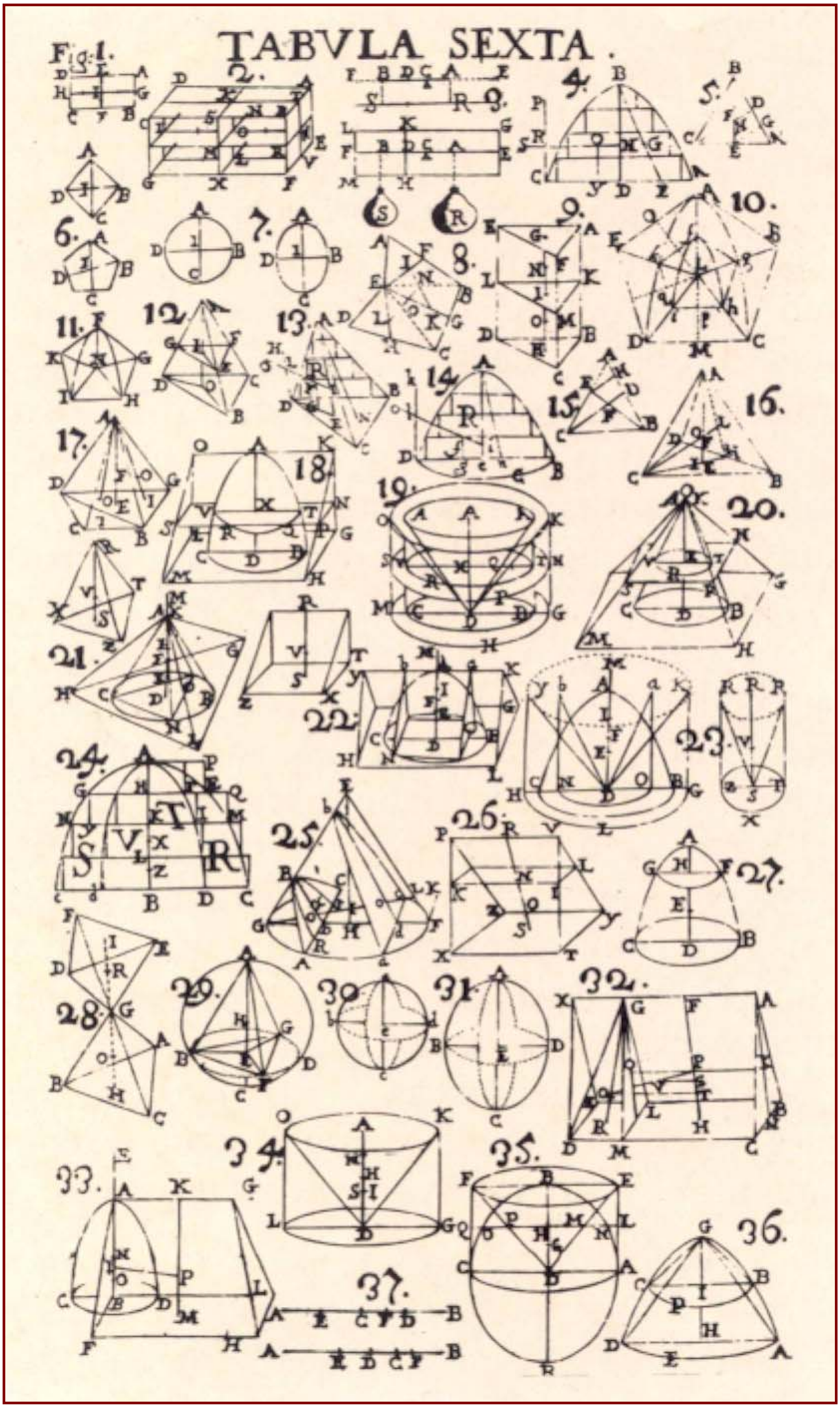
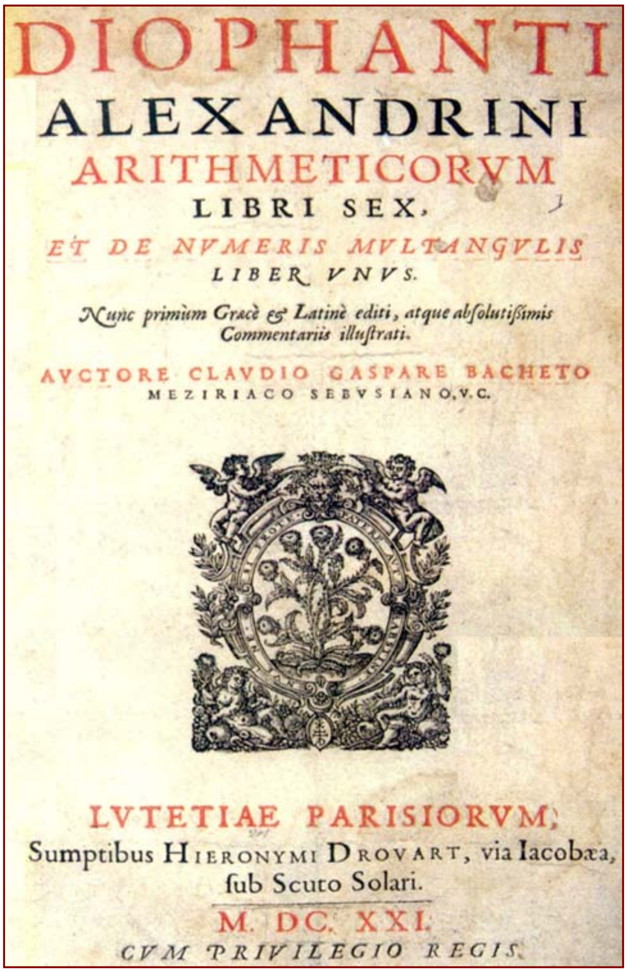


Lámina con figuras de *Apollonii Pergaei Conicorum* Lib. V, VI, VII. Edición de Borelli. Florencia 1661. Biblioteca de la Universidad de Pavía.

El Álgebra sincopada de *La Aritmética* de Diofanto

Siendo el Álgebra simbólica el instrumento algorítmico básico de la Geometría Analítica, en el rastreo de los orígenes de ésta deberíamos encontrar las raíces primigenias de aquélla, de ahí la necesidad de mencionar a Diofanto de Alejandría (hacia 250 d.C.) que con su obra *La Aritmética* inaugura lo que Nesselman llamó en 1842 el Álgebra sincopada. A base de adoptar ciertas letras o expresiones como abreviaturas para las cantidades indeterminadas y sus potencias y para las operaciones más habituales, Diofanto fragua un incipiente simbolismo antecedente de la notación algebraica, que inicia la construcción de una máquina mental de asombrosa precisión y eficacia, que constituye la matriz del Álgebra. Por ello a Diofanto se le reconoce, a veces, como *el padre del Álgebra*, ya que su trabajo representa un avance considerable con respecto al farragoso lenguaje del *Álgebra Geométrica* de Euclides. Aunque no llegó a crear un verdadero algoritmo de automatización de la resolución de ecuaciones, Diofanto es un pionero en el proceso que sembrado durante 1300 años por los árabes y por los matemáticos renacentistas italianos, transforma la *logística numerosa* –que opera con números– en otra que opera con todo tipo de especies, la *Logistica speciosa* de Vieta, que generalizará los métodos mediante el cálculo literal hacia la doctrina algebraica como uno de los cimientos de la Matemática al convertirse en su propio lenguaje. Así se lo reconocerá Descartes en la Regla IV de sus *Reglas para la dirección del espíritu* de 1628 (*Regulae ad directionem ingenii*).

Los símbolos de las cantidades indeterminadas en *La Aritmética* de Diofanto representan incógnitas más que variables en el sentido de la Geometría Analítica. Por tanto, en estos aspectos Diofanto no se acerca a la línea histórica de la Geometría de las coordenadas. Pero, como quiera que la principal deficiencia que tuvo la Geometría griega para alcanzar la Geometría Analítica fue la ausencia del Álgebra simbólica como aparato algorítmico independiente, y el trabajo de Diofanto inicia la construcción de este instrumento, podemos afirmar que la labor de Diofanto es un eslabón importante en la cadena que une la Aritmética y el Álgebra de los babilonios con la empresa de Fermat y Descartes.



Portada del Libro I de *La Aritmética* de Diofanto (*Diophanti Alexandrini Arithmeticorum Libri Sex et de Numeris multangulis*). Edición de G. Bachet de Meziriac, publicada en París en 1621.

Sobre un ejemplar de esta edición hizo Fermat sus famosas anotaciones sobre lo que después se ha llamado *Teoría de Números*.

Diofanto es el responsable de los primeros escarceos del Álgebra simbólica –el Álgebra sincopada–. A base de adoptar ciertas letras o expresiones como abreviaturas para las cantidades indeterminadas y sus potencias y para las operaciones más habituales, fragua un incipiente simbolismo antecedente de la notación algebraica.

En la obra de Diofanto, que representa la primera aritmetización de la Matemática, la clásica solución gráfico-geométrica de las ecuaciones del Álgebra Geométrica clásica euclídea , es sustituida por los antiguos métodos aritméticos de los babilonios, como consecuencia de que los símbolos que utiliza ya no son pensados como segmentos de línea, sino que realmente son números. Por esta razón Diofanto va más allá de las ecuaciones cúbicas y considera potencias de la incógnita hasta la sexta, a la que llama cubo-cubo.

Al ser el Álgebra simbólica un instrumento algorítmico ineludible de la Geometría Analítica, y Diofanto el primer iniciador de esta utilidad, debemos situar su obra, *La Aritmética*, en una dirección conveniente hacia la generación de la Geometría Analítica.

LA NOTACIÓN DIOFÁNTICA

Expresión	Abrev. May.	Abrev. Min.	Actual
La unidad	M^o	μ^o	
Cantidad indeterminada		α ο ς	x
Potencia cuadrada	Δ^γ	δ^υ	x^2
Potencia cúbica	K^γ	κ^υ	x^3
Potencia bicuadrada	$\Delta^\gamma\Delta$	$\delta\delta^\upsilon$	x^4
Potencia cuadrado-cúbica	ΔK^γ	$\delta\kappa^\upsilon$	x^5
Potencia cúbica-cúbica	$K^\gamma K$	$\kappa\kappa^\upsilon$	x^6

Escritura de las ecuaciones en la notación diofántica

- **15x se escribe** ςςιε
- **Adición: yustaposición de términos:** μ^o, *μοριον* **(la unidad)**
- **$23x^2+15$ se escribe** $\delta^\upsilon\kappa\gamma\mu^o\iota\varepsilon$.
- **La sustracción se escribe v : $23x^2–15$ se escribe** $\delta^\upsilon\kappa\gamma\nu\mu^o\iota\varepsilon$.
- **La igualdad se escribe** ισοι εισιν **(es igual) o se abrevia:** ι.
- **8x+30=11x+15 se escribe** $\varsigma\varsigma\eta\mu^o\lambda$ ι $\varsigma\varsigma\iota\alpha\mu^o\iota\varepsilon$
- **La raya de la fracción se escribe** μοριου
- $\dfrac{23x^2-15}{8x+30}$ **se escribe** $\delta^\upsilon\kappa\gamma\nu\mu^o\iota\varepsilon$ μοριου $\varsigma\varsigma\eta\mu^o\lambda$

Aunque la última expresión es algo complicada, vemos que Diofanto sólo mantiene en ella una palabra del lenguaje retórico ordinario, la que indica la división, μοριου, y que sin duda se podría haber sustituido por una abreviatura (como en el caso de la igualdad) o algún término a modo de estenotipia como en el caso de la sustracción.

Así pues, con un poco más de método abreviador, Diofanto habría podido alcanzar un sistema de escritura algebraica muy perfeccionado, ligeramente inferior al cartesiano en cuanto a sencillez y claridad, excluyendo, por supuesto, los números concretos, para los que no se disponía todavía del sistema de numeración posicional decimal. Aún así, la expresión sincopada con la que Diofanto tratará los problemas algebraicos, supone un avance inusitado con respecto al complejo lenguaje euclídeo. Claro está, no obstante, que los objetivos que se plantean Euclides y Diofanto son bien distintos.

La Colección Matemática de Pappus

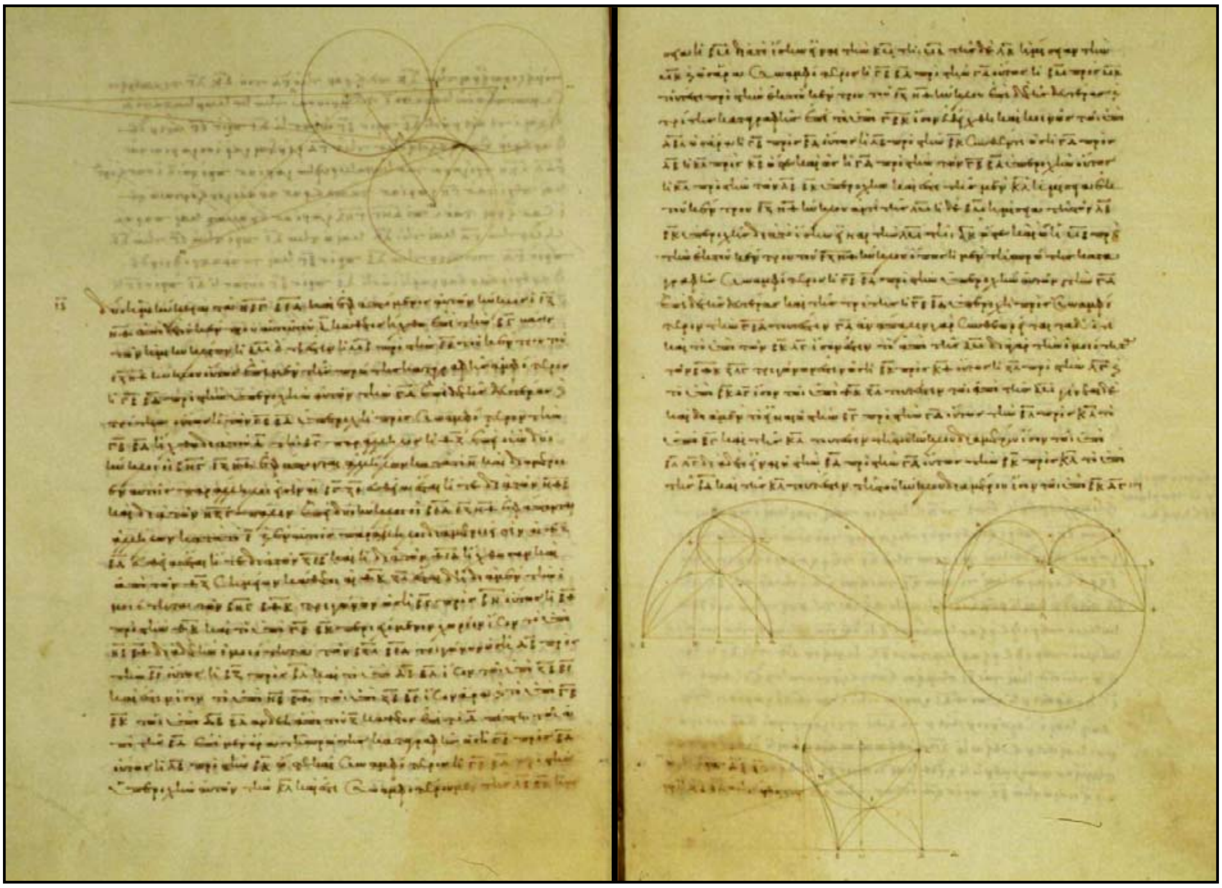
El último de los grandes geómetras griegos es Pappus que escribió *La Colección Matemática*, una obra muy heterogénea, de un valor científico, histórico y metodológico inconmensurable. Es a través de esta obra que conocemos muchos de los trabajos geométricos anteriores perdidos. La obra nos ofrece una panorámica bastante amplia de la Geometría griega con una gran profusión de originales aportaciones del propio autor, desde lemas para hacer más inteligible algún teorema, hasta demostraciones alternativas, generalizaciones y nuevos resultados. Encontramos en la obra de Pappus, además de infinidad de teoremas y problemas sobre Geometría superior –no incluida en *Los Elementos* de Euclides–, un gran número de cuestiones que debemos situar en las raíces históricas de la Geometría Analítica como son la más elaborada exposición sobre los métodos de *Análisis* y *Síntesis*, numerosas soluciones a los problemas clásicos –sobre todo la duplicación del cubo y la trisección del ángulo–, nuevos estudios y extensiones de propiedades de las secciones cónicas como lugares geométricos –en particular el Teorema VII.238 que permite unificar en la Geometría escolar la definición de las tres cónicas como lugares geométricos en relación con distancias a un punto, el foco y a una recta, la directriz–, y la clasificación definitiva de los problemas geométricos en planos, sólidos y lineales –según sean resolubles, respectivamente, con rectas y circunferencias, cónicas u otras curvas superiores–, que perseguía la idea de ajustar la envergadura de los instrumentos geométricos a utilizar a la enjundia de los problemas geométricos a resolver, en la línea de aplicar siempre los medios más simples posibles, lo que será no sólo un rasgo distintivo de las Geometrías Analíticas de Fermat y Descartes, sino un componente general de la mejor Matemática, que siempre exige elegancia y economía en el razonamiento.

Pero quizá el asunto más importante sea el tratamiento general del llamado *Problema de Pappus* o *lugar geométrico de n rectas*, que en su formulación más sencilla, para tres o cuatro rectas ya era conocido por Apolonio, siendo la solución una cónica, y que ha tenido un valor emblemático para la Historia de la Geometría Analítica. Pappus realiza un estudio exhaustivo del problema, propone la generalización a más de cuatro rectas y reconoce que independientemente del número de rectas involucradas en el problema, queda determinada una curva concreta. He aquí la observación más general sobre lugares geométricos de toda la Geometría griega, lo que implica, además, la consideración de infinitos tipos nuevos de curvas planas, algo esencial en un mundo geométrico tan limitado en cuanto a curvas planas. Pappus vacila a la hora de considerar el problema para más de seis líneas porque: «*no hay nada contenido en más de tres dimensiones*». De haber seguido en esa dirección, se habría dado un paso muy importante de anticipación de la Geometría Analítica, toda vez que ello hubiera propiciado un necesario tratamiento algebraico y no geométrico de los productos de líneas involucradas en el problema. Esto fue precisamente uno de los grandes logros de Descartes, la reforma de la notación, hacia la invención de la Geometría Analítica, al escribir (G.AT,VI, 371).:

> «*Es de señalar que para a^2 o b^3 u otras expresiones semejantes, yo no concibo ordinariamente más que líneas simples, aunque para servirme de los nombres usados en álgebra, los designe por cuadrados, cubos, etc*. »

Naturalmente los métodos sintéticos le desbordan a Pappus en el abordaje del problema. El Álgebra sincopada de Diofanto no es aún un Análisis Algebraico. Cuando lo sea, tras la actuación de Vieta, el nuevo Álgebra actuará sobre el Análisis Geométrico de los griegos para dar a luz las Geometrías Analíticas de Fermat y Descartes como poderosos instrumentos algorítmicos de ataque de los problemas geométricos difíciles como el propio *Problema de Pappus*. Aun así, la posición de Pappus en la línea histórica de la Geometría Analítica es muy honorable como señala el propio Descartes en la regla IV de las *Regulae*. De hecho, fue la generalización del *Problema de Pappus* la prueba de fuego que tuvo que pasar *La Geometría* de Descartes. Por eso es tan importante conocer la obra de Pappus, sin la cual es muy difícil entender la impresionante eclosión del desarrollo matemático en los siglos XVI y XVII.

LA COLECCIÓN MATEMÁTICA DE PAPPUS



Página de *La Colección Matemática* de Pappus (Proposición VI.53, en un manuscrito del siglo X de la colección vaticana, *Vat. gr. 218 fol. 40 recto math08a NS.05*), arquetipo de las copias posteriores realizadas a partir del siglo XVI.

En esta monumental obra Pappus realiza una encomiable labor de compilación, comentario, restauración, organización, clasificación y generalización del conocimiento matemático de la antigüedad griega considerado como superior, es decir, no incluido en *Los Elementos* de Euclides.

***La Colección Matemática* de Pappus como *Las Cónicas* de Apolonio, tuvo una incidencia decisiva en la evolución del Álgebra Geométrica griega hacia las Geometrías Analíticas de Fermat y Descartes. Es un gigantesco manantial bibliográfico esencial para el estudio de la Historia de la Geometría griega porque describe una multitud de trabajos matemáticos perdidos de Euclides, Arquímedes, Apolonio, Aristeo y Eratóstenes sobre Geometría superior que constituyen lo que se llama *Tesoro del Análisis*. De este modo, la obra de Pappus preserva para la posteridad buena parte del saber geométrico con lo que evita la desaparición irremediable del acervo matemático griego y así se convierte, en muchos casos, en la principal fuente de información –y a veces la única– sobre los trabajos de Geometría griega perdidos. Además, Pappus nos relata las vías que seguía la investigación geométrica, oculta en los grandes tratados clásicos debido a su estilo sintético, es decir, lo que los antiguos geómetras entendían por *Análisis* y *Síntesis*.**

Aparte de su valor compilador de la Geometría griega superior, la obra tiene un gran valor didáctico por la multitud de lemas introducidos para hacer inteligibles muchos teoremas. Además, Pappus aporta muchos resultados originales de su propia cosecha.

La obra de Pappus –una de las principales fuentes de información e inspiración matemática a partir del Renacimiento– contiene soluciones nuevas a numerosos problemas clásicos, la clasificación definitiva de los problemas geométricos en planos, sólidos y lineales, estudios definitivos de las cónicas como lugares geométricos y una visión más general del famoso *Problema de Pappus* del Libro VII –auténtico bautismo de fuego que puso a prueba la superioridad de los métodos analíticos cartesianos– todas ellas cuestiones de trascendental influencia sobre el advenimiento de las Geometrías Analíticas de Fermat y Descartes.

El Análisis Geométrico griego y la Geometría Analítica

Veamos ahora una cuestión metodológica que nos permita entender la evolución del Álgebra Geométrica de los griegos hacia la Geometría Analítica de Fermat y Descartes. *Los Elementos* de Euclides establecieron un severo modelo de exposición y demostración que oculta el camino de la investigación hacia el descubrimiento. Surge de forma natural la pregunta acerca de cómo los geómetras griegos encontraban sus impresionantes resultados que después plasmaban en sus obras con un rigor impecable e implacable. Pues bien, es aquí donde interviene el *Análisis* como un procedimiento metodológico capital para el progreso de la Matemática, del que la Geometría Analítica heredará no sólo su nombre sino sobre todo sus procedimientos.

Proclo (411-485 d.C.) en sus *Comentarios al Libro I de los Elementos de Euclides* atribuye a Hipócrates de Quíos (hacia 450 a.C.) la invención del *Método Analítico* cuando lo define:

> «*La apagogé es una reducción de un problema o de un teorema a otro, que si es conocido o determinado, conduce a la solución de la cuestión propuesta*».

Pero siempre se ha imputado su paternidad a Platón (427-347 a.C.) –según ciertos pasajes del *Menón* (86e–87a), la *República* (510c) y la *Ética a Nicómaco* de Aristóteles (1095a)–, que lo formularía como un método pedagógicamente conveniente, viniendo a decir que cuando una cadena de razonamientos desde unas premisas a una conclusión no es obvia, se puede invertir el proceso; uno puede empezar por la proposición que ha de probarse y deducir de ella una conclusión que es conocida. Si entonces podemos invertir los pasos en esta cadena de razonamientos, el resultado (*Síntesis*) es una prueba legítima de la proposición. Es decir, mediante el *Análisis* se asume como cierto aquello que hay que probar y se razona con base en esta asunción hasta llegar a algo que forma parte de los principios o alcanzar un resultado cierto por haber sido previamente establecido. Si entonces podemos invertir la secuencia de los pasos anteriores se obtiene una demostración del teorema que había que probar. Así pues, el *Análisis* viene a ser un procedimiento sistemático de descubrir «*condiciones necesarias*» para que un teorema sea cierto, de modo que si por medio de la *Síntesis* se muestra que estas condiciones son también *suficientes*, se obtiene una demostración correcta de la proposición.

Conviene explicar un poco en qué medida la Geometría Analítica recibe su nombre precisamente del método de *Análisis* de los griegos. Como se ha dicho, el *Análisis* empieza «*asumiendo como cierto aquello que hay que probar*». Esto es precisamente un principio que aplica Descartes desde el comienzo de *La Geometría*. Por ejemplo en el segundo epígrafe del Libro I, titulado*: «Cómo se llega a las ecuaciones que sirven para resolver los problemas*», Descartes escribe (G.AT,VI,372):

> «*Así, si se quiere resolver algún problema, debe de antemano considerarse como ya resuelto,*[...]»

Descartes no sólo realizará una aplicación directa de los procedimientos del *Análisis* y la *Síntesi*s de los griegos sino que reformulados serán las dos reglas intermedias de las cuatro reglas del *El Discurso del Método* (DM.AT,VI,17-18). Una y otra vez en la multiplicidad de problemas que resuelve en *La Geometría*, Descartes empezará por suponer el problema resuelto. En concreto en dos de los problemas más importantes que trata, Descartes escribe literalmente:

> «*Primeramente yo supongo la cosa como ya hecha,* [...]» (*Problema de Pappus* [G.AT,VI, 382]).
>
> «*Supongamos que la cosa está hecha*, [...]» (rectas normales a una curva [G.AT,VI, 413]).

Naturalmente hay una diferencia notable entre la aplicación que del método de *Análisis* y

Síntesis hacen los griegos y lo que realizan Descartes y Fermat en lo que se ha llamado sus Geometría Analíticas. Éste es el asunto que queremos estudiar: a partir de algunos de los principios metodológicos de la Geometría griega tiene lugar el nacimiento de algo completamente nuevo y revolucionario –*La Geometría* de Descartes y la *Isagoge* de Fermat–, que consigue clausurar, en gran parte, el punto de partida – la propia Geometría griega–. ¿Qué poderoso instrumento utilizarán Fermat y Descartes para alcanzar tal hazaña matemática? El Álgebra, una herramienta que no pudo disfrutar la Geometría griega porque la aparición súbita de los inconmensurables desvió la influencia de la Matemática babilónica, bien versada en Aritmética y en incipientes técnicas algebraicas, hacia la Geometría Sintética y el Álgebra Geométrica. Cuando Fermat y Descartes, bajo la inspiración de Vieta, apliquen todo el potencial algorítmico del Álgebra árabe, renacentista y del propio Vieta, el *Análisis* alcanzará su máximo poder heurístico para la resolución de los problemas geométricos –incluso los que se habían resistido de forma reiterada a los métodos clásicos, como el *Problema de Pappus* y el *Problema de Apolonio*–, a base de complementar el estudio analítico con la síntesis algebraica, lo que les permitirá mediante las ecuaciones pasar de la Geometría al Álgebra y del Álgebra a la Geometría.

La forma más esmerada del *Análisis* y la *Síntesis* la aplica Pappus en el *Tesoro del Análisis*, describiendo como para comprobar la validez y encontrar la prueba de un teorema o resolver un problema –en general de construcción– se procede analíticamente, asumiendo por el momento que el teorema en cuestión es válido o que el problema está resuelto. Siguiendo entonces las implicaciones lógicas del teorema o la solución del problema, se llega a alcanzar una solución conocida que es verdadera o falsa. Si se trata de un teorema, de una falsa conclusión resulta la invalidez del teorema, y entonces del mismo *Análisis* resulta la refutación del teorema por reducción al absurdo; pero, si la conclusión obtenida a través del Análisis es verdadera, nada se puede decir de la validez del teorema. Es decir, el método de Análisis produce una cadena de inferencias que lleva de una premisa de valor verdadero desconocido a una conclusión de valor verdadero conocido; la falsedad de la conclusión implica la de la premisa, pero la verdad de la conclusión no dice nada acerca de la de la premisa, a menos que, como señalaba Platón, uno pueda dar la vuelta a la inferencia. La eficiencia del *Análisis* es doble, por una parte abundan los teoremas geométricos que tienen un recíproco válido, y por otra, cuando el recíproco de un teorema no es válido puede llegar a serlo añadiendo ciertas condiciones suplementarias, que eran llamadas por los griegos «*diorismos*». Gran parte de la investigación geométrica consistía en la búsqueda del *diorismo* adecuado para poder invertir una inferencia. Una vez que se ha hallado el *diorismo*, la inferencia invertida constituye una *Síntesis*, es decir la rigurosa demostración del teorema. Las considerables dificultades inherentes a la inversión de inferencias propiciaron que los grandes matemáticos griegos se expresaran en sus obras mediante formales demostraciones sintéticas de los resultados que habían obtenido aplicando el método de *Análisis*. Es decir, el Análisis geométrico griego era una fecunda heurística geométrica, el instrumento fundamental de investigación y creación matemática; pero, alcanzada tras el *Análisis*, la *Síntesis*, en presencia de la demostración sintética cualquier análisis era superfluo y como tal se suprimía de los grandes tratados. De esta forma, los griegos ocultaban la forma y el camino utilizados en la obtención de sus magníficos resultados matemáticos.

Cuando a partir del Renacimiento tiene lugar la recuperación, reconstrucción y divulgación del legado clásico griego, los matemáticos lo acogen con entusiasmo, pero preocupados porque el estilo sintético y apodíctico de exposición de la Geometría griega, y en particular de las obras de Euclides, Arquímedes y Apolonio, privaba a los investigadores de la forma en que habían sido descubiertos los resultados, manifiestan junto a su admiración, una cierta perplejidad y extrañeza. Incluso algunos (Torricelli, Barrow, Wallis,...) sospechaban sin fundamento que los griegos disponían de algún instrumento (¿el Álgebra?), un determinado tipo de Análisis Geométrico, pero que lo habían ocultado de forma tan perfecta que a los modernos matemáticos les había resultado más fácil inventar un nuevo Análisis –la Geometría Analítica– que recuperar el antiguo. Quizá es Descartes quien con mayor claridad muestra – en la Regla IV de las *Regulae*– la insatisfacción de una curiosidad frustrada por la ocultación de los métodos de descubrimiento de la Geometría griega.

ANÁLISIS Y ÁLGEBRA EN LA REGLA IV (R.IV.AT.X.373-377) DE LAS *REGLAS PARA LA DIRECCIÓN DEL ESPÍRITU* DE DESCARTES

Retrato caricaturesco de Descartes escribiendo un libro y con el pie apoyado en una obra de Aristóteles. Grabado de C.Hellemans. Biblioteca Nacional. París.

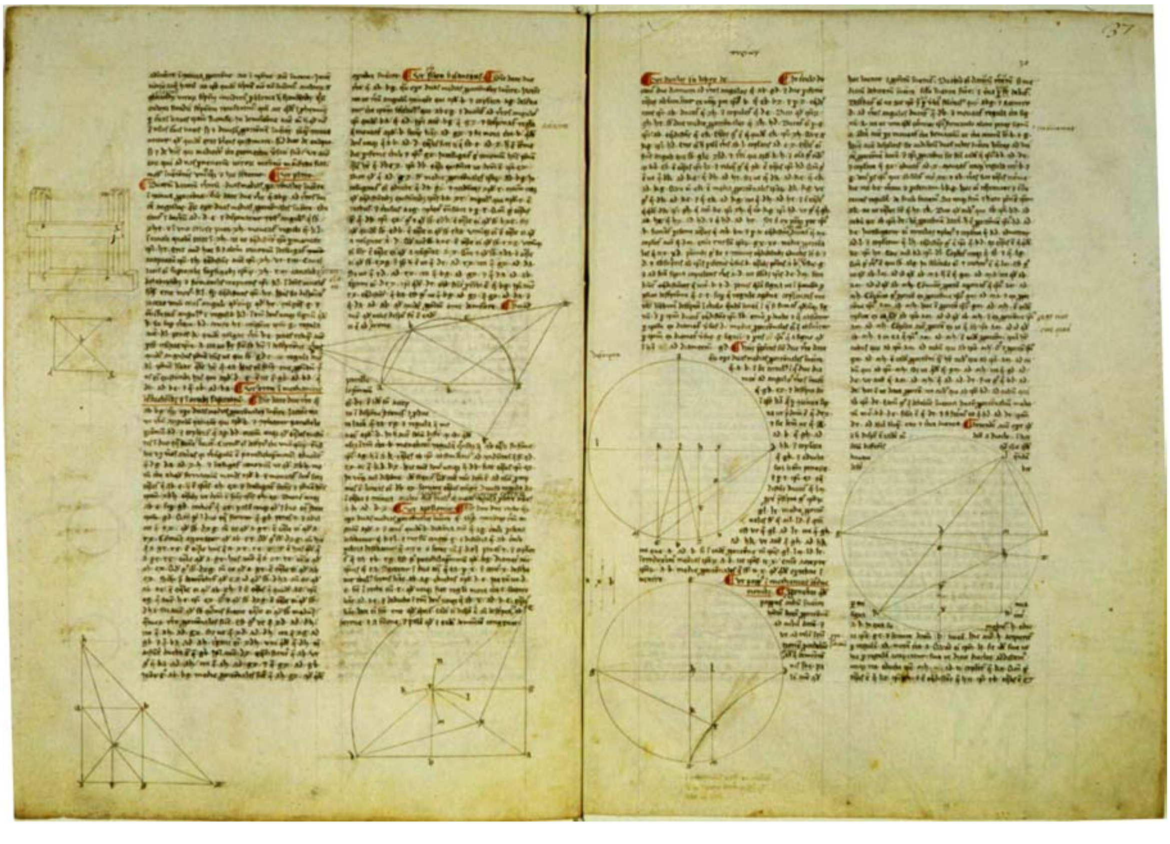
Descartes subraya en la regla IV (*Regulae ad directionem ingenii*) que los antiguos geómetras utilizaban cierto *Análisis* para la resolución de todos los problemas geométricos (como se advierte en Pappus y Diofanto), pero privaron de él a la posteridad con la expresión sintética que oculta los métodos de descubrimiento, y merecen por ello (al impedir la divulgación de los métodos de trabajo) la más acerba de las críticas. Descartes elogia, en cambio, a «*hombres de gran talento*» (¿Vieta?), que han recuperado el Análisis Geométrico de los antiguos y lo han desarrollado con los nuevos instrumentos del Álgebra (un arte que clarificado y liberado de su actual farragosidad podría cumplir una función similar a la del *Análisis* de los antiguos). Con base en estos analistas Descartes destilará un auténtico Análisis Algebraico, que históricamente se desarrollará en la línea de una verdadera Geometría Analítica.

«[...] E*n las más fáciles de las ciencias, la Aritmética y la Geometría, vemos con toda claridad que los antiguos geómetras se han servido de cierto Análisis, que extendían a la resolución de todos los problemas, si bien privaron de él a la posteridad. Y ahora florece cierta clase de Aritmética que llaman Álgebra, para realizar sobre los números lo que los antiguos hacían sobre las figuras* [...] *Cuando por primera vez me dediqué a las disciplinas Matemáticas, de inmediato leí por completo la mayor parte de lo que suelen enseñar sus autores, y cultivé preferentemente la Aritmética y la Geometría, porque se las tenía por las más simples y como un camino para las demás. Pero no caían en mis manos autores que me satisficieran plenamente: leía cosas acerca de los números que yo comprobaba, habiendo hecho cálculos, ser verdaderas; y lo mismo respecto de las figuras;* [...] *Pero por qué esto era así, y cómo eran halladas, no parecían mostrarlo suficientemente a la mente,* [...] *Pero como después pensase por qué sucedía que antiguamente los primeros creadores de la Filosofía no quisieran admitir para el estudio de la sabiduría a nadie que no supiese Mathesis,* [...]*, tuve la sospecha de que ellos conocían cierta Mathesis muy diferente de la Matemática vulgar de nuestro tiempo* [...] *Y ciertamente me parece que vestigios de esta verdadera Mathesis aparecen en Pappus y Diofanto,* [...] *Y fácilmente creería que después fue ocultada por cierta audacia perniciosa por los mismos escritores; pues así como es cierto que lo han hecho muchos artistas con sus inventos, así ellos temieron quizá que, siendo tan fácil y sencilla, se envileciese después de divulgada; y para que les admirásemos prefirieron presentarnos en su lugar, como productos de su método, algunas verdades estériles deducidas con sutileza, en vez de enseñarnos el método mismo que hubiera hecho desaparecer por completo la admiración. Ha habido, finalmente, algunos hombres de gran talento que se han esforzado en este siglo por resucitarla; pues aquel arte no parece ser otra cosa, que lo que con nombre extranjero llaman Álgebra, con tal que pueda zafarse de las múltiples cifras e inexplicables figuras de que está recargado a fin de que no falte ya aquella claridad y facilidad suma que suponemos debe haber en la verdadera Mathesis* [...]»

El texto de la IV Regla de Descartes es fundamental para poder entender la actitud mental de Descartes sobre su magno proyecto de reforma de la Matemática de donde surgen las fuentes de su Geometría Analítica.

Como señala Descartes, en la pléyade de geómetras griegos, Pappus fue una excepción, porque desarrolló una singular metodología en la forma de exposición, codificando todo un cuerpo de tratados analíticos de solución de problemas en el llamado *Tesoro del Análisis* del Libro VII de *La Colección Matemática*. En estos tratados queda patente el camino que sigue la investigación matemática ya que se procede a la reducción de un problema dado a un problema equivalente cuya solución era ya conocida. Desgraciadamente la obra de Pappus fue ignorada o desconocida por los escritores árabes, intermediarios en el tránsito a occidente de la cultura clásica griega, permaneciendo oculta en manuscritos griegos originales que vieron de nuevo la luz en los siglos XVI y XVII, bajo el nuevo espíritu humanista de Commandino, Maurólico, Vieta, Fermat y otros muchos, que se propusieron la traducción, recuperación y restauración de las obras antiguas.

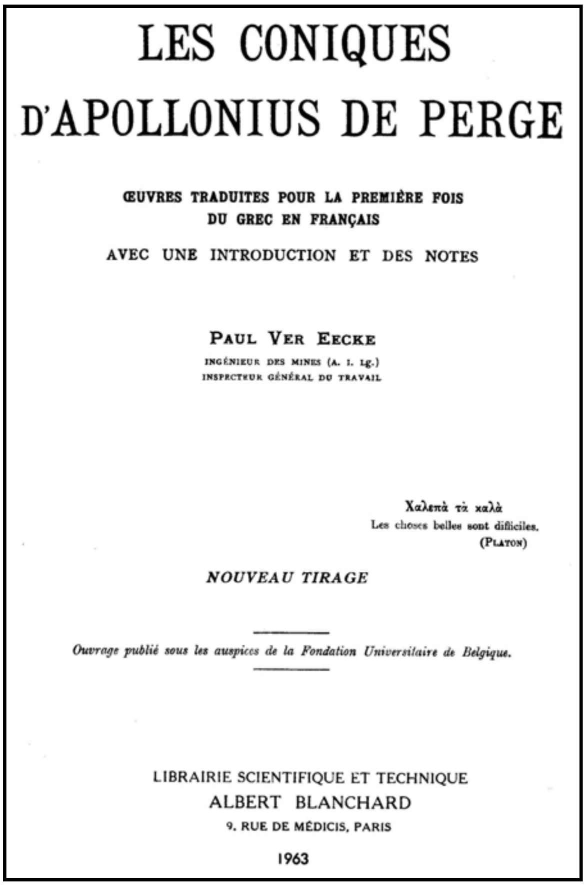
Si Descartes hubiera conocido la obra de Arquímedes, *El Método relativo a los teoremas mecánicos* –descubierta por el gran helenista J.L.Heiberg, en un palimpsesto medieval, en 1906–, la excepción que hace con Pappus tal vez la hubiera extendido con toda razón a Arquímedes, ya que estos matemáticos son los únicos en toda la Geometría griega que dan a conocer la vía heurística de los descubrimientos, vía analítica en el caso de Pappus y también vía mecánica en el de Arquímedes.



Página de la traducción al latín, de W. de Moerbeke de las *Obras* de Arquímedes con *comentarios* de Eutocius (en un manuscrito de 1269 de la colección vaticana, *Ottob. lat. 1850 fol. 37 recto math05 NS.52*), que muestra la solución al problema clásico de la *duplicación del cubo* en una parte del *Comentario* de Eutocius a la obra de Arquímedes *Sobre la Esfera y el Cilindro.*

El problema de la *duplicación del cubo* tuvo una gran influencia en descubrimiento de las secciones cónicas y fue un tópico importante de las Geometrías de Fermat y Descartes.

LAS OBRAS FUNDAMENTALES DE LA MATEMÁTICA GRIEGA DE GRAN INFLUENCIA SOBRE LA GÉNESIS DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA (EDICIONES DE P. VER EECKE)



LES CONIQUES
D'APOLLONIUS DE PERGE

ŒUVRES TRADUITES POUR LA PREMIÈRE FOIS
DU GREC EN FRANÇAIS
AVEC UNE INTRODUCTION ET DES NOTES

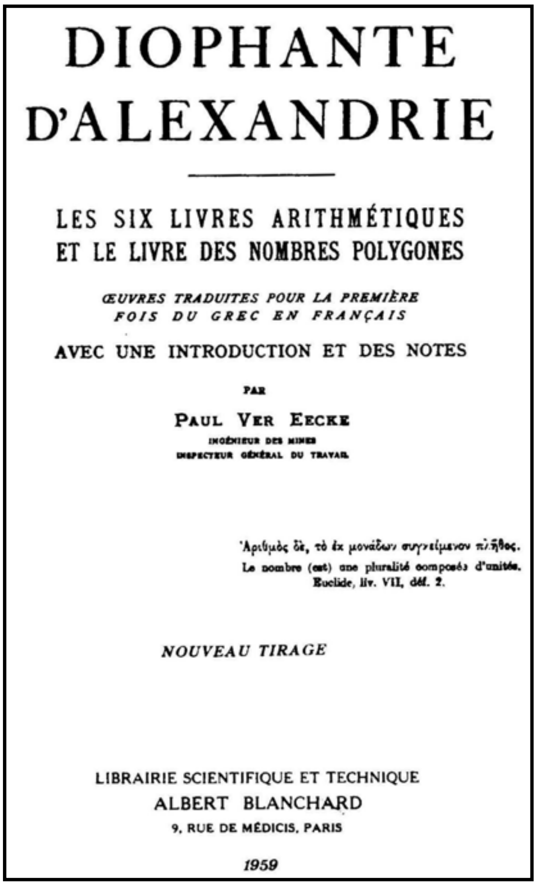
PAUL VER EECKE
INGÉNIEUR DES MINES (A. I. Lg.)
INSPECTEUR GÉNÉRAL DU TRAVAIL

Χαλεπὰ τὰ καλά
Les choses belles sont difficiles.
(PLATON)

NOUVEAU TIRAGE

Ouvrage publié sous les auspices de la Fondation Universitaire de Belgique.

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE ET TECHNIQUE
ALBERT BLANCHARD
9, RUE DE MÉDICIS, PARIS
1963



DIOPHANTE
D'ALEXANDRIE

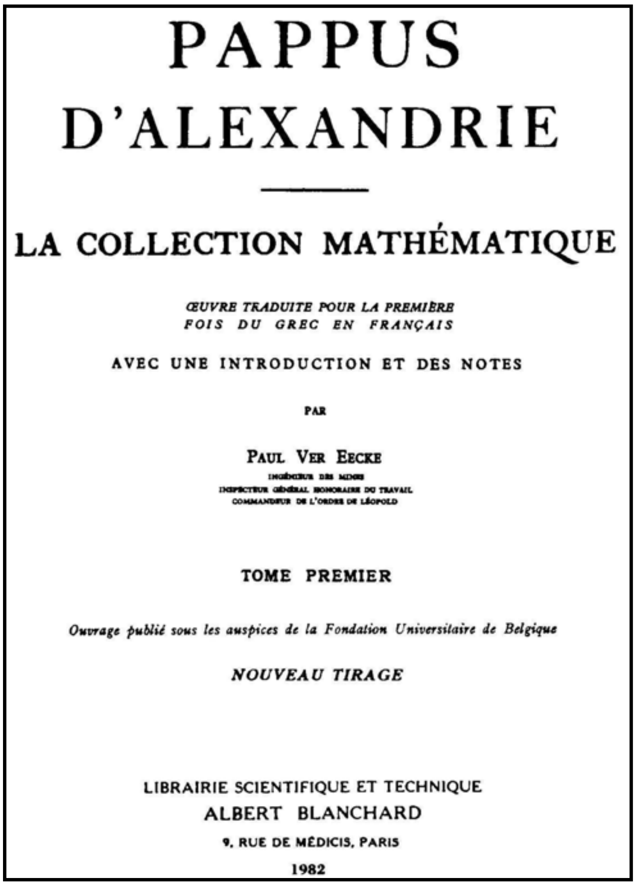
LES SIX LIVRES ARITHMÉTIQUES
ET LE LIVRE DES NOMBRES POLYGONES

ŒUVRES TRADUITES POUR LA PREMIÈRE FOIS DU GREC EN FRANÇAIS
AVEC UNE INTRODUCTION ET DES NOTES
PAR
PAUL VER EECKE
INGÉNIEUR DES MINES
INSPECTEUR GÉNÉRAL DU TRAVAIL

Ἀριθμὸς δέ, τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος.
Le nombre (est) une pluralité composée d'unités.
Euclide, liv. VII, déf. 2.

NOUVEAU TIRAGE

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE ET TECHNIQUE
ALBERT BLANCHARD
9, RUE DE MÉDICIS, PARIS
1959



PAPPUS
D'ALEXANDRIE

LA COLLECTION MATHÉMATIQUE

ŒUVRE TRADUITE POUR LA PREMIÈRE FOIS DU GREC EN FRANÇAIS
AVEC UNE INTRODUCTION ET DES NOTES
PAR
PAUL VER EECKE
INGÉNIEUR DES MINES
INSPECTEUR GÉNÉRAL HONORAIRE DU TRAVAIL
COMMANDEUR DE L'ORDRE DE LÉOPOLD

TOME PREMIER

Ouvrage publié sous les auspices de la Fondation Universitaire de Belgique

NOUVEAU TIRAGE

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE ET TECHNIQUE
ALBERT BLANCHARD
9, RUE DE MÉDICIS, PARIS
1982

Portadas de las ediciones de Paul Ver Eecke con una introducción y notas de las fuentes bibliográficas primarias griegas más importantes para el estudio de los orígenes de la Geometría Analítica:

- ***Les Coniques d'Apollonius de Perge.*** **A.Blanchard. París, 1963**
- ***Diophante d'Alexandrie: Les six livres arithmétiques et le livre des nombres polygones.*** **Introductión et notes par P. Ver Eecke. A.Blanchard, París, 1959.**
- ***Pappus d'alexandrie. La Collection Mathématique.*** **A.Blanchard, París, 1982.**

Estas magníficas ediciones de Paul Ver Eecke de las obras de Apolonio, Diofanto y Pappus, publicadas por *La Librairie scientifique et technique Albert Blanchard* de París, son la primera traducción del griego al francés y disponen de una brillante introducción y de unas generosas notas de carácter histórico, filológico y matemático, aclaratorias y extensivas del texto original que coadyuvan sobremanera a su intelección.

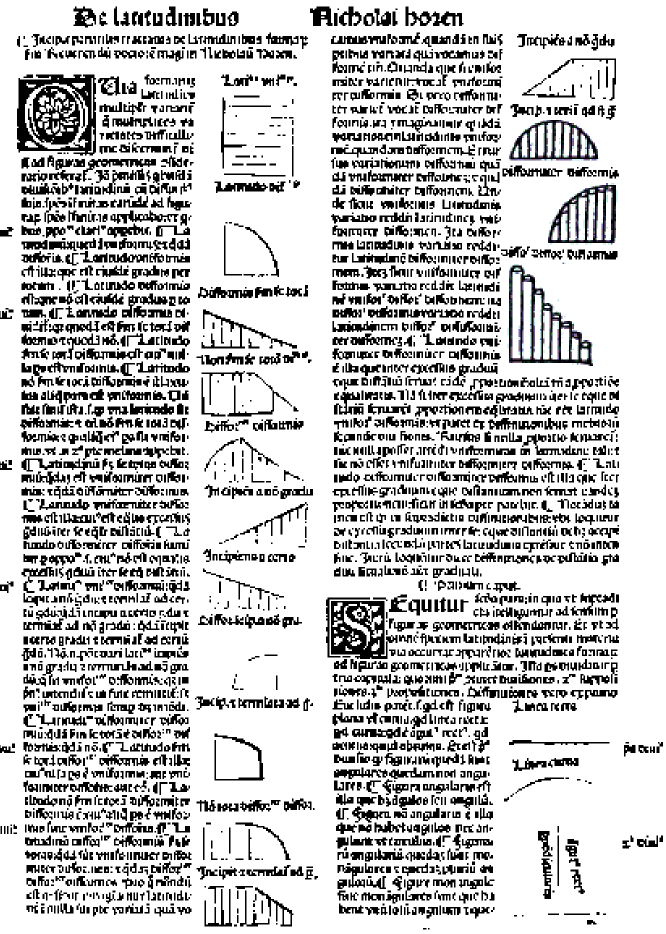
El *Tractatus Latitudinibus Formarum* de Oresme

Si el trabajo de Apolonio es el primer estadio histórico sobre la aplicación de coordenadas, es decir, ciertas líneas, introducidas *a posteriori,* como ejes auxiliares de coordenadas determinados por la figura curva dada *a priori*; la obra de Oresme (1323-1382) representa el segundo estadio en la introducción de las coordenadas, pero ahora el sistema de coordenadas se introduce *a priori* y los puntos de la curva son representados con respecto a él. Oresme realiza este trabajo en su obra *Tractatus latitudinibus formarum* –escrito hacia 1362– donde desarrolla la teoría de la «*latitud de las formas*». Oresme escribe:

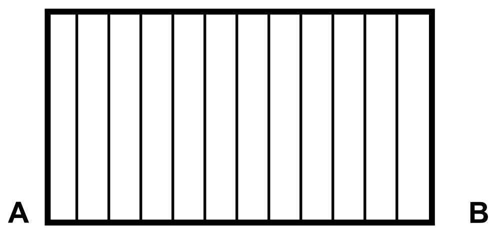
> «[**...**] *Todo lo que varía, lo podemos imaginar como una cantidad continua representada por un segmento rectilíneo* [**...**]»

Para facilitar la comprensión de la evolución de un fenómeno, Oresme introduce la noción de gráfico como elemento descriptivo de la variación de una magnitud –que llama «*cualidad*»– en función de otra magnitud, así considera lo que denomina representación gráfica de «*las intensidades de la cualidades*», germen de nuestra representación gráfica de funciones en un sistema de coordenadas, uno de los aspectos esenciales de la Geometría Analítica. Tras elegir un punto origen en una recta horizontal, Oresme llama «*longitudo*» (longitud) a nuestra abscisa, que es el tiempo o el espacio, y eleva una perperdicular, la «*latitudo*» (latitud), nuestra ordenada, que es proporcional a la intensidad o amplitud del fenómeno, ya sea velocidad, calor u otros. No obstante, para Oresme esta variación no se refleja como en la Geometría Analítica por la curva descrita por los puntos de *longitud* y *latitud* dadas, sino por la figura total, es decir el área que determina esa curva, el eje de las longitudes y las intensidades inicial y final, que Oresme llama simplemente «*figura*».

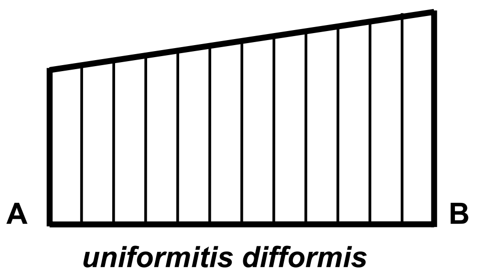
En la obra de Oresme hay un estudio matemático de las figuras planas que producen las representaciones gráficas de las *cualidades*. Oresme considera varios géneros de formas que darán lugar a otras tantas formas de representación geométrica. En primer lugar las formas uniformes («*aequalitas uniformes*») correspondientes a nuestras funciones constantes y cuya representación gráfica da un rectángulo. Siguen las formas uniformemente diformes («*uniformitis difformis*»), que se corresponden con nuestras funciones afines y cuya representación gráfica es un trapecio. Finalmente Oresme define el tercer género de formas, las formas diformemente diformes («*difformitis diformis*») como las que no corresponden a los géneros anteriores.


De latitudinibus   Nicholai horen

Página de una edición de 1505 de la obra de Oresme *Tractatus de latitudinibus formarum,* donde aparecen los diversas formas geométricas correspondientes a las representaciones gráficas de las *cualidades*.



aequalitas uniformes

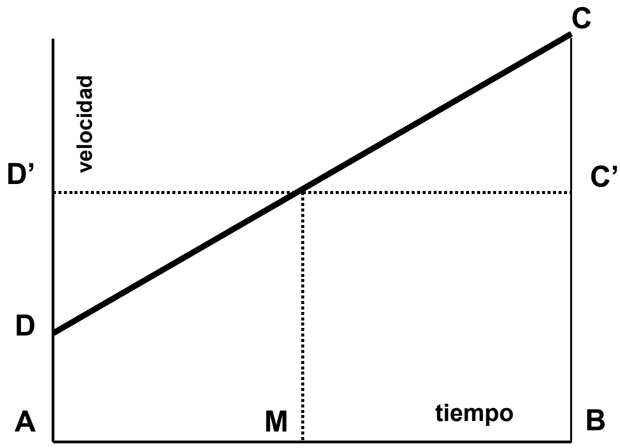


uniformitis difformis

A continuación Oresme aplica la Teoría de *latitud de las formas* al estudio del movimiento mediante lo que se le considera un auténtico anticipador de la Cinemática de Galileo.

Con el fin de describir el movimiento rectilíneo, Oresme introduce la idea de representar gráficamente la velocidad instantánea del móvil en función del tiempo. Sobre una recta horizontal lleva graduaciones de segmentos equivalentes al tiempo y sobre ellas eleva segmentos perpendiculares de longitudes equivalentes a la velocidad del móvil en los instantes correspondientes. Así obtiene el diagrama velocidad-tiempo del cual a Oresme le interesa la porción de plano barrido por las perpendiculares sucesivas. A través de la generalización del examen de casos particulares simples, Oresme llega a la conclusión de que el área barrida por las perpendiculares sucesivas elevadas sobre cada graduación de un intervalo de tiempo equivale a la distancia recorrida por el móvil durante ese intervalo de tiempo *–Principio de Oresme–*. Este postulado es la base de sus descubrimientos sobre el movimiento uniformemente acelerado.

Para este tipo de movimiento, que es el caso más importante, el crecimiento de la velocidad del móvil es proporcional a la duración durante la cual se produce tal crecimiento. La representación gráfica de la velocidad en función del tiempo en el sentido de Oresme, es decir, la porción de plano barrido por las perpendiculares sucesivas –los segmentos de velocidad– resulta ser un trapecio determinado por la recta formada por los puntos superiores de tales perpendiculares, la recta de longitudes y los segmentos de las latitudes extremas.



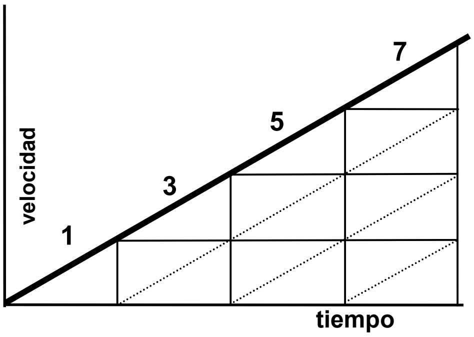
Ya que según el *Principio de Oresme*, el área del trapecio ABCD equivale a la distancia recorrida en el intervalo de tiempo AB, y puesto que el área de este trapecio es igual a la del rectángulo ABC'D', deduce Oresme que la distancia recorrida por el móvil con movimiento uniformemente acelerado en el intervalo de tiempo AB, es la misma que la que recorrería con movimiento uniforme de velocidad igual a la que tiene en el instante medio M. Así pues, Oresme obtiene una verificación geométrica del famoso «*Teorema de Merton*» del grupo de filósofos que adoptaron el epónimo de *Colegio de Merton*.

Oresme realmente no justifica por qué razón el área bajo el gráfico velocidad-tiempo representa la distancia recorrida. Claro está que una demostración rigurosa exige los recursos del Cálculo Integral. Es posible que lo asumiera como una generalización inmediata del caso de la velocidad uniforme, o tal vez en la línea de la «*composición*» de Arquímedes y de los futuros «*Indivisibles*» de Cavalieri considerase el área como la yuxtaposición de los segmentos verticales con toda la problemática que esto acarrea en cuanto a la composición del continuo.

Los resultados de Oresme puede que no sean rigurosos a nuestros ojos (el concepto de rigor en Matemáticas es privativo del paradigma de cada época) pero hasta la invención de la Geometría Analítica por parte de Fermat y Descartes y hasta el desarrollo del Cálculo por Cavalieri, Fermat, Pascal y finalmente Newton y Leibniz, la Cinemática no tendrá mejores demostraciones del movimiento uniformemente acelerado que las de Oresme.

Prosiguiendo sus estudios, Oresme considera un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado en el que la velocidad inicial es cero. Subdividiendo el intervalo AB en un cierto número de partes iguales, resulta que las áreas de los trapecios alzados sobre los intervalos están en las proporciones 1,3,5,7,... De acuerdo con el *Principio* lo mismo sucederá con las distancias recorridas en estos intervalos. Oresme escribe:

«*Ahora bien, como ha señalado el gran matemático griego Pitágoras* [la suma de números triangulares consecutivos es un número cuadrado]*: se tiene*:



1=1=1 vez 1 [=2^2]

1+3=4=2 veces 2 [=2^2]
1+3+5=9=3 veces 3 [=3^2]
1+3+5+7=16=4 veces 4 [=4^2]
....
se obtiene siempre un número cuadrado. Por este medio se pueden obtener las razones mutuas de las cantidades [áreas] *totales.»*

Vemos, pues, que la representación gráfica, como instrumento básico de la Geometría Analítica ha empezado a dar su fruto: Oresme ha establecido la ley fundamental del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. La distancia recorrida es proporcional al cuadrado del tiempo.

N.Oresme en su pupitre junto a una esfera armilar. Ilustración de su obra en francés *Les gloses du traité du ciel et du monde*, que es un comentario a la traducción que hizo de la obra de Aristóteles D*e Caelo*. Siglo XV. Biblioteca Nacional. París.

Es interesante analizar en qué sentido se halla en Oresme un incipiente desarrollo de Geometría Analítica y Cálculo Infinitesimal. La consideración de *coordenadas cartesianas*, denominadas por Oresme longitud y latitud, no es en realidad una innovación ya que Apolonio y otros matemáticos y geógrafos griegos habían utilizado algún sistema de coordenadas. La verdadera innovación de Oresme es la representación gráfica de una cantidad variable mediante coordenadas, aunque se limitara a las funciones afines, y en este aspecto el trabajo de Oresme se desarrolla en el sentido positivo de la Geometría Analítica. Pero Oresme no recorre el otro sentido de la Geometría Analítica, es decir, no desarrolla el principio de que toda curva plana puede ser representada, con respecto a un sistema de coordenadas, como una función. Oresme está más bien interesado por las cuestiones de la variación de las formas –es decir, por los aspectos diferenciales–, así como por la variación del área bajo la curva –es decir, los aspectos integrales–, más que por el estudio analítico de la curva. En este sentido podemos decir que Oresme se acercó más al Cálculo Infinitesimal que a la Geometría Analítica.

En resumen, Nicolas de Oresme introduce al menos implícitamente cuatro ideas matemáticas innovadoras:

a) La medida de diversas variables físicas por medio de segmentos.
b) Algún tipo de relación funcional entre variables.
c) Una aproximación a la introducción de las coordenadas mediante la representación gráfica de relaciones funcionales.
d) Una especie de integración o sumación continua para calcular la distancia como el área bajo el gráfico velocidad-tiempo

El Análisis Algebraico-Geométrico del *Arte Analítica de* Vieta

Como parte de la recuperación del legado griego clásico, en el Renacimiento se emprende la restauración de la antigua tradición matemática griega basada en el *Método de Análisis,* en cuya acción la importancia de la naciente Álgebra simbólica, como una poderosa técnica algorítmica, será decisiva. Vieta y otros matemáticos, impelidos por la idea de crear un arte simbólico de razonamiento como instrumento fundamental de investigación matemática, llegan a recorrer gran parte del camino que media entre la incipiente *Álgebra sincopada* de Diofanto y el *Álgebra simbólica* de Descartes. El propio Descartes constata la situación en la IV Regla de sus *Regulae*

> «[...] *Ha habido, finalmente, algunos hombres de gran talento que se han esforzado en este siglo por resucitarla* [la verdadera *Mathesis* que aparece en Pappus y Diofanto]; *pues aquel arte no parece ser otra cosa, que lo que con nombre extraño llaman Álgebra,* [...]».

Descartes hace un elogio de algunos «*hombres de gran talento*», que han recuperado el Análisis Geométrico de los antiguos y lo han desarrollado con los nuevos instrumentos del Álgebra. Eso es precisamente lo que, con profunda inspiración en Diofanto y Pappus, emprende Vieta al publicar en 1591 *Introducción al Arte Analítico* (*In artem analyticem isagoge*), obra que instaura una nueva tradición matemática mediante un auténtico programa de investigación. Al considerar que el carácter algorítmico del Álgebra intensifica las aptitudes heurísticas del Análisis, Vieta destila un auténtico Análisis Algebraico, que Descartes y Fermat desarrollarán en la línea de una verdadera Geometría Analítica.

A partir de Vieta la forma de trabajar será radicalmente diferente, empezando por el simbolismo. El Álgebra que se aplica está mucho más elaborada que la de los *Cosistas* italianos, porque ha iniciado el tránsito de lo sincopado a lo simbólico. Como consecuencia de la reformulación de Vieta, «*El Arte de la Cosa*» de los algebristas italianos se trasformará en «*La Doctrina de las Ecuaciones*» del «*Arte Analítica*» de Vieta, donde todo lo que los antepasados griegos habían realizado en Geometría, ahora podía codificarse –en realidad reconstruirse heurísticamente– en la Teoría Algebraica de Ecuaciones.

Los algebristas italianos que se habían mantenido en la línea *cósica* de utilizar abreviaturas en su Álgebra sincopada, escribirían la ecuación «$x^3–4x^2+5x–4$» en la forma «*1Cm.4Zp.5Rm.4*» para abreviar la expresión «*1cubus minus 4zensus plus 5 res minus 4*».

Es Vieta quien introduce un primer atisbo de simbolismo, a propósito de la distinción radical que hizo entre parámetros y variables, designados por letras mayúsculas, las vocales para las magnitudes no conocidas –las incógnitas– y las consonantes para las conocidas –los parámetros–, pero para las potencias permaneció en la tradición indicando *quad* para el cuadrado y *cub* para el cubo, *aeq* para la igualdad y *in* para el producto. Así la ecuación «$x^3+5bx^2–2cx=d$», Vieta la expresaría como: «A cub + B 5 in A quad – C plano 2 in A aeq D solido», donde los parámetros B,C y D deben ser tales que cada término de la ecuación sea tridimensional, ya que para Vieta, como herencia griega, las operaciones aritméticas están incluidas todavía en un terreno estrictamente geométrico, que mantiene la homogeneidad, siendo cuadrado una magnitud plana y cubo una magnitud espacial.

Como se ve, el simbolismo en Vieta no es total, falta aplicar signos para la igualdad, el producto, las potencias, y otros, que de hecho ya existían en su época. De haberlo hecho, Vieta, por ejemplo, podría haber escrito *todas las ecuaciones cuadráticas* de la forma $BA^2+CA+D=0$, donde A es la incógnita y B,C,D, son los parámetros. Así pues, al manejar todavía simplemente abreviaturas el Álgebra de Vieta sigue siendo sincopada. Será Descartes quien introducirá la convención actual para la codificación de incógnitas y potencias (G.AT,VI,371).

El *Arte Analítica* de Vieta perfecciona considerablemente el Álgebra sincopada de Diofanto y de los matemáticos árabes y renacentistas, e inicia el cálculo literal del Álgebra simbólica mediante la introducción de los parámetros, lo que le permite obtener la solución general de las ecuaciones mediante fórmulas que expresan las incógnitas en función de los parámetros. Ya que los parámetros no permiten obtener un resultado numérico concreto tras las operaciones combinatorias que conducen a la resolución de una ecuación, sino una solución simbólica, Vieta trasciende la *Logistica numerosa* ordinaria, aplicada al cálculo con números, y alcanza la *Logistica speciosa* que tiene que ver con las especies, entendiendo por éstas cualquier tipo de magnitud, en particular elementos geométricos como ángulos o longitudes. Esto quiere decir que las cantidades simbólicas del *Arte Analítica* al ser interpretadas como magnitudes geométricas y las operaciones simbólicas como procedimientos de construcción geométrica, permiten obtener la solución simbólica de las ecuaciones generales con significado geométrico, de modo que *el Arte Analítica* podía ser aplicado no sólo a los problemas numéricos sino también a problemas geométricos. De esta forma, el *Arte Analítica* de Vieta que tuvo su origen en el *Tesoro del Análisis* de Pappus, revierte sobre éste, de manera que su contenido es traducido al lenguaje simbólico del Arte, es decir, mediante el concurso del Algebra simbólica, Vieta puede reconstruir, en términos algebraicos, el Análisis Geométrico clásico, lo que prepara el terreno para el advenimiento de las Geometrías Analíticas de Fermat y Descartes.

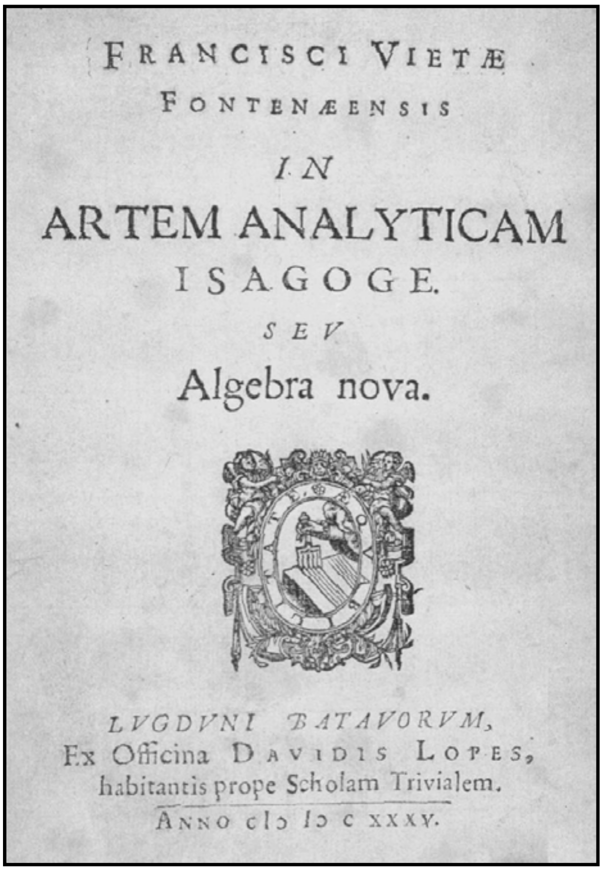
Vieta aplica sus desarrollos algebraicos a lo que en su época se llamaba el Análisis mixto, es decir, el Análisis aplicado a la Geometría, pero de una forma que no es una mera aplicación del Álgebra a la resolución de problemas geométricos. Esto ya lo habían hecho otros matemáticos como Regiomontano, Cardano, Tartaglia, o Bombelli, asignando valores numéricos a las líneas dadas del problema y contentándose con encontrar de la misma manera lo que se buscaba. Ninguno había soñado con construir geométricamente el valor encontrado. De hecho no habrían podido hacerlo por la propia naturaleza de su análisis, ya que sólo la magnitud desconocida era representada por algún símbolo. La nueva forma dada por Vieta al Álgebra, introduciendo el uso de letras para representar todas las magnitudes, las conocidas y las desconocidas, le condujo en su aplicación de las operaciones algebraicas apropiadas a las magnitudes geométricas, al desarrollo de las construcciones geométricas. Esto en sí mismo no es nuevo. El Álgebra Geométrica de los griegos usaba de forma retórica, como vimos, magnitudes geométricas como incógnitas. La gran novedad de Vieta estriba en la aplicación a problemas geométricos de todo el simbolismo literal con el potencial de la mecánica algorítmica operatoria de cálculo, manipulación y simplificación, es decir, la traslación de un problema de Geometría al Álgebra para su resolución, un aspecto esencial de la futura Geometría Analítica.
Veamos algunos ejemplos:

a) Si en la resolución de una ecuación se tiene: x=ac/b, es fácil ver que el valor de x es una cuarta proporcional.
b) Si en la resolución de una ecuación se tiene: $x = \sqrt{aa \pm bb/4}$, es fácil ver que en primer caso (signo +) $x_1 = \sqrt{aa + bb/4}$ es la hipotenusa de un triángulo rectángulo en el que a y b/2 son los catetos; y en el segundo caso (signo –) $x_2 = \sqrt{aa - bb/4}$ es el cateto de un triángulo rectángulo en el que a es la hipotenusa y b/2 es el otro cateto.
c) Dada el área de un rectángulo (b) y la razón de sus lados (r/s), encontrar sus lados.
Sea a el lado mayor y e el menor (ae=b, $\frac{a}{e} = \frac{s}{r}$), entonces $\frac{s}{r} = \frac{a}{ra/s}$, $e = \frac{ra}{s}$,

por tanto: $b = \frac{raa}{s}$, de donde se obtiene la ecuación final: raa=sb. En esta forma se puede obtener fácilmente la construcción geométrica de aa como cuarta proporcional, y después la de a como media proporcional, tras lo cual se construye e con otra cuarta proporcional.

El tránsito desde el Álgebra sincopada hacia la incipiente Álgebra simbólica, permite a Vieta, como vemos en este último problema, pasar de la manipulación de proporciones al establecimiento de ecuaciones, aspecto muy importante que aplicará Fermat, en los avances de su Geometría Analítica, para hacer evolucionar el *symptoma* de Apolonio como expresión de las curvas en forma de proporción hacia la *ecuación característica* de la curva.

EL *ARTE ANALÍTICA* DE VIETA



Portada de una edición de *In Artem Analyticam Isagoge* de Vieta, publicada en 1635.

La obra de Vieta *In Artem Analyticam Isagoge* está inspirada profundamente en la obra de Diofanto y Pappus. En ella Vieta fundamenta los principios y las reglas del cálculo algebraico literal. A Vieta no le gustaba mucho el nombre de origen árabe del Álgebra, así que en vista de la naturaleza analítica del tipo de razonamiento utilizado en el Álgebra y al considerar el carácter instrumental de ésta –es decir, como Arte, en el sentido que tenía esta palabra en la época– Vieta decidió acuñar, con gran significado, la expresión *Arte Analítica* para la aplicación del Álgebra. El objetivo de la obra de Vieta es romper con la particularidad en el estudio de los problemas. Hasta Vieta los procedimientos algebraicos eran explicados a partir de un ejemplo concreto. El *Arte Analítica* proveerá de los instrumentos para resolver con toda generalidad ya no problemas concretos –donde se recurre a felices trucos como hacía Diofanto o los algebristas italianos– sino clases de problemas, donde se emplea una forma de razonamiento a base de ideas generales y se fija la atención en la estructura intrínseca de las cuestiones y de las ecuaciones que se derivan de ellas, para su aplicación a casos análogos. Como explica Vieta:

> «*La debilidad del antiguo Análisis residía en que se aplicaba sólo a los números, es decir, era una Logistica numerosa. Pero el Álgebra permite razonar sobre cualquier tipo de magnitud –número, segmento, ángulo, figura,...– de modo que lo que hay que hacer es considerar una Logistica speciosa, aplicable a cualquier especie de cantidad, que se podrá expresar de una manera genérica mediante letras, tanto si es una magnitud desconocida* **[incógnita]** *como conocida* **[parámetro]**, *ya que no hago diferencia entre ellas. Es más, consideraré las magnitudes desconocidas como si se conocieran y operando según las reglas del Arte Analítica, las desconocidas con las conocidas, obtendré aquellas en función de éstas. He aquí el fundamento de la obtención de soluciones generales de los problemas donde los antiguos sólo obtenían soluciones particulares.* »

Vieta utiliza el ornamento retórico de la época para explicar, con unas significativas palabras, en la dedicatoria a Catherine de Parthenay de la primera edición (Tours, 1591) de la obra, la reducción intelectual operada en el *Arte Analítica*:

> «**[...]** *Todos los matemáticos sabían que bajo su Álgebra o Almulcabale que ellos alababan y que nombraban como el Gran Arte, se escondían masas de oro incomparables, pero no las encontraban. También consagraban hecatombes, haciendo sacrificios a Apolo y a las Musas cuando llegaban a la solución de alguno de estos problemas que yo resuelvo espontáneamente por docenas, por ventenas; lo que prueba que nuestro arte es el método de invención más seguro en matemáticas*»

Por la naturaleza del *Arte Analítica*, el Análisis algebraico-geométrico de Vieta es un estadio intermedio esencial en el camino que arranca del Álgebra Geométrica de los griegos y confluye en las Geometrías Analíticas de Fermat y Descartes.

LAS NOTACIONES DE VIETA

130 DE EMENDATIONE

De reductione cuborum simpliciter adfectorum sub quadrato, ad cubos simpliciter adfectos sub latere.

Formulæ tres.

I.

Si A cubus + B 3 in A quad., æquetur Z solido. A + B esto E. E cubus — B quad. 3 in E, æquabitur Z solido — B cubo 2.

1 C + 6 Q, æquatur 1600. est 1 N 10. 1 C — 12 N, æquatur 1584. est 1 N 12.

Ad Arithmetica non incongrue σημεῖον aliquod superimponitur notis alteratæ radicis, ad differentiam notarum ejus, de qua primum quærebatur.

II.

Si A cubus — B 3 in A quad., æquetur Z solido. A — B esto E. E cubus — B quad. 3 in E, æquabitur Z solido + B cubo 2.

1 C — 6 Q, æquetur 400. est 1 N 10. 1 C — 12 N, æquatur 416. est 1 N 8.

III.

Si B 3 in A quad. — A cubo, æquetur Z solido. A — B esto E. B quad. 3 in E. — E cubo, æquabitur Z solido — B cubo 2. Vel B — A esto E. B quad. 3 in E. — E cubo, æquabitur B cubo 2 — Z solido.

21 Q — 1 C, æquetur 972. & est 1 N 9, vel 18. 147 N — 1 C, æquatur 286. & est 1 N 2, vel 11.

9 Q — 1 C, æquetur 28. & est 1 N 2. 27 N — 1 C, æquatur 26. & est 1 N 1.

Fragmento del opúsculo de Vieta *aequationum recognitione et emendatione tractatus duo*, publicado por A.Anderson (París, 1615), donde se reconoce muy claramente la notación utilizada por Vieta.

ISAGOGE. 5

8 Quadrato-cubo-cubus.
9 Cubo-cubo-cubus.

Et eâ deinceps serie & methodo denominanda reliqua.

7 Genera magnitudinum comparatarum, vti de scalaribus enunciantur ordine, sunt.

1 Longitudo latitudóue.
2 Planum.
3 Solidum.
4 Plano-planum.
5 Plano-solidum.
6 Solido-solidum.
7 Plano-plano-solidum.
8 Plano-solido-solidum.
9 Solido-solido-solidum,

& eâ deinceps serie & methodo denominanda reliqua.

8 Ex serie scalarum gradus altior, in quo cõsistit comparata magnitudo exinde à latere, vocatur potestas. Reliquę inferiores scalares sunt gradus parodici ad potestatem.

9 Pura est potestas cùm adfectione vacat. Adfecta, cui homogeneum sub parodico ad potestatem gradu & adscitâ coëfficiente magnitudine immiscetur.

10 Magnitudines adscititię sub quibus & gradu paradico fit potestati quid homogeneũ ad eam adficiendum dicuntur Sub-graduales.

Fragmento de la página 5 de *In Artem Analyticem Isagoge* de Vieta (Tours, 1591), que contiene el final de capítulo tercero sobre la ley de los homogéneos, con la terminología de las magnitudes.

Vinculada a la *Logistica speciosa* de Vieta está su «*ley de la homogeneidad*», según la cual sólo pueden compararse magnitudes de igual dimensión y las manipulaciones se hacen sobre las razones de las magnitudes:

«*La ley fundamental e inmutable de las igualdades o proporciones, llamada ley de los homogéneos es la siguiente: los homogéneos deben compararse con homogéneos*»

Estas magnitudes son: *el lado, el cuadrado, el cubo*, etc., y sus géneros son: *la longitud, el plano, el sólido, el plano-plano, el plano-sólido, el sólido-sólido*, etc.

Así pues, para Vieta una letra representa una longitud, por tanto el producto de dos letras es una superficie, y el de tres un volumen. Cuando una letra designa una constante, precisa su naturaleza de superficie o volumen, haciéndola seguir de las palabras *plano* o *sólido*.

Con su cálculo literal, Vieta abre una nueva vía en la Matemática y en particular aporta uno de los ingredientes ineludibles de la Geometría Analítica, pero al mismo tiempo con la *ley de la homogeneidad* permanece fiel al espíritu del pasado geométrico de los griegos, gobernado por la *Teoría de las Proporciones*, que había liberado a los antiguos del trauma de la inconmensurabilidad. Afortunadamente Descartes se encargará de eliminar esta reminiscencia clásica en el tercer epígrafe del Libro I de *La Geometría*, titulado «*Cómo pueden emplearse letras en geometría*» (G.AT,VI,371).

En la aplicación que hace Vieta del Álgebra a la Geometría no se encuentra el uso de coordenadas, con motivo de que no incluye el estudio de lugares. Como consecuencia, en Vieta no aparece la representación gráfica de ecuaciones en un sistema de coordenadas. De hecho Vieta evitó el estudio geométrico de las ecuaciones indeterminadas. Para Vieta, las vocales, en puridad, no son todavía variables en el sentido de símbolos que representen cualquier cantidad de un conjunto de valores. Y es que la notación de vocales y consonantes es aplicada por Vieta sólo a ecuaciones determinadas en una sola incógnita, de modo que las vocales no pasan de ser meras constantes que actúan como cantidades desconocidas –incógnitas–. Sólo cuando las notaciones convencionales son aplicadas, más tarde, por Fermat y Descartes, a la representación gráfica de ecuaciones indeterminadas, puede decirse que las vocales –que conservará Fermat– o las equivalentes x,y,z, cartesianas, serán auténticas variables. En ese momento, la transición iniciada por Vieta con sus ideas algebraicas plasmadas en su notación literal, desembocará en las Geometrías Analíticas de Fermat y Descartes. Si Vieta, con su formidable aparato algebraico, hubiera aplicado coordenadas se habría adelantado a la Geometría de Descartes en medio siglo. Así que el trabajo de Vieta representa un resurgimiento de la Geometría clásica griega bajo el amparo de la nueva Álgebra simbólica, más que Geometría Analítica propiamente dicha. La obra de Vieta tuvo una contribución decisiva en la generación de las Geometrías Analíticas de Fermat y Descartes, pero ella misma es un claro ejemplo de que la Geometría Analítica es algo más que una mera combinación de Álgebra y Geometría, es decir, necesita como elementos imprescindibles para poder circular del Álgebra a la Geometría y de la Geometría al Álgebra no sólo el Álgebra simbólica sino también el uso de las coordenadas.

Menecmo, Apolonio y Pappus utilizaron el equivalente de un sistema de coordenadas pero carecieron del Álgebra simbólica, mientras que, inversamente, Vieta pudo disponer del instrumento algorítmico del Álgebra simbólica pero no llegó a utilizar coordenadas. El descubrimiento de la Geometría Analítica por parte de Fermat y Descartes tendrá lugar al aunar ambos aspectos en el estudio de las curvas: la introducción de coordenadas y la mecánica operatoria del Álgebra simbólica en la aplicación a los lugares definidos por una ecuación en dos incógnitas. Por eso Fermat y Descartes son tributarios tanto de Apolonio y Pappus como de Vieta.

Hay otro aspecto en Vieta, en relación con el uso que hace del término *Análisis*, de una gran incidencia sobre la Historia de la Geometría Analítica. En un sentido amplio Vieta define el *Análisis* como «*doctrina bene inveniendi in mathematica*». Para Vieta el *Arte Analítica* consta de tres partes: *zetetic* donde se determinan las propiedades de los elementos que pide el problema a partir de las propiedades de los datos, *poristic* que es el proceso de verificación y *exegetic* que es la demostración de la proposición. Tal como había sido usado por Platón y Pappus, la palabra *Análisis* hacía referencia al orden de las ideas en una demostración. El *Análisis* es la descomposición en elementos más simples que se hace en el camino de la investigación, la *Síntesis* es la composición o reordenación que se hace en la exposición. Vieta aplicará la palabra en la Geometría algebraica, a la que mira como una nueva forma de Análisis matemático y usa el término bajo el significado de los griegos, pero remarca que en la fase *zetética* de ataque algebraico del problema se procede indirectamente a base de asumir lo que se quiere probar o construir y se maneja y se opera con las cantidades incógnitas como si fueran conocidas. Descartes reproducirá en el segundo epígrafe del Libro I de *La Geometría* estas ideas en torno a la aplicación del *Análisis*:

> «*Así, si se quiere resolver algún problema, debe de antemano considerarse como ya resuelto,* [...] *Luego, sin considerar ninguna diferencia entre estas líneas conocidas y desconocidas,*[...].» (G.AT,VI,372).

Así pues, para Vieta, el Álgebra se convierte en el instrumento adecuado para emprender el camino analítico en Geometría, a base de la aplicación de las técnicas simbólicas sobre la *Logistica speciosa.*

El Álgebra de Vieta libera de la necesidad de tratar casos particulares y ejemplos concretos obteniendo formulaciones generales. El simbolismo literal propicia el tratar los datos de un problema como parámetros, y de ahí su generalidad, al obtener como resultado de las ecuaciones no un resultado numérico concreto, sino una solución simbólica que atrae la atención sobre la estructura de la solución a tenor de la estructura de la ecuación. Es decir, mientras en las situaciones anteriores se ensayaba cada caso concreto de problema, esclavizándose a su estructura geométrica particular, el Álgebra permite obtener solución generales en función de los parámetros. Como consecuencia del nuevo enfoque de Vieta, la atención se centró en las propias operaciones que conducían a la solución de los problemas, es decir, en los procedimientos de resolución más que en la propia solución. La distinción clara entre parámetros y variables propicia un cambio de actitud ante los problemas, desde la resolución directa del problema a la investigación teórica de la estructura de la solución, lo que introduce en la Matemática un mecanismo dotado de unas posibilidades de generalización que no poseían los métodos clásicos, de modo que se polariza la atención hacia las cuestiones de los métodos de resolución, de clasificación de los problemas –a tenor de la naturaleza de la ecuación subyacente o de las operaciones involucradas en su resolución– y de la relación entre ellos. Todo ello facilitará la reorientación metodológica del siglo XVII, que intentará el tránsito del estudio de problemas particulares a la investigación de potentes métodos generales, elemento esencial del enfoque algorítmico que caracteriza la Geometría Analítica y el Cálculo Infinitesimal que aparecerán inmediatamente.

LAS *OPERA MATHEMATICA* DE VIETA


FRANCISCI VIETÆ
OPERA
MATHEMATICA,
In unum Volumen congeſta,
ac recognita,
Operâ atque ſtudio
FRANCISCI à SCHOOTEN Leydenſis,
Matheſeos Profeſſoris

LVGDVNI BATAVORVM,
Ex Officinâ Bonaventuræ & Abrahami Elzeviriorum.
cIↄ Iↄ c XLVI.

Portada de la primera edición de *Opera mathematica* de Vieta. Fue editada por Van Schooten, en Leyden, en 1646, justo tres años antes de que el propio Van Schooten, y también en Leyden, publicara *La Geometría* de Descartes.

Se cree que la edición de Van Schooten contiene la mayor parte de lo escrito por Vieta, con notaciones nuevas introducidas por el editor.

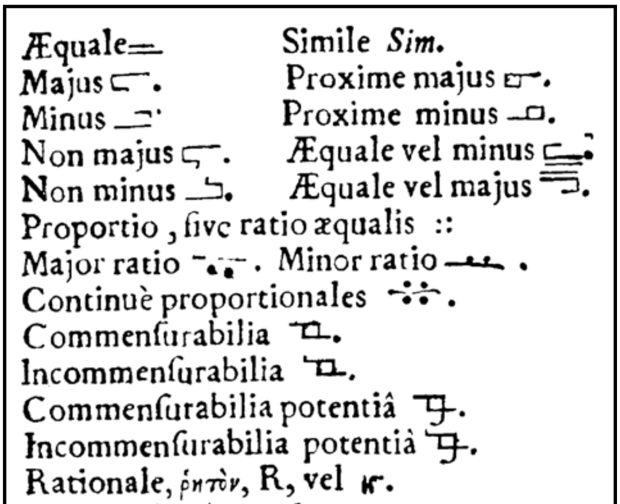
Las cantidades simbólicas de la *Logistica speciosa* del *Arte Analítica* de Vieta, pueden ser interpretadas como segmentos de recta, superficies, volúmenes o ángulos y las operaciones algebraicas simbólicas como procedimientos de construcción geométrica, de modo que la solución simbólica de las ecuaciones generales sugería que el *Arte Analítica* podía ser aplicado no sólo a los problemas numéricos, sino sobre todo a problemas que implicaran segmentos, ángulos, o cualquier otra magnitud, es decir, a problemas geométricos. De esta forma, el *Arte Analítica* de Vieta que halló su inspiración en el *Tesoro del Análisis* de Pappus, revierte sobre éste, que es trasladado y traducido su contenido al lenguaje simbólico del Arte –Álgebra–. Es decir, mediante el concurso del Álgebra simbólica, Vieta dirige el Análisis antiguo hacia un Análisis Algebraico o «*Doctrina de las Ecuaciones*» que al actuar sobre el Análisis Geométrico clásico, preparará el camino hacia las Geometrías Analíticas de Fermat y Descartes y en particular determinará buena parte de la producción matemática de ambos.

Aunque la contribución de Vieta en la construcción de elementos relevantes de la Geometría Analítica es la más importante desde los tiempos clásicos, no es la única. Benedetti en su obra *Diversarum speculationum* de 1585 y Cataldi en su obra *Algebra discorsiva numerale et bineare* de 1618 realizaron una pequeña aportación en la traslación de la tradición euclídea de ecuaciones retórico-geométricas a ecuaciones simbólico-algebraicas. Más importante es el trabajo de Ghetaldi, discípulo de Vieta, en uno de los libros de su obra *Apollonius redivivus* –dedicado a la restauración de obras perdidas del *Gran Geómetra*–, donde reduce algunos problemas geométricos determinados al Álgebra mediante ciertos artificios sistemáticos, da pruebas geométricas de numerosas identidades algebraicas y, como Vieta, construye geométricamente las raíces de ecuaciones algebraicas determinadas. Incluso en su obra póstuma *De resolutione et compositione mathematica*, Ghetaldi da un paso trascendente hacia la Geometría Analítica al considerar algebraicamente varios problemas geométricos indeterminados. La invención de la Geometría Analítica tiene lugar poco después cuando Fermat y Descartes alcanzan a comprender el gran valor que las ecuaciones indeterminadas tienen en el estudio de lugares y curvas, como las cónicas, estableciendo un efectivo puente entre la Geometría y el Álgebra, mediante el que, en un exiguo periodo de tan sólo doce años, y de forma independiente, descubren más curvas que en toda la Historia de la Matemática anterior.

En realidad el camino hacia los métodos de la Geometría Analítica parece haber sido más abonado por los desarrollos del Álgebra que los de la propia Geometría. Entre 1629 y 1631, ya en los umbrales de la Geometría Analítica de Fermat y Descartes, aparecen tres importantes trabajos: la *Invention nouvelle en l'algèbre* de Girard, el *Artis Analyticae Praxis ad Aequationes Algebraicas Resolvendas* de Harriot y el *Clavis mathematicae* de Oughtred. Son textos en los que se acentúa una abreviación en el simbolismo del Álgebra ya muy próximo a la claridad y simplicidad de *La Geometría* de Descartes, y que por comparación permiten advertir que a pesar del gran avance de Vieta con sus vocales y consonantes, había todavía una precariedad en su notación de operaciones y relaciones.

Girard avanza hacia la notación de índices para las potencias, ensayada ya por Chuquet, Bombelli, Stifel y Stevin; además hace desaparecer la forma geométrica de Vieta que mantenía la homogeneidad y maneja libremente cantidades negativas en las ecuaciones y segmentos con signo, en lo cual realmente Girard avanza incluso más allá que Fermat y Descartes, que en sus Geometrías Analíticas mantuvieron cierta ambigüedad y confusión al respecto.

Harriot hizo importantes avances en ecuaciones cúbicas y en cuanto a notación sustituye las mayúsculas de Vieta por minúsculas, adopta el signo de la igualdad (=) de Recorde y reemplaza la expresión de Vieta de las potencias *A cub* por *AAA* y *Aquad* por *AA*, de modo que su cálculo literal ya se aproxima mucho a la notación cartesiana de *La Geometría*.


Æquale =
Majus
Minus
Non majus
Non minus
Proportio, sive ratio æqualis ::
Major ratio
Continuè proportionales
Commensurabilia
Incommensurabilia
Commensurabilia potentiâ
Incommensurabilia potentiâ
Rationale, ῥητὸν, R, vel
Irrationale, ἄλογον,
Medium sive mediale
Linea secta secundum extremam & mediam rationem
Major ejus portio σ
Minor ejus portio τ.
Z est A + E.
X est A-E.
Simile *Sim.*
Proxime majus
Proxime minus
Æquale vel minus
Æquale vel majus
Minor ratio
ʒ est a + e.
est a-e

Fragmento de *Clavis mathematicae* de Oughtred (1631).

En esta obra que tuvo hasta cinco ediciones en latín y dos en inglés, a lo largo del siglo XVII, Oughtred le da una gran importancia a la notación y al simbolismo a tener en cuenta en la aplicación del Álgebra, de modo que hace aparecer una gran cantidad de nuevos signos y abreviaturas.

Oughtred resalta la trascendencia del *Arte Analítico* contrastando la aritmética de los números con *la* mucho más conveniente *logistica speciosa*, en el sentido de Vieta. A la primera con la verbosidad expresiva de la tradicional forma sintética enfrenta la segunda como instrumento analítico inventivo que aplica el simbolismo del Álgebra sobre todas las *especies*.

La obra de Oughtred incluye cálculo aritmético y simbólico-algebraico, así como aplicaciones del Álgebra a la Geometría, donde aplicará el *Análisis* mediante el cual «*tomando lo buscado como conocido, encontramos lo que buscamos*», tal como hará Descartes en *La Geometría*.

La “*Introducción a los Lugares Planos y Sólidos*” (*Ad Locos Planos et Solidos Isagoge*) de Fermat

Fermat poseía una prodigiosa erudición matemática, obtenida mediante un meticuloso estudio de las obras de Diofanto, Apolonio, Arquímedes y Pappus, lo que propició su irrefrenable afición a la Matemática, así como su encomiable labor de comentador y exégeta de los más brillantes matemáticos griegos y en el caso de Apolonio incluso de su reconstructor. De Diofanto nace su ingente contribución al nacimiento y desarrollo de la Teoría de Números, de Apolonio y Pappus junto con Vieta su creación de una Geometría Analítica y de ambas, al conectar con los trabajos de Arquímedes, resultaría el alumbramiento de los numerosos métodos y artificios infinitesimales que hacen de Fermat el matemático que más contribuyó sin duda alguna al desarrollo de las Matemáticas durante el siglo XVII.

Descartes publica en 1637 *La Geometría* junto con *La Dióptrica y Los Meteoros* como apéndices de su *Discurso del Método* o éste como prólogo de aquellos opúsculos. El mismo año Fermat envía a sus colegas de París sus investigaciones de alrededor de 1629, que surgen a propósito de su reconstrucción de *Los Lugares Planos* de Apolonio (*Apolonii Pergaei libri duo de locis planis restituti*), realizada con base en las referencias que da Pappus de la obra perdida de Apolonio en *La Colección Matemática*. Estos estudios de Fermat están contenidos en la memoria *Introducción a los Lugares Planos y Sólidos* (*Ad Locos Planos et Solidos Isagoge*), que no se publica hasta que su hijo Samuel de Fermat edita en 1679 las *Varia Opera Mathematica*. Las obras citadas de Descartes y Fermat contienen los fundamentos de la llamada más tarde Geometría Analítica.

Fermat había quedado fascinado por los intentos de reconstrucción de ciertas obras perdidas de Apolonio, por parte de Vieta y Ghetaldi. Emulando a estos matemáticos Fermat reconstruye los dos libros de *Los Lugares Planos* de Apolonio, lo que le lleva a estudiar el célebre *Problema de Apolonio* de los círculos tangentes a tres círculos y su generalización al espacio –las esferas tangentes a cuatro esferas–. Fermat realiza Estos trabajos en el estilo clásico griego sin referencia al *Arte Analítica* de Vieta.

Cuando aplica el Análisis de Vieta a los problemas de lugares geométricos, Fermat construye los fundamentos de su Geometría Analítica. En efecto, a través de sus contactos en Burdeos con la Escuela de los Analistas, discípulos de Vieta, Fermat se proveyó de su simbolismo algebraico –al que permaneció fiel durante toda su producción, utilizando las letras vocales para designar las incógnitas y las consonantes para los parámetros– y sobre todo del Análisis Geométrico de los antiguos, convertido en Análisis Algebraico por acción del Álgebra Simbólica del *Arte Analítica* de Vieta. Estos elementos de Análisis Geométrico y Doctrina de las Ecuaciones, fueron transformándose gradualmente en la mente de Fermat en la base de su Geometría Analítica, es decir, en una potente heurística geométrica y en un poderoso instrumento de investigación, mediante los que Fermat pudo resolver de forma sorprendente y brillante, antiguos y nuevos problemas, en particular numerosas cuestiones de lugares geométricos, extremos y tangentes.

Así pues, en todos sus brillantes trabajos, Fermat parte de su profundo conocimiento de la matemática griega, pero es muy consciente de que el punto débil de los métodos geométricos de los griegos tan patente, por ejemplo, en el método de exhaución en relación a las cuadraturas, es que se trataban de métodos de demostración no de descubrimiento, no eran métodos generales ni heurísticos, precisaban conocer previamente la solución del problema, aplicándose entonces a obtener una demostración rigurosa. Era por tanto, necesario obtener otros métodos que además de ser más generales, garantizaran no sólo la rigurosa corrección de las soluciones sino el descubrimiento de las propias soluciones.

Aunque Fermat da muy pocas indicaciones sobre el proceso de transición del *Arte Analítica* de Vieta a los principios de su Geometría Analítica, podemos conjeturar que la motivación esencial fue el deseo de encontrar nuevos métodos más simples, más operativos, más resolutivos, más heurísticos y sobre todo más generales. Así parece pronunciarse justo desde el comienzo de su corta memoria *Ad Locos Planos et Solidos Isagoge* (TH.OF.III.85):

«*Que los antiguos habían tratado extensamente sobre los lugares no se puede dudar; lo sabemos por Pappus, que al comienzo del Libro VII, testimonia que Apolonio había escrito sobre los lugares planos y Aristeo sobre los lugares sólidos, pero si no nos engañamos, la investigación sobre los lugares no les resultaba nada fácil; lo que conjeturamos en base al hecho de que para un gran número de lugares fracasaron en establecer el problema de manera general.*

Sometemos, por consiguiente, esa teoría a un análisis que le es propio y particular, y que abre el camino general para la investigación de los lugares.»

Sin más preámbulos, Fermat establece, en un lenguaje claro y preciso, un *Principio fundamental de la Geometría Analítica*: –«*la naturaleza y la construcción de las curvas planas están determinadas por la ecuación canónica asociada*»–**,** con estas lacónicas palabras (TH.OF.III.85):

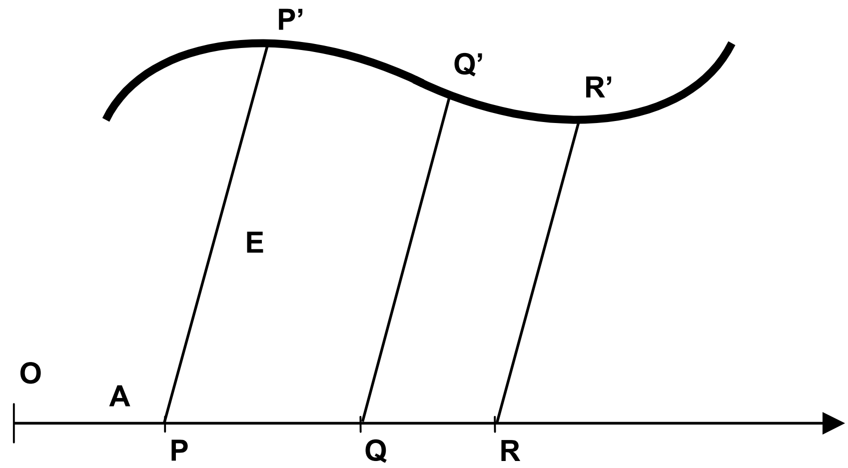
«*Siempre que en una ecuación final se encuentran dos cantidades incógnitas, se tiene un lugar geométrico, describiendo el extremo de una de ellas una línea recta o curva. La línea recta es simple y única en su género; las especies de curvas son en número infinito, círculo, parábola, elipse, etc.*»

En estas breves palabras se sintetiza uno de los principios más importantes de la Historia de la Matemática, que introduce no sólo la Geometría Analítica sino la idea fundamental de variable algebraica, básica para el desarrollo del Cálculo Infinitesimal.

Fermat da un significado a una ecuación algebraica en dos incógnitas. De éstas, que en todo momento son concebidas como segmentos, la primera se mide, a partir de un punto inicial, a lo largo de un eje dado, mientras los segmentos correspondientes que representan la otra incógnita, siendo determinados por la ecuación dada, se levantan como ordenadas formando un determinado ángulo con el eje. En ciertos pasajes de la Geometría griega –por ejemplo en *Las Cónicas* de Apolonio, como se vio anteriormente– ciertas líneas –diámetros y tangentes– que jugaban un papel de *coordenadas*, se asociaban a una curva dada, de manera que a través del Álgebra retórica eran expresadas en función de esas líneas, mediante las propiedades geométricas de la curva, la ley de definición de la curva por medio de proporciones –el *symptoma* de la curva–. Pero la curva como ente geométrico se consideraba *a priori* y sobre ella y a partir de su particular estructura geométrica intrínseca se superponían, *a posteriori*, las líneas coordenadas, de cuya descripción verbal de la relación entre ellas, resultaba *la ecuación retórica* de la curva. La genial idea clave de Fermat estriba en poder invertir esta situación –a partir de una ecuación algebraica en dos incógnitas, Fermat ilustra como esta ecuación define, con respecto a un sistema de coordenadas dado, un lugar geométrico de puntos, es decir una curva–.

No debemos atribuir a Fermat el primer uso de las coordenadas. Fermat no inventó las coordenadas ni fue el primero que utilizó la representación gráfica (recordemos los desarrollos de Oresme). Además, tanto el razonamiento analítico como la aplicación del Álgebra a la Geometría eran un lugar común en los tiempos de Fermat, sobre todo después de los trabajos de Vieta. Lo que si es completamente nuevo a partir de Fermat y Descartes es la constatación del hecho de que una ecuación algebraica en dos incógnitas representa, por sí misma, una curva geométrica determinada unívocamente.

Hemos de considerar, no obstante, que ni Fermat ni Descartes utilizan el término «*sistema de coordenadas*» o la idea de los dos ejes: el de abscisas y el de ordenadas. Fermat, en concreto, escoge a conveniencia una línea recta que juega el papel del eje x, en realidad una semirrecta cuyo origen es un punto fijo que hace las veces de lo que después se llamaría *origen de coordenadas*. Dada una ecuación en las incógnitas A y E, los valores de A son medidos a lo largo de la línea desde el punto fijo. Los valores correspondientes de E se levantan como segmentos de línea, que más tarde se llamarán *ordenadas*, formando un ángulo fijo con el eje. En el esquema de Fermat, el eje y de ordenadas no existe explícitamente, pero aunque en algún caso aparezca una línea equivalente a lo que sería el eje y, la abscisa, es decir, la cantidad A, no es interpretada como una línea trazada desde el punto en que se considere hasta tal supuesto eje de ordenadas.



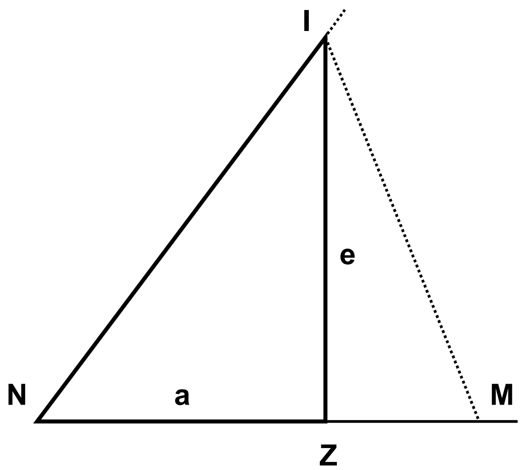
Así pues, la Geometría desarrollada bajo estos presupuestos será una «*Geometría de ordenadas*» más que una «*Geometría de coordenadas*». Además, al considerar las *coordenadas* como segmentos, Fermat restringe las operaciones a lo que ahora se llama el primer cuadrante.

A continuación Fermat realiza la clásica división de los lugares en tres tipos: planos, sólidos y lineales, a lo que sigue el importante resultado de que si las potencias de los términos en una ecuación dada no supera el cuadrado, entonces el lugar es plano o sólido (TH.OF.III.86):

> «*Es cómodo, para establecer las ecuaciones, tomar las dos cantidades desconocidas bajo un ángulo dado, que de ordinario supondremos recto, y dar la posición y un extremo de una de ellas; siempre que ninguna de las dos cantidades desconocidas sobrepase el cuadrado, el lugar será plano o sólido*, [...]»

He aquí el tema central del trabajo de Fermat: tomando coordenadas, justificar el resultado, a base de la consideración de casos de ecuaciones de grados progresivos.

Fermat empieza con la ecuación de primer grado que según la terminología de Vieta expresa en la forma «*D in A aequetur B in E*» (dx=by en lenguaje cartesiano):



«*Sea NZM una recta dada de posición, en la que se da el punto N. Igualemos NZ a la cantidad desconocida a, y la recta ZI* (*trazada bajo el ángulo dado NZI*) *a la otra cantidad desconocida e. Sea da=be. El punto I estará sobre una recta dada de posición.*

En efecto, se tendrá $\frac{b}{d}=\frac{a}{e}$. *Por tanto la razón* $\frac{a}{e}$ *es dada, así como el ángulo en Z. Por consiguiente el triángulo NIZ es dado de especie, así como el ángulo INZ. Pero el punto N es dado, así como la posición de la recta NZ. Por tanto NI está determinado. La síntesis es fácil*» (TH.OF.III.86–87).

Así pues, el lugar geométrico en este caso resulta ser una recta, en realidad una semirrecta.

FERMAT EN LA HISTORIA DE LA CULTURA MATEMÁTICA

Retrato de Fermat como consejero del parlamento de Toulouse (atribuido a Antoine Durand). Académie des Sciences et Belles Lettres de Toulouse.

Fermat ha sido uno de los grandes genios de la cultura francesa, una de las figuras más apasionantes de la Historia de la Ciencia y uno de los matemáticos más extraordinarios de todos los tiempos.

La obra matemática de Fermat está en el origen de casi todos los descubrimientos matemáticos del siglo XVII, época capital para el desarrollo de la Matemática, ya que en ella aparecen disciplinas matemáticas con sello propio como el Cálculo Infinitesimal, la Geometría Analítica, el Cálculo de Probabilidades, la Teoría de Números, etc. Pues bien, puede decirse que precediendo en la raíz a Descartes, Pascal, Barrow, Leibniz, Newton, etc., Fermat ha dado el golpe inicial indispensable para que todas estas teorías se empezaran a desarrollar.

Fermat es el inspirador de los fundamentos técnicos del Cálculo Infinitesimal en sus dos vertientes, Diferencial e Integral, es pionero junto con B.Pascal en la invención de la Teoría de la Probabilidad, es el creador de la Teoría de Números y codescubridor junto con Descartes de la Geometría Analítica, a base de aplicar el Álgebra simbólica de Vieta sobre el Análisis Geométrico de los antiguos.

Estatua de Fermat con su Musa (la Matemática). Sala de personajes ilustres del Capitolio de Toulouse.

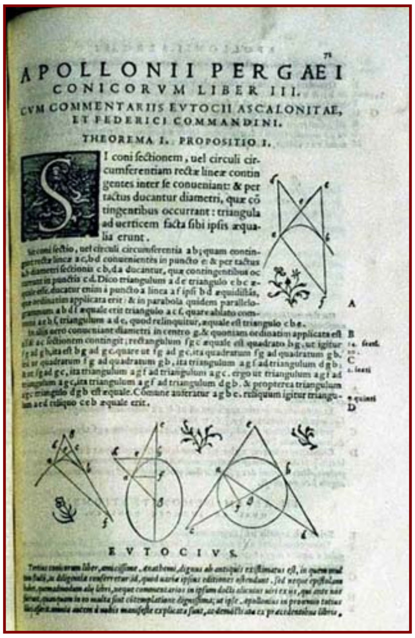
El autor es T.E. Victor Barrau (1888).

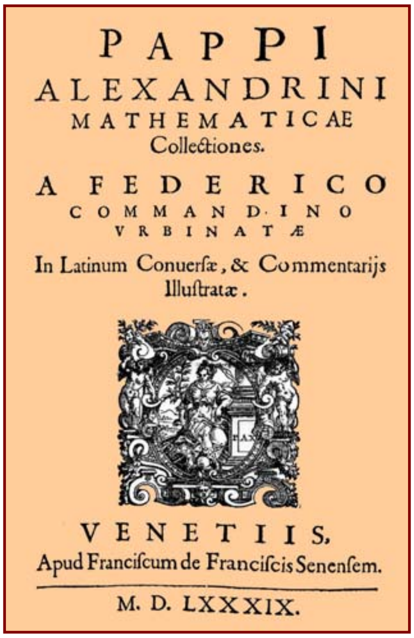
Fermat representa uno de los eslabones intermedios más importantes en la transición de la Matemática antigua a la moderna.

Desde su profunda admiración hacia las fuentes de la Matemática griega, Fermat contribuye incluso a su restauración con *Apolonii Pergaei libri duo de locis planis restituti*, pero rompe con la práctica matemática habitual de los estándares clásicos, sin dejarse mediatizar por ningún canon estereotipado de Filosofía de la Matemática, al desarrollar un potente instrumental científico, donde lo importante era la resolución de los problemas y la apertura de nuevas vías de descubrimiento, que propicia el cambio de paradigma en la Matemática a base de variar el estilo y el método clásico, desde la superioridad del rigor silogístico a ultranza en la exposición a la importancia del camino seguido en el descubrimiento y desde los métodos demostrativos a los métodos heurísticos de resolución de los problemas, tan característicos de la Geometría Analítica

LA RESTAURACIÓN DE LA MATEMÁTICA GRIEGA Y SU INFLUENCIA SOBRE LAS INVESTIGACIONES DE FERMAT


DE GLI
ELEMENTI
D'EVCLIDE
LIBRI QVINDICI
CON GLI SCHOLII ANTICHI.
TRADOTTI PRIMA
IN LINGVA LATINA DA M.
FEDERICO COMMANDINO DA VRBINO,
& con Commentarij illustrati,
ET HORA D'ORDINE DELL'ISTESSO
TRASPORTATI NELLA NOSTRA VULGA-
re, & da lui riveduti.
CON PRIVILEGIO.
IN VRBINO, APPRESSO
DOMENICO FRISOLINO.
M. D. LXXV.


APOLLONII PERGAEI
CONICORVM LIBER III.
CVM COMMENTARIIS EVTOCII ASCALONITAE,
ET FEDERICI COMMANDINI.
THEOREMA I. PROPOSITIO I.
EVTOCIVS.


PAPPI
ALEXANDRINI
MATHEMATICAE
Collectiones.
A FEDERICO
COMMANDINO
VRBINATÆ
In Latinum Conuersæ, & Commentarijs
Illustratæ.
VENETIIS,
Apud Franciscum de Franciscis Senensem.
M. D. LXXXIX.

Ediciones de traducciones al latín de F. Commandino de las grandes obras de la Matemática griega:

1. ***Los Elementos* de Euclides. Urbino, 1575.**
2. ***Las Cónicas* de Apolonio. Bolonia, 1576. Todos los bibliófilos ensalzan la edición de Commandino; tanto Halley como Ver Eecke consideraron íntegramente esta versión para sus ediciones.**
3. ***La Colección Matemática* de Pappus. Es la primera impresión de la obra de Pappus, realizada en Venecia, en 1589.**

Estas ediciones están profusamente ilustradas tanto desde el punto de vista gráfico como tipográfico y se acompañan de magníficos comentarios de Commandino. Es muy posible que Fermat tuviera a su disposición ejemplares de estas ediciones de las grandes obras de la Matemática griega.

Diversas escuelas matemáticas renacentistas, en particular la *Escuela de los Analistas* de Vieta –en cuyas fuentes bebería Fermat– que participan de la tendencia humanista general en la Cultura hacia la contemplación, ponderación y recuperación del legado clásico, recogen y desarrollan la tradición instaurada por Maurólico y Commandino de traducir del griego al latín e incluso a las lenguas vernáculas las principales obras de la Matemática griega. La formación humanista, un soberbio dominio de las lenguas clásicas y un brillante talento matemático –conocimientos y facultades que posteriormente exhibiría Fermat–, permitió dilucidar infinidad de pasajes del griego original que multitud de simples copistas y amanuenses habían dejado oscuros o habían quedado borrosos por el paso del tiempo. Pero la labor de recuperación del mundo matemático clásico no se reducía a la simple traducción o aclaración de fragmentos dudosos y a su puesta en circulación para el público interesado, sino que iba más allá, al intentar la restauración del material perdido y la extensión de los métodos y resultados.

Fiel a esta tradición, Fermat debuta como matemático con la recuperación de una de las obras de Apolonio, *Los Lugares Planos*, germen de su Geometría Analítica.

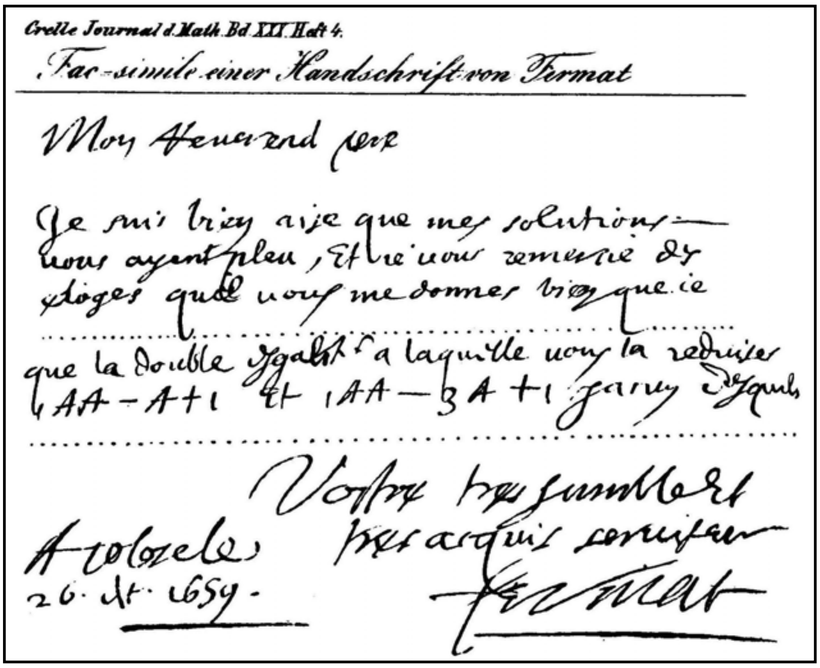
Los Analistas y gran parte de los matemáticos posteriores, por la influencia de Vieta y Fermat, basan su programa de investigación en la restauración de la antigua tradición matemática griega basada en el *Método de Análisis,* de ahí el nombre de la escuela. La profunda admiración de los matemáticos de los siglos XVI y XVII hacia la Matemática clásica griega, no les hizo caer, como ocurrió con ciertos matemáticos humanistas anteriores, en la tendencia a respetar a ultranza la filosofía de la Matemática de Platón y Aristóteles. Al contrario, muchos matemáticos, en particular Descartes –en la regla IV de las *Reglas para la dirección del espíritu*–, lamentaron y criticaron que la rigidez del impecable estilo sintético, axiomático y apodíctico euclídeo impuesto por los epígonos de Platón, ocultara las vías heurísticas de los métodos de descubrimiento del Análisis Geométrico griego que afortunada y excepcionalmente Pappus relacionaba y desarrollaba en su *Colección Matemática*. Así que, tras la traducción respetuosa y fiel al original, generalmente en un refinado latín clásico, la actividad investigadora se dirige al comentario útil, a la exégesis y finalmente a la emulación, pero dando mayor importancia a la resolución de los problemas que al estilo de la presentación, partiendo de los modelos griegos como principio, pero conscientes de que el respeto absoluto al paradigma estilístico griego cercena considerablemente las posibilidades de expresión y generalización.

En este sentido, la importancia de la naciente Álgebra simbólica será decisiva. Por ejemplo, los Analistas comparten con los algebristas italianos la práctica del Álgebra como una poderosa técnica algorítmica para resolver problemas. Pero van mucho más allá porque, impelidos por la idea de crear un arte simbólico de razonamiento como instrumento fundamental de investigación matemática, llegan a recorrer gran parte del camino que media entre la incipiente *Álgebra sincopada* de Diofanto de Alejandría y el *Álgebra simbólica* de Descartes. Es en este ámbito en el que tiene lugar la emergencia de la Geometría Analítica de Fermat de *La Introducción a los Lugares Planos y Sólidos*.

FERMAT, EL PRÍNCIPE DE LOS AFICIONADOS A LAS MATEMÁTICAS

Curiosa ilustración caricaturesca alusiva a la costumbre que tenía Fermat de reseñar sus descubrimientos en los márgenes de las obras de su pertenencia, que aparece en el artículo 15, sobre Teoría de Números, firmado por Paul S. Herwitz, de la obra coordinada por Morris Kline *Matemáticas en el mundo moderno* (Editorial Blume, Madrid, 1974).

A Fermat siempre le acompaña el calificativo de «*aficionado*» porque su profesión de jurista no estaba laboralmente muy próxima a la actividad de creación científica. Por la especial dedicación de Fermat a la investigación matemática y por la importancia capital de sus resultados justo es llamarle «*El Príncipe de los aficionados*» como hace E.T.Bell en *Les grands mathématiciens* (Payot, París, 1950).



Crelle Journal d. Math. Bd XII Heft 4.

Fac-simile einer Handschrift von Fermat

Mon Reverend pere

Je suis bien aise que mes solutions vous ayent pleu, Et ie vous remercie des eloges que vous me donnes bien que ie

....

que la double egalité a laquelle vous la reduises 4AA − A + 1 et 1AA − 3A + 1 quarrez egaulx

....

Vostre tres humble et tres acquis serviteur

Fermat

A Tolose le 26· dt· 1659·

Facsímil de un carta autógrafa de Fermat al Padre Mersenne, publicada en el Diario de las Matemáticas de Crelle, con la intención de identificar la letra del eximio y célebre matemático, albergando la esperanza de facilitar el hallazgo a los eruditos de manuscritos perdidos de Fermat o notas en márgenes de libros.

Es casi legendario el hecho de que Fermat no tenía cuadernillos de notas ni conservaba los apuntes manuscritos con sus brillantes consideraciones y sus excelentes descubrimientos matemáticos. Escribía sus observaciones en los márgenes de los libros de su magnífica biblioteca de obras clásicas de la Matemática griega.

Fermat continúa estudiando el caso más general, el de la recta que no pasa por el origen aunque los coeficientes los tomará siempre positivos: $da+be=c^2$ (Fermat mantiene todavía la homogeneidad de las magnitudes), mostrando de forma similar que corresponde a la línea MI, donde $MZ = \frac{c^2}{d} - a$. Así pues, la ecuación más general $da+be=c^2$, representa un segmento rectilíneo en el primer cuadrante con extremos en los *ejes de coordenadas*.

Fermat establece que todas las ecuaciones corresponden a líneas rectas:

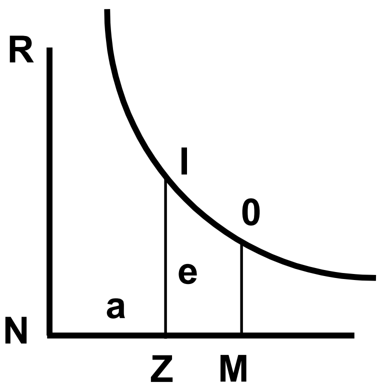
> «[...] *La misma conclusión se obtiene sin dificultad para toda ecuación que tenga los términos en a o e solamente.*
>
> *Esta es la primera y más simple ecuación de lugar, que servirá para encontrar todos los lugares sobre una línea recta.*»

Para mostrar la potencia de su método en el manejo de los lugares geométricos, Fermat enuncia una «*muy bella proposición, que hemos descubierto por este medio*»:

> «*Sean, en número cualquiera, rectas dadas de posición, a las cuales se traza desde un mismo punto rectas bajo ángulos dados; si la suma de cualesquiera múltiplos de las rectas así trazadas es igual a un valor dado, el punto desde el que se las traza estará sobre una recta dada de posición.*»

Fermat no exhibe ninguna prueba; debía de pensar que la proposición es un simple corolario de que los segmentos son funciones lineales de las coordenadas del punto y del resultado obtenido de que toda ecuación de primer grado representa una recta.

A continuación Fermat la emprende con las ecuaciones de segundo grado mostrando en primer lugar que «*A in E aeq. Z pl.*» (es decir, $xy=c^2$) es una hipérbola (TH.OF.III.87–88):.



> «*Trácese NR paralela a ZI; tómese sobre NZ un punto cualquiera, sea M, por el cual se traza MO paralela a ZI. Constrúyase el rectángulo NMO igual al área* c^2*. Por el punto O, entre las asíntotas NR, NM, descríbase una hipérbola*: *ella queda determinada y pasará por el punto I, puesto que se supone ae, es decir, el rectángulo NZI, equivalente al rectángulo NMO.*»

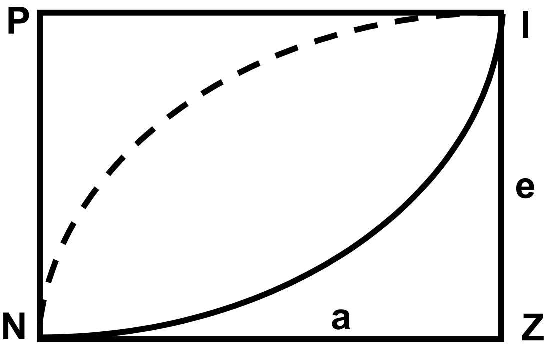
Fermat aplica la propiedad asintótica de la curva hiperbólica que era conocida muy probablemente desde el descubrimiento de la curva. La ecuación de la que parte Fermat corresponde a la exposición verbal de la expresión de la generación de la curva, lo que los griegos llamaban el *symptoma*, término que Fermat prefería llamar con buen criterio «*propiedad específica de la curva*» de la que partía para llegar a la curva, en sentido contrario a como hacían los griegos.

Fermat añade que toda ecuación de la forma $d^2 + xy = rx + sy$ (se han sustituido las incógnitas a y e de Fermat, por las tradicionales x e y cartesianas) se puede reducir fácilmente a la ecuación previa anterior de la hipérbola equilátera, mediante sustituciones que son equivalentes a traslaciones de ejes.

El siguiente caso que trata Fermat involucra expresiones que son cuadrados de las incógnitas x^2, y^2, o x^2, y^2 estando en una razón dada, o x^2+xy, y^2 estando en una razón dada (TH.OF.III.89):

«*En fin, el caso comprende todas las ecuaciones cuyos términos llegan hasta el cuadrado, y son en a^2, e^2 o ae. En todos estos casos el punto I está sobre una línea recta, lo cual es muy fácil de demostrar.*»

Continúa Fermat demostrando que $x^2=dy$, y también $y^2=dx$ (así como la forma general $b^2 \pm x^2 =dy$) son parábolas (TH.OF.III.90-91):



«*Si* $a^2=de$, *el punto I está sobre una parábola.*

Sea NP paralela a ZI; con NP como diámetro, descríbase la parábola cuyo parámetro es la recta dada d y cuyas ordenadas son paralelas a NZ. El punto I estará sobre esta parábola, cuya posición está determinada.

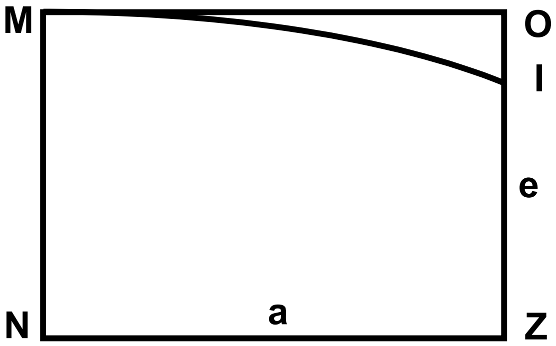
En efecto, según la construcción, el rectángulo $d \times NP=PI^2$, *es decir:* $d \times IZ=NZ^2$, *y por tanto* $de=a^2$ *.*

De forma análoga, Fermat estudia el caso $e^2=da$.

Para el caso $b^2–x^2=dy$, Fermat aplica una traslación:

«*Sea* $b^2–a^2=de$, *o equivalentemente,* $b^2–de=a^2$.

Divídase b^2 *por d; sea* $b^2=dr$. *Se tendrá por consiguiente:*



$dr–de = a^2$ *o* $d(r–e)= a^2$.

Se habrá reconducido esta ecuación a la precedente sustituyendo r–e por e.

Sea en efecto trazada MN paralela a ZI e igual a r, y por el punto M, MO paralela a NZ. El punto M está determinado, así como la posición de la recta MO. Según esta construcción, OI=r–e.

Por consiguiente $d \times OI=NZ^2=MO^2$.

La parábola descrita a partir del vértice M, sobre el diámetro MN, con d como parámetro y las ordenadas paralelas a NZ, satisfará la cuestión, como es claro según la construcción.

De forma similar Fermat resuelve el caso $b^2+x^2=dy$.

Sigue Fermat demostrando que $x^2+y^2=b^2$ es un círculo y mediante elementales transformaciones consigue comprobar que también es un círculo la ecuación cuadrática que carece de término en xy cuando son iguales los coeficientes de x^2 y de y^2, es decir, $x^2+y^2+2dx+2ry=b^2$.

Al llegar a este punto Fermat escribe (TH.OF.III.92):

«*Gracias a este procedimiento hemos construido todas las proposiciones del segundo Libro de Apolonio Sobre los Lugares Planos.*»

Este aserto avalaría las opiniones acerca de que la Geometría Analítica de Fermat devino del estudio de los lugares geométricos más que a través de la solución geométrica de las ecuaciones, tópico éste que ocuparía a algunos de sus predecesores (Vieta en particular) y que caracterizaría la esencia de la Geometría Analítica de Descartes.

Prosigue Fermat demostrando que $b^2-x^2=ky^2$ es una elipse (TH.OF.III.92) y que $b^2+x^2=ky^2$ es una hipérbola de la que da las dos ramas (TH.OF.III.92–93).

Finalmente Fermat considera lo que califica como el caso más difícil de todas las ecuaciones, aquel que involucra términos en x^2, y^2, xy y otros términos. Mediante transformaciones equivalentes a la rotación de ejes convierte por ejemplo $b^2-2x^2=2xy+y^2$ a la forma de la elipse previa y como colofón escribe que toda ecuación en términos de x^2, y^2, xy se reconducirá a los casos precedentes «*por medio de un triángulo conocido de especie*». Aquí Fermat apunta a transformaciones de tipo trigonométrico.

A continuación Fermat pondera el valor de su sucinta exposición (TH.OF.III.95):

> «*Hemos abarcado en una exposición breve y lúcida todo lo que los antiguos han dejado sin explicar sobre los lugares planos y sólidos, de donde se reconocerá inmediatamente qué lugares dan todos los diversos casos de la última proposición del Libro I de Apolonio Sobre los Lugares Planos, y se descubrirá en general todo lo que concierne a esta materia.*»

Y como «*coronación de este Tratado*» Fermat añade «*una muy bella proposición*» cuya evidencia es manifiesta ya que de acuerdo con las «*reglas del arte*» sólo aparecen en cada instancia ecuaciones de segundo grado, que ya han sido sometidas por Fermat a un exhaustivo análisis:

> «*Sean, en número cualquiera, rectas dadas de posición, a las cuales se traza desde un mismo punto rectas bajo ángulos dados; si la suma de los cuadrados de las rectas así trazadas es igual a un valor dado, el punto desde el que se las traza estará sobre un lugar sólido.*»

Este problema ilustra la potencia de la Geometría Analítica de Fermat como un instrumento sistemático de ataque de los problemas de lugares geométricos. Por eso Fermat declara (TH.OF.III.96):

> «S*i este descubrimiento hubiera precedido a nuestra restitución de los dos Libros de Los Lugares Planos, las construcciones de los teoremas de los lugares hubieran sido mucho más elegantes. Sin embargo, no echamos de menos esta producción, aunque precoz e insuficientemente madura. Hay, en efecto, para la Ciencia un cierto interés en no sustraer a la posteridad los trabajos todavía informes del espíritu: la obra incipiente comienza siendo simple y se fortifica y agranda por las nuevas invenciones. Es, asimismo, importante para el estudio poder contemplar plenamente los progresos escondidos del espíritu y el desarrollo espontáneo del arte.*»

Con estas juiciosas palabras de Fermat en torno a la gestación y desarrollo de la Ciencia termina la importante memoria de Fermat *Introducción a los Lugares Planos y Sólidos*, de la que podríamos decir, ante todo, que es una magnífica introducción a la Geometría Analítica de las secciones cónicas, como gráficos de ecuaciones de segundo grado.

A esta memoria de Fermat le sigue un apéndice de inestimable valor histórico y matemático titulado: *La Solución de problemas sólidos por medio de Lugares* (TH.OF.III.96–101), que representa, por diversos aspectos, una continuación natural de los trabajos de Apolonio, Arquímedes y Vieta y una aproximación al trabajo de Descartes en *La Geometría*, en relación con la resolución geométrica de las ecuaciones cúbicas y bicuadráticas. A base de interpretar las cuestiones de eliminación algebraica en las ecuaciones en términos de intersección de lugares y de utilizar los nuevos principios de la Geometría Analítica acerca de que toda ecuación de segundo grado equivale a un lugar plano, Fermat reemplaza las ingeniosas construcciones geométricas por sistemáticas operaciones algebraicas.

Por ejemplo para las ecuaciones cúbicas, Fermat pone el ejemplo de $x^3+bx^2=bc^2$; iguala cada término de la ecuación al sólido bxy:

$$x^3+bx^2 = bxy \ , \ bc^2 = bxy \ ,$$

divide la primera ecuación por x y la segunda por b, obteniendo:

$$x^2+bx = by \ , \ c^2 = xy \ ,$$

de modo que resuelve la ecuación mediante la intersección de una parábola y una hipérbola, escribiendo: «[...] *es fácil remontarse del análisis a la síntesis*».

A continuación Fermat aplica el método para las ecuaciones cuárticas y pone el ejemplo: $x^4+b^3x+c^2x^2 = d^4$, que lo considera en la forma $x^4 = d^4-b^3x-c^2x^2$; iguala los dos miembros a c^2y^2:

$$x^4 = c^2y^2 \ , \ d^4-b^3x-c^2x^2 = c^2y^2 \ ,$$

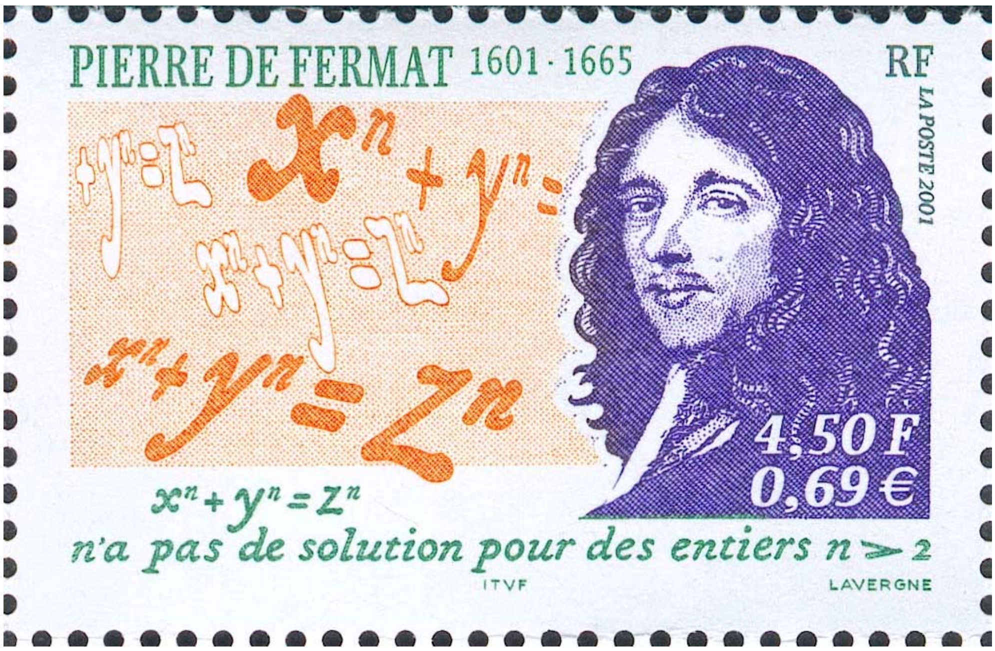
simplifica el primero haciendo la raíz cuadrada y divide el segundo por c^2, obteniendo: $x^2=cy$, $x^2+y^2+\frac{b^3}{c^2}x=\frac{d^2}{c^2}$. Así pues, resuelve el problema mediante la intersección de una parábola y una circunferencia.

Fermat añade (TH.OF.III.97):

> «*el método puede servir para resolver todas las ecuaciones bicuadráticas; ya que por el método de Vieta (Cap.I: De emend.), se puede hacer desaparecer el término afectado del cubo,* [...].»

Así pues, Fermat es capaz de resolver geométricamente las ecuaciones cúbicas y cuárticas mediante intersecciones de diversos lugares sólidos: parábolas, hipérbolas y circunferencias. Más adelante (TH.OF.III.99) Fermat dirá que es inútil utilizar ciertos métodos de Vieta para las ecuaciones bicuadráticas porque «*es claro que las bicuadráticas se resuelven con la misma elegancia, la misma facilidad y la misma rapidez que las cúbicas, y no es posible, yo creo, imaginar una solución más elegante.*»

Hay que reconocer que como decía el propio Fermat es difícil imaginar un método, ya no sólo más elegante, sino más operativo, más claro y sobre todo más didáctico que el que Fermat exhibe en el tratamiento de problemas importantes en la Historia de la Matemática.



Sello emitido en 2001 con motivo del cuarto centenario del nacimiento de Fermat.

LA GEOMETRÍA ANALÍTICA DE LA *ISAGOGE DE* FERMAT

Dibujo a plumilla de la tradicional efigie de Fermat.

La Geometría Analítica de Fermat tiene su origen en su profundo conocimiento de la Geometría de Apolonio y Pappus y del *Arte Analítica* de Vieta.

Fermat se dio cuenta de que las relaciones de áreas, expresadas según el Álgebra Geométrica de los griegos en forma de proporción, mediante las que Apolonio escribía las propiedades intrínsecas de las cónicas se prestaban con gran facilidad a ser traducidas en el lenguaje de ecuaciones del Álgebra simbólica de Vieta. De esta forma el *symptoma* de la curva de *Las Cónicas* de Apolonio, forma retórica de la expresión de la curva en el lenguaje pitagórico de la *Aplicación de las Areas*, evolucionaba hacia la *ecuación característica* de la curva de la *Introducccción a los Lugares Planos y Sólidos* (*Ad Locos Planos et Solidos Isagoge*) de Fermat.

Al vincular los trabajos matemáticos de Vieta y Apolonio, Fermat alumbra su Geometría Analítica que establece un efectivo puente entre la Geometría y el Álgebra, que permite asociar curvas y ecuaciones, a base de aplicar el Análisis algebraico de Vieta a los problemas de lugares geométricos de Apolonio y Pappus, definidos en un sistema de coordenadas, por una ecuación indeterminada en dos incógnitas. De este modo Fermat resolverá los problemas del Análisis Geométrico de los antiguos mediante la mecánica operatoria del Álgebra simbólica.

Con la Geometría Analítica de Fermat se alcanzaba el máximo grado de consumación en la aplicación a los problemas geométricos del antiguo método de *Análisis* –de ahí procede el adjetivo Analítica que acompaña al sustantivo Geometría–, siendo el Álgebra por su carácter algorítmico el principal instrumento de la aplicación de ese Análisis.

La Geometría Analítica se convierte enseguida, en la mente de Fermat, en una poderosa herramienta heurística de investigación, mediante la cual él mismo resolverá de forma prodigiosa y brillante, numerosos problemas, antiguos y nuevos, en particular numerosas cuestiones de lugares geométricos, máximos y mínimos, tangentes, cuadraturas y cubaturas, centros de gravedad y problemas de rectificación de curvas.

FERMAT EN LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS

Puede decirse con certeza que la figura matemática de Fermat está en el origen de casi todos las disciplinas matemáticas que aparecen a lo largo del siglo XVII: el Cálculo Infinitesimal –en sus dos vertientes, diferencial e integral–, la Geometría Analítica, El Cálculo de Probabilidades y la Teoría de Números.

Toda persona de cultura media ha estudiado que Newton y Leibniz inventaron el Cálculo Infinitesimal, Descartes la Geometría Analítica y Pascal el Cálculo de Probabilidades. Fermat es el ascendiente directo de todos estos descubrimientos. ¿A qué se debe entonces que Fermat no ocupe en la historia de estas disciplinas científicas el lugar que le corresponde? La respuesta a esta pregunta es múltiple y puede ir desde el mas serio rigor histórico hasta la ironía. Fermat ha precedido en la raíz a Descartes, Pascal, Leibniz, Newton, etc. pero estos matemáticos llegaron mas lejos que él. Fermat dio el impulso inicial que es imprescindible para que toda doctrina científica empiece a prosperar, pero no forjó ninguna teoría en un cuerpo de doctrina coherente y acabado, plasmado en una obra cerrada y definitiva como por ejemplo hizo Descartes en *La Geometría*.

Roger Paintandre, Profesor de Matemáticas del Licée *PierreFermat* de Toulouse ironiza –en un discurso pronunciado el 22 de junio de 1957 con motivo de la inauguración de una exposición sobre Fermat– acerca del olvido en que ha caído la figura de Fermat :

> **«[...]** ***Fermat no ha conocido por parte del gran público el renombre de un Pascal, un Galileo o un Newton.*** **[...] .** ***Claro está que él no tuvo la precocidad de redescubrir a Euclides a los quince años,*** **[...] .** ***No tuvo la fortuna de ser perseguido por la Inquisición, apenas participó en la Fronda ni comulgó en exceso con el jansenismo. Y nunca soñó con recibir una manzana sobre la cabeza mientras contemplaba la luna. ¡Falta imperdonable!. Pero mas allá de estas anécdotas mas o menos vanas, Fermat fue uno de los grandes genios de Francia y uno de los matemáticos mas extraordinarios de todos los tiempos.*** **»**

Ironías aparte, hay otras razones para comprender la oscuridad en la cayó Fermat. Tras la lectura de los trabajos de Fermat –en particular su correspondencia–, se puede afirmar que Fermat hacía Matemáticas, para saciar una irrefrenable afición y para satisfacer a sus amigos, por eso Fermat no redactó casi nada de sus descubrimientos y rehusó su publicación, de modo que lo esencial de su obra fue desarrollada en su asidua correspondencia con los científicos coetáneos y en los márgenes de sus libros. Es en sus brillantes epístolas, dando muestra de una inteligencia poderosamente sintética, donde inventa, explica, demuestra y se bate con una contundencia argumental impecable en la defensa de sus ideas matemáticas. Aquí reside el poderoso atractivo que tiene la figura de Fermat para el estudioso de la Historia de las Matemáticas.

A pesar de su grandeza como matemático quizá comparable a Arquímedes, Descartes, Newton, Euler o Gauss, Fermat es apenas conocido en los círculos de Filosofía e Historia de la Ciencia, quizá porque fue lo que se llama un matemático puro, quizá porque tras su desaparición, las disciplinas matemáticas que creó o que contribuyó decisivamente a desarrollar, dieron un paso de gigante oscureciendo la acción del pionero, quizá por las vicisitudes que sufrieron la publicación de sus obras. Cualquiera que sea la razón, Fermat es injustamente poco conocido. Por ejemplo, apenas es citado por Brunschvicg (editor de las obras de Pascal) en *Les étapes de la Philosophie Mathématique,* o por A.Koiré en *Estudios de Historía del pensamiento científico, que* desarrolla capítulos dedicados a Tartaglia, Cavalieri, Pascal, etc. Todavía sorprende más que no sea mencionado por sus compatriotas Voltaire en su *Diccionario filosófico* y D'Alembert en el *Discours Préliminaire de l'Encyclopédie* –donde se cita hasta trece veces a Descartes, una a Pascal y doce a Newton.

Sin embargo en el ámbito del público matemático, la figura de Fermat es casi mítica por sus geniales contribuciones a la *Teoría de Números* –su nombre va asociado a uno de los mas famosos problemas recién resuelto de la Matemática–, pero en general se desconocen sus decisivas incursiones y sus magníficas aportaciones en prácticamente todos los demás campos de la Matemática, particularmente en el terreno del Cálculo Infinitesimal. No obstante, en los libros de Historia general del Cálculo Infinitesimal o de Historia general de las Matemáticas, se elogia enfáticamente a Fermat como el verdadero descubridor del Cálculo Diferencial y auténtico adelantado de los conceptos fundamentales del Cálculo Integral.

Si importantes son los descubrimiento matemáticos de Fermat, no es inferior su relevancia histórica desde el plano metodológico. Fermat parte de un minucioso conocimiento de los clásicos griegos y arranca con profundas raíces en el pasado clásico para crear un estilo matemático que conduce el programa analítico de Vieta hasta las últimas consecuencias. Con ello, Fermat (y Descartes aunque con estilo y método diferentes) realiza la transformación del modelo griego estrictamente geométrico e instaura un modelo algebraico completamente nuevo, destilando un Análisis Algebraico que se convierte en un lenguaje y un instrumento de trabajo e investigación común a todos los matemáticos, que sustituye las complejas y particulares construcciones geométricas euclídeas por la resolución general de los problemas mediante ecuaciones algebraicas y la demostración sintética –que oculta la vía del descubrimiento– por la derivación analítica. Fermat es uno de los principales artífices de la inflexión radical que presenta la Matemática del siglo XVII respecto a la clásica griega, donde el afán demostrativo euclídeo da paso a la heurística de la creatividad y el descubrimiento. Lo que importa a Fermat es la obtención de métodos que permitan resolver de forma directa y operativa los problemas y escribirlos formalmente siguiendo la línea de la propia investigación geométrica, es decir, métodos que al describir el proceso inventivo enseñen a descubrir y rompan la clásica dualidad helénica invención–demostración –«*ars inveniendi*»– versus «*ars disserendi*» que tiene lugar en dos estadios de tiempo y espacio diferentes. Fermta pondera la heurística y se busca afanosamente la fusión, en un solo acto matemático, del descubrimiento y de la demostración. En todo este panorama juega un papel programático esencial la intervención del Álgebra como instrumento inherente a la Geometría Analítica que convierte a ésta en una poderosa herramienta de investigación y exploración científica, en el más útil instrumento para resolver con elegancia, rapidez y plenitud heurística las cuestiones geométricas.

La Geometría de Descartes

El Discurso del Método y *La Geometría*. Implicaciones recíprocas

Como consecuencia de la aparición de los inconmensurables, el *Álgebra Geométrica* de los griegos estructura casi toda la Matemática griega, con una rigidez que obliga a un tratamiento sintético de los problemas, esclaviza a depender de la naturaleza geométrica intrínseca de las figuras, de modo que cada problema exige un tratamiento local que atomiza la casuística de los casos específicos y precisa de sutiles construcciones geométricas para cada caso particular. Es decir, cada demostración de la Geometría euclídea exigía nuevos e ingeniosos argumentos originales y estaba tan ligada a las figuras que «*que no puede ejercitar el entendimiento sin fatigar mucho la imaginación*», como diría Descartes (DM.AT,VI,17). Pero lo más grave era la ocultación del procedimiento y el método de descubrimiento. Incluso Descartes llega a decir que «*Los antiguos no poseían un verdadero método,* [...]*,*» sino «*ellos no hubieran escrito libros tan voluminosos* [para resolver las cuestiones geométricas]» (G.AT,VI,376).

Las Geometrías Analíticas de Fermat y Descartes nacen, precisamente, del interés de ambos por la metodología. Como escribe Kline (1985, p.51):

> «*Las contribuciones de Descartes a las Matemáticas propiamente dichas no ofrecieron nuevas verdades, sino, más bien, una sólida metodología que ahora llamamos Geometría Analítica*.»

Tanto la *Isagoge* de Fermat como *La Geometría* de Descartes tienen su anclaje en la Geometría Griega, pero se plantean como tarea esencial encontrar nuevos métodos más simples, más operativos, más resolutivos, más heurísticos y sobre todo más generales. Así parece pronunciarse Fermat justo desde el comienzo de la *Isagoge* (TH.OF.III.85). Y en el caso de Descartes, la intencionalidad es palmaria hasta en el propio título de la obra de la que es tributaria *La Geometría*, que la llama *Discours sur la Méthode*, ..., en la que Descartes plasma, de forma clara y distinta, «*el método para dirigir correctamente la razón y buscar la verdad en las ciencias*», es decir, primero el método, después la ciencia que resulta de su fiel aplicación.

La lectura de las *Reglas para la dirección del espíritu* y *El Discurso del Método* es un preliminar necesario, o al menos aconsejable, para entender la motivación y los presupuestos intelectuales de Descartes acerca de la Ciencia, de la universalización del razonamiento matemático como base del conocimiento racional y en particular de los orígenes y objetivos de *La Geometría*.

Descartes se propone con *El Discurso del Método* y *La Geometría* una magna empresa de reforma de la Filosofía y de la Matemática, tomando esta ciencia como principio básico del fundamento de la sabiduría universal. Descartes adopta la demostración matemática frente al recurso a la autoridad y pondera la firmeza y certeza de la Matemática frente a la incertidumbre de la Filosofía. Pero no todo es panegírico respecto de las Matemáticas, ya que Descartes se queja tanto del uso restringido que, en su tiempom se hacía de la Matemática, como de la forma misma de enseñarla. En efecto, al aludir a su etapa de formación, Descartes escribe, en el *Discurso del Método*, respecto de las Matemáticas (DM.AT,VI,7):

> «*Gustaba* [en mi juventud]*, sobre todo, de las Matemáticas por la certeza y evidencia de sus razonamientos, pero no había entendido todavía su verdadero uso y, pensando que sólo servían para las artes mecánicas, me sorprendía de que, siendo tan firmes sus fundamentos, no se hubiera construido sobre ellas nada más relevante*.»

Más adelante, en la segunda parte de la obra, Descartes continúa diciendo (DM.AT,VI,17–18):

> «*Había estudiado entre las partes de la Filosofía, la Lógica, y de las Matemáticas, el Análisis de los geómetras y el Álgebra, tres Artes o Ciencias, que debían, al parecer, contribuir algo a mi propósito.* [...] *Respecto al Análisis de los antiguos y el Álgebra de los modernos, aparte de que no se refieren sino a muy abstractas materias que no parecen ser de ningún uso, el primero está siempre tan constreñido a considerar las figuras, que no puede ejercitar el entendimiento sin fatigar mucho la imaginación, y en la última hay que sujetarse tanto a ciertas reglas y cifras, que se ha hecho un arte confuso y oscuro, bueno*

para enredar el espíritu, en lugar de una ciencia que lo cultive. Esto fue causa de que pensase que era necesario buscar algún otro método que, reuniendo las ventajas de estos tres, estuviese libre de sus defectos.»

A juzgar por este texto, el valor propedéutico y pedagógico de la Aritmética y la Geometría en la concepción del *Método*, es asumido por Descartes una vez se hayan corregido las deficiencias y limitaciones de estas ciencias, es decir, una vez que Descartes haya transformado los antiguos instrumentos de la Geometría griega –el Álgebra Geométrica y el Análisis Geométrico– en lo que hoy llamamos la Geometría Analítica cartesiana, mediante la intervención del Álgebra literal y simbólica de Vieta sobre la Geometría, tras la drástica reforma y simplificación de la notación algebraica que el propio Descartes realizará, primero de forma provisional en la Regla XVI de las *Regulae* (RXVI.AT.X.455) y ya de forma definitiva en *La Geometría* (G.AT,VI,371).

Efectivamente, uno de los atributos más importantes de la Geometría Analítica es que libera al investigador de la dependencia a ultranza de las figuras geométricas al sustituir las complejas construcciones geométricas de la Geometría griega por sistemáticas operaciones algebraicas, es decir, permite «*ejercitar el entendimiento sin fatigar mucho la imaginación*». Así concibe Descartes una ciencia matemática que se convierte en un saber más fácil y simple, y generalizable y valido para todo el ámbito de la cantidad. Pero no sólo esto, porque el modo de proceder y el espíritu de esta verdadera Matemática, experimentado y cultivado en el quehacer y en la investigación matemáticos, es lo que inspira las reglas del *Método* y el *Método* mismo. En efecto, Descartes reconoce el proceder de los geómetras en la inspiración de su método (DM.AT,VI,19):

«*Esas largas cadenas trabadas de razones muy simples y fáciles, que los geómetras acostumbran a emplear para llegar a sus más difíciles demostraciones, me habían dado ocasión para imaginar que todas las cosas que entran en la esfera del conocimiento humano se encadenan de la misma manera,* [...]*, y considerando que entre todos los que antes han buscado la verdad en las ciencias, sólo los matemáticos han podido hallar algunas demostraciones, esto es, algunas razones ciertas y evidentes, no dudé de que debía comenzar por las mismas que ellos han examinado.*»

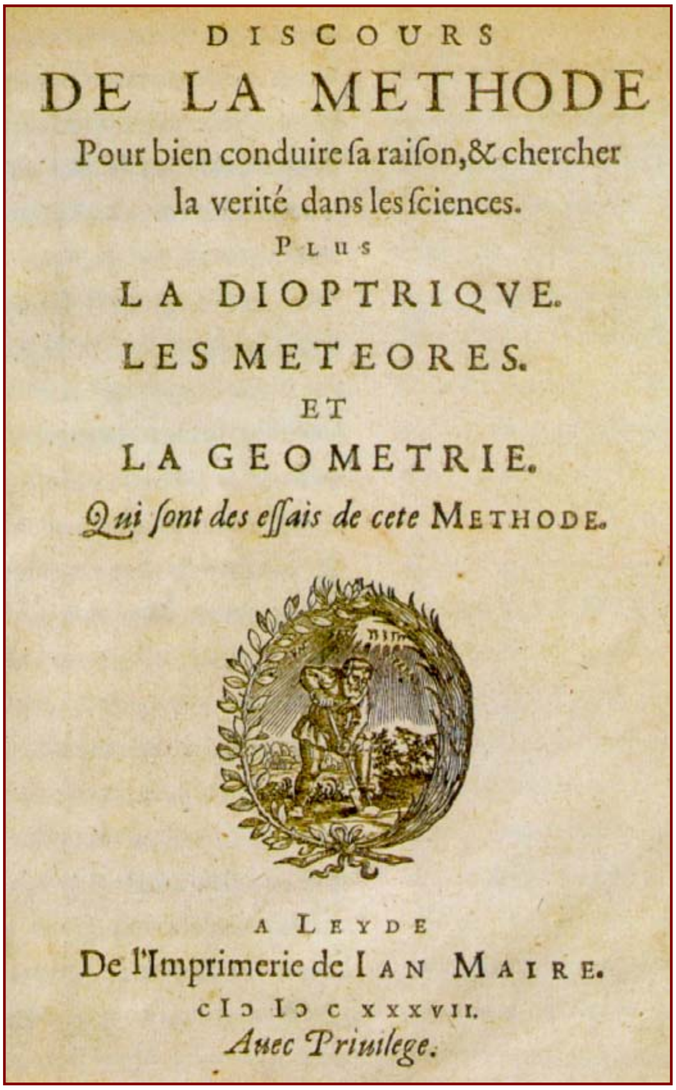
He aquí un texto muy significativo de la importancia del método matemático en el fundamento del pensamiento cartesiano, sobre todo el método seguido por los geómetras, que parten de las cosas más sencillas y fáciles de conocer para elevarse mediante «*largas cadenas de trabadas razones*» hasta alcanzar las cuestiones más difíciles y complejas. Descartes concebía que las entidades del conocimiento se encadenan como las proposiciones geométricas, que son, junto con las aritméticas, las únicas que gozan de certeza y evidencia, por tanto por ellas había que empezar como guía hacia el *Método*.

El último texto citado de *El Discurso del Método* continua con estas palabras (DM.AT,VI,20):

«[...] A*l advertir que, aunque* [las ciencias matemáticas] *tienen objetos diferentes, concuerdan todas en no considerar sino las relaciones o proporciones que se encuentran en tales objetos, pensé que más valía limitarse a examinar esas proporciones en general,* [...]*, pensé que, para considerarlas mejor particularmente, debía suponerlas en línea* [recta]*, pues nada hallaba más simple ni que más distintamente pudiera representarse a mi imaginación y a mis sentidos. Y que para retenerlas o comprenderlas era necesario explicarlas mediante algunas cifras lo más cortas que fuera posible; de esta manera tomaría lo mejor del Análisis geométrico y del Álgebra y corregiría los defectos del uno por medio de la otra*.»

He aquí, en términos del propio Descartes, el origen y los fundamentos de *La Geometría*. Descartes toma la línea recta como representación de toda magnitud y, además, propone una reforma de la notación algebraica. De esta forma conservará del Análisis Geométrico el auxilio que recibe de la imaginación y del Álgebra –una vez reformada la notación– la mecanización operacional que permite su simbolismo. La proyección y aplicación del Álgebra sobre el Análisis geométrico –Descartes dice «*corrigiendo sus defectos*»– producirá lo que llamamos su «*Geometría Analítica*».

EL DISCURSO DEL MÉTODO Y LAS MATEMÁTICAS


DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire ſa raiſon, & chercher
la verité dans les ſciences.
PLUS
LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui ſont des eſſais de cete METHODE.

A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
CIϽ IϽ C XXXVII.
Avec Privilege.

La primera edición de *El Discurso del Método* con los tres ensayos *la Dióptrica, los Meteoros y la Geometría (Leyden, 1637).*

***El Discurso del Método* es la autobiografía intelectual de Descartes.**

Descartes encontró en la Matemática, un modelo paradigmático en la búsqueda de las primeras verdades absolutamente ciertas que pudieran servirle de base, apoyo y fundamento en la reconstrucción de todo el edificio científico y filosófico, por eso la Matemática devino en la base racional de su pensamiento.

Cuando se habla del cartesianismo como método de la razón se debe entender «*método de la razón matemática*» en el sentido de que las reglas del método son extraídas por Descartes del saber y del conocimiento matemáticos, por una parte, y de la práctica, estilo y procedimientos matemáticos, por otra.

Concretamente Descartes habla de tres Artes o Ciencias que habían de contribuir a su propósito (DM.AT,VI,17):

- **La *Lógica* como parte de la Filosofía.**
- **El antiguo *Análisis de los geómetras*.**
- **El *Álgebra* de los modernos.**

Así pues, utilizando la Matemática como paradigma en la indagación de la verdad, es decir, el *Análisis* de los geómetras y la *Síntesis* de los algebristas, Descartes establece el «*Método para conducir bien la razón y buscar la verdad en las ciencias*».

Descartes persigue ante todo en *El Discurso del Método* la búsqueda de un «*ars inveniendi*», es decir, un método que sirviera para descubrir verdades y no para probar lo que ya se ha hallado, defender tesis o exponer teorías, y aplicable en todas las ciencias y en particular en la Geometría. Como ya había sentado R. Bacon en el *Novum* Organum, la Lógica aristotélica era inútil para la invención científica porque el silogismo no es aplicable a los principios de las ciencias, ya que sólo sirve para imponer el asentimiento y no para aprehender la realidad. Esta misma actitud asume Descartes con respecto a la lógica tradicional tanto en *El Discurso del Método* como en las *Regulae*:

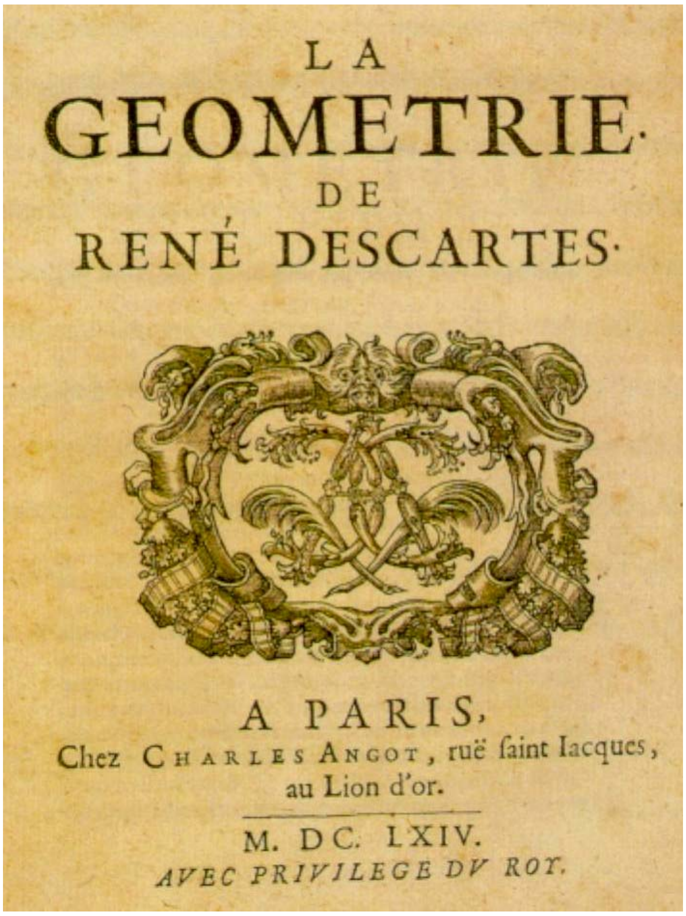
> «*La Lógica, sus silogismos y la mayor parte de sus otras reglas sirven más bien para explicar a otro lo que uno sabe más que para aprenderlo*» **(DM.AT,VI,17).**
>
> «*El silogismo es completamente inútil para los que desean investigar la verdad de las cosas y sólo puede aprovechar, a veces, para exponer con mayor facilidad a los otros las razones ya conocidas*» **(RX.AT.X.406).**

Descartes ya se había fijado, para su propósito, en la IV Regla de las *Regulae*, especialmente en la bondad del Análisis de los antiguos y del Álgebra de los modernos (¿Vieta?), cuando escribe:

> «**[...]** *Los antiguos geómetras se han servido de cierto Análisis, que extendían a la resolución de todos los problemas, si bien privaron de él a la posteridad. Y ahora florece cierta clase de Aritmética que llaman Álgebra, para realizar sobre los números lo que los antiguos hacían sobre las figuras*» **(RIV.AT.X.373).**
>
> «*Ha habido, finalmente, algunos hombres de gran talento que se han esforzado en este siglo por resucitarla; pues aquel arte no parece ser otra cosa, que lo que con nombre extranjero llaman Álgebra, con tal que pueda zafarse de las múltiples cifras e inexplicables figuras de que está recargado a fin de que no falte ya aquella claridad y facilidad suma que suponemos debe haber en la verdadera Mathesis*» **(RIV.AT.X.377).**

Todas estas cuestiones e inquietudes que Descartes refleja en *El Discurso del Método* y en las *Regulae*, con un bello y claro lenguaje, son consideración esencia para entender como se había ido fraguando en su mente adolescente no sólo el origen de *La Geometría* sino la idea de la sabiduría universal.

LA GEOMETRÍA DE DESCARTES



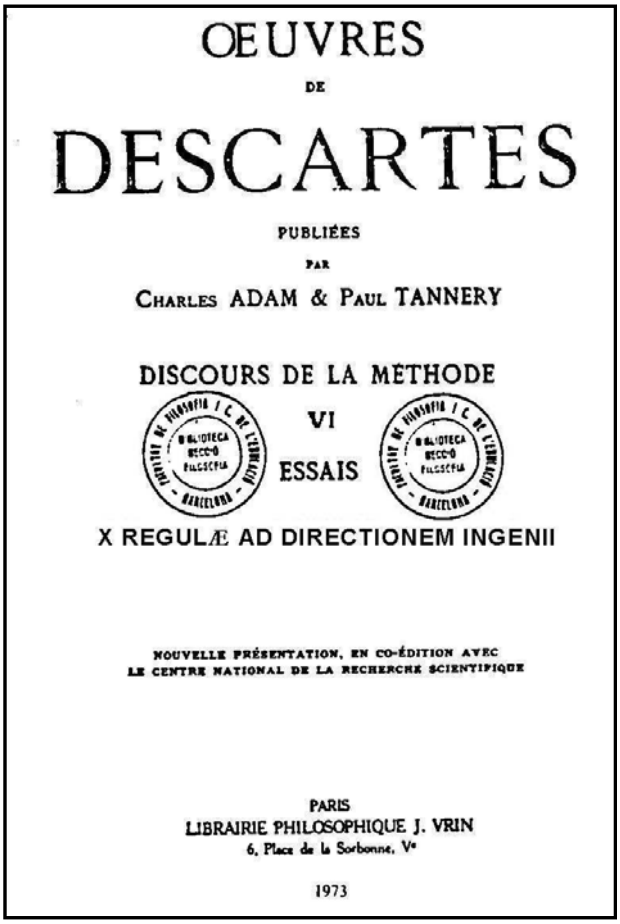
1. *La Geometría* de Descartes, edición separada de *El Discurso del Método* (París, 1664).
2. Detalle del cuadro *Cristina de Suecia y su corte*, de P.Dumesnil. Descartes aparece haciendo una demostración geométrica.

La Geometría de Descartes, edición separada de *El Discurso del Método* (París, 1664).

La Geometría de Descartes es considerada con gran unanimidad como una de las obras fundamentales del pensamiento geométrico a lo largo de toda la Historia de la Matemática.

La Geometría de Descartes no puede entenderse de forma aislada ya que forma parte indisoluble de un proyecto metodológico general de alcanzar la unidad de la Ciencia que Descartes intenta fijar en las *Reglas para la dirección del espíritu* de 1628 y en *El Discurso del Método de 1637*. Descartes se propone con *El Discurso del Método* y los tres ensayos que lo acompañan, demostrar que ha alcanzado un nuevo método de especulación sobre la verdad científica mejor que todo método anterior y que precisamente *La Geometría* demuestra este aserto (DM.AT, I, 478). Desde luego así es en el ámbito de las Matemáticas en el que mediante el uso del Álgebra como herramienta algorítmica esencial, Descartes da una nueva lectura a la Geometría de los griegos, que supera sus limitaciones y trasciende sus conquistas geométricas a base de elaborar un magnífico instrumento de ataque de los problemas geométricos antiguos y modernos que libera a la Geometría de la dependencia y sometimiento a la estructura geométrica de la figura y su representación espacial y propone una forma de solución de los problemas basada en la aplicación del Análisis mediante la actuación del Álgebra, que supone el problema resuelto y establece una ordenada dependencia entre lo conocido y lo desconocido, hasta hallar el resultado buscado, de modo que las reglas del método cartesiano adquieren el sentido matemático de normas para la solución de los problemas geométricos mediante ecuaciones.

Más aún, de acuerdo con la idea de Descartes acerca de la Matemática como fundamento de la sabiduría universal, y en particular como base racional de todas las ciencias, *La Geometría* de Descartes perfecciona de forma muy notable el Álgebra esbozada en el Libro II de las *Regulae* al establecer el Análisis Algebraico no sólo como un instrumento que aplicado a la Geometría creará la Geometría Analítica sino como algo mucho más universal todavía, el lenguaje de expresión y por tanto la clave de todas las ciencias.

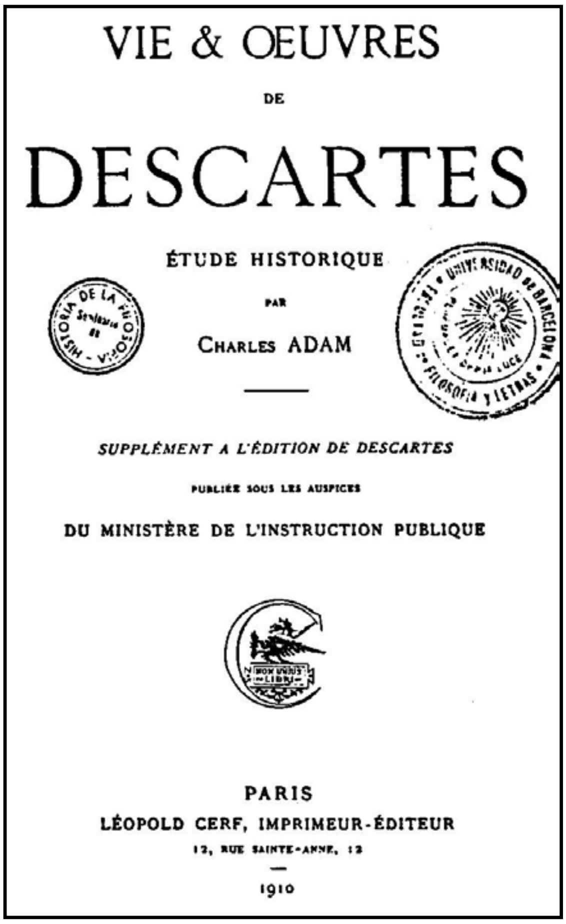

OEUVRES
DE
DESCARTES
PUBLIÉES
PAR
CHARLES ADAM & PAUL TANNERY
DISCOURS DE LA MÉTHODE
VI
ESSAIS
X REGULÆ AD DIRECTIONEM INGENII

NOUVELLE PRÉSENTATION, EN CO-ÉDITION AVEC
LE CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

PARIS
LIBRAIRIE PHILOSOPHIQUE J. VRIN
6, Place de la Sorbonne, V^e
1973

Oeuvres de Descartes. Publiées par C.Adam et P.Tannery. 12 volúmenes. Librairie philosophique J.Vrin. París. 1964-74.

El Volumen VI contiene *El Discours de la Méthode, La Géométrie* y los otros Ensayos. El Volumen X contiene las *Regulae ad directionem ingenii* entre otros tratados.


VIE & OEUVRES
DE
DESCARTES
ÉTUDE HISTORIQUE
PAR
CHARLES ADAM

SUPPLÉMENT A L'ÉDITION DE DESCARTES
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES
DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE

PARIS
LÉOPOLD CERF, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
12, RUE SAINTE-ANNE, 12
1910

Vie et Oeuvres de Descartes. Étude historique par C.Adam. París, 1910.

Es una obra muy completa sobre la vida, viajes, polémicas y escritos de Descartes: *Metaphysique, Le Monde, Dioptrique, Géométrie, Discours de la Méthode, Polémiques, Méditations, Principes de la Philosophie, Passions de l'Âme, ...*

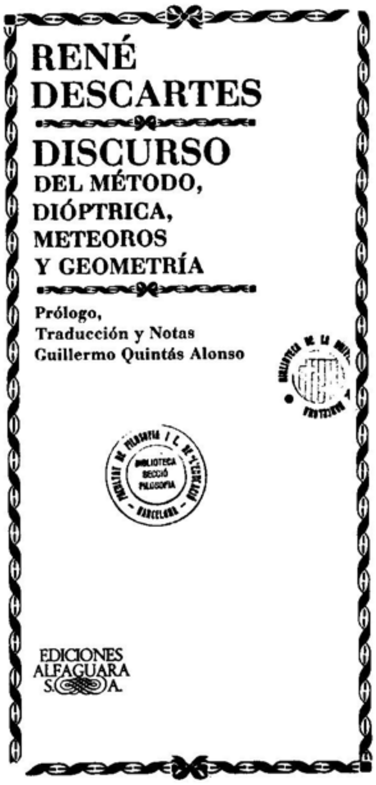
EL CARTESIANISMO

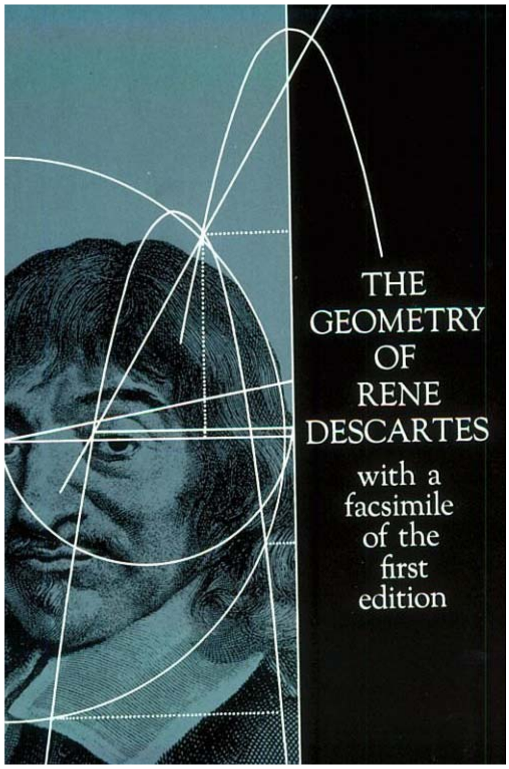
Estatua de Descartes. Palacio de Versalles.

El término latinizado del apellido de Descartes ha dado nombre tanto a su doctrina filosófica: el cartesianismo, basada en el método de la razón matemática, como a las aplicaciones geométricas de *La Geometría:* la Geometría cartesiana, llamada en su forma académica *Geometría* Analítica.

Pocos sabios han dejado su nombre a una doctrina filosófica o a una teoría matemática, pero todavía menos han tenido la gloria de verlo adjetivado en el lenguaje coloquial. Cartesiano ha pasado a ser sinónimo de *racional* y *metódico* en el sentido de analista y riguroso. Así se reconoce cuando se habla, por ejemplo, de una mente cartesiana .

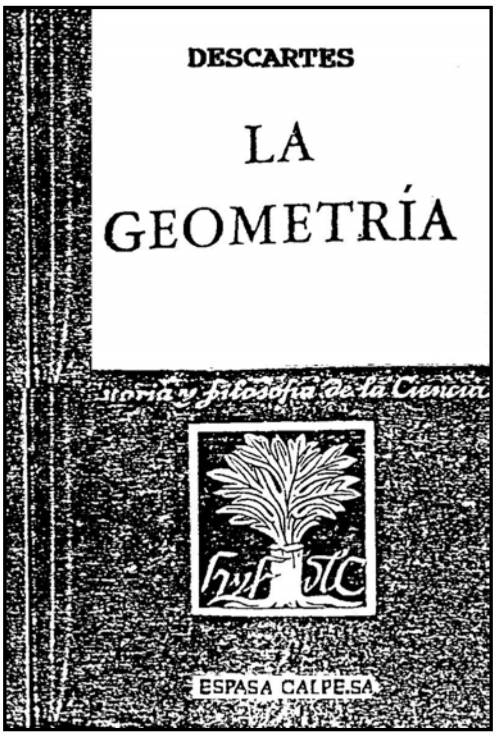
ALGUNAS EDICIONES DE *LA GEOMETRÍA* DE DESCARTES

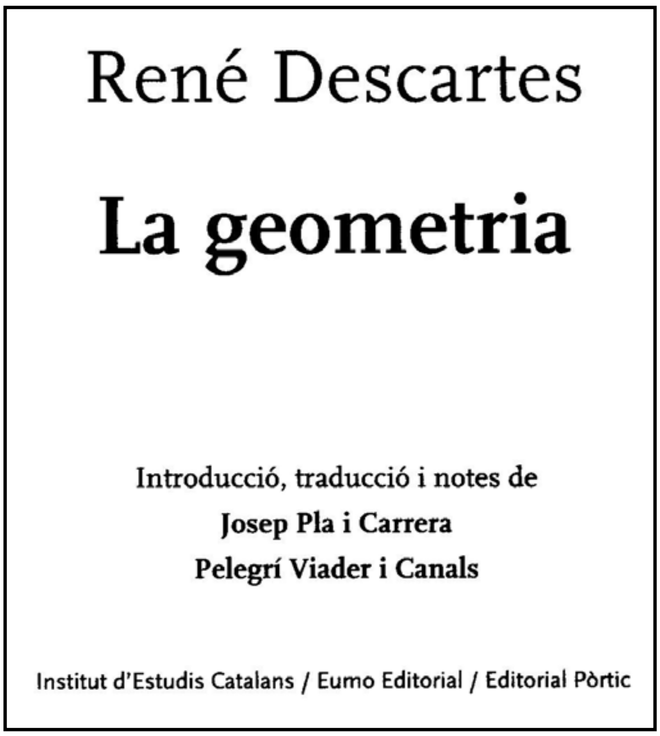




Ediciones de ***La Geometría de Descartes utilizadas en este trabajo*****:**

1. **DESCARTES.** ***La Geometría*****. Espasa-Calpe, Buenos Aires. 1947.**
2. **DESCARTES.** ***The Geometry*****. Dover, New York, 1954.**
3. **DESCARTES.** ***La Geometría*****. Alfaguara, Madrid, 1986.**
4. **DESCARTES.** ***La Geometria*****. Institut d'Estudis Catalans, Barcelona, 1999.**





Los tres Libros de *La Geometría* de Descartes

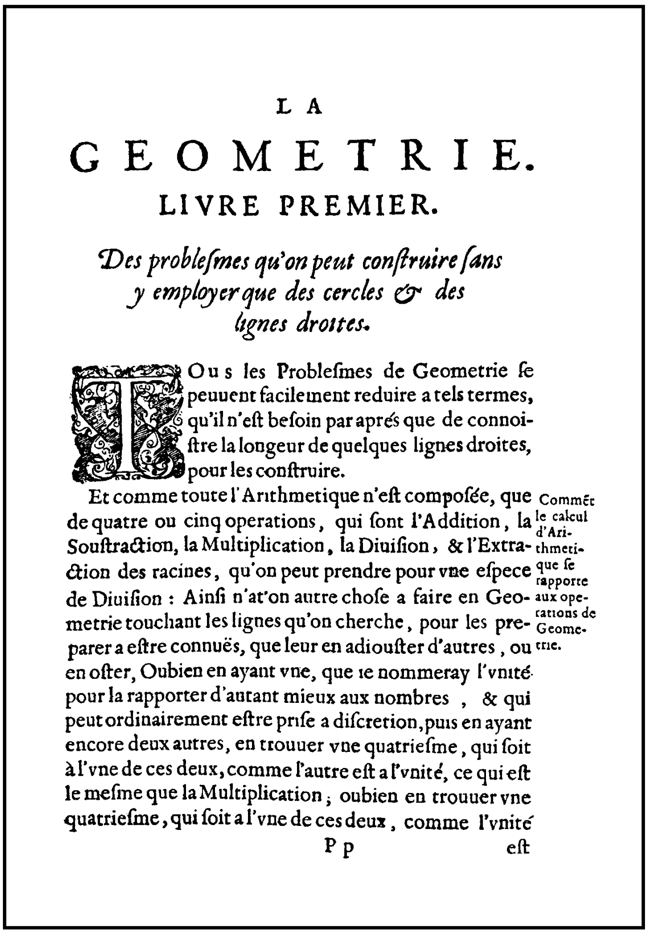
La Geometría se compone de tres libros bien diferenciados y a la vez muy entrelazados; tiene en la edición original 120 páginas, con 48 figuras de las que son diferentes 30.

El *Libro Primero* de *La Geometría* trata «*De los Problemas que pueden construirse sin emplear más que círculos y líneas rectas*.»

En este libro Descartes fija –con base siempre en *El Discurso del Método*– la metodología cartesiana que aplicará a la traducción algebraica de los problemas geométricos clásicos, de modo que el libro contiene el núcleo de toda la formulación cartesiana de *La Geometría.*

Empieza el libro con una auténtica declaración de principios en la que Descartes anuncia las coordenadas (G.AT,VI, 369):

> «*Todos los problemas de Geometría pueden reducirse fácilmente a términos tales, que no es necesario conocer de antemano más que la longitud de algunas líneas rectas para construirlos*.»



L A

GEOMETRIE.

LIVRE PREMIER.

Des problesmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles & des lignes droites.

TOus les Problesmes de Geometrie se peuuent facilement reduire a tels termes, qu'il n'est besoin par aprés que de connoistre la longeur de quelques lignes droites, pour les construire.

Et comme toute l'Arithmetique n'est composée, que de quatre ou cinq operations, qui sont l'Addition, la Soustraction, la Multiplication, la Diuision, & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne espece de Diuision : Ainsi n'a-t'on autre chose a faire en Geometrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a estre connuës, que leur en adiouster d'autres, ou en oster, Oubien en ayant vne, que ie nommeray l'vnité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui peut ordinairement estre prise a discretion, puis en ayant encore deux autres, en trouuer vne quatriesme, qui soit à l'vne de ces deux, comme l'autre est a l'vnité, ce qui est le mesme que la Multiplication; oubien en trouuer vne quatriesme, qui soit a l'vne de ces deux, comme l'vnité

Commët le calcul d'Arithmetique se rapporte aux operations de Geometrie.

Pp est

Primera página de la edición de 1637 de *La Geometría* de Descartes.

Así pues, como las líneas rectas son lo que se nos presenta de la forma *más clara y distinta* en el campo de la Geometría, para resolver problemas geométricos, partiremos de ciertas líneas rectas –en realidad de algunos segmentos rectilíneos–; pero como un problema geométrico sólo está completamente resuelto –es decir, geométricamente resuelto– cuando se ha construido la solución, es preciso dar ésta en términos de segmentos que se deben construir.

El primer punto consistirá en advertir que las operaciones aritméticas elementales entre segmentos producen siempre un nuevo segmento, por eso en los primeros capítulos Descartes expone los procedimientos ya conocidos para construir de forma geométrica las operaciones de la Aritmética: omite las construcciones de la suma y diferencia de segmentos y construye la multiplicación, la división y la extracción de raíces cuadradas, a base de introducir el concepto de segmento unidad. Así pues, Descartes pone de manifiesto que el producto de dos o de tres segmentos es otro segmento, así como que el cociente de dos segmentos también es otro segmento.

Esta interpretación geométrico-algebraica de las operaciones aritméticas marca un hito en la Historia de la Matemática porque, por una parte soslaya la limitación pitagórica que la inconmensurabilidad había impuesto a la Geometría griega –la imposibilidad de asignar números a las figuras geométricas ante el fantasma de lo inconmensurable–, y por otra, permite romper con el problema de la homogeneidad dimensional, que había sido, sin duda hasta entonces, otra de las grandes limitaciones de la aplicación del Álgebra a la Geometría. Desde luego así había sido en la Geometría griega, pero incluso en la época de Descartes el producto de dos segmentos era un rectángulo, y el producto de tres segmentos un paralelepípedo, por tanto el producto de más de tres segmentos no tenía sentido y en consecuencia no se llevaba a efecto.

Tras la construcción geométrica de las operaciones, Descartes pasa a mostrar «*Cómo se llega a las ecuaciones que sirven para resolver los problemas*» y «*Cómo se resuelven*», lo que aplicará a dar solución al *Problema de Pappus* que trata en la forma más general, creando el método analítico de solución y discusión de los problemas matemáticos. Este problema había sido resuelto por Descartes en 1632 cuando Golius se lo propuso para que aplicara sobre él sus nuevos métodos, convirtiéndose en una auténtica piedra de toque que pone a prueba el nuevo método cartesiano.

El *Libro Segundo* de *La Geometría* titulado «*De la naturaleza de las líneas curvas*» consta de cuatro partes bien diferenciadas:

a) *La naturaleza geométrica de las líneas curvas*, vinculada sobre todo a dos cuestiones íntimamente ligadas: los compases cartesianos y la teoría de la proporción continua. Mientras en el Libro I, sin olvidar los lugares geométricos, Descartes centra más la atención sobre puntos individualizados, en el Libro II se proyecta sobre el objeto geométrico *Curva*. Descartes mantiene la división clásica griega de los problemas geométricos en *planos, sólidos y lineales* (que se resuelven con ecuaciones de segundo, tercer y cuarto o mayor grado, respectivamente) y demuestra que los problemas planos se construyen con rectas y circunferencias, los sólidos con secciones cónicas y el resto con líneas más complejas, llamadas por los antiguos *curvas mecánicas*, aunque más correcto sería llamarlas *curvas geométricas*. Descartes tiene el propósito de poner un poco de orden en el estudio de las curvas de la Geometría de los griegos, que según él era un caos completo, secuela de la limitación platónica de la regla y el compás, al no ser capaces de distinguir las diversas clases de curvas por no poder dilucidar la naturaleza de las mismas. Esto es precisamente lo que se propone Descartes, a base de establecer qué curvas son las que se pueden admitir en Geometría.

b) *El Problema general de Pappus*, ahora tratado con las herramientas precisas para poder clasificar las diversas soluciones de los diferentes planteamientos del mismo. Con el método cartesiano el clásico *Problema de Pappus* queda completamente resuelto.

c) *La construcción y propiedades de tangentes y normales* a una curva geométrica. Una vez concebida y definida, de forma clara y distinta, *la naturaleza geométrica de las líneas curvas*, Descartes introduce uno de los principios básicos de su método: «p*ara encontrar todas las propiedades de las líneas curvas basta con saber la relación que tienen todos sus puntos con los de las líneas rectas*, [...]», y establece cómo se puede utilizar la expresión algebraica –la ecuación de las curvas– para determinar los elementos geométricos más notables de las curvas (diámetros, ejes, centros, etc.) y, en particular, las normales, líneas cuya consideración y utilidad deriva de los problemas de la reflexión de la luz sobre las superficies curvas, y que literalmente es considerado por Descartes como el más importante problema geométrico que pueda ser concebido.

d) Finalmente Descartes estudia *los Óvalos* como curvas especiales que responden a consideraciones fijadas de las tangentes o normales. Descartes introduce cuatro amplias familias de curvas nuevas, de las que las cónicas son casos particulares.

El *Libro Tercero* de *La Geometría* trata «*De la construcción de los problemas que son sólidos o más que sólidos*» mediante el estudio de la resolución de ecuaciones, discusión de sus raíces, y relaciones entre los coeficientes. Descartes pretende ofrecer un método de resolución de cualquier ecuación algebraica. Muestra que una ecuación puede tener tantas raíces como dimensiones tiene el grado (existe «*la posibilidad de imaginar tantas raíces como el grado del polinomio*»), da luego su famosa regla de los signos y adelanta el *Teorema de Ruffini* del factor. Tras fundamentar las operaciones y propiedades algebraicas necesarias, Descartes introduce el simple criterio de divisibilidad sobre el término independiente de la ecuación polinómica (como condición necesaria aunque no suficiente) para obtención de raíces enteras y a partir de aquí ir reduciendo el grado de la ecuación mediante el algoritmo de la división. Para las ecuaciones cúbicas Descartes hace intervenir los clásicos problemas de la *duplicación del cubo* y la *trisección del ángulo*. De hecho, todo problema cúbico es equivalente a uno de estos dos problemas geométricos (G.AT,VI, 471-475). He aquí un nuevo y magnífico éxito del método cartesiano aplicado a la Geometría: las ecuaciones del Álgebra son el reflejo lingüístico de los problemas de la Geometría.

La construcción geométrico-algebraica de las operaciones aritméticas

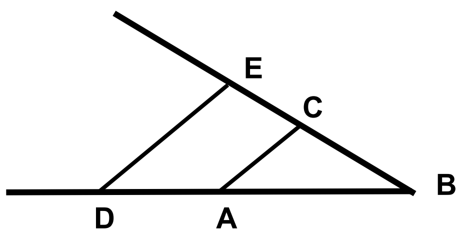
Veamos cómo dados un segmento unidad y dos segmentos a y b, Descartes construye, mediante circunferencias y rectas, el producto a·b, el cociente a/b y la raíz cuadrada $\sqrt{a}$, que resultan ser segmentos, porque se obtienen como una cuarta proporcional o como una media proporcional, de modo que establece que las operaciones aritméticas elementales de segmentos dan segmentos que se construyen mediante la regla y el compás.

Cómo el cálculo de la aritmética se relaciona con las operaciones de geometría.

«*Y así como la aritmética no comprende más que cuatro o cinco operaciones, que son la adición, la sustracción, la multiplicación, la división y la extracción de raíces, que pueden tomarse como una especie de división, así también no hay otra cosa que hacer en geometría, respecto a las líneas que se buscan, para prepararlas a ser conocidas, que agregarles o quitarles otras, o bien, teniendo una, que llamaré la unidad para relacionarla lo más posible con los números, y que ordinariamente puede ser tomada a discreción, y teniendo luego otras dos, encontrar una cuarta que sea a una de esas dos, como la otra es a la unidad, que es lo mismo que la multiplicación; o bien encontrar una cuarta que sea a una de esas dos como la unidad es a la otra, lo que es lo mismo que la división; o, en fin, encontrar una, dos, o varias medias proporcionales entre la unidad y alguna otra línea, lo que es lo mismo que extraer la raíz cuadrada, o cúbica, etc. Y yo no temeré introducir estos términos de aritmética en la geometría, a fin de hacerme más inteligible*». (G.AT,VI, 369-371).

La limitación operacional que trajo la inconmensurabilidad impidió en la Geometría griega asignar a las figuras geométricas números que midieran sus longitudes, áreas y volúmenes. En este ámbito, la raíz cuadrada, por ejemplo, equivalía al problema geométrico de cuadrar un rectángulo, es decir, hallar el lado de un cuadrado equivalente a un rectángulo dado. Descartes rompe aquí también con el pasado y abre una nueva brecha al asignar longitudes a los segmentos (empezando por adoptar un segmento unidad del que había hablado en la Regla XVI, RXVI.AT.X.449), de modo que mientras en la Aritmética las únicas raíces cuadradas exactas que pueden obtenerse son las de los cuadrados perfectos, en Geometría, a partir de Descartes, puede hallarse un segmento que represente exactamente la raíz cuadrada de otro segmento dado, incluso cuando este segmento no sea conmensurable con la unidad.

Veamos la construcción efectiva de Descartes del producto, el cociente y la raíz cuadrada:



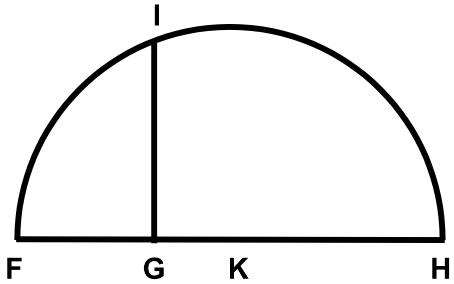
La multiplicación.

Sea, por ejemplo, AB la unidad, y que deba multiplicarse BD por BC; no tengo más que unir los puntos A y C, luego trazar DE paralela a CA, y BE es el producto de esta multiplicación.

Como en muchos problemas de *La Geometría*, Descartes aplica el *Teorema de Tales* (*Euclides*, VI.4) a la semejanza de triángulos. En este caso, como en el siguiente de la división, la semejanza de los triángulos ∆ BAC y ∆ BDE, que determinan BE/BD = BC/BA.

La división

O bien, si deben dividirse BE por BD, habiendo unido los puntos E y D, se traza AC paralela a DE y BC es el resultado de esa división.



La extracción de la raíz cuadrada

O, si hay que extraer la raíz cuadrada de GH, se le agrega en línea recta FG, que es la unidad y dividiendo FH en dos partes iguales por el punto K, con ese punto como centro se traza el círculo FIH; luego elevando desde el punto G una línea recta, con ángulos rectos sobre FH, hasta I, es GI la raíz buscada. No digo nada aquí de la raíz cúbica, ni de las otras, pues de ellas trataré con más detalle más adelante.

En esta ocasión, Descartes usa el otro *Teorema de Tales* (*Euclides*, III.31) y el *Teorema de la Altura* (*Euclides*, VI.8).

No hay ninguna novedad en la traducción geométrica de las operaciones algebraicas elementales que hace Descartes pensando en la ulterior resolución de ecuaciones. De hecho sabemos que el *Álgebra Geométrica* de los griegos era una forma geométrico-sintética de resolver ecuaciones, y después de los griegos, los matemáticos árabes disponían de algoritmos de resolución de ecuaciones mediante ciertas construcciones geométricas, que traducían las operaciones algebraicas casi en los mismos términos que Descartes. La gran innovación cartesiana estriba en que Descartes las utiliza para resolver problemas geométricos, es decir, para hacer Geometría mediante el Álgebra y no al revés.

La edición de F. van Schooten, de 1659, de *La Geometría* de Descartes, parte de su largo título es:

***Geometria, à Renato Des Cartes : anno 1637 Gallicè edita; postea autem una cum notis / Florimondi de Beavne ... Gallicè conscriptis in Latinam Linguam versa, & commentariis illustrata, operâ atque studio Francisci à Schooten ...* -- Amstelaedami : apud Ludovicum & Danielem Elzevirios, 1659.**

En 1644, el matemático Frans van Schooten, editor de *La Geometría* de Descartes y autor de las figuras, graba la imagen *ad vitum* de un caballero con bigote y barba, circundando el retrato con la siguiente inscripción: Renatus Des Cartes ... Natus Hagae Turorum anno MDXCVI. Señalan los historiadores que esta inscripción es el único documento que atestigua la fecha de nacimiento de Descartes. El filósofo encontró este retrato «*muy bien hecho, aunque la barba y el vestido no se le parecen en nada*».

El retrato acompaña a la edición de van Schooten, de 1659, de *La Geometría* de Descartes.

La notación matemática cartesiana

Al comienzo de su trabajo matemático Descartes hace uso de la notación cósica. Pero ya en *Las Reglas para la dirección del espíritu* hay, quizá como secuela de la lectura de Vieta, una primera evolución hacia el simbolismo. En el título de la Regla XVI Descartes pondera el significado y la importancia que tiene una notación sencilla (RXVI.AT.X.454):

> «*En cuanto a las cosas que no requieren la atención presente de la mente, incluso si son necesarias para la conclusión, es mejor designarlas por medio de signos muy breves que por figuras completas: pues así la memoria no podrá fallar, mientras que además el pensamiento no se distraerá en retenerlas, cuando se dedique a deducir otras.*»

Más adelante, Descartes concreta el simbolismo a adoptar (RXVI.AT.X.455):

> «*Mas, para mayor facilidad, utilizaremos las letras a,b,c, etc., para expresar las magnitudes ya conocidas, y las letras A,B,C, etc., para las incógnitas; las haremos preceder frecuentemente de los signos numéricos 1,2,3,4, etc., para expresar su multiplicidad, y les agregaremos también el número de sus relaciones que en ellas habrán de entenderse, así si escribo* $2a^3$*, será lo mismo que si dijera el duplo de la magnitud denotada por la letra a, que contiene tres relaciones. Con este artificio, no sólo resumiremos muchas palabras, sino que, mostraremos los términos de la dificultad tan puros y desnudos, que sin omitir nada útil, no se encuentre en ellos nada superfluo, que ocupe inútilmente la capacidad del espíritu, mientras la mente se vea obligada a abarcar a un tiempo muchas cosas.*»

Aunque nunca reconocerá la paternidad de Vieta en algunas de sus ideas fundamentales, Descartes debió inspirarse en él en la introducción del uso de letras para designar no sólo las cantidades desconocidas –incógnitas o variables– sino incluso las conocidas– parámetros–. Así se aplica un magnífico instrumento que permite obtener la solución general de los problemas mediante fórmulas que expresan las incógnitas en función de los parámetros. De esta manera uno «*se da cuenta de qué modo el resultado depende de los datos*» (RXVI.AT.X.458).

Será Descartes quien introduce en la Regla XVI, como se ha visto, la convención actual para la codificación de los símbolos de incógnitas y potencias, que por primera vez en la Historia de la Matemática serán símbolos artificiales, arbitrarios [«*formados al capricho de cada cual*» (RXVI.AT.X.455)] y no abreviadores

El convenio establecido en la Regla XVI es perfeccionado por Descartes en *La Geometría*, donde en lugar de designar por A,B,C, las incógnitas, utiliza las últimas letras minúsculas x,y,z; y en cuanto a las potencias y raíces Descartes establece (G.AT,VI, 371):

Cómo pueden emplearse letras en geometría.

> «*Pero a menudo no hay necesidad de trazar esas líneas sobre el papel y basta con designarlas por ciertas letras, una sola para cada línea. Así, para sumar la línea BD a la GH, designo a la una a y a la otra b y escribo a + b ; y a – b para restar b de a; y ab para multiplicar la una por la otra; y* $\frac{a}{b}$ *para dividir a por b; y aa* o a^2 *para multiplicar a por sí misma; y* a^3 *para multiplicar otra vez por a, y así al infinito; y* $\sqrt{a^2+b^2}$ *para extraer la raíz cuadrada de* a^2+b^2*; y* $\sqrt{C.a^3-b^3+abb}$ *para extraer la raíz cúbica* a^3-b^3+abb *y así otras.*

Es de señalar que para a^2 *o* b^3 *u otras expresiones semejantes, yo no concibo ordinariamente más que líneas simples, aunque para servirme de los nombres usados en álgebra, los designe por cuadrados, cubos, etc*.

Por último, a fin de no dejar de recordar los nombres de estas líneas, conviene siempre hacer una anotación separada, a medida que se las coloca o se las cambia, escribiendo, por ejemplo,

AB ∞ 1, es decir AB igual a 1».

Vemos pues que Descartes asigna una letra a cada segmento, que de hecho designa (y mide) su longitud. Además, introduce los exponentes para escribir las potencias; utiliza a^3, a^4, a^5, a^6, etc., para representar las respectivas potencias de a, pero usa indistintamente aa o a^2 para el cuadrado, lo cual tiene su explicación pues mientras que para escribir tanto aa como a^2 se precisan dos signos en las potencias superiores a a^2 hay una gran economía de lenguaje al escribir a^n. Además, vemos que Descartes designa la raíz cúbica $\sqrt[3]{a^3-b^3+abb}$ mediante $\sqrt{C.a^3-b^3+abb}$ y la igualdad por medio del símbolo ∞ que pudiera provenir de las dos primeras letras de la palabra latina *aequare*.

El penúltimo párrafo tiene una gran trascendencia. Con anterioridad a Descartes, geométricamente sólo tenían sentido las potencias cuadrática a^2 y cúbica a^3, que representaban respectivamente un cuadrado de lado a y un cubo de arista a. El propio Vieta, con su *ley de los homogéneos*, había permanece fiel al espíritu del pasado geométrico de los griegos, gobernado por la *Teoría de las Proporciones*, que había liberado a los antiguos del trauma de la inconmensurabilidad. Afortunadamente Descartes eliminó esta reminiscencia clásica en la Regla XVI de las *Regulae* (RXVI.AT.X.457), y como en muchas otras cuestiones lo que Descartes aventura en las *Reguale* lo consolida en *El Discurso del Método* o en *La Geometría*, como es el caso. En la notación cartesiana introducida en este tercer epígrafe del Libro I de *La Geometría* hay una clave geométrica que estriba en que un segmento de recta es considerado tanto como magnitud geométrica continua como una medida numérica, pero la potencia de una línea recta sigue siendo una línea recta, así que cuadrado y cubo no indicarán magnitudes planas o espaciales, sino la segunda o tercera potencia de un número, de modo que las operaciones aritméticas quedan incluidas en un terreno estrictamente algebraico. En este punto, Descartes rompe con la tradición griega al abandonar el principio de homogeneidad. *La Geometría* da carta de naturaleza a las potencias superiores a^4, a^5, a^6,..., todas ellas son legítimas líneas. De esta forma se produce una cierta unificación del Álgebra y la Geometría. Descartes habría alcanzado lo que se había propuesto en *El Discurso del Método*, ya aludido anteriormente (DM.AT,VI, 17-20):

«*Había estudiado* [...] *el Análisis de los antiguos y el Álgebra de los modernos,* [...]*, el primero está siempre tan constreñido a considerar las figuras, que no puede ejercitar el entendimiento sin fatigar mucho la imaginación, y en la última hay que sujetarse tanto a ciertas reglas y cifras, que se ha hecho un arte confuso y oscuro,* [...]. *Esto fue causa de que pensase que era necesario buscar algún otro método que, reuniendo las ventajas de estos tres, estuviese libre de sus defectos*. [...] *Pensé que, para considerarlas mejor particularmente, debía suponerlas en línea* [recta]*, pues nada hallaba más simple ni que más distintamente pudiera representarse a mi imaginación y a mis sentidos. Y que para retenerlas o comprenderlas era necesario explicarlas mediante algunas cifras lo más cortas que fuera posible; de esta manera tomaría lo mejor del Análisis geométrico y del Álgebra y corregiría los defectos del uno por medio de la otra.*»

Con sus radicales reformas, Descartes habría superado la esclavitud a la dependencia de las figuras en la Geometría de los antiguos y la falta de trasparencia del Álgebra de los modernos. Por si fuera poco, Descartes eliminaba otra limitación de la Geometría griega y del *Arte Analítica* de Vieta, la de las tres dimensiones.

LIVRE PREMIER.

gnes ſur le papier, & il ſuffiſt de les deſigner par quelques lettres, chaſcune par vne ſeule. Comme pour adiouſter la ligne B D a G H, ie nomme l'vne a & l'autre b, & eſcris $a + b$; Et $a - b$, pour ſouſtraire b d'a; Et ab, pour les multiplier l'vne par l'autre; Et $\frac{a}{b}$, pour diuiſer a par b; Et aa, ou a^2, pour multiplier a par ſoy meſme; Et a^3, pour le multiplier encore vne fois par a, & ainſi a l'infini; Et $\sqrt{a^2 + b^2}$, pour tirer la racine quarrée d'$a^2 + b^2$; Et $\sqrt{C.\, a^3 - b^3 + abb}$, pour tirer la racine cubique d'$a^3 - b^3 + abb$, & ainſi des autres.

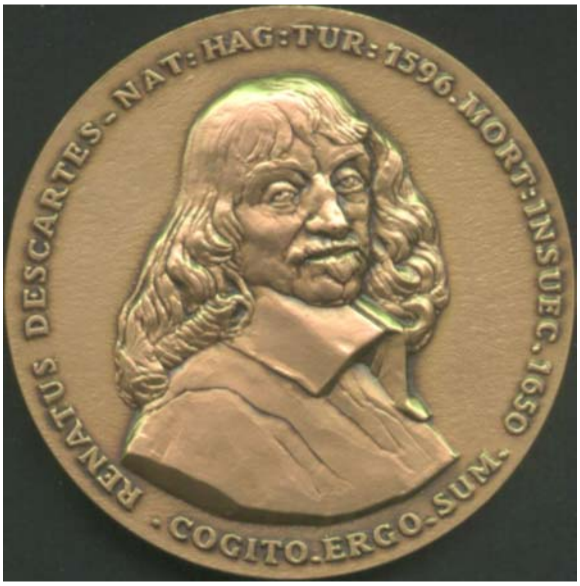
vſer de chiffres en Geometrie.

Où il eſt a remarquer que par a^2 ou b^3 ou ſemblables, ie ne conçoy ordinairement que des lignes toutes ſimples, encore que pour me ſeruir des noms vſités en l'Algebre, ie les nomme des quarrés ou des cubes, &c.

Il eſt auſſy a remarquer que toutes les parties d'vne meſme ligne, ſe doiuent ordinairement exprimer par autant de dimenſions l'vne que l'autre, lorſque l'vnité n'eſt point déterminée en la queſtion, comme icy a^3 en contient autant qu'abb ou b^3 dont ſe compoſe la ligne que i'ay nommée $\sqrt{C.\, a^3 - b^3 + abb}$: mais que ce n'eſt pas de meſme lorſque l'vnité eſt déterminée, a cauſe qu'elle peut eſtre ſouſentendue par tout ou il y a trop ou trop peu de dimenſions: comme s'il faut tirer la racine cubique de $aabb - b$, il faut penſer que la quantité $aabb$ eſt diuiſée vne fois par l'vnité, & que l'autre quantité b eſt multipliée deux fois par la meſme.

Página de la edición de 1637 de *La Geometría* donde Descartes introduce el simbolismo de la notación cartesiana.

LA NOTACIÓN MATEMÁTICA CARTESIANA



La notación que Descartes introduce en la Regla XVI de las *Regulae* (RXVI.AT.X.455) y perfecciona al comienzo de *La Geometría* (G.AT,VI, 371), fue la fórmula oportuna para su magno proyecto de reforma y reconstrucción de la Matemática sobre premisas muy sencillas, no geométricas como en Euclides, sino algebraicas, y con unas herramientas geométricas muy sencillas, sólo el *Teorema de Tales* y el *Teorema Pitágoras*, o algunos equivalentes, como confiesa a dos de sus pupilas, la reina Cristina de Suecia y la Princesa Isabel de Bohemia.

La simplificación de la notación algebraica es una cuestión intrínsecamente vinculada a los métodos de la Geometría Analítica. Tanto es así, que en todo estudio histórico sobre la Geometría Analítica una parte importante la ocupa la evolución histórica del simbolismo, que alcanza su clímax en los aportes del propio Descartes a la notación algebraica, ingrediente esencial del descubrimiento cartesiano. En palabras de Descartes:

> **«[...]** ***De esta manera*** **t*omaría lo mejor del Análisis geométrico y del Álgebra y corregiría los defectos del uno por medio de la otra*» (DM.AT,VI,20).**

Descartes alude una y otra vez en las *Regulae* y en *La Geometría* a la función que debe cumplir una buena notación, simple y clara, formada de «*signos muy breves*» para «*ejercitar el entendimiento sin fatigar mucho la imaginación*» (DM.AT,VI, 17-18), y no distraer el pensamiento en retener cosas, a base de descargar la memoria por medio de la escritura para sólo confiarle lo imprescindible (RXVI.AT.X.454–455), (RXVI.AT.X.458):

> **«[...]** ***Muy acertadamente el arte inventó la escritura, fiados en cuya ayuda nada en absoluto encomendaremos ya a la memoria, sino que, dejando a la fantasía en su totalidad libre para las ideas presentes, escribiremos en el papel cuanto haya de ser retenido; y ello por medio de signos muy breves*** **[...].** ***A cuanto haya de ser contemplado para la solución de una dificultad, lo designaremos por medio de un signo único que puede ser formado al capricho de cada cual.*»**
>
> **«*De modo general es preciso observar que jamás debe encomendarse a la memoria ninguna de las cosas que no requieran una continuada atención, si podemos depositarlas en el papel, no sea que un recuerdo superfluo para el conocimiento de un objeto nos prive de alguna parte de nuestro espíritu.*»**

El simbolismo algebraico, que apuntaba a convertirse en el lenguaje universal traería simplificación, generalización, mecanización y unificación en la notación, entrañando economía de pensamiento y difusión rápida. Después de Descartes, el Álgebra es uno de los más potentes lenguajes creados por el hombre, un instrumento para la expresión breve, intuitiva y mecánica de relaciones enormemente complicadas que puedan tener entre sí objetos abstractos cualesquiera, y en su aplicación a la Geometría, el ingenio que exigía la lectura y comprensión de la obra de Euclides quedaría eliminado y reemplazado por procedimientos algorítmicos automáticos.

Aparte de su ingente contribución al nacimiento de la Geometría Analítica, a Descartes le cabe, pues, el mérito de haber dado los pasos más importantes en la introducción de la moderna notación simbólica de las Matemáticas, de modo que el convenio notacional cartesiano se hizo definitivo. La Geometría, es el primer texto matemático en el que un estudiante actual no encontraría dificultades con la notación.

Análisis y Síntesis: planteamiento y resolución de las ecuaciones

Con las nuevas notaciones y símbolos, Descartes realizó una importante simplificación en el lenguaje matemático. Ahora disponía de una Geometría que al poderse expresar de forma algebraica permitía desarrollar procedimientos para resolver problemas geométricos a base de traducirlos al lenguaje algebraico de las ecuaciones, simplificar éstas y finalmente resolverlas (lo que quiere decir construir las soluciones) mediante lo cual Descartes se propondrá rehacer la Geometría.

Cómo se llega a las ecuaciones que sirven para resolver los problemas

> «*Así, si se quiere resolver algún problema, debe de antemano considerarse como ya resuelto, y dar nombre a todas las líneas que parecen necesarias para construirlo, tanto a las que son desconocidas como a las otras. Luego, sin considerar ninguna diferencia entre estas líneas conocidas y desconocidas, se debe examinar la dificultad según el orden que se presente como más natural de todos, en la forma como aquellas líneas dependen mutuamente las unas de las otras, hasta que se haya encontrado la manera de expresar una misma cantidad de dos maneras: lo que se denomina una ecuación, pues* [el resultado de] *los términos de una de esas dos formas son iguales a los de la otra*» (G.AT,VI,372).

He aquí una aplicación directa de los procedimientos del *Análisis* y la *Síntesi*s tal como los había descrito Pappus en *El Tesoro del Análisis* del Libro VII de *la Colección Matemática* y tal como lo había aplicado Vieta con la intervención del Álgebra en su *Arte Analítica*. Todo conduce a determinar la ecuación del problema geométrico, es decir, transitar de la Geometría al Álgebra mediante la metodología cartesiana, siguiendo unas pautas que Descartes ya había insinuado en las Reglas XVII–XXI de las *Regulae* :

a) Suponer el problema resuelto.

b) Dar nombre a todos los segmentos que parecen necesarios.

El propio *Análisis* nos ayudará a determinar quiénes son éstos, tanto los conocidos –datos– como los desconocidos –incógnitas– sin considerar ninguna diferencia entre ellos.

Estos dos primeros pasos corresponden al *Análisis* en sentido de Pappus. Ahora examinando el problema, siguiendo un orden basado en la intuición o en el *Análisis* anterior, estableciendo las relaciones que existen entre las diversas segmentos –los conocidos y los desconocidos– hemos de conseguir expresar un mismo segmento por medio de dos expresiones algebraicas diferentes, lo que permite realizar la *Síntesis*, es decir:

c) Determinar la ecuación entre las longitudes conocidas y las desconocidas.

Finalmente para resolver de forma definitiva el problema quedan dos pasos:

d) Resolver la ecuación resultante.

e) Construir geométricamente la solución.

Al plantearse problemas geométricos en la *Síntesis* se han de obtener soluciones geométricas para cuya construcción el Álgebra será el instrumento analítico esencial.

Así pues, ante un problema geométrico se aplicará todo un protocolo de actuación –el método cartesiano–: se empieza suponiendo el problema resuelto y se consideran las relaciones entre las líneas, lo que lleva al establecimiento de las ecuaciones, es decir, el estudio analítico se complementa con la síntesis algebraica que lleva a la construcción de la solución. El Análisis y el Álgebra que están ordenados al estudio y conocimiento de la figura, permiten traducir los datos geométricos de forma que sean tratables por medio del cálculo algebraico; se concluye el problema de Álgebra planteando y resolviendo las ecuaciones y finalmente los resultados obtenidos deben ser traducidos de nuevo al lenguaje geométrico, operación que nos da por fin la construcción de la solución.

Enseguida Descartes realiza una caracterización algebraica de los *Problemas Planos*:

Cuáles son los problemas planos.

«*Si éste puede ser resuelto por la geometría ordinaria, es decir, sin servirse más que de líneas rectas y circulares trazadas sobre una superficie plana, cuando la última ecuación haya sido enteramente desarrollada, no quedará, al fin, más que un cuadrado desconocido, igual a lo que resulta de la adición, o sustracción, de su raíz multiplicada por alguna cantidad conocida* [coeficiente]*, más alguna otra cantidad también conocida* [término independiente]» (G.AT,VI, 374).

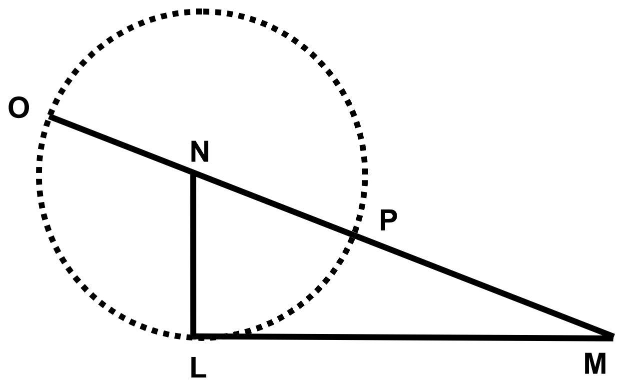
Descartes establece aquí una primera relación entre los problemas de construcción y los de clasificación –que tanta importancia tendrá en el Libro II– relacionando claramente un tipo concreto de expresiones algebraicas con los instrumentos que permiten trazar determinadas construcciones. En una primera trasferencia de la Geometría al Álgebra, si un problema geométrico lleva a una ecuación cuadrática, será resoluble con regla y compás, pero Descartes trasciende esta obviedad, identificando totalmente una cuestión geométrica con una cuestión algebraica al establecer que cualquier problema geométrico resoluble con regla y compás conduce a una última ecuación que necesariamente es cuadrática.

Vamos a ver concretamente cómo resuelve Descartes las ecuaciones cuadráticas que corresponden a los *Problemas Planos* y que son las únicas que Descartes trata en el Libro I.

***Cómo se resuelven* [las ecuaciones que resultan de los problemas Planos]**

(G.AT,VI, 374-376)

«[...] *Si se tiene, por ejemplo $z^2 = az + bb$, construyo el triángulo rectángulo NLM, cuyo lado LM es igual a b, raíz cuadrada de la cantidad conocida bb, y el otro LN es* (1/2)*a, la mitad de la otra cantidad conocida, que está multiplicada por z, que supongo ser la línea desconocida. Luego, prolongando MN, base de ese triángulo, hasta O, de modo que NO sea igual a NL, la línea total OM es z, la línea buscada; ella se expresa:*



$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$$

Si se tuviera $yy = -ay + bb$, e y fuera la cantidad que debe encontrarse, se construye el mismo triángulo rectángulo NLM y de la base MN se quita NP, igual a NL; el resto PM es y, la raíz buscada. De modo que tengo

$$y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$$

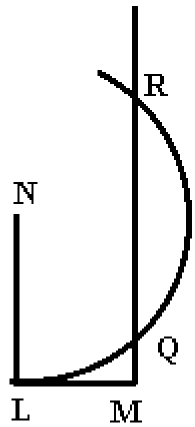
Y lo mismo, si tuviera $x^4 = -ax^2 + b^2$, PM sería x^2 y tendría

$$x = \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$$

y así otros casos.

En fin, si tuviera $z^2 = ax - bb$

se hace NL igual a (1/2)*a, y LM igual a b, como anteriormente; luego, en vez de unir los puntos M y N, se traza MQR paralela a LN y trazando un círculo con centro en N y que pase por L la cortará en los puntos Q y R; la línea buscada z es MQ, o bien MR, pues en este caso ella se expresa de dos maneras, a saber:*



$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$$

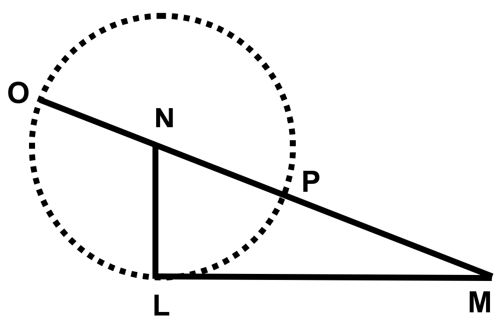
$$z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$$

Y si el círculo que tiene su centro en N y pasa por el punto L no corta ni toca la línea recta MQR, no hay ninguna raíz de la ecuación, de manera que puede asegurarse que la construcción del problema propuesto es imposible.

Por otra parte, estas mismas raíces se pueden encontrar por una infinidad de otros medios y he indicado aquí solamente esos muy simples, a fin de mostrar que se pueden construir todos los problemas de la geometría ordinaria, sin hacer más que lo poco que está comprendido en las cuatro figuras que he explicado. No creo que los antiguos lo hayan observado; pues en tal caso ellos no hubieran escrito libros tan voluminosos en que el solo orden de las proposiciones nos muestra que no poseían el verdadero método para resolverlas todas, sino que solamente han recopilado las que habían resuelto.»

Situándose en la tradición, Descartes estudia y resuelve los tres tipos clásicos de ecuaciones $z^2=az+bb$, $yy= -ay+bb$, $z^2=ax-bb$, que, como se sabe, antes de Vieta, eran considerados con coeficientes numéricos concretos y positivos, resultando equivalentes a los tres tipos tradicionales de ecuaciones: $z^2=az+b$, $z^2+az=b$, $z^2+b=az$, con a,b positivos, que en el Álgebra Geométrica griega tenían su forma particular de resolución, como tenían, asimismo, en la matemática árabe, cada uno de los tipos, su propio algoritmo de resolución. Pues bien, ahora Descartes, manteniendo por esta vez la homogeneidad, nos brinda la resolución geométrica de cada uno de los casos posibles. Para cada caso, siguiendo el algoritmo algebraico de resolución bien conocido, podríamos obtener el valor del segmento solución z expresado por las correspondientes operaciones con radicales, de donde se advierte que todas las operaciones que intervienen son resolubles, a partir de los segmentos dados, a,b, utilizando sólo la regla y el compás. No obstante, Descartes procede de forma geométrica construyendo para cada caso el segmento solución, por eso no puede considerar todos los tipos de ecuaciones cuadráticas (por ejemplo no estudia la ecuación $z^2+az+b^2=0$ porque no tiene raíces positivas), y de las que resuelve sólo tiene en cuenta las soluciones positivas que son las únicas construibles.

Por otra parte, Descartes dice que «*estas mismas raíces se pueden encontrar por una infinidad de otros medios*». Y la verdad es que a veces no específica exactamente cómo obtiene la construcción geométrica del segmento solución si aplicando el *Teorema de Pitágoras* o la invariancia de la potencia de un punto respecto de la circunferencia. La equivalencia de ambas aplicaciones deja la construcción geométrica cartesiana en cierta ambigüedad.



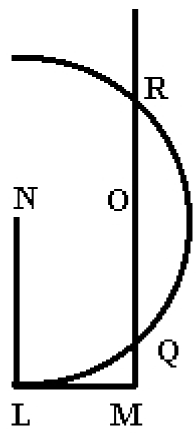
Así en la primera ecuación $z^2=az+bb$, Descartes procede geométricamente indicando cómo puede construir el segmento de longitud z. Construye un triángulo rectángulo NLM cuyos catetos están determinados por los coeficientes de la ecuación: LM=b, LN=(1/2)a y con centro en N traza una circunferencia de radio NL=a que es cortada por la prolongación de la hipotenusa MN en el punto O, resultando que el segmento OM es la recta buscada z.

En efecto: MO=MN+NO. Pero por el Teorema de Pitágoras $MN=\sqrt{NL^2+LM^2}$, de modo que sustituyendo cada recta por su longitud tenemos la expresión algebraica indicada:

$$z=\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}.$$

Ahora bien, aplicando la invariancia de la potencia de un punto respecto de la circunferencia (*Euclides,* III.36) se tiene: $MO \cdot MP=ML^2$, es decir, $z\cdot(z–a)=bb$, expresión equivalente a la ecuación dada $z^2=az+bb$.

La construcción geométrica de la solución de la última ecuación $z^2=az–bb$ es un poco más complicada. Construidos de los elementos geométricos de la figura como indica Descartes, a partir de los segmentos medidos por los coeficientes de la ecuación NL=(1/2)a y LM=b, se aplica la invariancia de la potencia de un punto respecto de la circunferencia: $MR\cdot MQ=LM^2$.



Si z=MR, tenemos que MQ=a–z, y por tanto: $z\cdot(a–z)=b^2$, es decir, $z^2=az–bb$, por tanto el segmento z=MR es una línea solución.

Si z=MQ, tenemos que MR=a–z, y por tanto: $z\cdot(a–z)=b^2$, es decir, $z^2=az–bb$, por tanto el segmento z=MR es una línea solución.

Ahora si O es el punto medio de QR tenemos:

$z_1=MQ=OM–OQ = \frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}aa-bb}$

$z_2=MR=MO+OR = \frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa-bb}$

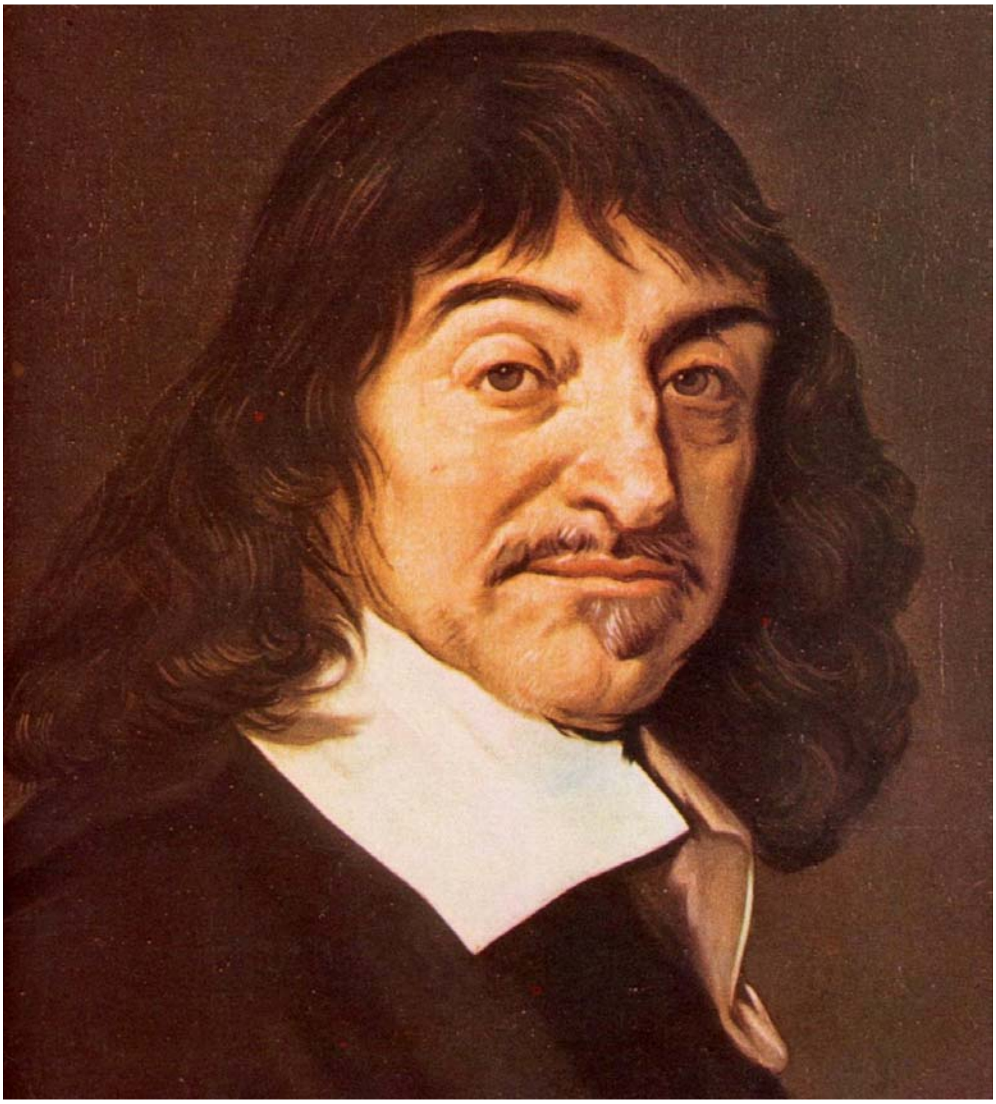
Descartes construye las dos raíces porque ambas son positivas.

Si MR es tangente al círculo, es decir si b=(1/2)a, las raíces son iguales; mientras que si b>(1/2)a, la línea MR no cortará al círculo y entonces no hay raíces. Descartes expresa esto en un lenguaje tributario todavía de los geómetras griegos:

> «*Y si el círculo que tiene su centro en N y pasa por el punto L no corta* [no es secante] *ni toca* [no es tangente] *la línea recta MQR, no hay ninguna raíz de la ecuación, de manera que puede asegurarse que la construcción del problema propuesto es imposible.*»

Vemos cómo Descartes ha vinculado íntimamente el Álgebra con la Geometría, hasta el punto de extraer conclusiones geométricas de un hecho estrictamente algebraico –si la ecuación no tiene solución el problema geométrico no se puede construir, porque «*encontrar la solución*» es «*construir la línea*»–. Los principios del método cartesiano aplicados a la Geometría inician los problemas geométricos por un proceso intermedio de escritura algebraica que revierte finalmente sobre la geometría del problema conduciendo a la construcción de la línea solución. Es esta intermediación del Álgebra lo que más se echa de menos en la Geometría griega, por eso después de la resolución constructiva de las ecuaciones, Descartes hace un soberbio alarde de la magnificencia de los métodos de su *Geometría* en contraposición con la precariedad de la Geometría de los griegos. Según él, puede construir todos los problemas de la Geometría ordinaria con las escasas cuatro figuras que ha explicado (G.AT,VI, 376), mientras que el abstruso orden de las complejas proposiciones de los voluminosos libros de la Geometría griega era una prueba palmaria de que los antiguos –según Descartes– no disponían de método. En efecto, la Geometría griega no pudo disponer de la claridad, simplicidad, flexibilidad, versatilidad y capacidad algorítmica que proporciona el Álgebra simbólica que manejó Descartes, de ahí la prolija dificultad de la *Aplicación de las Áreas* con la que el Álgebra Geométrica de los griegos resolvía de ecuaciones mediante comparación de áreas.

SÍNTESIS DEL PROGRAMA DE REFORMA CARTESIANA DE LA GEOMETRÍA A TRAVÉS DE LOS TEXTOS DE DESCARTES



Retrato de Descartes atribuido a F.Hals. Museo de Louvre.Tal vez es el retrato más célebre de un filósofo. aunque no se puede decir con certeza que sea Descartes ni que sea de F.Hals. Impresiona por su penetrante e inteligente mirada.

Ejercitar el entendimiento sin fatigar mucho la imaginación (DM.AT,VI, 17–18).

- **Fundir el Análisis Geométrico de los antiguos («*siempre tan constreñido a considerar las figuras*») [DM.AT,VI.17)] con el Álgebra de los modernos («*que se ha hecho un arte confuso y oscuro*» [DM.AT,VI.17)]; «*para buscar otro método que, reuniendo las ventajas de éstos, estuviese libre de sus defectos*» [DM.AT,VI.18].**
- **Introducir las coordenadas: «*Todos los problemas de Geometría pueden reducirse fácilmente a términos tales, que no es necesario conocer de antemano más que la longitud de algunas líneas rectas para construirlos*» [G.AT,VI, 369].**
- **Reconstruir de forma geométrico-algebraica las operaciones aritméticas, es decir, mostrar «*cómo el cálculo de la aritmética se relaciona con las operaciones de la geometría*» [G.AT,VI, 369].**
- **Introducir una revolucionaria simplificación en la notación:**
  - **«*Explicarlas mediante algunas cifras lo más cortas que fuera posible*» [DM.AT,VI,20].**
  - **Indicar «*cómo pueden emplearse letras en geometría*» [G.AT,VI,371].**
  - **«[...], *escribiremos en el papel cuanto haya de ser retenido; y ello por medio de signos muy breves* [RXVI.AT.X.454–455]**
- **Enseñar «*cómo se llega a las ecuaciones que sirven para resolver los problemas*» [G.AT,VI,372]; y «*cómo se resuelven*» [G.AT,VI,374] estas ecuaciones –es decir, cómo se construyen las soluciones–.**

Mediante estas tareas, Descartes «*tomaría lo mejor del Análisis geométrico y del Álgebra y corregiría los defectos del uno por medio de la otra*» [DM.AT,VI, 20].

DESCARTES EN LA PRENSA

Caricatura de Descartes que publicó el 23 de marzo de 1996 la sección de PENSAMIENTO de la revista LA ESFERA del Diario *EL MUNDO* de Madrid, con motivo del cuarto centenario de su nacimiento.

Sistemas de referencia. El Problema de Pappus

Hasta aquí, Descartes ha elaborado un potente método analítico-sintético de ataque de los problemas geométricos que utiliza el Álgebra como instrumento algorítmico y con el que se propone no sólo rehacer la Geometría griega sino ir mucho más allá en la resolución de antiguos y nuevos problemas geométricos. Por eso se plantea al final del Libro I el abordaje del famoso *problema de Pappus de las tres o cuatro rectas*, que tan firmemente se había resistido a los geómetras griegos, y que siendo generalizado a 2n–1, 2n rectas campea a lo largo de *La Geometría* de Descartes.

En el estudio de este problema nos ceñiremos a aspectos que incidan sobre los orígenes de la Geometría Analítica, en particular la aparición de los sistemas de referencia y las coordenadas.

Ejemplo tomado de Pappus (G.AT,VI, 377-380)**:**

> «*Y esto* [la insuficiencia de los métodos de la Geometría griega] *puede verse bien claramente en lo que Pappus ha puesto al principio de su Libro VII, donde después de haberse detenido a citar todo lo que había sido escrito en geometría por los que lo habían precedido, habla finalmente de un problema que, según dice, ni Euclides ni Apolonio habían podido resolver enteramente*; *he aquí sus propias palabras*: [...]»

Descartes transcribe el enunciado del problema en latín y hace una observación:

> «*Os ruego que observéis de paso que el escrúpulo que tenían los antiguos en emplear los términos de la aritmética en la geometría, no podía provenir más que de no ver ellos claramente su relación, lo que producía bastante oscuridad y confusión en la forma como se expresaban*; [sigue el texto latino].»

En la Geometría griega, los segmentos rectilíneos no tenían longitud ante la eventualidad de la inconmensurabilidad y como consecuencia las «*operaciones*» con los segmentos daban rectángulos y paralelepípedos, que eran objetos de naturaleza estrictamente geométrica imposibles de confundir con el producto de las longitudes de sus lados, ya que, hasta Diofanto, estaba ausente el sentido aritmético de las operaciones. De ahí las limitaciones del respeto a la homogeneidad y de la acotación tridimensional. La gran innovación de Descartes es la asignación de una longitud a los segmentos lo que permite su manipulación algebraica operacional: «[...] *es de señalar que para* a^2 o b^3 *u otras expresiones semejantes, yo no concibo ordinariamente más que líneas simples* [...]» (G.AT,VI, 371). Con base en esto Descartes no tiene ningún prejuicio geométrico en hablar en el *Problema de Pappus* del «*producto de cuatro líneas rectas, de cinco o de más*», es decir, Descartes no sólo resolverá el problema clásico, sino que además realiza su más amplia generalización.

Continúa Descartes escribiendo su propio enunciado del *Problema de Pappus*:

> «*Así pues, la cuestión que Euclides había empezado a resolver y que Apolonio había proseguido sin que nadie la hubiera terminado, era ésta: Dadas tres, cuatro o más rectas, se trata de encontrar un punto del que se puedan trazar otras tantas líneas rectas, una sobre cada una de las dadas, y haciendo con ellas ángulos dados, y que el rectángulo formado por dos de esas así trazadas desde el punto, tenga una proporción dada con el cuadrado de la tercera, si no hay más que tres; o bien con el rectángulo de las otras dos, si hubiera cuatro; o bien si hay cinco que el paralelepípedo compuesto por tres tenga la proporción dada con el paralelepípedo formado por las dos que restan y por otra línea dada. [...]. Y así este problema se puede extender a todo número de líneas. Pero, a causa de que hay siempre una infinidad de diversos puntos que pueden satisfacer lo que aquí se pide, se requiere también conocer y trazar la línea sobre la cual deben todos ellos encontrarse; y Pappus dice que cuando no hay más que tres o cuatro líneas rectas dadas, es una de las tres secciones cónicas, pero él no trata de determinarla ni describirla; ni explicar la línea en que los puntos deben encontrarse cuando el problema está propuesto para un mayor número de líneas.*»

Respuesta al problema de Pappus (G.AT,VI, 380-382)

«*He comprendido ante todo, que planteado el problema para tres, cuatro o cinco líneas, se puede siempre encontrar los puntos buscados, por la geometría simple, es decir sin servirse más que de la regla y el compás, ni hacer otra cosa que lo ya dicho; excepto solamente cuando, siendo cinco las líneas, ellas son todas paralelas.*

..

Y he encontrado que cuando no hay más que tres o cuatro líneas dadas, los puntos buscados se encuentran todos no solamente en una de las tres cónicas sino a veces en la circunferencia de un círculo o en una línea recta.

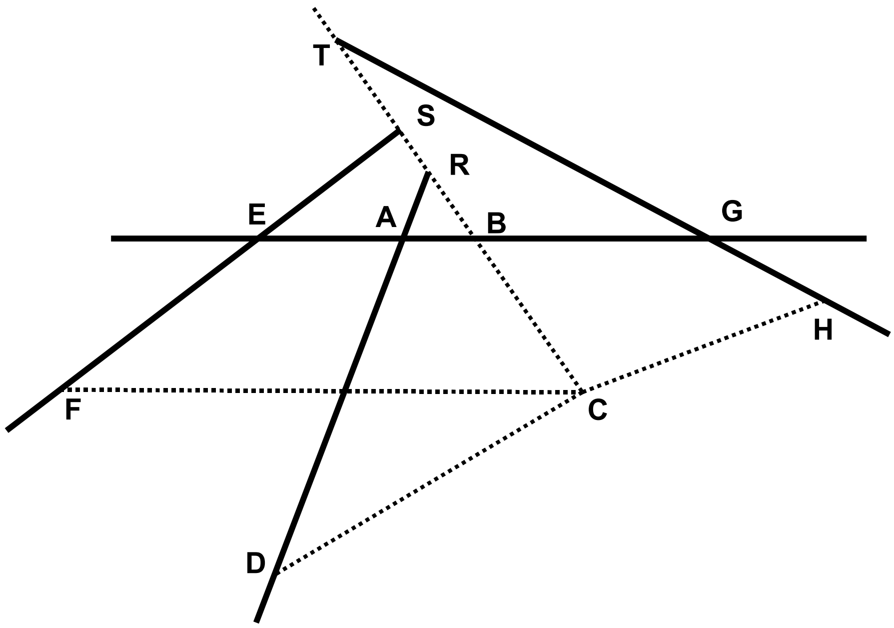
..

De modo que pienso haber satisfecho enteramente lo que Pappus nos dice haber sido buscado por los antiguos, trataré de dar la demostración en pocas palabras: pues ya me cansa tanto escribir.

Sean AB, AD, EF, GH, etc., varias líneas dadas y debe encontrarse un punto, como C, del cual trazando otras líneas a las dadas, como CB, CD, CF y CH, de manera que los ángulos CBA, CDA, CFE, CHG, etc. Sean dados, y que el producto de la multiplicación de una parte de estas líneas, sea igual al producto de la multiplicación de las otras; o bien que ellas tengan otra proporción dada, lo que no hace, en modo alguno, más difícil el problema.»

Cómo deben ponerse los términos para llegar a la ecuación de este ejemplo
(G.AT,VI, 382-385)

«*Primeramente yo supongo la cosa como ya hecha y para salir de la confusión de todas esas líneas, considero una de las dadas y una de las que hay que encontrar, por ejemplo AB y CB como las principales y a las cuales trato de referir todas las otras. Sea designado x el segmento de la línea AB comprendido entre los puntos A y B; y CB sea designado y; y todas las demás líneas se prolonguen hasta que corten a estas dos también prolongadas, si es necesario y si no le son paralelas; como se ve cortan la línea AB en los puntos A, E, G y la línea BC en los puntos R, S, T*.»



He aquí uno de los puntos de mayor interés de *La Geometría* de Descartes. Empieza el análisis:

a) se supone el problema resuelto,
b) se da nombre a todos los segmentos necesarios para representarlos, tanto los conocidos como los desconocidos,
c) se reconstruye algebraicamente el problema hasta obtener una ecuación que permitirá alcanzar la síntesis.

Pero para facilitar el proceso *Análisis-Síntesis*, Descartes introduce el primer sistema de coordenadas de *La Geometría* (G.AT,VI, 383):

> «[...] *Considero una de las dadas y una de las que hay que encontrar, por ejemplo AB y CB como las principales y a las cuales trato de referir todas las otras.*»

Los números $x = \overline{AB}$, $y = \overline{CD}$ son las «*coordenadas*» del punto C en el sistema de referencia establecido.

A continuación del texto (G.AT,VI, 383-385), Descartes utiliza el sistema de referencia introducido para obtener, mediante una serie de cálculos elementales aunque prolijos, la expresión de cada uno de los segmentos que dan las distancias (CB, CD, CF, CH). Resultan ser todas ellas ser combinaciones afines (diríamos hoy) de «*las coordenadas*» (x,y) del punto C, es decir, de la forma Ax+By+C, donde A, B, C, son cantidades no nulas, salvo cuando hay relaciones de paralelismo:

> «*Se ve así que cualquiera que sea el número de líneas dadas, todas las líneas trazadas desde C, que forman ángulos dados, conforme al enunciado, se pueden siempre expresar, cada una por tres términos de los que uno está compuesto por la cantidad desconocida y multiplicada o dividida por alguna otra conocida, y la otra, de la cantidad desconocida x, también multiplicada o dividida por alguna otra conocida y la tercera, de una cantidad toda conocida.*
>
> *Además se ve que multiplicando varias de estas líneas entre sí, las cantidades x e y que se encuentran en el producto, no pueden tener cada una más que tantas dimensiones como líneas haya.*»

Así pues, aunque Descartes no lo explicita, en el caso de tres o cuatro rectas el problema equivaldría a una ecuación cuadrática de la forma: $Ax^2+Bxy+Cy^2+dx+ey+f=0$. De esta forma aperecerían por primera vez las curvas como lugares geométricos definidos por ecuaciones, en el umbral del Libro II de *La Geometría*.

Utilizando métodos de la Geometría Analítica moderna, en particular la forma normal de la ecuación de la recta, podemos resolver fácilmente el problema de tres líneas, por ejemplo, encontrando que el lugar geométrico es una cónica. Sean $a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$, $a_3x+b_3y+c_3=0$ las ecuaciones de las rectas, y α_1, α_2, α_3, los ángulos que dan las direcciones sobre las que se deben medir las distancias. El lugar geométrico del punto C(x,y) viene dado por la ecuación:

$$\frac{\left(a_1x+b_1y+c_1\right)^2}{\left(a_1^2+b_1^2\right)\operatorname{sen}^2\alpha_1} = K\frac{\left(a_2x+b_2y+c_2\right)^2}{\sqrt{\left(a_2^2+b_2^2\right)}\operatorname{sen}\alpha_2}\cdot\frac{\left(a_3x+b_3y+c_3\right)^2}{\sqrt{\left(a_3^2+b_3^2\right)}\operatorname{sen}\alpha_2}$$

Sigue el texto de Descartes demostrando que si lo que buscamos es un solo punto (para el problema de menos de cinco rectas) el problema es plano, ya casi al final del Libro I:

Cómo se encuentra que este problema es plano cuando no está propuesto para más de cinco líneas

(G.AT,VI, 385-387)

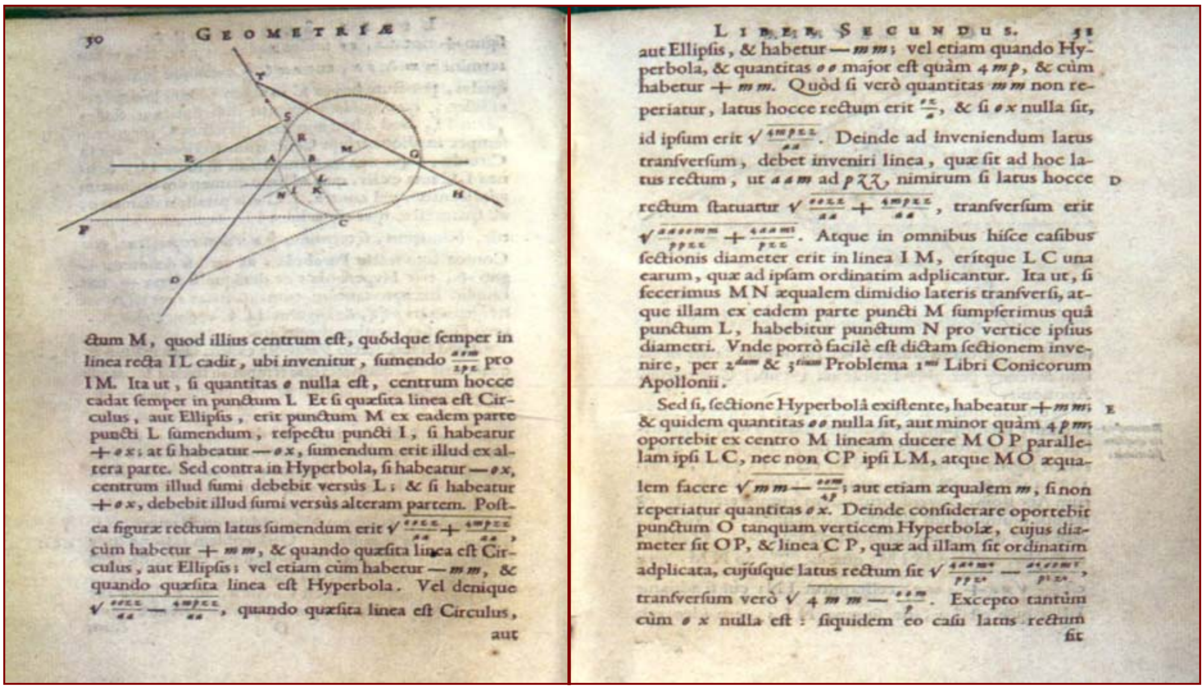
> «*Además, a causa de que para determinar el punto C no hay más que una sola condición requerida [la de la igualdad de las multiplicaciones de líneas], puede tomarse a discreción una de estas cantidades desconocidas x o y, y buscar la otra por la ecuación, en la cual es evidente que cuando el problema no está propuesto para más de cinco líneas, la cantidad x que no es utilizada para la expresión de la primera de las líneas nunca puede tener más de dos dimensiones. De modo que tomando y como una cantidad conocida tendremos:*

xx = + o – ax + o –bb [$x^2 = \pm ax \pm b^2$]

y así se podrá encontrar la cantidad x con la regla y el compás de la manera ya explicada. Lo mismo tomando sucesivamente infinitos valores para la línea y, podemos hallar otros tantos para la línea x; y así se tendrá una infinidad de diversos puntos tales como el que se ha señalado con C, por medio de los cuales se describirá la línea curva pedida.»

Nuevamente debemos señalar aquí otro de los puntos de mayor interés de *La Geometría* de Descartes: una aproximación al concepto de función a través de la expresión analítica de una ecuación. Por ejemplo para cuatro rectas la consideración de las coordenadas del punto C=(x,y), nos lleva a una ecuación polinómica de segundo grado F(x,y)=0, que representa una infinidad de pares (x,y) que satisfacen el problema de las cuatro rectas. Tal ecuación es una expresión matemática bien definida que depende de dos variables x, y, de modo que conociendo una de ellas se puede hallar rigurosamente la otra –tras la resolución algebraica de una ecuación de lo que se ocupará Descartes en el Libro III para grados superiores–, lo que equivale a la determinación geométrica del punto C. Así pues, el conocimiento de la ecuación permite conocer los puntos de la curva. Todavía no hay una identificación de la curva con la ecuación, Descartes sólo ha introducido el concepto de curva definida por puntos y esperará al Libro II de *La Geometría* para estudiar ampliamente el problema y establecer cuáles son las razones geométricas que permiten considerar una expresión como una representación de una curva.

EL *PROBLEMA DE PAPPUS*



30 GEOMETRIÆ

ſtum M, quod illius centrum eſt, quódque ſemper in linea recta IL cadit, ubi invenitur, ſumendo $\frac{aom}{2pz}$ pro IM. Ita ut, ſi quantitas *o* nulla eſt, centrum hocce cadat ſemper in punctum I. Et ſi quæſita linea eſt Circulus, aut Ellipſis, erit punctum M ex eadem parte puncti L ſumendum, reſpectu puncti I, ſi habeatur + *ox*; at ſi habeatur — *ox*, ſumendum erit illud ex altera parte. Sed contra in Hyperbola, ſi habeatur — *ox*, centrum illud ſumi debebit versùs L; & ſi habeatur + *ox*, debebit illud ſumi versùs alteram partem. Poſtea figuræ rectum latus ſumendum erit $\sqrt{\frac{oozz}{aa}+\frac{4mpzz}{aa}}$, cùm habetur + *mm*, & quando quæſita linea eſt Circulus, aut Ellipſis; vel etiam cùm habetur — *mm*, & quando quæſita linea eſt Hyperbola. Vel denique $\sqrt{\frac{oozz}{aa}-\frac{4mpzz}{aa}}$, quando quæſita linea eſt Circulus, aut

LIBER SECUNDUS. 31

aut Ellipſis, & habetur — *mm*; vel etiam quando Hyperbola, & quantitas *oo* major eſt quàm 4*mp*, & cùm habetur + *mm*. Quòd ſi verò quantitas *mm* non reperiatur, latus hocce rectum erit $\frac{oz}{a}$, & ſi *ox* nulla ſit, id ipſum erit $\sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$. Deinde ad inveniendum latus tranſverſum, debet inveniri linea, quæ ſit ad hoc latus rectum, ut *aam* ad *pzz*, nimirum ſi latus hocce rectum ſtatuatur $\sqrt{\frac{oozz}{aa}+\frac{4mpzz}{aa}}$, tranſverſum erit $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz}+\frac{4aam^3}{pzz}}$. Atque in omnibus hiſce caſibus ſectionis diameter erit in linea IM, eritque LC una earum, quæ ad ipſam ordinatim adplicantur. Ita ut, ſi fecerimus MN æqualem dimidio lateris tranſverſi, atque illam ex eadem parte puncti M ſumpſerimus quâ punctum L, habebitur punctum N pro vertice ipſius diametri. Vnde porrò facilè eſt dictam ſectionem invenire, per 2dam & 3tiam Problema 1mi Libri Conicorum Apollonii. D

Sed ſi, ſectione Hyperbolâ exiſtente, habeatur + *mm*; E & quidem quantitas *oo* nulla ſit, aut minor quàm 4*pm*, oportebit ex centro M lineam ducere MOP parallelam ipſi LC, nec non CP ipſi LM, atque MO æqualem facere $\sqrt{mm-\frac{oom}{4p}}$; aut etiam æqualem *m*, ſi non reperiatur quantitas *ox*. Deinde conſiderare oportebit punctum O tanquam verticem Hyperbolæ, cujus diameter ſit OP, & linea CP, quæ ad illam ſit ordinatim adplicata, cujúſque latus rectum ſit $\sqrt{\frac{4a^4m^4}{ppz^4}-\frac{a^4oom^3}{p^3z^4}}$, tranſverſum verò $\sqrt{4mm-\frac{oom}{p}}$. Excepto tantùm cùm *ox* nulla eſt: ſiquidem eo caſu latus rectum ſit

El *Problema de Pappus.* Edición latina de van Schooten de *La Geometría* de Descartes, 1659.

El *Problema de Pappus* –llamado en su enunciado más sencillo *lugar de tres o cuatro rectas*–, es una de las cuestiones más importantes de toda la Historia de la Geometría, por ser la piedra de toque de aplicación de los diversos métodos y técnicas geométricas. Planteado por los geómetras griegos a partir de Euclides, estudiado por Apolonio y Pappus, su dificultad desbordaba, siglo tras siglo, las posibilidades del Análisis geométrico griego. La cuestión campea a lo largo de *La Geometría*, como si fuera su punto de inspiración, casi como un reto a alcanzar; y será Descartes quien lo resuelva de forma brillante y general poniendo de manifiesto la potencia de unos métodos analíticos, que en el curso de los años se convertirán en la esencia de la Geometría Analítica.

Las rectas normales a una curva. El Método del círculo

Descartes desarrolla en el Libro II de La Geometría (G.AT,VI, 412-423) un método para el trazado de las tangentes a las líneas curvas –el llamado «*método del círculo*»–, mediante la construcción previa de la recta normal. Es sin duda uno de los más significativos problemas de aplicación del método cartesiano, con el que, además, Descartes participa e interviene, a través de su celebre polémica con Fermat, en el ámbito matemático de la primera parte del siglo XVII, muy ocupado en la resolución del problema del trazado de las tangentes a las líneas curvas.

Una vez concebida y definida en la primera parte del Libro II, de forma clara y distinta, *la naturaleza geométrica de las líneas curvas*, Descartes introduce uno de los principios básicos de su método ponderando su importancia en la resolución de los problemas sobre curvas (G.AT,VI, 412-413):

Para encontrar todas las propiedades de las líneas curvas basta con saber la relación que tienen todos sus puntos con los de las líneas rectas, y la manera de trazar otras líneas que las corten en todos esos puntos en ángulo recto.

«*Luego con sólo saber la relación que tienen todos los puntos de una línea curva con todos los de una línea recta, en la forma que he explicado, es fácil también conocer la relación que ellos tienen con todos los otros puntos y líneas dadas; y, por lo tanto, conocer los diámetros, los ejes, los centros, y otras líneas o puntos que tengan con la línea curva alguna relación particular, o más simple que otros; y, de ahí imaginar diversos modos de describirlas, y elegir los más fáciles. Y también, con sólo esto, se puede aun, encontrar casi todo lo que puede ser determinado respecto a la medida del espacio que abarcan, sin que haya necesidad de que yo me extienda más. Y, por último, en lo que respecta a todas las otras propiedades que pueden atribuirse a las líneas curvas, ellas no dependen más que de la magnitud de los ángulos que ellas forman con otras líneas. Pero, cuando puedan trazarse líneas rectas que las cortan en ángulo recto* [normales], *en los puntos en que se encuentran con aquéllas con las que forman los ángulos que se quieren medir, o, lo que aquí tomo como igual, en que ellas cortan sus contingentes* [tangentes], *la magnitud de esos ángulos no es más difícil de encontrar que si ellos estuvieran comprendidos entre dos líneas rectas. Creo por esto haber dado aquí todo lo que se requiere para los elementos de la líneas curvas, cuando haya expuesto la manera general de trazar líneas rectas que las corten en ángulos rectos en los puntos* [de las curvas] *que de ellas se elijan. Y me atrevo a decir que éste es el problema más útil y más general no sólo que yo conozca, sino aun que yo haya anhelado jamás conocer en Geometría.*»

Descartes determina que «p*ara encontrar todas las propiedades de las líneas curvas basta con saber la relación que tienen todos sus puntos con los de las líneas rectas*», descrita por medio de una expresión –que es la ecuación de la curva–, y establece cómo se puede utilizar esta expresión algebraica para encontrar los elementos geométricos más notables de las curvas –diámetros, ejes, centros, etc.– y, en particular, las normales y tangentes. Con ello, Descartes enuncia uno de los principios fundamentales de la llamada Geometría Analítica: el conocimiento de la relación que liga las coordenadas de los puntos –los segmentos o «*las líneas rectas*» a las que alude– de una curva, es decir, la ecuación de la curva, es un elemento esencial para dilucidar y desentrañar las propiedades y elementos de la curva. La ecuación de la curva realiza un tránsito de la Geometría al Álgebra, que, por su carácter operacional, permite, realizando cálculos y en particular resolviendo ecuaciones, regresar a la Geometría, para encontrar y solucionar cuestiones geométricas, de modo que se fija una correspondencia entre las propiedades algebraicas de la ecuación y las propiedades geométricas de la curva asociada. Como consecuencia, la tarea de probar un teorema en Geometría se traslada de forma muy eficiente a probarlo en Álgebra y, además, ésta se convierte en un poderoso instrumento de investigación geométrica. Pues bien, en este lugar, Descartes aplica toda esta filosofía geométrico-algebraica a encontrar las rectas normales de las líneas curvas.

De pasada Descartes define el ángulo entre dos curvas en un punto como el ángulo que forman las normales en ese punto, además, añade de soslayo la frase (G.AT,VI, 413):

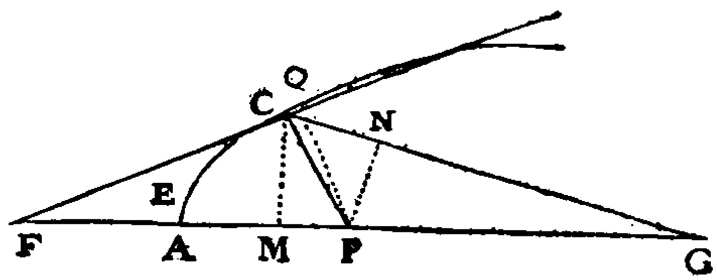
> «[...] *Con sólo esto, se puede aun, encontrar casi todo lo que puede ser determinado respecto a la medida del espacio que abarcan*»,

de modo que el asunto se podría aplicar al cálculo de áreas determinadas por curvas de las que se conoce la ecuación, es decir, al otro problema candente en los círculos matemáticos de la primera parte del siglo XVII, el cálculo de cuadraturas, problema al que Descartes no presta atención alguna en su obra matemática.

A continuación Descartes entra directamente en el problema. Curiosamente utiliza la notación anterior xx para indicar x^2, en cambio adopta la notación potencial x^n para el resto de las potencias. Transcribiremos el texto de Descartes utilizando una notación uniforme x^n para todas las potencias(G.AT,VI, 413-414):

Manera general de encontrar líneas rectas que corten las curvas dadas o sus tangentes, formando ángulos rectos.

«*Sea CE la línea curva y que deba trazarse una recta por el punto C que forma con ella ángulos rectos.*



Supongamos que la cosa está hecha y que la línea buscada es CP, que prolongo hasta el punto P en que encuentra a la línea recta GA que supongo ser aquella a cuyos puntos se refieren todos los de la línea CE; de manera que haciendo MA o CB=y, y CM o BA=x, hay alguna ecuación que explica la relación que existe entre x e y *[el punto B no figura en el dibujo; guiándose por las siguientes figuras, se obtendría como intersección de la perpendicular a AM por A y la paralela a AM por C].*

Luego haciendo PC=s, PA=v, o bien PM=v–y, por el triángulo rectángulo PMC obtengo s^2, que es el cuadrado de la base, igual a $x^2+v^2-2vy+y^2$, que son los cuadrados de los dos lados; es decir que tengo

$$x = \sqrt{s^2 - v^2 + 2vy - y^2}$$

o bien

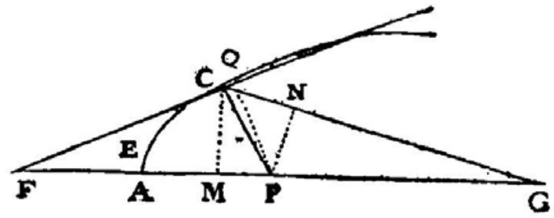
$$y = v + \sqrt{s^2 - x^2}$$

y por medio de esta ecuación, saco de la otra ecuación que da la relación que tienen todos los puntos de la curva CE con los de la recta GA [la ecuación de la curva], *una de las dos cantidades indeterminadas x o y; lo que es fácil de hacer poniendo* $\sqrt{s^2 - v^2 + 2vy - y^2}$ *en lugar de x, y el cuadrado de esta suma en lugar de x^2, y su cubo en lugar de x^3; y así los otros términos si es x que yo deseo sacar; o bien, si es y, poniendo en su lugar* $v + \sqrt{s^2 - x^2}$ *; y el cuadrado o el cubo, etc. De modo que quede siempre según esto, una ecuación en la cual no hay más que una sola cantidad indeterminada x o y.*

LA GEOMETRIE.

tels de leurs poins qu'on voudra choiſir. Et i'oſe dire que c'eſt cecy le probleſme le plus vtile, & le plus general non ſeulement que ie ſçache, mais meſme que i'aye iamais deſiré de ſçauoir en Geometrie.

Facon generale pour trouuer des lignes droites, qui coupent les courbes données, ou leurs contingentes, a angles droits.



Soit C E la ligne courbe, & qu'il faille tirer vne ligne droite par le point C, qui face auec elle des angles droits. Ie ſuppoſe la choſe deſia faite, & que la ligne cherchée eſt C P, laquelle ie prolonge iuſques au point P, ou elle rencontre la ligne droite G A, que ie ſuppoſe eſtre celle aux poins de laquelle on rapporte tous ceux de la ligne C E: en ſorte que faiſant M A ou C B $\propto y$, & C M, ou B A $\propto x$, iay quelque equation, qui explique le rapport, qui eſt entre x & y. Puis ie fais P C $\propto s$, & P A $\propto v$, ou P M $\propto v - y$, & a cauſe du triangle rectangle P M C iay ss, qui eſt le quarré de la baze eſgal à $xx + vv - 2vy + yy$, qui ſont les quarrés des deux coſtés. c'eſt a dire iay $x \propto \sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$, oubien $y \propto v + \sqrt{ss - xx}$, & par le moyen de cete equation, i'oſte de l'autre equation qui m'explique le rapport qu'ont tous les poins de la courbe C E a ceux de la droite G A, l'vne des deux quantités indeterminées x ou y. ce qui eſt ayſé a faire en mettant partout $\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$ au lieu d'x, & le quarré de cete ſomme au lieu d'xx, & ſon cube au lieu d'x^3, & ainſi des autres, ſi c'eſt x que ie veuille oſter; ou-

Página de la edición de 1637 de *La Geometría* de Descartes relativa al trazado de rectas normales a las curva –*método del círculo*– donde Descartes aplica uno de los Principios fundamentales de la Geometría Analítica (G.AT,VI, 412):

> «*Para encontrar todas las propiedades de las líneas curvas basta con saber la relación que tienen todos sus puntos con los de las líneas rectas*»

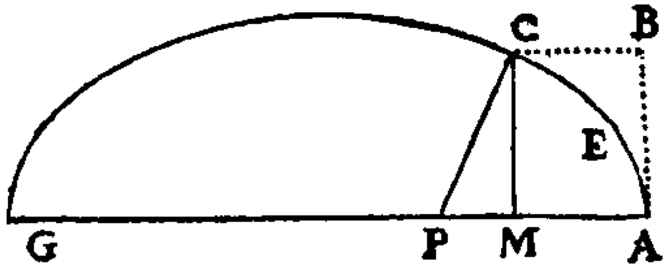
Esta frase contiene uno de los principios más importantes de la Historia de la Matemática, que instaura los fundamentos de la Geometría Analítica. La relación que liga los segmentos o «*las líneas rectas*» que hacen la función de «*coordenadas*» de los puntos de una curva, es decir, la ecuación de la curva, permite conocer las propiedades y los elementos característicos de la curva. La ecuación de la curva establece, pues, una correspondencia entre las propiedades algebraicas de la ecuación y las propiedades geométricas de la curva asociada. De esta forma la resolución de un problema de Geometría se traslada de forma muy eficaz a resolverlo en Álgebra y, además, ésta se convierte en un poderoso instrumento de investigación geométrica.

A continuación, Descartes aplica el método desarrollado a la elipse (G.AT,VI, 414):

Si fuese CE una elipse y MA el segmento de su diámetro [eje] *al cual corresponde CM, y siendo r su lado recto y q el transverso se tiene, por el teorema 13 del Libro I de Apolonio:*

$$x^2 = ry - \frac{r}{q}y^2,$$

[ecuación de la elipse referida a ejes oblicuos, siendo uno de ellos el diámetro y el otro la tangente en su extremo]



de donde sustituyendo x^2*, queda:*

$$s^2 - v^2 + 2vy - y^2 = ry - \frac{r}{q}y^2$$

o bien

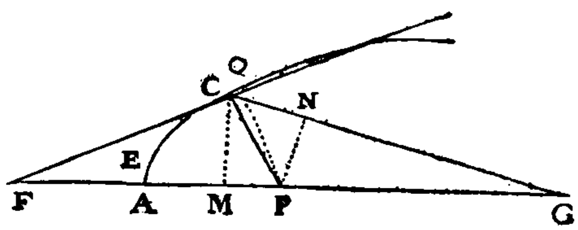
$$y^2 + \frac{qry - 2qvy + qvv - qs^2}{q - r}$$ *igual a cero*.

pues mejor, en este lugar, considerar así en conjunto toda la suma que hacer una parte igual a otra.»

Dada la curva CE de eje AG y vértice A, Descartes se plantea trazar la normal en el punto C, para lo cual debe encontrar un punto P sobre el eje AG que al trazar el segmento PC nos de la normal. De acuerdo con la metodología cartesiana, comienza el análisis del problema:

a) se considera resuelto, y b) se da nombre a los todos los segmentos que parecen necesarios: MA =y, CM=x, PC=s, PA=v.

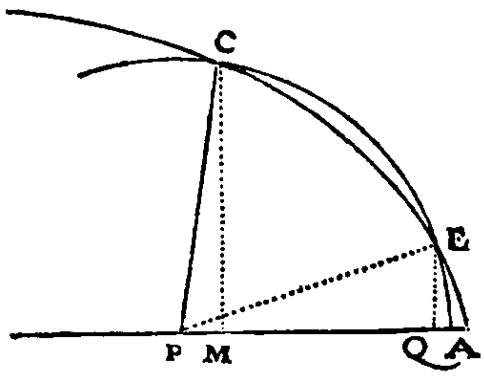
En la síntesis se indica que «[...] *Hay alguna ecuación que explica la relación que existe entre x e y*», es decir, la ecuación de la curva.



A continuación Descartes considera la circunferencia de centro el punto P y radio el segmento PC, que cortará a la curva en algunos puntos según la naturaleza de la curva. Todavía en el ámbito geométrico del problema, Descartes intuye que el segmento PC será la normal si la circunferencia es tangente a la curva en el punto C.

Descartes prosigue realizando para la parábola cálculos análogos a los de la elipse, tras lo cual vuelve al problema general en una forma que justifica que a su regla se le denomine «*método del círculo*» (G.AT,VI, 417):

> «*Ahora, después de encontrada una ecuación así, en lugar de utilizarla para conocer las otras cantidades x o y, que son ya dadas, puesto que el punto C es dado, se la debe emplear para encontrar v o s que determinan el punto P pedido. Y, a este efecto se debe considerar que si ese punto P es el punto que deseamos encontrar, el círculo del cual es centro y que pasa por el punto C, tocará a la línea curva CE sin cortarla; pero si el punto P está ya sea más próximo o más alejado del punto A de lo debido, ese círculo cortará a la curva no sólo en el punto C, sino necesariamente en algún otro. Debe también considerarse que cuando este círculo corta la línea curva CE, la ecuación por la cual se busca la cantidad x o y, o alguna semejante, suponiendo PA y PC conocidas, contiene necesariamente dos raíces, que*



> *son desiguales. Pues por ejemplo, si este círculo corta a la curva en los puntos C y E, trazando EQ paralela a CM, los nombres de las cantidades indeterminadas x e y convendrán igualmente a las líneas EQ y QA que a CM y MA, pues PE es igual a PC por ser del círculo; si bien, buscando las líneas EQ y QA por PE y PA que se suponen dadas, se tendrá la misma ecuación que si se buscara CM y MA por PC y PA, de lo que se deduce, evidentemente, que el valor de x o de y, o de cualquier otra cantidad que se suponga, será doble en esta ecuación, es decir que habrá dos raíces desiguales entre sí, de las que una será CM y la otra EQ, si es x que se busca; o bien una será MA y la otra QA, si es y; y así las otras. Es cierto que si el punto E no se encuentra del mismo lado de la curva que el punto C, no habrá más que una de estas raíces que sea verdadera y la otra será opuesta o menor que cero; pero cuanto más próximos estén estos dos puntos el uno del otro, tanto menor diferencia habrá entre las dos raíces; y, ellas serán enteramente iguales, si ellos están juntos en uno, es decir si el círculo que pasa por C toca la curva CE sin llegar a cortarla*.
>
> *Además, debe considerarse que cuando hay dos raíces iguales en una ecuación, ella tiene necesariamente la misma forma que si se multiplica por si misma la cantidad que se supone ser desconocida menos la cantidad conocida que le es igual; después de lo cual si esta última expresión tiene dimensión inferior a la de la ecuación precedente, se la multiplica por otra suma que tenga tanta dimensión como la que le falta, de modo que pueda haber ecuación separadamente entre cada uno de los términos de la una y cada uno de los de la otra.*»

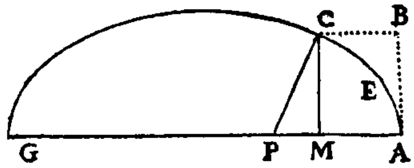
Para cada punto C de la curva hay que determinar el punto P –problema geométrico– que permite trazar el segmento PC, normal a la curva en C, es decir, hay que poner v y s en función de x e y –problema algebraico–. Suponer el problema resuelto permite determinar en un terreno algebraico la ecuación de un círculo. Regresando a la Geometría, si la recta trazada por P es la normal «*el círculo del cual es centro y que pasa por el punto C, tocará a* *la línea curva CE sin cortarla*», es decir, será tangente, cortará a la curva en un solo punto, un punto doble (en sentido actual). Ahora, volviendo al Álgebra, para que el círculo «*toque*» (sea tangente) a la curva es preciso que la ecuación resultante tenga una raíz doble. Esta ecuación resultante proviene del sistema de ecuaciones formado por la ecuación de la curva y la ecuación del círculo.

Aquí aparece otro principio fundamental de la Geometría Analítica: «la intersección de curvas –que es un problema geométrico– se reconduce a la resolución de sistemas de ecuaciones – que es un problema algebraico–.

Descartes resolverá el problema algebraico final que se plantea mediante *el método de coeficientes indeterminados*, y en este tema, así como en el asunto paralelo de las raíces dobles, también es un pionero.

Continúa Descartes aplicando el método a la elipse (G.AT,VI, 419):

> *Así, por ejemplo, digo que la primera ecuación encontrada más arriba* [la de la elipse]*, a saber*
>
> $$y^2 + \frac{qry - 2qvy + qv^2 - qs^2}{q - r}$$



debe tener la misma forma que la que se obtiene haciendo e igual a y, y multiplicando y–e por sí misma: de lo que resulta

$$y^2 - 2ey + e^2 ,$$

de manera que se pueden comparar separadamente cada uno de sus términos y decir que, puesto que el primero, que es y^2 *es el mismo en la una y en la otra; el segundo que en una expresión es:*

$$\frac{qry - 2qvy}{q - r}$$

es igual al segundo de la otra que es $-2ey$*.*

> *De donde, buscando la cantidad v que es la línea PA, se tiene*
>
> $$v = e - \frac{r}{q}e + \frac{1}{2}r,$$
>
> *o bien, por haber nosotros supuesto e=y, se tiene*
>
> $$v = y - \frac{r}{q}y + \frac{1}{2}r,$$

y también podría encontrarse s por el tercer término:

$$e^2 = \frac{qv^2 - qs^2}{q - r}$$

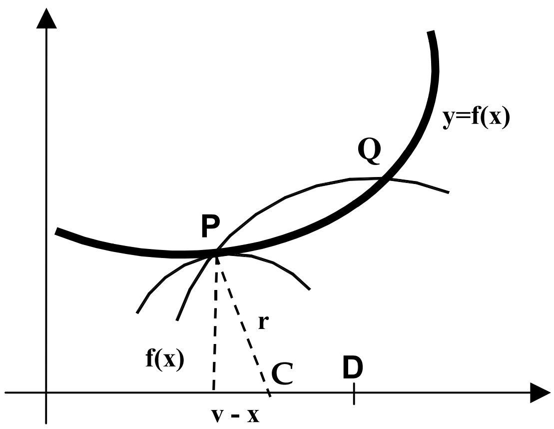
> *pero, puesto que la cantidad v determina bien el punto P, que es el único que buscamos, no hay necesidad de proseguir.*»

De forma análoga Descartes realiza la argumentación y el cálculo para la parábola y la Concoide de Nicomedes (G.AT,VI, 420-424).

APLICACIÓN DEL MÉTODO *CARTESIANO DEL CÍRCULO* AL CÁLCULO DE TANGENTES A LAS CURVAS

Para mayor comprensión del método del círculo de Descartes, interpretemos la técnica cartesiana para una función algebraica general, de forma deliberadamente anacrónica en términos del lenguaje moderno. Tendríamos lo siguiente:

Sea la curva y=f(x), y P un punto cualquiera de ella de abscisa x, donde queremos trazar la normal. Descartes supone como siempre el problema resuelto y la solución dada por la recta CP, siendo C=(v,o) la intersección de la normal con el eje de abscisas.



En general un círculo con centro en un punto D próximo a C y que pase por P, cortará a la curva y=f(x), no sólo en P, sino en otro punto Q, cercano a P, pero si CP es la normal a la curva en el punto P, este punto será un punto doble de la intersección de la curva y=f(x) y el círculo $(x-v)^2 + y^2=r^2$.

Eliminando la y de ambas ecuaciones resulta que la ecuación

$$[f(x)]^2 + (v-x)^2 = r^2 \qquad (1)$$

donde v,r, son fijos, debe tener la abscisa x de P como raíz doble.

Pero una función algebraica con una raíz doble x=e, debe ser de la forma: $(x-e)^2\cdot\Sigma b_n x^n$,

de modo que se puede imponer la condición de raíz doble anterior en la forma:

$$[f(x)]^2 + (v-x)^2 - r^2 = (x-e)^2\cdot\Sigma b_n x^n \qquad (2).$$

Identificando coeficientes se encuentra el valor de v, en términos de la raíz doble e.

En general mediante el método de Descartes lo que se halla es la «*subnormal*» v–x, que permite hallar la pendiente de la normal: –f(x)/(v–x) y de ésta la pendiente de la tangente – es decir, nuestra derivada : (v–x)/f(x) –.

La condición de raíz doble sobre (1) hoy la impondríamos (utilizando las derivadas formales de una curva algebraica), aplicando que «*toda raíz doble de una función es raíz de su derivada*», por tanto de (1) se deduce:

$$2f(x)\cdot f'(x) - 2(v-x) = 0,$$

y de aquí:

$$f'(x)=(v-x)/f(x),$$

obteniéndose el mismo valor que antes para la pendiente de la tangente.

APLICACIÓN DEL MÉTODO *CARTESIANO DEL CÍRCULO* AL CÁLCULO DE TANGENTES A LAS CURVAS

Apliquemos la técnica de Descartes, con lenguaje actual, a diversos casos sencillos.

A_1.- La parábola $y=x^2$.

La ecuación (2) ahora se escribe: $x^4 + (v-x)^2 - r^2 = (x-e)^2 \cdot (x^2 + bx + c)$.

Identificando coeficientes se obtiene: $v=2e^3 + e$, sustituyendo $e=x$, la «*subnormal*» vendrá dada por: $v-x=2x^3$, y la pendiente de la tangente en el punto (x,x^2) de la curva será:

$$(v-x)/f(x) = 2x^3/x^2 = 2x.$$

A_2.- La parábola $y^2=2px$.

La ecuación (2) ahora se escribe: $2px + (v-x)^2 - r^2 = (x-e)^2$.

Identificando coeficientes se obtiene $v=e+p$, sustituyendo $e=x$, la «*subnormal*» vendrá dada por $v-x=p$, y la pendiente de la tangente en el punto $(x, \sqrt{2px})$ de la curva será:

$$\frac{v-x}{f(x)} = \frac{p}{\sqrt{2px}} = \frac{p}{y}\ .$$

La ecuación de la tangente a la parábola $y^2=2px$ en el punto (x_o,y_o) será pues:

$$y - y_o = \frac{p}{y_o}(x - x_o),$$

de donde haciendo operaciones resulta:

$yy_o = p(x+x_o)$, expresión habitual de la tangente a la parábola.

B.- La elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

La ecuación (2) ahora se escribe:

$$b^2 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) + (v-x)^2 - r^2 = (x-e)^2 \cdot c$$

Identificando coeficientes resulta: $-(b^2/a^2) + 1 = c$, $-2v = -2ec$.

Despejando v se tiene: $v = e \cdot [1-(b^2/a^2)]$.

Sustituyendo $e=x$, la «*subnormal*» vendrá dada por $v-x=(-b^2x)/a^2$, de modo que la pendiente de la recta tangente en el punto (x,y) será:

$$\frac{v-x}{f(x)} = -\frac{b^2x}{a^2y}.$$

De aquí resulta que la ecuación de la recta tangente a la elipse en el punto (x_o,y_o) se expresará: $y - y_o = -\frac{b^2x_o}{a^2y_o}(x - x_o)$, de donde haciendo operaciones resulta:

$\frac{xx_o}{a^2} + \frac{yy_o}{b^2} = 1$, expresión habitual de la tangente a la elipse.

Hemos visto cómo la técnica cartesiana –mediante el *Método del círculo*–, bajo un punto de vista de Geometría Algebraica –diríamos hoy–, encuentra las tangentes a las curvas –vía la normal–, mediante la técnica de considerar el doble contacto del círculo osculador como una característica de la normal. De este modo, Descartes obtiene un método de tratar el problema, que al intuir que será el germen de una ciencia futura, le concede una importancia capital, al reconocer que las tangentes y normales a las curvas son rectas que, de alguna forma, imponen sus leyes a las curvas.

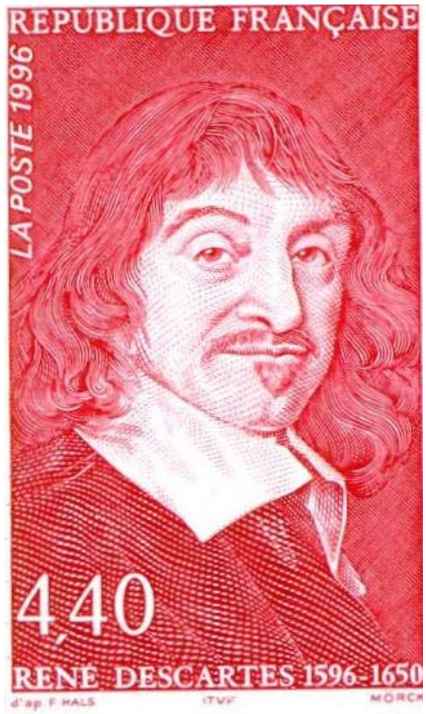
El problema del trazado de las normales a una curva en un punto, es considerado el mayor éxito del método cartesiano, marcando una impronta en la génesis de la Geometría Analítica por la capacidad que desarrolla Descartes de establecer puentes de ida y vuelta entre el Álgebra y la Geometría: análisis geométrico de los problemas, síntesis del análisis en el Álgebra de ecuaciones y traducción geométrica de los resultados algebraicos, un magnífico y poderoso diccionario reversible entre dos lenguajes, el geométrico y el algebraico, con la posibilidad de traducir no sólo en el ámbito gramatical –puntos por coordenadas, curvas por ecuaciones–, sino también en el dominio sintáctico –las relaciones entre los elementos geométricos, por ejemplo intersecciones de curvas, se traducen en relaciones entre los correspondientes elementos algebraicos, por ejemplo mediante sistemas de ecuaciones–.

Con un énfasis inusitado Descartes considera que este problema es el más importante, no sólo de cuantos ha resuelto sino de cuantos anhelara descubrir en Geometría (G.AT,VI,413):

> «[...] *Y me atrevo a decir que éste es el problema mas útil y mas general no sólo que yo conozca, sino aun que yo haya anhelado jamás conocer en Geometría*».

Con estos antecedentes, se comprende la sorprendente acritud con que se desarrolló su polémica con Fermat, a partir de la difusión de los métodos de máximos y mínimos ideados por este «*aficionado*» ya que se aplicaban también al trazado de tangentes. El desarrollo de la controversia, en el que participaron casi todos los matemáticos del círculo de Mersenne, tuvo la feliz virtualidad de ir obligando progresivamente a Fermat a aclarar la naturaleza de sus procedimientos, en el curso de lo cual nuevas curvas nacieron para la Geometría Analítica y para el Cálculo Infinitesimal, que simultáneamente estaba eclosionando gracias a toda la parafernalia analítica que ofrecían los métodos de Fermat y Descartes.

IMÁGENES DE DESCARTES EN LOS SELLOS DE CORREOS



1. **Emitido en Francia el 9 de junio de 1937, en conmemoración del tercer centenario de la publicación de *El Discours sur la Méthode*.**
2. **Emitido en Mónaco en el 400 aniversario del nacimiento de Descartes.**
3. **Emitido en Francia en el 400 aniversario del nacimiento de Descartes.**

LA SUPERACIÓN DE LAS LIMITACIONES DE LA GEOMETRÍA GRIEGA POR *LA GEOMETRÍA* DE DESCARTES

Dibujo a plumilla de la tradicional efigie de Descartes.

En *La Geometría*, Descartes hizo contribuciones muy importantes a la *Teoría de Ecuaciones*.

Descartes vislumbró algunas cuestiones muy trascendentes como la *regla de los signos* para descifrar el número de raíces negativas y positivas de cualquier ecuación algebraica, la *Regla de Ruffini* y el *Teorema Fundamental del Álgebra*.

Además, en sus estudios sobre poliedros, parece ser que Descartes llegó a conocer la conocida *Formula de Euler* que relaciona aristas, caras y vértices de un poliedro.

En los comienzos del Libro II de *La Geometría*, Descartes introduce los *compases cartesianos*, ingenios que tienen la misma precisión que los instrumentos platónicos y que utilizará para la construcción de diversas curvas geométricas de gran importancia en la resolución de ecuaciones que resultan de ciertos problemas geométricos.

***La Geometría* de Descartes transforma los antiguos instrumentos de la Geometría griega –el Álgebra Geométrica y el Análisis Geométrico– en lo que hoy llamamos la Geometría Analítica cartesiana, mediante la intervención del Álgebra literal a la que el propio Descartes contribuyó de forma definitiva con la contundente y eficaz reforma y simplificación de la notación algebraica.**

En concreto *La Geometría* de Descartes elimina de forma brillante toda una serie de limitaciones que el carácter geométrico-sintético imponían a la Geometría griega:

- **Limitación pitagórica de la inconmensurabilidad.**
- **Limitación platónica de los instrumentos geométricos –regla y compás–.**
- **Limitación euclídea de la homogeneidad dimensional.**
- **Limitación tridimensional.**
- **Limitación de la dependencia de las figuras geométricas.**
- **Limitación de la imposibilidad de asignar números a las figuras geométricas.**

Descartes realiza mediante la herramienta algebraica una nueva lectura de la Geometría de los griegos, que permite una completa reconstrucción de la Matemática sobre premisas muy sencillas no geométricas como en Euclides sino algebraicas. Y lo hace en el marco de un programa de reforma general de la Filosofía que había anticipado en *El Discurso del Método* y en las *Reglas para la dirección del espíritu*, pero muchos pensadores conceden mayor importancia a la reforma cartesiana de las Matemáticas que a su intervención en la Filosofía. Así parece deducirse, por ejemplo, de la siguiente frase de J. Stuart Mill (citada por E.Bell en *Les grands mathématiciens*. Payot, París, 1950. Cap.3. p.46):

> «*La Geometría analítica, mucho más que cualquiera de sus especulaciones metafísicas, inmortaliza el nombre de Descartes y constituye el máximo paso hecho en el progreso de las ciencias exactas.*»

Los Principios de la Geometría Analítica en *La Geometría* de Descartes

La Geometría Analítica vincula curvas y ecuaciones a través de dos principios fundamentales:

- P1. La relación entre las coordenadas de los puntos de una curva –la ecuación de la curva– establece una correspondencia entre las propiedades algebraicas de la expresión de la ecuación y las propiedades geométricas de la curva asociada.
- P2. La intersección de curvas –que es un problema geométrico– se reconduce a la resolución de sistemas de ecuaciones – que es un problema algebraico–.

Al partir del rastro de Vieta, Descartes alcanza el primer principio fundamental de la Geometría Analítica, que expresado en lenguaje moderno, consiste, como se ha dicho, en el descubrimiento de que las ecuaciones indeterminadas en dos incógnitas, $f(x,y)=0$, se corresponden con lugares geométricos, en general curvas, determinadas por todos los puntos cuyas coordenadas relativas a dos ejes satisfacen la ecuación. Un aspecto de esta idea es anunciado por Descartes en un enunciado básico que viene a decir: «*una ecuación en dos cantidades indeterminadas determina, con respecto a un sistema dado de coordenadas, una curva*», expresado en el Libro II de *La Geometría* de la siguiente forma (G.AT,VI, 412):

> «*Para encontrar todas las propiedades de las líneas curvas basta con saber la relación que tienen todos sus puntos con los de las líneas rectas* [la ecuación de la curva].»

Esta frase contiene uno de los principios más trascendentes de toda la Historia de la Matemática, que instaura los fundamentos de la Geometría Analítica. La relación a la que alude Descartes es la que vincula los segmentos o «*las líneas rectas*» que hacen la función de «*coordenadas*» de los puntos de una curva, es decir, la ecuación de la curva en un sistema de coordenadas, una expresión algebraica que permite estudiar las propiedades y encontrar los elementos característicos de la curva –diámetros, ejes, centros, normales, tangentes, cuadraturas, etc.– como asegura Descartes (G.AT,VI, 412–413):

> «*Luego con sólo saber la relación que tienen todos los puntos de una línea curva con todos los de una línea recta* [la ecuación]*, en la forma que he explicado, es fácil también conocer la relación que ellos tienen con todos los otros puntos y líneas dadas; y, por lo tanto, conocer los diámetros, los ejes, los centros,* [...]. *Y también, con sólo esto, se puede aun, encontrar casi todo lo que puede ser determinado respecto a la medida del espacio que abarcan,* [cuadratura].»

He aquí, pues, una correspondencia entre las propiedades geométricas de la curva y las propiedades algebraicas de la ecuación asociada que anuncia la esencia de la Geometría Analítica como puente entre el Álgebra y la Geometría y poderoso instrumento de solución de problemas geométricos mediante la intervención del Álgebra, una vez se ha definido un sistema de coordenadas, mediante el que se obtiene la ecuación de la curva como relación algebraica que liga las coordenadas de los puntos de la curva. El carácter algorítmico y operacional del Álgebra convierte a ésta en una potente herramienta no sólo de resolución de problemas geométricos concretos sino también en un magnífico útil de exploración e investigación geométrica, que en esto consiste realmente la eficiencia de la Geometría Analítica. *Y* más todavía, la propia expresión analítica de la ecuación de una curva es una incipiente aproximación al concepto de función.

En cuanto al segundo principio fundamental de la Geometría Analítica, Descartes lo apunta en el llamado «*Método del círculo*», también en el Libro II de *La Geometría*, donde resuelve el importante problema del trazado de las normales a una curva en un punto, y que al sintetizar e interpretar los prolijos desarrollos cartesianos, se expresaría en la forma siguiente (G.AT,VI, 417):

«*El problema geométrico de la intersección de curvas se traslada al problema algebraico de resolución de sistemas de ecuaciones*».

La brillante solución al problema de las normales, uno de los más conocidos y apreciados, es considerado por Descartes, con mucha razón, como el mayor éxito del método cartesiano (G.AT,VI, 413):

«[...]*Y me atrevo a decir que éste es el problema más útil y más general no sólo que yo conozca, sino aun que yo haya anhelado jamás conocer en Geometría.*»

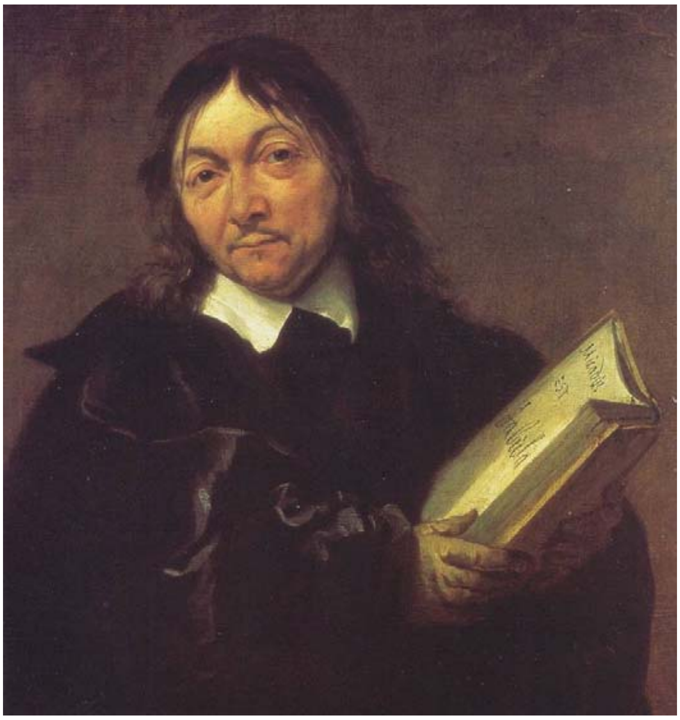
En verdad, este problema marca una impronta en la génesis de la Geometría Analítica por la capacidad que el filósofo desarrolla de establecer puentes de ida y vuelta entre el Álgebra y la Geometría –análisis geométrico de los problemas, síntesis del análisis en el Álgebra de ecuaciones y traducción geométrica de los resultados algebraicos–, un magnífico y poderoso diccionario reversible entre dos lenguajes, el geométrico y el algebraico, con la posibilidad de traducir no sólo en el ámbito gramatical –puntos por coordenadas, curvas por ecuaciones–, sino también en el dominio sintáctico –las relaciones entre los elementos geométricos, por ejemplo intersecciones de curvas, se traducen en relaciones entre los correspondientes elementos algebraicos mediante sistemas de ecuaciones–.

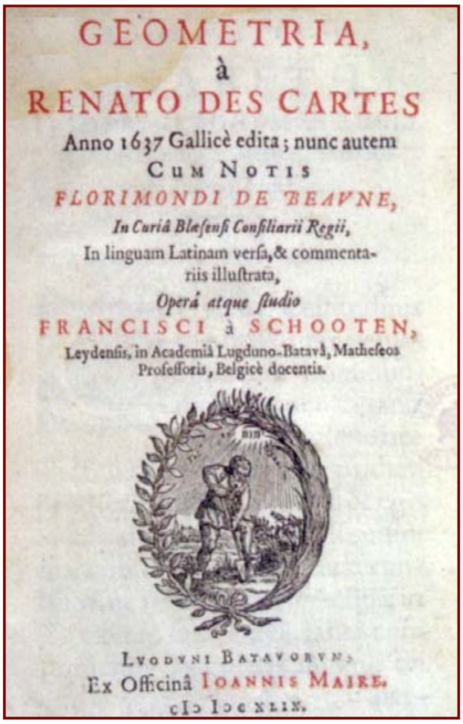
No es extraño que, con una retórica altisonante, Descartes considere que el problema del trazado de las normales a una curva en un punto es el más importante, no sólo de cuantos ha resuelto sino de cuantos aspirara a descubrir en Geometría. Realmente es una de las muestras más representativas de las raíces cartesianas de la Geometría Analítica, ya que Descartes despliega una eficaz alfombra que enlaza la Geometría y el Álgebra al aplicar toda la potencia algorítmica del Álgebra para resolver problemas geométricos, que en ello consiste la virtualidad de la Geometría Analítica.

SELLOS DE DESCARTES EN EL AÑO 2000 DE LAS MATEMÁTICAS

1. **Emitido en Granada con motivo del año 2000 de las Matemáticas.**
2. **Emitido en Sierra Leona con motivo del año 2000 de las Matemáticas.**

LA GEOMETRÍA DE DESCARTES Y LA GEOMETRÍA ANALÍTICA





1. **Retrato de Descartes por Weenix. Museo de Utrecht.**
2. **La edición en latín de 1649 de van Schooten (con notas de F. De Beaune) de *La Geometría* de Descartes, es la primera edición separada de *El Discurso del Método*. Esta edición contribuyó de forma muy considerable a la difusión de la obra de Descartes.**

Los aspectos más importantes de *La Geometría* de Descartes que apuntan hacia la futura Geometría Analítica son lo siguientes:

A. **Preliminares geométrico-algebraicos: «*Cómo el cálculo de la aritmética se relaciona con las operaciones de geometría*» (G.AT,VI, 369). Descartes soslaya la inconmensurabilidad, al asignar longitudes a los segmentos, previa la adopción de un segmento unidad a discreción, tras lo cual construye de forma efectiva las operaciones aritméticas y les da un significado geométrico. De esta forma Descartes elimina *la limitación pitagórica de la inconmensurabilidad*.**

B. **Simplificación de la notación algebraica: «*Cómo pueden emplearse letras en geometría*» (G.AT,VI, 371). Descartes considera un segmento de recta tanto como magnitud geométrica continua como una medida numérica, pero establece que la potencia de un segmento sigue siendo un segmento, así que cuadrado y cubo ya no son magnitudes planas o espaciales, sino la segunda o tercera potencia de un número. De este modo, las operaciones aritméticas quedan incluidas en un terreno estrictamente algebraico. Con ello Descartes elimina *la limitación euclídea de la homogeneidad*.**

C. **Aplicación de la metodología cartesiana del *Análisis* y la *Síntesis* en el planteamiento y resolución de ecuaciones que corresponden a los *problemas planos* (G.AT,VI, 372-376). Descartes desarrolla todo un protocolo de actuación –suponer el problema resuelto; dar nombre a todos los segmentos que parecen necesarios para representar los datos del problema, tanto los conocidos como los desconocidos; determinar la ecuación entre las longitudes conocidas y las desconocidas; resolver la ecuación resultante; construir geométricamente la solución–. Se trata de un verdadero método de resolución de problemas geométricos donde se transita de forma reversible de la Geometría al Álgebra y del Álgebra a al Geometría. En particular, Descartes exhibe de forma ostentosa eficientes métodos de resolución de ecuaciones y de construcción geométrica de las soluciones, que contrastan con la farragosidad del Álgebra Geométrica de *Los Elementos* de Euclides. Realmente aquí vemos la magnificencia y simplicidad de los métodos de *La Geometría* de Descartes en contraposición a la prolijidad y precariedad de la Geometría griega.**

D. ***El Problema de Pappus* (G.AT,VI, 377-387). Descartes introduce el primer sistema de coordenadas de La Geometría. Este problema fue un indicador fehaciente, ante la ciencia coetánea, de la novedad y de la inusitada potencia del método analítico cartesiano en Geometría en un asunto geométrico que desbordó a lo largo de los siglos las posibilidades del Análisis geométrico griego.**

E. **Determinación de las rectas normales a una curva (G.AT,VI, 412-423). Descartes resuelve de forma prodigiosa el problema de normales y tangentes, y apunta a la asociación de curvas y ecuaciones que instaura los dos principios fundamentales de la llamada Geometría Analítica.**

Estudio comparado de *La Geometría* de Descartes y la *Isagoge* de Fermat

La Geometría Analítica fue un descubrimiento independiente de dos ilustres personajes, ninguno de los cuales era matemático profesional. Fermat era un jurista con un inusitado interés y conocimiento sobre las obras matemáticas de Grecia clásica. Descartes era militar aficionado y filósofo que encontró en la Matemática la base racional de su pensamiento. Ambos iniciaron sus estudios y descubrimientos matemáticos allí donde Vieta había llegado, pero ambos continuaron la labor de Vieta por caminos diferentes.

Bajo la inspiración de Vieta, la gran visión que tuvieron Descartes y Fermat fue la de apreciar que la aplicación del Álgebra como instrumento algorítmico por excelencia incrementaría aún más la capacidad heurística del Análisis.

La exposición de Fermat en la *Isagoge* es muy concisa, y como en casi todas sus memorias, Fermat hace gala de una gran capacidad de síntesis. En general es más didáctica, sistemática y rigurosa que la de Descartes en *La Geometría* y su enfoque está más próximo al actual, salvo en lo que se refiere a la notación y a la homogeneidad. La presentación de Descartes en *La Geometría* es muy extensa, más general que la de Fermat, menos clara en algunos pasajes y aborda cuestiones y problemas más difíciles.

Fermat se mantuvo fiel a la notación de Vieta en cuanto nombrar incógnitas y parámetros y aplicó la doctrina de éste a nuevos problemas de lugares geométricos. Descartes estuvo más próximo a los objetivos y propósitos de Vieta –la construcción geométrica de las raíces de las ecuaciones algebraicas–. Al asignar a cada segmento una longitud, después de fijar una unidad, Descartes facilita la asociación implícita del sistema de números reales con los puntos de una línea recta, proporciona con esta base un substrato geométrico a las operaciones aritméticas y muestra cómo se pueden construir –con instrumentos euclidianos pero con el concurso del Álgebra– las soluciones de las ecuaciones algebraicas. Con ello soslaya la necesidad que había en el Álgebra Geométrica griega de conservar la homogeneidad y elimina la barrera dimensional.

Además, Descartes aplica a los problemas y a las ecuaciones un nuevo y potente simbolismo simplificador, explicativo y resolutivo, que va mucho más allá de la abreviatura cósica iniciada por Diofanto y desarrollada por los algebristas italianos e incluso allende la escritura simbólica de Vieta. La notación matemática no es una simple convención como decía Fermat (TH.OF.III.111). Los símbolos y términos de la matemática son el soporte de sus conceptos y métodos, por tanto tiene una gran importancia, y a pesar de la arbitrariedad en la elección de los signos, conviene adoptar un criterio unificador, que al ser adoptado universalmente, facilita la interpretación y la comprensión, ahorra tiempo y espacio, entraña economía de pensamiento y permite una mayor y más rápida difusión. Esto es precisamente lo que consiguió Descartes con los convenios notacionales fijados en *La Geometría*, que han tenido la virtualidad de convertirse en algo poderosamente definitivo, de modo que *La Geometría*, es el primer texto matemático en el que un lector actual no encontraría dificultades con la notación. Así pues, Fermat y Descartes mantuvieron un contraste sobre el tipo de notación, ya que Fermat no llegó a valorar la facilidad mecánica del abandono de la homogeneidad y la simplificación del simbolismo. Curiosamente muchos matemáticos posteriores mantuvieron la homogeneidad formal de Fermat pero se adscribieron a las notaciones de Descartes.

Como escribe E.Colerus, en un lenguaje casi místico, en su *Breve Historia de la Matemática* (Vol. II, Doncel, Madrid, 1973, p.17,):

> «*La Matemática no es sino una obra mágica del pensamiento, y los espíritus aparecen cuando se les invoca con las fórmulas adecuadas.*»

Los dos caminos que emprenden Fermat y Descartes al partir del rastro de Vieta llevan al mismo Principio Fundamental de la Geometría Analítica, pero son divergentes en cuanto a la distinta consideración sobre la Geometría de los antiguos. Fermat pretende recuperar tanto como sea posible el Análisis Geométrico griego y reformularlo mediante el Álgebra simbólica del *Arte Analítica* de Vieta. A pesar de la introducción de unas coordenadas, Fermat se considera como un exégeta de la Geometría griega, a la que absorbe, en el sentido cultural de la palabra, y le aplica el Álgebra para enriquecerla y hacerla más inteligible, pero reconoce en la Geometría el eje fijo de la Matemática. Curiosamente él se llama a sí mismo geómetra mientras llama analistas a los discípulos de Vieta de los que ha aprendido. La actitud de Descartes es bien distinta empezando por la consideración jerárquica de las diversas partes de la Matemática. Para Descartes la Aritmética y el Álgebra no sólo preceden lógicamente a la Geometría, sino que, además, son superiores en esencia, porque al ser las ciencias de las magnitudes, son mucho más generales y aplicables, entre otros ámbitos al de la Geometría. A diferencia de Fermat, que era un ferviente admirador de la Geometría griega, Descartes tenía una opinión muy negativa sobre los métodos sintéticos de los antiguos, por la ocultación del proceso inventivo y la excesiva particularidad, y en consecuencia no participó como hizo Fermat en el movimiento contemporáneo de restauración de los trabajos perdidos de Apolonio. Descartes parte de la Geometría griega para construir algo completamente nuevo, que se convertirá en una Matemática universal, que, en particular apartará a la Geometría del eje central de la Matemática al destronarla de forma definitiva de su rango de reina de esta ciencia, de modo que la Matemática algebrizada de Descartes desplazará y ocupará el lugar de la Matemática geometrizada de los griegos. Así pues Descartes en su Geometría Analítica convierte al Álgebra en la reina de las Matemáticas, hasta que en el siglo XIX Gauss afirme que es la Aritmética quien debe ocupar el trono de la Matemáticas.

Con su *Arte Analítica*, Vieta había establecido una conexión entre Álgebra y Geometría, al obtener las ecuaciones que corresponden a diversas construcciones geométricas, en el caso de problemas geométricos determinados, es decir, manejando sólo ecuaciones determinadas, en las que la variable aunque es una incógnita, es una constante fija a encontrar. Fermat y Descartes, en sus Geometrías, desarrollarán esta idea para problemas geométricos indeterminados mediante la consideración de ecuaciones indeterminadas en variables continuas que representan segmentos geométricos.

Según el principio fundamental de la Geometría Analítica, las ecuaciones indeterminadas en dos incógnitas, f(x,y)=0, se corresponden con lugares geométricos –en general curvas– determinadas por todos los puntos cuyas coordenadas relativas a dos ejes satisfacen la ecuación. Un vertiente de esta idea es expresada por Descartes, como vimos, en el Libro II de *La Geometría*, de la siguiente forma (G.AT,VI, 412):

> «*Para encontrar todas las propiedades de las líneas curvas basta con saber la relación que tienen todos sus puntos con los de las líneas rectas,* [...].»

Como se vio en el capítulo sobre Fermat, el aspecto complementario de la idea de Descartes es expresado por aquél casi al comienzo de la *Isagoge*, con estas lacónicas palabras (TH.OF.III.85):

> «*Siempre que en una ecuación final se encuentran dos cantidades incógnitas, se tiene un lugar geométrico, describiendo el extremo de una de ellas una línea recta o curva*.»

En ambas frases se compendian uno de los principios más importantes de la Historia de la Matemática, que instaura los fundamentos de la Geometría Analítica. De momento una «*Geometría de ordenadas*» más que una «*Geometría de coordenadas*», ya que fijadas las dos incógnitas que componen la ecuación, los segmentos de la primera se miden a partir de un punto inicial –*origen de coordenadas*–, a lo largo de un eje dado y los segmentos de la segunda –que son determinados por la ecuación– se elevan como «*ordenadas*» formando un ángulo con el eje.

Pero los enfoques de Descartes y Fermat son algo diferentes entre sí, desde los propios enunciados del Principio. Fermat expone mucho más claramente que Descartes el principio básico de que una ecuación con dos incógnitas es una expresión algebraica de las propiedades de una curva y su trabajo está orientado al desarrollo y aplicación de esta fructífera idea. Mientras Descartes había sugerido clases de nuevas curvas engendradas por simples movimientos, Fermat introduce grupos de curvas dadas por sus ecuaciones algebraicas. A diferencia de *La Geometría* de Descartes, la *Isagoge* de Fermat tiene su propósito en demostrar que las ecuaciones lineales representan rectas y que las ecuaciones cuadráticas corresponden a cónicas.

En un sentido general, se puede decir que la invención de la Geometría Analítica por Descartes consiste en la extensión del *Arte Analítica* de Vieta a la construcción geométrica de las soluciones de ecuaciones indeterminadas, mientras que para Fermat fue el estudio de los lugares mediante el *Arte Analítica* de Vieta. Mientras Descartes empieza con la curva correspondiente a un lugar geométrico de la que deriva la ecuación del lugar, es decir, resuelve problemas geométricos a través de la construcción de la solución geométrica de ecuaciones, Fermat inversamente parte de una ecuación algebraica de la que deriva las propiedades geométricas de la curva correspondiente. En sus propias palabras Descartes se refiere con frecuencia a la generación de curvas «*mediante un movimiento continuo y regular*», mientras Fermat menciona la frase: «*Sea una curva dada por su ecuación* [...]». Las visiones de Descartes y Fermat son, en cierto modo, complementarias, estableciendo cada una de ellas el nexo entre Álgebra y Geometría en sentidos opuestos. Descartes estudia ecuaciones por medio de curvas, mientras Fermat estudia curvas definidas por ecuaciones. La Geometría que desarrollan Fermat y Descartes, que se ha venido en llamar Geometría Analítica estudia dos tópicos fundamentales: la derivación de las ecuaciones de los lugares geométricos y las propiedades de las curvas, sobre todo de las definidas por ecuaciones lineales y cuadráticas. Sintetizando, diríamos que Descartes se ocupó ampliamente del primer tópico y consideró brevemente algunos aspectos del segundo, mientras que Fermat desarrolló el segundo tópico y prestó somera atención al primero.

Las Geometrías Analíticas de Fermat y Descartes permiten introducir nuevas curvas por el mero hecho de considerar una ecuación. Fermat era consciente de las posibilidades ilimitadas de su trabajo en cuanto a la invención de nuevas curvas. De hecho asevera al principio de la *Isagoge*: «*las especies de curvas son en número infinito, círculo, parábola, elipse, etc.*». Sin embargo en contraste con *La Geometría* de Descartes, Fermat no prestó atención en la *Isagoge* a las curvas de orden superior, sólo a los lugares planos y sólidos de los griegos, escogiendo en cada caso el sistema de referencia más conveniente, mientras que Descartes estudia curvas de grado superior (es más, concebía que el futuro estaba en el estudio de estas curvas) y no tiene inconveniente en fijar un mismo sistema de coordenadas para el estudio simultáneo de diversas curvas.

Fermat deriva las ecuaciones de las rectas y las cónicas –incluso las degeneradas– clasificándolas mediante traslaciones y rotaciones de ejes, demostrando por primera vez que una ecuación de segundo grado con dos incógnitas es una cónica, cuestión que Descartes –a propósito del *Problema de Pappus*– menciona pero deja su demostración en cierta oscuridad.

La gran contribución de Fermat al descubrimiento de nuevas curvas no tiene lugar en la *Isagoge* sino en sus brillantes aplicaciones de los métodos analíticos a la Geometría infinitesimal, es decir, en sus magníficos resultados sobre tangentes y cuadraturas. Es en este último ámbito en el que Fermat introduce las llamadas parábolas generalizadas $y=x^n$ y las hipérbolas generalizadas $x^n y^m=k$, curvas sobre las que aplicará y resolverá la mayor parte de los problemas de cuadraturas. Otros trabajos de Fermat contienen referencias a otras muchas curvas, pero como en el caso de las parábolas e hipérbolas generalizadas eran propuestas sólo para ilustrar métodos en relación con problemas de tangentes o áreas; tal es el caso de la curva $b^3=x^2y+b^2y$, llamada después *Curva de Agnesi*.

Por cierto que mientras la contribución de Fermat al desarrollo del Cálculo Infinitesimal fue amplia y decisiva, Descartes no tuvo un papel activo en la transformación analítica de la geometría infinitesimal –es decir, en allanar el camino de Arquímedes a Newton y Leibniz–. De hecho los métodos de tangentes de Fermat son muy superiores a los de Descartes, que apuntaban según la naturaleza de su *Geometría* –aplicación de las ecuaciones a las curvas de orden superior– más hacia la Geometría Algebraica futura que hacia los ulteriores Análisis Matemático y Geometría Diferencial, como en el caso de Fermat.

LA GEOMETRÍA DE DESCARTES
Y *LA*
ISAGOGE DE FERMAT
Síntesis de un estudio comparado

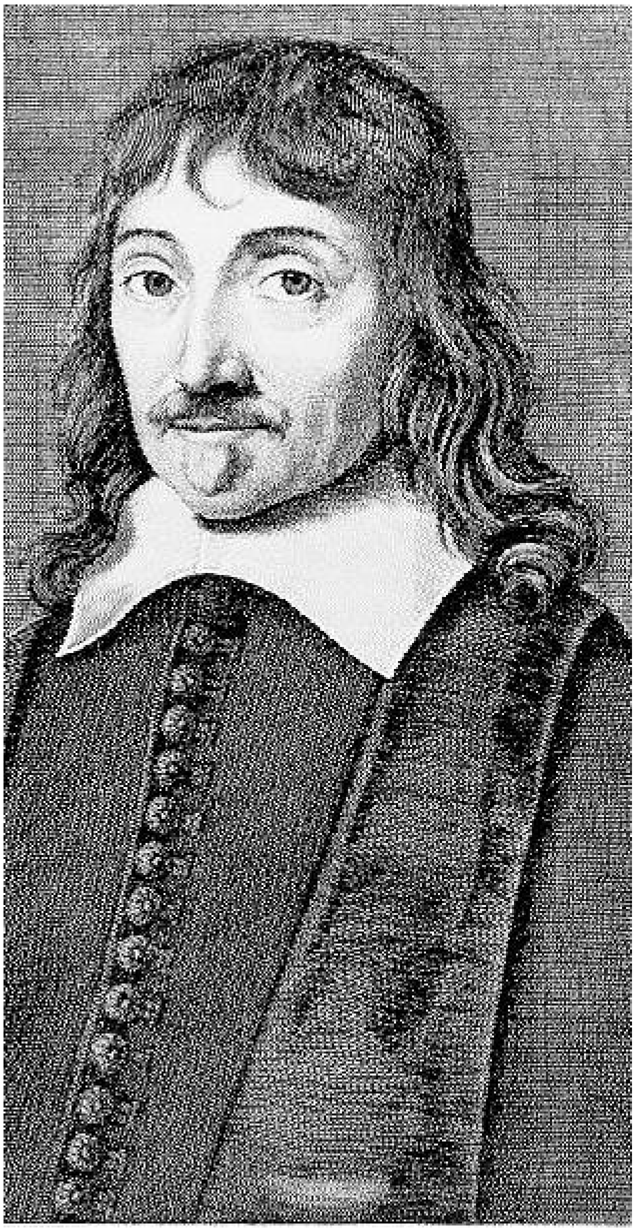
ISAGOGE DE FERMAT

I1. Concisión, claridad, rigor, didáctica, elemental, sistemática.
I2. Notación de Vieta cuasi-cósica, homogeneidad.
I3. Prioridad de la Geometría.
I3. Ecuación → curva. Propiedades de la curva mediante el Álgebra.
I4. Estudio de curvas definidas por ecuaciones.
I5. Introducción de curvas mediante ecuaciones: las ecuaciones lineales representan rectas, las ecuaciones cuadráticas corresponden a cónicas. Clasificación de curvas.
I6. Paráfrasis algebraica de *Las Cónicas* de Apolonio:
***Symptoma* → Ecuación de la curva.**
I7. *Isagoge* de Fermat → Cálculo Infinitesimal, Geometría Diferencial.

LA GEOMETRÍA DE DESCARTES

G1. Extensión, dificultad, complejidad, elipsis, generalidad.
G2. Potente simbolismo simplificador: notación cartesiana.
G3. Prioridad del Álgebra.
G4. Curva como lugar geométrico.
G5. Curva → ecuación → construcción geométrica de la solución.
G6. Estudio de ecuaciones mediante curvas.
G7. Problemas clásicos Duplicación del Cubo, Trisección del Ángulo.
G8. Introducción de curvas mediante movimientos continuos.
G9. Estudio de curvas superiores. Álgebra superior.
G10. Reconstrucción de toda la Geometría griega.
G11. *Geometría* de Descartes → Geometría Algebraica.

FERMAT Y DESCARTES
ARTÍFICES DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA



El gran historiador de la Ciencia español Francisco Vera escribe en la página 87 de su ilustrativa obra *Veinte matemáticos célebres* (Mirasol. Buenos Aires, 1961), en el capítulo quinto destinado a Fermat y Descartes, titulado *Celos mal reprimidos*:

> «*Fermat, como todos sus antecesores, consideraba que los problemas relativos a las figuras son geométricos y en ellos interviene el Álgebra como medio auxiliar, mientras que con Descartes el Álgebra figura en primera línea como técnica, como método de combinación y construcción, de tal modo que es el cálculo algebraico el que legitima los resultados de la nueva Geometría, destruye los escrúpulos de los griegos relativos a la definición de las curvas y hace inútil la teoría de la construcción geométrica, que queda sustituida por la síntesis de la construcción algebraica.*»

Durante algunos años después de 1637, la Geometría Analítica fue considerada como la invención de un solo hombre –Descartes–, debido a que los trabajos de Fermat sobre Geometría Analítica no fueron publicados en vida del autor. Por ello es difícil aquilatar el grado de influencia que tuvo sobre sus contemporáneos. No obstante tanto la *Isagoge* como los trabajos de Fermat sobre máximos y mínimos y su aplicación a las tangentes fueron conocidos –por voluntad de Fermat, a través de manuscritos que acompañaban a su correspondencia –, por el círculo de matemáticos de Mersenne, incluso antes de la aparición de *La Geometría* de Descartes, pero así como las tangentes de Fermat causaron una gran impresión sobre todo en Descartes, la *Isagoge* parece que fue rápidamente eclipsada por el trabajo de Descartes.

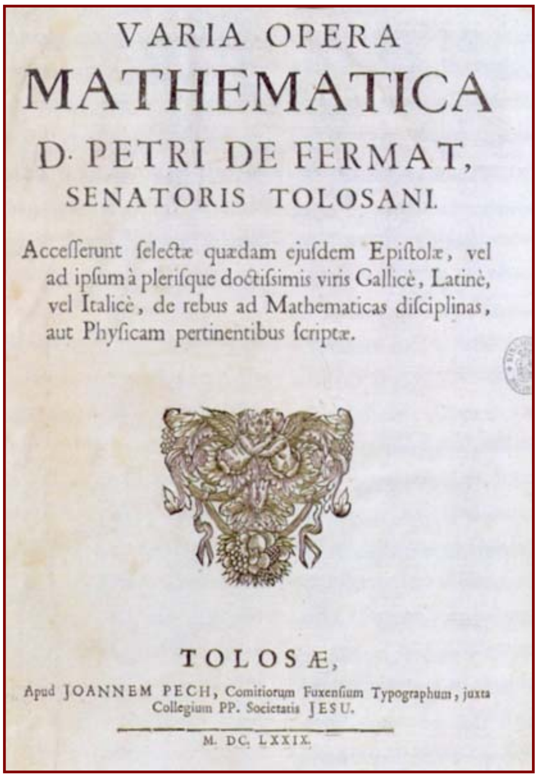
Mientras algunos aspectos de los máximos y mínimos y las tangentes de Fermat fueron incorporados a algunas publicaciones de otros matemáticos, la *Isagoge* no aparece en imprenta hasta la publicación de *Varia Opera Mathematica* de Fermat por parte de su hijo Samuel en 1679, catorce años después de la muerte de su autor, cuarenta y dos años después de la publicación de *La Geometría* de Descartes y casi cincuenta años después de ser escrito el tratado, en unos momentos en que la influencia cartesiana se había extendido notablemente, de modo que la memoria de Fermat sobre Geometría Analítica, ya incluso con una notación obsoleta, tenía simplemente un valor histórico para atestiguar –debido a la fecha de composición y a su contenido– la independencia de la Geometría Analítica de Fermat respecto de la de Descartes. Así pues, el nombre de Geometría cartesiana con que se denomina a veces a la Geometría Analítica no hace justicia a ambos fundadores, incluso entre profesionales de la Matemáticas se desconoce, a veces, la copaternidad de Fermat, pero es bien cierto que fue bajo la forma cartesiana como este magnífico instrumento se impuso y echó raíces en la Matemática.

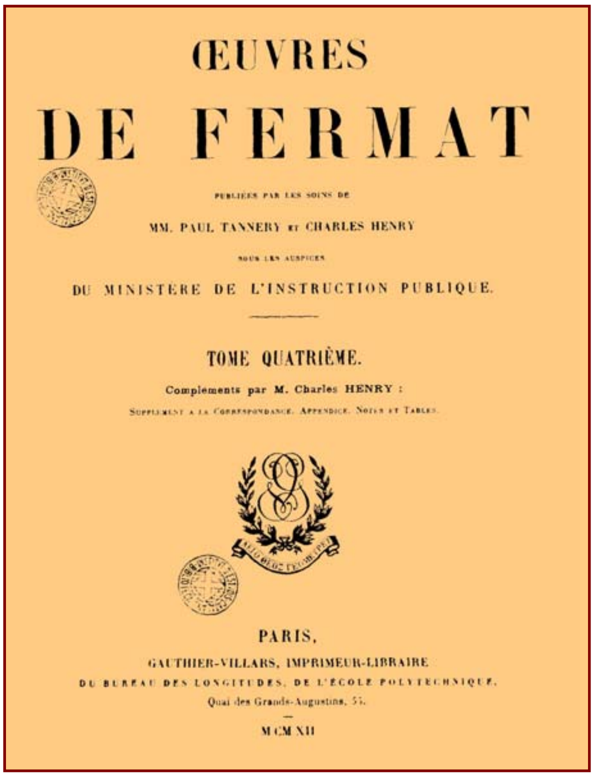
Al contrario que la *Isagoge, La Geometría* de Descartes tuvo una rápida difusión, de modo que por el valor e importancia que se le dio a la obra enseguida aparecieron nuevas ediciones separadas del *Discurso* que recibieron enseguida infinidad de comentarios por parte de matemáticos de muchos países. Además, no todo el mundo entendía la obra de Descartes, de modo que incluso algunos eruditos solicitaron aclaraciones para poderla seguir. Estas preocupaciones latentes en los ámbitos matemáticos propiciaron el que van Schooten –que había sido el diseñador de las figuras de la primera edición– añadiera a su traducción latina de 1649 toda una serie de comentarios propios, las *Notas Breves* de F. de Beaune y aportaciones de Witt, de Hudde, de van Heuraet y otros, que contribuyeron a extender su difusión e incrementar su inteligibilidad. Tanto éxito tuvo la publicación de van Schooten que se reeditó en 1659 y 1695.

Descartes rompe de forma definitiva con la tradición griega mientras que Fermat considera su trabajo como una reformulación de la obra de Apolonio con los instrumentos del Álgebra. Y en verdad La Geometría Analítica de Fermat surge de parafrasear los resultados de Apolonio sobre cónicas. Descartes no sólo era consciente de que su método estaba suplantando a los antiguos, sino que, a diferencia de Fermat, ése era su propósito desde el principio. El verdadero descubrimiento, la potencia de los métodos algebraicos, corresponde a Descartes. No obstante, la idea matriz de la Geometría Analítica que es la de asociar ecuaciones a curvas quizá está más clara en Fermat, por eso pudo aplicar fácilmente su método a los lugares geométricos y a los máximos y mínimos y tangentes, temas que Fermat consideraba de primer orden. Por ello cuando se publicó *La Geometría* de Descartes, criticó la ausencia de estas cuestiones en ella y en el curso de la polémica que mantuvieron ambos a propósito del tema de las tangentes, Descartes asegura que se pueden derivar y reconducir fácilmente a los resultados de *La Geometría* de acuerdo con su inveterada tendencia a no cumplimentar todos los desarrollos y demostraciones para dejar algo para el lector:

> «[...] *No me detengo a explicar esto con más detalle para no privar a cada uno del placer de aprenderlo por sí mismo*» (G.AT,VI, 374).

LAS VICISITUDES DE LA PUBLICACIÓN DE LAS *OEUVRES* DE FERMAT





1. **Edición de Samuel de Fermat de *VARIA OPERA MATHEMATICA* de *D. PETRI DE FERMAT*. Tolosa, 1679.**
2. **Portada del volumen IV de las *OEUVRES DE FERMAT*, publicadas entre 1891 y 1912 por P.Tannery y C.Henry .**

La particular forma que tenía Fermat de trabajar en Matemáticas –Fermat no escribió grandes tratados, sino apuntes episódicos y notas marginales–, así como la manera de comunicar de forma epistolar sus descubrimientos, unida a la despreocupación por la conservación de sus papeles y la constante reticencia en torno a su eventual publicación, supuso que a su muerte, en 1665, la mayoría de los manuscritos de Fermat –de algunos de ellos ni siquiera existía copia– estuvieran en manos de sus múltiples corresponsales y por tanto gran parte de su trabajo quedara desperdigado en numerosos ambientes científicos de toda Europa.

En vida de Fermat sólo una memoria se publicó, fue un tratado sobre rectificación de curvas impreso en 1660 bajo las iniciales M.P.E.A.S. (*De la comparación de las líneas curvas con las líneas rectas. Disertación geométrica*), como apéndice de un tratado de Lalouvère sobre la cicloide. Por estas razones su influencia directa no tuvo la envergadura y la inmediatez que la de Descartes.

Catorce años después de la muerte de su padre, habiendo reunido la mayor parte de los escritos latinos, así como un número suficiente de cartas inéditas, Samuel de Fermat hizo imprimir en 1679 *Varia Opera Mathematica*, que a pesar de las omisisones de importantes desarrollos de Fermat y de las excesivas incorrecciones –Samuel no era matemático–, constituyó hasta finales del siglo XIX –se reimprimió en 1861– la única publicación donde se podían estudiar los trabajos de Fermat.

Gran parte de la obra de Fermat presente o ausente en las *Varia Opera* que yacía en manuscritos, originales y copias, muchos de ellos sin título y anónimos, cayó en manos de coleccionistas y seguramente fue atribuida a otros matemáticos.

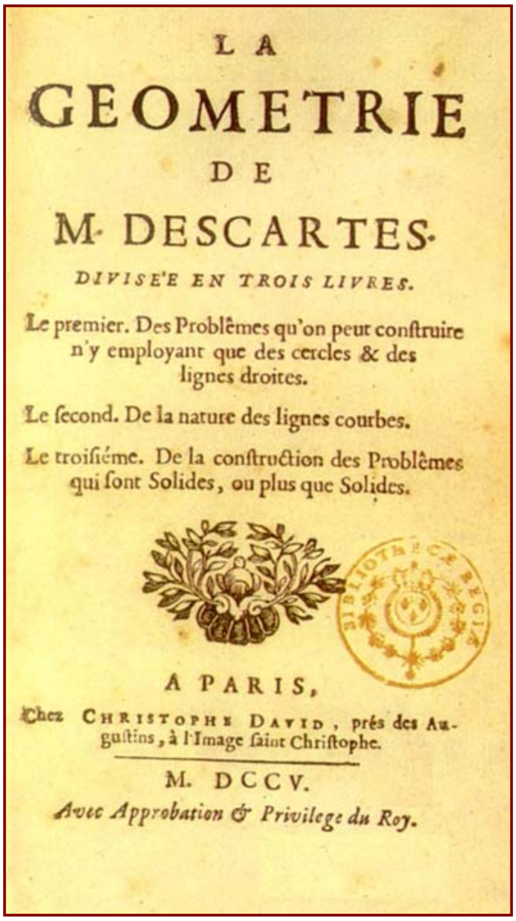
Gracias a la actividad bibliófila del historiador de las Matemáticas C.G.Libri, el Ministerio de Instrucción Pública francés –en un *Proyecto de Ley de 28 de abril de 1843*– instituyó un programa para una nueva edición de las obras de Fermat a cargo del Estado, que resolviera los defectos y colmara las lagunas de las *Varia Opera*, que el propio Libri había señalado al disponer de nuevos manuscritos y demás material inédito de Fermat. Numerosas vicisitudes políticas y administrativas retrasaron el proyecto hasta finales del siglo XIX.

Teniendo a su disposición las anteriores publicaciones, así como numerosos manuscritos recopilados a lo largo del tiempo y a lo ancho de Europa, C.Henry y P.Tannery emprendieron por fin en 1891, la publicación de las *Oevres de Fermat*, concluyendo la magna obra de cuatro grandes volúmenes en 1912.

Posteriormente C. de Waard, en sus investigaciones que condujeron a la publicación de la *Correspondencia de Mersenne*, descubrió en Groningen y Florencia algunas cartas y memorias de Fermat. La mas importante (y la única sobre el tema de máximos y mínimos) es la *Carta a Brûlart*, de 1643, que fue publicada por Giovannozi en 1919, e incorporada en 1922 al S*upplément* a los Volúmenes I-IV de las *Oeuvres de Fermat*.

NUEVAS EDICIONES DE *LA GEOMETRÍA* DE DESCARTES


RENATI DES CARTES
GEOMETRIA,
Unà cum Notis
FLORIMONDI DE BEAUNE,
In Curia Blesensi Consiliarii Regii, & Commentariis illustrata,
Operâ atque studio
FRANCISCI à SCHOOTEN,
in Acad. Lugd. Batav. Matheseos Professoris.
AB EODEM DUM VIVERET DILIGENTER RECOGNITA,
Nunc verò à Viro Clariss. denuo revisa, & ab innumeris mendis, quibus priores Editiones scatebant, repurgata, unà cum notis quibusdam & animadversionibus tumultuariis in universum Opus, huic quartæ editioni recens adjectis.
COMPENDIUM MUSICÆ.
Cum Gratia & Privilegio Sacræ Cæs. Majest.
FRANCOFURTI AD MOENUM,
Sumptibus FRIDERICI KNOCHII, Bibliop.


LA
GEOMETRIE
DE
M. DESCARTES.
DIVISÉE EN TROIS LIVRES.
Le premier. Des Problêmes qu'on peut construire n'y employant que des cercles & des lignes droites.
Le second. De la nature des lignes courbes.
Le troisiéme. De la construction des Problêmes qui sont Solides, ou plus que Solides.
A PARIS,
Chez CHRISTOPHE DAVID, prés des Augustins, à l'Image saint Christophe.
M. DCCV.
Avec Approbation & Privilege du Roy.

1. **Edición latina de 1695 de van Schooten de *La Geometría* de Descartes.**
2. **Edición francesa de 1705 de *La Geometría* de Descartes.**

A diferencia de las obras de Fermat, *La Geometría* de Descartes tuvo numerosas ediciones, tanto en latín como en francés, algunas de ellas con prolijos comentarios para hacerla más inteligible, es decir, que eran auténticas ediciones críticas. Por ello los rudimentos de Geometría Analítica de *La Geometría* de Descartes recibieron una amplia difusión.

La Edición latina de 1695 de van Schooten contiene entre otros elementos los siguientes:

- **Geometria, una cum notis Florimondi De Beaune.**
- **Francisci à Schooten In Geometriam Renati Des Cartes Commentarii.**
- **Johannis Huddenii Epistola prima de Reductione Æquationum.**
- **Johannis Huddenii Epistola secunda de maximis et minimis.**
- **Renati Des Cartes Principia Matheseos Universalis seu Introductio ad Geometriæ Methodum.**
- **conscripta ab. Er. Bartholino. De Æquationum Natura, Constitutione, et Limitibus Opuscula Duo.**
- **Incepta à Florimondo De Beaune ab Erasmio Bartholino.**
- **Johannis De Witt Elementa Curvarum Linearum edita operà Francisci à Schooten.**
- **Francisci à Schooten Tractatus de Concinnandis Demonstrationibus Geometricis ex Calculo Algebraico.**

DESCARTES FILÓSOFO, MATEMÁTICO Y ESCRITOR

Retrato de Descartes como escritor (Biblioteca Nacional de París, 1791).

La búsqueda cartesiana de la unidad del saber, incardinó la mente filosófica de Descartes hacia la Matemática, ciencia en la que encuentra el modelo paradigmático en el rastreo de las primeras verdades absolutamente ciertas que pudieran servirle de apoyo y fundamento en la reconstrucción de todo el edificio científico y filosófico, pues aspira a dar cuenta y razón de la totalidad del saber, con la pretensión de cimentar los principios de la Filosofía con la certidumbre de las Matemáticas, en palabras de Spinoza. Pero más que en los extensos conocimientos particulares de las Matemáticas aprendidos en su etapa escolar, Descartes se fija especialmente en el modo de proceder en la investigación matemática, en los rasgos característicos de la propia Matemática, en el espíritu y la naturaleza intelectual de la práctica del quehacer matemático, llegando a afirmar que las cosas que entran en la esfera del conocimiento se encadenan como las proposiciones geométricas (DM.AT,VI,19).

Profundas reflexiones sobre las condiciones intelectuales que habían concurrido en el pasado y gravitaban en el presente sobre toda esta actividad mental, relacionada con el trabajo matemático, que Descartes plasma en su obra de juventud, *Reglas para la dirección del espíritu*, le llevan a concebir el «*Método para conducir correctamente la razón y buscar la verdad en las ciencias*» de *El Discurso del Método*, acta fundacional del llamado Cartesianismo, corriente filosófica que se dice basada en el método de la razón, lo que hay que entender como «*método de la razón matemática*», ya que las reglas de este *Método* de Pensamiento son extraídas de los procedimientos geométricos y están inspiradas, según Descartes, en los saberes matemáticos. En este sentido se quiere indicar que la Matemática es la base racional del pensamiento cartesiano, de modo que el llamado racionalismo cartesiano está poseído de un acusado matematicismo.

CITAS MEMORABLES SOBRE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

1. **Con *La Dióptrica* y *Los Meteoros* he querido únicamente convencer de que mi método es mejor que el ordinario y creo que lo he demostrado con mi *Geometría*, al resolver en las primeras páginas una cuestión que, según Pappus, no había podido resolver ningún geómetra de la antigüedad.**
   Descartes. *Carta al Padre Mersenne* de diciembre de 1637 [AT.I.478]

2. **Todos los problemas de Geometría pueden reducirse fácilmente a términos tales, que no es necesario conocer de antemano más que la longitud de algunas líneas rectas para construirlos.**
   Descartes. *La Geometría* [G.AT.VI. 369].

3. **Se pueden construir todos los problemas de la geometría ordinaria sin hacer más que lo poco que está comprendido en las cuatro figuras que he explicado. No creo que los antiguos lo hayan observado; pues en tal caso ellos no hubieran escrito libros tan voluminosos.**
   Descartes. *La Geometría* [G.AT.VI. 376]

4. **Yo no temeré introducir los términos de la Aritmética en la Geometría, a fin de hacerme más inteligible.**
   Descartes. *La Geometría* [G.AT.VI, 371].

5. **[...] Para retenerlas o comprenderlas [las relaciones aritméticas y las figuras geométricas] era necesario explicarlas mediante algunas cifras lo más cortas que fuera posible; de esta manera tomaría lo mejor del Análisis geométrico y del Álgebra y corregiría los defectos del uno por medio de la otra.**
   Descartes. *El Discurso del Método* [DM.AT.VI,20].

6. **Muy acertadamente el arte inventó la escritura, fiados en cuya ayuda nada en absoluto encomendaremos ya a la memoria, sino que, dejando a la fantasía en su totalidad libre para las ideas presentes, escribiremos en el papel cuanto haya de ser retenido; y ello por medio de signos muy breves.**
   Descartes. *Reglas para la dirección del espíritu* (RXVI.AT.X.454–455]

7. **Para encontrar todas las propiedades de las líneas curvas basta con saber la relación que tienen todos sus puntos con los de las líneas rectas y conocer la manera de trazar otras líneas que las corten en todos esos puntos en ángulo recto. [...]. Y me atrevo a decir que éste es el problema más útil y más general no sólo que yo conozca, sino aun que yo haya anhelado jamás conocer en Geometría**
   Descartes. *La Geometría* [G.AT.VI. 412–413].

8. **Si se quiere resolver algún problema, debe de antemano considerarse como ya resuelto, y dar nombre a todas las líneas que parecen necesarias para construirlo, tanto a las que son desconocidas como a las otras [...] y encontrar la manera de expresar una misma cantidad de dos maneras: lo que se denomina una ecuación.**
   Descartes. *La Geometría* [G.AT.VI,372].

9. **Y yo espero que nuestros descendientes me estarán agradecidos no sólo por las cosas que aquí he explicado [en *La Geometría*], sino también por aquellas que he omitido voluntariamente a fin de dejarles el placer de descubrirlas.**
   Descartes. *La Geometría* [G.AT.VI. 485].

10. **Siempre que en una ecuación final se encuentran dos cantidades incógnitas, se tiene un lugar geométrico, describiendo el extremo de una de ellas una línea recta o curva. La línea recta es simple y única en su género; las especies de curvas son en número infinito, círculo, parábola, elipse, etc.**
    Fermat. *Ad Locos Planos et Solidos Isagoge* [TH.OF.III.85]

CITAS MEMORABLES SOBRE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

11. Descartes mediante un nuevo método hizo pasar de las tinieblas a la luz cuanto en las Matemáticas había permanecido inaccesible a los antiguos y todo cuanto los contemporáneos habían sido incapaces de descubrir.
    Spinoza. *Los Principios de la Filosofía cartesiana.*

12. Mientras el Álgebra y la Geometría han estado separadas, su progreso ha sido lento y sus aplicaciones limitadas; pero cuando estas dos ciencias han sido vinculadas, se han prestado su fuerza mutuamente y han caminado juntas hacia la perfección.
    Lagrange. *Leçons élémentaires de mathématiques* (1795).

13. Lo que ha inmortalizado el nombre de este gran hombre, es la aplicación que ha sabido hacer del Álgebra a la Geometría, una idea de las más vastas y felices que haya tenido el espíritu humano, y que será siempre la llave de los más profundos descubrimientos no solamente en la Geometría, sino en todas las ciencias físico-matemáticas.
    D'Alembert. *Discours Préliminaire de l'Encyclopédie* (Orbis, Barcelona, 1984, pp.84,85).

14. Mientras la Geometría Analítica ofrece su característico método general y uniforme como forma de proceder en la resolución de problemas. [...], la otra [la Geometría Sintética clásica] actúa al azar y depende completamente de la sagacidad de los que la emplean.
    Poncelet. *Traité des propriétés projectives des figures* (1822).

15. La Geometría analítica, mucho más que cualquiera de sus especulaciones metafísicas, inmortaliza el nombre de Descartes y constituye el máximo paso hecho en el progreso de las ciencias exactas.
    J. Stuart Mill. (citado por E.Bell en *Les grands mathématiciens*. Payot, París, 1950. p.46).

16. Descartes y Fermat descubrieron los dos aspectos del principio fundamental de la Geometría Analítica, –uno admite curvas en la Geometría si es posible encontrar su ecuación; el otro estudia curvas definidas por ecuaciones. [...]. He aquí uno de los más significativos hitos de toda la Historia de las Matemáticas.
    C.Boyer. *History of Analytic Geometry*. Scripta Math. Yeshiva Univ. New York, 1956, pp. 75,102.

17. La Geometría Analítica de Descartes ha afectado probablemente a la vida humana más profundamente [...] que la máquina de vapor o el aeroplano.
    L.Hull. *Historia y Filosofía de la Ciencia,* Ariel, Barcelona, 1981, p.268.

18. La invención de la Geometría Analítica por Pierre Fermat se ha visto ensombrecida por sus contribuciones mejor conocidas a la Teoría de Números. La tardanza de Fermat en publicar disminuyó su influencia [...]. En su lugar la gloria de la Geometría Analítica fue a parar al primero que la publicó, René Descartes.
    W.Dunham,W. *El Universo de las Matemáticas*. Pirámide. Madrid, 1995. Cap.7. p.391.

19. [Con la Geometría Analítica de Descartes] el plano de Euclides, hasta ese momento en blanco, se veía ahora invadido por números que medían longitudes e indicaban posiciones. [...]. La fusión de la Geometría y del Álgebra [la Geometría Analítica] continúa siendo el matrimonio más feliz de todas las Matemáticas.
    W.Dunham,W. *El Universo de las Matemáticas*. Pirámide. Madrid, 1995. pp. 391, 395.

20. La Geometría Analítica de Descartes cambió la faz de las Matemáticas.
    M.Kline. *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*, 1992. vol.1, p.425.

La Geometría Analítica como instrumento del cálculo infinitesimal

La época de Fermat y Descartes da a luz multitud de métodos y técnicas infinitesimales desarrolladas por Kepler, Cavalieri, Torricelli, Pascal, Roberval, Wallis, Barrow, el propio Fermat, y otros matemáticos, y que aplicadas a la resolución de los problemas de cuadraturas y tangentes, prepararían el ambiente para que poco más tarde, Newton y Leibniz, al separar la ganga geométrica que había en esos trabajos destilaran el algoritmo universal que constituye el Cálculo Infinitesimal. Pues bien, la Geometría Analítica desarrollada por Fermat y Descartes tuvo un papel decisivo en todo este proceso de alumbramiento de las técnicas del Cálculo del siglo XVII . El impacto del Álgebra no tiene lugar sólo sobre la Geometría sino también sobre el Cálculo Infinitesimal a través de la propia Geometría Analítica, apareciendo como resultados positivos los intentos de aritmetización del método de exhaución de los griegos, que conducirá a la utilización incipiente y subrepticia de los límites.

La investigación infinitesimal tiene lugar en el planteamiento y resolución de problemas de cuadraturas y tangentes sobre curvas. Cabe decir que pioneros de los métodos y técnicas del Cálculo del siglo XVII, como Kepler e incluso Cavalieri, no tuvieron a su disposición los desarrollos geométricos de Fermat y Descartes, de modo que el número de curvas que manejaron y a las que podían aplicar las técnicas algorítmicas del Cálculo que iban descubriendo era muy limitado, prácticamente las mismas que conocieron los griegos –las cónicas de Menecmo y Apolonio, la cisoide de Diocles, la concoide de Nicomedes, la cuadratriz de Hipias, la Hipopede de Eudoxo, la espiral de Arquímedes y pocas más–. Además, todavía manejaron las curvas en el farragoso lenguaje del *Álgebra Geométrica* mediante relaciones de áreas y proporciones.

Los trabajos de Fermat y Descartes en la *Isagoge y La Geometría*, respectivamente, abren el camino a la introducción sistemática de nuevas curvas y a un manejo más útil, sencillo y operativo, mediante las ecuaciones de las curvas. En efecto, de acuerdo con el *Principio fundamental de la Geometría Analítica:*

> «*Siempre que en una ecuación final se encuentran dos cantidades incógnitas, se tiene un lugar geométrico,* [...]»,

las curvas planas están determinadas por la ecuación canónica asociada, y por tanto, por el simple hecho de escribir una ecuación una nueva curva queda definida en el panorama geométrico para la indagación de problemas infinitesimales vinculados a ella, de modo que aparece en el ambiente matemático de los dos primeros tercios del siglo XVII una ingente cantidad de nuevas curvas que se definen a propósito de la introducción de la Geometría Analítica, entre las que sobresalen: el caracol de Pascal, el folium de Descartes o galande de Barrow, la curva de Lamé, la espiral logarítmica, la kappa-curva, la curva tangentoidal, pero sobre todo las parábolas, hipérbolas y espirales generalizadas o de orden superior (llamadas de Fermat por ser él quien las introdujo) y por encima de todas ellas, en cuanto a importancia, la cicloide, la reina de todas las curvas, llamada la *Helena de la Discordia*, por las polémicas que surgieron sobre cuestiones de prioridad y acusaciones de plagio acerca de la resolución de problemas vinculados a ella. A ella dedicaron también Fermat y Descartes importantes trabajos.

El vasto horizonte de nuevas curvas promueve la aparición de multitud de variadas técnicas algorítmicas infinitesimales al disponer de un amplio material geométrico al que aplicarlas. En el caso de Fermat, sus magníficas contribuciones en el terreno del Cálculo Infinitesimal, tienen su raíz en su propia Geometría Analítica, puesto que él mismo introduce parte de las curvas sobre las que se construirían las técnicas del Cálculo.

La propia Geometría Analítica en sí misma era un instrumental algorítmico de primer orden, por eso jugó un papel decisivo en la investigación Infinitesimal. Las Geometrías Analíticas de Fermat y Descartes permiten utilizar la expresión algebraica de la ecuación de una curva para encontrar sus elementos geométricos más notables (diámetros, ejes, centros, etc.) y, en particular, en el terreno infinitesimal resolver los problemas de cuadraturas y tangentes relacionadas con la curva. Es decir, la ecuación de la curva es un elemento esencial para esclarecer las propiedades y encontrar los elementos relevantes de la curva. La Geometría Analítica traslada los problemas infinitesimales de la Geometría al Álgebra, la cual por su carácter operacional, permite, tras la realización de cálculos y en particular la resolución de ecuaciones, regresar a la geometría del problema, para encontrar y solucionar cuestiones geométricas. Como consecuencia, la tarea de probar un teorema o resolver un problema geométrico de índole infinitesimal se conduce de forma muy eficiente a probarlo o resolverlo mediante el Álgebra, de modo que la aplicación de la Geometría Analítica proporciona una potente técnica de resolución de problemas infinitesimales, y algo que es todavía más importante, un poderoso instrumento de investigación geométrica en el ámbito infinitesimal. Se comprende entonces por qué la aparición de la Geometría Analítica en el horizonte matemático del siglo XVII produjo una brillante eclosión de multitud de métodos y técnicas infinitesimales que condujeron al descubrimiento de Newton y Leibniz.

Mencionemos a título de ejemplo, a Fermat y Wallis, dos de los matemáticos más representativos de la etapa empírica del cálculo anterior a Newton y Leibniz.

Fermat trasciende del infinitesimal geométrico e instaura lo infinitesimal en el terreno de lo numérico, y ello a pesar de Aristóteles, que había desterrado lo infinitamente pequeño de la Aritmética. La legitimidad de lo infinitesimal en la Aritmética queda asegurada por la heurística algorítmica de la Geometría Analítica. En efecto, el puente de doble sentido que ésta establecía entre Geometría y Álgebra, permitía hacer corresponder infinitesimales aritméticos a los ya clásicos infinitesimales geométricos, que hasta el momento tan útiles habían sido, y a partir de ahí utilizar todas las técnicas algebraicas para facilitar la sumaciones que planteaban sus cuadraturas aritméticas de las parábolas generalizadas $y=x^n$.

Wallis manifestó una prodigiosa capacidad aritmetizadora, sobre todo en su obra *Arithmetica Infinitorum* de 1655, donde consigue realizar la cuadratura de las curvas $y=x^{p/q}$. Al corriente del Álgebra literal de Vieta, de los métodos analíticos de Descartes y Fermat y de las tendencias hacia los límites de los matemáticos franceses (Roberval, Fermat, Pascal,...), Wallis se propone rescatar e independizar la Aritmética de la representación geométrica y romper con el *Álgebra Geométrica* de los griegos. Wallis llega incluso a presentar aritméticamente lo que para los helenos era la intocable *Teoría general de la Proporción* de Eudoxo, que aparecía en el libro V de *Los Elementos* de Euclides. Con ello Wallis es, entre los predecesores del Cálculo, quien más próximo está a la idea de límite y quien con mayor soltura la utiliza, al menos en un nivel intuitivo. Los métodos algebraicos introducidos en la Geometría por Vieta, Fermat y Descartes, así como los instrumentos de computación numérica fundamentados en los logaritmos de Napier y Briggs, permiten a Wallis despegarse de los métodos geométricos de los antiguos, a los que estuvo todavía vinculado Cavalieri, para, al igual que había aritmetizado *Las Cónicas* de Apolonio (en su obra *Tractatus de sectionibus conicis* de 1665), aritmetizar los indivisibles de aquél, a base de sustituir los infinitos indivisibles geométricos de una figura que se quiere cuadrar por indivisibles aritméticos (de ahí el nombre de su obra principal) con una longitud determinada cada uno, de manera que mediante el uso de fórmulas sobre series de números, obtiene las cuadraturas al tomar n «*muy grande*» (paso al límite encubierto), es decir, al hacer que n tienda a infinito. Es precisamente en este contexto donde Wallis introduce para la posteridad el símbolo ∞ del infinito. La fuente de inspiración del trabajo de Wallis es el método de los indivisibles de Cavalieri pero el instrumento de trabajo es la traducción algebraica de los problemas geométricos que permite la Geometría Analítica de Fermat y Descartes. En Wallis es patente la superación de la limitación pitagórica de la inconmensurabilidad mediante la utilización de la construcción geométrico-algebraica de las operaciones aritméticas que había introducido Descartes al comienzo de *La Geometría* y que Wallis aplicará precisamente a la aritmetización de los indivisibles destilando de aquí la concepción intuitiva de límite que aplica. Wallis contribuye a dar carta de naturaleza aritmética a lo irracional, supera el imperativo pitagórico de considerar lo irracional sólo en el campo de la Geometría, y remueve uno de los obstáculos que impedía la formulación del concepto de límite y por tanto la elaboración rigurosa ulterior del nuevo Cálculo.

LA GEOMETRÍA ANALÍTICA COMO INSTRUMENTO DEL CÁLCULO INFINITESIMAL

La Geometría Analítica alumbrada por Fermat y Descartes tuvo una intervención fundamental en el perfeccionamiento de las técnicas del Cálculo del siglo XVII. La investigación infinitesimal se nutre ante todo del planteamiento y resolución de problemas de cuadraturas y tangentes sobre curvas. Los desarrollo s de Fermat y Descartes en *La Introducción a los Lugares Planos y Sólidos y La Geometría*, respectivamente, abren el camino a la introducción sistemática de nuevas curvas y a un manejo más útil, sencillo y operativo, mediante las ecuaciones de las curvas.

En efecto, el *Principio fundamental de la Geometría Analítica*, expresado en lenguaje moderno, consiste en el descubrimiento de que las ecuaciones indeterminadas en dos incógnitas, f(x,y)=0, se corresponden con lugares geométricos, en general curvas, determinadas por todos los puntos cuyas coordenadas relativas a dos ejes satisfacen la ecuación. Un aspecto de esta idea es expresada por Descartes en el Libro II de *La Geometría* de la siguiente forma (G.AT,VI, 412):

> **«*Para encontrar todas las propiedades de las líneas curvas basta con saber la relación que tienen todos sus puntos con los de las líneas rectas,* [...].»**

El aspecto complementario de la idea cartesiana es expresado por Fermat casi al principio de la *Introducción a los Lugares Planos y Sólidos* con estas significativas palabras (TH.OF.III.85):

> **«*Siempre que en una ecuación final se encuentran dos cantidades incógnitas, se tiene un lugar geométrico, describiendo el extremo de una de ellas una línea recta o curva.*»**

En ambas sentencias se resume uno de los principios fundamentales de la Historia de la Matemática, que instaura los cimientos de la Geometría Analítica. De acuerdo con ello, las curvas planas están determinadas por la ecuación canónica asociada, trasunto de las propiedades y los elementos característicos de la curva, es decir, la ecuación de la curva establece una relación entre las propiedades algebraicas de la ecuación y las propiedades geométricas de la curva. Por el simple hecho de escribir una ecuación una nueva curva queda definida en el panorama geométrico para la indagación de problemas infinitesimales vinculados a ella, de modo que aparece en el ambiente matemático de los dos primeros tercios del siglo XVII una ingente cantidad de nuevas curvas que se definen a propósito de la introducción de la Geometría Analítica. Entre ellas sobresalen: el caracol de Pascal, el folium de Descartes o galande de Barrow, la curva de Lamé, la espiral logarítmica, la kappa-curva, la curva tangentoidal, pero sobre todo las parábolas, hipérbolas y espirales generalizadas o de orden superior –llamadas de Fermat por ser él quien las introdujo– y la más famosa de todas, la cicloide.

El amplio elenco de nuevas curvas promueve la aparición de multitud de variadas técnicas algorítmicas infinitesimales al disponer de un extenso material geométrico al que aplicarlas. Las Geometrías Analíticas de Fermat y Descartes permiten utilizar la expresión algebraica de la ecuación de una curva para encontrar sus elementos geométricos más notables –diámetros, ejes, centros, etc.– y, en particular, en el terreno infinitesimal resolver los múltiples problemas de cuadraturas y tangentes relacionadas con la curva.

LA GEOMETRÍA ANALÍTICA COMO INSTRUMENTO DEL CÁLCULO INFINITESIMAL

La Geometría Analítica traslada los problemas infinitesimales de la Geometría al Álgebra, la cual por su carácter operacional, permite, tras la realización de cálculos y en particular la resolución de ecuaciones, regresar a la geometría del problema, para encontrar y solucionar cuestiones geométricas. Como consecuencia, la tarea de probar un teorema o resolver un problema geométrico de índole infinitesimal se conduce de forma muy eficiente a probarlo o resolverlo mediante el Álgebra, de modo que la aplicación de la Geometría Analítica proporciona una potente técnica de resolución de problemas infinitesimales, y algo todavía más importante, un poderoso instrumento de exploración e investigación geométricas en el ámbito infinitesimal.

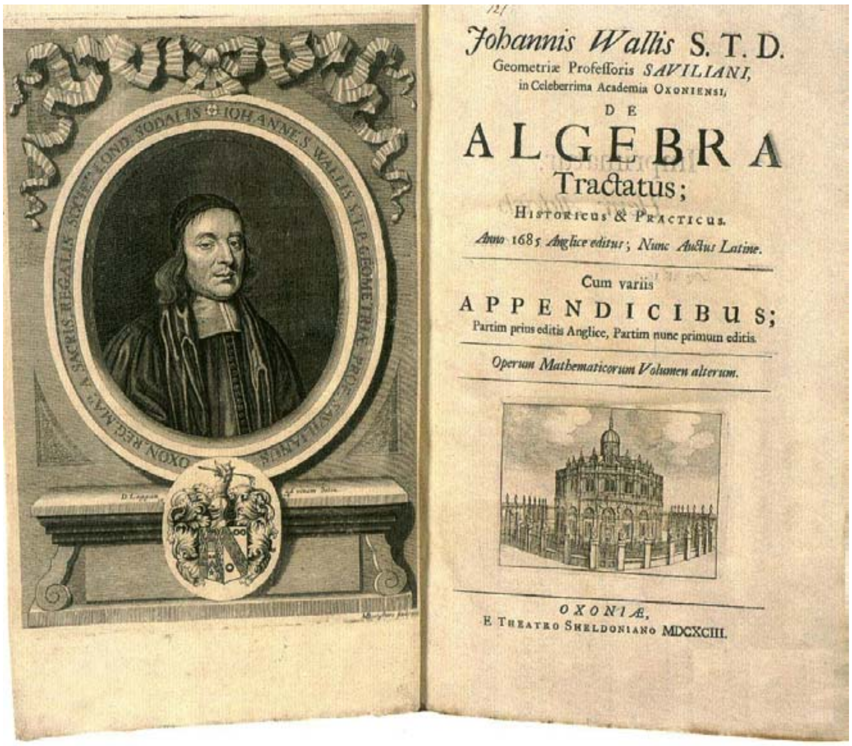
La irrupción de la Geometría Analítica en el panorama matemático del siglo XVII propicia una unificación de los problemas infinitesimales. La sustitución de las complejas construcciones geométricas de la Geometría Sintética por automáticas operaciones algebraicas permite la aplicación de las mismas técnicas a problemas de naturaleza geométrica diversa, además de poner de manifiesto el proceso heurístico de descubrimiento que tiene lugar de consuno con la justificación de las diversas técnicas y métodos infinitesimales.

En las cuadraturas y cubaturas del Cálculo Integral, la Geometría Analítica favorece una progresiva aritmetización del *método de exhaución* de los griegos –cuya aplicación dependía de manera esencial de la forma geométrica particular de la figura a cuadrar–. Con ello se va favoreciendo una incipiente y subrepticia utilización de los límites, que aunque en un nivel intuitivo, su uso va siendo cada vez más general

En cuanto a las tangentes del Cálculo Diferencial, la generalidad del Álgebra frente a la especificidad de la Geometría, permite, por ejemplo, que en la traducción geométrico-algebraica en que consiste la Geometría Analítica, cada caso particular del trazado geométrico de la tangente, que es diferente y específico para cada curva, de acuerdo con su naturaleza geométrica, deje de serlo y se pueda aplicar, mediante un proceso analítico, el mismo procedimiento a todas las curvas de las que se conozca su expresión analítica –su ecuación–, es decir, el proceso algorítmico de cálculo de una derivada. Así pues, la Geometría Analítica permite sustituir la construcción geométrica de la tangente, que es singular para cada curva según su estructura geométrica, por una operación analítica, única y universal: «*el cálculo de una derivada*»

He aquí una muestra muy significativa de la trascendencia de la Geometría Analítica como herramienta que simplifica y reduce una extensa tipología de problemas geométricos –el cálculo de cuadraturas y cubaturas se reconduce al cálculo de un límite, mientras el trazado de las tangentes de las diversas curvas se reduce a un único y concreto problema analítico: el cálculo de la derivada–.

La aplicación de La Geometría Analítica al planteamiento y resolución de los problemas infinitesimales fue produciendo una progresiva transformación analítica de la Geometría Sintética Infinitesimal de Arquímedes en el algoritmo infinitesimal del Análisis Matemático de Newton y Leibniz. Por eso la Geometría Analítica de Fermat y Descartes tuvo una importancia trascendental en el fecundo proceso de algoritmización de los métodos y técnicas infinitesimales que condujo al descubrimiento del Cálculo Infinitesimal por Newton y Leibniz.



John Wallis. ***Operum mathematicorum*** **(Oxford, 1693).**

Portada del libro *De Algebra Tractatus* de su primera edición latina, que es el primer volumen de las obras matemáticas de Wallis.

En esta obra Wallis se recoge una auténtica ascendencia del Cálculo Infinitesimal:

1. **Método de Exhaución de Arquímedes.**
2. **Método de indivisibles de Cavalieri.**
3. **Aritmética de infinitos de Wallis.**
4. **Método de las series infinitas de Newton.**

Puede decirse que el Cálculo anterior a Newton y Leibniz es una ingente casuística de métodos heurísticos, aplicados a problemas geométricos específicos, que se resuelven mediante técnicas *ad hoc* respecto de las correspondientes figuras geométricas, obteniéndose multitud de resultados particulares que, al traducirlos al lenguaje moderno, muestran los conceptos esenciales del Cálculo, que de alguna manera yacían en ellos, pero de forma tan fragmentaria que sólo se referían a problemas individuales y no a teorías generales, aunque la perspectiva de generalización estaba implícita en esos métodos. Es precisamente la Geometría Analítica de Fermat y Descartes la que favorece este proceso de búsqueda del algoritmo válido en general e independiente de la estructura geométrica intrínseca de cada problema. La generalidad del Álgebra frente a la especificidad de la Geometría, permite, por ejemplo, que en la traducción geométrico-algebraica en que consiste la Geometría Analítica, cada caso particular del trazado geométrico de la tangente, que es diferente y específico para cada curva, de acuerdo con su naturaleza geométrica, deje de serlo y se pueda aplicar, mediante un proceso analítico, el mismo procedimiento a todas las curvas de las que se conozca su expresión analítica –su ecuación–, es decir, el proceso algorítmico de cálculo de una derivada.

Es Fermat como en otros muchos aspectos, el que más se aproxima a nuestra idea de derivada como algoritmo general para calcular máximos y mínimos y trazar tangentes. En efecto, veamos su primera memoria sobre el tema, llamada *Método para la investigación de Máximos y Mínimos* (*Methodus ad disquirendam maximan et miniman et de tangentibus linearum curvarum*) (TH.OF.III.121-123).

Este documento que Fermat compone entre 1629 y 1636 es un procedimiento puramente algorítmico desprovisto de todo fundamento demostrativo, donde Fermat introduce la técnica de la «*adigualdad*». Mersenne la recibe a finales de 1637 y la envía a Descartes en enero de 1638. Como segunda parte de este tratado, Fermat describe el primer ejemplo de aplicación del método de máximos y mínimos al trazado de las tangentes a las líneas curvas, la tangente a la parábola, que provoca la tempestuosa polémica de Descartes con Fermat sobre los máximos y mínimos y las tangentes. Denominaremos a esta memoria el *Methodus* y la transcribiremos íntegramente, a continuación, respetando la secuencia del contenido, pero separando éste en párrafos que, a nuestro juicio, resultan significativos, lo que facilitará su aplicación.

En el *Methodus* aparece por primera vez la genial y fructífera idea de incrementar una magnitud asimilable a nuestra variable independiente (lo que desde entonces se ha convertido en la esencia del Cálculo Diferencial). Fermat se expresa con estas palabras:

Método de Fermat para la investigación de Máximos y Mínimos (*Methodus*)

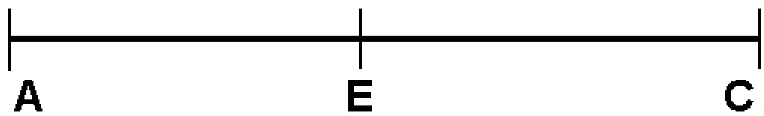
(TH.OF.III.121–122):

Toda la teoría de la Investigación de Máximos y Mínimos supone la consideración de dos incógnitas y la única regla siguiente:

1. **Sea a una incógnita cualquiera del problema (que tenga una, dos o tres dimensiones, según convenga al enunciado).**
2. **Se expresará la cantidad máxima o mínima por medio de a en términos que pueden ser de cualquier grado.**
3. **Se sustituirá a continuación la incógnita original a por a+e, y se expresará la cantidad máxima o mínima por medio de a y e, en términos que pueden ser de cualquier grado.**
4. **se «*adigualará*» para hablar como Diofanto, las dos expresiones de la cantidad máxima o mínima.**
5. **Se eliminarán los términos comunes de ambos lados, tras lo cual resultará que a ambos lados habrá términos afectados de e o de una de sus potencias.**
6. **Se dividirán todos los términos por e, o por alguna potencia superior de e, de modo que desaparecerá la e, de al menos uno de los términos de uno cualquiera de los dos miembros.**
7. **Se suprimirán, a continuación, todos los términos donde todavía aparece la e o una de sus potencias, y se iguala lo que queda, o bien si en uno de los miembros no queda nada, se igualará, lo que viene a ser lo mismo, los términos afectados con signo positivo a los afecta dos con signo negativo.**
8. **La resolución de esta última ecuación dará el valor de a, que conducirá al máximo o mínimo, utilizando la expresión original.**

He aquí un ejemplo:

"Sea dividir una recta AC en E, de manera que AExEC sea máximo".



Pongamos AC=b.

1. **Sea a uno de los segmentos, el otro será b–a.**
2. **El producto del que se debe encontrar el máximo es $ba-a^2$.**
3. **Sea ahora a+e el primer segmento de b, el segundo será b–a–e, y el producto de segmentos: $ba-a^2+be-2ae-e^2$.**
4. **Se debe «*adigualar*» al precedente: $ba - a^2$.**
5. **Suprimiendo términos comunes: $be \approx 2ae + e^2$.**
6. **Dividiendo todos los términos: $b \approx 2a + e$.**
7. **Se suprime la e: $b = 2a$.**
8. **Para resolver el problema se debe tomar por tanto la mitad de b.**

Es imposible dar un método más general.

La vaguedad y el laconismo de que Fermat hace gala en el *Methodus*, abona las sistemáticas interpretaciones de su método en términos de Cálculo Diferencial o método de límites, que manifiestan que en el *Methodus* subyace el cálculo de una derivada que se iguala a cero. Realmente es una verdadera tentación reproducir el desarrollo de Fermat poniendo a=x, y la cantidad a maximizar o minimizar f(x). La regla nos daría:

4 y 5: $f(x+e) - f(x) \approx 0$, 6: $\frac{f(x+e)-f(x)}{e} \approx 0$,

7 y 8: $\left[\frac{f(x+e)-f(x)}{e}\right]_{e=o}$

Interpretando el desarrollo de Fermat en términos actuales, diríamos que el valor x que hace tomar a f(x) un valor extremal, debe ser solución de la ecuación:

$$f'(x)=\lim_{e\to o}\left[\frac{f(x+e)-f(x)}{e}\right]=0$$

Bajo esta interpretación Fermat se habría anticipado a la expresión de la derivada:

$$f'(x)=\lim_{e\to o}\left[\frac{f(x+e)-f(x)}{e}\right],$$

introducida por Cauchy en 1820, y esto avalaría las opiniones acerca de Fermat como verdadero descubridor del Calculo Diferencial, que mantuvieron Lagrange, Laplace y Fourier y otros matemáticos franceses.

Estudios de otras memorias de Fermat sobre máximos y mínimos muestran la falta de base de esta anacrónica interpretación del método de Fermat, de modo que se puede concluir que el *Methodus* no se basa en ningún concepto infinitesimal sobre límites, sino en conceptos algebraicos puramente finitos, derivados de la Teoría de Ecuaciones de Vieta. En efecto, para Fermat la e no es que tienda a cero, sino que en realidad la hace igual a cero.

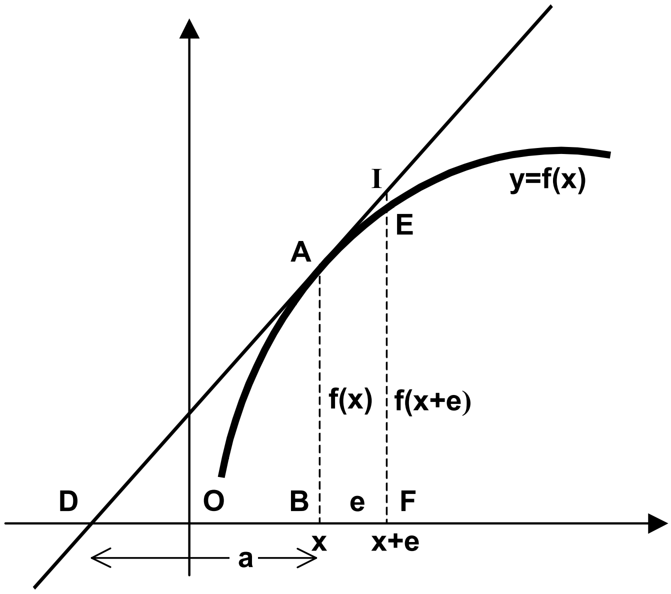
El *Methodus* atrajo, precisamente por su falta de claridad, una ardiente atención por parte de la comunidad matemática del momento, entre 1636 y 1638. E.Pascal, Roberval, Mydorgue, Hardy y Desargues, manifestaron su opinión sobre el mismo, pero fue Descartes quien se proyectó decisivamente sobre él, a propósito de su aplicación a la determinación de tangentes, entrando en una agria polémica con Fermat que tuvo la feliz virtualidad de ir obligando a éste, progresivamente con más intensidad, a buscar y divulgar la prueba de validez de su método, de modo que a medida que iba proporcionando la justificación del algoritmo, iba revisando los fundamentos de su método, a la luz de los nuevos horizontes que le abre su propio desarrollo de la Geometría Analítica y la lectura de *La Geometría* de Descartes.

Estos esfuerzos de Fermat darían como fruto varias memorias más sobre el método de máximos y mínimos, donde intenta justificar sus fundamentos, sobre todo en cuanto se aplica a las tangentes. Aunque la idea del «*cambio de variable*» o tránsito desde a hasta a+e, mediante el «*incremento e*», que es la esencia del Cálculo Diferencial, se destila del *Methodus*, la propia naturaleza de e como variable algebraica finita le impidió cruzar a Fermat en el tema de máximos y mínimos la barrera entre lo finito y lo infinitesimal. Y es que en realidad los problemas de máximos y mínimos de Fermat son problemas de construcciones geométricas más que de optimización de cantidades.

Veamos ahora una sintética aproximación, en lenguaje actual, al procedimiento de Fermat para el trazado de las tangentes a una curva algebraica y=f(x), derivado de su método de máximos y mínimos, que tanta polémica provocó en el círculo matemático del Padre Mersenne por la intervención de Descartes y que posteriormente ha hecho que los matemáticos franceses, y en particular Cauchy, hayan considerado a Fermat ya no sólo como predecesor sino como el auténtico creador del Cálculo Diferencial.

EL MÉTODO DE FERMAT PARA LAS TANGENTES EN TÉRMINOS INFINITESIMALES DE LÍMITES Y DERIVADAS

Sea la curva algebraica y =f(x).



Llamemos: DB=a, BF=e.

La *adigualdad* FI ≅ FE y la semejanza de triángulos ΔABD, ΔIFD, conduce a la *adigualdad*:

$$\frac{a}{f(x)} \cong \frac{a+e}{f(x+e)}$$

sobre la que se aplicarán los pasos habituales de la regla del *Methodus.*

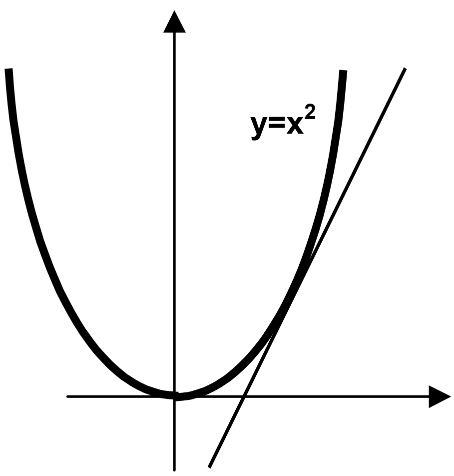
A partir de

$$\frac{a}{f(x)} \cong \frac{a+e}{f(x+e)} \cong \frac{e}{f(x+e)-f(x)}$$

se deduce: $\dfrac{f(x)}{\dfrac{f(x+e)-f(x)}{e}} \cong a$,

donde la expresión f(x+e)–f(x) resulta ser divisible por e si f(x) es una función algebraica.
Simplificando y haciendo e igual a cero, se obtiene para la subtangente a, una expresión que es equivalente a $\dfrac{f(x)}{f'(x)}$, donde f′(x) es la derivada formal de la función algebraica y=f(x). Pero como la pendiente de la recta tangente es precisamente $m=\dfrac{f(x)}{a}$, resulta que el desarrollo de Fermat identifica la pendiente de la recta tangente a la curva y=f(x) con la derivada formal f′(x).

Apliquemos el método a la parábola y=f(x)=x².



Escribimos la primera *adigualdad*: $\dfrac{a}{f(x)} \cong \dfrac{a+e}{f(x+e)}$,

y hacemos operaciones:

$$\frac{a}{x^2} \cong \frac{a+e}{(x+e)^2} \cong \frac{e}{(x+e)^2-x^2} = \frac{e}{e^2+2xe} = \frac{1}{e+2x}$$

Ahora, al hacer e=0, resulta el valor para la subtangente a=x/2.

Luego la pendiente de la tangente, equivalente a nuestra derivada, es:

$$m = \frac{f(x)}{a} = \frac{x^2}{x/2} = 2x = f'(x)$$

A lo largo de los desarrollos de Fermat sobre máximos y mínimos y tangentes aparece el término «*adigualdad*» que procede de *La Aritmética* de Diofanto (en relación con ciertos problemas en torno a una especie de «*regla de falsa posición*»), y que Fermat no llega a aclarar en ningún momento, aunque el concepto va sufriendo una lenta transición, a lo largo de la evolución de los métodos de Fermat, desde una especie de «*pseudo-igualdad*», o «*cuasi-igualdad*» aplicada en las curvas algebraicas a un significado de «*aproximadamente igual*» o «*igualdad en el caso límite*» que tímidamente aplica en las tangentes de curvas trascendentes sobre todo en la cicloide (que estudia en la memoria *Doctrinam Tangentium* de 1640 y que es el ejemplo más brillante de aplicación del método) y que dará plenamente sus frutos en los magníficos resultados de Fermat sobre cuadraturas y rectificación.

Debemos hacer una importante observación sobre la evolución de los métodos de tangentes de Fermat promovida por la invención de su Geometría Analítica. Antes de escribir su *Ad locos planos et solidos isagoge*, Fermat, como todos los demás geómetras, conoce y maneja casi en exclusiva como curvas las cónicas, y además definidas sus expresiones en forma de proporción, que es lo que se llamaba el «*symptoma*» de Apolonio. Pero esa invención tiene lugar hacia 1635, varios años después de la fecha que Fermat asigna a la invención del método de tangentes. Cuando la necesidad de fundamentar sus desarrollos le aprieta, en el curso de su agria disputa con Descartes, Fermat no duda en utilizar las nuevas posibilidades de expresión de curvas, en términos de ecuaciones, que le brinda la nueva Geometría Analítica. La aparición de ésta, altera radicalmente los conceptos matemáticos sobre curvas, y rápidamente hace crecer (como hemos comentado) el número de curvas disponibles para la investigación matemática. Sólo cuando a toda curva (de las que nosotros llamamos algebraicas) se le puede asignar una ecuación, que le corresponde unívocamente y que implícitamente contiene todas sus propiedades, tiene interés generalizar, en el más amplio sentido, todo método algebraico de tangentes. Así pues la *Isagoge*, promociona la descripción de las curvas en términos de ecuaciones, las cuales habían llegado a ser *las propiedades específicas* de las curvas. El término «*propiedad específica*» que es de capital importancia para el incipiente concepto de función, aparece de repente en los escritos de Fermat y empieza a tener un efecto inmediato sobre la reformulación del método de tangentes.

Vemos cómo la lectura de *La Geometría* de Descartes y el desarrollo de su propia Geometría Analítica, había afectado de forma significativa, las nociones de Fermat sobre la naturaleza de las líneas curvas y por tanto su sentido de la aplicabilidad general del método original de tangentes.

Descartes distinguía entre «*curvas matemáticas*» y «*curvas mecánicas*». Las primeras podían ser definidas mediante una ecuación algebraica indeterminada en dos incógnitas, correspondientes a segmentos rectilíneos variables, mientras que las curvas mecánicas requieren para su definición longitudes de arco de otras curvas. Las del primer tipo tienen la propiedad específica expresable solo mediante líneas rectas. Para las segundas la propiedad específíca requiere ser expresada no sólo mediante segmentos de rectas sino también mediante segmentos curvilíneos.

Para las curvas del primer tipo la regla de tangentes ofrecida en el *Methodus* es suficiente. En la *Doctrinam Tangentium*, Fermat no añade nada a la regla, pero pone por escrito, en unas cortas pero significativas palabras, el algoritmo general, con una claridad incomparablemente superior a la del *Methodus* y con un lenguaje muy próximo al de Descartes en *La Geometría* (TH.OF.III.141):

> «*Nosotros consideramos de hecho en el plano de una curva cualquiera, dos rectas dadas en su posición, de las que a una se la puede llamar diámetro y a la otra ordenada. Nosotros suponemos la tangente ya encontrada en un punto dado de la curva, y consideramos mediante la adigualdad la propiedad específica de la curva, no sobre la curva misma sino sobre la tangente a encontrar. Eliminando, siguiendo nuestra teoría de máximos y mínimos, los términos que sean necesarios, llegamos a una igualdad que determina el punto de contacto de la tangente con el diámetro, es decir la tangente misma.*»

En este corto párrafo, Fermat sintetiza años de investigación matemática. Todo el nuevo sistema geométrico creado en la *Isagoge* yace en la primera frase, mientras que en la segunda frase pone por escrito los procedimientos apuntados en las memorias anteriores que aplicará, a continuación, a la determinación de la tangentes a dos curvas clásicas, la cisoide de Diocles y la concoide de Nicomedes, en una forma que no difiere de las originales aplicaciones de la regla, más que por la complejidad algebraica de las propiedades específicas de las curvas.

Pero sin duda alguna el ejemplo más espectacular de la aplicación de los métodos de Fermat al trazado de las tangentes a las líneas curvas es el caso de la cicloide, en el que desarrolla un potente instrumental matemático aplicable al trazado de las tangentes a las curvas mecánicas, que resuelve de forma brillante el problema.

Sabiendo que a la cicloide no se le pueden aplicar directamente los métodos desarrollados hasta ahora porque es una curva de naturaleza esencialmente diferente a la parábola, elipse, cisoide, concoide, folium, etc, ya que en su definición interviene una longitud de arco, Fermat prepara el camino con estas explicativas palabras (TH.OF.III.143):

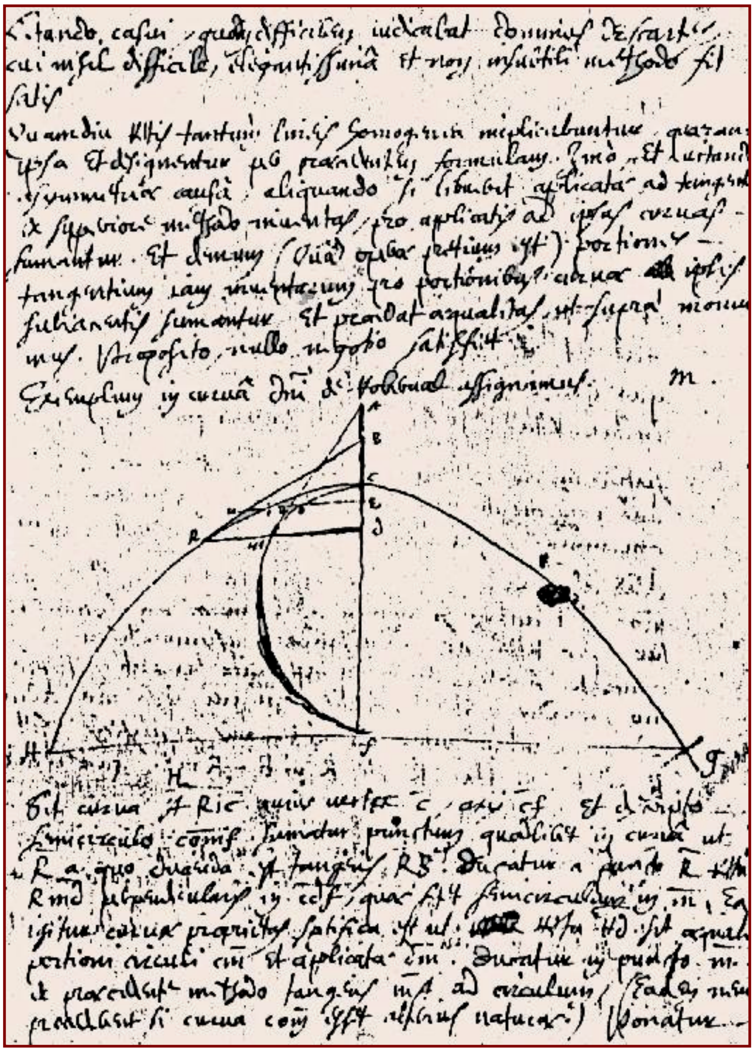
> «*Para el segundo caso que juzgaba difícil Descartes, para quien nada lo es, se obtiene por un método muy elegante y bastante sutil. Mientras que los términos estén formados solamente por rectas, se les busca y se les dibuja según la regla precedente. Además, para evitar los radicales, se pueden sustituir las ordenadas de las curvas por las ordenadas de las tangentes, halladas según el método precedente. Y en fin, lo que es el punto importante, se pueden sustituir las longitudes de arco de las curvas por las partes correspondientes de las tangentes ya halladas y llegar a la adigualdad, como hemos indicado: se resolverá así fácilmente la cuestión.*»

Fermat ha sometido el concepto de «*adigualdad*», extraído de Diofanto, a una metamorfosis profunda, dando un paso de gigante hacia la noción infinitesimal de «*aproximadamente igual*», con el establecimiento de dos principios: a) *sustituir las ordenadas de las curvas por las ordenadas de las tangentes*, es decir, la consideración por «*adigualdad*» de la propiedad específica de la curva, no sobre la propia curva sino sobre la tangente, y b) *sustituir las longitudes de arco de las curvas por las partes correspondientes de las tangentes*, que es un verdadero principio de rectificación.

Hemos visto cómo Fermat realiza la transición del problema geométrico concreto del trazado de una tangente al problema más general del estudio de la variación de una función, a base de desarrollar un método algorítmico para este estudio. La Geometría Analítica aplicada a las curvas le permite evolucionar del problema de tangentes de curvas, al problema de lo que después se llamará derivada de funciones. Frente a curvas diferentes el mismo cálculo analítico de la derivada conduce a su tangente, así que Fermat inicia una de las cuestiones más importantes del momento: la unificación y clasificación de los problemas infinitesimales.

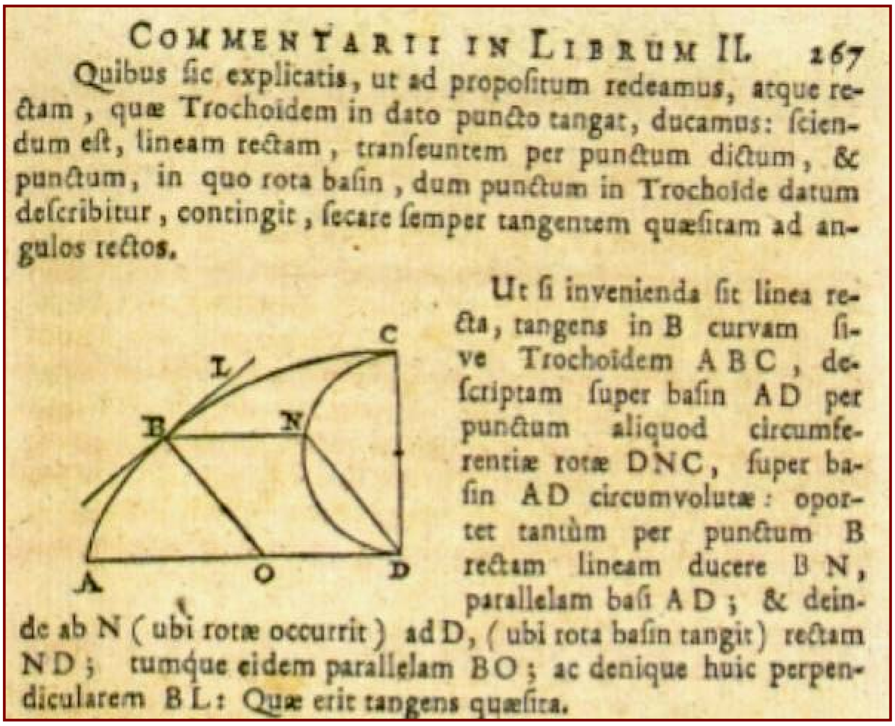
El método de Fermat para las tangentes es un ejemplo bien representativo de los cambios trascendentales que tiene lugar en la Matemática en el siglo XVII con la intervención de los nuevos instrumentos algorítmicos. El Algebra simbólica de Vieta y Descartes aplicado al material del Análisis geométrico recuperado de los antiguos, facilitó el desarrollo de técnicas formales que permitieron métodos heurísticos de rápido descubrimiento más que demostraciones rigurosas y provocaron un cambio radical en el paradigma estilístico y demostrativo que impuso la filosofía platónica al criticar y abandonar el proceder clásico griego por el hermetismo y la rigidez, la falta de operatividad y flexibilidad y la ausencia de heurística, que había impuesto el implacable e impecable rigor euclídeo. Además, la representación algebraica de curvas, vía la Geometría Analítica de Fermat y Descartes, propició la rápida y sencilla formulación para la investigación de multitud de problemas de áreas, volúmenes, rectificación, centros de gravedad, tangentes, máximos y mínimos, etc. Con esta rica miscelánea de ingredientes matemáticos: técnicas algebraicas de Cálculo, Geometría Analítica, libre uso del concepto intuitivo de infinito (que permitía manejar sin pudor magnitudes indivisibles e infinitesimales) se desarrollaron, gracias al nuevo lenguaje algebraico y sobre todo merced al poder algorítmico de la Geometría Analítica, numerosas técnicas infinitesimales, que contribuyeron a resolver de forma sorprendente antiguos y nuevos problemas y produjeron un impresionante desarrollo de nuevos resultados, a base de nuevos métodos infinitesimales, que provocaron una progresiva aritmetización y algebrización de cuestiones que en la antigüedad, especialmente en las Obras de Arquímedes, habían tenido un enfoque estrictamente geométrico.

LA GEOMETRÍA ANALÍTICA Y EL CÁLCULO INFINITESIMAL
LA TANGENTE A LA CICLOIDE EN FERMAT Y DESCARTES



Página con la tangente a la Cicloide del manuscrito autógrafo *Doctrinam Tangentium* (1640), la última memoria de Fermat sobre las tangentes a las líneas curvas.

En este escrito Fermat se decidió a contestar a las acusaciones de Descartes sobre sus métodos de máximos y mínimos y tangentes e inició la revelación de los fundamentos de los mismos, realizando en unas pocas frases una síntesis de una magnífica investigación matemática sobre Geometría Analítica, extremos y tangentes. Esta memoria representa por su contenido la mas sofisticada versión del método de las tangentes, obteniendo las tangentes a las curvas clásicas, cisoide, concoide, cuadratriz, así como la tangente a la curva mas famosa del momento, la cicloide, donde se aprecia la potencia de los nuevos métodos surgidos de la aplicación de la Geometría Analítica de *La Introducción a los Lugares Planos y Sólidos*. Fermat trata también un problema de inflexión y por la nueva visión de antiguos y modernos conceptos, así como por la constante evolución de la «*adigualdad*» hacia «*lo aproximadamente igual*», abre la puerta hacia la rectificación y la cuadratura.



COMMENTARII IN LIBRUM II. 267

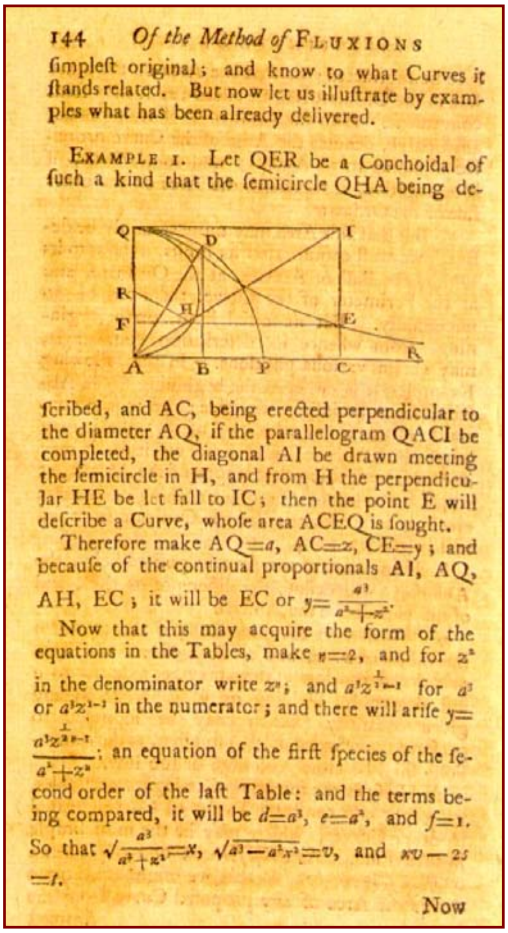
Quibus sic explicatis, ut ad propositum redeamus, atque rectam, quæ Trochoidem in dato puncto tangat, ducamus: sciendum est, lineam rectam, transeuntem per punctum dictum, & punctum, in quo rota basin, dum punctum in Trochoide datum describitur, contingit, secare semper tangentem quæsitam ad angulos rectos.

Ut si invenienda sit linea recta, tangens in B curvam sive Trochoidem A B C, descriptam super basin A D per punctum aliquod circumferentiæ rotæ D N C, super basin A D circumvolutæ: oportet tantùm per punctum B rectam lineam ducere B N, parallelam basi A D; & deinde ab N (ubi rotæ occurrit) ad D, (ubi rota basin tangit) rectam N D; tumque eidem parallelam B O; ac denique huic perpendicularem B L: Quæ erit tangens quæsita.

Página de la edición de van Schooten de 1695 de *La Geometría* de Descartes.

Se trata de un apunte de van Schooten donde se explica el cálculo cartesiano de la tangente a la cicloide, sin duda la curva más importante sobre la que se ensayaron los métodos y técnicas infinitesimales que aparecieron a lo largo del siglo XVII, consecuencia de los desarrollos de las Geometrías Analíticas de Fermat y Descartes.

LA GEOMETRÍA ANALÍTICA EN EL DESCUBRIMIENTO DEL CÁLCULO INFINITESIMAL



144 *Of the Method of* FLUXIONS

ſimpleſt original; and know to what Curves it ſtands related. But now let us illuſtrate by examples what has been already delivered.

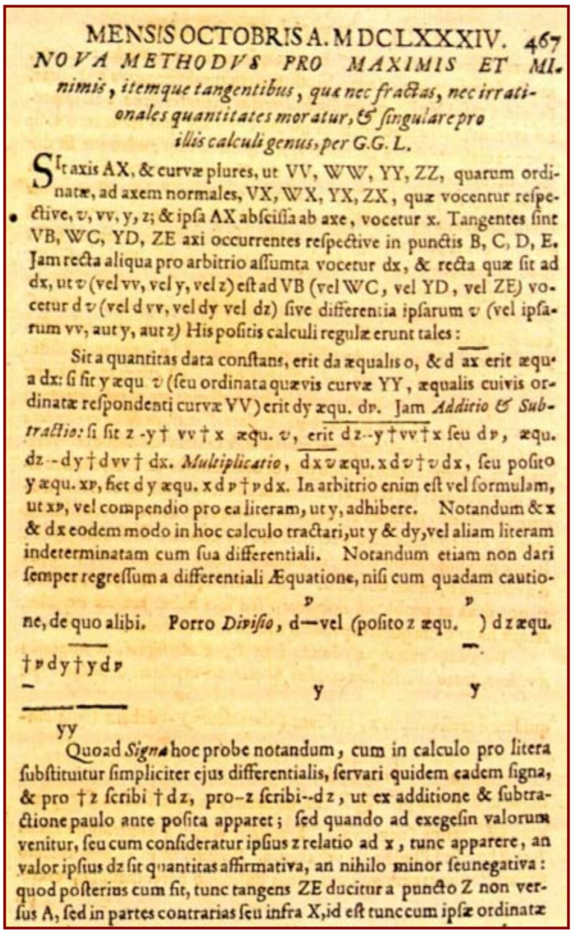
EXAMPLE I. Let QER be a Conchoidal of ſuch a kind that the ſemicircle QHA being de-

ſcribed, and AC, being erected perpendicular to the diameter AQ, if the parallelogram QACI be completed, the diagonal AI be drawn meeting the ſemicircle in H, and from H the perpendicular HE be let fall to IC; then the point E will deſcribe a Curve, whoſe area ACEQ is ſought.

Therefore make AQ$=a$, AC$=z$, CE$=y$; and becauſe of the continual proportionals AI, AQ, AH, EC; it will be EC or $y=\frac{a^3}{a^2+z^2}$.

Now that this may acquire the form of the equations in the Tables, make $\eta=2$, and for z^2 in the denominator write z^η; and $a^3z^{\frac{1}{2}\eta-1}$ for a^3 or a^3z^{1-1} in the numerator; and there will ariſe $y=\frac{a^3z^{\frac{1}{2}\eta-1}}{a^2+z^\eta}$: an equation of the firſt ſpecies of the ſecond order of the laſt Table: and the terms being compared, it will be $d=a^3$, $e=a^2$, and $f=1$. So that $\sqrt{\frac{a^3}{a^2+x^2}}=x$, $\sqrt{a^3-a^2x^2}=v$, and $xv-2s=t$.

Now



MENSIS OCTOBRIS A. MDCLXXXIV. 467

NOVA METHODUS PRO MAXIMIS ET MInimis, itemque tangentibus, quæ nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, & ſingulare pro illis calculi genus, per G.G. L.

SIt axis AX, & curvæ plures, ut VV, WW, YY, ZZ, quarum ordinatæ, ad axem normales, VX, WX, YX, ZX, quæ vocentur reſpective, v, vv, y, z; & ipſa AX abſciſſa ab axe, vocetur x. Tangentes ſint VB, WC, YD, ZE axi occurrentes reſpective in punctis B, C, D, E. Jam recta aliqua pro arbitrio aſſumta vocetur dx, & recta quæ ſit ad dx, ut v (vel vv, vel y, vel z) eſt ad VB (vel WC, vel YD, vel ZE) vocetur dv (vel dvv, vel dy vel dz) ſive differentia ipſarum v (vel ipſarum vv, aut y, aut z) His poſitis calculi regulæ erunt tales:

Sit a quantitas data conſtans, erit da æqualis o, & $d\,\overline{ax}$ erit æqu. $a\,dx$: ſi ſit y æqu v (ſeu ordinata quævis curvæ YY, æqualis cuivis ordinatæ reſpondenti curvæ VV) erit dy æqu. dv. Jam *Additio & Subtractio*: ſi ſit $z-y+vv+x$ æqu. v, erit $d\,\overline{z-y+vv+x}$ ſeu dv, æqu. $dz-dy+dvv+dx$. *Multiplicatio*, $d\,\overline{xv}$ æqu. $x\,dv+v\,dx$, ſeu poſito y æqu. xv, fiet dy æqu. $x\,dv+v\,dx$. In arbitrio enim eſt vel formulam, ut xv, vel compendio pro ea literam, ut y, adhibere. Notandum & x & dx eodem modo in hoc calculo tractari, ut y & dy, vel aliam literam indeterminatam cum ſua differentiali. Notandum etiam non dari ſemper regreſſum a differentiali Æquatione, niſi cum quadam cautione, de quo alibi. Porro *Diviſio*, $d\frac{v}{y}$ vel (poſito z æqu. $\frac{v}{y}$) dz æqu. $\frac{\mp v\,dy \pm y\,dv}{yy}$

Quoad *Signa* hoc probe notandum, cum in calculo pro litera ſubſtituitur ſimpliciter ejus differentialis, ſervari quidem eadem ſigna, & pro $+z$ ſcribi $+dz$, pro $-z$ ſcribi $-dz$, ut ex additione & ſubtractione paulo ante poſita apparet; ſed quando ad exegeſin valorum venitur, ſeu cum conſideratur ipſius z relatio ad x, tunc apparere, an valor ipſius dz ſit quantitas affirmativa, an nihilo minor ſeu negativa: quod poſterius cum ſit, tunc tangens ZE ducitur a puncto Z non verſus A, ſed in partes contrarias ſeu infra X, id eſt tunc cum ipſæ ordinatæ

1. **Página de *The Metod of Fluxions* de Newton (Londres, 1737), con el trazado de la tangente a la concoide. En esta obra Newton unifica la mayor parte de resultados sobre tangentes y cuadraturas que ocuparon a buena parte de los matemáticos del siglo XVII.**
2. **Página de *Nova Methodus pro Maximis et Minimis* de Leibniz (Leipzig, 1684), donde aparecen las reglas para derivar sumas, productos y cocientes. Esta obra se la considera como la primera publicación sobre Cálculo Infinitesimal de la historia.**

«A*poyándose en hombros de gigantes*» como Fermat y Descartes, apurando y exprimiendo la capacidad de unificación y generalización que permitían los procedimientos del Álgebra y de la Geometría Analítica, bajo concepciones y métodos infinitesimales diferentes, Newton y Leibniz fueron capaces de separar la ganga geométrica de los resultados de sus antecesores y encontrar el principio general que les permitiría reducir las operaciones fundamentales del Cálculo Infinitesimal a una operativa universalmente válida, concibiendo la idea de sustituir todas las operaciones de carácter geométrico involucradas en el cálculo de tangentes, por una única operación analítica, la derivación del Cálculo Diferencial, que resolvería, además por inversión (cálculo de la antiderivada o primitiva) los problemas de cuadraturas del Cálculo Integral, a través del *Teorema Fundamental del Cálculo*, que vincula ambos problemas y permite la obtención de cuadraturas mediante la resolución del problema inverso de la tangente.

En la brillante operación realizada por Newton y Leibniz, que se ha venido en llamar el descubrimiento del Cálculo Infinitesimal, y que es sin lugar a dudas, uno de los logros más importantes en la Historia del Pensamiento matemático, coadyuvó de forma decisiva la creación y aplicación de un simbolismo que propiciara traducir en fórmulas los resultados y en algoritmos los métodos, a base de utilizar los recursos algebraicos de la Geometría Analítica para independizar el discurso matemático de las figuras geométricas y con todo ello reconocer y aislar los conceptos fundamentales del Cálculo Infinitesimal y crear un cuerpo de doctrina dotado de algoritmos eficaces, es decir, funcionando como un Cálculo operacional que resuelve todos los problemas planteados anteriormente, mediante procedimientos uniformes y con una proyección a nuevos y más complicados problemas, como un potente instrumento de investigación. En palabras del propio Leibniz, se trataba de hacer con las técnicas del Cálculo lo mismo que había hecho Vieta con la Teoría de Ecuaciones y Descartes con la Geometría.

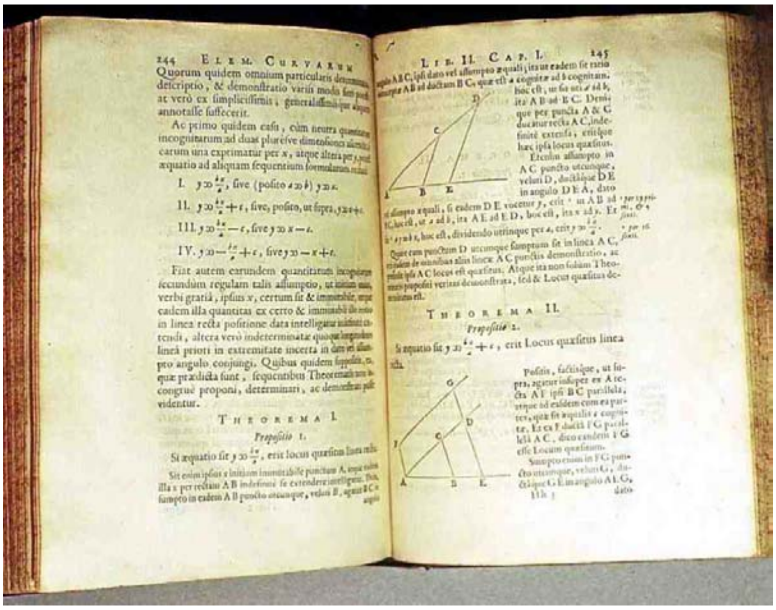
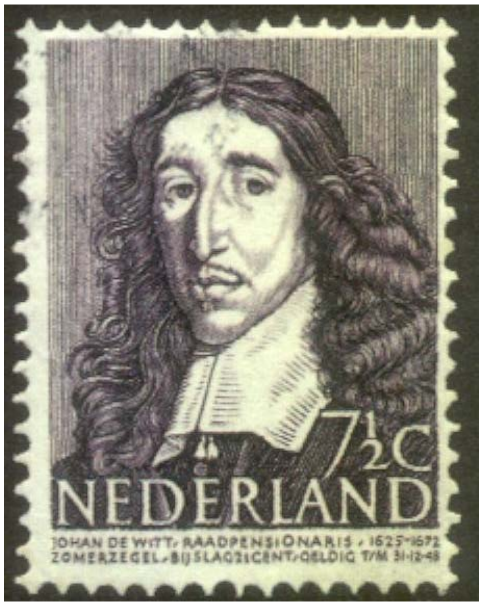
La Geometría Analítica poscartesiana

Descartes y Fermat provocaron una auténtica revolución en el campo de la Geometría, una ruptura radical con el pasado, pero la Geometría Analítica tal como la concibieron sus fundadores resultó, desde un punto de vista didáctico, poco eficaz. Sólo cuando magníficos pedagogos como Monge y sus discípulos, los llamados matemáticos de la Revolución Francesa, le dieron una nueva forma, la nueva disciplina mostró su vitalidad y eficacia y adoptó al fin una forma definitiva similar a las exposiciones actuales, excepto en lo que se refiere al lenguaje vectorial. Pero antes de describir esta transformación debemos mencionar los primeros avances inmediatamente posteriores a los de sus creadores.

El propio editor de *La Geometría* van Schooten había escrito, como se mencionó, un extenso *Comentarii* que incorporó a las diversas ediciones de la obra de Descartes. También en 1657 escribió las *Exercitationes Geometricae*, considerado uno de los primeros embriones de la Geometría Analítica de tres dimensiones.

Hacia1650 Jan De Witt, discípulo de van Schooten escribió *Elementa curvarum linearum*, incorporado a las ediciones de *La Geometría* de Descartes de 1659 y 1695. Se valora esta obra como el primer tratado sistemático de Geometría Analítica en el plano, es decir, la primera verdadera exposición del método de las coordenadas que permite la traducción automática de la Geometría al Álgebra y del Álgebra a la Geometría.

El *Tractatus sectionibus conicis* (1665) de Wallis y los *Elementa* de De Witt son complementarios en cuanto al estudio de las cónicas. Wallis primero expresa las secciones cónicas en forma analítica, es decir, obtiene las ecuaciones de las cónicas trasladando las condiciones geométricas de Apolonio a la forma algebraica y luego de sus ecuaciones deriva las propiedades de las curvas, mientras que De Witt primero obtiene las propiedades de las cónicas geométricamente y después muestra analíticamente que las ecuaciones de segundo grado representan curvas con esas propiedades. La combinación de las partes analíticas de ambos textos sería una razonable aproximación a los materiales de los textos modernos. Por otra parte algunos matemáticos del siglo XVII, en particular De Witt en sus *Elementa* redujeron algunas ecuaciones de segundo grado a sus formas canónicas.

Páginas de *Elementa curvarum linearum* de Jan De Witt, considerado como el primer libro de texto de Geometría Analítica de rectas y cónicas. La obra de De Witt libera definitivamente a las cónicas de su definición estereométrica, introduciendo la definición foco-directriz. También define el discriminante para distinguir las diversas cónicas, iniciando un esbozo de clasificación. El gran historiador de la Geometría M.Chasles, escribe en su obra *Aperçu historique sur l'origine et le développment des méthodes en Géométrie* (1837):

> **«[...] J. *de Witt simplifica la teoría analítica de los lugares geométricos de Descartes; imagina una teoría nueva e ingeniosa de las secciones cónicas, fundada sobre diversas descripciones de estas curvas sobre el plano, sin utilizar el cono, obteniendo, por la pura Geometría, sus propiedades principales.*»**

Stirling, en su *Lineae Tertii Ordinis Neutonianae* de 1717, cerró el tema reduciendo la ecuación general de segundo grado a las diversas formas canónicas. Previamente Newton en su *The Method of Fluxions and Infinite Series* había hecho gran uso de la Geometría Analítica, sobre todo la introducción y el trazado de nuevas curvas mediante sus ecuaciones, utilizando nuevos sistemas de coordenadas, en particular coordenadas polares. Todos estos textos contribuyeron a difundir las ideas de la Geometría de coordenadas y a popularizar las cónicas como curvas planas y lugares geométricos más que como secciones de un cono.

Pero sin duda el trabajo más importante es el de Euler en su famosa obra *Introductio in Analysin infinitorum* de 1748, donde trata sistemáticamente la Geometría plana con coordenadas.

La *Introductio* de Euler es una de las tratados más importantes de toda la Historia de la Matemática. C.B.Boyer dice sobre ella en su obra *History of Analytic Geometry* (Scripta Mathematica, New York,1956, p.180):

> «*La Introductio de Euler es probablemente el libro de texto más influyente de los tiempos modernos. Es el trabajo que convirtió el concepto de función en básico para las Matemáticas* [...]. *La Introductio es para el Análisis elemental lo que Los Elementos de Euclides es para la Geometría.*»

La primera parte de la obra está destinada al «*Análisis puro*», la segunda a la «*aplicación del Álgebra a la Geometría*» y la última es un tratado metódico de Geometría Analítica en el sentido de Fermat. Ambas vertientes del P*rincipio Fundamental* de la Geometría Analítica son claramente establecidos por Euler. De acuerdo con Descartes, Euler reconoce que

> «*La naturaleza de una curva cualquiera viene dada por una ecuación en dos variables, x,y, de las cuales x es la abscisa e y es la ordenada*»,

y de acuerdo con Fermat, Euler establece que:

> «*Cualquier función de x da lugar a una curva continua que puede ser descrita mediante un gráfico.*»

Euler ha sustituido el término cartesiano de *construcción* por el de gráfico. Con ello se decanta más hacia el aspecto *fermatiano* del trazado de curvas dadas por sus ecuaciones que hacia la derivación *cartesiana* de las ecuaciones de los lugares. La *Introductio* es uno de los primeros tratados donde se dan numerosos gráficos de curvas específicas con coeficientes numéricos, indicando claramente las unidades utilizadas en el eje de abscisas.

Quizá lo más sobresaliente de la *Introductio*, desde el punto de vista del desarrollo de la Geometría Analítica, sea el tratamiento general de Euler. A partir de entonces surge una de las grandes ventajas de los métodos analíticos modernos frente al enfoque sintético de los antiguos: muchos casos específicos de las cuestiones geométricas pueden ser incluidos en una formulación global. Este aspecto de generalidad que permitía el Álgebra frente a la singularidad de cada problema en la Geometría de los griegos era uno de los rasgos más relevantes señalados por Descartes y Fermat en sus Geometrías, pero había sido en parte pasado por alto durante la siguiente centuria, incluso en cuestiones muy básicas como por ejemplo en el estudio de la ecuación de la recta, que se subdividía en numerosos casos diferentes.

Euler manejó una única forma general de la ecuación de la recta: $\alpha x+\beta y-a=0$. Indica incidentalmente que los puntos de corte son a/α y a/β para $\alpha\neq 0$ y $\beta\neq 0$ y menciona específicamente los casos $\alpha=0$, $\beta=0$, y $\alpha=a=0$, pero no $\beta=a=0$, seguramente porque todavía utiliza un solo eje. La construcción de líneas es abandonada y no utiliza apenas diagramas.

Euler remarca que toda línea recta queda determinada por dos puntos, lo que implica que se puede encontrar su ecuación por medio de coeficientes indeterminados. Sin embargo, Euler no abunda mucho en el estudio de las ecuaciones de primer grado porque: «*la Geometría de la línea recta es bien conocida*», lo cual es una lástima porque con ello se retrasó en unos cincuenta años el desarrollo de la parte más elemental de la Geometría Analítica, objeto durante la Matemática de la Revolución Francesa de multitud de libros de texto, como veremos después. Lo mismo puede decirse con respecto a la Geometría Analítica del circulo. Debemos decir que la limitación platónica de la regla y el compás todavía debía ser reminiscente en los tiempos de Euler.

La cuestión es totalmente diferente respecto del tema las secciones cónicas, en el que Euler realiza un tratamiento analítico completamente general y libre de referencias a diagramas. Pero dentro de la idea de generalidad, Euler había desarrollado previamente, en el primer volumen de la *Introductio*, una Teoría general de curvas, basada en la idea de función, en la que la distinción cartesiana entre curvas geométricas y mecánicas aparece ya en terminología moderna de curvas algebraicas y trascendentes. Euler señala que los escritores anteriores habían derivado las propiedades de las cónicas del propio cono o de la construcción geométrica, y añade:

> «*Yo obtendré* [las propiedades de las cónicas] *mediante el examen de lo que se puede deducir de su ecuación sin recurrir a otros medios.*»

Euler escribe la ecuación general de una cónica como ecuación cuadrática general con seis términos:

$$\zeta yy + \varepsilon xy + \delta xx + \chi y + \beta x + \alpha = 0;$$

resuelve la ecuación respecto de y en términos de x, y encuentra diámetros mediante la suma de raíces. Considera el diámetro que bisecta todas las cuerdas paralelas a las ordenadas, primero en coordenadas rectangulares y después en coordenadas oblicuas en cualquier ángulo, y obtiene mediante la intersección de todos ellos el centro de la cónica. Después, al referir la cónica a sus ejes principales, Euler halla la ecuación cartesiana rectangular de la cónica central, es decir, realiza la clasificación de cónicas mediante el discriminante, y encuentra fácilmente los puntos, líneas y razones notables asociados a la curva. Con ello completa el estudio analítico iniciado por De Witt y Wallis. Respecto de la hipérbola, que caracteriza como la cónica con $\varepsilon\varepsilon > 4\delta\zeta$, obtiene las asíntotas al igualar a cero los términos de segundo grado. Al considerar la parábola como una elipse en la que el eje mayor «*se ha incrementado hasta infinito*», Euler deriva las propiedades de la parábola de las de la elipse.

Si el siglo XVII alumbró la Geometría Analítica del plano, la centuria siguiente desplegará un grandioso desarrollo analítico de la Geometría espacial. Por fin se daría gusto a Platón que siempre se quejó de la casi nula dedicación de la Matemática griega a la Geometría del espacio, con la consiguiente irritación de los dioses que ponían a prueba a los hombres con la resolución del problema délico de la duplicación del cubo.

Descartes y Fermat habían sugerido el *Principio Fundamental* de la Geometría Analítica de tres dimensiones, el de que toda ecuación con tres incógnitas representa una superficie. Descartes lo hace al final del Libro II de *La Geometría* (G.AT, VI, 440) en un epígrafe titulado:

> «*Cómo puede aplicarse lo que se ha dicho aquí de las líneas curvas trazadas sobre una superficie plana, con las que se tracen en un espacio que tiene tres dimensiones*»;

y Fermat en una pequeña memoria titulada *Novus Secundarum et Ulterioris Ordinis Radicum in Analyticis Usus* (TH.OF.III.162-163):

> «*Pero si el problema propuesto implica tres cantidades incógnitas, se trata de encontrar para satisfacer la cuestión, no solamente un punto o una línea, sino una superficie entera; de ahí resultan los lugares en superficie, etc.*, [...].»

También trataron el tema van Schooten en el escrito *Exercitationes Geometricae* y La Hire en su obra *Nouveaux éléments des sections coniques* (1679), donde para representar una superficie, primero representa un punto en el espacio mediante tres coordenadas y llega a escribir la ecuación de una superficie, pero ambos fueron trabajos muy incipientes. El desarrollo efectivo de la Geometría Analítica de tres dimensiones fue tarea del siglo XVIII y, además, como en el caso de la Geometría Analítica bidimensional, fue Euler quien realmente abordó de forma sistemática la cuestión.

En efecto, la *Introductio* de Euler acaba con un largo y sistemático apéndice sobre Geometría Analítica de tres dimensiones, que significa el estudio y representación gráfica de curvas y superficies por medio de sus ecuaciones, y que representa la más original contribución de Euler a la Geometría cartesiana y la más importante exposición sobre Geometría Analítica sólida. Como en la Geometría Analítica plana, Euler sigue utilizando un solo eje de coordenadas como básico, pero señala que se pueden utilizar tres planos coordenados, y así aparece, a veces, en las ilustraciones. Además, alude a los posibles signos de las coordenadas en los ocho octantes del triedro de referencia. Divide las superficies en algebraicas y trascendentes y las estudia a través de las trazas según varios planos. Así aparecen, con abundantes ilustraciones, conos, esferas, cilindros y conoides. Euler proporciona la primera fórmula para traslación y rotación de ejes en tres dimensiones, que se ha convertido en la clásica transformación que lleva su nombre.

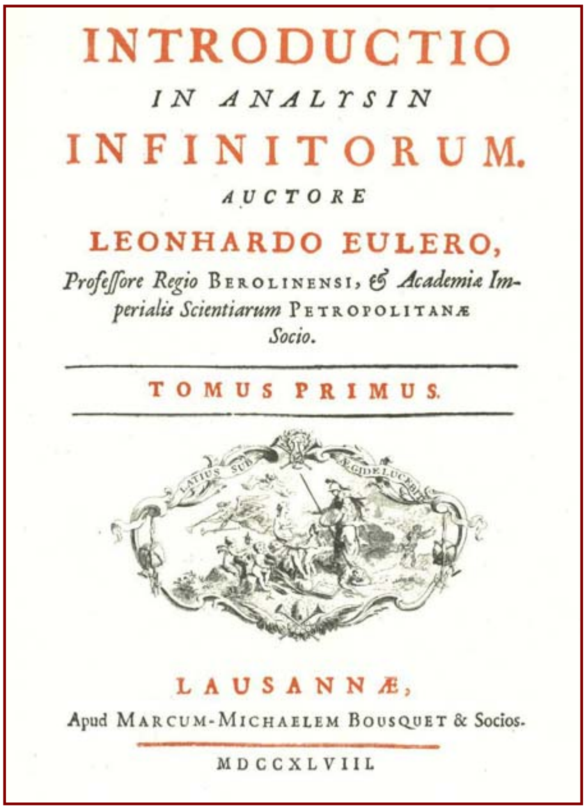
En cuanto a la ecuación del plano, Euler la escribe de forma general $\alpha x+\beta y+\chi z=a$ y estudia las intersecciones con los planos de coordenadas y con el único eje, así como los ángulos entre el plano dado y los de coordenadas, que los expresa mediante el coseno.

Si las cónicas, como curvas de segundo grado, fueron históricamente las primeras curvas introducidas y las más estudiadas, de forma análoga, las cuádricas, como superficies de segundo grado, serán también las primeras y las más estudiadas. Euler las introduce como una familia unitaria de superficies a través de la ecuación cuadrática general en diez términos; considera la ecuación del cono asintótico real o imaginario determinada por los términos de mayor grado de la ecuación e indica que la ecuación general puede reducirse mediante transformaciones a las formas canónicas, de donde deriva la clasificación general de las superficies cuádricas. Euler incluye cinco tipos fundamentales de cuádricas canónicas: el elipsoide, el hiperboloide de una hoja, el hiperboloide de dos hojas, el paraboloide hiperbólico (descubierto por él) y el paraboloide elíptico. No incluye las cuádricas degeneradas, pero, ya se comentó más arriba, que conocía los conos y cilindros como cuádricas que son también.

El trabajo de Euler sobre cuádricas, que se ha convertido en una parte esencial de los cursos de Geometría Analítica académica, representa el primer intento de unificación del estudio de la ecuación cuadrática general en tres dimensiones; de forma similar a como una centuria antes el trabajo de Fermat y Descartes representó lo mismo para el estudio de la ecuación cuadrática general en dos dimensiones.

Como rasgo curioso, reiteremos la poca dedicación de Euler a los aspectos más elementales de la Geometría Analítica, los referentes a rectas y planos, en contraposición a los importantes y difíciles problemas que trata sobre cónicas y cuádricas. La razón hay que buscarla en que para Euler las ecuaciones de la recta: $\alpha x+\beta y=a$, y del plano: $\alpha x+\beta y+\chi z=a$, en realidad son relaciones funcionales en las varibles x, y, z; y por tanto, son objetos de interés del Análisis –en sentido de Cálculo Infinitesimal– más que contrapartidas algebraicas de puntos, rectas y planos. Así se explica que aspectos elementales de la Geometría Analítica académica como fórmulas sobre punto medio, paralelismo, ángulos, perpendicularidad, pendiente, distancias, áreas, volúmenes, etc., sean objeto de estudio posterior a Euler en la Historia de la Geometría Analítica, y curiosamente cuando la siguiente generación de matemáticos, como veremos enseguida, traten estas cuestiones, lo harán primero en la Geometría Analítica de tres dimensiones, adaptando después los resultados a la Geometría Analítica plana.

EULER, EL MAESTRO DE TODOS LOS MATEMÁTICOS



INTRODUCTIO
IN ANALYSIN
INFINITORUM.
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio Berolinensi, & Academiæ Imperialis Scientiarum Petropolitanæ Socio.

TOMUS PRIMUS.

LAUSANNÆ,
Apud Marcum-Michaelem Bousquet & Socios.
MDCCXLVIII.

Portada de *Introductio in Analysin infinitorum* (1748) de Euler.

Euler es uno de los más ilustres matemáticos de todos los tiempos. Dotado de una memoria visual y auditiva increíble, de una habilidad prodigiosa para el cálculo mental y de una ingente capacidad de trabajo, Euler es, sin duda alguna, el matemático más prolífico –y no sólo en Matemáticas ya que tuvo 13 hijos–. Ni siquiera la ceguera –primero progresiva y total después– que le afligió en los últimos 17 años de su vida, modificó esta fecundidad sin par. Se dice que la pérdida de la visión agudizó aún más las percepciones de Euler en el mundo interno de su imaginación. Él mismo, con el buen humor que siempre le acompañaba, comentaba: «*Desde la pérdida de mi ojo derecho, me distraigo menos*».

Euler es el introductor como Descartes de nuevas y definitivas notaciones. Su campo de investigación se extiende a todos los ámbitos de la Matemática, donde su nombre aparece por doquier para nombrar teorías, teoremas, problemas, fórmulas, funciones, números, constantes y otros muchos objetos matemáticos, etc., por ejemplo la *Recta de Euler*, sobre la que se sitúan tres de los puntos notables de un triángulo, el Ortocentro, el Baricentro y el Circuncentro, resultado de la más bella Geometría, que ignorado por todas las generaciones anteriores de geómetras, de Euclides a Descartes, de Apolonio a Fermat y de Arquímedes a Newton, fue obtenido por Euler como magistral aplicación de la Geometría Analítica.

He aquí algunas citas sobre quien fue llamado en su época «*la encarnación del Análisis*» y «*el maestro de todos los matemáticos*»:

- **«*Multiplicó sus producciones más allá de lo que hubiera osado alcanzar fuerza humana y, sin embargo, fue original en cada una de ellas.* [...] *Rodeado de un respeto universal, con nobleza de carácter pudo, al final de su vida, considerar como discípulos suyos a todos los matemáticos de Europa. El 7 de septiembre de 1783, después de charlar sobre los asuntos del día,*[...]*, cesó de calcular y vivir*» . Panegírico de Condorcet sobre Euler.**
- **«*Leed a Euler, Leed a Euler; es el maestro de todos nosotros.* Laplace.**
- **«*Euler calculaba sin aparente esfuerzo como los hombres respiran o las águilas se sostienen en el aire*». Aragó.**
- **«*Durante toda su vida* [...] *parece haber llevado en la cabeza la totalidad de las Matemáticas de su época*». A. Weil.**
- **«*Euler es el Shakespeare de las Matemáticas*». W.Dunham, *El Universo de las Matemáticas,* Pirámide, Madrid, 1995, pág.103.**

En el ámbito de la Geometría Analítica, Euler explota los poderosos métodos analíticos introducidos por Fermat y Descartes y desarrollados por van Schooten, De Witt, Wallis, La Hire, Newton y Leibniz. Decía Euler: «*Mejor que de nuestro juicio, debemos fiarnos del cálculo algebraico*» y, en efecto, Euler da un paso de gigante en la aplicación del carácter algorítmico del Álgebra a la sistematización de la Geometría Analítica de dos y de tres dimensiones, alcanzando la clasificación de las cónicas y las cuádricas.

Monge, que fue uno de los matemáticos más importantes de la época de la Revolución francesa, dio un impulso inusitado a la Geometría Analítica. En esta época el nombre de «*Geometría Analítica*» todavía no había alcanzado un reconocimiento general. Monge imparte un curso en la Escuela Politécnica sobre *Applications de l'analyse à la géométrie*, cuya primera parte es esencialmente una introducción a la Geometría Analítica. Como no se disponía de ningún libro de texto, Monge se ve forzado a escribir el contenido del curso y publica en 1795 *Feuilles d'analyse apliquée a la géométrie*, donde da una forma bastante definitiva a la Geometría Analítica. Otros materiales que había utilizado también en su curso son incluidos en 1802 en la memoria *Application de l'algèbre à la géométrie*, que se reeditará en 1807, 1809 y 1850. El primer teorema de la memoria es una generalización del *Teorema de Pitágoras*:

> «*La suma de los cuadrados de las proyecciones de una figura plana sobre tres planos perpendiculares entre sí es igual al cuadrado del área de la figura plana.*»

Aparecen también las fórmulas de traslación y rotación de ejes para las ecuaciones del cambio de ejes de coordenadas, el tratamiento habitual de rectas y planos, la determinación del plano que pasa por tres puntos mediante coeficientes indeterminados, los cosenos directores, las condiciones de paralelismo y perpendicularidad, los ángulos entre rectas y planos, la determinación de los planos principales de una cuádrica, etc.

Monge demuestra que el plano que pasa por el punto (x_o,y_o,z_o) y es perpendicular a la intersección de dos planos: ax+by+cz+d=0, ex+fy+gz+h=0, viene dado por :

$$A(x-x_o)+B(y-y_o)+C(z-z_o)=0,$$

donde: A=bg-fc, B=ce-ga, C=af-eb, que hoy se llaman parámetros de dirección (o coordenadas del vector director de la recta intersección de los planos dados).

Monge da también las fórmulas para la distancia de un punto a una recta y la distancia más corta entre dos rectas r, r', que se cruzan, tras la obtención previa de la perpendicular común:

$$r: \frac{x-x_o}{a}=\frac{x-y_o}{b}=\frac{x-z_o}{c}\ ,\ r': \frac{x-x'_o}{a'}=\frac{x-y'_o}{b'}=\frac{x-z'_o}{c'}$$

$$d(r,r')=\frac{\left|(bc'-cb')(x_0-x'_0)+(ca'-ac')(y_0-y'_0)+(ab'-ba')(z_0-z'_0)\right|}{\sqrt{(bc'-cb')^2+(ca'-ac')^2+(ab'-ba')^2}}$$

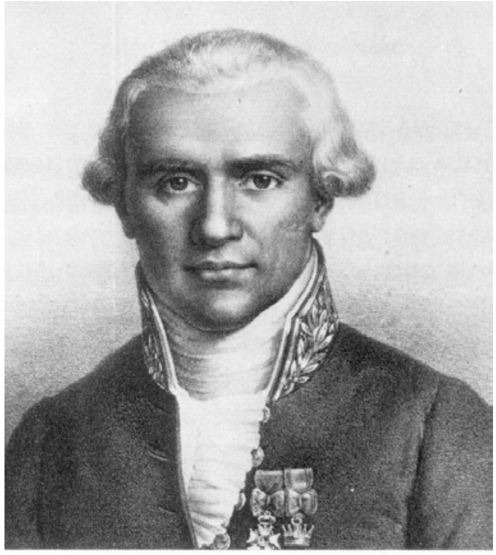
Entre los nuevos resultados que obtiene Monge cabe mencionar los dos siguientes:

> «*Los seis planos trazados a través de los puntos medios de las aristas de un tetraedro y perpendiculares respectivamente a la arista opuesta, se cortan en un punto* [llamado el *Punto de Monge*] *que es el punto medio del segmento que une el Baricentro y el Circuncentro del tetraedro*».

> «*El lugar geométrico de los vértices de los triedros trirrectángulos cuyas caras son tangentes a una superficie cuadrática con centro, es una esfera de radio la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los semiejes* [llamada *Esfera de Monge* o esfera directriz de la cuádrica]».

Algo más tarde, en 1809, Monge exhibió varias demostraciones de que el Baricentro de un tetraedro es el punto de intersección de los segmentos que unen los puntos medios de aristas opuestas. También extendió para el tetraedro ortocéntrico el resultado de la *Recta de Euler* demostrando que el Baricentro está a doble distancia del Ortocentro que del Circuncentro.

MONGE, EL GRAN IMPULSOR DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA MODERNA



1. **Estatua de bronce de T.C.Gruyère (1853).**
2. **Retrato de Villain.**
3. **Dibujo de Attalin (1803), alumno de La Escuela Politécnica, en su cuaderno de Análisis.**

Monge, fundador de la Geometría Descriptiva, hizo dar un paso de gigante a la Geometría Analítica, a la Geometría Diferencial (como punto de encuentro de la Geometría Analítica y el Cálculo Infinitesimal) y es el primer innovador en Geometría Sintética después de Desargues.

Ante la profusión de importantes resultados sobre Geometría Analítica y Geometría Diferencial obtenidos por Monge, no es extraño que Lagrange asombrado exclamara: «*Con sus aplicaciones del Análisis a la Geometría este demonio de hombre* [Monge] *conseguirá hacerse inmortal*».

Monge fue un excelente maestro. Según sus alumnos de La Escuela Politécnica su poderosa imaginación geométrica cautivaba por su elocuencia y su pasión como profesor. Con sus lecciones, sedujo e inspiró a una serie de jóvenes estudiantes: Meusnier, Malus, Dupin, Rodrigues, Lacroix, ..., que constituyeron con su maestro la gran escuela francesa de matemáticos, que más tarde incluiría personajes como Cauchy, Galois, Saint Venant, Frénet, Serret, Puiseaux, Bertran, ...

Monge tuvo una participación política, administrativa, institucional y académica de primer orden, tanto durante la Revolución Francesa como durante el Imperio, siendo uno de los impulsores de la creación de la Escuela Politécnica y la Escuela Normal Superior, importantes instituciones de formación superior del científico y del técnico al servicio de la nueva sociedad. Monge fue uno de los principales actores responsables de las revoluciones institucional, académica y didáctica que se desarrollaron de forma paralela a la revolución política en Francia, a partir de 1789.

Lagrange realizó también importantes contribuciones a la Geometría Analítica, siempre bajo la filosofía de aplicar el carácter algorítmico del Álgebra para superar toda representación concreta. En sus desarrollos analíticos, su formulación, de una brillante elegancia, ya está muy próxima a la escritura del Álgebra Lineal, por ejemplo en cálculos que se asemejan a aspectos matriciales y determinantes. En el artículo *Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires* (1775), Lagrange resolvió, de forma puramente analítica, diversas cuestiones ya conocidas sobre la geometría del tetraedro: las fórmulas, en función de las coordenadas de los vértices, del área, centro de gravedad y volumen, así como los centros y radios de las esferas inscrita y circunscrita. Al desconocer la ecuación normal del plano, Lagrange obtiene las alturas como problemas de mínima distancia mediante los recursos del Cálculo Infinitesimal. Estos resultados están redactados de tal forma analítica que pueden ser entendidos sin aludir a figura alguna, como el propio Lagrange escribe en el artículo:

> «*Me siento halagado por el hecho de que las soluciones que voy a dar serán ciertamente de interés para los geómetras tanto por los métodos como por los resultados. Estas soluciones son puramente analíticas y pueden entenderse incluso sin figuras.*»

Y efectivamente no hay ni una figura a lo largo de este trabajo, lo que prefigura la ulterior concepción y estructura de la Geometría Analítica. También en el Prefacio de su Mecánica Analítica de 1788, Lagrange escribe:

> «*El lector no encontrará figuras en esta obra. Los métodos que propongo no requieren construcciones ni razonamientos geométricos o mecánicos; solamente operaciones algebraicas sometidas a una regla de procedimiento metódica y uniforme.*»

Al pronunciarse así, Lagrange es consciente del grado de operatividad que está introduciendo el Álgebra al actuar sobre problemas de la Geometría e incluso de la Mecánica.

Con los trabajos mencionados de Monge y Lagrange, que para algunos historiadores representan una auténtica «*Revolución analítica*», la Geometría Analítica se convirtió en una rama de las Matemáticas independiente y cerrada, muy próxima al enfoque actual en cuanto a los métodos y la notación, salvo en lo que afecta a las cuestiones vectoriales.

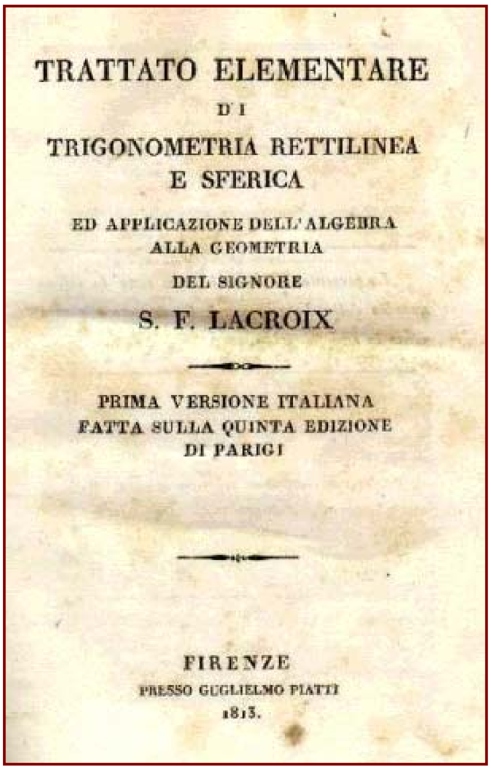
Bajo la inspiración de Monge como maestro, algunos matemáticos coetáneos, en particular Lacroix, escriben numerosos libros de texto sobre Geometría Analítica, que se reeditan una y otra vez, donde se va aclarando su significado y utilidad como instrumento matemático, cada vez más próximo al uso de nuestro tiempo. Así por ejemplo, en cuanto a la propia concepción sobre la Geometría Analítica, Lacroix formula en su *Traité de calcul* de 1810 un punto de vista muy próximo al actual:

«*Obviando todas las construcciones geométricas se hará ver al lector que existe una manera de considerar la geometría que se podría llamar geometría analítica, y que consiste en deducir las propiedades de la extensión del mínimo número posible de principios por métodos puramente analíticos, de la misma manera que ha hecho Lagrange en su mecánica con respecto a las propiedades del equilibrio y del movimiento*».

Curiosamente Lacroix fue algo reacio a titular sus obras con el nombre de «*Geometría Analítica*». Tanto es así que su obra principal sobre el tema mantuvo, edición tras edición, un título tan poco significativo como *Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et sphérique et application de l'algèbre à la géométrie.*

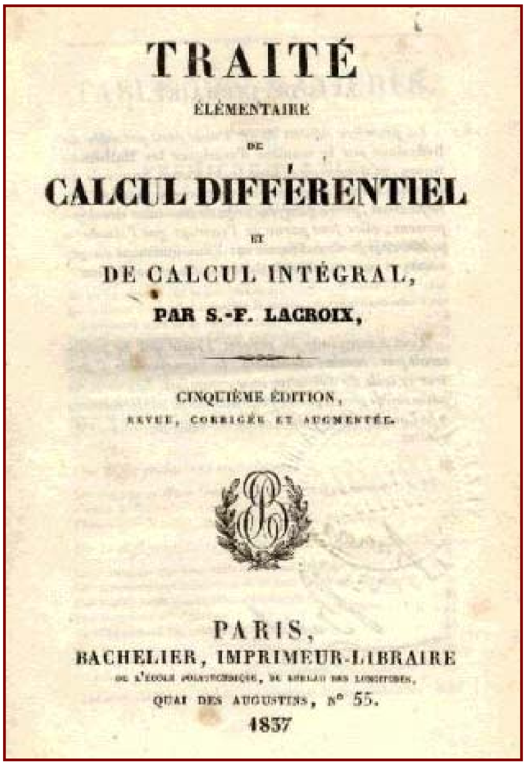
Aunque la denominación de «*Geometría Analítica*» había ido apareciendo subrepticiamente a lo largo del siglo XVIII, parece que el primero que lo utiliza como título es Lefrançais en una edición de sus *Essais de géométrie* de 1804 y decididamente Biot en la edición de 1805 de sus *Essais de géométrie analytique*.

LA ESCOLARIZACIÓN DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA DE LACROIX


TRATTATO ELEMENTARE
DI
TRIGONOMETRIA RETTILINEA
E SFERICA
ED APPLICAZIONE DELL' ALGEBRA
ALLA GEOMETRIA
DEL SIGNORE
S. F. LACROIX

PRIMA VERSIONE ITALIANA
FATTA SULLA QUINTA EDIZIONE
DI PARIGI

FIRENZE
PRESSO GUGLIELMO PIATTI
1813.


TRAITÉ
ÉLÉMENTAIRE
DE
CALCUL DIFFÉRENTIEL
ET
DE CALCUL INTÉGRAL,
PAR S.-F. LACROIX,

CINQUIÈME ÉDITION,
REVUE, CORRIGÉE ET AUGMENTÉE.

PARIS,
BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.
1837

Portadas de dos obras de Lacroix, la edición italiana de 1813 del *Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et sphérique et application de l'algèbre à la géométrie* y de la edición francesa de 1837 del *Traité elementaire du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral*.

Lacroix, discípulo y colega de Monge, fue el más prolífico escritor de libros de texto para los cursos que se impartían en la Escuela Politécnica y en la Escuela Normal Superior.

Estas obras de Lacroix, que se editaron numerosas veces, contienen, a pesar del título, una extensa y didáctica visión panorámica de la Geometría Analítica, tal como debía quedar formalmente, después de los numerosos problemas resueltos mediante las aplicaciones sistemáticas del cálculo algebraico a la Geometría que hicieron Lagrange y Monge. Se tratan de los primeros textos que, por su notación, fraseología y métodos, podrían servir perfectamente, con pequeñas modificaciones y ligeras extensiones, como base de un curso actual de Geometría Analítica.

Gracias a Lagrange, Monge y Lacroix, se había alcanzado la forma definitiva de uno de los instrumentos científicos más potentes que se ha elaborado en la Historia del pensamiento matemático, y tan sólo ciento cincuenta años después de que Fermat y Descartes establecieran los fundamentos.

Epílogo: La trascendencia de la Geometría Analítica

Las Geometrías Analíticas de Fermat y Descartes nacen de forma casi simultánea en un periodo histórico, el siglo XVII, en el que acontece una auténtica eclosión de nuevas ramas de la Matemática: Cálculo Infinitesimal –en su doble vertiente diferencial e integral–, Cálculo de Probabilidades, Teoría de Números y Geometría Proyectiva. Es una época en la que se ha alcanzado el grado máximo de recuperación y asimilación del legado matemático griego de modo que las obras de Euclides, Arquímedes, Apolonio, Diofanto y Pappus, traducidas al latín e incluso a las lenguas vernáculas inundan literalmente los ambientes científicos.

El apasionado interés por el mundo matemático clásico de los griegos va más allá incluso de la recuperación y difusión de los grandes tratados traducidos, al pretender la restauración del material perdido a lo largo de los siglos. Impresionados por los resultados y al desconocer los métodos de descubrimiento de la Matemática griega, los matemáticos de la época están animados por un espíritu de reconstrucción de las obras perdidas de la antigüedad, sobre todo las de Apolonio, tal vez movidos por la conjetura de que al reconstruir los libros perdidos, se podría descubrir el procedimiento que utilizaban los griegos para obtener sus brillantes resultados, es decir, «*el método*», que nunca habían desvelado, salvo en el caso exclusivo del Análisis Geométrico de Pappus. Sabemos que en esta actividad de reconstrucción, la de *Los Lugares Planos* de Apolonio (*Apolonii Pergaei libri duo de locis planis restituti*) está el origen del trabajo de Fermat sobre Geometría Analítica, la *Isagoge*.

Bajo una nueva filosofía de la investigación matemática, Fermat y Descartes son los principales artífices de la inflexión radical que presenta la Matemática del siglo XVII respecto a la clásica griega, que es ponderada y es la fuente de formación y de inspiración de los matemáticos, pero se abandonan y critican sus métodos porque no son heurísticos. Con un nuevo enfoque se trata de crear y descubrir, más que de expresar demostrativamente o axiomáticamente. Es más relevante la forma de resolución de los problemas que el estilo de la presentación. No importa tanto la expresión rigurosa como la aplicación de métodos que permitan resolver de forma directa y operativa los problemas y escribirlos formalmente siguiendo la línea de la propia investigación geométrica, es decir, métodos que al describir el proceso inventivo enseñen a descubrir y rompan la clásica dualidad helénica *invención-demostración* que tiene lugar en dos estadios de tiempo y espacio diferentes. Se pondera la heurística y se busca afanosamente la fusión, en un solo acto matemático, del descubrimiento y de la demostración. Pues bien, aquí es donde interviene el Álgebra.

En efecto, el Álgebra mecaniza la Matemática de forma que el pensamiento se simplifica y disminuye el esfuerzo de la mente ante la automatización de los procesos. Para Descartes el Álgebra debe preceder a las demás ramas de la Matemática y en cierto modo es una extensión de la Lógica, como motor del razonamiento, en la línea de lo que llamaba Matemática universal –la *Mathesis* de las *Regulae*–. El Álgebra es la ciencia universal del razonamiento. Y al concretar sobre el ámbito geométrico, el Álgebra es la clave para reconocer los problemas de la Geometría y unificar cuestiones cuya forma geométrica no parece guardar *a priori* relación alguna. Es decir, el Álgebra aporta los principios de clasificación y jerarquía de los problemas y es el instrumento para discutir con elegancia, rapidez y plenitud las cuestiones geométricas. El Álgebra simbólica literal, con incógnitas, variables y parámetros, libera de la necesidad de tratar casos específicos y ejemplos concretos y permite formulaciones generales y desarrollos de procedimientos de resolución independientes de la estructura geométrica particular, que posibilita la aplicación de las mismas técnicas a situaciones análogas.

Concretemos aún más qué función cumple el Álgebra en la Geometría Analítica desde el punto de vista del Análisis de los antiguos, con el fin de justificar el propio nombre de *Geometría Analítica*, que algunos, refiriéndose a Fermat y Descartes, consideran inapropiado. El término *Análisis* se aplica desde Platón y Pappus para describir el proceso de remontarse desde lo que se desea demostrar hasta llegar a alguna verdad conocida, admitida o probada anteriormente. En este sentido es lo opuesto a la *Síntesis*, que representa la presentación deductiva de lo que se halló mediante el *Análisis*. Es bajo estas concepciones que todavía Vieta, Fermat y Descartes consideraban el Análisis para describir la aplicación del Álgebra a la Geometría, puesto que el Álgebra era el instrumento adecuado para *analizar* el problema de construcción geométrica.

Éste es el camino que sigue el método cartesiano en el que el estudio analítico se funde con la síntesis algebraica en transición de la Geometría al Álgebra y del Álgebra a la Geometría. El Análisis mediante el Álgebra traduce los datos geométricos de forma que sean tratables por medio del automatismo del cálculo algebraico, esto es el Análisis Algebraico. Se comprende, pues, el nombre de *Geometría Analítica* que en el curso de la Historia se le dio al instrumento desarrollado Fermat y Descartes, aunque tal vez hubiera sido más descriptivo el de Geometría Algebraica –que curiosamente resultaría de la permutación de los términos de Álgebra Geométrica con que se nombra buena parte de la Matemática de *Los Elementos* de Euclides– aunque este nombre también sería deficiente, toda vez que como hemos visto, la Geometría Analítica es mucho más que una mera aplicación del Álgebra a la Geometría. En suma, la Geometría Analítica sería el Análisis moderno, siendo el Álgebra por su carácter algorítmico el principal instrumento de la aplicación de ese Análisis, por eso también se podría definir con mayor precisión como la aplicación del Análisis Algebraico a la Geometría. Históricamente, hasta muy tarde se han utilizado los términos Álgebra y Análisis como sinónimos. Así aparecen, por ejemplo, en la famosa *Encyclopédie*, donde D'Alembert escribe:

> «*El Análisis es propiamente el método de resolver los problemas matemáticos, reduciéndolos a las ecuaciones. El Análisis para resolver problemas, emplea el recurso del Álgebra, o cálculo de las magnitudes en general: estas dos palabras, Análisis y Álgebra, son a menudo miradas como sinónimas* [...] *Algunos autores definen el Álgebra (como siendo) el arte de resolver los problemas matemáticos: pero ésta es la idea del Análisis o del arte analítico más bien que del Álgebra*.»

Cuestiones nominalistas aparte, volvamos a los orígenes para reiterar que la Geometría Analítica recibe su nombre y sus procedimientos del método de *Análisis* de los griegos y permite recuperar el Análisis Geométrico de los antiguos mediante la acción del Álgebra, ya que el carácter algorítmico de ésta promociona y acentúa las aptitudes heurísticas del Análisis. Así lo observamos claramente en *La Geometría*, donde uno se convence de la posibilidad cartesiana de reconstruir toda la Geometría con una simplicidad sorprendente como el propio Descartes asegura (G.AT,VI,376):

> «[...] *Se pueden construir todos los problemas de la geometría ordinaria, sin hacer más que lo poco que está comprendido en las cuatro figuras que he explicado.*»

Y con unos instrumentos francamente modestos, sólo los Teoremas de Tales y de Pitágoras, como indica a la Princesa Elisabeth en comunicación epistolar de noviembre de 1643:

> «*Yo no considero otros teoremas que los lados de los triángulos semejantes están en proporción, y que, en los triángulos rectángulos, el cuadrado de la base es igual al cuadrado de los dos lados.*»

Es asombroso ¡cómo se puede hacer tanto con tan poco! Y es que el enfoque analítico, siempre con el recurso algorítmico del Álgebra simbólica, permite la generalización de los métodos y la aplicación uniforme de los mismos procedimientos a cuestiones similares.

Al partir del *Análisis Geométrico* griego como punto de partida y utilizar el *Arte Analítica* de Vieta como instrumento algorítmico básico, Fermat y Descartes conducen el *Análisis* a su máximo poder heurístico para la resolución de los problemas geométricos, a base de concluir el estudio analítico con la síntesis algebraica, lo que permitirá, mediante las ecuaciones, transitar de la Geometría al Álgebra y del Álgebra a la Geometría. La Geometría Analítica resultante, dotada del simbolismo literal, con todo el potencial de la mecánica algorítmica operatoria de cálculo, manipulación y simplificación propios de las ecuaciones del Álgebra, reemplaza las ingeniosas y complejas construcciones geométricas del *Álgebra Geométrica* de los griegos por metódicas operaciones algebraicas que permiten mediante un proceso analítico-sintético de resolución de los problemas, no sólo reconstruir la Geometría clásica con más claridad, flexibilidad, operatividad y versatilidad, sino crear, además, una potente heurística geométrica, la Geometría Analítica, como poderoso instrumento de exploración e investigación, mediante el que Fermat y Descartes pudieron plantear y resolver de forma admirable, brillante y prodigiosa problemas difíciles, clásicos y modernos, como la determinación de las rectas normales a las curvas, el *Problema de Pappus* y el *Problema de Apolonio*, entre otros, en el caso de Descartes y otros muchos problemas como los de lugares geométricos, estudio de elementos notables de las curvas (diámetros, ejes, centros, asíntotas, etc.), extremos y tangentes, cuadraturas y cubaturas, centros de gravedad y rectificación en el caso de Fermat. En este sentido, la Geometría Analítica tuvo una decisiva influencia como instrumento clave de la eclosión de multitud de métodos y técnicas infinitesimales, que condujeron al descubrimiento del Cálculo por Newton y Leibniz.

A pesar de ciertas reticencias por parte de Pascal, Barrow, Hobbes, e incluso Newton en la aceptación de los nuevos métodos de la Geometría Analítica de Fermat y Descartes, la extensión de sus aplicaciones a todos los ámbitos de la Matemática fue cada vez más inexorable. A ello contribuyó sobremanera la difusión de las diversas ediciones críticas de van Schooten, plenas de comentarios explicativos, aclaraciones complementarias y apostillas extensivas de los métodos cartesianos del propio editor y de otros matemáticos.

En las dos centurias siguientes a la de Fermat y Descartes, matemáticos de la talla de Euler, Monge, Lagrange, Lacroix, etc. imprimirán a la Geometría Analítica un ingente desarrollo hasta situarla en el umbral de la Geometría Analítica moderna –la que se imparte hoy académicamente–, salvo en lo que se refiere al instrumento vectorial, que la convertirá en una de las vetas más fructíferas del pensamiento matemático, en un instrumento responsable de la increíble pujanza y del impresionante progreso que ha desarrollado la Matemática desde entonces. Por ejemplo, más allá del Análisis Matemático, del encuentro de esta materia con la Geometría Analítica aplicada al estudio de curvas y superficies surge, sobre todo tras los trabajos de Euler y Monge, la Geometría Diferencial.

La Geometría Analítica goza de una serie de virtudes que hacen de ella una cómoda y didáctica herramienta matemática para el abordaje de los problemas geométricos. Por una parte permite que las cuestiones geométricas puedan formularse algebraicamente y que los objetivos geométricos puedan alcanzarse por medio del Álgebra, e inversamente, facilita la interpretación geométrica de los enunciados algebraicos, lo que propicia una percepción más intuitiva de su significado, con la posible apertura a la visión de nuevos problemas y conclusiones. Así lo ve Lagrange cuando escribe en sus *Leçons élémentaires de mathématiques* (1795):

> «*Mientras el Álgebra y la Geometría han estado separadas, su progreso ha sido lento y sus aplicaciones limitadas; pero cuando estas dos ciencias han sido vinculadas, se han prestado su fuerza mutuamente y han caminado juntas hacia la perfección*».

Ilustremos estas ideas de Lagrange mediante las originales motivaciones de Fermat y Descartes, es decir, la asociación de curvas y ecuaciones que establecen lo que hemos llamado Principios Fundamentales de las Geometría Analítica . Toda curva construida según una regla geométrica se puede representar mediante su propia ecuación, que caracteriza a la curva y por ello es diferente de la que corresponde a otra curva distinta. De este modo, las propiedades geométricas de una curva pueden ser descubiertas sin más que examinar el comportamiento algebraico de su ecuación –la ecuación de una curva nos dice si la curva asciende o desciende; cuál es su pendiente en cada punto; si posee un máximo o un mínimo, e incluso que área limita entre ciertos límites–. Así pues, una vez que de la definición geométrica o cinemática de una curva hayamos derivado la ecuación algebraica que tiene asociada, el establecimiento de las propiedades geométricas restantes de la curva es una cuestión de cálculo algebraico. Y para dos curvas, los vínculos entre ellas, por ejemplo, si se cortan o si son tangentes, se pueden predecir estudiando las relaciones algebraicas que existen entre sus ecuaciones. El poder algorítmico de la maquina simbólica creada por el Álgebra aplicado a la Geometría convierte a la Geometría Analítica en un magnífico instrumento de investigación. Así lo describe de forma magistral el historiador y filósofo de la ciencia Hull (1981, p.268):

> «*Su mérito consiste en que capacita para hallar resultados geométricos mediante un procedimiento sistemático que, si se aplica bien, no puede prácticamente fallar. El descubrimiento de nuevos teoremas particulares que en el caso de los métodos griegos, dependía siempre de la llama genial de la imaginación o bien de la buena suerte* [de la idea feliz], *pasa a la esfera de la competencia profesional ordinaria. El progreso de la Geometría, esencial para el de la ciencia, se hace ahora mucho menos romántico, pero mucho más rápido de lo que fue. La Geometría Analítica ha afectado probablemente a la vida humana más profundamente, aunque menos violentamente, que la máquina de vapor o el aeroplano. La creación de nuevos métodos generales es de mucha mayor importancia que el descubrimiento de conocimientos particulares, por interesantes o útiles que éstos sean*.»

A partir de Fermat y Descartes habrá dos tipos de tratamiento de los problemas geométricos que darán lugar a dos Geometrías, la Analítica, que aplicará el nuevo lenguaje algebraico y la Sintética, que prescindirá del mismo. Gracias al lenguaje analítico podrán resolverse problemas para los que el lenguaje geométrico puro era impotente, como hallar la normal o la tangente a una curva, calcular el área encerrada por una curva, máximos y mínimos, y demás problemas infinitesimales, cuya resolución se inicia en simultaneidad con el trabajo cartesiano. Pero aunque un problema pueda ser tratado de las dos formas, la analítica dependerá menos de la geometría de la figura y por tanto será más simple y más general.

Por ejemplo, para demostrar que las alturas o mediatrices de un triángulo se cortan en un punto, en Geometría Sintética hay que considerar por separado la forma del triángulo según los ángulos, porque ello condiciona si la intersección tiene lugar en el interior o en el exterior del triángulo. En Geometría Analítica, los dos casos se consideran de consuno.

Las maravillosas virtudes de la Geometría Analítica, ponderadas por todos los grandes matemáticos, a partir de Fermat y Descartes, no suponen ni obligan a abandonar la Geometría Sintética, simplemente el profesional sabe que hay dos métodos geométricos y utilizará uno u otro según el objetivo del problema o según el gusto y el sentido estético. ¿Por qué renunciar a las diversas herramientas del taller geométrico? Por ejemplo, el gran maestro Euler, en un pequeño artículo de 1747 que lleva el poco original título de *Variae demostrationes geometricae*, aplicará Geometría Sintética pura para demostrar, con una elegancia incomparable, la clásica y famosa Fórmula de Herón para el área del triángulo en función de los lados (Dunham, Nivola, 2000, p.215). Pero en otro artículo de 1767, haciendo gala de una increíble intuición geométrica y en síntesis con una audaz perseverancia algebraica, Euler descubrirá y demostrará, con la más bella y brillante aplicación de Geometría Analítica, la famosa recta que lleva su nombre –la *Recta de Euler*:

> «*En cualquier triángulo el Ortocentro, el Baricentro y el Circuncentro están sobre la misma recta. Además, el Baricentro está dos veces más lejos del Ortocentro que del Circuncentro*.»

Conocidos ambos ejemplos, podemos decir que la versatilidad analítica, sintética algebraica, geométrica, teórica y práctica de Euler no tiene límites. Las dos demostraciones eulerianas podrían representar en su propia persona a los dos bandos, el analítico y el sintético, enfrentados en una controversia que se remonta al umbral de la aplicación de los métodos cartesianos. Por fortuna, para los grandes artífices de la Matemática, como el propio Euler o Monge, la polémica es de lo más estéril y debe ceñirse a cuestiones de tipo exclusivamente estético, sin elevarla a juicios de valor acerca de cuál de las dos Geometrías es superior, aunque se esté de acuerdo en que, ciertamente, por el automatismo del Álgebra Simbólica que se aplica en la Geometría Analítica, la Geometría Sintética, como dice W.Dunham (Nivola, 2000, pp.229-230):

> «*requiere a menudo un punto de intuición, que habitualmente se conoce como inspiración*. [...] *¿Cómo sabía Euler qué hacer* [en uno y otro problema]. *En última instancia, la respuesta a esta pregunta se halla en el misterioso territorio de la imaginación humana.* [...] *Por supuesto, uno puede preguntarse si la Geometría Analítica es realmente Geometría. Carente de gracia y elegancia, dependiente de lo que Carnot llamó "los jeroglíficos del Análisis", ¿no es una mera aplicación de una fuerza algebraica inexorable*?»

La fuerza incuestionable de la Geometría Analítica y su generalidad e independencia de la «*idea feliz que trae la divina inspiración*», permite entender que, por ejemplo, el discípulo de Monge, Poncelet, uno de los artífices de la Geometría Proyectiva moderna, autor de la importante obra *Traité des propriétés projectives des figures* (1822), y no precisamente un gran admirador de la Geometría Analítica, escribiera:

> «*Mientras la Geometría Analítica ofrece su característico método general y uniforme como forma de proceder en la resolución de problemas* [...]*, la otra* [la Geometría Sintética clásica] *actúa al azar y depende completamente de la sagacidad de los que la emplean*.»

La Geometría Analítica tuvo un papel fundamental en la transformación analítica de la Geometría Sintética Infinitesimal de Arquímedes en el Análisis Matemático de Newton y Leibniz, es decir, en el llamado descubrimiento del Cálculo Infinitesimal, donde precisamente las cuadraturas y tangentes de Fermat, desarrolladas en sincronía con su Geometría Analítica de la *Isagoge,* tuvieron una incidencia decisiva. En la brillante operación realizada por Newton y Leibniz, que se ha venido en llamar el descubrimiento del Cálculo Infinitesimal, y que es sin lugar a dudas, uno de los logros más importantes en la Historia del Pensamiento matemático, coadyuvó de forma decisiva la creación y aplicación de un simbolismo que propiciara traducir en fórmulas los resultados y en algoritmos los métodos, a base de utilizar los recursos algebraicos de la Geometría Analítica para independizar el discurso matemático de las figuras geométricas y con todo ello reconocer y aislar los conceptos fundamentales del Cálculo Infinitesimal y crear un cuerpo de doctrina dotado de algoritmos eficaces, es decir, funcionando como un Cálculo operacional que resuelve todos los problemas planteados anteriormente, mediante procedimientos uniformes y con una proyección a nuevos y más complicados problemas, como un potente instrumento de investigación. En palabras del propio Leibniz, se trataba de hacer con las técnicas del Cálculo lo mismo que había hecho Vieta con la Teoría de Ecuaciones y Descartes con la Geometría. Y más allá del Análisis Matemático, en el encuentro de esta materia con la

Geometría Analítica aplicada al estudio de curvas y superficies, la forma casi actual que había adquirido la Geometría Analítica en su evolución tras los trabajos de Euler y los matemáticos de la Revolución Francesa ocupó un lugar primordial en el advenimiento y desarrollo de la Geometría Diferencial de Monge y sus epígonos.

Como hemos podido observar, entre la Geometría Analítica moderna y la de Descartes y Fermat hay una cierta diferencia, de modo son anacrónicas las expresiones actuales como «*sistema de coordenadas cartesianas*». Incluso parece ser que el término «*coordenadas*» fue acuñado por Leibniz a finales del siglo XVII para referirse a lo que Descartes llama, por primera vez en el *Problema de Pappus* «*líneas principales de referencia*». De hecho, Descartes pocas veces utiliza ejes perpendiculares, conocidos como *cartesianos*, sino que emplea diferentes sistemas de coordenadas, en general oblicuas, que a veces resultan poco claras a nuestros ojos. Descartes no elaboró propiamente un sistema de coordenadas para localizar puntos, de manera que sus coordenadas no son, como para nosotros o para Oresme, parejas de números. Mientras Oresme representaba la evolución de un fenómeno mediante el gráfico de la ley correspondiente, obteniendo una curva que ilustraba geométricamente la relación de dependencia entre dos variables, a Descartes más que los lugares de puntos que satisfacían una ecuación dada, le interesaba la posibilidad de construir esos puntos, a lo que se reconducía ciertos problemas geométricos. La Geometría Analítica tal como hoy se enseña, no se reconocería de una forma palmaria, por tanto, en el tratado de Descartes. Lo que uno encuentra en Descartes no es tanto la Geometría de coordenadas como la transcripción algebraica de las construcciones con regla y compás.

En su forma académica actual, la Geometría cartesiana debe tanto a Fermat y Descartes como a sus propios contemporáneos y sucesores. Lo que se enseña hoy en las aulas no es Geometría Analítica en el sentido como la entendían sus creadores, ni en cuanto a los objetivos ni en cuanto a los métodos. Pero sí que hay algo importante en común, la Geometría Analítica, la de entonces y la de ahora es un potentísimo instrumento algorítmico de resolución de problemas geométricos de importancia trascendental para otras ramas de la Matemática y de las Ciencias de la Naturaleza, tal como comprobamos en nuestras aulas.

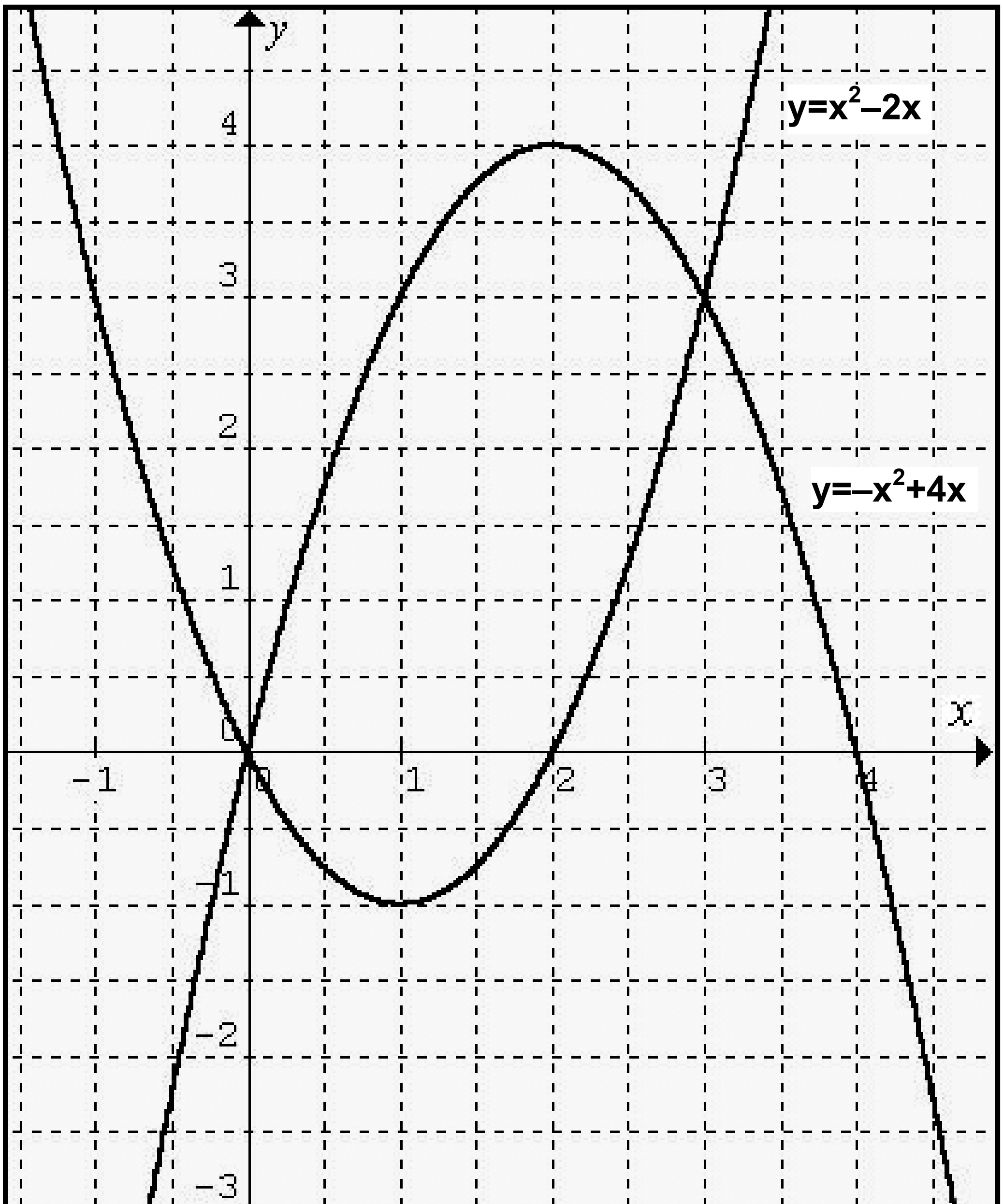
La Geometría Analítica, de origen remoto en el Análisis Geométrico de los griegos con su incipiente uso retórico de coordenadas en *las Cónicas de Apolonio* y su apoyo en la mecánica algorítmica del Álgebra simbólica de Vieta, domina el pensamiento matemático desde la época de sus creadores, Fermat y Descartes, hasta nuestros días. El empleo sistemático de las coordenadas tratadas con el cálculo algebraico, es una potente herramienta algorítmica de resolución de problemas geométricos, un método de un poder y una universalidad tan eficientes en la Matemática, que supera cualquier otro instrumento anterior, y más allá de la Geometría y de la Matemática, la Geometría Analítica ha revolucionado todas las ciencias relacionadas con el tiempo y el espacio, a través del concepto de función, la herramienta más importante para el conocimiento y dominio de la naturaleza. Por eso como escribe Kline (1992, vol.1, p.425):

> «*La Geometría Analítica cambió la faz de las Matemáticas.*»

La fuerza algebraica inexorable de la Geometría Analítica, su universalidad y su autonomía de la «*fortuna que depende de la inspiración*», democratiza la Geometría y la Matemática en general y pone al servicio de la Humanidad, es decir, de cualquier persona normal, de todo escolar que tenga pequeños rudimentos de Álgebra, un eficaz instrumento que potencia la intuición, facilita la investigación y promueve que no sea imprescindible un gran talento, una gran capacidad inventiva y una gran sagacidad y sutileza intelectual en la resolución de los problemas geométricos. Basta para ello aplicar el automatismo de las combinaciones algebraicas en la mecánica del cálculo. Por eso nos permitimos completar la frase anterior de Kline para sentenciar:

> «*La Geometría Analítica cambió la faz de las Matemáticas y de la Educación matemática.*»

LA GEOMETRÍA ANALÍTICA COMO PODEROSO INSTRUMENTO DE LA MATEMÁTICA ESCOLAR



Aplicación de la Geometría Analítica, en un problema de Bachillerato, para hallar el área limitada por las parábolas $y=x^2-2x$, $y=-x^2+4x$.

La Geometría Analítica es una poderosa herramienta del pensamiento matemático que al unir la Geometría con la Aritmética, a través del Álgebra, democratiza la Geometría y la Matemática en general. La fuerza algebraica inexorable de la Geometría Analítica la convierte en un instrumento que permite a cualquier persona que tenga pequeños rudimentos de Álgebra resolver problemas geométricos, de modo que parafraseando a Descartes en El Discurso del Método: «*se ejercita el entendimiento sin fatigar mucho la imaginación*» (DM.AT,VI,17). En este sentido decimos que la Geometría Analítica *es* una geometría democratizadora, y por tanto un potente utensilio de la Matemática escolar.

Al sustituir las ingeniosas y complejas construcciones geométricas euclídeas por sistemáticas y mecánicas operaciones algebraicas, con una elegancia, rapidez y plenitud heurística que funde en un único acto el descubrimiento y la demostración la Geometría Analítica cambió la faz de las Matemáticas –en frase de Morris Kline– y la faz la de la Educación Matemática.

CRONOLOGÍA DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA (1)

–585. TALES. Teoremas llamados de Tales.
–550. PITÁGORAS. Teorema llamado de Pitágoras. *Álgebra Geométrica*. *Cuadrivium*.
–480. HIPASOS. Descubrimiento de las magnitudes inconmensurables.
–450. HIPÓCRATES. Duplicación del cubo. Método de Análisis. Letras en figuras geométricas. Primeros *Elementos* de Geometría.
–420. HIPIAS. Sofística. Cuadratriz. Trisección del ángulo.
–400. ARQUITAS. Estereometría. Duplicación del cubo. Mecánica.
–380. PLATÓN. Método Analítico. La Academia. Mecenazgo de matemáticos.
–350. MENECMO. Secciones cónicas. Duplicación del cubo.
–320. EUDEMO. Historia de las Matemáticas.
–300. EUCLIDES. *Los Elementos*. Compilación y sistematización de la Geometría elemental griega. *Álgebra Geométrica* de *Los Elementos*. *Porismas*.
–200. APOLONIO. *Las Cónicas*. Elementos notables de las cónicas. Lugares geométricos. Tangencias. *Problema de Apolonio*. *Problema de Pappus*. Sistemas de coordenadas. *Symptoma* de las cónicas (ecuaciones del *Álgebra Geométrica* en forma de proporción).
+250. DIOFANTO. La Aritmética. Ecuaciones diofánticas. Álgebra sincopada.
+325. PAPPUS. *La Colección Matemática*. Compilación del Análisis Geométrico griego. Geometría Superior. Comentarios. Cónicas como lugares geométricos (foco y directriz). *Problema de Pappus*. Método Analítico. Clasificación de los problemas geométricos. Duplicación del cubo. Trisección del ángulo.
+460. PROCLO. Lugares geométricos. Filosofía de la Matemática.

1330. ESCUELA DE MERTON. Estudio de movimiento. *Regla de Merton*.
1360. ORESME. *Tractatus de latitudinibus formarum*. Latitud de las formas. Sistemas de coordenadas. Representación gráfica de variables. Estudio de movimiento. *Principio de Oresme*. *Regla de Merton*.
1572. BOMBELLI. *Algebra*. Estructuración lógica y sistemática del Álgebra. Aplicaciones del Álgebra a la Geometría y de la Geometría al Álgebra. Resolución de la ecuación cúbica y la cuártica.
1575. COMMANDINO. Recuperación, traducción y restauración del legado clásico griego (*Los Elementos* de Euclides, *Obras* de Arquímedes, *Las Cónicas* de Apolonio, *La Colección Matemática* de Pappus).
1591. VIETA. Arte Analítica (*In artem analyticem isagoge*). Álgebra simbólica. Parámetros. Resolución de ecuaciones por cálculo literal. *Logistica Speciosa*. Análisis Algebraico. Construcción geométrica de las operaciones algebraicas y de las soluciones de las ecuaciones. Reducción de las ecuaciones cúbicas a los problemas clásicos de la duplicación del cubo y de la trisección del ángulo.

1606. DESCARTES. Descartes ingresa en el Colegio Jesuita de *La Flèche*. Inicia su formación matemática con los manuales de Clavius y continua con la lectura de Euclides, Arquímedes, Apolonio, Diofanto y Pappus. Muy probablemente (aunque lo niega) se pone al corriente de la obra de Vieta.
1619. DESCARTES. (10/11/1619). Noche mística de los sueños. Presunta revelación de «*los fundamentos de una ciencia admirable*».Descartes se siente predestinado a emprender la magna empresa de la reforma de la Filosofía y concibe la idea de la fusión del Álgebra y la Geometría como fundamento de la Sabiduría universal.
1626. FERMAT. Reconstrucción de *Los Lugares Planos* de Apolonio.
1628. DESCARTES. *Reglas para la dirección del espíritu*. Se publica en 1701.
1629. FERMAT. Geometría Analítica de Fermat (*Introducción a los Lugares Planos y Sólidos –Ad Locos Planos et Solidos Isagoge–*).
1637. DESCARTES. *Discours sur la Méthode*. *La Géométrie*.
1646. VAN SCHOOTEN. Edición de las obras de Vieta *Opera Mathematica*.

CRONOLOGÍA DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA (2)

1643. DESCARTES. Correspondencia con la Princesa Elisabeth de Bohemia. *Problema de Apolonio*.
1645. FERMAT. *Novus Secundarum ...* . Sugerencia sobre el *Principio Fundamental* de la Geometría Analítica de tres dimensiones.
1649. VAN SCHOOTEN. Primera edición en latín de *La Geometría*.
1650. DE WITT. *Elementa Curvarum Linearum* (incorporado a las ediciones de van Schooten de 1659 y 1695 de *La Geometría* de Descartes). Primer tratado sistemático de Geometría Analítica plana. Reducción de algunas ecuaciones de segundo grado a formas canónicas Reconocimiento de las cónicas según el Discriminante.
1657. VAN SCHOOTEN. *Exercitationes Geometricae.* Primer texto con Geometría Analítica de tres dimensiones.
1659. VAN SCHOOTEN. Nueva edición en latín de *La Geometría*.
1665. WALLIS. *Tractatus de sectionibus conicis*. Cónicas como lugares geométricos. Propiedades de las cónicas a través de sus ecuaciones.
1675. BARROW. Edición de *Las Cónicas* de Apolonio.
1679. FERMAT. Samuel de Fermat publica *Varia Opera Mathematica*.
1679. LA HIRE. *Nouveaux éléments des sections coniques*. Geometría Analítica de tres dimensiones. Representación gráfica de superficies.
1695. VAN SCHOOTEN. nueva edición en latín de *La Geometría*.

1710. HALLEY. Reconstrucción y edición de *Las Cónicas* de Apolonio.
1717. STIRLING. *Lineae Tertii Ordinis Neutonianae*. Reducción de la ecuación general de segundo grado en dos incógnitas a las diversas formas canónicas.
1748. EULER. *Introductio in Analysin infinitorum*. Estudio y representación gráfica de funciones por medio de su ecuación. Curvas algebraicas y trascendentes. Coordenadas polares. Expresión paramétrica de curvas. Ecuación de la recta. Problemas de intersección. Puntos notables de un triángulo. *Recta de Euler*. Lugares geométricos. Estudio de la ecuación general de las cónicas. Obtención analítica de los puntos, líneas y razones notables asociados a las cónicas. Clasificación general de las cónicas. Estudio sistemático de Geometría Analítica de tres dimensiones. Estudio y representación gráfica de curvas y superficies por medio de sus ecuaciones. Consideración de los tres planos coordenados y de los ocho octantes. Estudio de superficies algebraicas y trascendentes mediante trazas por planos. Estudio de conos, esferas, cilindros y conoides. Fórmula de Euler de traslación y rotación de ejes. Cambios de coordenadas. *Ángulos de Euler*. Ecuación del plano. Cosenos directores. Problemas de intersección. Estudio general de la ecuación cuadrática en tres incógnitas y su reducción mediante transformaciones a las formas canónicas. Clasificación general de las superficies cuádricas.
1775.LAGRANGE. *Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires*. Geometría Analítica del tetraedro (áreas, centro de gravedad, volumen, centros y radios de las esferas inscrita y circunscrita). Distancia de un punto a un plano.
1795. MONGE. *Feuilles d'analyse apliquée a la géométrie*. Desarrollo sistemático de la Geometría Analítica tridimensional. Fórmulas de traslación y rotación de ejes para las ecuaciones del cambio de coordenadas. Diversas generalizaciones tridimensionales del *Teorema de Pitágoras*. Puntos notables del tetraedro. Posición relativa de rectas y planos. Ángulos. Distancias (punto-punto, punto-recta, recta-recta). Perpendicular común. Clasificación de cuádricas, planos y ejes principales.*Teorema de Monge*.
1798. LACROIX. *Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et sphérique et application de l'algèbre à la géométrie*. Recopilación sistemática en un libro de texto de los resultados de Geometría Analítica de Monge y Lagrange, en sentido moderno, didáctico y académico.
1805. BIOT. *Essais de Géométrie Analytique*. Aparece por primera vez en el título de un libro el nombre de Geometría Analítica.
1891-1912. HENRY, TANNERY. Publicación de las *Oeuvres de Fermat*.
1897-1910. ADAM, TANNERY. Publicación de *Vie et Oeuvres de Descartes*.

Bibliografía

Obras originales sobre La Matemática Griega

1. EUCLIDES: *Elementos*. Traducción y notas de M.L.Puertas. Gredos, Madrid, 1996.
2. HEAT,T.L.: *The thirteen books of The Elements*. 3 Vols. Dover, New York, 1956.
3. VER EECKE,P.: *Les Coniques d'Apolonius de Pergue*. Blanchard, París, 1959.
4. VER EECKE,P.: *Diophante d'Alexandrie. Les six livres arithmétiques*. Blanchard, París, 1959.
5. VER EECKE,P.: *Les Oeuvres complètes d'Archimède*. Vaillant-Carmanne, Liège, 1960.
6. VER EECKE,P: *Pappus d'Alexandrie. La Collection Mathémathique*. Blanchard. París, 1982.
7. VERA,F.: *Científicos griegos* (Ediciones en español de *Los Elementos* de Euclides, *Las Cónicas* de Apolonio, *La Aritmética* de Diofanto y *La Colección Matemática* de Pappus). Aguilar, Madrid, 1970.

Obras originales de Fermat y Descartes

8. DESCARTES,R.: *Vie et Oeuvres de Descartes*. Publiées par C. Adam y P. Tannery. 13 volúmenes. Léopold Cerf, imprimeur París, 1897-1913.
9. DESCARTES,R.: *Oeuvres de Descartes*. Pub.C. Adam; P.Tannery. Lib. Philos. J.Vrin, París, 1964-74.
10. DESCARTES,R.: *La Geometría*. Introd.de P.Rosell. Espasa-Calpe, Buenos Aires, 1947.
11. DESCARTES,R.: *The Geometry*. Traducción de D.Smith. Dover, New York, 1954.
12. DESCARTES,R.: *La Geometria*. Introducció, traducció i notes de J.Pla i P.Viader. Institut d'Estudis Catalans, Eumo-Pòrtic, Barcelona-Vic, 1999.
13. DESCARTES,R.: *Discurso del Método, Dióptrica, Meteoros y Geometría*. Prólogo, traducción y notas de G.Quintás. Alfaguara, Madrid, 1986.
14. DESCARTES,R.: *Discurso del Método / Reglas para la dirección de la mente*. Orbis, Barcelona,1983.
15. DESCARTES,R.: *Reglas para la dirección del espíritu*. Alianza Editorial, Madrid, 1989.
16. DESCARTES,R.: *Discurso del Método*. Alianza Editorial, Madrid, 1991.
17. FERMAT: *Oeuvres de Fermat*. Pub. Henry,C; Tannery,P, Gauthier-Villars, París, 1891-1912.

Obras originales de otros autores

18. D'ALEMBERT,J.: *Discurso preliminar de la Enciclopedia*. Losada, Buenos Aires, 1954.
19. D'ALEMBERT,J.: *Discurso preliminar de la Enciclopedia*. Orbis, Barcelona, 1984.
20. EULER: Introducción al Análisis de los infinitos. Versión de A.Durán. Sevilla, 2000.
21. ORESME,N.: *Tractatus de configurationibus Qualitatum et motuum*. Versión de M.Clagett. University of Wisconsin Press, 1968.
22. PLATÓN: *Obras Completas*. Aguilar. Madrid, 1969.
23. VIETA: *Introduction a l'Art Analytique*. Traduit par M.F.Ritter. 1867.
24. VIETA: *The Analytic Art*. Traslated by T.R.Witmer. The Kent University Press, Ohio, 1983.
25. VIETA: *Oeuvres Mathématiques*. Traduction du latin in français par J.Peyroux. Blanchard, París, 1991-92.

Obras sobre Descartes

26. ÁLVAREZ,C.: *Descartes y la ciencia del siglo XVII*. Siglo XXI. México, 2000. Caps.1,3,4.
27. CHICA,A.: *Descartes, Geometría y Método*. Nivola. Madrid, 2001.
28. CROMBIE,A.C.: Grandes Matemáticos. *R. Descartes*. Investigación y Ciencia. Cap.3. 18-24. Barcelona, 1995.
29. GARIN,E.: *Descartes*. Crítica, Barcelona ,1989.
30. GÓMEZ PIN,V.: Descartes. Barcanova. Barcelona, 1984.
31. MARITAIN,J.: *Le songe de Descartes*. Edit. Buchet/Chastel. París,1922.
32. MONTESINOS,J.: *Descartes: el Álgebra y la Geometría*. Actas, año II, Seminario Orotava de Historia de la Ciencia, Canarias 1995.
33. RODIS-LEWIS,G.: *Descartes et le Rationalisme*. PUF. París, 1996.
34. ROSSELLINI,R.: *Cartesius*. RAI, una produzione Orizzonte 2000. 180'.
35. TURRÓ,S.: *Descartes. Del Hermetismo a la nueva Ciencia*. Anthropos. Barcelona,1985.
36. SIRVEN,J.: *Les années d'apprentissage de Descartes*. Albi. París,1928.
37. SHEA,W.R.: *La magia de los números y el movimiento*: *la carrera científica de Descartes*. Alianza Universidad, 746, Madrid, 1993.
38. VALENSIN,A.: *Imágenes de Descartes*. Cuadernos Taurus. Madrid, 1963.
39. VARIOS AUTORES. *Descartes, les nouvelles lectures* (Artículos sobre Descartes en el cuarto centenario de su nacimiento). Magazine littéraire,342. París, abril,1996.
40. VARIOS AUTORES. Artículos en la Prensa española sobre Descartes en el cuarto centenario de su nacimiento. LA VANGUARDIA, 26/3/96; EL PAÍS, 3/1/96, 2/3/96, 25/3/96, 30/3/96, 19/7/96; EL MUNDO, 23/3/96; AVUI 27/3/96, ABC, 29/3/96, 20/4/96, 4/5/96; HISTORIA Y VIDA, 341, 8/96.
41. VUILLEMIN,J.: *Mathématiques et métaphisyque chez Descartes*. PUF. París, 1987.
42. WILLIAMS,B.: *Descartes*. Catedra, Teorema, Madrid, 1996.

Obras sobre Fermat

43. EDWARDS,H.: Grandes Matemáticos. *Pierre de Fermat*. Investigación y Ciencia. Cap.4, 26-34. Barcelona, 1995.
44. MAHONEY,M.S.: *The Mathematical Career of Pierre Fermat*. Princeton University Press, 1973.
45. MAHONEY,M.S.: *P.Fermat* (in Dictionary of Scientific Biography). Charles Scribners sons. Vol.IV, 566-576. New York, 1970.
46. LYCÉE PIERRE FERMAT DE TOULOUSE: *Un Mathématicien de Génie, Pierre de Fermat*. Exposition organisée par la Bibliothèque Municipale avec la collaboration des archives départamentales.Toulouse, 22/6/1957.
47. ITARD,J.: *Pierre Fermat*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1950.

Obras generales de Historia de las Matemáticas

48. BELL,E.T.: *Les grands mathématiciens*. Payot. París, 1950. Caps.3,4.
49. BELL,E.T.: *Historia de las Matemáticas*. Fondo de Cultura Económica. México, D.F., 1985. Caps.3,6,7.
50. BOYER,C.B.: *History of Analytic Geometry*. Scripta Mathematica. Yeshiva Univ. New York, 1956.
51. BOYER,C.B.: *Historia de las Matemáticas.* Alianza Universidad. Madrid. 1986. Caps. 4,5,6,7,9,11,14,15,16,17,18,21,22.
52. CAJORI,F.: *A History of Greek Mathematics*.The MacMillan Company. Londres, 1919. Caps.3,11.
53. CAJORI, F.: *A History of mathematical notations*. Dover, New York, 1983.

54. CHASLES,M.: *Aperçu historique sur l'origine et le développment des méthodes en Géométrie*. París 1875.
55. CLAGETT,M.: *Nicole Oresme and the Medieval Geometry of Qualities and Motions*. University of Wisconsin Press, 1968.
56. COLERUS,E.: *Breve historia de las Matemáticas*, Vol.1, Caps.1,2,4,5,8,9; Vol.2, Cap.1. Doncel. Madrid, 1972.
57. COOLIDGE,J.L.: *A History of the conics sections and quadric surfaces.* Dover, New York, 1968. Caps.1,2,3.6,5.1,5.3.
58. DEDRON,P; ITARD,J.: *Mathematics and Mathematiciens*. TSLB, Londres, 1974. Vol.2, Cap.3.
59. DEDRON,P.: *Mathématiques et Mathématiciens*. Magnard, París, 1959. Cap.X.3.
60. DUNHAM,W.: *El Universo de las Matemáticas*. Pirámide. Madrid, 1995. Caps.5,6,7.
61. DUNHAM,W.: *Euler, el maestro de todos los matemáticos*. Nivola, Madrid, 2000. Cap.7.
62. EGGERS,C.: *El nacimiento de la Matemática en Grecia*. EUDEBA. Buenos Aires,1995. Cap.6.
63. EVES,H.: *An Introduction to the History of Mathematics*. CBS College Publishing,New York, 1983. Caps.3,4,5,6,10,12.
64. EVES,H.: *Great Moments in Mathematics*. The mathematical association of America, 1977. Vol.I. Caps.5,6,8,11,12,23.
65. GELFAND,E.: *EL método de las coordenadas*. MIR, Moscú, 1981.
66. GONZALEZ URBANEJA,P.M.: *Las raíces del Cálculo Infinitesimal en el siglo* XVII. Alianza. Madrid, 1992. Caps.1,3.1,3.2.
67. GONZÁLEZ URBANEJA,P.M; VAQUÉ, J.: *El método relativo a los teoremas mecánicos de Arquímedes*. Pubs. Univ. Aut. de Barcelona, Eds. Univ. Polit. de Catalunya. Col. Clásicos de las Ciencias. Barcelona 1993. Apéndice 1.
68. GONZÁLEZ URBANEJA,P.M. y VAQUÉ JORDI, J.*: Mètode d'Arquimedes sobre els teoremes mecànics dedicat a Eratòstenes.* Fundació Bernat Metge. Barcelona, 1997. Cap.2.
69. GONZALEZ URBANEJA,P.M.: *El Pensament geomètric en el món grec*. ICE. Universitat de Barcelona, 1996. Caps. 8,10,12.
70. GONZALEZ URBANEJA,P.M.: *La Matemática de la Revolución Francesa*. Seminario *Orotava* de Historia de la Ciencia, Actas, año II, Las Palmas , 1997.
71. GONZALEZ URBANEJA,P.M.: *Pitágoras, el filósofo del número*. Nivola. Madrid, 2001. Cap.6.
72. GONZALEZ URBANEJA,P.M.: *Matemáticas y matemáticos en el mundo griego* (en El legado de las Matemáticas. De Euclides a Newton. Los genios a través de sus libros). Consejería de Cultura. Junta de Andalucía. Sevilla, 2000.
73. GONZALEZ URBANEJA,P.M.: *Pitágoras. El umbral del Pensamiento occidental* (en Reflexiones sobre el pasado, presente y futuro de las Matemáticas). Publ. Universidad de Huelva. 2002.
74. GONZALEZ URBANEJA,P.M.: *Los orígenes de la Geometría Analítica*. Fundación Canaria *Orotava* de Historia de la Ciencia. Tenerife, 2003.
75. HEAT,T.L.: *A History of Greek Mathematics*. 2 Vols. Dover, New York, 1981. Caps.5,6,9,10,11,14,19,20.
76. KLEIN,J.: *Greek mathematical thought and the origin of algebra*. Dover, New York, 1992. Caps.10,11.
77. KLINE,M.: *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*. 3 Vols. Alianza Univ. Madrid, 1992. Caps.3,4,5,15,23.
78. KNORR,W.R.: *The ancient tradition of geometric problems*. Dover, New York, 1981. Caps.2,3,4,7,8.
79. LEVI,B.: *Leyendo a Euclides*. Zorzal, Buenos Aires, 2001. Cap.3.
80. LORIA,G.: *Histoire des sciences mathématiques dans l'antiquité hellénique*. Gauthiers-Villars, París, 1929. Caps.2,3.
81. MALET,A.: *El Álgebra en el período renacentista. La recuperación de los clásicos griegos*. PPU. Barcelona, 1989. Caps.1,2, Ap.1,3,4.

82. MONTESINOS,J (Compilador): *Historia de la Geometría griega*. Seminario Orotava de Historia de la Ciencia. Tenerife, 1992.
83. MONTESINOS,J.: *Historia de las Matemáticas en la Enseñanza Secundaria*. Síntesis. Madrid.2000. Caps.1,6.
84. MONTUCLA,J.: *Histoire des Mathématiques*. Cap.III.3,IV.2. Blanchard. París, 1968
85. NICOLAU,F.: *La Matemàtica i els matemàtics.* Claret, Barcelona, 2000. Cap.29.
86. REY,A.: *El apogeo de la ciencia técnica griega*. UTEHA, México 1962. Caps. III.1, III.2.
87. REY PASTOR,J.; BABINI,J: *Historia de la Matemática* .Espasa-Calpe, Buenos Aires, 1951. Caps. III.19, III.22, VI.33.
88. REY PASTOR,J.; BABINI,J.: *Historia de la Matemática*. Gedisa, 2 Vols. Barcelona, 1984. Caps. 3,4,7,8,9.
89. RÍBNIKOV,K.: *Historia de las Matemáticas*. MIR, Moscú, 1974. Cap. 5.2.
90. ROUSE BALL,W: *Histoire des Mathématiques*. Libr. scientifique A.Hermann, París, 1906. Cap.15.
91. SCOTT,J.F.: *A History of Mathematics*. Taylor and Francis, New York, 1975. Cap.7.
92. SERRES,M. (Compilador): *El Saber griego*. Akal. Madrid, 2000. Cap.3.
93. SMITH,D.E.: *History of Mathematics*. Dover. New York, 1959.Vol.II, Cap.5.8.
94. SMITH,D.E.: *A Source Book in Mathematics*. Dover. 2 Vols. New York. Caps. III.14,III.15.
95. STRUIK.D.J.: *A Source Book in Mathematics, 12OO-18OO*. Harvard University Press, Cambridge, 1969. Caps.2.5,3.1,3.3,3.4,3.5.
96. SZABÓ,A.: *Les débuts des Mathématiques grecques*. Librairie Vrin. París, 1977. Caps.1.12, 3.2.
97. TANNERY,P.: *La géométrie grecque*. Gauthier-Villars. París,1887. Caps.10,11,12.
98. THE OPEN UNIVERSITY: *L'aparició de la Matemática grega*. Televisió de Catalunya.
99. UNIVERSIDAD COMPLUTENSE: *Libros antiguos de Matemáticas*. Madrid, 2000.
100. VAN DER WAERDEN,B.L.: *Geometry and Algebra in Ancients civilizations*. Springer-V, Berlín, 1983. Caps.3,4.
101. VAN DER WAERDEN,B.L.: *A History of Algebra*. Springer-Verlag. Berlín, 1985. Cap.3.
102. VARIOS AUTORES: *Sigma, el mundo de las Matemáticas*. Grijalbo. Barcelona,1969. Vol.I, Cap.7.
103. VARIOS AUTORES: *Mathématiques a fil des âges*. Gauthiers-Villars, París, 1990. Cap.6.
104. VERA,F.: *Breve Historia de la Geometría*. Losada. Buenos Aires. 1963. Caps. 2,3,4,5,7.
105. VERA,F.: *Veinte matemáticos célebres*. Mirasol. Buenos Aires, 1961. Caps. 5,10.
106. WUSSING,H.: *Lecciones de Historia de las Matemáticas*. Siglo XXI. Madrid, 1989. Cap.7.2.

Obras de Filosofía de la Ciencia y de las Matemáticas

107. BRÉHIER,E.: *Historia de la Filosofía*. Caps.1.3,4.3.
108. BRUNSCHVIC,G,L.: *Les étapes de la Philosophie Mathématique*. Blanchard, París, 1972. Caps.4,6,7.
109. FOWLER,D.H.: *The Mathematics of Plato's Academy*. Oxford U.P. New York, 1999. Cap.3.
110. GARCÍA FONT,J.: *Historia de la Ciencia.* Barcelona, 1980. Caps.5,7,14.
111. GUTHRIE, W.: *Historia de la Filosofía griega*. Gredos. Vols, I,V.Madrid, 1984-1990.
112. HULL,L,W,H.: *Historia y Filosofía de la Ciencia*. Ariel, Barcelona, 1981. Cap.8.
113. KLINE,M.: *Matemáticas, la pérdida de la certidumbre*. Siglo XXI, Madrid, 1985. Caps.2,3.
114. LORENZO,J.: *Introducción al estilo matemático*. Tecnos, Madrid, 1971. Cap.4.
115. MAGEE,B.: *Historia de la Filosofía*. Blume. Barcelona, 1999. Caps.1,4.
116. MILHAUD,G.: *Les Philosophes-Géométres de la Grèce*. Arno Press. New York, 1976. Cap. I.2.

117. RUNES,D.: *Historia ilustrada de la Filosofía*. Grijalbo. México, 1967.
118. RUSSELL,B.: *Historia de la Filosofía occidental*. Austral.Madrid,1995. V.1.L1.Cap.24, V.2.L3.Cap.9.
119. SPENGLER,O.: *La decadencia de Occidente*. Austral, Madrid, 1998.Cap.I.1.
120. VARIOS AUTORES: *Historia del Pensamiento*. Ediciones Orbis, Vol.2. Cap.3. Barcelona, 1983.

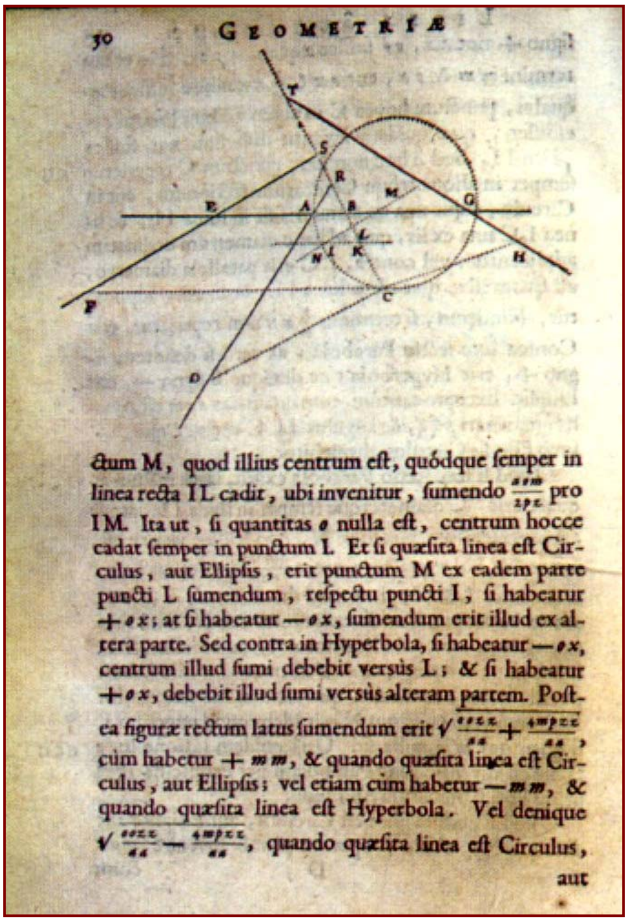
Artículos de revistas científicas

121. BERTHET,J.: *La méthode de Descartes avant le discours*. Revue de Métaphisique, 1896, 388-415.
122. BOYER,C.B.: *Proportion, Equation, Function, three steps in the development of a concept*. Scripta Mathematica, XII, 5-13, 1946.
123. BOYER,C.B.: *Early contributions to Analytic Geometry*. Scripta Mathematica, XIX, 1953, 97-108, 230-238..
124. BOYER,C.B.: *Analytic Geometry in the alexandrian age*. Scripta Mathematica, XX, 1954, 30-36, 143-154.
125. BOYER,C.B.: *Fermat and Descartes*. Scripta Mathematica, XX, 1955. 189-217.
126. BOYER,C.B.: *Post-Cartesian Analytic Geometry*. Scripta Mathematica, XXI, 1956, 101-135.
127. BOYER,C.B.: *Mathematiciens of the French Revolution*. Scripta Mathematica. XXV, 1960, 11-31.
128. CAÑÓN,C.: *El alcance de un sueño. La Mathesis Universales* (*Descartes, el sueño y la razón*). Revista Quark. UPF. Barcelona, abril-junio, 1996.
129. COOLIDGE,J.L.: *The Origin of Analytic Geometry*. Osiris,I,1936, 231-25O.
130. GIBSON,B.: *La Géometrie de Descartes au point de vue de sa méthode*. Revue de Métaphisique, 1896, 387-398.
131. GONZALEZ URBANEJA,P.M.: *La aparición de los inconmensurables*. Mundo científico, nº 220, 2/2001.
132. HEAT,T.L.: *Greek Geometry whith Special Reference to Infinitesimals*. The Matematical Gazzete, XI,248-59, 1922-23.
133. MAHONEY,M.S.: *Another Look at Greek* Geometrical Analysis. Archiv of History of Exactes Sciences, 5, 1968-69, 318-348.
134. MOLLAND,G.: *Shifting the foundations: Descartes transformation of ancient gemeotry*. Historia Mathematica, 3, 1976, 21-49.
135. RITTER,F.: *Francois Viète, inventeur de l'algebre moderne, 1540-1603, essai sur sa vie et son oeuvre.* Revue occidentale philosophique sociale et politique, 10 (1895) 234-74.
136. WHITESIDE,D.T.: *Patterns of mathematical thought in de later 17th century*. Archiv of History of Exactes Sciences, 1, 1960-62, Cap.7, págs290-311.

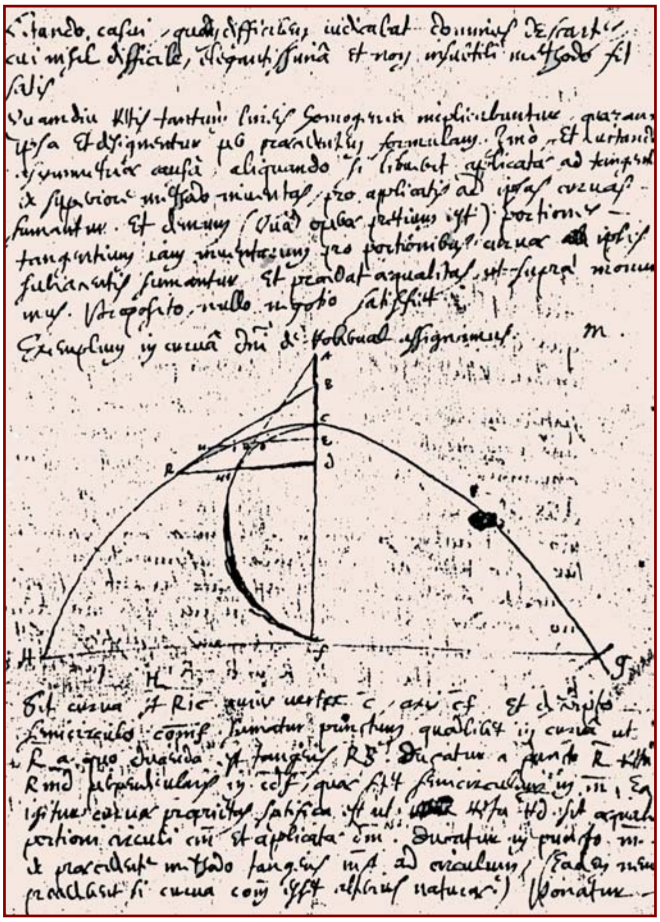
La Historia de la Matemática como recurso didáctico e instrumento de integración cultural de la Matemática

HISTORIA DE LA MATEMÁTICA PARA EL BACHILLERATO

ORÍGENES Y EVOLUCIÓN HISTÓRICA DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA


30 GEOMETRIÆ

ctum M, quod illius centrum est, quódque semper in linea recta IL cadit, ubi invenitur, sumendo $\frac{aom}{2pz}$ pro IM. Ita ut, si quantitas o nulla est, centrum hocce cadat semper in punctum I. Et si quæsita linea est Circulus, aut Ellipsis, erit punctum M ex eadem parte puncti L sumendum, respectu puncti I, si habeatur $+ox$; at si habeatur $-ox$, sumendum erit illud ex altera parte. Sed contra in Hyperbola, si habeatur $-ox$, centrum illud sumi debebit versùs L; & si habeatur $+ox$, debebit illud sumi versùs alteram partem. Postea figuræ rectum latus sumendum erit $\sqrt{\frac{oozz}{aa}+\frac{4mpzz}{aa}}$, cùm habetur $+mm$, & quando quæsita linea est Circulus, aut Ellipsis; vel etiam cùm habetur $-mm$, & quando quæsita linea est Hyperbola. Vel denique $\sqrt{\frac{oozz}{aa}-\frac{4mpzz}{aa}}$, quando quæsita linea est Circulus, aut



Pedro Miguel González Urbaneja

pgonzale@pie.xtec.es