

LA GEOMETRÍA DE DESCARTES

Todos los problemas de Geometría pueden reducirse fácilmente a términos tales, que no es necesario conocer de antemano más que la longitud de algunas líneas rectas para construirlos.

Descartes. *La Geometría* (G.AT.VI.369).

Descartes mediante un nuevo método hizo pasar de las tinieblas a la luz cuanto en las Matemáticas había permanecido inaccesible a los antiguos y todo cuanto los contemporáneos habían sido incapaces de descubrir; luego puso los cimientos inquebrantables de la Filosofía sobre los cuales es posible asentar la mayor parte de las verdades en el orden y con la certidumbre de las Matemáticas.

Spinoza. *Los Principios de la Filosofía cartesiana*.

Lo que ha inmortalizado el nombre de Descartes es la aplicación que ha sabido hacer del Álgebra a la Geometría, una idea de las más vastas y felices que haya tenido el espíritu humano, y que será siempre la llave de los más profundos descubrimientos no solamente en la Geometría, sino en todas las ciencias físico-matemáticas.

D'Alembert. *Discours Préliminaire de l'Encyclopédie* (Orbis, 1984, pp.84–85).

La Geometría analítica, mucho más que cualquiera de sus especulaciones metafísicas, inmortaliza el nombre de Descartes y constituye el máximo paso hecho en el progreso de las ciencias exactas.

J. Stuart Mill. (citado por E.Bell en *Les grands mathématiciens*. Payot, París, 1950. Cap.3. p.46).

Introducción.

Del Álgebra Geométrica griega a la Geometría Analítica Cartesiana.

El Álgebra Geométrica del Libro II de *Los Elementos* de Euclides.

Coordenadas en *Las Cónicas* de Apolonio.

El Análisis Geométrico griego y la Geometría Analítica.

La Geometría de Descartes.

La formación de Descartes en La Flèche.

Citas memorables de Descartes.

Citas memorables sobre Descartes.

Los sueños de Descartes y los orígenes de *La Geometría*.

Las Regulae, El Discurso del Método y La Geometría.

La percepción de Descartes sobre el eco científico de *La Geometría*.

El contenido de *La Geometría*.

La construcción geométrico-algebraica de las operaciones aritméticas.

La notación matemática cartesiana.

Análisis y Síntesis: planteamiento y resolución de las ecuaciones.

Sistemas de referencia. *El Problema de Pappus*.

Las rectas normales a una curva. *El Método del círculo*.

La Geometría de Descartes y la Geometría Analítica.

La proyección histórica de la Geometría Analítica cartesiana.

Bibliografía.



Introducción:

Del Álgebra Geométrica griega a la Geometría Analítica Cartesiana

La Geometría Analítica es un poderoso instrumento de ataque de los problemas geométricos que utiliza como herramienta básica el Álgebra. La esencia de su aplicación en el plano es el establecimiento de una correspondencia entre los puntos del plano y pares ordenados de números reales, es decir, un sistema de coordenadas, lo que posibilita una asociación entre curvas del plano y ecuaciones en dos variables, de modo que cada curva del plano tiene asociada una ecuación $f(x,y)=0$ y, recíprocamente, para cada ecuación en dos variables está definida una curva que determina un conjunto de puntos en el plano, siempre respecto de un sistema de coordenadas. En particular queda establecida una asociación entre rectas del plano y ecuaciones de primer grado de la forma $Ax+By+C=0$. La Geometría Analítica es, pues, una especie de diccionario entre el Álgebra y la Geometría que asocia pares de números a puntos y ecuaciones a curvas. Pero esta asociación va más allá de lo gramatical ya que vincula también las sintaxis del Álgebra y de la Geometría, es decir, las relaciones, vínculos y operaciones entre los elementos de ambas. Así pues, para hallar geoméricamente la intersección de dos curvas $f(x,y)=0$, $g(x,y)=0$ –problema geométrico– habría que resolver algebraicamente el sistema formado por ambas ecuaciones –problema algebraico–. Además, para cada curva $f(x,y)=0$, la Geometría Analítica establece también una correspondencia entre las propiedades algebraicas y analíticas de la ecuación $f(x,y)=0$ y las propiedades geométricas de la curva asociada. De hecho, estas propiedades geométricas son el trasunto geométrico de la estructura algebraica de la expresión $f(x,y)=0$ y se establecen mediante el cálculo literal que permite el Álgebra. En particular la tarea de probar un teorema o resolver un problema en Geometría se traslada de forma muy eficiente a probarlo o resolverlo en Álgebra utilizando el cálculo analítico.

Es indiscutible que Fermat y Descartes son los verdaderos artífices de la Geometría Analítica. Descartes publica en 1637 *La Geometría*, junto con *La Dióptrica* y *Los Meteoros* como apéndices de su *Discurso del Método* o éste como prólogo de aquellos opúsculos. El mismo año, Fermat envía al Padre Mersenne sus investigaciones de alrededor de 1629 contenidas en la memoria *Introducción a los Lugares Planos y Sólidos (Ad Locos Planos et Solidos Isagoge)*. Las obras citadas de Descartes y Fermat contienen los fundamentos de la llamada más tarde Geometría Analítica.

Hay una gran unanimidad en considerar a *La Geometría* de Descartes como una de las obras más importantes en la historia del pensamiento matemático. Al utilizar el Álgebra simbólica como herramienta algorítmica básica, Descartes realiza una nueva lectura de la Geometría griega, que supera sus limitaciones y rebasa sus conquistas geométricas. A base de elaborar una excelente herramienta para enfrentar y resolver problemas geométricos antiguos y modernos, Descartes libera a la Geometría de la dependencia a la estructura geométrica de las figuras e introduce una forma de solución de los problemas basada en la aplicación del Análisis mediante la intervención del Álgebra.

El Análisis Geométrico griego utilizaba un equivalente de las coordenadas pero sólo empleaba Álgebra Geométrica. El *Arte Analítica* de Vieta desarrolla el Álgebra simbólica pero no usa coordenadas. Al aunar ambos instrumentos, coordenadas y Álgebra literal, Descartes alumbró la Geometría Analítica que establece un puente para transitar entre la Geometría y el Álgebra, al permitir asociar curvas y ecuaciones, a base de aplicar el Análisis algebraico de Vieta a los problemas de lugares geométricos de Apolonio y Pappus, definidos, en un sistema de coordenadas, por una ecuación indeterminada en dos incógnitas. La Geometría Analítica resultante, dotada del simbolismo literal, con toda la potencia algorítmica de la mecánica operatoria del cálculo, manipulación y simplificación que permite el Álgebra, sustituye las ingeniosas construcciones geométricas de la rígida y retórica *Álgebra Geométrica* de los griegos por sistemáticas operaciones algebraicas y se convierte en una poderosa herramienta de investigación, mediante la cual Descartes resuelve de forma brillante y asombrosa, numerosos problemas geométricos, clásicos y modernos, algunos realmente difíciles, como el trazado de normales a las curvas, el *Problema de Apolonio* y otros que se habían resistido a lo largo de la Historia como el famoso *Problema de Pappus*.

Aquí vamos a realizar un estudio crítico de la obra de Descartes, *La Geometría*. Para valorar la trascendencia de esta obra en la Historia de la Matemática, haremos una breve descripción de los métodos de la Geometría griega, no sólo porque por comparación podremos ponderar la eficiencia de los métodos cartesianos sino porque la motivación y el origen de la obra cartesiana arranca de su lectura por parte de Descartes y la crítica de sus limitaciones. También conviene remontarse a la Geometría griega para rastrear ciertos vestigios analíticos, entre ellos el uso rudimentario de coordenadas en Apolonio y la naturaleza del Análisis Geométrico griego como instrumento de investigación, ya que ambos elementos son primigenios antecedentes de la Geometría Analítica cartesiana.

La Geometría Analítica de Descartes es un salto revolucionario sin precedentes en la Historia de la Matemática. Para valorar en su justo valor el nuevo instrumento científico, así como para comprender cómo tuvo lugar su gestación es imprescindible conocer la naturaleza de la Geometría griega, condicionada por el veto al infinito que trajo la aparición de los inconmensurables, con la consiguiente estructuración rígida de la Matemática griega elemental en la enciclopédica obra de *Los Elementos* de Euclides, que establece de forma paradigmática un estilo sintético de exposición que oculta la vía heurística del descubrimiento, impulsa la Geometría al margen de la Aritmética, impide el desarrollo de un Álgebra en sentido algorítmico y simbólico y limita la introducción de nuevas curvas a su construcción mediante intersección de superficies o lugares geométricos definidos a través de relaciones de áreas o longitudes, en forma de proporción, y no por medio de ecuaciones.

La estructura que adopta esta Matemática se llama el *Álgebra Geométrica* de los griegos. Se trata de una especie de Geometría algebraica, resultado de la geometrización de los métodos algebraicos mesopotámicos, en la que los números son sustituidos por segmentos de recta y las operaciones entre ellos se llevan a cabo, mediante construcciones geométricas que obligan a mantener escrupulosamente la homogeneidad de los términos. Esta teoría constituye una potente técnica de resolución de ecuaciones –muy rigurosa aunque un tanto onerosa para nosotros–, que se llama el método de *Aplicación de las Áreas*. Mediante una sofisticada aplicación de este método, Apolonio construye con un inefable virtuosismo su famosa obra *Las Cónicas*, donde aparece una aplicación muy incipiente de las coordenadas. De todas estas cuestiones –que interesan al origen de la Geometría Analítica– se habla en los capítulos introductorios. Y también del método de *Análisis* de los griegos, del que la Geometría Analítica recibirá no sólo su nombre sino sobre todo sus procedimientos. Se trata en particular el concepto que sobre él tenían Platón y Pappus y la visión de Descartes sobre el mismo en las *Reglas para la dirección del espíritu*.

El objetivo fundamental de este trabajo es desentrañar las raíces de la Geometría Analítica en el pensamiento filosófico y matemático cartesianos. Por eso se ha dedicado una generosa extensión a la importante cuestión del anclaje de *La Geometría* de Descartes en su obra filosófica y en particular en *El Discurso del Método* y en las *Reglas para la dirección del espíritu*, obras donde se sitúa la metodología cartesiana, en particular los preceptos del *Análisis* y la *Síntesis* que Descartes aplicará de forma constante en *La Geometría*. Así pues, se analizan de forma exhaustiva los textos de esas obras de Descartes, que son esenciales para entender como se va fraguando la motivación y la estructuración de la metodología cartesiana de *La Geometría*.

Se estudia en un capítulo, de forma sucinta, el contenido general de *La Geometría*, pero en los siguientes capítulos se concretan, con gran extensión, los aspectos de la obra cartesiana que interesan a los orígenes de la Geometría Analítica: La construcción geométrico-algebraica de las operaciones aritméticas, la notación matemática cartesiana, la aplicación del Análisis y la Síntesis en el planteamiento y resolución de las ecuaciones, los sistemas de referencia en el estudio del *Problema de Pappus* y la construcción de las rectas normales a una curva mediante el método del círculo.

La Geometría Analítica es mucho más que una mera combinación de Álgebra y Geometría. Para poder circular del Álgebra a la Geometría y de la Geometría al Álgebra se necesita como ingredientes ineludibles no sólo el carácter algorítmico operatorio del Álgebra simbólica sino también la aplicación de las coordenadas. Una aproximación al uso de éstas ya tuvo lugar en la Geometría griega con Apolonio y Pappus, pero el Álgebra simbólica no

se desarrolla de forma satisfactoria hasta los trabajos de Vieta. Al vincular ambos elementos en los desarrollos de Descartes, emerge la Geometría Analítica de forma inexorable. Pero como en cualquier creación humana, la de Descartes es tributaria de importantes desarrollos matemáticos anteriores. Por eso, a lo largo de este estudio acerca origen de la Geometría Analítica en La Geometría de Descartes intentamos clarificar la influencia de los diversos hitos históricos –geométricos y algebraicos– sobre el hallazgo cartesiano. Esta es la razón por la cual hemos incluido aspectos de la Historia de la Geometría griega y de la evolución del Álgebra sin los cuales no se entendería la obra de Descartes y su enorme incidencia en la Historia de la Matemática.

A fin de concretar el significado de los términos, digamos que entendemos por Geometría Analítica lo que hemos descrito más arriba como su esencia y que ahora sintetizamos:

«La aplicación del Álgebra simbólica al estudio de problemas geométricos mediante la asociación de curvas y ecuaciones indeterminadas en un sistema de coordenadas.»

Esta definición es la que nos ha guiado para entresacar de toda la obra cartesiana los elementos que se refieren a lo que dos siglos después de Descartes se llamó Geometría Analítica. Así pues, se empieza por la descripción de los preliminares geométrico-algebraicos que Descartes estudia con la denominación *«Cómo el cálculo de la aritmética se relaciona con las operaciones de geometría»*, de una gran importancia, porque en este apartado Descartes soslaya el problema de la inconmensurabilidad, al asignar longitudes a los segmentos, previa la adopción de un segmento unidad a discreción, tras lo cual construye de forma efectiva las operaciones aritméticas dándoles significado geométrico. De esta forma Descartes elimina la limitación pitagórica de la inconmensurabilidad.

El siguiente punto esencial es la simplificación de la notación algebraica, una cuestión intrínsecamente vinculada a los métodos de la Geometría Analítica. Tanto es así, que en todo estudio histórico sobre la Geometría Analítica una parte importante la ocupa la evolución histórica del simbolismo, que alcanza su clímax en los aportes del propio Descartes a la notación algebraica, ingrediente esencial del descubrimiento cartesiano, que aparece primero en las *Regulae* y después en *La Geometría*. En el apartado de ésta titulado *«Cómo pueden emplearse letras en geometría»*, Descartes considera un segmento de recta tanto como magnitud geométrica continua como una medida numérica, pero establece que la potencia de un segmento sigue siendo un segmento, de modo que cuadrado y cubo ya no son magnitudes planas o espaciales, sino la segunda o tercera potencia de un número. De este modo, las operaciones aritméticas quedan incluidas en un terreno estrictamente algebraico. Con ello Descartes elimina otra limitación, la euclídea de la homogeneidad.

Continúa el trabajo cartesiano con la aplicación de la metodología cartesiana del Análisis y la Síntesis en el planteamiento y resolución de ecuaciones que corresponden a los *problemas planos*, donde se desarrolla todo un protocolo de actuación –suponer el problema resuelto; dar nombre a todos los segmentos que parecen necesarios para representar los datos del problema, tanto los conocidos como los desconocidos; determinar la ecuación entre las longitudes conocidas y las desconocidas; resolver la ecuación resultante; construir geoméricamente la solución–. Se trata de un verdadero método de resolución de problemas geométricos donde se transita de forma reversible de la Geometría al Álgebra y del Álgebra a la Geometría. En particular, Descartes exhibe de forma ostentosa eficientes métodos de resolución de ecuaciones y de construcción geométrica de las soluciones, que contrastan con la farragosidad del Álgebra Geométrica de *Los Elementos* de Euclides. Realmente aquí vemos la magnificencia y simplicidad de los métodos de *La Geometría* de Descartes en contraposición a la prolijidad y precariedad de la Geometría griega.

Sigue a continuación un tratamiento exhaustivo del histórico *Problema de Pappus* donde Descartes introduce el primer sistema de coordenadas de *La Geometría*. Este problema fue un indicador fehaciente, ante el público científico coetáneo, de la novedad y de la inusitada potencialidad del método analítico cartesiano en Geometría en un asunto geométrico que desbordó a lo largo de los siglos las posibilidades del Análisis geométrico griego.

Finalmente se considera el problema más querido y anhelado para Descartes, según sus propias palabras, la determinación de las rectas normales a una curva, donde se resuelve

de forma prodigiosa el problema de normales y tangentes, pero sobre todo se apunta a la asociación de curvas y ecuaciones que instaura los dos principios fundamentales de la llamada Geometría Analítica:

- La relación entre las coordenadas de los puntos de una curva –la ecuación de la curva– establece una correspondencia entre las propiedades algebraicas de la expresión de la ecuación y las propiedades geométricas de la curva asociada.
- La intersección de curvas –que es un problema geométrico– se reconduce a la resolución de sistemas de ecuaciones – que es un problema algebraico–.

La Geometría de Descartes traslada de la Geometría al Álgebra la resolución de los problemas geométricos y además convierte al Álgebra en un magnífico instrumento de exploración e investigación geométrica. Por ejemplo, la realización de ciertos cálculos y en particular la resolución de algunas ecuaciones vinculadas a la expresión de la curva, permiten la obtención de los elementos geométricos notables de la misma, es decir, diámetros, ejes, asíntotas, centros, etc. Incluso Descartes habla de su aplicación «a la medida del espacio que abarcan», queriendo indicar, tal vez, las cuadraturas.

Y más todavía, la propia expresión analítica de la ecuación de una curva es una incipiente aproximación al concepto de función.

Como una manifestación de la trascendencia de *La Geometría* de Descartes en la Historia de la Matemática, nos ha parecido conveniente describir la decisiva influencia de la obra cartesiana en el descubrimiento y desarrollo del Cálculo Infinitesimal.

Hacia el final se relaciona de forma muy sucinta la rápida evolución de la Geometría Analítica poscartesiana, hasta situarnos en el umbral de la Geometría Analítica moderna, la que se imparte hoy académicamente, salvo en lo que se refiere al instrumento vectorial.

Acabamos con unas reflexiones sobre la proyección histórica de la Geometría Analítica cartesiana, una potente herramienta que domina el pensamiento matemático desde la época de Descartes, que al aportar simplificación, generalización, mecanización, unificación, flexibilidad, versatilidad, claridad, economía, brevedad y difusión, se convierte en el lenguaje universal de las ciencias. La Geometría Analítica cambió el rostro de las Matemáticas y el semblante de la Educación matemática.

Además de la consulta a diversos textos de Historia de la Matemática, Historia de la Filosofía, Filosofía de la Ciencia y de la Matemática, artículos de revistas científicas, etc., el manantial bibliográfico fundamental utilizado ha sido, por una parte, Obras originales de los principales matemáticos griegos (Euclides, Apolonio, Diofanto y Pappus), y por otra de Vieta y Descartes. En concreto, dignas son de mención las ediciones de Blanchard, en francés, de Paul Ver Eecke de *Las Cónicas* de Apolonio, *La Aritmética* de Diofanto y *La Colección Matemática* de Pappus; y las mismas obras en ediciones en español de F.Vera incluidas en *Científicos griegos* (Aguilar, Madrid, 1970).

Los argumentos de los diversos capítulos se sustentan de forma esencial en los textos originales de Descartes. Aparte de diversas ediciones, en español, de *El Discurso del Método* y de las *Reglas para la dirección del espíritu*, la referencia esencial ha sido *Oeuvres de Descartes*, Publicadas por C.Adam et P.Tannery (Librairie philosophique J.Vrin, París, 1964-74), sobre todo el volumen VI que contiene *El Discours de la Méthode* y *La Géométrie* y el volumen X que contiene las *Regulae ad directionem ingenii*. Han sido también de una gran utilidad las ediciones de *La Geometría*, en español (Espasa-Calpe y Alfaguara), inglés (Dover) y en especial la magnífica edición en catalán del Institut d'Estudis Catalans (Barcelona, 1999) con introducción y notas de J. Pla y P. Viader.

La referencia concreta a un texto de Descartes se hará respecto a *Oeuvres de Descartes*, indicando la página a continuación de la partícula DM.AT,VI., G.AT.VI., o R.AT.X. respectivamente, según se trate de *El Discurso del Método*, *La Geometría* o las *Regulae*. Por ejemplo (G.AT,VI,372) indicará que el texto al que se hace alusión se encuentra en la página 372 del sexto tomo de las *Oeuvres* de Descartes, que contiene *La Geometría*.

El Álgebra Geométrica del Libro II de *Los Elementos* de Euclides

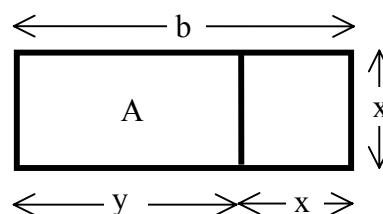
Como consecuencia de la aparición de las magnitudes inconmensurables, los griegos no podían reconocer la existencia de números irracionales, lo que les dificultaba el tratamiento numérico de longitudes, áreas, volúmenes y ángulos. Esta limitación operacional junto a un deficiente sistema de numeración que utilizaba las letras del alfabeto para representar los números enteros, con la consiguiente dificultad para realizar las operaciones, impedía asignar a las figuras geométricas números que midieran sus longitudes, áreas y volúmenes y por tanto los griegos tenían que tratar directamente con las figuras a modo de magnitudes. El abismo infranqueable que se había abierto entre número y magnitud continua impedía someter las magnitudes geométricas a manipulaciones algebraicas, como se hace con los números, lo que determinó la transformación del Álgebra oriental que los pitagóricos habían heredado de los babilonios en el *Álgebra Geométrica* del Libro II de *Los Elementos* de Euclides que juega un papel fundamental en la Geometría griega. Con gran habilidad en la práctica geométrica, los griegos hicieron de su *Álgebra Geométrica* un poderoso instrumento para la resolución de ecuaciones, mediante el método de la *Aplicación de las Áreas*, teoría que según Proclo sería de ascendencia pitagórica.

El *Álgebra Geométrica*, denominación acuñada por el historiador de la Matemática H.G. Zeuthen hacia 1886, viene a ser una geometrización de los métodos algebraicos practicados por los babilónicos, una especie de Geometría algebraica, en la que los números son sustituidos por segmentos de recta y las operaciones entre ellos se llevan a cabo mediante construcciones geométricas –respetando escrupulosamente la homogeneidad de los términos– de la siguiente forma:

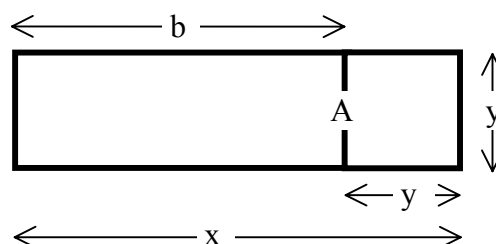
- La suma de dos números se obtiene prolongando sobre el primero un segmento igual al segundo.
- La diferencia de dos números se obtiene recortando del primero un segmento igual al segundo.
- El producto de dos números es el área del rectángulo cuyos lados tienen como longitudes esos números.
- El cociente de dos números es la razón de los segmentos que los representan (según los principios del libro V de *Los Elementos* de Euclides).
- La suma y la diferencia de productos se reemplaza por la adición y sustracción de rectángulos.
- La extracción de una raíz cuadrada se establece mediante la construcción de un cuadrado de área equivalente a la de un rectángulo dado (*Euclides* II.14).

Por ejemplo, el viejo problema mesopotámico en el que dada la suma o diferencia y el producto de los lados de un rectángulo, $x \cdot y = A$, $x \pm y = b$, se pedía hallar dichos lados, se interpretaba geométricamente de la siguiente forma:

$$\left. \begin{array}{l} x \cdot y = A \\ x + y = b \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = b - x, x \cdot (b - x) = A, bx - x^2 = A \end{array}$$

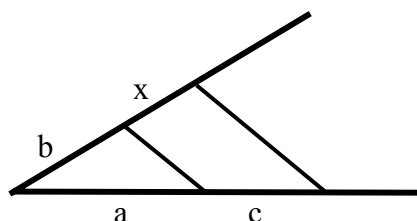


$$\left. \begin{array}{l} x \cdot y = A \\ x - y = b \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = b + y, y \cdot (b + y) = A, by + y^2 = A \end{array}$$



La solución geométrica lleva a la construcción sobre un segmento b de un rectángulo cuya altura desconocida x debe ser tal que el área del rectángulo en cuestión exceda del área dada A (en el caso de signo positivo) en el cuadrado de lado x ; o difiera del área dada (en el caso de signo negativo) en el cuadrado de lado y .

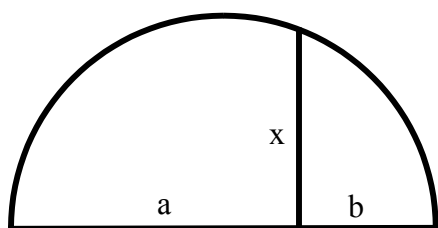
En su *Álgebra Geométrica* los griegos utilizaron principalmente dos métodos para resolver cierto tipo de ecuaciones, el método de las proporciones y el método de *Aplicación de las Áreas*. El método de las proporciones permite construir exactamente, como se hace hoy, un segmento de línea x dado por:



$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}, a \cdot x = b \cdot c$$

Se aplica la cuarta proporcional (*Euclides VI.12*)

o bien:



$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}, x^2 = a \cdot b$$

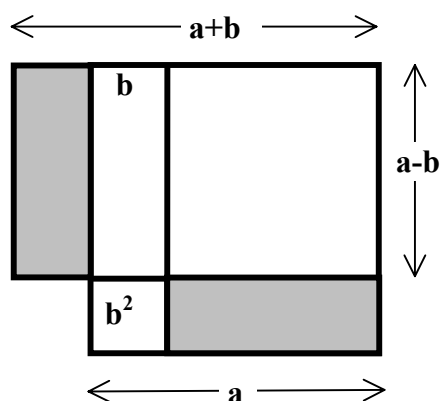
Se aplica la media proporcional (*Euclides VI.13*)

No obstante la inseguridad provocada en la Matemática griega por las magnitudes inconmensurables, conducía a evitar a toda costa el uso de razones en la Geometría elemental. Por eso el tratamiento de ecuaciones tan sencillas como $a \cdot x = bc$ y $x^2 = ab$, en forma de proporción, tiene lugar en el Libro VI de *Los Elementos* de Euclides, es decir, se retrasa hasta después de desarrollar la *Teoría de la Proporción* de Eudoxo en el libro V.

La parte más importante del *Álgebra Geométrica* de los griegos se encuentra en el Libro II de *Los Elementos* de Euclides. En la actualidad su contenido no juega ningún papel fundamental en los libros de texto modernos. Sin embargo en la Geometría griega ejerce una función primordial. La discrepancia radical entre los puntos de vista griego y moderno estriba en que hoy nosotros podemos disponer de un *Álgebra* simbólica y una Trigonometría, que han sustituido completamente a sus equivalentes geométricos clásicos, precisamente gracias a *La Geometría* de Descartes, que al aplicar la naturaleza algorítmica del *Álgebra* a los problemas geométricos alumbró su Geometría Analítica.

Mientras nosotros representamos las magnitudes con letras que se sobreentiende son números conocidos o desconocidos, con las cuales operamos mediante las reglas algorítmicas del *Álgebra*, los griegos representaban las magnitudes rectilíneas mediante segmentos de línea recta que debían obedecer a los axiomas y teoremas de la Geometría. Con estos elementos los griegos disponían de un *Álgebra –Geométrica–* que cumplía a todos los efectos las mismas funciones que nuestra moderna *Álgebra* simbólica. Ciertamente es que el *Álgebra* moderna con su cálculo literal facilita de forma considerable la manipulación de las operaciones y las relaciones entre magnitudes geométricas, pero no es menos cierto que con su *Álgebra Geométrica* los griegos eran mucho más hábiles que nosotros en la práctica geométrica. Y es que el *Álgebra Geométrica* griega sorprende al estudioso moderno por ser bastante difícil y artificiosa, pero los griegos la utilizaron con soltura y para ellos debió ser una herramienta de utilización necesaria, básica y cómoda.

Así por ejemplo la Proposición II.5 de *Los Elementos* de Euclides:



Euclides II.5
 $(a+b)(a-b) + b^2 = a^2$

«Si se divide una recta en partes iguales y desiguales, el rectángulo comprendido por las partes desiguales de la recta entera, más el cuadrado de la diferencia entre las dos partes, es equivalente al cuadrado de la mitad de la recta dada»

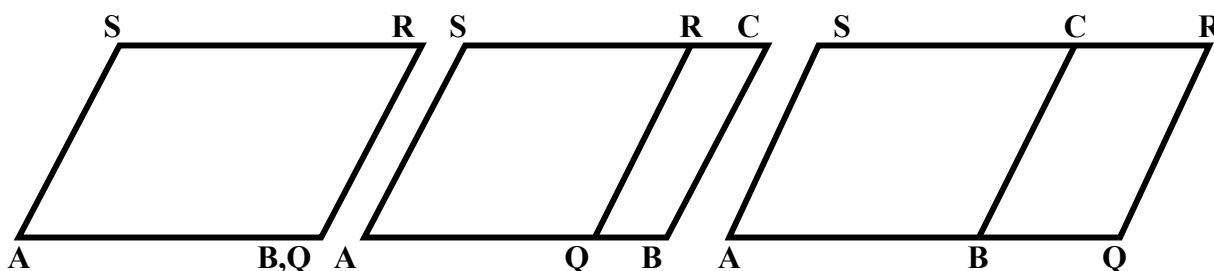
equivale –a pesar del circunloquio retórico– a la identidad algebraica:

$$(a + b) \cdot (a - b) + b^2 = a^2 \quad \text{ó} \quad (a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2,$$

y no es más que la formulación geométrica de una de las leyes fundamentales de la Aritmética –suma por diferencia igual a diferencia de cuadrados–.

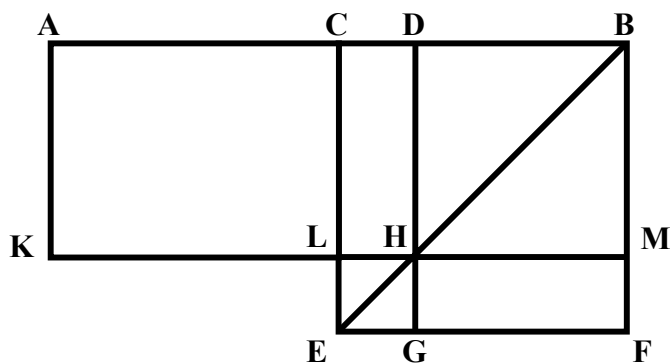
La evidencia visual del teorema aludido para un estudioso griego es muy superior a su contrapartida algebraica actual. Claro está que la demostración rigurosa de Euclides de esta proposición puede ocupar más de una página.

Para explicar de forma más efectiva el método de la aplicación de las áreas, consideremos un segmento de línea AB y un paralelogramo AQRS cuyo lado AQ está a lo largo de AB:



1. Cuando Q coincide con B, se dice que «el paralelogramo AQRS se ha aplicado sobre el segmento AB».
2. Cuando Q está entre A y B, se dice que «el paralelogramo AQRS se ha aplicado sobre el segmento AB de forma elíptica o con defecto el paralelogramo QBCR».
3. Cuando Q está en la prolongación de AB, se dice que «el paralelogramo AQRS se ha aplicado sobre el segmento AB de forma hiperbólica o con exceso el paralelogramo QBCR».

Volviendo a la Proposición II.5 de *Los Elementos* de Euclides, para su demostración consideremos la figura siguiente:



Sea AB el segmento de línea recta dado, dividido de forma igual por C y de forma desigual por D, la proposición establece que: $AD \cdot DB + CD^2 = CB^2$.

Tomando $AB=2a$, $AC=a$, $CD=b$, resulta la identidad algebraica:

$$(a + b) \cdot (a - b) + b^2 = a^2.$$

Simplificando el lenguaje retórico de Euclides tenemos:

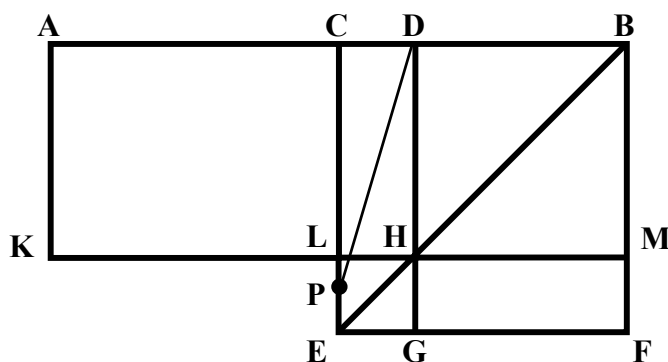
$$AD \cdot DB + CD^2 = AKHD + LEGH = AKLC + CLHD + LEGH = CLMB + CLHD + LEGH = CLMB + HGFM + LEGH = CB^2.$$

Digamos que más importante que la demostración exhibida, es el diagrama que utiliza Euclides en esta demostración porque es un esquema gráfico que jugarían un papel fundamental en la resolución geométrica de ecuaciones cuadráticas.

En efecto: sea resolver en la Geometría griega la ecuación $ax - x^2 = b^2$, es decir, encontrar un segmento de línea x que cumpla la condición expresada por la ecuación $ax - x^2 = b^2$, donde a, b son segmentos tales que $a > 2b$.

Sea ahora $AB = a$, y sea C el punto medio de AB , levantemos por C una perpendicular CP de longitud igual a b . Con centro en P y radio $a/2$ tracemos una circunferencia que corte a AB en el punto D .

Construyamos sobre AB un rectángulo $ABMK$ de anchura $BM = BD$ y completemos el cuadrado $BDHM$. Este cuadrado es el área x^2 que cumple la condición expresada por la ecuación cuadrática. En lenguaje griego de la *Aplicación de las Áreas* se ha aplicado de *forma elíptica* al segmento $AB = a$ un rectángulo AH de área $(a - x) \cdot x$, es decir $ax - x^2$, que es igual a un cuadrado dado b^2 , y que es deficiente del rectángulo AM en un cuadrado DM . La demostración de este hecho viene dada por la Proposición Euclides II.5, según la cual el rectángulo $ADHK$ es igual al polígono cóncavo $CBFGHL$, es decir, difiere de $(a/2)^2$ en el cuadrado $LHGE$ cuyo lado es por construcción $CD = \left[\sqrt{(a/2)^2 - b^2} \right]$.



Sintetizando los cálculos geométricos:

$AB = a$, $AC = CB$

$CP = b$, $PD = a/2$, $LH = CD = \left[\sqrt{(a/2)^2 - b^2} \right]$.

Rectángulo $ABMK$ ($BM = BD$)

Cuadrado $BDHM = x^2$.

Euclides II.5: $AD \cdot DB + CD^2 = CB^2$.

$ADHK + LHGE = CBFE$,

$ADHK = ABMK - BDHM$,

$ADHK = CBFE - LHGE$,

$ABMK - BDHM = CBFE - LHGE$

$$ax - x^2 = (a/2)^2 - \left[\sqrt{(a/2)^2 - b^2} \right]^2 = b^2.$$

De manera similar se resuelve la ecuación cuadrática $ax + x^2 = b^2$ mediante la Proposición II.6 de *Los Elementos* de Euclides:

«Si se divide una recta en dos partes iguales y se prolonga, el rectángulo comprendido por la recta entera, más la prolongación, y por la prolongación, junto con el cuadrado de la recta mitad, es equivalente al cuadrado de la recta formada por la recta mitad y la prolongación.»

En este caso se trata de aplicar *de forma hiperbólica* a una línea recta dada $AB = a$, un rectángulo $AM = ax + x^2$, que sea igual a un cuadrado dado b^2 y que exceda al rectángulo AH en un cuadrado x^2 .

Sea C el punto medio de AB , levantemos por C una perpendicular CP de longitud igual a b . Con centro en C y radio PB tracemos una circunferencia que corte a AB en el punto D .

Esta vez la distancia es $CD = PB = \sqrt{(a/2)^2 + b^2}$, y como por la proposición se sabe que el rectángulo $AM = ax + x^2$ más el cuadrado $LG = (a/2)^2$ es igual al cuadrado $CF = (a/2) + b^2$, se verifica la condición de la ecuación $ax + x^2 = b^2$.

Coordenadas en *Las Cónicas* de Apolonio

Las Cónicas de Apolonio es una de las obras más importantes de toda la Geometría griega. En ella quedan acuñadas, con significado, para la posteridad, los nombres de *elipse*, *parábola* e *hipérbola*, procedentes del lenguaje pitagórico de la *Aplicación de las Áreas*. En el cambio de denominación de las cónicas por Apolonio subyace un cambio conceptual, toda vez que una vez construidas a través del cono, Apolonio maneja las cónicas mediante relaciones de áreas y longitudes, que expresan en cada caso la propiedad característica de definición de la curva de la que se obtienen sus propiedades intrínsecas. Apolonio fue capaz de vincular los aspectos estereométricos y planos de las cónicas, al mostrar que las secciones de los conos tenían importantes propiedades como lugares planos, traducibles en básicas expresiones geométricas –equivalentes a nuestras *ecuaciones*–, que permitían deducir, a su vez, otras innumerables propiedades de las cónicas. Es bajo esta visión sobre el trabajo de Apolonio que algunos historiadores modernos (Zeuthen, Coolidge, Loria y Heath) reclaman para los griegos, y empezando por Apolonio, la paternidad de la Geometría Analítica, al establecer como la esencia de esta rama de la Matemática el estudio de los lugares por medio de *ecuaciones*.

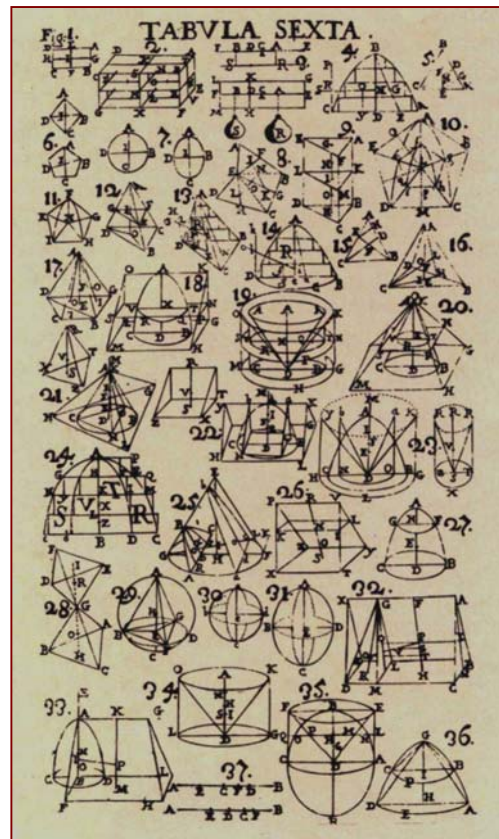
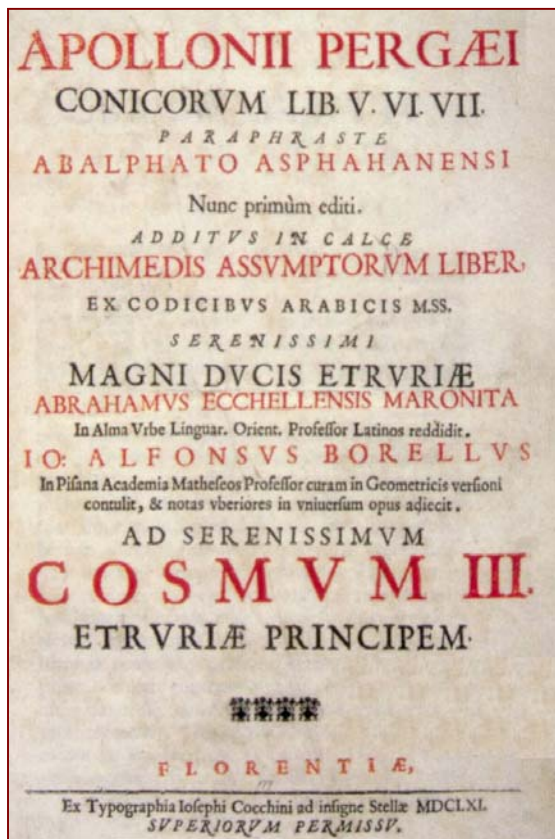
En el estudio de las cónicas, Apolonio considera ciertas *líneas de referencia* –diámetros conjugados o diámetro-tangente–, que juegan un papel de *coordenadas*. En el segundo caso al tomar un diámetro y una tangente en uno de sus extremos como rectas de referencia, las distancias medidas a lo largo del diámetro a partir del punto de tangencia son las *abscisas* y los segmentos paralelos a la tangente, interceptada por el diámetro y la curva, son las *ordenadas*. Para cada cónica, la conocida relación de áreas y longitudes en forma de proporción en el lenguaje del Álgebra Geométrica –propiedad geométrica de la curva equivalente a su definición como lugar geométrico– se traduce en una relación entre las *abscisas* y las correspondientes *ordenadas*, que Apolonio llamaba el *symptoma* de la curva y que no es sino la expresión retórica de la ecuación analítica de la curva, que en su evolución histórica daría lugar a la llamada *ecuación característica*. El lenguaje de Apolonio es sintético, utilizando con una pericia increíble la técnica pitagórica de la *Aplicación de las Áreas*, pero sus «*métodos de coordenadas*» guardan una gran similitud con los de la Geometría Analítica.

Debemos aquilatar, no obstante, ciertas afirmaciones sobre elementos precursores de la Geometría Analítica, porque al señalar tales atribuciones, más o menos fundadas o infundadas, siempre nos encontraremos con las serias limitaciones impuestas por el carácter geométrico-sintético de la Geometría griega y por la ausencia de un Álgebra simbólica en sentido algorítmico, que es un componente ineludible de una verdadera Geometría Analítica general, y que a fin de cuentas es lo que permite la real y mutua correspondencia entre curvas y ecuaciones.

Esto fue realmente lo que se plantearon y resolvieron Fermat y Descartes con el concurso del *Arte Analítica* de Vieta, al establecer que una ecuación arbitraria en dos cantidades indeterminadas determina, con respecto a un sistema dado de coordenadas, una curva.

Al analizar la posición histórica de Apolonio en el camino hacia la Geometría Analítica digamos que, a pesar de los conceptos y elementos geométricos introducidos, que parecen emular la presencia de *sistemas de referencia con coordenadas* –*abscisas* y *ordenadas*– que permiten expresar las *ecuaciones* de las cónicas, estos *sistemas de coordenadas* aparecían siempre superpuestos *a posteriori* a las curvas para estudiar sus propiedades. En la Geometría griega, las *coordenadas*, *variables* y *ecuaciones* no eran elementos de partida, sino conceptos subsidiarios derivados de situaciones geométricas concretas de curvas que determinan las *ecuaciones* sin que se dé la situación inversa, es decir, que las ecuaciones determinen las curvas, ya que éstas siempre se producían mediante una construcción estereométrica como secciones de un sólido –tal es el caso de las propias cónicas de Apolonio– o de forma cinemática como composición de movimientos –tal es el caso de la Espiral de Arquímedes o la cuadratriz de Dinostrato–, de forma que el conjunto de curvas manejadas por los griegos fue necesariamente muy limitado.

LAS CÓNICAS DE APOLONIO Y LA GEOMETRÍA ANALÍTICA



Portada y página con ilustraciones de figuras geométricas de Apollonii Pergaei Conicorum Lib. V, VI, VII. Edición de Borelli. Florencia 1661. Biblioteca de la Universidad de Pavia.

Las *Cónicas* de Apolonio contienen muchos aspectos que anticipan elementos de la Geometría Analítica. Como Descartes, Apolonio considera, ciertas *líneas de referencia* –diámetros conjugados o diámetro-tangente– que al jugar un papel de *coordenadas*, son asociados a la cónica dada, de modo que mediante Álgebra retórica son expresadas en función de esas líneas las propiedades geométricas de la curva equivalentes a su definición como lugares geométricos.

C. Boyer escribe sobre Apolonio y la Geometría Analítica (en *Historia de las Matemáticas*, Alianza Universidad, Madrid, 1986, cap. 17, p. 208):

«El hecho de que Apolonio, uno de los más grandes geómetras de la antigüedad, no consiguiese desarrollar de una manera efectiva la Geometría Analítica, se debe probablemente más a una pobreza en el número de curvas que de pensamiento; los métodos generales no son ni muy necesarios ni muy útiles cuando los problemas se refieren siempre a un número limitado de casos particulares. Por otra parte, es bien cierto que los primeros inventores de la Geometría Analítica tenían a su disposición todo el álgebra renacentista [el Álgebra de los cosistas italianos y el Álgebra simbólica de Vieta], mientras que Apolonio tuvo que trabajar con las herramientas del Álgebra Geométrica, mucho más rigurosa pero a la vez mucho más incómoda de manejar».

Hay que ponderar la magnífica obra de Apolonio, primer estadio en la Historia de la Matemática sobre la aplicación de coordenadas al estudio de las propiedades de las curvas; y aunque el discurso retórico sustituye al simbolismo y la construcción geométrica a las técnicas algebraicas, las relaciones de áreas y longitudes mediante las que Apolonio expresa las propiedades intrínsecas de la curva se traducen con gran facilidad al ulterior lenguaje del Álgebra simbólica de ecuaciones que permitirá la asociación de curvas y ecuaciones, esencia de la Geometría Analítica. Así pues, el trabajo de Apolonio inicia la singladura histórica hacia el desarrollo de la Geometría Analítica de Descartes.

Además, dos problemas históricos importantes de gran incidencia sobre la Geometría Analítica de Descartes tienen su origen en los trabajos de Apolonio:

1. El Problema de Apolonio («Dados tres elementos, punto, recta o circunferencia, trácese una circunferencia que sea tangente a cada uno de los tres»)
2. El Problema de Pappus o «lugar geométrico determinado por tres o cuatro rectas»: «Dadas tres (resp. cuatro) rectas en un plano, encuéntrase el lugar geométrico de un punto que se mueve de forma que el cuadrado de la distancia a una de las tres rectas es proporcional al producto de las distancias a las otras dos (resp. el producto de las distancias a dos de ellas es proporcional al producto de las distancias a las otras dos), si las distancias se miden en direcciones tales que formen ángulos dados con las líneas correspondientes».

El Análisis Geométrico griego y la Geometría Analítica

Los *Elementos* de Euclides establecieron en la Geometría griega un severo modelo de exposición y demostración que oculta el camino de la investigación hacia el descubrimiento. Surge de forma natural la pregunta acerca de cómo los geómetras griegos encontraban sus impresionantes resultados que después plasmaban en sus obras con un rigor impecable. Pues bien, es aquí donde interviene el *Análisis* como un procedimiento metodológico capital para el progreso de la Matemática, del que la Geometría Analítica heredará no sólo su nombre sino sobre todo sus procedimientos.

Proclo (411-485 d.C.) en sus *Comentarios al Libro I de los Elementos de Euclides* atribuye a Hipócrates de Quíos (hacia 450 a.C.) la invención del *Método Analítico* cuando lo define:

«La apagogé es una reducción de un problema o de un teorema a otro, que si es conocido o determinado, conduce a la solución de la cuestión propuesta».

Pero siempre se ha imputado su paternidad a Platón –según ciertos pasajes del *Menón* (86e–87a), la *República* (510c) y la *Ética a Nicómaco* de Aristóteles (1095a)–, que lo formularía como un método pedagógicamente conveniente, viniendo a decir que cuando una cadena de razonamientos desde unas premisas a una conclusión no es obvia, se puede invertir el proceso; uno puede empezar por la proposición que ha de probarse y deducir de ella una conclusión que es conocida. Si entonces podemos invertir los pasos en esta cadena de razonamientos, el resultado (*Síntesis*) es una prueba legítima de la proposición. Es decir, mediante el *Análisis* se asume como cierto aquello que hay que probar y se razona con base en esta asunción hasta llegar a algo que forma parte de los principios o alcanzar un resultado cierto por haber sido previamente establecido. Si entonces podemos invertir la secuencia de los pasos anteriores se obtiene una demostración del teorema que había que probar. Así pues, el *Análisis* viene a ser un procedimiento sistemático de descubrir «condiciones necesarias» para que un teorema sea cierto, de modo que si por medio de la *Síntesis* se muestra que estas condiciones son también *suficientes*, se obtiene una demostración correcta de la proposición.

Conviene explicar un poco en qué medida la Geometría Analítica recibe su nombre precisamente del método de *Análisis* de los griegos. Como se ha dicho, el *Análisis* empieza «asumiendo como cierto aquello que hay que probar». Esto es precisamente un principio que aplica Descartes desde el comienzo de *La Geometría*. Por ejemplo en el segundo epígrafe del Libro I, titulado: «Cómo se llega a las ecuaciones que sirven para resolver los problemas», Descartes escribe (G.AT,VI,372):

«Así, si se quiere resolver algún problema, debe de antemano considerarse como ya resuelto,[...]»

Descartes no sólo realizará una aplicación directa de los procedimientos del *Análisis* y la *Síntesis* de los griegos sino que reformulados serán las dos reglas intermedias de las cuatro reglas del *El Discurso del Método* (DM.AT,VI,17-18). Una y otra vez en la multiplicidad de problemas que resuelve en *La Geometría*, Descartes empezará por suponer el problema resuelto. En concreto en dos de los problemas más importantes que trata, Descartes escribe literalmente:

«Primeramente yo supongo la cosa como ya hecha, ...» (Problema de Pappus [G.AT,VI, 382]).

«Supongamos que la cosa está hecha, ...» (rectas normales a una curva [G.AT,VI, 413]).

Naturalmente hay una diferencia notable entre la aplicación que del método de *Análisis* y *Síntesis* hacen los griegos y lo que realiza Descartes en lo que se ha llamado su Geometría Analítica. Éste es el asunto que queremos estudiar: a partir de algunos de los principios

metodológicos de la Geometría griega tiene lugar el nacimiento de algo completamente nuevo y revolucionario –*La Geometría* de Descartes– que consigue clausurar, en gran parte, el punto de partida – la propia Geometría griega–.

¿Qué poderoso instrumento utilizará y Descartes para alcanzar tal hazaña matemática? El Álgebra, una herramienta que no pudo disfrutar la Geometría griega porque la aparición súbita de los inconmensurables desvió la influencia de la Matemática babilónica, bien versada en Aritmética y en incipientes técnicas algebraicas, hacia la Geometría Sintética y el Álgebra Geométrica. Cuando Descartes, bajo la inspiración de Vieta (1540-1603), aplique todo el potencial algorítmico del Álgebra árabe, renacentista y del propio Vieta, el *Análisis* alcanzará su máximo poder heurístico para la resolución de los problemas geométricos – incluso los que se habían resistido de forma reiterada a los métodos clásicos, como el *Problema de Pappus* y el *Problema de Apolonio*–, a base de complementar el estudio analítico con la síntesis algebraica, lo que le permitirá mediante las ecuaciones pasar de la Geometría al Álgebra y del Álgebra a la Geometría.

La forma más esmerada del *Análisis* y la *Síntesis* la aplica Pappus en el *Tesoro del Análisis*, describiendo como para comprobar la validez y encontrar la prueba de un teorema o resolver un problema –en general de construcción– se procede analíticamente, asumiendo por el momento que el teorema en cuestión es válido o que el problema está resuelto. Siguiendo entonces las implicaciones lógicas del teorema o la solución del problema, se llega a alcanzar una solución conocida que es verdadera o falsa. Si se trata de un teorema, de una falsa conclusión resulta la invalidez del teorema, y entonces del mismo *Análisis* resulta la refutación del teorema por reducción al absurdo; pero, si la conclusión obtenida a través del *Análisis* es verdadera, nada se puede decir de la validez del teorema. Es decir, el método de *Análisis* produce una cadena de inferencias que lleva de una premisa de valor verdadero desconocido a una conclusión de valor verdadero conocido; la falsedad de la conclusión implica la de la premisa, pero la verdad de la conclusión no dice nada acerca de la de la premisa, a menos que, como señalaba Platón, uno pueda dar la vuelta a la inferencia. La eficiencia del *Análisis* es doble, por una parte abundan los teoremas geométricos que tienen un recíproco válido, y por otra, cuando el recíproco de un teorema no es válido puede llegar a serlo añadiendo ciertas condiciones suplementarias, que eran llamadas por los griegos «*diorismos*». Gran parte de la investigación geométrica consistía en la búsqueda del *diorismo* adecuado para poder invertir una inferencia. Una vez que se ha hallado el *diorismo*, la inferencia invertida constituye una *Síntesis*, es decir la rigurosa demostración del teorema. Las considerables dificultades inherentes a la inversión de inferencias propiciaron que los grandes matemáticos griegos se expresaran en sus obras mediante formales demostraciones sintéticas de los resultados que habían obtenido aplicando el método de *Análisis*. Es decir, el *Análisis* geométrico griego era una fecunda heurística geométrica, el instrumento fundamental de investigación y creación matemática; pero, alcanzada tras el *Análisis*, la *Síntesis*, en presencia de la demostración sintética cualquier análisis era superfluo y como tal se suprimía de los grandes tratados. De esta forma, los griegos ocultaban la forma y el camino utilizados en la obtención de sus magníficos resultados matemáticos.

Cuando a partir del Renacimiento tiene lugar la recuperación, reconstrucción y divulgación del legado clásico griego, los matemáticos lo acogen con entusiasmo, pero preocupados porque el estilo sintético y apodíctico de exposición de la Geometría griega, y en particular de las obras de Euclides, Arquímedes y Apolonio, privaba a los investigadores de la forma en que habían sido descubiertos los resultados, manifiestan junto a su admiración, una cierta perplejidad y extrañeza. Incluso algunos (Torricelli, Barrow, Wallis,...) sospechaban sin fundamento que los griegos disponían de algún instrumento (¿el Álgebra?), un determinado tipo de *Análisis* Geométrico, pero que lo habían ocultado de forma tan perfecta que a los modernos matemáticos les había resultado más fácil inventar un nuevo *Análisis* –la Geometría Analítica– que recuperar el antiguo. Quizá es Descartes quien con mayor claridad muestra – en la Regla IV de las *Regulae*– la insatisfacción de una curiosidad frustrada por la ocultación de los métodos de descubrimiento de la Geometría griega.

ANÁLISIS Y ÁLGEBRA EN LA REGLA IV (AT.X.373-377) DE LAS REGLAS PARA LA DIRECCIÓN DEL ESPÍRITU DE DESCARTES



Retrato caricaturesco de Descartes escribiendo un libro y con el pie apoyado en una obra de Aristóteles. Grabado de C.Hellemans. Biblioteca Nacional. París.

Descartes subraya en la regla IV (*Regulae ad directionem ingenii*) que los antiguos geómetras utilizaban cierto *Análisis* para la resolución de todos los problemas geométricos -como se advierte en Pappus y Diofanto-, pero privaron de él a la posteridad con la expresión sintética que oculta los métodos de descubrimiento, y merecen por ello -al impedir la divulgación de los métodos de trabajo- la más acerba de las críticas.

Descartes elogia, en cambio, a «hombres de gran talento» (¿Vieta?), que han recuperado el *Análisis Geométrico* de los antiguos y lo han desarrollado con los nuevos instrumentos del Álgebra -un arte que clarificado y liberado de su actual farragosidad podría cumplir una función similar a la del *Análisis* de los antiguos-. Con base en estos analistas Descartes destilará un auténtico *Análisis Algebraico*, que históricamente se desarrollará en la línea de una verdadera Geometría Analítica.

«[...] En las más fáciles de las ciencias, la Aritmética y la Geometría, vemos con toda claridad que los antiguos geómetras se han servido de cierto *Análisis*, que extendían a la resolución de todos los problemas, si bien privaron de él a la posteridad. Y ahora florece cierta clase de Aritmética que llaman Álgebra, para realizar sobre los números lo que los antiguos hacían sobre las figuras [...] Cuando por primera vez me dediqué a las disciplinas Matemáticas, de inmediato leí por completo la mayor parte de lo que suelen enseñar sus autores, y cultivé preferentemente la Aritmética y la Geometría, porque se las tenía por las más simples y como un camino para las demás. Pero no caían en mis manos autores que me satisficieran plenamente: leía cosas acerca de los números que yo comprobaba, habiendo hecho cálculos, ser verdaderas; y lo mismo respecto de las figuras; [...] Pero por qué esto era así, y cómo eran halladas, no parecían mostrarlo suficientemente a la mente, [...] Pero como después pensase por qué sucedía que antiguamente los primeros creadores de la Filosofía no quisieran admitir para el estudio de la sabiduría a nadie que no supiese *Mathesis*, [...], tuve la sospecha de que ellos conocían cierta *Mathesis* muy diferente de la Matemática vulgar de nuestro tiempo [...] Y ciertamente me parece que vestigios de esta verdadera *Mathesis* aparecen en Pappus y Diofanto, [...] Y fácilmente creería que después fue ocultada por cierta audacia perniciosa por los mismos escritores; pues así como es cierto que lo han hecho muchos artistas con sus inventos, así ellos temieron quizá que, siendo tan fácil y sencilla, se envileciese después de divulgada; y para que les admirásemos prefirieron presentarnos en su lugar, como productos de su método, algunas verdades estériles deducidas con sutileza, en vez de enseñarnos el método mismo que hubiera hecho desaparecer por completo la admiración. Ha habido, finalmente, algunos hombres de gran talento que se han esforzado en este siglo por resucitarla; pues aquel arte no parece ser otra cosa, que lo que con nombre extranjero llaman Álgebra, con tal que pueda zafarse de las múltiples cifras e inexplicables figuras de que está recargado a fin de que no falte ya aquella claridad y facilidad suma que suponemos debe haber en la verdadera *Mathesis* [...]».

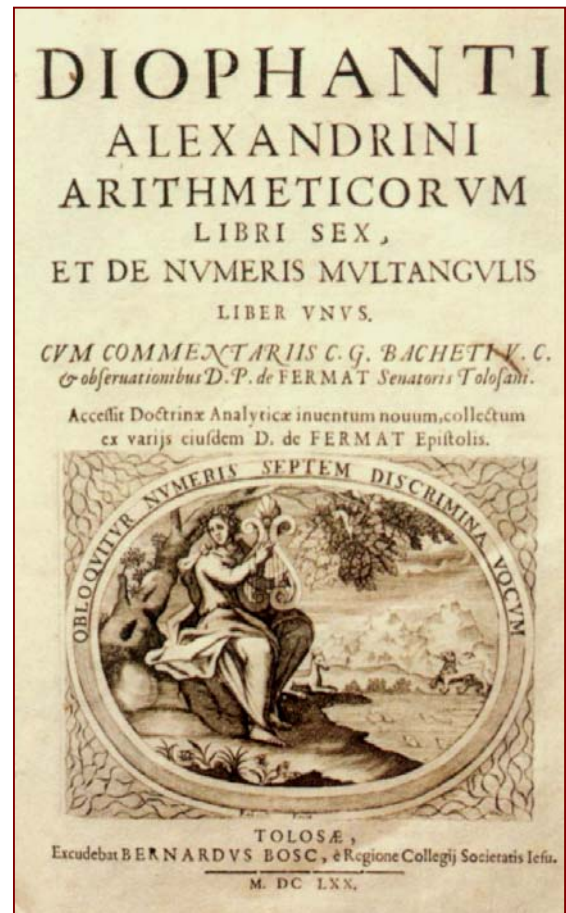
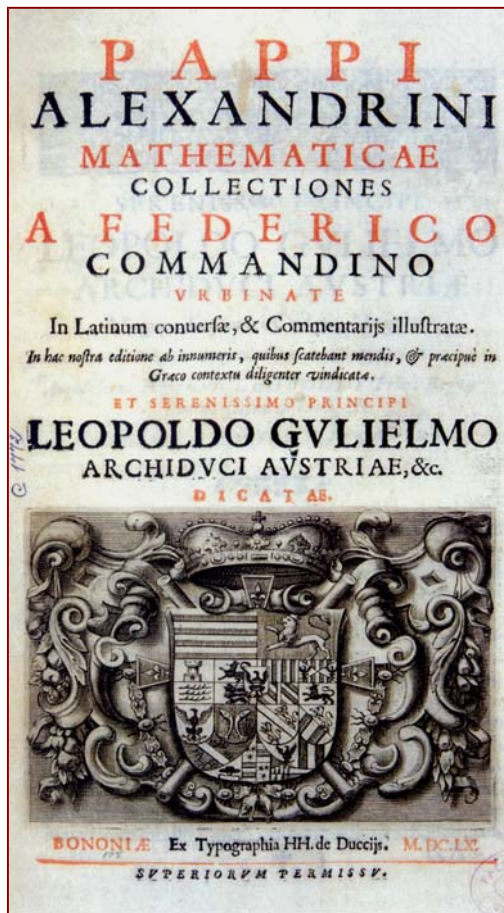
El texto de la IV Regla de Descartes es fundamental para poder entender la actitud mental de Descartes sobre su magno proyecto de reforma de la Filosofía, la Ciencia, y sobre todo de la Matemática de donde surgen las fuentes de su Geometría Analítica.

Descartes habla de la *Mathesis* como si se tratara de un saber aún más universal que la propia Matemática, y aplicable a todas las ciencias. En puridad, la *Mathesis* no se identifica, por tanto, con la Matemática, pero surge del espíritu, de la naturaleza, de los rasgos, del estilo, del modo, del proceder, de los métodos, etc., de las ciencias matemáticas –de la Geometría (Pappus), de la Aritmética (Diofanto) y del Álgebra (Vieta, uno «*de los hombres de gran talento*» que han resucitado la *Mathesis*)–. Precisamente uno de los instrumentos más potentes que se ha desarrollado en toda la Historia del Pensamiento matemático –la Geometría Analítica Cartesiana–, sin duda íntimamente vinculada a la *Mathesis*, surge de la aplicación del Álgebra simbólica de Vieta al estudio de los problemas del Análisis Geométrico de Pappus mediante ecuaciones indeterminadas, cuyo origen remoto, así como las raíces de la esencial simplificación de la notación cartesiana están en *La Aritmética* de Diofanto. Por eso Descartes rinde claro homenaje a los matemáticos griegos, Pappus y Diofanto, y de forma implícita también a Vieta, al atribuirles vestigios de la *Mathesis*.

Como señala Descartes, en la pléyade de geómetras griegos, Pappus fue una excepción, porque desarrolló una singular metodología en la forma de exposición, codificando todo un cuerpo de tratados analíticos de solución de problemas en el llamado *Tesoro del Análisis* del Libro VII de *La Colección Matemática*. En estos tratados queda patente el camino que sigue la investigación matemática ya que se procede a la reducción de un problema dado a un problema equivalente cuya solución era ya conocida. Encontramos en la obra de Pappus, además de infinidad de teoremas y problemas sobre Geometría superior –no incluida en *Los Elementos* de Euclides–, un gran número de cuestiones que debemos situar en las raíces históricas de la Geometría Analítica como son la más elaborada exposición sobre los métodos de *Análisis y Síntesis*, numerosas soluciones a los problemas clásicos –sobre todo la duplicación del cubo y la trisección del ángulo–, nuevos estudios y extensiones de propiedades de las secciones cónicas como lugares geométricos y la clasificación definitiva de los problemas geométricos en planos, sólidos y lineales –según sean resolubles, respectivamente, con rectas y circunferencias, cónicas u otras curvas superiores–, que perseguía la idea de ajustar la envergadura de los instrumentos geométricos a utilizar a la enjundia de los problemas geométricos a resolver, en la línea de aplicar siempre los medios más simples posibles, lo que será no sólo un rasgo distintivo de la Geometría Analítica de Descartes, sino un componente general de la mejor Matemática, que siempre exige elegancia y economía en el razonamiento.

Pero quizá el asunto más importante sea el tratamiento general del llamado *Problema de Pappus* o *lugar geométrico de n rectas*, que en su formulación más sencilla, para tres o cuatro rectas ya era conocido por Apolonio, siendo la solución una cónica, y que ha tenido un valor emblemático para la Historia de la Geometría Analítica. Pappus realiza un estudio exhaustivo del problema, propone la generalización a más de cuatro rectas y reconoce que independientemente del número de rectas involucradas en el problema, queda determinada una curva concreta. He aquí la observación más general sobre lugares geométricos de toda la Geometría griega, lo que implica, además, la consideración de infinitos tipos nuevos de curvas planas, algo esencial en un mundo geométrico tan limitado en cuanto a curvas planas. Pappus vacila a la hora de considerar el problema para más de seis líneas porque: «*no hay nada contenido en más de tres dimensiones*». De haber seguido en esa dirección, se habría dado un paso muy importante de anticipación de la Geometría Analítica, toda vez que ello hubiera propiciado un necesario tratamiento algebraico y no geométrico de los productos de líneas involucradas en el problema. Naturalmente los métodos sintéticos le desbordan a Pappus en el abordaje del problema. Cuando el nuevo Álgebra Simbólica de Vieta actúe sobre el Análisis Geométrico de los griegos aparecerá la Geometría Analítica cartesiana como poderoso instrumento algorítmico de ataque de los problemas geométricos difíciles como el propio *Problema de Pappus*, que fue la prueba de fuego que tuvo que pasar *La Geometría* de Descartes par demostrar la potencia de los nuevos métodos de la Geometría Analítica.

PAPPUS Y DIOFANTO Y LA GEOMETRÍA ANALÍTICA



1. La Colección Matemática de Pappus. Edición de F. Commandino. (Bolonia, 1670).
2. La Aritmética de Diofanto. Edición de 1670 de S. de Fermat con las observaciones de su padre P. de Fermat.

La Colección Matemática de Pappus tiene un gran valor histórico y didáctico. Pappus realiza una encomiable labor de compilación, comentario, restauración, organización, clasificación y generalización del conocimiento matemático superior de la antigüedad. La obra describe una multitud de trabajos matemáticos perdidos que constituyen lo que se llama *Tesoro del Análisis*. Además, Pappus nos relata las vías que seguía la investigación geométrica, oculta en los grandes tratados clásicos debido a su estilo sintético, es decir, lo que los antiguos geómetras entendían por *Análisis* y *Síntesis*.

La obra de Pappus contiene soluciones nuevas a numerosos problemas clásicos, la clasificación definitiva de los problemas geométricos en planos, sólidos y lineales, estudios definitivos de las cónicas como lugares geométricos y una visión más general del famoso *Problema de Pappus*, todas ellas cuestiones de trascendental influencia sobre la evolución del Álgebra Geométrica y el Análisis Geométrico griegos hacia la Geometría Analítica de Descartes.

Diofanto es el responsable, con su obra *La Aritmética*, de los primeros escarceos del Álgebra simbólica -el Álgebra sincopada-. A base de adoptar ciertas letras o expresiones como abreviaturas para las cantidades indeterminadas y sus potencias y para las operaciones más habituales, fragua un incipiente simbolismo antecedente de la notación algebraica que en su evolución a lo largo de los siglos, culminará con la simplificación notacional poderosamente definitiva que acuñará Descartes en *La Geometría* y que se convertirá en el alfabeto de la Matemática. Al ser el Álgebra simbólica un instrumento algorítmico ineludible de la Geometría Analítica, y Diofanto el primer iniciador de esta utilidad, debemos situar su obra, en una dirección conveniente hacia la generación de la Geometría Analítica.

La Geometría de Descartes

La formación de Descartes en La Flèche

Descartes instaaura una nueva época en la Matemática, la Ciencia y la Filosofía sin parangón en la Historia de la Cultura, donde el conocimiento cierto y seguro de la Matemática ejerce un poder y adquiere una universalidad, que se convierte en la base racional del pensamiento cartesiano y revoluciona todas las ciencias. Con sus fundamentales aportaciones en los campos de la Filosofía, la Geometría, la Óptica, la Mecánica y otros, Descartes da un aliento unitario y orgánico al pensamiento científico, construye una visión global del conocimiento y marca un nuevo rumbo en la Filosofía.

René Descartes nace en La Haye, en Touraine, el 31 de marzo de 1596. Su formación tiene lugar con gran autosatisfacción en el Colegio jesuita de La Flèche entre 1606 y 1616. Descartes siempre tuvo la conciencia de haber sido instruido en una de las mejores escuelas de Europa, como manifiesta en *El Discurso del Método* (DM.AT,VI,5).

Descartes había alcanzado en La Flèche un soberbio conocimiento de la Cultura clásica, que incluía un gran dominio del latín –incluso como lengua viva, en la que podía hablar y escribir–, griego e italiano, y había desarrollado una irrefrenable afición a la lectura como demuestran ciertos pasajes de *El Discurso del Método* (DM.AT,VI,5).

En cuanto a la Filosofía aprendida, siempre se mostró un tanto displicente (DM.AT,VI,6):

«[...] Mientras las Matemáticas me han hecho disfrutar he visto la Filosofía como un medio para hablar de manera superficialmente convincente de cualquier cosa y ganar la admiración de los menos cultos.»

Es más, a juzgar por *El Discurso del Método*, parece que la Filosofía inicialmente no le interesara (DM.AT,VI,17):

«La Lógica, sus silogismos y la mayor parte de sus otras reglas sirven más bien para explicar a otro lo que uno sabe más que para aprenderlo.»

En cuanto a su formación matemática el joven Descartes confiesa que quedó cautivado por la parte del curso de Filosofía referente a las Matemáticas que impartía el padre François, que atendía no sólo a los aspectos teóricos de las Matemáticas, sino también a las artes mecánicas, los autómatas, la Óptica, la magia y la Astrología.

La propia *Ratio Studiorum* de los Jesuitas de 1586 establece:

«La Enseñanza de las Matemáticas conviene a los fines de la Orden, no sólo por el prestigio que dan a toda Academia, sino también en razón de su utilidad en todas las profesiones.»

También en el folio 183 de los Archivos romanos de la Compañía de Jesús consta:

«La Enseñanza de las Matemáticas es de las más útiles no sólo porque contribuye a la precisión del razonamiento sino también porque procura conocimientos infinitamente ventajosos para el bien de la sociedad.»

La enseñanza matemática de los Jesuitas tenía una orientación eminentemente práctica. Además del *Cuadrivium* pitagórico añadía nociones de Mecánica, Óptica, Acústica, Topografía, Perspectiva, Hidráulica y Balística, según el cuadro general de la Matemática práctica renacentista, y con una orientación hacia la ingeniería civil y militar, de interés para los jóvenes nobles que ocuparían cargos en la administración y en el ejército. Por eso cuando un Descartes ya maduro mira retrospectivamente, en el autobiográfico *Discurso del Método*, hacia sus años de formación comenta (DM.AT,VI,16):

«Las Matemáticas tienen invenciones muy sutiles y pueden utilizarse tanto para contentar a los curiosos como para facilitar todas las Artes y disminuir el trabajo de los hombres.»

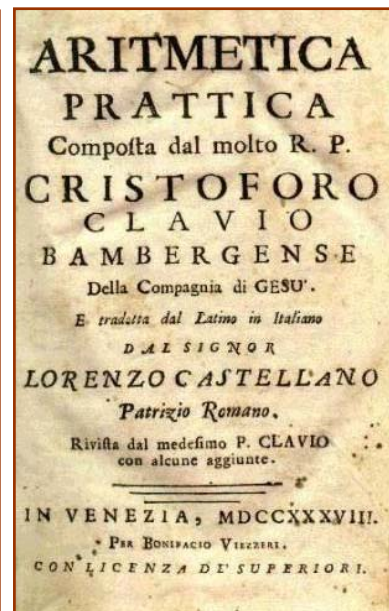
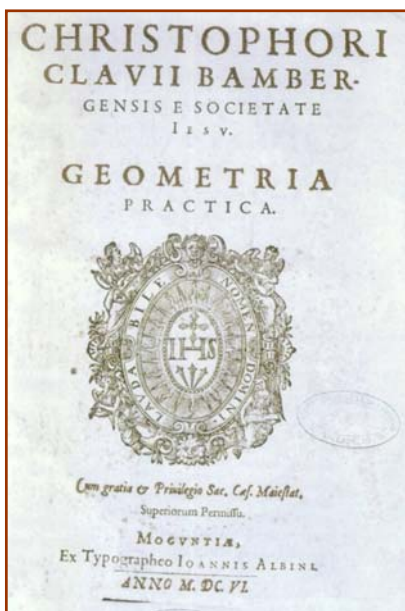
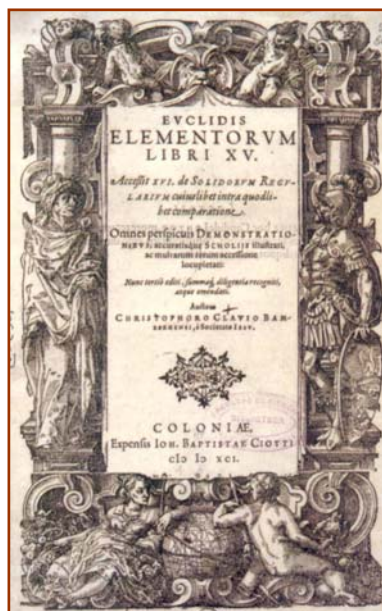
LA INFLUENCIA DE C.CLAVIUS SOBRE DESCARTES



El jesuita alemán C.Clavius, profesor de Matemáticas en el Colegio Romano de Roma, fue el gran inspirador de la Enseñanza de la Matemática en la época de Descartes que incluía *La Ratio Studiorum* de los Jesuitas.

Clavius organizó un verdadero seminario de jóvenes matemáticos, destinados a proveer de profesores de Matemáticas a los colegios jesuitas.

Aparte de excelente profesor, Clavius se reveló como un magnífico escritor de libros de texto. Publicó en 1574 una célebre edición de *Los Elementos de Euclides*, que tuvo reediciones en 1589, 1591, 1603, 1607, 1612 y 1674, lo que da idea de su valor. También escribió magníficos manuales de *Aritmética Práctica* (1583), *Geometría Práctica* (1604), *Álgebra* (1608), una edición comentada de la *Sphera* de Sacrobosco (1591), un compendio de Trigonometría y Astronomía ampliamente utilizado y muy encomiado por Kepler y tuvo una importante intervención en la reforma gregoriana del calendario.



Ediciones de Clavius de *Los Elementos de Euclides* (Colonia 1591), *Geometría Práctica* (Maguncia, 1606) y *Aritmética Práctica* (Venecia, 1738)

Ya que la enseñanza en el Colegio de *La Flèche* estaba inspirada en la *Ratio Studiorum* de los Jesuitas, es de suponer que la doctrina Matemática recibida por Descartes en sus años de Formación se basaría en las primeras ediciones de estos manuales de Clavius. Pero su proyecto de reforma de la Geometría tuvo que partir necesariamente de un profundo conocimiento de las grandes obras de la Matemática Griega de Euclides, Apolonio, Diofanto y Pappus.

Con toda seguridad los Jesuitas usaban los manuales del más famoso de sus matemáticos C.Clavius, llamado «*El nuevo Euclides*» por sus coetáneos, quien con su enseñanza de Matemáticas en el Colegio Romano, la más prestigiosa institución docente de los Jesuitas, y sus publicaciones, contribuyó más que nadie, a dignificar y extender el papel de la Matemática en el Currículum general de la Enseñanza. Sus trabajos fueron recopilados en su famosa *Opera Mathematica*, publicada en cinco volúmenes en 1611. En esta obra, Clavius realiza una apasionada apología de la Matemática, contrastando la firmeza y la unanimidad de las opiniones de los matemáticos con la multiplicidad de visiones diferentes, y por tanto de incertidumbre, que habita en la mente de los filósofos, sensación que manifestará claramente Descartes en *El Discurso del Método* (DM.AT,VI, 7-8):

«Me complacía especialmente [en mi juventud] en las Matemáticas por la certeza y la evidencia de sus razonamientos, [...] De la Filosofía sólo diré que, habiendo sido cultivada por los espíritus más excelentes, y que sin embargo aún no hay nada de lo que no se discuta, [...] , y considerando cuantas opiniones diversas pueden haber acerca de un mismo tema, [...]»

EL JOVEN DESCARTES



Descartes joven. Supuesto retrato del filósofo. Escuela Francesa del siglo XVII. Museo de los Agustinos de Toulouse.

A través de una irresistible pasión por la lectura, la actividad intelectual adolescente de Descartes iba fraguando su pensamiento filosófico y matemático.

La sólida formación en las humanidades del mundo clásico y la consiguiente afición de Descartes a la Cultura griega, se extendía a los grandes tratados de la Matemática griega: *Los Elementos de Euclides*, las Obras de Arquímedes, *La Aritmética* de Diofanto y sobre todo *Las Cónicas* de Apolonio y *La Colección Matemática* de Pappus, obras que conocía en profundidad. Asimismo, Descartes debía estar al corriente de los desarrollos del Álgebra de los matemáticos italianos, Tartaglia, Cardano y Ferrari, y aunque confiesa que desconocía la obra de Vieta antes de escribir *El Discurso del Método*, es inconcebible que así fuera, ya que hay una manifiesta continuidad en la línea de pensamiento geométrico entre la obra de Vieta y *La Geometría* de Descartes.

Descartes sale de La Flèche con el mejor bagaje cultural para emprender su aventura intelectual. El dominio del latín y del griego le abren las puertas al saber de los clásicos y a toda la erudición renacentista; las Humanidades y la Retórica animaron una conversación interesante y el don de gentes; situándose en las mejores condiciones de integrarse en la agitada vida social y pública de su época y dedicarse al conocimiento del mundo, como manifiesta en *El Discurso del Método* (D.M.AT,VI, 9):

« [...] , gracias a Dios, no me encontraba en la situación de verme obligado a hacer de la Ciencia un oficio para alivio de mi fortuna, [...] Emplé el resto de mi juventud en viajar, en ver cortes y ejércitos, [...] , en recoger experiencias diversas, en probarme a mí mismo, en reflexionar sobre lo que me ocurriera, [...]»

Hegel en su *Lecturas sobre la Historia de la Filosofía* describe al joven Descartes como un ser vivaz e inquieto, con insaciable afán de conocimiento en todos los sistemas y formas de pensamiento, de modo que tres experiencias juveniles sucesivas jalonarían la forja de su espíritu: sus amplios estudios de juventud en La Flèche; su buceo en el gran libro del mundo, con otros hombres y otros pueblos; y el encanto o hechizo de las Matemáticas, cuya esencia impregnará todo su pensamiento. Tres experiencias que señalan tres caminos o vías en la búsqueda incesante de la verdad.

CITAS MEMORABLES DE DESCARTES

REGLAS PARA LA DIRECCIÓN DEL ESPÍRITU. (R.AT.X. 359–468)

1. Sólo la Aritmética y la Geometría están libres de todo defecto de falsedad e incertidumbre. [RII. 364].
2. Los que buscan el camino recto de la verdad no deben ocuparse de ningún objeto sobre el que no puedan tener una certidumbre semejante a las demostraciones de la Aritmética y de la Geometría. [RII. 366].
3. Es mucho más acertado no pensar jamás en buscar la verdad de las cosas que hacerlo sin método. [RIV. 371].
4. Ninguna ciencia puede obtenerse, sino mediante la intuición de la mente o la deducción. [RIV. 372].
5. Cultivé [en mi juventud] preferentemente la Aritmética y la Geometría, porque se las tenía por las ciencias más simples y como un camino para las demás. [RIV. 374].
6. El silogismo es completamente inútil para los que desean investigar la verdad de las cosas y sólo puede aprovechar , a veces, para exponer con mayor facilidad a los otros las razones ya conocidas. [RX. 406].

EL DISCURSO DEL MÉTODO (DM.AT.VI. 1–78)

1. Las Matemáticas tienen invenciones muy sutiles y pueden utilizarse tanto para contentar a los curiosos como para facilitar todas las Artes y disminuir el trabajo de los hombres. [6]
2. Mientras las Matemáticas me han hecho disfrutar he visto la Filosofía como un medio para hablar de manera superficialmente convincente de cualquier cosa y ganar la admiración de los menos cultos. [6]
3. Gustaba, sobre todo de las Matemáticas por la certeza y evidencia de sus razones. [7].
4. La Lógica, sus silogismos y la mayor parte de sus otras reglas sirven más bien para explicar a otro lo que uno sabe más que para aprenderlo. [17].
5. Esas largas cadenas trabadas de razones muy simples y fáciles, que los geómetras acostumbran a emplear para llegar a sus más difíciles demostraciones, me habían dado ocasión para imaginar que todas las cosas que entran en la esfera del conocimiento humano se encadenan de la misma manera. [19].
6. Entre todos los que han buscado la verdad en las ciencias, sólo los matemáticos han podido hallar algunas demostraciones, esto es, algunas razones ciertas y evidentes. [19].
7. No esperaba sacar de las demostraciones matemáticas más utilidad que acostumbrar mi espíritu a saciarse de verdades y a no contentarse con falsas razones. [19].

LA GEOMETRÍA (G.AT.VI. 369–485)

1. Todos los problemas de Geometría pueden reducirse fácilmente a términos tales, que no es necesario conocer de antemano más que la longitud de algunas líneas rectas para construirlos. [369].
2. Pero no me detengo a explicar esto con más detalle para no privar a cada uno del placer de aprenderlo por sí mismo, ni impedir el cultivo útil del propio espíritu ejercitándolo, que es, a mi parecer, la principal utilidad que puede obtenerse de esta ciencia [374].
3. Se pueden construir todos los problemas de la geometría ordinaria sin hacer más que lo poco que está comprendido en las cuatro figuras que he explicado. [376]
4. Para encontrar todas las propiedades de las líneas curvas basta con saber la relación que tienen todos sus puntos con los de las líneas rectas, [...] y conocer la manera de trazar otras líneas que las corten en todos esos puntos en ángulo recto. [...] Y me atrevo a decir que éste es el problema más útil y más general no sólo que yo conozca, sino aun que yo haya anhelado jamás conocer en Geometría. [412–413].
5. Y yo espero que nuestros descendientes me estarán agradecidos no sólo por las cosas que aquí he explicado, sino también por aquellas que he omitido voluntariamente a fin de dejarles el placer de descubrirlas. [485].

CITAS MEMORABLES SOBRE DESCARTES

1. A Descartes le fue revelada en sueños la clave mágica que le abría el acceso al tesoro de la naturaleza y que le colocaba en situación de poseer los verdaderos fundamentos de todas la ciencias. A.Baillet. *La Vie de Monsieur Des-Cartes*.
2. Acudiendo a la cita con su ejército, en la calma del invierno, combinaba en su mente los misterios de la naturaleza con las leyes de las Matemáticas, aspirando a desvelar los secretos de ambas. Epitafio de Descartes por H. Pierre Chanot, 1650.
3. Su alma siempre con sabiduría fecunda, hacia ver a los espíritus lo que se esconde a los ojos. Después de haber explicado el modelo del mundo reveló el misterio de los cielos. Epitafio de Descartes por C. Huygens, 1650.
4. Descartes mediante un nuevo método hizo pasar de las tinieblas a la luz cuanto en las Matemáticas había permanecido inaccesible a los antiguos y todo cuanto los contemporáneos habían sido incapaces de descubrir; luego puso los cimientos inquebrantables de la Filosofía sobre los cuales es posible asentar la mayor parte de las verdades en el orden y con la certidumbre de las Matemáticas. Spinoza. *Los Principios de la Filosofía cartesiana*.
5. Lo que ha inmortalizado el nombre de este gran hombre, es la aplicación que ha sabido hacer del Álgebra a la Geometría, una idea de las más vastas y felices que haya tenido el espíritu humano, y que será siempre la llave de los más profundos descubrimientos no solamente en la Geometría, sino en todas las ciencias físico-matemáticas. D'Alembert. *Discours Préliminaire de l'Encyclopédie* (Orbis, 1984, pp.84,85).
6. La *Dióptrica* de Descartes es la más grande y la más bella aplicación que se haya hecho hasta ahora de la Geometría a la Física. D'Alembert. *Discours Préliminaire de l'Encyclopédie* (Orbis, 1984, p.85):
7. Descartes se caracterizaba por su espíritu vivaz e inquieto, que buscaba con insaciable afán todas las ramas del conocimiento humano, buceando en todos los sistemas y formas de pensamiento. Hegel. *Lecturas sobre la Historia de la Filosofía*.
8. Sólo quien haya pensado real y detenidamente este escrito [*Las Reglas para la dirección del espíritu*], radicalmente parco, hasta en sus rincones más recónditos y fríos, está en condiciones de tener una idea de lo que pasa en la ciencia moderna. M.Heidegger. *Die Frage nach dem Ding*.
9. El cartesianismo no debe nada esencial a ninguna doctrina de la antigüedad. H.Bergson. *La Filosofía*.
10. No hay una Matemática, hay muchas Matemáticas. [...]. El espíritu antiguo creó su Matemática casi de la nada. El espíritu occidental, histórico, había aprendido la Matemática antigua, y la poseía, aunque sólo exteriormente y sin incorporarla a su intimidad; hubo, pues, de crear la suya modificando y mejorando, al parecer, pero en realidad aniquilando la Matemática euclidiana, que no le era adecuada. Pitágoras llevó acabo lo primero; Descartes lo segundo. Pero los dos actos son, en lo profundo, idénticos. O.Spengler. *El sentido de los números. (La decadencia de Occidente, p.144)*.
11. La Geometría analítica, mucho más que cualquiera de sus especulaciones metafísicas, inmortaliza el nombre de Descartes y constituye el máximo paso hecho en el progreso de las ciencias exactas. J. Stuart Mill. (citado por E.Bell en *Les grands mathématiciens*. Payot, París, 1950. Cap.3. p.46).
12. La Geometría Analítica de Descartes ha afectado probablemente a la vida humana más profundamente, aunque menos violentamente, que la máquina de vapor o el aeroplano. L.Hull. *Historia y Filosofía de la Ciencia*, 1981, p.268.
13. La Geometría Analítica de Descartes cambió la faz de las Matemáticas. M.Kline. *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*, 1992. vol.1, p.425.

Los sueños de Descartes y los orígenes de *La Geometría*

El 10 de noviembre de 1618 ocurrió un evento de trascendental importancia en la vida de Descartes, el encuentro con Beeckman, un intelectual amante de la Física y la Matemática. Vagando por Breda, Descartes se tropezó con una gente que miraba un anuncio en el que un matemático retaba a que se resolviese un problema, cosa muy propia de la época. Como Descartes todavía no dominaba el holandés, suplicó a quien estaba al lado que se lo tradujese al latín o al francés. Resultó ser Beeckman, quien hablándole en latín, le explicó en qué consistía el problema: «¿Cuán lejos caerá una piedra en una hora si se sabe cuán lejos cae en dos?», y le dio su tarjeta de visita. Beeckman se quedó atónito cuando al día siguiente el joven francés se presentó en su casa, sin anunciarse, con la solución del problema, lo que inició una fructífera amistad, mantenida sobre todo de forma epistolar, plena de gratitud recíproca, como muestran sendas cartas de Descartes a Beeckman, donde se explaya en palabras de agradecimiento hacia él por ser el catalizador de la empresa intelectual de ordenamiento de sus reflexiones y concepciones científicas.

«Podéis estar seguro que antes olvidaría a las musas que a vos, [...], ellas me han atado a vos con lazos de afecto» (24/1/1619, AT,X, 162-163).

«[...] Vos habéis sido el instigador, el motor primero de mis investigaciones, [...], vos me sacudisteis la desidia, apartándome de la erudición inútil, conduciendo mi espíritu, que vagaba en ocupaciones ociosas, a otras mejores, [...]» (23/4/1619).

Influido por Beeckman, Descartes emprende una serie de estudios matemáticos en relación con la trisección del ángulo y las ecuaciones cúbicas, y es consciente, tras los contactos con la literatura rosacruziana alemana, de que los aspectos algebraicos, en especial el simbolismo que apuntaba a convertirse en el lenguaje universal que permitiría el conocimiento y el dominio global de la realidad, entroncan con la tradición hermética y cabalística del arte luliano en íntima relación con la idea del saber universal.

EN UNA MANO LA PLUMA Y EN LA OTRA LA ESPADA



Descartes en las calles de París, por Chartan.

S. de Sacy, en su biografía de Descartes de 1956, refleja la imagen del filósofo como lo hace esta ilustración, describiendo «al hombre izado entre una generación de aventureros, [...], un mosquetero del alma, [...] en vagabundeo metódico, [...]».

En el gran teatro del mundo, apareciendo como desherado y marginal de las clases sociales dominantes, desligado de la tradición y del marco familiar, Descartes «sostiene en una mano la pluma y en la otra la espada», en un continuo vaivén entre el afán de retiro y el estudio y su curiosidad por la vida mundana, alistándose en ejércitos, dedicado a la vida militar, como aventurero y rebelde, junto a los mercenarios de las guerras de Religión que asolaban Europa.

Provisto del bagaje intelectual del Renacimiento, dotado de una prodigiosa erudición alcanzada en *La Flèche* y de una brillante retórica, con una incontenible afición a la Matemática, transmitida por el padre François y por Beeckman, Descartes viaja y conoce mundo «pues es casi lo mismo conversar con gentes de otros siglos que viajar» (DM.AT,VI,6) y se convierte en el filósofo enmascarado que persigue la sabiduría universal que anunciaban sus curiosas lecturas de adolescencia, de raíces lulianas, dentro de la tradición hermético-cabalística.

El interés por los rosacruces, que presumían de tener la clave de la sabiduría universal, impele a Descartes a abandonar Holanda hacia mayo de 1619 camino de Alemania, donde asiste a la coronación de Fernando II y se enrola en las tropas del Duque de Baviera.

A la llegada del invierno, Descartes se retira a alguno de los refugios militares, quizá en Ulm, donde vivía el matemático Faulhaber. En un ambiente propicio para la meditación, Descartes se plantea algunos problemas geométricos y la solución lograda le induce a buscar un método general para resolver cualquier problema de Geometría que se le presentase. Pero enseguida extrapola sus ideas y amplía tan ambicioso plan para concebir la posibilidad de encontrar un método para el descubrimiento de la verdad en cualquier rama de la ciencia. Así que en la mente de Descartes fue tomando cuerpo el ideal de un conocimiento integral, unificado sobre la totalidad global de las ciencias, que al tratar de lo divino y de lo humano, reuniría todas las ciencias con un simbolismo adecuado, intuyendo que el Álgebra y la Geometría, adecuadamente interpretadas e insertas en un simbolismo superior, podían convertirse o al menos apuntar hacia el tan proclamado saber universal.

Con estas ideas fijas en la mente, en la noche del 10 de noviembre de 1619, primer aniversario del encuentro con Beeckman, Descartes tuvo una concatenación de sueños que le dejaron una profunda impresión marcando un hito en su ulterior evolución espiritual.

La profunda experiencia visionaria fue plasmada por Descartes en un manuscrito de 1620, en latín, con el nombre de *Olympica*, ahora perdido, que parece ser fue ojeado por Leibniz en su estancia en París en 1675 y que fue traducido por Baillet, el biógrafo de Descartes (AT.X, 181-188). En una minuciosa descripción de los sueños y su interpretación, Descartes relata un itinerario simbólico en sus tres sueños: siente angustia en el primero, luces prometedoras en el segundo, hasta alcanzar la revelación de la verdad en el tercero, en el cual el espíritu de la Verdad quería «*abrirle los tesoros de todas las ciencias*».

Los *Olympica* comienza con estas palabras:

«X Novembris 1619, cum plenus forem Enthousiasmo et mirabilis scientiae fundamenta reperirem ...»

«X de noviembre de 1619, cuando, lleno de entusiasmo, descubrí los fundamentos de una ciencia admirable.»

En la interpretación mística que hace Descartes de sus sueños, a él se le ha revelado la unidad de la ciencia, ha sido ungido de un sagrado entusiasmo místico que le ha liberado de una crisis espiritual y le ha cargado de una gran responsabilidad en el alumbramiento de la verdad al tomar conciencia de una misión:

¿Será ésta emprender la magna empresa de reforma de la Filosofía y consecuentemente de la Matemática?

El espíritu de la verdad ha conducido a Descartes a una exaltación intelectual para alcanzar «*la visión de una ciencia nueva y admirable*», que tal vez debía de ser el conocimiento de todas las cosas de las que el espíritu humano es capaz, y que sus fundamentos consistirían en un método general —extraído de los procedimientos del pensamiento matemático— donde se experimenta la certeza y evidencia inherentes al verdadero saber.

Al año siguiente, el mismo día 10 de Noviembre, aniversario del encuentro con Beeckman y de los sueños, Descartes vuelve a tener una visión que le ilumina, escribiendo al margen del manuscrito de Los *Olympica* (AT.X.179):

«X Novembris 1620. Coepi intelligere fundamentum inventi mirabilis.»

«10 Noviembre 1620. He empezado a entender el fundamento de un admirable descubrimiento.»

LOS SUEÑOS DE DESCARTES Y LA GEOMETRÍA



Descartes representado como Fausto. *Opuscula posthuma, physica et mathematica*. J. Blaeu. Amsterdam, 1701.

La noche del domingo del 10 al 11 de noviembre de 1619, en un descanso en los cuarteles de invierno de los ejércitos de Maximiliano de Baviera, Descartes enfrecido sufre alucinaciones. Sintiendo una iluminación interior asiste «lleno de entusiasmo» a la revelación de «los fundamentos de una ciencia admirable». Descartes tiene tres sueños que le hacen tomar conciencia de su vocación filosófica. En palabras de su primer biógrafo A. Baillet (*La Vie de Monsieur Des-Cartes*):

«[...] Le fue revelada la clave mágica que le abría el acceso al tesoro de la naturaleza y que le colocaba en situación de poseer los verdaderos fundamentos de todas la ciencias».

La descripción de los sueños de Descartes en los *Olympica* pudo ser un pretexto literario o un artificio poético-filosófico para explicar que se sentía predestinado a la búsqueda de la sabiduría universal. En todo caso la experiencia onírica de Descartes fue una intensa vivencia personal, un auténtico Pentecostés, que marcó su porvenir. A raíz de los sueños, Descartes, imbuido de entusiasmo y satisfacción, decidió ir en peregrinación al santuario de Santa María de Loreto y aunque cambió de residencia muchas veces entre 1619 y 1650, jamás se separó del manuscrito de sus sueños.

Los sueños de Descartes, de gran significado freudiano, marcaron una impronta inmarcesible en la orientación de su pensamiento. El rapto místico habría de servir a Descartes de cimiento de un sólido edificio racionalista, presidido por la «unidad» como emblema para entender el mundo: unidad de la Matemática a través de la fusión del Álgebra y la Geometría; unidad entre Física y Matemática; unidad de todas la ciencias; presidida por la unidad de método y criterio «para bien conducir la razón y buscar la verdad en las ciencias», que así subtitulará precisamente a su principal obra filosófica y científica: *El Discurso del Método*; en suma, unidad de todo el saber radicada en el espíritu proclamada con carácter de primariedad desde el comienzo de su último escrito de juventud: *Las Reglas para la dirección del espíritu* (*Regulae ad directionem ingenii*)

La importancia que *La Geometría* de Descartes tiene en la Historia de la Matemática, ha propiciado, a veces, la sublimación de la intuición de sus raíces en la mente de Descartes, de modo que algunos historiadores le atribuyen un origen casi legendario, según el cual el 10 de Noviembre de 1619, en su delirio onírico Descartes habría adivinado la unión del Álgebra y la Geometría en un solo cuerpo de doctrina: *La Geometría Analítica* –aunque más bien habría que hablar de Geometría Algebraica– y ante «la visión de una ciencia nueva y admirable» se habría sentido predestinado para construir un nuevo sistema filosófico, donde la Matemática ocuparía una situación privilegiada como llave del conocimiento y la sabiduría universal e instrumento de explicación racional de los fenómenos naturales, de modo que la iluminación de Descartes le procuraría una explicación global de la naturaleza física, es decir una Filosofía natural –una Física en sentido actual– basada en la Matemática. Así se explicarían los tres ensayos que al acompañar a *El Discurso del Método* justificarían de forma verdadera y global el método cartesiano.

Las Regulae, El Discurso del Método y La Geometría

La lectura de las *Regulae* y *El Discurso del Método* es un preliminar necesario, o al menos aconsejable, para entender la motivación y los presupuestos intelectuales de Descartes acerca de la Ciencia, de la universalización del razonamiento matemático como base del conocimiento racional y en particular de los orígenes y objetivos de *La Geometría*. Como señala Víctor Gómez Pin (Congreso de Ontología, 24/3–31/3 de 1996, San Sebastián-Barcelona):

«El Discurso del Método es tan sólo el prólogo añadido por Descartes a sus escritos científicos [los tres ensayos la Dióptrica, los Meteoros y la Geometría], a fin de mostrar lo estéril que sería abordar éstos sin el hilo conductor de la problemática común, es decir, sin referencia a la unidad de la razón que tales escritos despliegan.»

Descartes había estudiado las Matemáticas con gran fruición en su adolescencia y desde el primer momento apreció su indudable condición de certeza, pero sólo más tarde llegó a reparar en lo que él llama su verdadero uso hacia la gestación y desarrollo del *Método*. Es en los sueños de 1619 y cuando escribe, en 1620, en los *Olympica*, sobre «*los fundamentos de una ciencia admirable*», cuando empieza un primer estadio en la intuición del *Método*; el segundo estadio de puesta a punto del *Método* tiene lugar con las *Reglas para la dirección del espíritu* de 1628 (Las *Regulae*) y el tercero, de codificación, con *El Discurso del Método* de 1637.

Descartes busca un fundamento absoluto e inmovible de la verdad en que basar el conocimiento científico sobre el que cimentar la vida y la acción. Pero ello no es posible alcanzarlo sin método. La Regla IV de las *Regulae* se titula precisamente: «*El método es necesario para la investigación de la verdad de las cosas*» (RIV.AT.X.371), y en ella Descartes alude de forma reiterada sobre el asunto:

«[...] Es mucho más acertado no pensar jamás en buscar la verdad de las cosas que hacerlo sin método» (RIV.AT.X.371).

«[...] Entiendo por método reglas ciertas y fáciles, mediante las cuales el que las observe exactamente no tomará nunca nada falso por verdadero, y, no empleando inútilmente ningún esfuerzo de la mente, sino aumentando siempre su ciencia, llegará al conocimiento verdadero de todo aquello de que es capaz» (RIV.AT.X.371–372).

«El método explica rectamente de qué modo ha de usarse la intuición de la mente para no caer en el error contrario a la verdad y cómo han de ser hechas las deducciones para llegar al conocimiento de todas las cosas, [...] ninguna ciencia puede obtenerse, sino mediante la intuición de la mente o la deducción» (RIV.AT.X.372).

Así pues, las reglas del método se remiten al saber de la razón, pero de los textos cartesianos hay que colegir, como veremos, que en principio se trata de la razón matemática y que en origen las reglas del método lo son primariamente del saber matemático.

En el cultivo de las Matemáticas desde su juventud, Descartes atribuye a las verdades matemáticas una naturaleza esencialmente diferente a la de las verdades basadas en la experiencia. Según Descartes las proposiciones matemáticas no deben su verdad a la experiencia y no pueden ser desmentidas por ésta, es decir son «*verdades de razón*» con una validez universal y absoluta. Es el ámbito de la razón, sobre el que descansa la Matemática, al que acudirá Descartes para fundamentar su método que impone la certeza como condición epistemológica ineludible que excluye los conocimientos tan sólo probables. Así tiene lugar en la Regla II de las *Regulae* titulada (RII.AT.X.361):

«Conviene ocuparse tan sólo de aquellos objetos, sobre los que nuestros espíritus parezcan ser suficientes para obtener un conocimiento cierto e indudable.»

La exigencia cartesiana de encontrar un conocimiento cierto y evidente que alcance y rija con seguridad la unidad del saber, hace recalar a Descartes en el modo del pensar matemático, elaborando el *Método* con base en su larga experiencia en las ciencias geométricas y aritméticas. Así se advierte de forma palmaria a lo largo de las *Regulae*:

«[...] Cuando por primera vez me dediqué a las disciplinas Matemáticas, de inmediato leí por completo la mayor parte de lo que suelen enseñar sus autores, y cultivé preferentemente la Aritmética y la Geometría, porque se las tenía por las más simples y como un camino para las demás» (RIV.AT.X.374–375).

La Aritmética y la Geometría deben, pues, ejercer para Descartes una función propedéutica e indicativa porque en ellas se experimenta la certeza y evidencia requeridas para el verdadero saber; a ellas hay que reducirse, pues sólo ellas están libres de incertidumbre y falsedad, de modo que (RII.AT.X.363,364):

«[...] Si calculamos bien, de las ciencias ya descubiertas sólo quedan la Aritmética y la Geometría, a las que la observación de esta regla [Regla II] nos reduce.»

«[...] Sólo la Aritmética y la Geometría están libres de todo defecto de falsedad e incertidumbre.»

En el Colegio de La Flèche Descartes habría recibido una sólida formación matemática, pero más allá de esta ciencia, habría captado el espíritu mismo del saber matemático, que al aunarlo con su notable y peculiar penetración filosófica, alcanzaría la visión de las Matemáticas, por la certeza y evidencia de sus razones, como instrumento clave del descubrimiento de una técnica puramente especulativa —el *Método*— que sitúa al espíritu en posesión de la verdad y en posesión de sí mismo, experimentando lo que deviene el conocimiento humano cuando se le ahorma según el patrón de la evidencia matemática. Descartes se propone con *El Discurso del Método* y *La Geometría* una magna empresa de reforma de la Filosofía y de la Matemática, tomando esta ciencia como principio básico del fundamento de la sabiduría universal. Descartes adopta la demostración matemática frente al recurso a la autoridad y pondera la firmeza y certeza de la Matemática *versus* la incertidumbre de la Filosofía. Pero no todo es panegírico respecto de las Matemáticas, ya que Descartes se queja tanto del uso restringido que se hacía de la Matemática como de la forma misma de enseñarla y pone en un plano secundario el valor técnico de las Matemáticas como mera herramienta para las artes y los oficios mecánicos. En efecto, al aludir a su etapa de formación, Descartes escribe, en el *Discurso del Método*, respecto de las Matemáticas (DM.AT,VI,7):

Gustaba [en mi juventud], sobre todo, de las Matemáticas por la certeza y evidencia de sus razonamientos, pero no había entendido todavía su verdadero uso y, pensando que sólo servían para las artes mecánicas, me sorprendía de que, siendo tan firmes sus fundamentos, no se hubiera construido sobre ellas nada más relevante.»

Más adelante, en la segunda parte de la obra, Descartes continúa diciendo (DM.AT,VI,17):

«Había estudiado entre las partes de la Filosofía, la Lógica, y de las Matemáticas, el Análisis de los géometras y el Álgebra, tres Artes o Ciencias, que debían, al parecer, contribuir algo a mi propósito. [...] Respecto al Análisis de los antiguos y el Álgebra de los modernos, aparte de que no se refieren sino a muy abstractas materias que no parecen ser de ningún uso, el primero está siempre tan constreñido a considerar las figuras, que no puede ejercitar el entendimiento sin fatigar mucho la imaginación, y en la última hay que sujetarse tanto a ciertas reglas y cifras, que se ha hecho un arte confuso y oscuro, bueno para enredar el espíritu, en lugar de una ciencia que lo cultive. Esto fue causa de que pensase que era necesario buscar algún otro método que, reuniendo las ventajas de estos tres, estuviese libre de sus defectos.»

A juzgar por este texto, el valor propedéutico y pedagógico de la Aritmética y la Geometría en la concepción del *Método*, es asumido por Descartes una vez se hayan corregido las deficiencias y limitaciones de estas ciencias, es decir, una vez que Descartes haya transformado los antiguos instrumentos de la Geometría griega –el Álgebra Geométrica y el Análisis Geométrico– en lo que hoy llamamos la Geometría Analítica cartesiana, mediante la intervención del Álgebra literal y simbólica de Vieta sobre la Geometría, tras la drástica reforma y simplificación de la notación algebraica que el propio Descartes realizará, primero de forma provisional en la Regla XVI de las *Regulae* (RXVI.AT.X.455) y ya de forma definitiva en *La Geometría* (G.AT,VI,371). Efectivamente, uno de los atributos más importantes de la Geometría Analítica es que libera al investigador de la dependencia a ultranza de las figuras geométricas al reemplazar las ingeniosas construcciones geométricas de la Geometría griega por sistemáticas operaciones algebraicas, es decir, permite «*ejercitar el entendimiento sin fatigar mucho la imaginación*» (DM.AT,VI,17). Así concibe Descartes una ciencia matemática que se convierte en un saber más fácil y simple, y generalizable y válido para todo el ámbito de la cantidad. Pero no sólo esto, porque el modo de proceder y el espíritu de esta verdadera Matemática, experimentado y cultivado en el quehacer y en la investigación matemáticos, es lo que inspira las reglas del *Método* y el *Método* mismo.

Según Descartes, sólo la Aritmética y la Geometría no ofrecen dudas ni conocimientos probables. Pero esto no significa que sólo haya que aprender y ocuparse de estas ciencias sino que la certeza y los rasgos que encontramos en ellas es lo que debemos requerir en la búsqueda del camino que nos conduce a la verdad en general (RII.AT.X.366):

«[...] *Mas de todo esto se ha de concluir no ciertamente que se han de aprender sólo la Aritmética y la Geometría, sino únicamente que aquellos que buscan el recto camino de la verdad no deben ocuparse de ningún objeto del que no puedan tener una certeza semejante a la de las demostraciones de la Aritmética y de la Geometría.*»

Aún más esclarecedor es el texto que sigue a las famosas cuatro reglas en el que Descartes reconoce el proceder de los geómetras en la inspiración de su método (DM.AT,VI,19):

«*Esas largas cadenas trabadas de razones muy simples y fáciles, que los geómetras acostumbran a emplear para llegar a sus más difíciles demostraciones, me habían dado ocasión para imaginar que todas las cosas que entran en la esfera del conocimiento humano se encadenan de la misma manera, [...], y considerando que entre todos los que antes han buscado la verdad en las ciencias, sólo los matemáticos han podido hallar algunas demostraciones, esto es, algunas razones ciertas y evidentes, no dudé de que debía comenzar por las mismas que ellos han examinado.*»

He aquí un texto muy significativo de la importancia del método matemático en el fundamento del pensamiento cartesiano, sobre todo el método seguido por los geómetras, que parten de las cosas más sencillas y fáciles de conocer para elevarse mediante «*largas cadenas de trabadas razones*» hasta alcanzar las cuestiones más difíciles y complejas. Descartes concebía que las entidades del conocimiento se encadenan como las proposiciones geométricas, que son, junto con las aritméticas, las únicas que gozan de certeza y evidencia, por tanto por ellas había que empezar como guía hacia el *Método*.

La naturaleza de la Matemática, tiene para Descartes un acusado carácter instrumental y pedagógico en la búsqueda y fundación de un saber científico unificado, universal, cierto y evidente, que Descartes denomina *Mathesis Universalis*, una cierta ciencia general, una determinada y precisa forma de saber extraída del modo, el estilo y el método de los saberes matemáticos. En este sentido Descartes se acerca al pensamiento platónico de la *República* que concebía la Matemática no sólo como imprescindible propedéutica en el ascenso hacia la Filosofía y fundamento de todo el saber humano, sino también como el camino inexcusable en la realización de la *Paidea*, entendida como cultivo y formación del espíritu humano en todas sus facetas. En efecto, así lo manifiesta Descartes en la Regla IV (RIV.AT.X.375-376):

«[Pensé] por qué sucedía que antiguamente los primeros creadores de la Filosofía no quisieran admitir para el estudio de la sabiduría a nadie que no supiese Mathesis, como si esta disciplina pareciese la más fácil y sobremanera necesaria de todas para educar los espíritus y prepararlos para comprender otras ciencias más altas, [...]»

El último texto citado de *El Discurso del Método* continua con estas palabras (DM.AT,VI,20):

«[...] Al advertir que, aunque [las ciencias matemáticas] tienen objetos diferentes, concuerdan todas en no considerar sino las relaciones o proporciones que se encuentran en tales objetos, pensé que más valía limitarse a examinar esas proporciones en general, [...] , pensé que, para considerarlas mejor particularmente, debía suponerlas en línea [recta], pues nada hallaba más simple ni que más distintamente pudiera representarse a mi imaginación y a mis sentidos. Y que para retenerlas o comprenderlas era necesario explicarlas mediante algunas cifras lo más cortas que fuera posible; de esta manera tomaría lo mejor del Análisis geométrico y del Álgebra y corregiría los defectos del uno por medio de la otra.»

He aquí, en términos del propio Descartes, el origen y los fundamentos de *La Geometría*. Descartes toma la línea recta como representación de toda magnitud y, además, propone una reforma de la notación algebraica. De esta forma conservará del Análisis Geométrico el auxilio que recibe de la imaginación y del Álgebra –una vez reformada la notación– la mecanización operacional que permite su simbolismo. La proyección del Álgebra sobre el Análisis geométrico –Descartes dice «*corrigiendo sus defectos*»– producirá lo que llamamos su «*Geometría Analítica*».

EL MÁS FAMOSO RETRATO DE UN FILÓSOFO



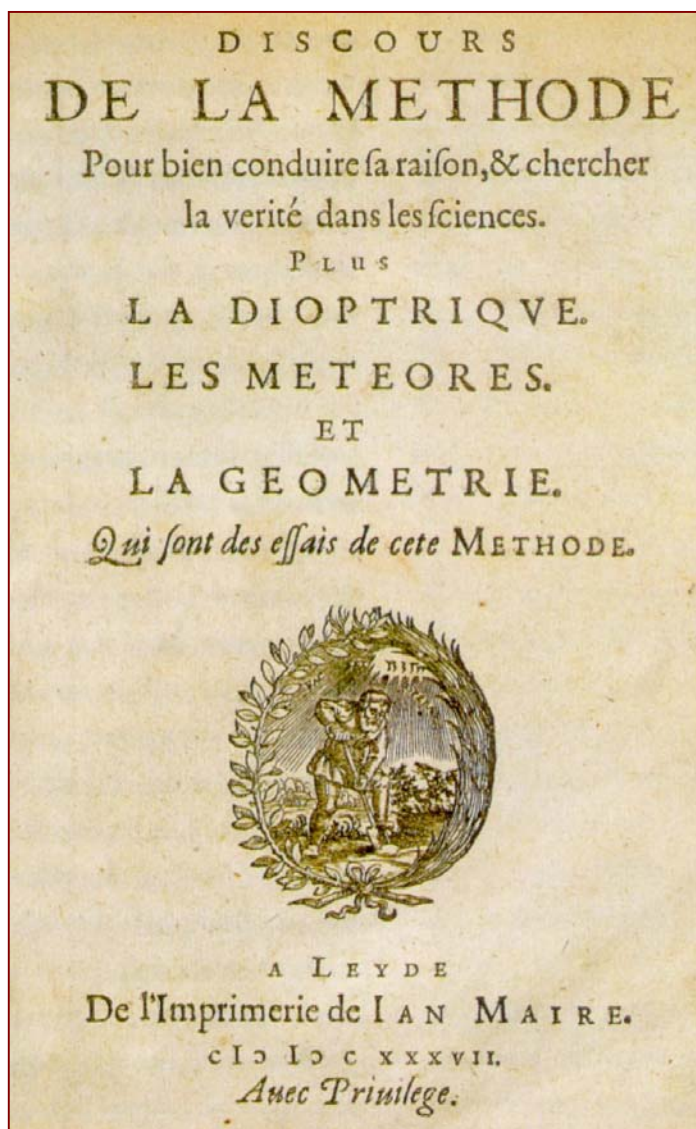
Retrato de Descartes atribuido a F.Hals. Museo de Louvre.

Tal vez es el retrato más célebre de un filósofo, aunque no se puede decir con certeza que sea Descartes ni que sea de F.Hals. Impresiona por su penetrante e inteligente mirada.

Descartes es considerado como el fundador de la Filosofía moderna. Prescindiendo de las bases ideológicas de sus antecesores, Descartes intenta construir, tanto en Filosofía como Matemática, un edificio completamente nuevo y sistemáticamente completo en sí mismo. La evolución ulterior del pensamiento nos indica que fue más afortunado en ésta que en aquélla. La originalidad de Descartes siempre ha sido muy ponderada en la historiografía, de modo que es casi una regla en la Historia de la Filosofía y de las Ciencias, la afirmación de que Descartes no debe casi nada a sus predecesores. Así lo asegura Bergson (*La Filosofía*, Larouse, París, 1916), con la frase:

«El cartesianismo no debe nada esencial a ninguna doctrina de la antigüedad.»

EL DISCURSO DEL MÉTODO Y LAS MATEMÁTICAS



La primera edición de *El Discurso del Método* con los tres ensayos *la Dióptrica*, *los Meteoros* y *la Geometría* (Leyden, 1637).

El Discurso del Método es la autobiografía intelectual de Descartes.

Descartes encontró en la Matemática, un modelo paradigmático en la búsqueda de las primeras verdades absolutamente ciertas que pudieran servirle de base, apoyo y fundamento en la reconstrucción de todo el edificio científico y filosófico, por eso la Matemática devino en la base racional de su pensamiento

Cuando se habla del cartesianismo como método de la razón se debe entender «método de la razón matemática» en el sentido de que las reglas del método son extraídas por Descartes del saber y del conocimiento matemáticos, por una parte, y de la práctica, estilo y procedimientos matemáticos, por otra.

Concretamente Descartes habla de tres Artes o Ciencias que habían de contribuir a su propósito (DM.AT,VI,17):

- La *Lógica* como parte de la Filosofía.
- El antiguo *Análisis* de los *geómetras*.
- El *Álgebra* de los modernos.

Así pues, utilizando la Matemática como paradigma en la indagación de la verdad, es decir, el *Análisis* de los *geómetras* y la *Síntesis* de los *álgebristas*, Descartes establece el «Método para conducir bien la razón y buscar la verdad en las ciencias».

Descartes persigue ante todo en *El Discurso del Método* la búsqueda de un «ars inveniendi», es decir, un método que sirviera para descubrir verdades y no para probar lo que ya se ha hallado, defender tesis o exponer teorías, y aplicable en todas las ciencias y en particular en la Geometría. Como ya había sentido R. Bacon en el *Novum Organum*, la Lógica aristotélica era inútil para la invención científica porque el silogismo no es aplicable a los principios de las ciencias, ya que sólo sirve para imponer el asentimiento y no para aprehender la realidad. Esta misma actitud asume Descartes con respecto a la lógica tradicional tanto en *El Discurso del Método* como en las *Regulae*:

«La Lógica, sus silogismos y la mayor parte de sus otras reglas sirven más bien para explicar a otro lo que uno sabe más que para aprenderlo» (DM.AT,VI,17).

«El silogismo es completamente inútil para los que desean investigar la verdad de las cosas y sólo puede aprovechar, a veces, para exponer con mayor facilidad a los otros las razones ya conocidas» (RX.AT.X.406).

Descartes ya se había fijado, para su propósito, en la IV Regla de las *Regulae*, especialmente en la bondad del *Análisis* de los antiguos y del *Álgebra* de los modernos, cuando escribe:

«[...] Los antiguos *geómetras* se han servido de cierto *Análisis*, que extendían a la resolución de todos los problemas, si bien privaron de él a la posteridad. Y ahora florece cierta clase de *Aritmética* que llaman *Álgebra*, para realizar sobre los números lo que los antiguos hacían sobre las figuras» (RIV.AT.X.373).

«Ha habido, finalmente, algunos hombres de gran talento que se han esforzado en este siglo por resucitarla; pues aquel arte no parece ser otra cosa, que lo que con nombre extranjero llaman *Álgebra*, con tal que pueda zafarse de las múltiples cifras e inexplicables figuras de que está recargado a fin de que no falte ya aquella claridad y facilidad suma que suponemos debe haber en la verdadera *Mathesis*» (RIV.AT.X.377).

Todas estas cuestiones e inquietudes que Descartes refleja en *El Discurso del Método* y en las *Regulae*, con un lenguaje bello y claro, son esenciales de tener en cuenta para entender como se había ido fraguando en su mente adolescente no sólo el origen de *La Geometría* sino la idea de la sabiduría universal.

Descartes ilustra la introducción de los célebres cuatro preceptos o reglas –*evidencia, análisis, síntesis y verificación*– de *El Discurso del Método*, que aplicará cuidadosamente en toda especulación filosófica y matemática, con estas palabras(DM.AT,VI,18-19):

«Y como la multitud de leyes sirve a menudo de disculpa a los vicios, siendo un Estado mucho mejor regido cuando hay pocas pero muy estrictamente observadas, así también, en lugar del gran número de preceptos que encierra la lógica, creí que me bastarían los cuatro siguientes, siempre que tomara la firme y constante resolución de no dejar de observarlos ni una sola vez.»

El primer precepto es el criterio de evidencia, que determina los primeros conocimientos y verdades, las ideas «*claras y distintas*» de los *Principia philosophiae* de 1644, siendo el «*cogito, ergo sum*» la primera verdad indudable y el punto de arranque de toda su Filosofía. Los otros tres preceptos corresponden, a la primera y segunda parte de la Regla V y a la Regla VII de *Las Regulae*. De acuerdo con el segundo precepto –*Regla del Análisis*– hay que dividir las dificultades hasta descubrir los elementos más simples, que se aprehenden por intuición. Según el tercero –*Regla de la Síntesis*–, debemos partir de tales objetos simples y ascender por deducción, poco a poco, hasta los más complejos. Ambos preceptos encierran el núcleo del método cartesiano. Por fin, hay que aplicar el cuarto precepto para hacer una revisión final, examinar cuidadosamente la cadena deductiva, ordenar y enumerar esos elementos simples de modo que estemos seguros de no omitir nada.

LAS CUATRO REGLAS DE EL DISCURSO DEL MÉTODO

D I S C O U R S

Le premier estoit de ne recenoir iamais aucune chose pour vraye que ie ne la conuusse euidemment estre telle: c'est à dire, d'euter soigneusement la Précipitation, & la Preuention, & de ne comprendre rien de plus en mes iugemens, que ce qui se presenteroit si clairement & si distinctement a mon esprit, que ie n'eusse aucune occasion de le mettre en doute.

Le second, de diuiser chascune des difficultez que l'examinerois en autant de parcelles qu'il se pourroit, & qu'il feroit requis pour les mieux resoudre.

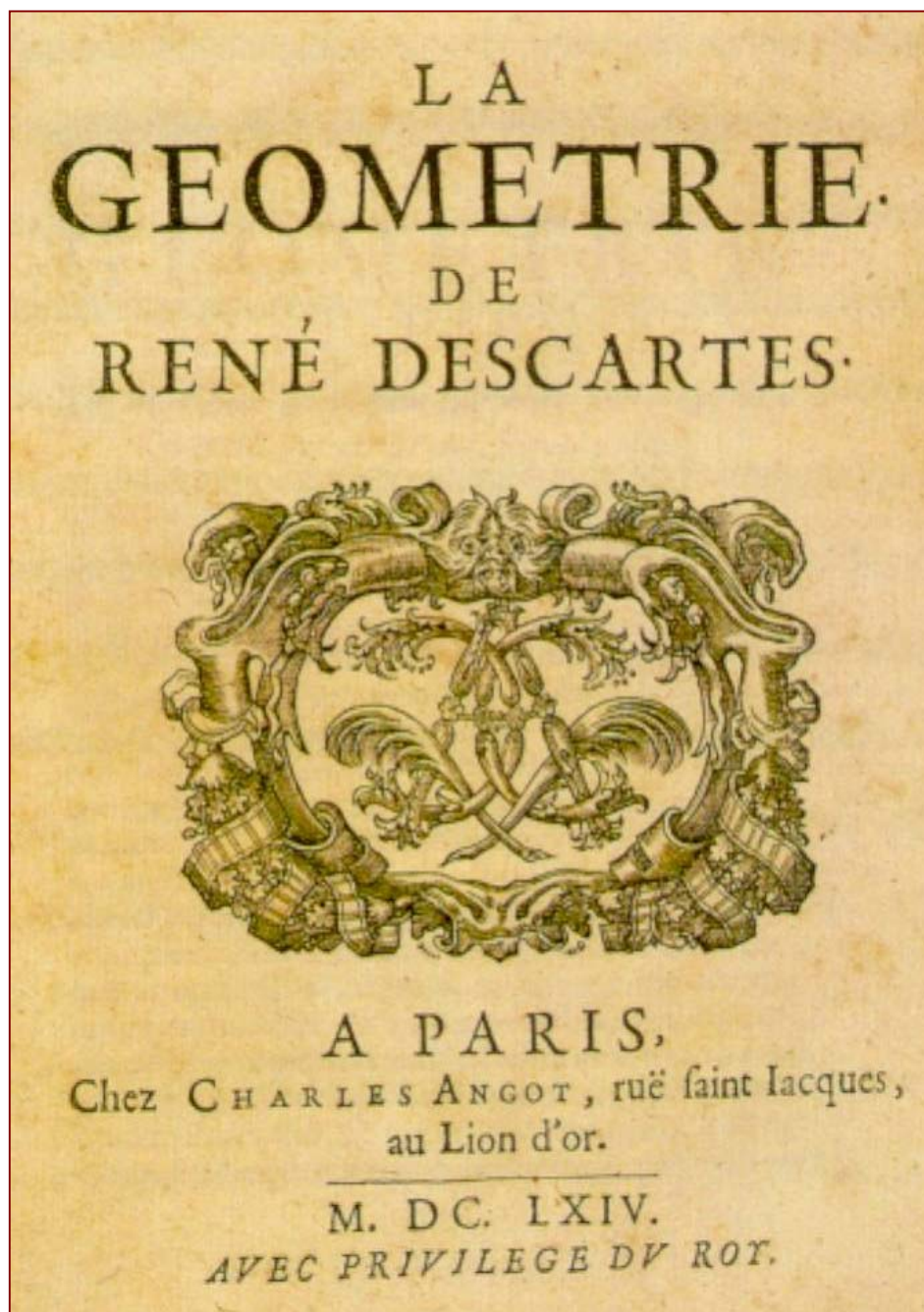
Le troisieme de conduire par ordre mes pensées, en commençant par les obiets les plus simples, & les plus aysez a connoistre, pour monter peu a peu comme par degrez iusques a la connoissance des plus composez: Et supposant mesme de l'ordre entre ceux qui ne se precedent point naturellement les vns les autres.

Et le dernier de faire partout des denombrements si entiers, & des reuenës si generales, que ie fusse assuré de ne rien omettre.

Las cuatro reglas de *El Discurso del Método* en la primera edición de 1637:

1. Evidencia: no aceptar como verdadero lo que no ofrezca plena evidencia, evitando la precipitación y la prevención.
2. Análisis: dividir las dificultades en tantos elementos como sea necesario para resolverlas completamente.
3. Síntesis: Llevar los pensamientos en orden, procediendo de lo simple a lo complejo.
4. Verificación: hacer suficientes enumeraciones y revisiones para tener la seguridad de no omitir nada.

LA GEOMETRÍA DE DESCARTES



La Geometría de Descartes, edición separada de *El Discurso del Método* (París, 1664).

La Geometría de Descartes es considerada con gran unanimidad como una de las obras fundamentales del pensamiento geométrico a lo largo de toda la Historia de la Matemática. Mediante el uso del Álgebra como herramienta algorítmica esencial, Descartes da una nueva lectura a la Geometría de los griegos, que supera sus limitaciones y trasciende sus conquistas geométricas a base de elaborar un magnífico instrumento de ataque de los problemas geométricos antiguos y modernos que libera a la Geometría de la dependencia y sometimiento a la estructura geométrica de la figura y su representación espacial y propone una forma de solución de los problemas basada en la aplicación del Análisis mediante la actuación del Álgebra, que supone el problema resuelto y establece una ordenada dependencia entre lo conocido y lo desconocido, hasta hallar el resultado buscado, de modo que las reglas del método cartesiano adquieren el sentido matemático de normas para la solución de los problemas geométricos mediante ecuaciones.

De acuerdo con la idea de Descartes acerca de la Matemática como fundamento de la sabiduría universal, y en particular como base racional de todas las ciencias, *La Geometría* de Descartes perfecciona de forma muy notable el Álgebra esbozada en el Libro II de las *Regulae* al establecer el Análisis Algebraico no sólo como un instrumento que aplicado a la Geometría creará la Geometría Analítica sino como algo mucho más universal todavía, el lenguaje de expresión y por tanto la clave de todas las ciencias.

La percepción de Descartes sobre el eco científico de *La Geometría*

La Geometría de Descartes no puede entenderse de forma aislada ya que forma parte indisoluble del proyecto metodológico general de alcanzar la unidad de la Ciencia que Descartes intenta fijar en las *Regulae* y en *El Discurso del Método*. Descartes se propone con *El Discurso del Método* y los tres ensayos que lo acompañan, demostrar que ha alcanzado un nuevo método de especulación sobre la verdad científica, mejor que todo método anterior y que precisamente *La Geometría* demuestra este aserto. En este sentido escribe en una carta al Padre Mersenne de diciembre de 1637 (AT,I,478):

«[...] Con *La Dióptrica* y *Los Meteoros* he querido únicamente convencer de que mi método es mejor que el ordinario y creo que lo he demostrado con mi *Geometría*, al resolver en las primeras páginas una cuestión que, según Pappus, no había podido resolver ningún geómetra de la antigüedad [...]

Ya cerca de la fecha de publicación de *El Discurso del Método* y *La Geometría*, en marzo de 1637, Descartes escribe otra carta al Padre Mersenne para comunicarle el título y el contenido de la magna obra:

«*Proyecto de una Ciencia universal que pueda elevar nuestra naturaleza a su mas alto grado de perfección. Además, La Dióptrica, los Meteoros y la Geometría, donde las más curiosas materias que el autor haya podido elegir, para dar prueba de la Ciencia universal que él autor propone, son explicadas de tal manera, que aun aquellos que no han estudiado puedan entenderlos.*»

Descartes elaboró *La Geometría* como un ejemplo de su método y fue uno de los gérmenes del mismo y aunque la labor matemática de Descartes, en cierto modo, no fue mas que un episodio en su tarea como filósofo, la Matemática era para él la base racional de su pensamiento y estaba convencido de que en el campo de las Matemáticas *La Geometría* contenía todo el elenco de conocimientos en esa área del saber. Así se lo había propuesto desde los primeros planteamientos de su magna empresa intelectual. En una carta a su amigo Beeckman del 26/3/1619, Descartes se expresa (AT.X,157):

« [...] Y para no ocultaros nada de lo que es motivo de mi trabajo quisiera publicar no un *Ars Brevis*, como Lulio, sino una ciencia toda nueva, que permitiera resolver en general todos los problemas que pudieran presentarse. [...] Porque ciertos problemas pueden ser resueltos con líneas rectas o círculos, pero otros requieren otras líneas que puedan originarse por el movimiento continuo, [...] Finalmente otros problemas sólo pueden resolverse mediante líneas curvas engendradas por movimientos diferentes y no continuos. Espero poder demostrar qué problemas se resuelven de una manera y cuáles de otra, por lo cual no quedará casi nada por resolver en *Geometría*. ¡Que proyecto tan ambicioso! ¡Apenas concebible! Pero en el oscuro caos de esta ciencia, he podido vislumbrar yo no sé que luz, gracias a la cual las mas espesas tinieblas podrán disiparse.»

La impresión del volumen, tras la concesión del privilegio real, se termina el 8 de junio de 1637, en Leyden, en la imprenta de Jan Maire, tirándose 3000 ejemplares en dos ediciones. Con tal de conocer mejor las opiniones y las críticas, Descartes decidió que en la portada no figurara el nombre del autor. Aun cuando el título fue simplificado quedó en la forma:

“DISCOURS DE LA METHODE pour bien conduire sa raison et chercher la verité dans les sciences. Plus LA DIOPTRIQUE, LES MÉTÉORES ET LA GÉOMÉTRIE, qui sont essais de cette METHODE”

“DISCURSO DEL MÉTODO para conducir bien la razón y buscar la verdad en las ciencias. Además LA DIÓPTRICA, LOS METEOROS y LA GEOMETRÍA que son ensayos de este MÉTODO”.

A lo largo de la correspondencia con el Padre Mersenne Descartes asegura, una y otra vez, que *La Geometría* trata de dar un procedimiento general para resolver todos los problemas que no lo habían sido jamás, por ejemplo el *Problema de Apolonio* y el famoso *Problema de Pappus* que en su formulación general se había resistido a lo largo de toda la historia y que llegó a ser la prueba de fuego de la eficiencia del método cartesiano en Geometría.

Con estos antecedentes en la gestación de su magnífica obra filosófica y matemática, es fácil comprender la importancia que Descartes concede a *La Geometría*, lo que se puede calibrar por algunos de sus escritos de lo que son buena muestra los párrafos siguientes entresacados de su correspondencia y de su obra:

En la carta al Padre Mersenne de diciembre de 1637 Descartes escribe (AT,I, 478):

«Además, lo que he escrito en el segundo libro sobre la naturaleza y las propiedades de las líneas curvas y sobre el método para estudiarlas, está tan lejos de la geometría ordinaria, como lo está la retórica de Cicerón del abc de los chiquillos ...

Ante la sugerencia de que lo que he escrito puede haber sido sacado fácilmente de Vieta, la realidad es que mi tratado es precisamente difícil de comprender porque he intentado no introducir en él nada de lo ya conocido por Vieta o por cualquier otro [...] Comienzo las reglas de mi álgebra con lo que Vieta escribe al final de su libro De emendatione aequationum [...], es decir, que comienzo donde él abandonó.»

En otra carta al Padre Mersenne de 31/3/1638:

«No describo todos los casos posibles, sino que, como los arquitectos que sólo indican lo que se debe hacer, dejando el trabajo manual a los albañiles y carpinteros, [...] He prescindido en mi Geometría de muchas cosas que puedan servir para facilitar la práctica, y lo he hecho deliberadamente, [...] Había previsto que ciertas gentes, que se vanaglorian de saberlo todo, no hubieran dejado de decir que yo no había escrito nada que ellos no supieran, si lo hubiera hecho de forma mas inteligible.»

En una carta a Alphonse Pollot:

«Es un gran honor para mi que os hayáis tomado la molestia de examinar mi Geometría, os guardo uno de los seis ejemplares que destino para los seis primeros que me parezcan que la entienden.»

En una carta al Padre Mersenne de mayo de 1637:

«Tengo que decirle que honestamente creo que hay muy poca gente que pueda entenderla.»

En una carta a Plempius de 3 de octubre de 1637 (AT,I,409):

«La Geometría tendrá un pequeño número de lectores, pues deben ser personas que no solamente estén al corriente de todo lo que se sabe en Geometría y Álgebra, sino que deben ser además laboriosos, ingeniosos y atentos.»

Empieza el *Libro Primero* de *La Geometría* con un auténtico desafío geométrico en el que anuncia las coordenadas (G.AT,VI, 369):

«Todos los problemas de Geometría pueden reducirse fácilmente a términos tales, que no es necesario conocer de antemano más que la longitud de algunas líneas rectas para construirlos.»

En el mismo Libro I de *La Geometría*, tras la construcción geométrica de la solución de las ecuaciones, inmediatamente antes del ataque al problema de Pappus, Descartes escribe:

«[...] Se pueden construir todos los problemas de la geometría ordinaria sin hacer más que lo poco que está comprendido en las cuatro figuras que he explicado.»

En la aplicación del *Análisis* y la *Síntesis* al planteamiento y resolución de las ecuaciones, Descartes indica (G.AT,VI, 374):

«[...] Pero no me detengo a explicar esto con más detalle para no privar a cada uno del placer de aprenderlo por sí mismo, ni impedir el cultivo útil del propio espíritu ejercitándolo, que es, a mi parecer, la principal utilidad que puede obtenerse de esta ciencia, [...].»

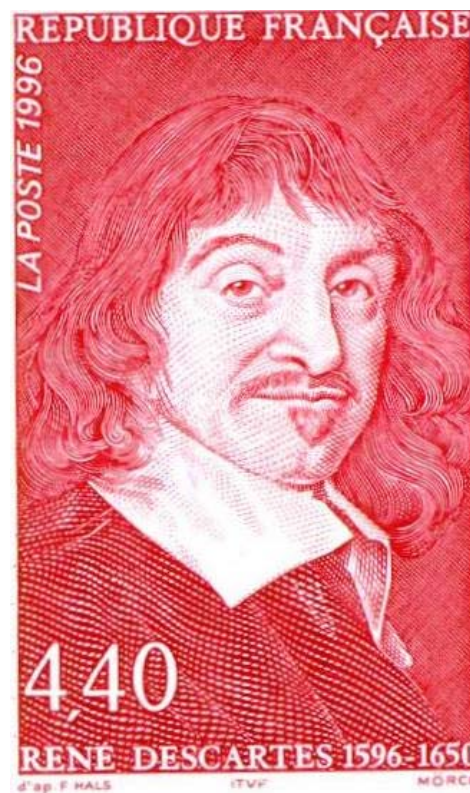
En el problema de la determinación de las rectas normales a una curva, Descartes enfatiza (G.AT,VI, 412-413):

«Para encontrar todas las propiedades de las líneas curvas basta con saber la relación que tienen todos sus puntos con los de las líneas rectas, [...] y conocer la manera de trazar otras líneas que las corten en todos esos puntos en ángulo recto. [...] Y me atrevo a decir que éste es el problema más útil y más general no sólo que yo conozca, sino aun que yo haya anhelado jamás conocer en Geometría.»

La *Geometría* termina con una frase antológica de las que hacen época (G.AT,VI, 485):

«[...] Y yo espero que nuestros descendientes me estarán agradecidos no sólo por las cosas que aquí he explicado, sino también por aquellas que he omitido voluntariamente a fin de dejarles el placer de descubrirlas.»

IMÁGENES DE DESCARTES EN LOS SELLOS DE CORREOS



1. Emitido en Francia el 9 de junio de 1937, en conmemoración del tercer centenario de la publicación de *El Discours sur la Méthode*.
2. Emitido en Mónaco en el 400 aniversario del nacimiento de Descartes.
3. Emitido en Francia en el 400 aniversario del nacimiento de Descartes.

El contenido de *La Geometría*

La Geometría se compone de tres libros bien diferenciados y a la vez muy entrelazados; tiene en la edición original 120 páginas, con 48 figuras de las que son diferentes 30.

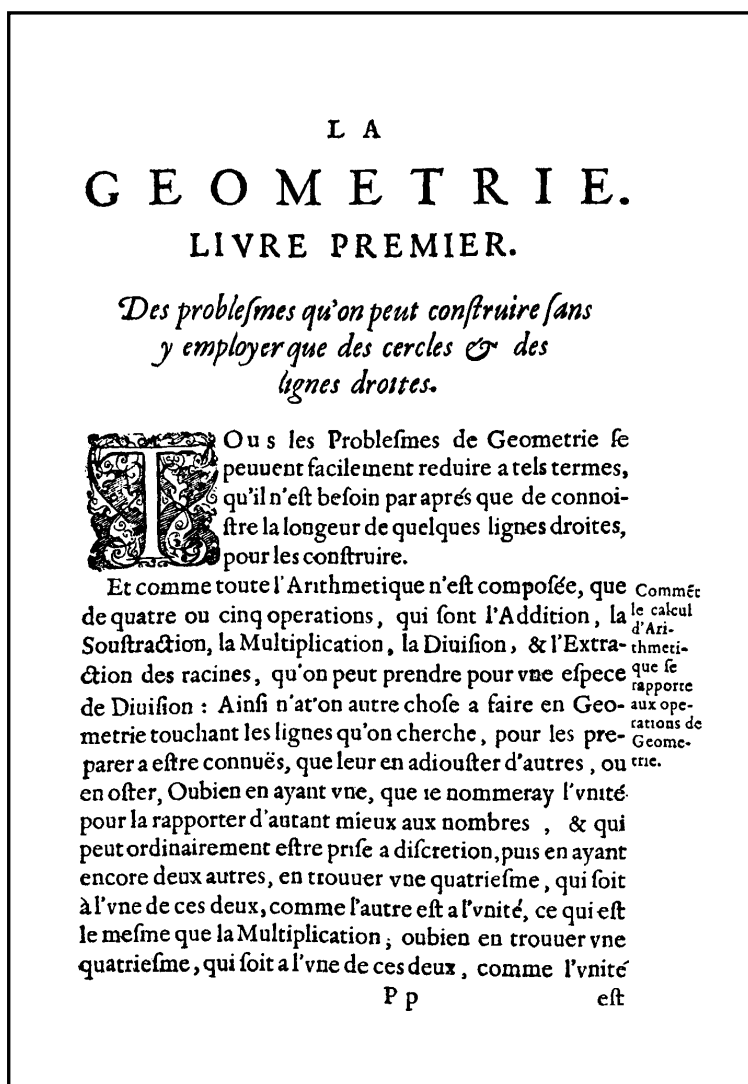
El *Libro Primero* de *La Geometría* trata «*De los Problemas que pueden construirse sin emplear más que círculos y líneas rectas*».

En este libro Descartes fija (basándose siempre en *El Discurso del Método*) la metodología cartesiana que aplicará a la traducción algebraica de los problemas geométricos clásicos, de modo que el libro contiene el núcleo de toda la formulación cartesiana de *La Geometría*, siempre íntimamente ligada al método.

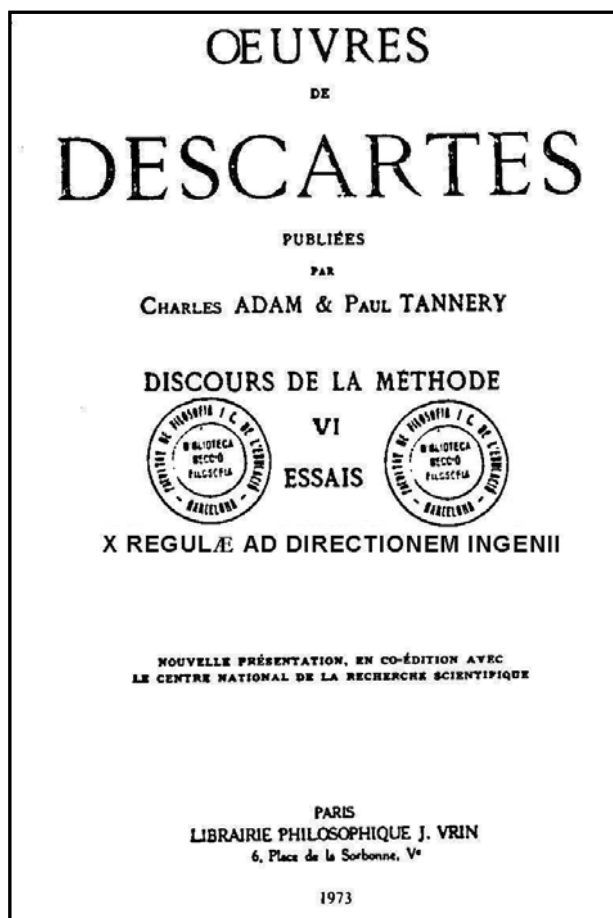
Empieza el libro con una auténtica declaración de principios (G.AT,VI, 369):

«Todos los problemas de Geometría pueden reducirse fácilmente a términos tales, que no es necesario conocer de antemano más que la longitud de algunas líneas rectas para construirlos.»

Así pues, como las líneas rectas son lo que se nos presenta de la forma *más clara y distinta* en el campo de la Geometría, para resolver problemas geométricos, partiremos de ciertas líneas rectas —en realidad de algunos segmentos rectilíneos—; pero como un problema geométrico sólo está completamente resuelto —es decir, geoméricamente resuelto— cuando se ha construido la solución, es preciso dar ésta en términos de segmentos que se deben construir.

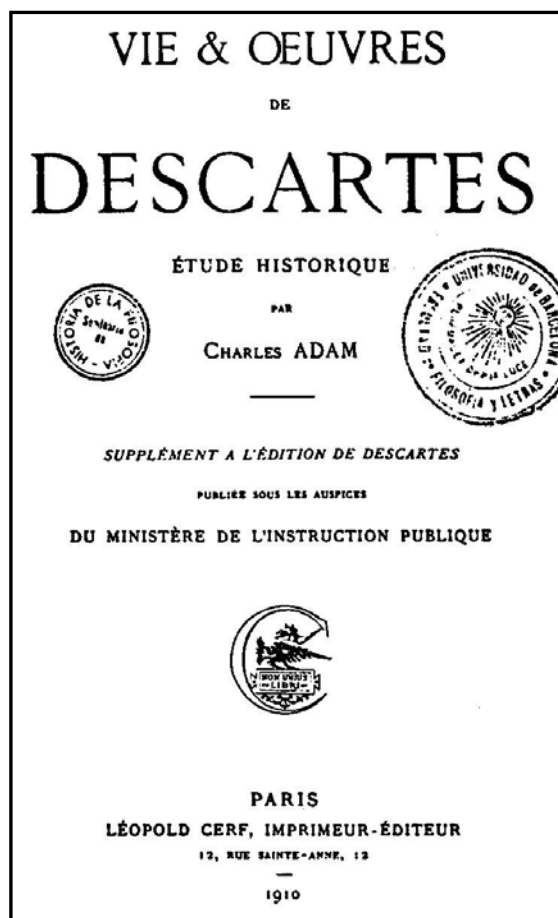


LAS PRINCIPALES REFERENCIAS SOBRE LA OBRA DE DESCARTES



Oeuvres de Descartes. Publiées par C.Adam et P.Tannery. 12 volúmenes. Librairie philosophique J.Vrin. París. 1964-74.

El Volumen VI contiene *El Discours de la Méthode*, *La Géométrie* y los otros Ensayos. El Volumen X contiene las *Regulae ad directionem ingenii* entre otros tratados.

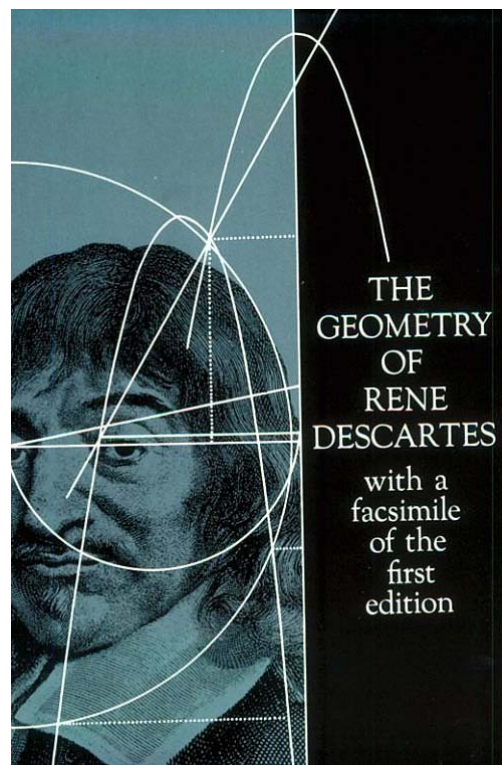
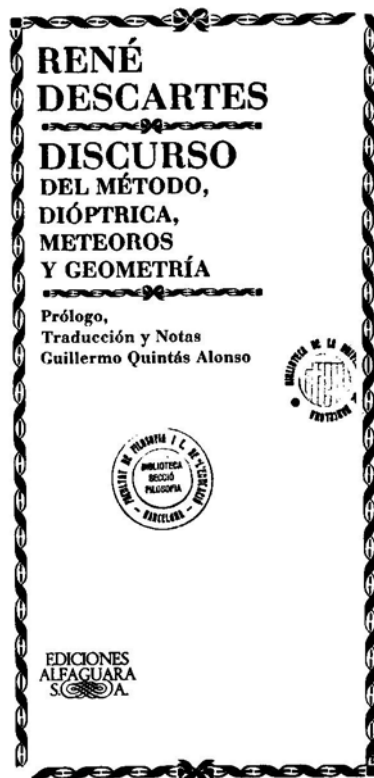


Vie et Oeuvres de Descartes. Étude historique par C.Adam. París, 1910.

Es una obra muy completa sobre la vida, viajes, polémicas y escritos de Descartes: *Metaphysique*, *Le Monde*, *Dioptrique*, *Géométrie*, *Discours de la Méthode*, *Polémiques*, *Méditations*, *Principes de la Philosophie*, *Passions de l'Âme*, ...

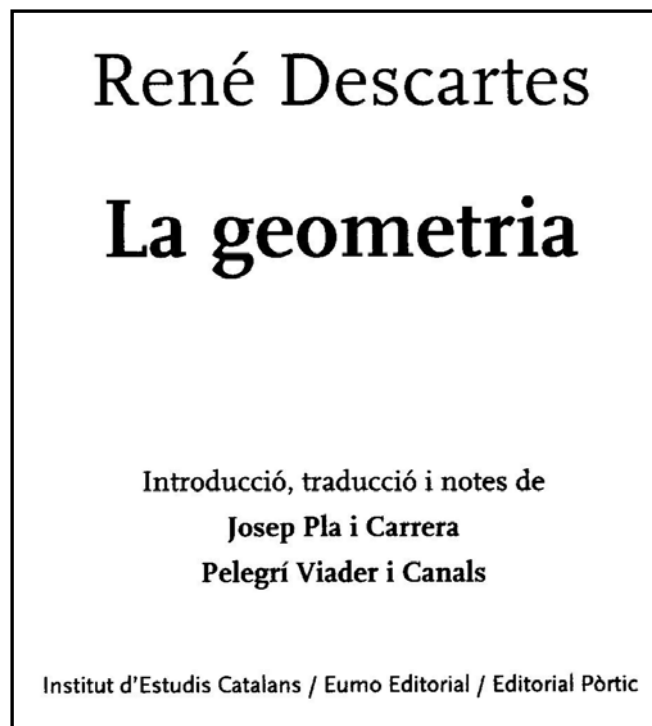
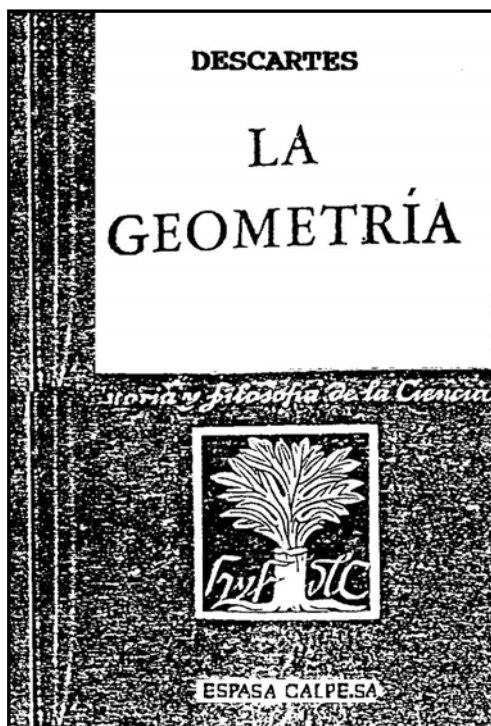
El primer punto consistirá en advertir que las operaciones aritméticas elementales entre segmentos producen siempre un nuevo segmento, por eso en los primeros capítulos Descartes expone los procedimientos ya conocidos para construir geoméricamente las operaciones de la Aritmética: omite las construcciones de la suma y diferencia de segmentos y construye la multiplicación, la división y la extracción de raíces cuadradas, a base de introducir el concepto de segmento unidad. Así pues, Descartes pone de manifiesto que el producto de dos o de tres segmentos es otro segmento, así como que el cociente de dos segmentos también es otro segmento. Esta interpretación geométrico-algebraica de las operaciones aritméticas marca un hito en la Historia de la Matemática porque, por una parte soslaya la limitación pitagórica que la inconmensurabilidad había impuesto a la Geometría griega —la imposibilidad de asignar números a las figuras geométricas ante el fantasma de lo inconmensurable—, y por otra, permite romper con el problema de la homogeneidad dimensional, que había sido, sin duda hasta entonces, otra de las grandes limitaciones de la aplicación del Álgebra a la Geometría. Desde luego así había sido en la Geometría griega, pero incluso en la época de Descartes el producto de dos segmentos era un rectángulo, y el producto de tres segmentos un paralelepípedo, por tanto el producto de más de tres segmentos no tenía sentido y en consecuencia no se llevaba a efecto.

ALGUNAS EDICIONES DE LA GEOMETRÍA DE DESCARTES



Ediciones de *La Geometría de Descartes* utilizadas en este trabajo:

1. DESCARTES. *La Geometría*. Espasa-Calpe, Buenos Aires. 1947.
2. DESCARTES. *The Geometry*. Dover, New York, 1954.
3. DESCARTES. *La Geometría*. Alfaguara, Madrid, 1986.
4. DESCARTES. *La Geometria*. Institut d'Estudis Catalans, Barcelona, 1999.



Tras la construcción geométrica de las operaciones, Descartes pasa a mostrar «*Cómo se llega a las ecuaciones que sirven para resolver los problemas*» y «*Cómo se resuelven*», lo que aplicará a dar solución al *Problema de Pappus* que trata en la forma más general, creando el método analítico de solución y discusión de los problemas matemáticos. Este problema había sido resuelto por Descartes en 1632 cuando Golius se lo propuso para que aplicara sobre él sus nuevos métodos, convirtiéndose en una auténtica piedra de toque que pone a prueba el nuevo método cartesiano, llegando en su resolución mucho más lejos que los geómetras griegos. El enunciado del problema está dado en latín («*cito la versión latina y no la griega con el fin de que pueda ser entendido con más facilidad*», escribe Descartes) y es la reproducción de la traducción de Commandino de *La Colección Matemática* de Pappus de 1589.

El *Libro Segundo* de *La Geometría* titulado «*De la naturaleza de las líneas curvas*» consta de cuatro partes bien diferenciadas:

- a) *La naturaleza geométrica de las líneas curvas*, vinculada sobre todo a dos cuestiones íntimamente ligadas: los compases cartesianos y la teoría de la proporción continua. Mientras en el Libro I, sin olvidar los lugares geométricos, Descartes centra más la atención sobre puntos individualizados, en el Libro II se proyecta sobre el objeto geométrico *Curva*. Descartes mantiene la división clásica griega de los problemas geométricos en *planos*, *sólidos* y *lineales* (que se resuelven con ecuaciones de segundo, tercer y cuarto o mayor grado, respectivamente) y demuestra que los problemas planos se construyen con rectas y circunferencias, los sólidos con secciones cónicas y el resto con líneas más complejas, llamadas por los antiguos *curvas mecánicas*, aunque más correcto sería llamarlas *curvas geométricas*. Descartes tiene el propósito de poner un poco de orden en el estudio de las curvas de la Geometría de los griegos, que según él era un caos completo, secuela de la limitación platónica de la regla y el compás, al no ser capaces de distinguir las diversas clases de curvas por no poder dilucidar la naturaleza de las mismas. Esto es precisamente lo que se propone Descartes, a base de establecer qué curvas son las que se pueden admitir en Geometría.
- b) *El Problema general de Pappus*, ahora tratado con las herramientas precisas para poder clasificar las diversas soluciones de los diversos planteamientos del mismo. Con el método cartesiano el clásico *Problema de Pappus* queda completamente resuelto.
- c) *La construcción y propiedades de tangentes y normales* a una curva geométrica. Una vez concebida y definida, de forma clara y distinta, *la naturaleza geométrica de las líneas curvas*, Descartes introduce uno de los principios básicos de su método: «*para encontrar todas las propiedades de las líneas curvas basta con saber la relación que tienen todos sus puntos con los de las líneas rectas, [...]*», y establece cómo se puede utilizar la expresión algebraica (la ecuación de las curvas) para determinar los elementos geométricos más notables de las curvas (diámetros, ejes, centros, etc.) y, en particular, las normales, líneas cuya consideración y utilidad deriva de los problemas de la reflexión de la luz sobre las superficies curvas, y que literalmente es considerado por Descartes como el más importante problema geométrico que pueda ser concebido.
- d) Finalmente Descartes estudia *los Óvalos* como curvas especiales que responden a consideraciones fijadas de las tangentes o normales. Descartes introduce cuatro amplias familias de curvas nuevas, de las que las cónicas son casos particulares.

El *Libro Tercero* de *La Geometría* trata «*De la construcción de los problemas que son sólidos o más que sólidos*» mediante el estudio de la resolución de ecuaciones, discusión de sus raíces, y relaciones entre los coeficientes. Descartes pretende ofrecer un método de resolución de cualquier ecuación algebraica. En realidad sólo llega a la resolución geométrica de un determinado tipo de ecuaciones de quinto y sexto grado, pero su método quiere ser general. Muestra que una ecuación puede tener tantas raíces como dimensiones tiene el grado (existe «*la posibilidad de imaginar tantas raíces como el grado del polinomio*»), da luego su famosa regla de los signos y adelanta el *Teorema de Ruffini* del factor. Descartes introduce como transformaciones de la variable las traslaciones y las

homotecias (no es el primero, Vieta y Harriot, respectivamente se habían adelantado a ellas), mediante las cuales consigue (como había hecho Vieta con anterioridad), reducir el segundo término y cuando es posible, racionalizar.

Después de fundamentar las operaciones y propiedades algebraicas necesarias, Descartes introduce el simple criterio de divisibilidad sobre el término independiente de la ecuación polinómica (como condición necesaria aunque no suficiente) para obtención de raíces enteras y a partir de aquí ir reduciendo el grado de la ecuación mediante el algoritmo de la división. La existencia de una raíz entera permite caracterizar el problema geométrico inicial que conduce a la ecuación polinómica en cuestión como un *problema plano*, siempre y cuando la raíz sea adecuada para el problema geométrico. Por ejemplo en el caso de ecuaciones cúbicas con raíz entera, el problema es *plano*, ya que tras efectuar la división, obtenemos una ecuación cuadrática, cuyas soluciones, si existen, se obtienen con regla y compás, de acuerdo con lo establecido en el libro I. En caso de ausencia de raíces enteras, se puede afirmar, sin duda alguna, que el problema geométrico inicial es sólido y Descartes establece entonces que sólo hay dos formas de resolver la ecuación mediante la intervención de los clásicos problemas: la *duplicación del cubo* y la *trisección del ángulo*. De hecho, todo problema cúbico es equivalente a uno de estos dos problemas geométricos (G.AT,VI, 471-475). He aquí un nuevo y magnífico éxito del método cartesiano aplicado a la Geometría: las ecuaciones del Álgebra son el reflejo lingüístico de los problemas de la Geometría.

Finalmente, Descartes plantea la siguiente cuestión: si en el caso de ecuaciones cuadráticas, las soluciones venían dadas por segmentos construibles con regla y compás (según el Libro I), es decir, el problema geométrico de donde procedían era *plano*, ¿es posible construir las soluciones de las ecuaciones cúbicas y cuárticas con solución real? Descartes resuelve de forma contundente el problema mediante la intersección de una circunferencia y una parábola convenientemente determinadas por la ecuación que se quiere resolver (G. AT,VI, 464-471).

DESCARTES EN *L'ENCYCLOPÉDIE* DE D'ALEMBERT Y DIDEROT



D'Alembert escribe sobre Descartes en el *Discours Préliminaire de l'Encyclopédie* (Orbis, Barcelona, 1984, pp.84-85):

«Descartes tenía todo lo que se necesitaba para cambiar la faz de la Filosofía: una fuerte imaginación, un espíritu muy consecuente, unos conocimientos procedentes de su interioridad más que de los libros, un gran coraje para combatir los prejuicios y una total independencia intelectual.

Se puede considerar a Descartes como geómetra o como filósofo. Las Matemáticas, a las que parece haberle prestado poca atención, hoy son sin embargo la parte más sólida y menos discutida de su gloria. El Álgebra creada, de alguna forma, por los italianos, prodigiosamente desarrollada por nuestro ilustre Vieta, ha recibido entre las manos de Descartes nuevos enriquecimientos. Uno de los más considerables es su Método de las indeterminadas, artificio muy ingenioso y muy sutil, que luego se ha podido aplicar a un gran número de investigaciones.

Pero lo que ha inmortalizado el nombre de este gran hombre es la aplicación que hizo del Álgebra a la Geometría, una idea de las más vastas y felices que el intelecto humano haya concebido jamás, y que será siempre la llave de los más profundos descubrimientos no solamente en la geometría sublime, sino en todas las ciencias físico-matemáticas.»

La construcción geométrico-algebraica de las operaciones aritméticas

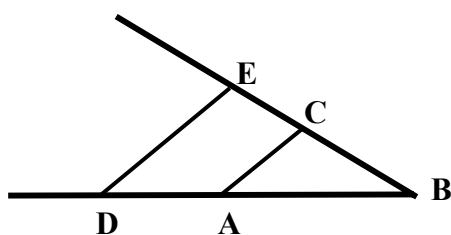
Veamos cómo dados un segmento unidad y dos segmentos a y b , Descartes construye, mediante circunferencias y rectas, el producto $a \cdot b$, el cociente a/b y la raíz cuadrada $\sqrt{a}$, que resultan ser segmentos, porque se obtienen como una cuarta proporcional o como una media proporcional, de modo que establece que las operaciones aritméticas elementales de segmentos dan segmentos que se construyen mediante la regla y el compás.

Cómo el cálculo de la aritmética se relaciona con las operaciones de geometría.

«Y así como la aritmética no comprende más que cuatro o cinco operaciones, que son la adición, la sustracción, la multiplicación, la división y la extracción de raíces, que pueden tomarse como una especie de división, así también no hay otra cosa que hacer en geometría, respecto a las líneas que se buscan, para prepararlas a ser conocidas, que agregarles o quitarles otras, o bien, teniendo una, que llamaré la unidad para relacionarla lo más posible con los números, y que ordinariamente puede ser tomada a discreción, y teniendo luego otras dos, encontrar una cuarta que sea a una de esas dos, como la otra es a la unidad, que es lo mismo que la multiplicación; o bien encontrar una cuarta que sea a una de esas dos como la unidad es a la otra, lo que es lo mismo que la división; o, en fin, encontrar una, dos, o varias medias proporcionales entre la unidad y alguna otra línea, lo que es lo mismo que extraer la raíz cuadrada, o cúbica, etc. Y yo no temeré introducir estos términos de aritmética en la geometría, a fin de hacerme más inteligible». (G.AT,VI, 369-371).

La limitación operacional que trajo la inconmensurabilidad impidió en la Geometría griega asignar a las figuras geométricas números que midieran sus longitudes, áreas y volúmenes. En este ámbito, la raíz cuadrada, por ejemplo, equivalía al problema geométrico de cuadrar un rectángulo, es decir, hallar el lado de un cuadrado equivalente a un rectángulo dado. Descartes rompe aquí también con el pasado y abre una nueva brecha al asignar longitudes a los segmentos (empezando por adoptar un segmento unidad del que había hablado en la Regla XVI, RXVI.AT.X.449), de modo que mientras en la Aritmética las únicas raíces cuadradas exactas que pueden obtenerse son las de los cuadrados perfectos, en Geometría, a partir de Descartes, puede hallarse un segmento que represente exactamente la raíz cuadrada de otro segmento dado, incluso cuando este segmento no sea conmensurable con la unidad.

Veamos la construcción efectiva de Descartes del producto, el cociente y la raíz cuadrada:



La multiplicación.

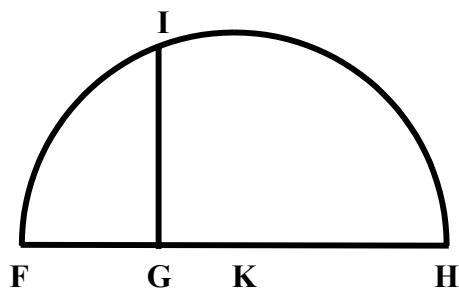
Sea, por ejemplo, AB la unidad, y que deba multiplicarse BD por BC ; no tengo más que unir los puntos A y C , luego trazar DE paralela a CA , y BE es el producto de esta multiplicación.

Como en muchos problemas de *La Geometría*, Descartes aplica el *Teorema de Tales* (Euclides, VI.4) a la semejanza de triángulos. En este caso, como en el siguiente de la división, la semejanza de los triángulos $\triangle BAC$ y $\triangle BDE$, que determinan $BE/BD = BC/BA$.

La división

O bien, si deben dividirse BE por BD , habiendo unido los puntos E y D , se traza AC paralela a DE y BC es el resultado de esa división.

La extracción de la raíz cuadrada



O, si hay que extraer la raíz cuadrada de GH, se le agrega en línea recta FG, que es la unidad y dividiendo FH en dos partes iguales por el punto K, con ese punto como centro se traza el círculo FKH; luego elevando desde el punto G una línea recta, con ángulos rectos sobre FH, hasta I, es GI la raíz buscada. No digo nada aquí de la raíz cúbica, ni de las otras, pues de ellas trataré con más detalle más adelante.

En esta ocasión, Descartes usa el otro Teorema de Tales (Euclides, III.31) y el Teorema de la Altura (Euclides, VI.8).

No hay ninguna novedad en la traducción geométrica de las operaciones algebraicas elementales que hace Descartes pensando en la ulterior resolución de ecuaciones. De hecho sabemos que el *Álgebra Geométrica* de los griegos era una forma geométrico-sintética de resolver ecuaciones, y después de los griegos, los matemáticos árabes disponían de algoritmos de resolución de ecuaciones mediante ciertas construcciones geométricas, que traducían las operaciones algebraicas casi en los mismos términos que Descartes. La gran innovación cartesiana estriba en que Descartes las utiliza para resolver problemas geométricos, es decir, para hacer Geometría mediante el Álgebra y no al revés.



La edición de F. van Schooten, de 1659, de *La Geometría* de Descartes, parte de su largo título es:

Geometria, à Renato Des Cartes : anno 1637 Gallicè edita; postea autem una cum notis / Florimondi de Beavne ... Gallicè conscriptis in Latinam Linguam versa, & commentariis illustrata, operâ atque studio Francisci à Schooten ... -- Amstelaedami : apud Ludovicum & Danielelem Elzevirios, 1659.

En 1644, el matemático Frans van Schooten, editor de *La Geometría* de Descartes y autor de las figuras, graba la imagen *ad vitum* de un caballero con bigote y barba, circundando el retrato con la siguiente inscripción: *Renatus Des Cartes ... Natus Hagae Turorum anno MDXCVI*. Señalan los historiadores que esta inscripción es el único documento que atestigua la fecha de nacimiento de Descartes. El filósofo encontró este retrato «muy bien hecho, aunque la barba y el vestido no se le parecen en nada».

El retrato acompaña a la edición de van Schooten, de 1659, de *La Geometría* de Descartes.

La notación matemática cartesiana

Al comienzo de su trabajo matemático Descartes hace uso, bajo el influjo de Clavius, de la notación cóscica. Pero ya en *Las Reglas para la dirección del espíritu* hay, quizá como secuela de la lectura de Vieta, una primera evolución hacia el simbolismo. En el título de la Regla XVI Descartes pondera el significado y la importancia que tiene una notación sencilla:

«En cuanto a las cosas que no requieren la atención presente de la mente, incluso si son necesarias para la conclusión, es mejor designarlas por medio de signos muy breves que por figuras completas: pues así la memoria no podrá fallar, mientras que además el pensamiento no se distraerá en retenerlas, cuando se dedique a deducir otras» (RXVI.AT.X.454).

Descartes hace alusión al uso de la escritura (RXVI.AT.X.454–455):

«[...] Muy acertadamente el arte inventó la escritura, fiados en cuya ayuda nada en absoluto encomendaremos ya a la memoria, sino que, dejando a la fantasía en su totalidad libre para las ideas presentes, escribiremos en el papel cuanto haya de ser retenido; y ello por medio de signos muy breves [...]. A cuanto haya de ser contemplado para la solución de una dificultad, lo designaremos por medio de un signo único que puede ser formado al capricho de cada cual.»

Más adelante, Descartes concreta el simbolismo a adoptar: (RXVI.AT.X.455):

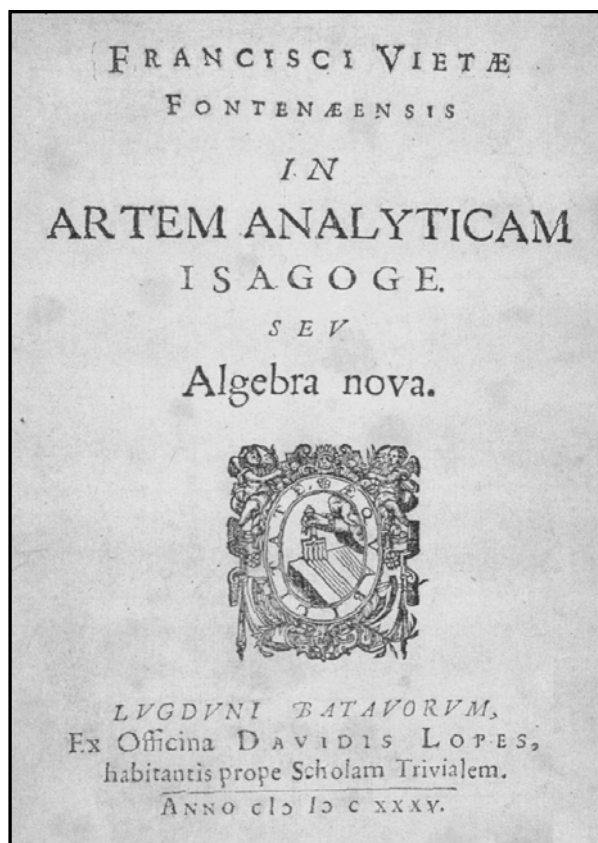
«Mas, para mayor facilidad, utilizaremos las letras a,b,c, etc., para expresar las magnitudes ya conocidas, y las letras A,B,C, etc., para las incógnitas; las haremos preceder frecuentemente de los signos numéricos 1,2,3,4, etc., para expresar su multiplicidad, y les agregaremos también el número de sus relaciones que en ellas habrán de entenderse, así si escribo $2a^3$, será lo mismo que si dijera el duplo de la magnitud denotada por la letra a, que contiene tres relaciones. Con este artificio, no sólo resumiremos muchas palabras, sino que, mostraremos los términos de la dificultad tan puros y desnudos, que sin omitir nada útil, no se encuentre en ellos nada superfluo, que ocupe inútilmente la capacidad del espíritu, mientras la mente se vea obligada a abarcar a un tiempo muchas cosas.»

He aquí la introducción de parámetros e incógnitas como ya había hecho Vieta con anterioridad, aunque Descartes no lo menciona sino que habla de su nueva forma de trabajar frente a los tradicionales calculistas (RXVI.AT.X.455–456, 458):

«A fin de que todo esto se entienda con mayor claridad, ha de observarse, en primer lugar, que los Calculistas acostumbran a designar cada una de las magnitudes por medio de varias unidades o por medio de algún número, y que nosotros en cambio en este lugar hacemos abstracción de los números mismos no menos que poco antes de las figuras geométricas. Hacemos esto tanto para evitar el tedio de un cálculo largo y superfluo, como principalmente para que las partes del objeto que atañe a la naturaleza de la dificultad permanezcan siempre distintas y no sean envueltas por números inútiles: así, si se busca la base de un triángulo rectángulo cuyos lados son 9 y 12, el Calculista dirá que aquella es $\sqrt{225}$ o 15; nosotros, sin embargo en lugar de 9 y 12, pondremos a y b, y encontraremos que la base es $\sqrt{a^2 + b^2}$, y aquellas dos partes a^2 y b^2 , que en el número están confusas, permanecerán distintas.»

«Todo esto [diferenciación entre magnitudes conocidas –parámetros– y magnitudes desconocidas –incógnitas–] lo distinguimos nosotros que buscamos un conocimiento evidente y distinto de las cosas, pero no los Calculistas, que se quedan satisfechos con tal que se les presente el resultado [numérico] buscado, aun cuando no se den cuenta de qué modo éste depende de los datos, en lo cual solo, sin embargo, consiste propiamente la ciencia.»

EL ARTE ANALÍTICA DE VIETA



Portada de la edición de 1635 *In Artem Analyticam Isagoge* de Vieta. La primera edición es de 1591.

La obra de Vieta *In Artem Analyticam Isagoge* está inspirada profundamente en la obra de Diofanto y Pappus. En ella Vieta fundamenta los principios y las reglas del cálculo algebraico literal.

El *Arte Analítica* de Vieta perfecciona considerablemente el Álgebra sincopada de Diofanto y de los matemáticos árabes y renacentistas, e inicia el cálculo literal del Álgebra simbólica mediante la introducción de los parámetros, lo que le permite obtener la solución general de las ecuaciones mediante fórmulas que expresan las incógnitas en función de los parámetros. Ya que los parámetros no permiten obtener un resultado numérico concreto tras las operaciones combinatorias que conducen a la resolución de una ecuación, sino una solución simbólica, Vieta trasciende la *Logística numerosa* ordinaria, aplicada al cálculo con números, y alcanza la *Logística speciosa* que tiene que ver con las especies, entendiendo por éstas cualquier tipo de magnitud, en particular elementos geométricos como ángulos o longitudes. Esto quiere decir que las cantidades simbólicas del *Arte Analítica* al ser interpretadas como magnitudes geométricas y las operaciones simbólicas como procedimientos de construcción geométrica, permiten obtener la solución simbólica de las ecuaciones generales con significado geométrico, de modo que el *Arte Analítica* podía ser aplicado no sólo a los problemas numéricos sino también a problemas geométricos. De esta forma, el *Arte Analítica* de Vieta que tuvo su origen en el *Tesoro del Análisis* de Pappus, revierte sobre éste, de manera que su contenido es traducido al lenguaje simbólico del Arte, es decir, mediante el concurso del Álgebra simbólica, Vieta puede reconstruir, en términos algebraicos, el Análisis Geométrico clásico, lo que prepara el terreno para el advenimiento de la Geometría Analítica de Descartes.

Como explica Vieta:

«La debilidad del antiguo Análisis residía en que se aplicaba sólo a los números, es decir, era una *Logística numerosa*. Pero el Álgebra permite razonar sobre cualquier tipo de magnitud -número, segmento, ángulo, figura,...- de modo que lo que hay que hacer es considerar una *Logística speciosa*, aplicable a cualquier especie de cantidad, que se podrá expresar de una manera genérica mediante letras, tanto si es una magnitud desconocida [incógnita] como conocida [parámetro], ya que no hago diferencia entre ellas. Es más, consideraré las magnitudes desconocidas como si se conocieran y operando según las reglas del Arte Analítica, las desconocidas con las conocidas, obtendré aquellas en función de éstas. He aquí el fundamento de la obtención de soluciones generales de los problemas donde los antiguos sólo obtenían soluciones particulares. »

Por la naturaleza del *Arte Analítica*, el Análisis algebraico-geométrico de Vieta es un estadio intermedio esencial en el camino que arranca del Álgebra Geométrica de los griegos y confluye en la Geometría Analítica de Descartes.

Aunque nunca reconocerá la paternidad de Vieta en algunas de sus ideas fundamentales, Descartes debió inspirarse en él en la introducción del uso de letras para designar no sólo las cantidades desconocidas –incógnitas o variables– sino incluso las conocidas–parámetros–. Así se aplica un magnífico instrumento que permite obtener la solución general de los problemas mediante fórmulas que expresan las incógnitas en función de los parámetros. Como escribe Vieta: «*He aquí el fundamento de la obtención de soluciones generales donde los antiguos sólo daban soluciones particulares*». En este sentido los calculadores, a los que alude Descartes, siguen siendo antiguos, ya que: «*no se dan cuenta de qué modo el resultado depende de los datos*» (RXVI.AT.X.458). En efecto, cuando no se emplean más que números para designar cantidades conocidas, estos números se confunden y se disipan en el curso de las operaciones, de modo que en la obtención de la solución no queda ninguna traza de la línea seguida en las operaciones. Con la introducción de los parámetros de Vieta y Descartes, al contrario, la cantidad desconocida siendo despejada e igualada a las cantidades conocidas, se dispone de un cuadro general con todas las operaciones que es preciso hacer sobre los datos para obtener la solución. Así es posible construir una Teoría general de ecuaciones, de modo que, por ejemplo, se estudia, no ecuaciones cúbicas, sino *la ecuación cúbica*, es decir, la ecuación general de tercer grado expresaba en una incógnita y cuatro parámetros.

Vieta había dado un gran paso hacia el Álgebra simbólica, pero para las potencias permaneció en la tradición indicando *quad* para el cuadrado y *cub* para el cubo, *aeq* para la igualdad y *in* para el producto. Así la ecuación « $x^3 + 5bx^2 - 2cx = d$ », Vieta la expresaría como: «A cub + B 5 in A quad – C plano 2 in A aeq D solido», donde los parámetros B,C y D deben ser tales que cada término de la ecuación sea tridimensional, ya que para Vieta, como herencia griega, las operaciones aritméticas están incluidas todavía en un terreno estrictamente geométrico, que mantiene la homogeneidad, siendo cuadrado una magnitud plana y cubo una magnitud espacial. Como se ve, el simbolismo en Vieta no es total, falta aplicar signos para la igualdad, el producto, las potencias, y otros, que de hecho ya existían en su época. De haberlo hecho, Vieta, por ejemplo, podría haber escrito *todas las ecuaciones cuadráticas* de la forma $BA^2 + CA + D = 0$, donde A es la incógnita y B,C,D, son los parámetros. Así pues, al manejar todavía simplemente abreviaturas el Álgebra de Vieta sigue siendo sincopada. Será Descartes quien introduce en la Regla XVI, como se ha visto, la convención actual para la codificación de los símbolos de incógnitas y potencias, que por primera vez en la Historia de la Matemática serán símbolos artificiales, arbitrarios [«*formado al capricho de cada cual*» (RXVI.AT.X.455)] y no abreviadores. El signo cartesiano, como notación «*no cósmica*», no es considerado como imagen del concepto, sino que es una mera apoyatura operacional para captar y manipular dicho concepto.

El convenio establecido es perfeccionado por Descartes en *La Geometría*, donde en lugar de designar por A,B,C, las incógnitas, utiliza las últimas letras minúsculas x,y,z; y en cuanto a las potencias y raíces Descartes establece (G.AT,VI, 371):

Cómo pueden emplearse letras en geometría.

«*Pero a menudo no hay necesidad de trazar esas líneas sobre el papel y basta con designarlas por ciertas letras, una sola para cada línea. Así, para sumar la línea BD a la GH, designo a la una a y a la otra b y escribo $a + b$; y $a - b$ para restar b de a; y ab para multiplicar la una por la otra; y $\frac{a}{b}$ para dividir a por b; y aa o a^2 para multiplicar a por sí misma; y a^3 para multiplicar otra*

vez por a, y así al infinito; y $\sqrt{a^2 + b^2}$ para extraer la raíz cuadrada de $a^2 + b^2$; y $\sqrt[3]{Ca^3 - b^3 + abb}$ para extraer la raíz cúbica $a^3 - b^3 + abb$ y así otras.

Es de señalar que para a^2 o b^3 u otras expresiones semejantes, yo no concibo ordinariamente mas que líneas simples, aunque para servirme de los nombres usados en álgebra, los designe por cuadrados, cubos, etc.

Por último, a fin de no dejar de recordar los nombres de estas líneas, conviene siempre hacer una anotación separada, a medida que se las coloca o se las cambia, escribiendo, por ejemplo, $AB \propto 1$, es decir AB igual a 1».

LA NOTACIÓN MATEMÁTICA CARTESIANA

LIVRE PREMIER.

gnes sur le papier, & il suffit de les designer par quelques lettres, chascune par vne seule. Comme pour adiouster la ligne B D a G H, ie nomme l'une a & l'autre b , & escriis $a + b$; Et $a - b$, pour soustraire b d' a ; Et ab , pour les multiplier l'une par l'autre; Et $\frac{a}{b}$, pour diuiser a par b ; Et a^2 , ou a^2 , pour multiplier a par soy mesme; Et a^3 , pour le multiplier encore vne fois par a , & ainsi a l'infini; Et $\sqrt{a^2 + b^2}$, pour tirer la racine quarrée d' $a^2 + b^2$; Et $\sqrt[3]{C. a^3 - b^3 + ab^2}$, pour tirer la racine cubique d' $a^3 - b^3 + ab^2$, & ainsi des autres.

Où il est a remarquer que par a^2 ou b^3 ou semblables, ie ne conçois ordinairement que des lignes toutes simples, encore que pour me seruir des noms usités en l'Algebre, ie les nomme des quarrés ou des cubes, &c.

Il est aussi a remarquer que toutes les parties d'une mesme ligne, se doiuent ordinairement exprimer par autant de dimensions l'une que l'autre, lorsque l'unité n'est point déterminée en la question, comme icy a^3 en contient autant qu' abb ou b^3 dont se compose la ligne que j'ay nommée $\sqrt[3]{C. a^3 - b^3 + ab^2}$: mais que ce n'est pas de mesme lorsque l'unité est déterminée, a cause qu'elle peut estre entendue par tout ou il y a trop ou trop peu de dimensions: comme s'il faut tirer la racine cubique de $aaab - b$, il faut penser que la quantité $aaab$ est diuisée vne fois par l'unité, & que l'autre quantité b est multipliée deux fois par la mesme.

Vemos, pues, que Descartes asigna una letra a cada segmento, que de hecho designa (y mide) su longitud. Además, introduce los exponentes para escribir las potencias; utiliza a^3 , a^4 , a^5 , a^6 , etc., para representar las respectivas potencias de a , pero usa indistintamente aa o a^2 para el cuadrado, lo cual tiene su explicación pues mientras que para escribir tanto aa como a^2 se precisan dos signos en las potencias superiores a a^2 hay una gran economía de lenguaje al escribir a^n . Además, vemos que Descartes designa la raíz cúbica $\sqrt[3]{a^3 - b^3 + abb}$ mediante $\sqrt{C.a^3 - b^3 + abb}$ y la igualdad por medio del símbolo $\propto$ que pudiera provenir de las dos primeras letras de la palabra latina *aequare*.

El penúltimo párrafo tiene una gran trascendencia. Con anterioridad a Descartes, geoméricamente sólo tenían sentido las potencias cuadrática a^2 y cúbica a^3 , que representaban respectivamente un cuadrado de lado a y un cubo de arista a . El propio Vieta, con su *ley de los homogéneos*, había permanecido fiel al espíritu del pasado geométrico de los griegos, gobernado por la *Teoría de las Proporciones*, que había liberado a los antiguos del trauma de la inconmensurabilidad. Afortunadamente Descartes eliminó esta reminiscencia clásica en la Regla XVI de las *Regulae* (RXVI.AT.X.457):

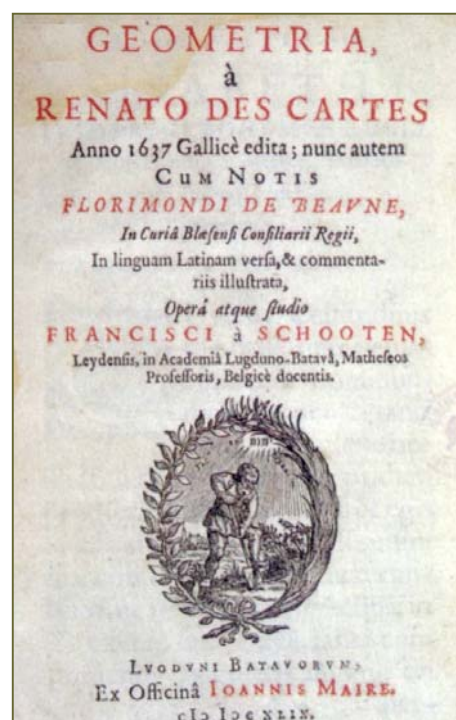
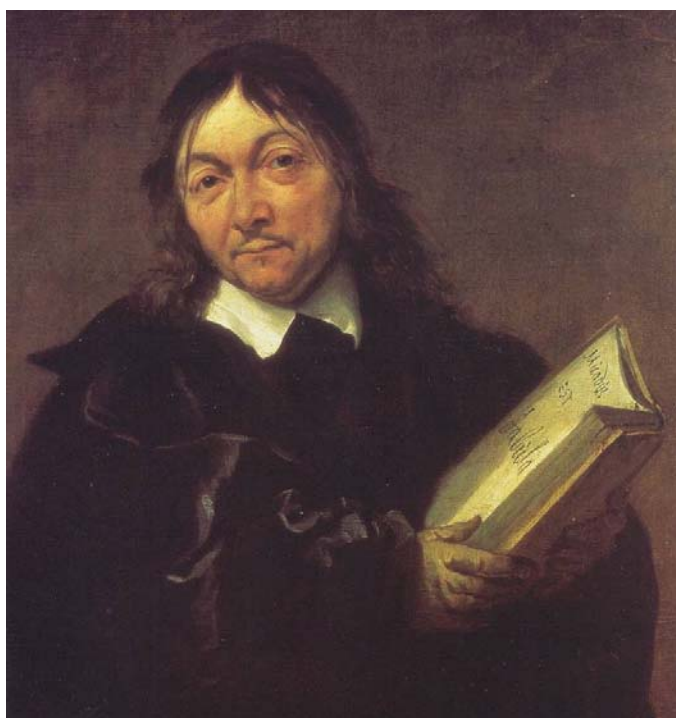
«La misma magnitud aunque, aunque sea llamada cubo o bicuadrado, nunca debe ser propuesta a la imaginación [...] más que como una línea o como una superficie. Por lo tanto es preciso notar sobre todo que la raíz, el cuadrado, el cubo, etc., no son otra cosa que magnitudes en proporción continua, a la que siempre se supone antepuesta aquella unidad asumida [...]; a esta unidad hace referencia inmediatamente la primera proporcional y por medio de una única relación; la segunda, por su parte, por medio de la primera y por lo tanto por medio de dos relaciones; la tercera, mediante la primera y la segunda, y por medio de tres relaciones, etc. Llamaremos, pues, en lo sucesivo, primera proporcional a aquella magnitud que en Álgebra es denominada raíz, segunda proporcional a la que es llamada cuadrado y así las restantes.»

Como en muchas otras cuestiones lo que Descartes aventura en las *Regule* lo consolida en *El Discurso del Método* o en *La Geometría*, como es el caso. En la notación cartesiana introducida en este tercer epígrafe del Libro I de *La Geometría* hay una clave geométrica que estriba en que un segmento de recta es considerado tanto como magnitud geométrica continua como una medida numérica, pero la potencia de una línea recta sigue siendo una línea recta, así que cuadrado y cubo no indicarán magnitudes planas o espaciales, sino la segunda o tercera potencia de un número, de modo que las operaciones aritméticas quedan incluidas en un terreno estrictamente algebraico. En este punto, Descartes rompe con la tradición griega al abandonar el principio de homogeneidad. *La Geometría* da carta de naturaleza a las potencias superiores a^4 , a^5 , a^6 , ..., todas ellas son legítimas líneas. De esta forma se produce una cierta unificación del Álgebra y la Geometría. Descartes habría alcanzado lo que se había propuesto en *El Discurso del Método*, ya aludido anteriormente:

«Había estudiado [...] el Análisis de los antiguos y el Álgebra de los modernos, [...], el primero está siempre tan constreñido a considerar las figuras, que no puede ejercitar el entendimiento sin fatigar mucho la imaginación, y en la última hay que sujetarse tanto a ciertas reglas y cifras, que se ha hecho un arte confuso y oscuro, [...]. Esto fue causa de que pensase que era necesario buscar algún otro método que, reuniendo las ventajas de estos tres, estuviese libre de sus defectos. [...] pensé que, para considerarlas mejor particularmente, debía suponerlas en línea [recta], pues nada hallaba más simple ni que más distintamente pudiera representarse a mi imaginación y a mis sentidos. Y que para retenerlas o comprenderlas era necesario explicarlas mediante algunas cifras lo más cortas que fuera posible; de esta manera tomaría lo mejor del Análisis geométrico y del Álgebra y corregiría los defectos del uno por medio de la otra» (DM.AT,VI, 17-20).

Con sus radicales reformas, Descartes habría superado la esclavitud a la dependencia de las figuras en la Geometría de los antiguos y la falta de transparencia del Álgebra de los modernos. Por si fuera poco, Descartes eliminaba otra limitación de la Geometría griega y del *Arte Analítica* de Vieta, la de las tres dimensiones.

LA NOTACIÓN MATEMÁTICA CARTESIANA



1. Retrato de Descartes por Weenix. Museo de Utrecht.
2. La edición en latín de 1649 de van Schooten (con notas de F. De Beaune) de *La Geometría* de Descartes. Esta edición es la primera separada de *El Discurso del Método* y contribuyó de forma muy considerable a la difusión de la obra de Descartes.

La notación que Descartes introduce en la Regla XVI de las *Regulae* y perfecciona al comienzo de *La Geometría* tuvo un papel esencial en su magno proyecto de reforma que alcanzó a una completa reconstrucción de la Matemática sobre premisas muy sencillas, no geométricas como en Euclides, sino algebraicas, y con unos instrumentos muy modestos, sólo el *Teorema de Tales* y el *Teorema Pitágoras*, como confiesa a dos de sus pupilas, la reina Cristina de Suecia y la Princesa Isabel de Bohemia.

Descartes alude una y otra vez en las *Regulae* y en *La Geometría* a la función que debe cumplir una buena notación, simple y clara, formada de «signos muy breves»: «ejercitar el entendimiento sin fatigar mucho la imaginación» (DM.AT,VI, 17-18), para no distraer el pensamiento en retener cosas, a base de descargar la memoria por medio de la escritura para sólo confiarle lo imprescindible (RXVI.AT.X.458):

«De modo general es preciso observar que jamás debe encomendarse a la memoria ninguna de las cosas que no requieran una continuada atención, si podemos depositarlas en el papel, no sea que un recuerdo superfluo para el conocimiento de un objeto nos prive de alguna parte de nuestro espíritu.»

El simbolismo algebraico, que apuntaba a convertirse en el lenguaje universal traería simplificación, generalización, mecanización y unificación en la notación, entrañando economía de pensamiento y difusión rápida. Después de Descartes, el Álgebra es uno de los más potentes lenguajes creados por el hombre, un instrumento para la expresión breve, intuitiva y mecánica de relaciones enormemente complicadas que puedan tener entre sí objetos abstractos cualesquiera, y en su aplicación a la Geometría, el ingenio que exigía la lectura y comprensión de la obra de Euclides quedaría eliminado y reemplazado por procedimientos algorítmicos automáticos.

Aparte de su ingente contribución al nacimiento de la Geometría Analítica, a Descartes le cabe, pues, el mérito de haber dado los pasos más importantes en la introducción de la moderna notación simbólica de las Matemáticas, de modo que el convenio notacional cartesiano se hizo definitivo. La Geometría, es el primer texto matemático en el que un estudiante actual no encontraría dificultades con la notación.

Análisis y Síntesis: planteamiento y resolución de las ecuaciones

Con las nuevas notaciones y símbolos, Descartes realizó una importante simplificación en el lenguaje matemático. Ahora disponía de una Geometría que al poderse expresar de forma algebraica permitía desarrollar procedimientos para resolver problemas geométricos a base de traducirlos al lenguaje algebraico de las ecuaciones, simplificar éstas y finalmente resolverlas (lo que quiere decir construir las soluciones) mediante lo cual Descartes se propondrá rehacer la Geometría.

Cómo se llega a las ecuaciones que sirven para resolver los problemas

«Así, si se quiere resolver algún problema, debe de antemano considerarse como ya resuelto, y dar nombre a todas las líneas que parecen necesarias para construirlo, tanto a las que son desconocidas como a las otras. Luego, sin considerar ninguna diferencia entre estas líneas conocidas y desconocidas, se debe examinar la dificultad según el orden que se presente como más natural de todos, en la forma como aquellas líneas dependen mutuamente las unas de las otras, hasta que se haya encontrado la manera de expresar una misma cantidad de dos maneras: lo que se denomina una ecuación, pues [el resultado de] los términos de una de esas dos formas son iguales a los de la otra.» (G.AT,VI,372).

He aquí una aplicación directa de los procedimientos del *Análisis* y la *Síntesis* tal como los había descrito Pappus en *El Tesoro del Análisis* del Libro VII de la *Colección Matemática* y tal como lo había aplicado Vieta con la intervención del Álgebra en su *Arte Analítica*. Todo conduce a determinar la ecuación del problema geométrico, es decir, transitar de la Geometría al Álgebra mediante la metodología cartesiana, siguiendo unas pautas que Descartes ya había insinuado en las Reglas XVII–XXI de las *Regulae* :

a) Suponer el problema resuelto.

b) Dar nombre a todos los segmentos que parecen necesarios.

El propio *Análisis* nos ayudará a determinar quiénes son éstos, tanto los conocidos (datos) como los desconocidos (incógnitas) sin considerar ninguna diferencia entre ellos.

Estos dos primeros pasos corresponden al *Análisis* en sentido de Pappus. Ahora examinando el problema, siguiendo un orden basado en la intuición o en el *Análisis* anterior, estableciendo las relaciones que existen entre las diversas segmentos –los conocidos y los desconocidos– hemos de conseguir expresar un mismo segmento por medio de dos expresiones algebraicas diferentes, lo que permite realizar la *Síntesis*, es decir:

c) Determinar la ecuación entre las longitudes conocidas y las desconocidas.

Finalmente para resolver de forma definitiva el problema quedan dos pasos:

d) Resolver la ecuación resultante.

e) Construir geoméricamente la solución.

Al plantearse problemas geométricos en la *Síntesis* se han de obtener soluciones geométricas para cuya construcción el Álgebra será el instrumento analítico esencial.

Así pues, ante un problema geométrico se aplicará todo un protocolo de actuación –el método cartesiano–: se empieza suponiendo el problema resuelto y se consideran las relaciones entre las líneas, lo que lleva al establecimiento de las ecuaciones, es decir, el estudio analítico se complementa con la síntesis algebraica que lleva a la construcción de la solución. El *Análisis* y el Álgebra que están ordenados al estudio y conocimiento de la figura, permiten traducir los datos geométricos de forma que sean tratables por medio del cálculo algebraico; se concluye el problema de Álgebra planteando y resolviendo las ecuaciones y finalmente los resultados obtenidos deben ser traducidos de nuevo al lenguaje geométrico, operación que nos da por fin la construcción de la solución. El Álgebra es un instrumento

que finalmente nos ha de reconducir a la Geometría.

Continúa el texto de Descartes con la primera manifestación irónica de las diversas presentes en *La Geometría* (G.AT,VI, 374):

«[...] Y pueden siempre reducirse así todas las cantidades desconocidas a una sola, cuando el problema puede construirse mediante círculos y líneas rectas, o bien por secciones cónicas o aun por ninguna otra línea que no esté compuesta, sino en uno o dos grados más. Pero no me detengo a explicar esto con más detalle para no privar a cada uno del placer de aprenderlo por sí mismo, ni impedir el cultivo útil del propio espíritu ejercitándolo, que es, a mi parecer, la principal utilidad que puede obtenerse de esta ciencia, [...]»

Enseguida Descartes realiza una caracterización algebraica de los *Problemas Planos*:

Cuáles son los problemas planos.

«Si éste puede ser resuelto por la geometría ordinaria, es decir, sin servirse más que de líneas rectas y circulares trazadas sobre una superficie plana, cuando la última ecuación haya sido enteramente desarrollada, no quedará, al fin, más que un cuadrado desconocido, igual a lo que resulta de la adición, o sustracción, de su raíz multiplicada por alguna cantidad conocida [coeficiente], más alguna otra cantidad también conocida [término independiente]» (G.AT,VI, 374).

Descartes establece aquí una primera relación entre los problemas de construcción y los de clasificación (que tanta importancia tendrá en el Libro II) relacionando claramente un tipo concreto de expresiones algebraicas con los instrumentos que permiten trazar determinadas construcciones. En una primera transferencia de la Geometría al Álgebra, si un problema geométrico lleva a una ecuación cuadrática, será resoluble con regla y compás, pero Descartes trasciende esta obviedad, identificando totalmente una cuestión geométrica con una cuestión algebraica al establecer que cualquier problema geométrico resoluble con regla y compás conduce a una última ecuación que necesariamente es cuadrática.

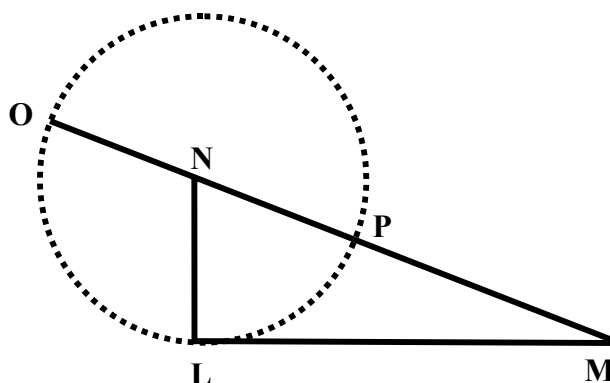
Vamos a ver concretamente cómo resuelve Descartes las ecuaciones cuadráticas que corresponden a los *Problemas Planos* y que son las únicas que Descartes trata en el Libro I.

Cómo se resuelven [las ecuaciones que resultan de los problemas Planos]

(G.AT,VI, 374-376)

«[...] Si se tiene, por ejemplo $z^2 = az + bb$ construyo el triángulo rectángulo NLM, cuyo lado LM es igual a b , raíz cuadrada de la cantidad conocida bb , y el otro LN es $\frac{1}{2}a$, la mitad de la otra cantidad conocida, que está multiplicada por z , que supongo ser la línea desconocida. Luego, prolongando MN, base de ese triángulo, hasta O, de modo que NO sea igual a NL, la línea total OM es z , la línea buscada; ella se expresa:

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$$



Si se tuviera

$$yy = -ay + bb$$

e y fuera la cantidad que debe encontrarse, se construye el mismo triángulo rectángulo NLM y de la base MN se quita NP, igual a NL; el resto PM es y, la raíz buscada. De modo que tengo

$$y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$$

Y lo mismo, si tuviera $x^2 = -ax^2 + b^2$

PM sería x^2 y tendría

$$x = \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$$

y así otros casos.

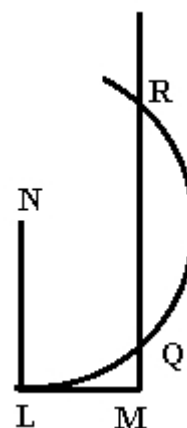
En fin, si tuviera $z^2 = ax - bb$

se hace NL igual a $\frac{1}{2}a$, y LM igual a b, como anteriormente;

luego, en vez de unir los puntos M y N, se traza MQR paralela a LN y trazando un círculo con centro en N y que pase por L la cortará en los puntos Q y R; la línea buscada z es MQ, o bien MR, pues en este caso ella se expresa de dos maneras, a saber:

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$$

$$z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$$



Y si el círculo que tiene su centro en N y pasa por el punto L no corta ni toca la línea recta MQR, no hay ninguna raíz de la ecuación, de manera que puede asegurarse que la construcción del problema propuesto es imposible.

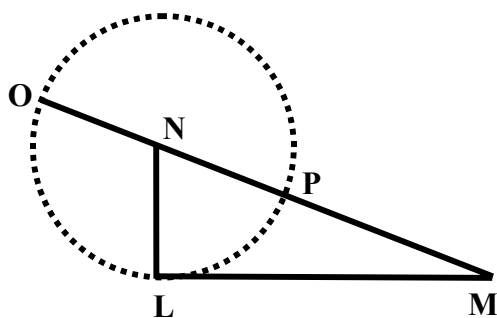
Por otra parte, estas mismas raíces se pueden encontrar por una infinidad de otros medios y he indicado aquí solamente esos muy simples, a fin de mostrar que se pueden construir todos los problemas de la geometría ordinaria, sin hacer más que lo poco que está comprendido en las cuatro figuras que he explicado. No creo que los antiguos lo hayan observado; pues en tal caso ellos no hubieran escrito libros tan voluminosos en que el solo orden de las proposiciones nos muestra que no poseían el verdadero método para resolverlas todas, sino que solamente han recopilado las que habían resuelto.»

Situándose en la tradición, Descartes estudia y resuelve los tres tipos clásicos de ecuaciones $z^2 = az + bb$, $yy = -ay + bb$, $z^2 = ax - bb$, que, como se sabe, antes de Vieta, eran considerados con coeficientes numéricos concretos y positivos, resultando equivalentes a los tres tipos tradicionales de ecuaciones: $z^2 = az + b$, $z^2 + az = b$, $z^2 + b = az$, con a,b positivos, que en el *Álgebra Geométrica* griega tenían su forma particular de resolución, como tenían, asimismo, en la matemática árabe, cada uno de los tipos, su propio algoritmo de resolución. Pues bien, ahora Descartes, manteniendo por esta vez la homogeneidad, nos brinda la resolución geométrica de cada uno de los casos posibles. Para cada caso, siguiendo el algoritmo algebraico de resolución bien conocido, podríamos obtener el valor del segmento solución z expresado por las correspondientes operaciones con radicales, de donde se advierte que todas las operaciones que intervienen son resolubles, a partir de los segmentos dados, a,b, utilizando sólo la regla y el compás. No obstante, Descartes procede de forma

geométrica construyendo para cada caso el segmento solución, por eso no puede considerar todos los tipos de ecuaciones cuadráticas (por ejemplo no estudia la ecuación $z^2+az+b^2=0$ porque no tiene raíces positivas), y de las que resuelve sólo tiene en cuenta las soluciones positivas que son las únicas construybles.

Por otra parte, Descartes dice que «estas mismas raíces se pueden encontrar por una infinidad de otros medios». Y la verdad es que no especifica exactamente cómo obtiene la construcción geométrica del segmento solución si aplicando el *Teorema de Pitágoras* o la invariancia de la potencia de un punto respecto de la circunferencia. La equivalencia de ambas aplicaciones deja la construcción geométrica cartesiana en cierta ambigüedad.

Así en la primera ecuación $z^2=az+bb$, Descartes procede geoméricamente indicando cómo puede construir el segmento de longitud z . Construye un triángulo rectángulo NLM cuyos



catetos están determinados por los coeficientes de la ecuación: $LM=b$, $LN=(1/2)a$ y con centro en N traza una circunferencia de radio $NL=a$ que es cortada por la prolongación de la hipotenusa MN en el punto O, resultando que el segmento OM es la recta buscada z .

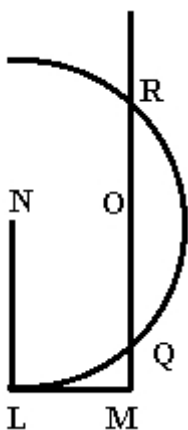
En efecto: $MO=MN+NO$. Pero por el Teorema de Pitágoras $MN = \sqrt{NL^2 + LM^2}$, de modo que sustituyendo cada recta por su longitud

tenemos la expresión algebraica indicada: $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$.

Ahora bien, aplicando la invariancia de la potencia de un punto respecto de la circunferencia (*Euclides*, III.36) se tiene: $MO \cdot MP = ML^2$, es decir, $z \cdot (z-a) = bb$, expresión equivalente a la ecuación dada $z^2=az+bb$.

La construcción geométrica de la solución de la última ecuación $z^2=az-bb$ es un poco más complicada.

Construidos de los elementos geométricos de la figura como indica Descartes, a partir de los segmentos medidos por los coeficientes de la ecuación $NL=(1/2)a$ y $LM=b$, se aplica la invariancia de la potencia de un punto respecto de la circunferencia: $MR \cdot MQ = LM^2$.



Si $z=MR$, tenemos que $MQ=a-z$, y por tanto: $z \cdot (a-z) = b^2$, es decir, $z^2=az-bb$, por tanto el segmento $z=MR$ es una línea solución.

Si $z=MQ$, tenemos que $MR=a-z$, y por tanto: $z \cdot (a-z) = b^2$, es decir, $z^2=az-bb$, por tanto el segmento $z=MR$ es una línea solución.

Ahora si O es el punto medio de QR tenemos:

$$z_1 = MQ = OM - OQ = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$$

$$z_2 = MR = MO + OR = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$$

Descartes construye las dos raíces porque ambas son positivas.

Si MR es tangente al círculo, es decir si $b=(1/2)a$, las raíces son iguales; mientras que si $b > (1/2)a$, la línea MR no cortará al círculo y entonces no hay raíces. Descartes expresa esto en un lenguaje tributario todavía de los geómetras griegos:

«Y si el círculo que tiene su centro en N y pasa por el punto L no corta [no es secante] ni toca [no es tangente] la línea recta MQR, no hay ninguna raíz de la ecuación, de manera que puede asegurarse que la construcción del problema propuesto es imposible.»

Vemos cómo Descartes ha vinculado íntimamente el Álgebra con la Geometría, hasta el punto de extraer conclusiones geométricas de un hecho estrictamente algebraico: si la ecuación no tiene solución el problema geométrico no se puede construir, porque «*encontrar la solución*» es «*construir la línea*». Los principios del método cartesiano aplicados a la Geometría inician los problemas geométricos por un proceso intermedio de escritura algebraica que revierte finalmente sobre la geometría del problema conduciendo a la construcción de la línea solución. Es esta intermediación del Álgebra lo que más se echa de menos en la Geometría griega, por eso después de la resolución constructiva de las ecuaciones, Descartes hace un soberbio alarde de la magnificencia de los métodos de su *Geometría* en contraposición con la precariedad de la Geometría de los griegos. Según él, puede construir todos los problemas de la Geometría ordinaria con las escasas cuatro figuras que ha explicado, mientras que el abstruso orden de las complejas proposiciones de los voluminosos libros de la Geometría griega era una prueba palmaria de que los antiguos no disponían de método. Esta afirmación, además de exagerada, es injusta, porque aunque la Geometría griega no pudo disponer de la claridad, simplicidad, flexibilidad, versatilidad y capacidad algorítmica que proporciona el Álgebra simbólica que manejó Descartes, éste estaba al corriente de las grandes obras de la matemática griega, empezando por *Los Elementos* de Euclides, que es una obra indiscutiblemente metódica, con fundamentos en el método axiomático-deductivo muy diferente del de Descartes, pero tanto o más riguroso que lo que se aplica en *La Geometría*. De hecho la *Aplicación de las Áreas* del Álgebra Geométrica griega de los Libros II y VI de *Los Elementos* de Euclides es un procedimiento metódico de resolución de ecuaciones mediante comparación de áreas. Es más, el método cartesiano tiene su inspiración en el método de *Análisis y Síntesis*, que instaurado por Hipócrates de Quíos y fundamentado por Platón es explicitado por Pappus, uno de los matemáticos griegos más admirados por Descartes.

SELLOS DE DESCARTES EN EL AÑO 2000 DE LAS MATEMÁTICAS



1. Emitido en Granada con motivo del año 2000 de las Matemáticas.
2. Emitido en Sierra Leona con motivo del año 2000 de las Matemáticas.

SÍNTESIS DEL PROGRAMA DE REFORMA CARTESIANA DE LA GEOMETRÍA A TRAVÉS DE LOS TEXTOS DE DESCARTES



Retrato de Descartes como escritor (Biblioteca Nacional de París, 1791).

Ejercitar el entendimiento sin fatigar mucho la imaginación (DM.AT,VI, 17)

- Fundir del Análisis Geométrico de los antiguos (*«siempre tan constreñido a considerar las figuras»*) [DM.AT,VI.17] y el Álgebra de los modernos (*«que se ha hecho un arte confuso y oscuro»*) [DM.AT,VI.17]; *«para buscar otro método que, reuniendo las ventajas de éstos, estuviese libre de sus defectos»* [DM.AT,VI.18].
- Introducir las coordenadas: *«Todos los problemas de Geometría pueden reducirse fácilmente a términos tales, que no es necesario conocer de antemano más que la longitud de algunas líneas rectas para construirlos»* [G.AT,VI, 369].
- Reconstruir de forma geométrico-algebraica las operaciones aritméticas, es decir, mostrar *«cómo el cálculo de la aritmética se relaciona con las operaciones de la geometría»* [G.AT,VI, 369].
- Introducir una revolucionaria simplificación en la notación: *«explicarlas mediante algunas cifras lo más cortas que fuera posible»* [DM.AT,VI,20].
- Indicar *«cómo pueden emplearse letras en geometría»* [G.AT,VI,371].
- Enseñar *«cómo se llega a las ecuaciones que sirven para resolver los problemas»* [G.AT,VI,372]; y *«cómo se resuelven»* [G.AT,VI,374] estas ecuaciones (es decir, cómo se construyen las soluciones).

Mediante estas tareas, Descartes *«tomaría lo mejor del Análisis geométrico y del Álgebra y corregiría los defectos del uno por medio de la otra»* [DM.AT,VI, 20].

Sistemas de referencia. El Problema de Pappus

Hasta aquí, Descartes ha elaborado un potente método analítico-sintético de ataque de los problemas geométricos que utiliza el Álgebra como instrumento algorítmico y con el que se propone no sólo rehacer la Geometría griega sino ir mucho más allá en la resolución de antiguos y nuevos problemas geométricos. Por eso se plantea al final del Libro I el abordaje del famoso *problema de Pappus de las tres o cuatro rectas*, que tan firmemente se había resistido a los geómetras griegos, y que siendo generalizado a $2n-1$, $2n$ rectas campea a lo largo de *La Geometría* de Descartes, de modo que algunos historiadores se atreven a decir que «*Toda La Geometría de Descartes está destinada a la resolución del Problema de Pappus*» o que «*El Problema de Pappus conforma La Geometría de Descartes*».

La profundidad, extensión e inmensa casuística del tratamiento cartesiano del *Problema de Pappus* trasciende de los objetivos de este escrito, por tanto nos ceñiremos a aspectos que incidan sobre los orígenes de la Geometría Analítica, en particular la aparición de los sistemas de referencia y las coordenadas.

Ejemplo tomado de Pappus

(G.AT,VI, 377-380)

«Y esto [la insuficiencia de los métodos de la Geometría griega] *puede verse bien claramente en lo que Pappus ha puesto al principio de su Libro VII, donde después de haberse detenido a citar todo lo que había sido escrito en geometría por los que lo habían precedido, habla finalmente de un problema que, según dice, ni Euclides ni Apolonio habían podido resolver enteramente; he aquí sus propias palabras: [...]*»

Descartes transcribe el enunciado del problema en latín y hace una observación:

«Os ruego que observéis de paso que el escrúpulo que tenían los antiguos en emplear los términos de la aritmética en la geometría, no podía provenir más que de no ver ellos claramente su relación, lo que producía bastante oscuridad y confusión en la forma como se expresaban; [sigue el texto latino].»

Descartes no alcanza a interpretar que los escrúpulos de los que habla respondían a la conformación que dio a la Geometría griega la aparición de las magnitudes inconmensurables que impedía asignar a las figuras geométricas números que midieran sus longitudes, áreas y volúmenes y por tanto los griegos tenían que calcular directamente con las figuras, que se trataban como magnitudes. Así se hacía en el *Álgebra Geométrica* del Libro II de *Los Elementos* de Euclides en la que los números se sustituyen por segmentos de recta y las operaciones entre ellos se llevan a cabo mediante construcciones geométricas pero sin el concurso de Álgebra simbólica porque era inexistente, por lo que las ecuaciones se resolvían estableciendo relaciones que comparaban –a partir del Libro V de *Los Elementos* de Euclides mediante razones– áreas dadas con áreas buscadas o deseadas para la resolución de un problema. En la Geometría griega, los segmentos rectilíneos no tenían longitud ante la eventualidad de la inconmensurabilidad y como consecuencia las «operaciones» con los segmentos daban rectángulos y paralelepípedos, que eran objetos de naturaleza estrictamente geométrica imposibles de confundir con el producto de las longitudes de sus lados, ya que, hasta Diofanto, estaba ausente el sentido aritmético de las operaciones. De ahí las limitaciones del respeto a la homogeneidad y de la acotación tridimensional.

La gran innovación de Descartes es la asignación de una longitud a los segmentos («y yo no temeré introducir estos términos de aritmética en la geometría, a fin de hacerme más inteligible») lo que permite su manipulación algebraica operacional:

«[...] es de señalar que para a^2 o b^3 u otras expresiones semejantes, yo no concibo ordinariamente mas que líneas simples, aunque para servirme de los nombres usados en álgebra, los designe por cuadrados, cubos, etc.» (G.AT,VI, 371),

con base en lo cual Descartes no tiene ningún prejuicio geométrico en hablar en el *Problema de Pappus* del «producto de cuatro líneas rectas, de cinco o de más», es decir, el instrumental cartesiano no sólo permitirá resolver de forma brillante el problema clásico, sino que además propicia su más amplia generalización.

Continúa Descartes escribiendo su propio enunciado del *Problema de Pappus*:

«Así pues, la cuestión que Euclides había empezado a resolver y que Apolonio había proseguido sin que nadie la hubiera terminado, era ésta: Dadas tres, cuatro o más rectas, se trata de encontrar un punto del que se puedan trazar otras tantas líneas rectas, una sobre cada una de las dadas, y haciendo con ellas ángulos dados, y que el rectángulo formado por dos de esas así trazadas desde el punto, tenga una proporción dada con el cuadrado de la tercera, si no hay más que tres; o bien con el rectángulo de las otras dos, si hubiera cuatro; o bien si hay cinco que el paralelepípedo compuesto por tres tenga la proporción dada con el paralelepípedo formado por las dos que restan y por otra línea dada. O bien si hay seis, que el paralelepípedo formado por tres tenga una proporción dada con el paralelepípedo de las otras tres. O bien si hay siete, que lo que se produce multiplicando cuatro la una por la otra, tenga la razón dada con lo que se produce por la multiplicación de las otras tres y además por otra línea dada. O si hay ocho, que el producto de la multiplicación de cuatro tenga la proporción dada con el producto de las otras cuatro. Y así este problema se puede extender a todo número de líneas. Pero, a causa de que hay siempre una infinidad de diversos puntos que pueden satisfacer lo que aquí se pide, se requiere también conocer y trazar la línea sobre la cual deben todos ellos encontrarse; y Pappus dice que cuando no hay más que tres o cuatro líneas rectas dadas, es en una de las tres secciones cónicas, pero él no trata de determinarla ni describirla; ni explicar la línea en que los puntos deben encontrarse cuando el problema está propuesto para un mayor número de líneas. Solamente agrega que los antiguos habían imaginado una, que mostraban ser útil [para la resolución del problema], y aunque parecía la más manifiesta, sin embargo no era la primera. Lo que me ha dado ocasión para ensayar si, por el método de que me valgo, se puede ir tan lejos como ellos fueron.»

Respuesta al problema de Pappus

(G.AT,VI, 380-382)

«He comprendido ante todo, que planteado el problema para tres, cuatro o cinco líneas, se puede siempre encontrar los puntos buscados, por la geometría simple, es decir sin servirse más que de la regla y el compás, ni hacer otra cosa que lo ya dicho; excepto solamente cuando, siendo cinco las líneas, ellas son todas paralelas. ...

.....

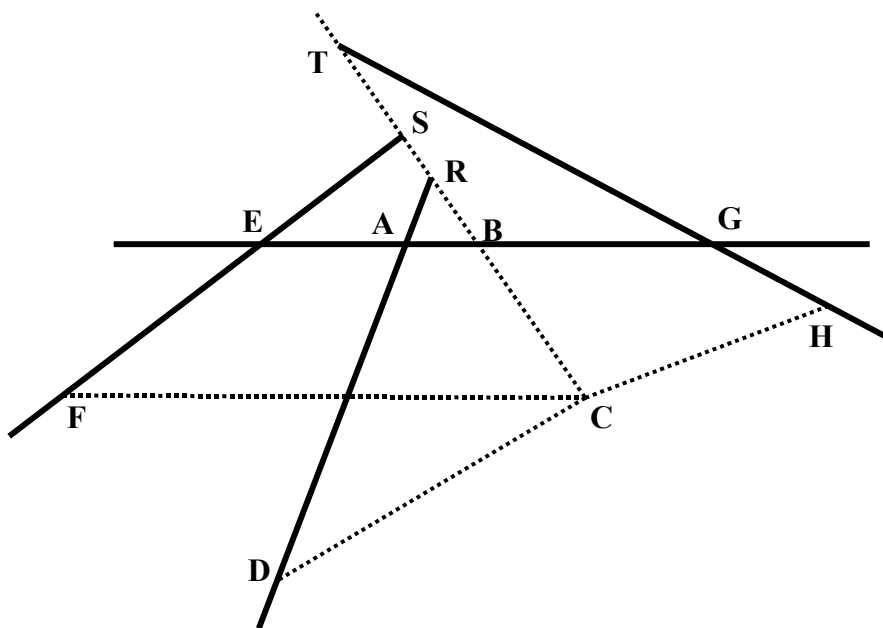
Y he encontrado que cuando no hay más que tres o cuatro líneas dadas, los puntos buscados se encuentran todos no solamente en una de las tres cónicas sino a veces en la circunferencia de un círculo o en una línea recta. ...

.....

De modo que pienso haber satisfecho enteramente lo que Pappus nos dice haber sido buscado por los antiguos, trataré de dar la demostración en pocas palabras: pues ya me cansa tanto escribir.

Cómo deben ponerse los términos para llegar a la ecuación de este ejemplo

«Primeramente yo supongo la cosa como ya hecha y para salir de la confusión de todas esas líneas, considero una de las dadas y una de las que hay que encontrar, por ejemplo AB y CB como las principales y a las cuales trato de referir todas las otras. Sea designado x el segmento de la línea AB comprendido entre los puntos A y B; y CB sea designado y ; y todas las demás líneas se prolonguen hasta que corten a estas dos también prolongadas, si es necesario y si no le son paralelas; como se ve cortan la línea AB en los puntos A. E. G y la línea BC en los puntos R. S. T.»



- se supone el problema resuelto,
- se da nombre a todos los segmentos necesarios para representarlos, tanto los conocidos como los desconocidos,
- se reconstruye algebraicamente el problema hasta obtener una ecuación que permitirá alcanzar la síntesis.

«[...] Considero una de las dadas y una de las que hay que encontrar, por ejemplo AB y CB como las principales y a las cuales trato de referir todas las otras.»

Los segmentos $x = \overline{AB}$, $y = \overline{CD}$ son las «coordenadas» del punto C en el sistema de referencia establecido.

A continuación del texto (G.AT,VI, 383-385), Descartes utiliza el sistema de referencia introducido para obtener, mediante una serie de cálculos elementales aunque prolijos, la expresión de cada uno de los segmentos que dan las distancias (CB, CD, CF, CH). Resultan ser todas ellas combinaciones afines (diríamos hoy) de «las coordenadas» (x,y) del punto C, es decir, de la forma $Ax+By+C$, donde A, B, C, son cantidades no nulas, salvo cuando hay relaciones de paralelismo:

«Se ve así que cualquiera que sea el número de líneas dadas, todas las líneas trazadas desde C, que forman ángulos dados, conforme al enunciado, se pueden siempre expresar, cada una por tres términos de los que uno está compuesto por la cantidad desconocida y multiplicada o dividida por alguna otra conocida, y la otra, de la cantidad desconocida x, también multiplicada o dividida por alguna otra conocida y la tercera, de una cantidad toda conocida.»

Además se ve que multiplicando varias de estas líneas entre sí, las cantidades x e y que se encuentran en el producto, no pueden tener cada una más que tantas dimensiones como líneas haya.»

Así pues, aunque Descartes no lo explicita, en el caso de tres o cuatro rectas el problema equivaldría a una ecuación cuadrática de la forma: $Ax^2+Bxy+Cy^2+dx+ey+f=0$. De esta forma aparecerían por primera vez las curvas como lugares geométricos definidos por ecuaciones, en el umbral del Libro II de *La Geometría*.

Utilizando métodos de la Geometría Analítica moderna, en particular la forma normal de la ecuación de la recta, podemos resolver fácilmente el problema de tres líneas, por ejemplo, encontrando que el lugar geométrico es una cónica. Sean $a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$, $a_3x+b_3y+c_3=0$ las ecuaciones de las rectas, y α_1 , α_2 , α_3 , los ángulos que dan las direcciones sobre las que se deben medir las distancias. El lugar geométrico del punto C(x,y) viene dado por la ecuación:

$$\frac{(a_1x+b_1y+c_1)^2}{(a_1^2+b_1^2)\text{sen}^2\alpha_1} = K \frac{(a_2x+b_2y+c_2)^2}{\sqrt{(a_2^2+b_2^2)}\text{sen}\alpha_2} \cdot \frac{(a_3x+b_3y+c_3)^2}{\sqrt{(a_3^2+b_3^2)}\text{sen}\alpha_3}$$

Sigue el texto de Descartes demostrando que si lo que buscamos es un solo punto (para el problema de menos de cinco rectas) el problema es plano, ya casi al final del Libro I:

Cómo se encuentra que este problema es plano cuando no está propuesto para más de cinco líneas

(G.AT,VI, 385-387)

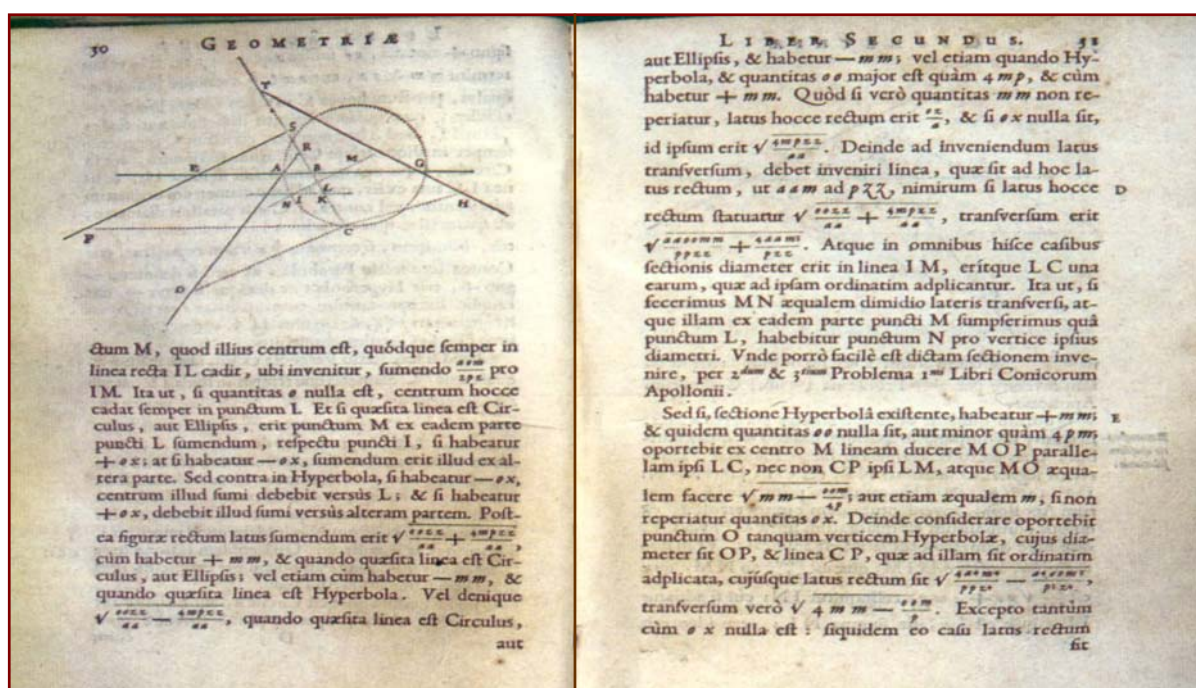
«Además, a causa de que para determinar el punto C no hay más que una sola condición requerida [la de la igualdad de las multiplicaciones de líneas], puede tomarse a discreción una de estas cantidades desconocidas x o y, y buscar la otra por la ecuación, en la cual es evidente que cuando el problema no está propuesto para más de cinco líneas, la cantidad x que no es utilizada para la expresión de la primera de las líneas nunca puede tener más de dos dimensiones. De modo que tomando y como una cantidad conocida tendremos

$$xx = + o - ax + o - bb \quad [x^2 = \pm ax \pm b^2]$$

y así se podrá encontrar la cantidad x con la regla y el compás de la manera ya explicada. Lo mismo tomando sucesivamente infinitos valores para la línea y , podemos hallar otros tantos para la línea x ; y así se tendrá una infinidad de diversos puntos tales como el que se ha señalado con C , por medio de los cuales se describirá la línea curva pedida.»

Nuevamente debemos señalar aquí otro de los puntos de mayor interés, para nosotros, de *La Geometría* de Descartes: una aproximación al concepto de función a través de la expresión analítica de una ecuación. Por ejemplo para cuatro rectas la consideración de las coordenadas del punto $C=(x,y)$, nos lleva a una ecuación polinómica de segundo grado $F(x,y)=0$, que representa una infinidad de pares (x,y) que satisfacen el problema de las cuatro rectas. Tal ecuación es una expresión matemática bien definida que depende de dos variables x , y , de modo que conociendo una de ellas se puede hallar rigurosamente la otra (tras la resolución algebraica de una ecuación de lo que Descartes se ocupará, en el Libro III de *La Geometría*, para grados superiores), lo que equivale a la determinación geométrica del punto C . Así pues, el conocimiento de la ecuación permite conocer los puntos de la curva. Todavía no hay una identificación de la curva con la ecuación, Descartes sólo ha introducido el concepto de curva definida por puntos y esperará al Libro II de *La Geometría* para estudiar ampliamente el problema y establecer cuáles son las razones geométricas que permiten considerar una expresión como una representación de una curva.

EL PROBLEMA DE PAPPUS



El Problema de Pappus. Edición latina de van Schooten de *La Geometría* de Descartes, 1659.

El Problema de Pappus -llamado en su enunciado más sencillo *lugar de tres o cuatro rectas*-, es una de las cuestiones más importantes de toda la Historia de la Geometría, por ser la piedra de toque de aplicación de los diversos métodos y técnicas geométricas. Planteado por los geómetras griegos a partir de Euclides, estudiado por Apolonio y Pappus, su dificultad desbordaba, siglo tras siglo, las posibilidades del Análisis geométrico griego. Campeando a lo largo de *La Geometría*, como si fuera su punto de inspiración, casi como un reto a alcanzar, será Descartes quien lo resuelva de forma brillante y general poniendo de manifiesto la potencia de unos métodos analíticos, que en el curso de los años se convertirán en la esencia de la Geometría Analítica.

Las rectas normales a una curva. El Método del círculo

Descartes desarrolla en el Libro II de La Geometría (G.AT,VI, 412-423) un método para el trazado de las tangentes a las líneas curvas –el llamado «*método del círculo*»–, mediante la construcción previa de la recta normal. Es sin duda uno de los más significativos problemas de aplicación del método cartesiano, con el que, además, Descartes participa e interviene, a través de su celebre polémica con Fermat, en el ámbito matemático de la primera parte del siglo XVII, muy ocupado en la resolución del problema del trazado de las tangentes a las líneas curvas.

Una vez concebida y definida en la primera parte del Libro II, de forma clara y distinta, *la naturaleza geométrica de las líneas curvas*, Descartes introduce uno de los principios básicos de su método ponderando su importancia en la resolución de los problemas sobre curvas:

Para encontrar todas las propiedades de las líneas curvas basta con saber la relación que tienen todos sus puntos con los de las líneas rectas, y la manera de trazar otras líneas que las corten en todos esos puntos en ángulo recto.

(G.AT,VI, 412-413)

«Luego con sólo saber la relación que tienen todos los puntos de una línea curva con todos los de una línea recta, en la forma que he explicado, es fácil también conocer la relación que ellos tienen con todos los otros puntos y líneas dadas; y, por lo tanto, conocer los diámetros, los ejes, los centros, y otras líneas o puntos que tengan con la línea curva alguna relación particular, o más simple que otros; y, de ahí imaginar diversos modos de describirlas, y elegir los más fáciles. Y también, con sólo esto, se puede aun, encontrar casi todo lo que puede ser determinado respecto a la medida del espacio que abarcan, sin que haya necesidad de que yo me extienda más. Y, por último, en lo que respecta a todas las otras propiedades que pueden atribuirse a las líneas curvas, ellas no dependen más que de la magnitud de los ángulos que ellas forman con otras líneas. Pero, cuando puedan trazarse líneas rectas que las cortan en ángulo recto [normales], en los puntos en que se encuentran con aquéllas con las que forman los ángulos que se quieren medir, o, lo que aquí tomo como igual, en que ellas cortan sus contingentes [tangentes], la magnitud de esos ángulos no es más difícil de encontrar que si ellos estuvieran comprendidos entre dos líneas rectas. Creo por esto haber dado aquí todo lo que se requiere para los elementos de la líneas curvas, cuando haya expuesto la manera general de trazar líneas rectas que las corten en ángulos rectos en los puntos [de las curvas] que de ellas se elijan. Y me atrevo a decir que éste es el problema más útil y más general no sólo que yo conozca, sino aun que yo haya anhelado jamás conocer en Geometría.»

Descartes determina que «*para encontrar todas las propiedades de las líneas curvas basta con saber la relación que tienen todos sus puntos con los de las líneas rectas*», descrita por medio de una expresión –que es la ecuación de la curva–, y establece cómo se puede utilizar esta expresión algebraica para encontrar los elementos geométricos más notables de las curvas (diámetros, ejes, centros, etc.) y, en particular, las normales y tangentes. Con ello, Descartes enuncia uno de los principios fundamentales de la llamada Geometría Analítica: el conocimiento de la relación que liga las coordenadas de los puntos –los segmentos o «*las líneas rectas*» a las que alude– de una curva, es decir, la ecuación de la curva, es un elemento esencial para dilucidar y desentrañar las propiedades y elementos de la curva. La ecuación de la curva realiza un tránsito de la Geometría al Álgebra, que, por su carácter operacional, permite, realizando cálculos y en particular resolviendo ecuaciones, regresar a la Geometría, para encontrar y solucionar cuestiones geométricas, de modo que se fija una correspondencia entre las propiedades algebraicas de la ecuación y las

propiedades geométricas de la curva asociada. Como consecuencia, la tarea de probar un teorema en Geometría se traslada de forma muy eficiente a probarlo en Álgebra y, además, ésta se convierte en un poderoso instrumento de investigación geométrica. Pues bien, en este lugar, Descartes aplica toda esta filosofía geométrico-algebraica a encontrar las rectas normales de las líneas curvas.

De pasada Descartes define el ángulo entre dos curvas en un punto como el ángulo que forman las normales en ese punto, además, añade de soslayo la frase (G.AT,VI, 413):

«[...] Con sólo esto, se puede aun, encontrar casi todo lo que puede ser determinado respecto a la medida del espacio que abarcan»,

de modo que el asunto se podría aplicar al cálculo de áreas determinadas por curvas de las que se conoce la ecuación, es decir, al otro problema candente en los círculos matemáticos de la primera parte del siglo XVII, el cálculo de cuadraturas, problema al que Descartes no presta atención alguna en su obra matemática.

ESCENAS DE LA VIDA DE DESCARTES



Escenas de la vida de Descartes, de C.P.Marillier. Grabado del siglo XVIII.

Este grabado muestra algunos hechos importantes de la vida de Descartes:

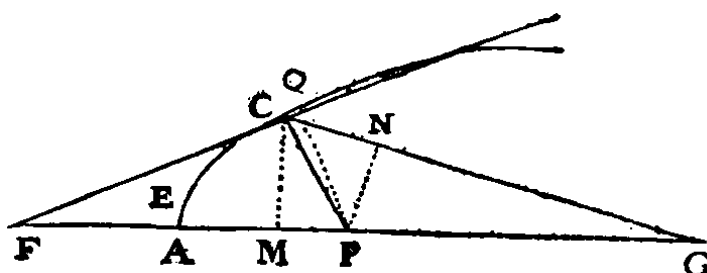
1. Izquierda-arriba: muerte de la hija ilegítima del filósofo, Francine, el 7 de setiembre de 1640.
2. Izquierda-abajo: episodio de la esgrima con los marineros del río Elba que querían desvalijarle (1621).
3. Arriba-derecha: Descartes imparte lecciones de Filosofía a la reina Cristina de Suecia (1649).
4. Abajo-derecha: Contemplando un cartel con un problema en Breda (Holanda). Encuentro con Beeckman (1618).

A continuación, Descartes entra directamente en el problema. Curiosamente utiliza la notación anterior xx para indicar x^2 , en cambio adopta la notación potencial x^n para el resto de las potencias. Transcribiremos el texto de Descartes utilizando una notación uniforme x^n para todas las potencias:

Manera general de encontrar líneas rectas que corten las curvas dadas o sus tangentes, formando ángulos rectos.

(G.AT,VI, 413-414).

«Sea CE la línea curva y que deba trazarse una recta por el punto C que forma con ella ángulos rectos.



Supongamos que la cosa está hecha y que la línea buscada es CP, que prolongo hasta el punto P en que encuentra a la línea recta GA que supongo ser aquella a cuyos puntos se refieren todos los de la línea CE; de manera que haciendo MA o CB=y, y CM o BA=x, hay alguna ecuación que explica la relación que existe entre x e y [el punto B no figura en el dibujo; guiándose por las siguientes figuras, se obtendría como intersección de la perpendicular a AM por A y la paralela a AM por C].

Luego haciendo $PC=s$, $PA=v$, o bien $PM=v-y$, por el triángulo rectángulo PMC obtengo s^2 , que es el cuadrado de la base, igual a $x^2+v^2-2vy+y^2$, que son los cuadrados de los dos lados; es decir que tengo

$$x = \sqrt{s^2 - v^2 + 2vy - y^2}$$

o bien

$$y = v + \sqrt{s^2 - x^2}$$

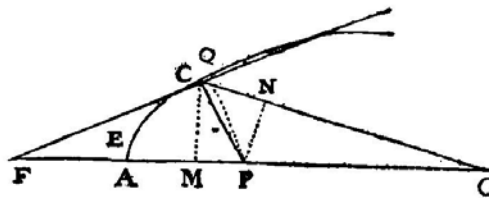
y por medio de esta ecuación, saco de la otra ecuación que da la relación que tienen todos los puntos de la curva CE con los de la recta GA [la ecuación de la curva], una de las dos cantidades indeterminadas x o y ; lo que es fácil de hacer poniendo $\sqrt{s^2 - v^2} + 2vy - y^2$ en lugar de x , y el cuadrado de esta suma en lugar de x^2 , y su cubo en lugar de x^3 ; y así los otros términos si es x que yo deseo sacar; o bien, si es y , poniendo en su lugar $v + \sqrt{s^2 - x^2}$; y el cuadrado o el cubo, etc. De modo que quede siempre según esto, una ecuación en la cual no hay más que una sola cantidad indeterminada x o y .

EL MÉTODO DEL CÍRCULO EN LA GEOMETRÍA DE DESCARTES

LA GEOMETRIE.

tels de leurs poins qu'on voudra choisir. Et i'ose dire que c'est cecy le problême le plus vrile, & le plus general non seulement que ie sçache, mais même que i'aye jamais desiré de sçavoir en Geometrie.

Facon
generale
pour
trouver
des lignes
droites,
qui coup-
pent les
courbes
données,
ou leurs
contin-
gentes, a
angles
droits.



Soit C E
la ligne courbe,
& qu'il faille ti-
rer vne ligne
droite par le
point C, qui fa-

ce avec elle des angles droits. Je suppose la chose desia faite, & que la ligne cherchée est C P, laquelle ie prolonge iusques au point P, ou elle rencontre la ligne droite G A, que ie suppose estre celle aux poins de laquelle on rapporte tous ceux de la ligne C E : en sorte que faisant M A ou C B $\propto y$, & C M, ou B A $\propto x$, iay quelque equation, qui explique le rapport, qui est entre x & y . Puis ie fais P C $\propto s$, & P A $\propto v$, ou P M $\propto v - y$, & a cause du triangle rectangle P M C iay ss , qui est le quar-
ré de la baze esgal à $xx + vv - 2vy + yy$, qui sont les quarrés des deux costés. c'est a dire iay $x \propto \sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$, ou bien $y \propto v + \sqrt{ss - xx}$, & par le moyen de cete equation, i'oste de l'autre equation qui m'explique le rapport qu'ont tous les poins de la courbe C E a ceux de la droite G A, l'une des deux quantités indeterminées x ou y . ce qui est aysé a faire en mettant partout $\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$ au lieu d' x , & le quarré de cete somme au lieu d' xx , & son cube au lieu d' x^3 , & ainsi des autres, si c'est x que ie veuille oster; ou-

Página de la edición de 1637 de *La Geometría* de Descartes relativa al trazado de rectas normales a las curva -*método del círculo*- donde Descartes aplica uno de los Principios fundamentales de la Geometría Analítica (G.AT,VI, 412):

«Para encontrar todas las propiedades de las líneas curvas basta con saber la relación que tienen todos sus puntos con los de las líneas rectas»

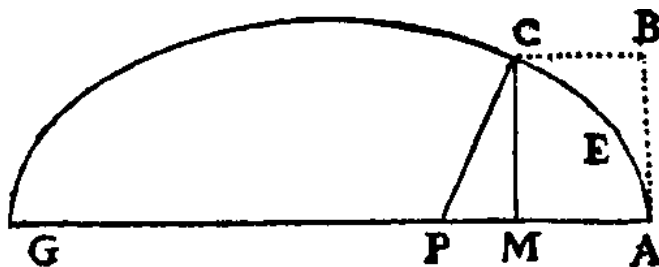
Esta frase contiene uno de los principios más importantes de la Historia de la Matemática, que instauro los fundamentos de la Geometría Analítica. La relación que liga los segmentos o «*las líneas rectas*» que hacen la función de «*coordenadas*» de los puntos de una curva, es decir, la ecuación de la curva, permite conocer las propiedades y los elementos característicos de la curva. La ecuación de la curva establece, pues, una correspondencia entre las propiedades algebraicas de la ecuación y las propiedades geométricas de la curva asociada. De esta forma la resolución de un problema de Geometría se traslada de forma muy eficaz a resolverlo en Álgebra y, además, ésta se convierte en un poderoso instrumento de investigación geométrica.

A continuación, Descartes aplica el método desarrollado a la elipse (G.AT,VI, 414):

Si fuese CE una elipse y MA el segmento de su diámetro [eje] al cual corresponde CM, y siendo r su lado recto y q el transverso se tiene, por el teorema 13 del Libro I de Apolonio:

$$x^2 = ry - \frac{r}{q}y^2,$$

[ecuación de la elipse referida a ejes oblicuos, siendo uno de ellos el diámetro y el otro la tangente en su extremo]



de donde sustituyendo x^2 , queda:

$$s^2 - v^2 + 2vy - y^2 = ry - \frac{r}{q}y^2$$

o bien

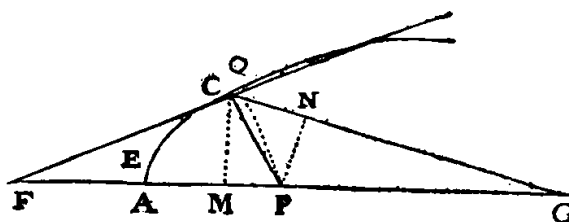
$$y^2 + \frac{qry - 2qvy + qvv - qs^2}{q - r} \text{ igual a cero.}$$

pues mejor, en este lugar, considerar así en conjunto toda la suma que hacer una parte igual a otra.»

Dada la curva CE de eje AG y vértice A, Descartes se plantea trazar la normal en el punto C, para lo cual debe encontrar un punto P sobre el eje AG que al trazar el segmento PC nos de la normal. De acuerdo con la metodología cartesiana, comienza el análisis del problema:

a) se considera resuelto, y b) se da nombre a los todos los segmentos que parecen necesarios: MA = y, CM = x, PC = s, PA = v.

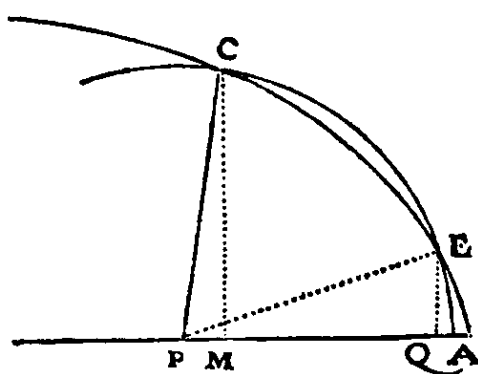
En la síntesis se indica que «[...] Hay alguna ecuación que explica la relación que existe entre x e y», es decir, la ecuación de la curva.



Ahora Descartes considera la circunferencia de centro el punto P y radio el segmento PC, que cortará a la curva en algunos puntos según la naturaleza de la curva. Todavía en el ámbito geométrico del problema, Descartes intuye que el segmento PC será la normal si la circunferencia es tangente a la curva en el punto C.

Descartes prosigue realizando para la parábola cálculos análogos a los de la elipse, tras lo cual vuelve al problema general en una forma que justifica que a su regla se le denomine «método del círculo» (G.AT,VI, 417):

«Ahora, después de encontrada una ecuación así, en lugar de utilizarla para conocer las otras cantidades x o y , que son ya dadas, puesto que el punto C es dado, se la debe emplear para encontrar v o s que determinan el punto P pedido. Y, a este efecto se debe considerar que si ese punto P es el punto que deseamos encontrar, el círculo del cual es centro y que pasa por el punto C , tocará a la línea curva CE sin cortarla; pero si el punto P está ya sea más próximo o más alejado del punto A de lo debido, ese círculo cortará a la curva no sólo en el punto C , sino necesariamente en algún otro. Debe también considerarse que cuando este círculo corta la línea curva CE , la ecuación por la cual se busca la cantidad x o y , o alguna semejante, suponiendo PA y PC conocidas, contiene necesariamente dos raíces, que



son desiguales. Pues por ejemplo, si este círculo corta a la curva en los puntos C y E , trazando EQ paralela a CM , los nombres de las cantidades indeterminadas x e y convendrán igualmente a las líneas EQ y QA que a CM y MA , pues PE es igual a PC por ser del círculo; si bien, buscando las líneas EQ y QA por PE y PA que se suponen dadas, se tendrá la misma ecuación que si se buscara CM y MA por PC y PA , de lo que se deduce, evidentemente, que el valor de x o de y , o de cualquier otra cantidad que se suponga, será doble en esta ecuación, es decir que habrá dos raíces desiguales entre sí, de las que una será CM y la otra EQ , si es x que se busca; o bien una será MA y la otra QA , si es y ; y así las otras. Es cierto que si el punto E no se encuentra del mismo lado de la curva que el punto C , no habrá más que una de estas raíces que sea verdadera y la otra será opuesta o menor que cero; pero cuanto más próximos estén estos dos puntos el uno del otro, tanto menor diferencia habrá entre las dos raíces; y, ellas serán enteramente iguales, si ellos están juntos en uno, es decir si el círculo que pasa por C toca la curva CE sin llegar a cortarla.

Además, debe considerarse que cuando hay dos raíces iguales en una ecuación, ella tiene necesariamente la misma forma que si se multiplica por si misma la cantidad que se supone ser desconocida menos la cantidad conocida que le es igual; después de lo cual si esta última expresión tiene dimensión inferior a la de la ecuación precedente, se la multiplica por otra suma que tenga tanta dimensión como la que le falta, de modo que pueda haber ecuación separadamente entre cada uno de los términos de la una y cada uno de los de la otra.»

Para cada punto C de la curva hay que determinar el punto P –problema geométrico– que permite trazar el segmento PC , normal a la curva en C , es decir, hay que poner v y s en función de x e y –problema algebraico–. Suponer el problema resuelto permite determinar en

un terreno algebraico la ecuación de un círculo. Regresando a la Geometría, si la recta trazada por P es la normal «el círculo del cual es centro y que pasa por el punto C, tocará a la línea curva CE sin cortarla», es decir, será tangente, cortará a la curva en un solo punto, un punto doble (en sentido actual). Ahora, volviendo al Álgebra, para que el círculo «toque» (sea tangente) a la curva es preciso que la ecuación resultante tenga una raíz doble. Esta ecuación resultante proviene del sistema de ecuaciones formado por la ecuación de la curva y la ecuación del círculo.

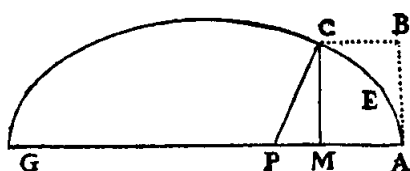
Aquí aparece otro principio fundamental de la Geometría Analítica: «la intersección de curvas –que es un problema geométrico– se reconduce a la resolución de sistemas de ecuaciones – que es un problema algebraico–.

Descartes resolverá el problema algebraico final que se plantea mediante *el método de coeficientes indeterminados*, y en este tema, así como en el asunto paralelo de las raíces dobles, también es un pionero.

Continúa Descartes aplicando el método a la elipse (G.AT,VI, 419):

Así, por ejemplo, digo que la primera ecuación encontrada más arriba [la de la elipse], a saber

$$y^2 + \frac{qry - 2qvy + qv^2 - qs^2}{q - r}$$



debe tener la misma forma que la que se obtiene haciendo e igual a y, y multiplicando y-e por sí misma: de lo que resulta

$$y^2 - 2ey + e^2,$$

de manera que se pueden comparar separadamente cada uno de sus términos y decir que, puesto que el primero, que es y^2 es el mismo en la una y en la otra; el segundo que en una expresión es:

$$\frac{qry - 2qvy}{q - r}$$

es igual al segundo de la otra que es $-2ey$.

De donde, buscando la cantidad v que es la línea PA, se tiene

$$v = e - \frac{r}{q}e + \frac{1}{2}r,$$

o bien, por haber nosotros supuesto $e=y$, se tiene

$$v = y - \frac{r}{q}y + \frac{1}{2}r,$$

y también podría encontrarse s por el tercer término:

$$e^2 = \frac{qv^2 - qs^2}{q - r}$$

pero, puesto que la cantidad v determina bien el punto P, que es el único que buscamos, no hay necesidad de proseguir.»

De forma análoga Descartes realiza la argumentación y el cálculo para la parábola y la Concoide de Nicomedes (G.AT,VI, 420-424).

DESCARTES EN LA PRENSA



Caricatura de Descartes que publicó el 23 de marzo de 1996 la sección de PENSAMIENTO de la revista LA ESFERA del Diario EL MUNDO de Madrid, con motivo del cuarto centenario de su nacimiento.

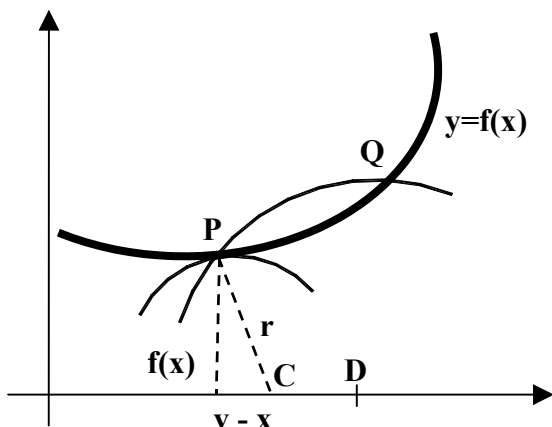
A Descartes se le considera, junto con Fermat, el fundador de la Geometría Analítica. En el propio ámbito de *La Geometría*, Descartes hizo trascendentales contribuciones a la *Teoría de Ecuaciones*, donde vislumbró importantes cuestiones como la *regla de los signos* para descifrar el número de raíces negativas y positivas de cualquier ecuación algebraica, la *Regla de Ruffini* y el *Teorema Fundamental del Álgebra*. Además en sus estudios sobre poliedros, parece ser que Descartes llegó a conocer la conocida *Formula de Euler* que relaciona aristas, caras y vértices de un poliedro.

Al inicio del Libro II de *La Geometría* Descartes introduce los llamados *compases cartesianos*, ingenios que tienen la misma precisión que los instrumentos platónicos y que utilizará para la construcción de diversas curvas geométricas de gran importancia en la resolución de ecuaciones correspondientes a problemas geométricos.

Para mayor comprensión del *método del círculo* de Descartes, interpretemos la técnica cartesiana para una función algebraica general, de forma deliberadamente anacrónica en términos del lenguaje moderno. Tendríamos lo siguiente:

Sea la curva $y=f(x)$, y P un punto cualquiera de ella de abscisa x , donde queremos trazar la normal. Descartes supone como siempre el problema resuelto y la solución dada por la recta CP, siendo $C=(v,0)$ la intersección de la normal con el eje de abscisas.

En general un círculo con centro en un punto D próximo a C y que pase por P, cortará a la curva $y=f(x)$, no sólo en P, sino en otro punto Q, cercano a P, pero si CP es la normal a la curva en el punto P, este punto será un punto doble de la intersección de la curva $y=f(x)$ y el círculo $(x-v)^2 + y^2=r^2$.



Eliminando la y de ambas ecuaciones resulta que la ecuación

$$[f(x)]^2 + (v-x)^2 = r^2 \quad (1)$$

donde v, r , son fijos, debe tener la abscisa x de P como raíz doble.

Pero una función algebraica con una raíz doble $x=e$, debe ser de la forma: $(x-e)^2 \cdot \sum b_n x^n$, de modo que se puede imponer la condición de raíz doble anterior en la forma:

$$[f(x)]^2 + (v-x)^2 - r^2 = (x-e)^2 \cdot \sum b_n x^n \quad (2).$$

Identificando coeficientes se encuentra el valor de v , en términos de la raíz doble e .

En general mediante el método de Descartes lo que se halla es la «*subnormal*» $v-x$, que permite hallar la pendiente de la normal: $-f(x)/(v-x)$ y de ésta la pendiente de la tangente, es decir, nuestra derivada: $(v-x)/f(x)$.

La condición de raíz doble sobre (1) hoy la impondríamos (utilizando las derivadas formales de una curva algebraica), aplicando que «*toda raíz doble de una función es raíz de su derivada*», por tanto de (1) se deduce:

$$2f(x) \cdot f'(x) - 2(v-x) = 0,$$

y de aquí $f'(x)=(v-x)/f(x)$, obteniéndose el mismo valor que antes para la pendiente de la tangente.

Apliquemos la técnica de Descartes, con lenguaje actual, a diversos casos sencillos.

A₁.- La parábola $y=x^2$.

La ecuación (2) ahora se escribe: $x^4 + (v-x)^2 - r^2 = (x-e)^2 \cdot (x^2 + bx + c)$.

Identificando coeficientes se obtiene: $v=2e^3 + e$, sustituyendo $e=x$, la «*subnormal*» vendrá dada por: $v-x=2x^3$, y la pendiente de la tangente en el punto (x, x^2) de la curva será:

$$(v-x)/f(x) = 2x^3/x^2 = 2x.$$

A₂.- La parábola $y^2=2px$.

La ecuación (2) ahora se escribe: $2px + (v-x)^2 - r^2 = (x-e)^2$.

Identificando coeficientes se obtiene $v=e+p$, sustituyendo $e=x$, la «*subnormal*» vendrá dada por $v-x=p$, y la pendiente de la tangente en el punto $(x, \sqrt{2px})$ de la curva será:

$$\frac{v-x}{f(x)} = \frac{p}{\sqrt{2px}} = \frac{p}{y}.$$

La ecuación de la tangente a la parábola $y^2=2px$ en el punto (x_0, y_0) será pues:

$y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0)$, de donde haciendo operaciones resulta:

$$yy_0 = p(x+x_0), \text{ expresión habitual de la tangente a la parábola.}$$

B.- La elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

La ecuación (2) ahora se escribe: $b^2 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) + (v-x)^2 - r^2 = (x-e)^2 \cdot c$

Identificando coeficientes resulta: $-(b^2/a^2) + 1 = c$, $-2v = -2ec$.

Despejando v se tiene: $v = e \cdot [1 - (b^2/a^2)]$.

Sustituyendo $e=x$, la «*subnormal*» vendrá dada por $v-x=-(b^2x)/a^2$, de modo que la pendiente de la recta tangente en el punto (x, y) será:

$$\frac{v-x}{f(x)} = -\frac{b^2x}{a^2y}.$$

De aquí resulta que la ecuación de la recta tangente a la elipse en el punto (x_0, y_0) se

expresará: $y - y_0 = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0)$, de donde haciendo operaciones resulta:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1, \text{ expresión habitual de la tangente a la elipse.}$$

Hemos visto que la técnica cartesiana, bajo un punto de vista de Geometría Algebraica (diríamos hoy), encuentra las tangentes a las curvas –vía la normal–, mediante la técnica de considerar el doble contacto del círculo osculador como una característica de la normal. De este modo, Descartes obtiene un método de tratar el problema, que al intuir que será el germen de una ciencia futura, le concede una importancia capital, al reconocer que las tangentes y normales a las curvas son rectas que, de alguna forma, imponen sus leyes a las curvas.

El problema del trazado de las normales a una curva en un punto, es considerado el mayor éxito del método cartesiano, marcando una impronta en la génesis de la Geometría Analítica por la capacidad que desarrolla Descartes de establecer puentes de ida y vuelta entre el Álgebra y la Geometría: análisis geométrico de los problemas, síntesis del análisis en el Álgebra de ecuaciones y traducción geométrica de los resultados algebraicos, un magnífico y poderoso diccionario reversible entre dos lenguajes, el geométrico y el algebraico, con la posibilidad de traducir no sólo en el ámbito gramatical –puntos por coordenadas, curvas por ecuaciones–, sino también en el dominio sintáctico –las relaciones entre los elementos geométricos, por ejemplo intersecciones de curvas, se traducen en relaciones entre los correspondientes elementos algebraicos, por ejemplo mediante sistemas de ecuaciones–.

Con un énfasis inusitado Descartes considera que este problema es el más importante, no sólo de cuantos ha resuelto sino de cuantos anhelara descubrir en Geometría (G.AT,VI,413):

«[...] Y me atrevo a decir que éste es el problema mas útil y mas general no sólo que yo conozca, sino aun que yo haya anhelado jamás conocer en Geometría».

Con estos antecedentes, se comprende la sorprendente acritud con que se desarrolló su polémica con Fermat, a partir de la difusión de los métodos de máximos y mínimos ideados por este «*aficionado*» ya que se aplicaban también al trazado de tangentes. El desarrollo de la controversia, en el que participaron casi todos los matemáticos del círculo de Mersenne, tuvo la feliz virtualidad de ir obligando progresivamente a Fermat a aclarar la naturaleza de sus procedimientos, en el curso de lo cual nuevas curvas nacieron para la Geometría Analítica y para el Cálculo Infinitesimal, que simultáneamente estaba eclosionando gracias a toda la parafernalia analítica que ofrecían los métodos de Fermat y Descartes.

EL CARTESIANISMO

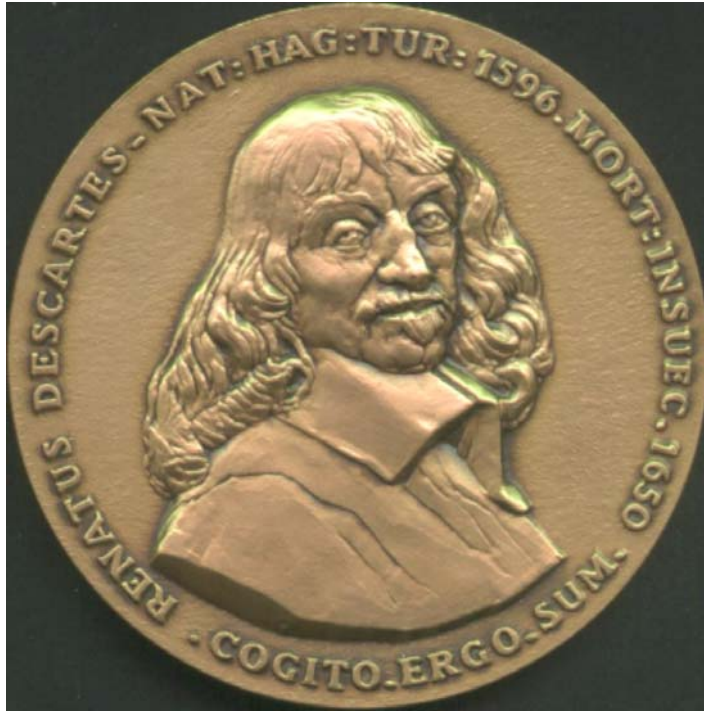


Estatua de Descartes. Palacio de Versalles.

El término latinizado del apellido de Descartes ha dado nombre tanto a su doctrina filosófica: el cartesianismo, basada en el método de la razón matemática, como a las aplicaciones geométricas de *La Geometría*: la Geometría cartesiana, llamada en su forma académica *Geometría Analítica*.

Pocos sabios han dejado su nombre a una doctrina filosófica o a una teoría matemática, pero todavía menos han tenido la gloria de verlo adjetivado en el lenguaje coloquial. Cartesiano ha pasado a ser sinónimo de *racional* y *metódico* en el sentido de analista y riguroso. Así se reconoce cuando se habla, por ejemplo, de una mente cartesiana.

DESCARTES SEGÚN SPINOZA: GEOMETRÍA Y FILOSOFÍA



El método de la Filosofía cartesiana basado en la razón matemática impactó en sus contemporáneos, como los filósofos Malebranche y Spinoza, quien en el prólogo de su obra *Los Principios de la Filosofía cartesiana* escribe el siguiente panegírico de Descartes:

«Se alzó al fin este astro, el más destellante de nuestro siglo, René Descartes, quien, en primer lugar, mediante un método nuevo, hizo pasar de las tinieblas a la luz cuanto en las Matemáticas había permanecido inaccesible a los antiguos y todo cuanto los contemporáneos habían sido incapaces de descubrir; luego puso los cimientos inquebrantables de la Filosofía sobre los cuales es posible asentar la mayor parte de las verdades en el orden y con la certidumbre de las Matemáticas, tal como él mismo lo demostró realmente y como aparece más claro que la luz del día a todos cuantos han estudiado atentamente sus escritos, cuya alabanza nunca será tan alta como merece.»

DESCARTES Y LA REINA CRISTINA DE SUECIA



Detalle del cuadro *Cristina de Suecia y su corte*, de P.Dumesnil. Descartes aparece haciendo una demostración geométrica.

Descartes, tomando una decisión excepcionalmente poco cartesiana, acepta la invitación de Cristina de Suecia, que deseaba «intruirse en Filosofía», y se desplaza en setiembre de 1649 a Suecia, «el país de los osos, entre rocas y hielos». La reina le cita «en la biblioteca, todas las mañanas, a las cinco», «en Suecia se hielan hasta los pensamientos». Descartes, que tenía la costumbre de levantarse tarde desde la época de estudiante en *La Flèche*, enferma gravemente y muere el 11 de febrero de 1650, oficialmente de una pulmonía, pero tal vez tuvo que ver la añoranza, los caprichos de la reina y los celos de los cortesanos. A pesar de las disputas entre la reina y el embajador de Francia, el cuerpo de Descartes permaneció en Suecia y no fue repatriado hasta 1666. No obstante, el cráneo se quedó en Estocolmo hasta 1822, cuando el químico sueco Berzelius lo regaló a Cuvier. En la actualidad el cuerpo de Descartes descansa en París, en la Iglesia de Saint-Germain-des-Prés, aunque el cráneo se exhibe en el Museo del Hombre.

La Geometría de Descartes y la Geometría Analítica

Descartes participó de los objetivos y propósitos reformadores de Vieta al realizar la construcción geométrica de las raíces de las ecuaciones algebraicas, que empieza, una vez fijada una unidad, por la asignación a cada segmento de una longitud, facilita la asociación implícita del sistema de números reales con los puntos de una línea recta –origen de las coordenadas– y proporciona con esta base un substrato geométrico a las operaciones aritméticas. Después muestra cómo se pueden construir –con instrumentos euclidianos pero con el concurso del Álgebra– las soluciones de las ecuaciones algebraicas, soslayando la necesidad que había en el Álgebra Geométrica griega de conservar la homogeneidad y eliminando la barrera dimensional. Todo ello son ingredientes de lo que mucho después de Descartes se llamaría la Geometría Analítica.



Portada de la primera edición de *Opera mathematica* de Vieta. Fue editada por Van Schooten, en Leyden, en 1646, justo tres años antes de que el propio Van Schooten, y también en Leyden, publicara *La Geometría* de Descartes. Se cree que esta edición de Van Schooten contiene la mayor parte de lo escrito por Vieta, con notaciones nuevas introducidas por el editor.

Con su *Arte Analítica*, Vieta había ya establecido una conexión entre Álgebra y Geometría, al obtener las ecuaciones que corresponden a diversas construcciones geométricas, en el caso de problemas geométricos determinados, es decir manejando sólo ecuaciones determinadas, en las que la variable aunque es una incógnita, es una constante fija a encontrar. Descartes, en *La Geometría* desarrolla esta idea para problemas geométricos indeterminados mediante la consideración de ecuaciones indeterminadas en variables continuas que representan segmentos geométricos. En un sentido general, se puede decir que la invención de la Geometría Analítica por Descartes consiste en la extensión del *Arte Analítica* de Vieta a la construcción geométrica de las soluciones de ecuaciones indeterminadas.

Al partir del rastro de Vieta, Descartes alcanza el principio fundamental de la Geometría Analítica, que expresado en lenguaje moderno, consiste en el descubrimiento de que las ecuaciones indeterminadas en dos incógnitas, $f(x,y)=0$, se corresponden con lugares geométricos, en general curvas, determinadas por todos los puntos cuyas coordenadas relativas a dos ejes satisfacen la ecuación. Un aspecto de esta idea es anunciado por Descartes en un enunciado básico que viene a decir: «una ecuación en dos cantidades indeterminadas determina, con respecto a un sistema dado de coordenadas, una curva», expresado como vimos, en el Libro II de *La Geometría* de la siguiente forma (G.AT,VI, 412):

«Para encontrar todas las propiedades de las líneas curvas basta con saber la relación que tienen todos sus puntos con los de las líneas rectas [la ecuación de la curva]»,

La relación a la que alude Descartes es la ecuación de la curva en un sistema de coordenadas, una expresión algebraica que permite estudiar las propiedades y encontrar los elementos característicos de la curva –diámetros, ejes, centros, normales, tangentes, etc.– como asegura Descartes (G.AT,VI, 412–413):

«Luego con sólo saber la relación que tienen todos los puntos de una línea curva con todos los de una línea recta [la ecuación], en la forma que he explicado, es fácil también conocer la relación que ellos tienen con todos los otros puntos y líneas dadas; y, por lo tanto, conocer los diámetros, los ejes, los centros, [...]. Y también, con sólo

esto, se puede aun, encontrar casi todo lo que puede ser determinado respecto a la medida del espacio que abarcan, [cuadratura].»

He aquí pues una correspondencia entre las propiedades geométricas de la curva y las propiedades algebraicas de la ecuación asociada que anuncia la esencia de la Geometría Analítica como puente entre el Álgebra y la Geometría y poderoso instrumento de solución de problemas geométricos mediante la intervención del Álgebra, una vez se ha definido un sistema de coordenadas, mediante el que se obtiene la ecuación de la curva como relación algebraica que liga las coordenadas de los puntos de la curva. El carácter algorítmico y operacional del Álgebra convierte a ésta en una potente herramienta no sólo de resolución de problemas geométricos concretos sino también en un magnífico útil de exploración e investigación geométrica, que en esto estriba realmente la eficiencia de la Geometría Analítica.

De esta forma se comprende que a la Geometría Analítica, la «*Geometría de coordenadas*» se le llame Geometría cartesiana. Aunque a tenor de lo que hizo Descartes más bien habría que llamarle «*Geometría de ordenadas*», ya que fijadas las dos incógnitas que componen la ecuación, los segmentos de la primera se miden a partir de un punto inicial –*origen de coordenadas*–, a lo largo de un eje dado y los segmentos de la segunda –que son determinados por la ecuación– se elevan como «*ordenadas*» formando un ángulo con el eje. Así resultan lo que Descartes llama por primera vez en el *Problema de Pappus* «*líneas principales de referencia*» (G.AT,VI,383). No hay, pues, una identidad entre la Geometría Analítica moderna y la de Descartes, incluso son un cierto anacronismo las expresiones actuales como «*sistema de coordenadas cartesianas*». De hecho, Descartes pocas veces utiliza ejes perpendiculares, conocidos como cartesianos, sino que emplea diferentes sistemas de coordenadas, en general oblicuos.

Descartes tenía una opinión muy negativa sobre los métodos sintéticos de los antiguos griegos, por la ocultación del proceso inventivo y la excesiva particularidad, y en consecuencia no participó como hicieron muchos matemáticos coetáneos en el movimiento de restauración de los trabajos perdidos de Apolonio. Descartes era consciente de que su método estaba suplantando a los antiguos. De hecho ése era su propósito desde el principio: no sólo rehacer la Geometría griega, sino crear un nuevo método para la resolución de antiguos y nuevos problemas que rompiera de forma definitiva con la tradición griega y llega incluso a reemplazarla.

Como consecuencia de la aparición de los inconmensurables, el *Álgebra Geométrica* de los griegos estructura casi toda la Matemática griega, con una rigidez que obliga a un tratamiento sintético de los problemas, esclaviza a depender de la naturaleza geométrica intrínseca de las figuras, de modo que cada problema exige un tratamiento local que atomiza la casuística de los casos específicos y precisa de sutiles construcciones geométricas para cada caso particular. Es decir, cada demostración de la Geometría euclídea exigía nuevos e ingeniosos argumentos originales y estaba tan ligada a las figuras que «*que no puede ejercitar el entendimiento sin fatigar mucho la imaginación*», como diría Descartes (DM.AT,VI,17–18). Pero lo más grave era la ocultación del procedimiento y el método de descubrimiento como manifiesta en la Regla IV de las *Regulae* (RIV.AT.X.376–377). Incluso Descartes llega a decir que «[...] *los antiguos no poseían un verdadero método, ...,*» sino «*ellos no hubieran escrito libros tan voluminosos* [para resolver las cuestiones geométricas],» (G.AT,VI,376).

La Geometría Analítica de Descartes nace, precisamente, de su interés por la metodología. Como escribe Kline (1985, p.51):

«Las contribuciones de Descartes a las Matemáticas propiamente dichas no ofrecieron nuevas verdades, sino, más bien, una sólida metodología que ahora llamamos Geometría Analítica.»

La Geometría de Descartes tienen su anclaje en la Geometría Griega, pero se plantea como

tarea esencial encontrar nuevos métodos más simples, más operativos, más resolutivos, más heurísticos y sobre todo más generales. La intencionalidad de Descartes es palmaria hasta en el propio título de la obra de la que es tributaria *La Geometría*, que con título abreviado se llama *Discours sur la Méthode*, en la que Descartes plasma, de forma clara y distinta, «el método para dirigir correctamente la razón y buscar la verdad en las ciencias», es decir, primero el método, después la ciencia que resulta de su fiel aplicación.

Bajo esta filosofía de trabajo Descartes es uno de los principales artífices de la inflexión radical que presenta la Matemática del siglo XVII respecto a la clásica griega, que es ponderada y es la fuente de formación y de inspiración de los matemáticos, pero se abandonan y critican sus métodos porque no son heurísticos. Con un nuevo enfoque se trata ante todo de crear y descubrir, más que de expresar demostrativamente o axiomáticamente. Es más relevante la forma de resolución de los problemas que el estilo de la presentación. Lo que importa es la obtención de métodos que permitan resolver de forma directa y operativa los problemas y escribirlos formalmente siguiendo la línea de la propia investigación geométrica, es decir, métodos que al describir el proceso inventivo enseñen a descubrir y rompan la clásica dualidad helénica *invención-demostración* que tiene lugar en dos estadios de tiempo y espacio diferentes. Se pondera la heurística y se busca afanosamente la fusión, en un solo acto matemático, del descubrimiento y de la demostración. Esto es lo que ante todo persigue Descartes en *El Discurso del Método* la búsqueda de un «*ars inveniendi*», es decir, un método que sirva para descubrir nuevas verdades más que para probar lo que ya se ha hallado. Pues bien, aquí es donde interviene el Álgebra como instrumento inherente a la Geometría Analítica.

En efecto, el Álgebra mecaniza la Matemática de forma que el pensamiento se simplifica y disminuye el esfuerzo de la mente ante la automatización de los procesos. Para Descartes el Álgebra debe preceder a las demás ramas de la Matemática y en cierto modo es una extensión de la Lógica, como motor del razonamiento, en la línea de lo que llamaba Matemática universal (la *Mathesis* de las *Regulae*, RIV.AT.X.376). El Álgebra es la ciencia universal del razonamiento. Y al concretar sobre el ámbito geométrico, el Álgebra es la clave para reconocer los problemas de la Geometría y unificar cuestiones cuya forma geométrica no parece guardar *a priori* relación alguna. Es decir, el Álgebra aporta los principios de clasificación y jerarquía de los problemas y es el instrumento fundamental para discutir con agilidad y generalidad las cuestiones geométricas. El Álgebra simbólica literal, con incógnitas, variables y parámetros, libera de la necesidad de tratar casos específicos y ejemplos concretos y permite formulaciones generales y desarrollos de procedimientos de resolución independientes de la estructura geométrica particular, que posibilita la aplicación de las mismas técnicas a situaciones análogas.

Concretemos aún más qué función cumple el Álgebra en la Geometría Analítica desde el punto de vista del Análisis griego, con el fin de justificar el propio nombre de *Geometría Analítica*, que algunos consideran inapropiado. El término *Análisis* se aplica desde Platón y Pappus para describir el proceso de remontarse desde lo que se desea demostrar hasta llegar a alguna verdad conocida –admitida o probada anteriormente–. En este sentido es lo opuesto a la *Síntesis*, que es la presentación deductiva de lo que se halló mediante el *Análisis*. Es bajo estas concepciones que todavía Vieta y Descartes consideraban el Análisis para describir la aplicación del Álgebra a la Geometría, puesto que el Álgebra era el instrumento adecuado para *analizar* el problema de construcción geométrica. En efecto, Vieta había definido el *Análisis* como «*doctrina bene inveniendi in mathematica*». Para Vieta el *Arte Analítica* constaba de tres partes: *zetetic* donde se determinan las propiedades de los elementos que pide el problema a partir de las propiedades de los datos, *poristic* que es el proceso de verificación y *exegetic* que es la demostración de la proposición. Tal como había sido usado por Platón y Pappus, la palabra *Análisis* hacía referencia al orden de las ideas en una demostración. El *Análisis* es la descomposición en elementos más simples que se hace en el camino de la investigación, la *Síntesis* es la composición o reordenación que se hace en la exposición. Vieta aplicará la palabra *Análisis* en la Geometría algebraica, a la que mira como una nueva forma de Análisis matemático y usa el término bajo el significado de los griegos, pero remarca que en la fase *zetética* de ataque algebraico del problema se procede indirectamente a base de asumir lo que se quiere probar o construir y se maneja y se opera

con las cantidades incógnitas como si fueran conocidas.

Descartes reproducirá, en el segundo epígrafe del Libro I de *La Geometría* titulado «cómo se llega a las ecuaciones que sirven para resolver los problemas», estas ideas en torno a la aplicación del *Análisis*: (G.AT,VI,372):

«Así, si se quiere resolver algún problema, debe de antemano considerarse como ya resuelto, y dar nombre a todas las líneas que parecen necesarias para construirlo, tanto a las que son desconocidas como a las otras. Luego, sin considerar ninguna diferencia entre estas líneas conocidas y desconocidas, se debe examinar la dificultad según el orden que se presente como más natural de todos, en la forma como aquellas líneas dependen mutuamente las unas de las otras, hasta que se haya encontrado la manera de expresar una misma cantidad de dos maneras: lo que se denomina una ecuación, pues [el resultado de] los términos de una de esas dos formas son iguales a los de la otra.»

Así pues, tanto para Vieta como para Descartes, el Álgebra se convierte en el instrumento adecuado para emprender el camino analítico en Geometría, que de acuerdo con las palabras mencionadas de Descartes, debe seguir un protocolo de actuación. Señalemos, punto por punto, los pasos a seguir, según Descartes, para resolver cualquier problema geométrico, que en esencia son casi los mismos que realizamos de forma académica cuando resolvemos actualmente cualquier problema de Geometría Analítica:

- a) se da nombre a todos los segmentos que parecen necesarios;
- b) se supone el problema resuelto, es decir, se supone conocida la longitud buscada;
- c) se plantea la ecuación entre las longitudes conocidas y desconocidas;
- d) se resuelve esta ecuación;
- e) se concluye con la construcción geoméricamente de la solución.

Éste es el camino que sigue el método cartesiano en el que el estudio analítico se funde con la síntesis algebraica en transición de la Geometría al Álgebra y del Álgebra a la Geometría. El *Análisis* mediante el Álgebra traduce los datos geométricos de forma que sean tratables por medio del automatismo del cálculo algebraico, esto es el *Análisis Algebraico*. Se comprende, pues, el nombre de *Geometría Analítica* que en el curso de la Historia se le dio al instrumento desarrollado por Descartes, aunque tal vez hubiera sido más descriptivo el de Geometría Algebraica –que curiosamente resultaría de la permutación de los términos de Álgebra Geométrica con que se nombra buena parte de la Matemática de *Los Elementos* de Euclides–, aunque este nombre también sería deficiente, toda vez que la Geometría Analítica es mucho más que una mera aplicación del Álgebra a la Geometría, ya que requiere el uso de coordenadas. En suma, la Geometría Analítica sería el *Análisis* moderno, siendo el Álgebra por su carácter algorítmico el principal instrumento de la aplicación de ese *Análisis*, por eso también se podría definir con mayor precisión como la aplicación del *Análisis Algebraico* a la Geometría. Históricamente, hasta muy tarde se han utilizado los términos Álgebra y *Análisis* como sinónimos. Así aparecen, por ejemplo, en la famosa *Encyclopédie*, donde D'Alembert escribe:

«El Análisis es propiamente el método de resolver los problemas matemáticos, reduciéndolos a las ecuaciones. El Análisis para resolver problemas, emplea el recurso del Álgebra, o cálculo de las magnitudes en general: estas dos palabras, Análisis y Álgebra, son a menudo miradas como sinónimas [...] Algunos autores definen el Álgebra (como siendo) el arte de resolver los problemas matemáticos: pero ésta es la idea del Análisis o del arte analítico más bien que del Álgebra.»

Cuestiones nominalistas aparte, volvamos a los orígenes para reiterar que la Geometría Analítica recibe su nombre y sus procedimientos del método de *Análisis* de los griegos y

permite recuperar el Análisis Geométrico de los antiguos mediante la acción del Álgebra, ya que el carácter algorítmico de ésta promueve y acentúa las aptitudes heurísticas del Análisis. Así lo observamos claramente en *La Geometría*, donde uno se convence de la posibilidad cartesiana de reconstruir toda la Geometría con una simplicidad sorprendente como el propio Descartes asegura (G.AT,VI,376):

«[...] Se pueden construir todos los problemas de la geometría ordinaria, sin hacer más que lo poco que está comprendido en las cuatro figuras que he explicado»,

y con unos instrumentos francamente modestos, sólo los Teoremas de Tales y de Pitágoras, como indica a la Princesa Elisabeth en la comunicación epistolar de noviembre de 1643:

«Yo no considero otros teoremas que los lados de los triángulos semejantes están en proporción, y que, en los triángulos rectángulos, el cuadrado de la base es igual al cuadrado de los dos lados».

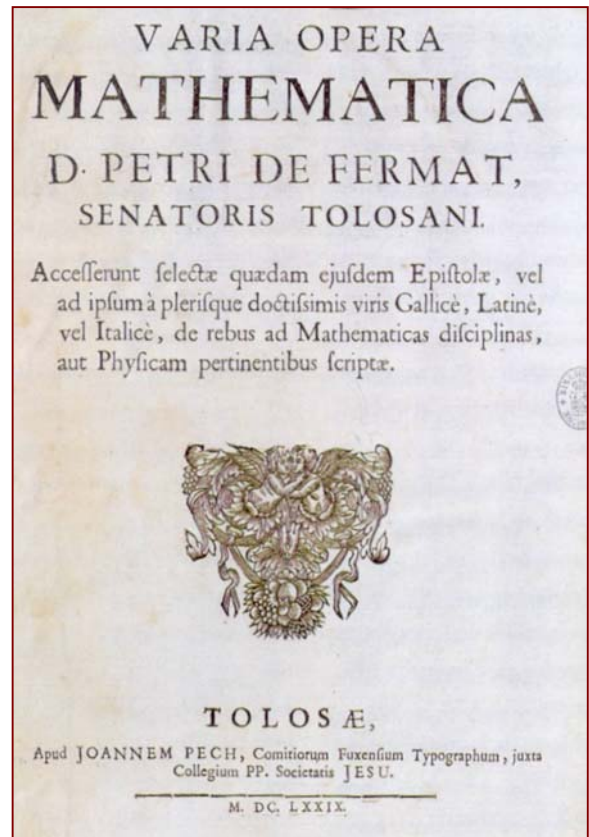
Descartes hace esta observación respecto de la resolución del problema de Apolonio, pero lo mismo se puede decir de *La Geometría* en general.

Es asombroso ¡cómo se puede hacer tanto con tan poco! Y es que el enfoque analítico, siempre con el recurso algorítmico del Álgebra simbólica, permite la generalización de los métodos y la aplicación uniforme de los mismos procedimientos a cuestiones similares.

Durante algunos años después de 1637, la Geometría Analítica fue considerada como la invención de un solo hombre –Descartes–, debido a que los trabajos de Fermat sobre Geometría Analítica –la *Introducción a los Lugares Planos y Sólidos*–, conocida como *Isagoge*, no fueron publicados en vida del autor. Por ello es difícil aquilatar el grado de influencia que tuvo sobre sus contemporáneos. No obstante, tanto la *Isagoge* como los trabajos de Fermat sobre máximos y mínimos y su aplicación a las tangentes fueron conocidos –por voluntad de Fermat a través de manuscritos que acompañaban a su correspondencia con Mersenne–, por el círculo de matemáticos de París, incluso antes de la aparición de *La Geometría* de Descartes, pero así como las tangentes de Fermat causaron una gran impresión sobre todo en Descartes, la *Isagoge* parece que fue rápidamente eclipsada por el trabajo de Descartes. Mientras algunos aspectos de los máximos y mínimos y las tangentes de Fermat fueron incorporados a algunas publicaciones de otros matemáticos, la *Isagoge* no aparece en imprenta hasta la publicación de *Varia Opera Mathematica* de Fermat por parte de su hijo Samuel en 1679, catorce años después de la muerte de su autor, cuarenta y dos años después de la publicación de *La Geometría* de Descartes y casi cincuenta años después de ser escrito el tratado, en unos momentos en que la influencia cartesiana se había extendido notablemente, de modo que la memoria de Fermat sobre Geometría Analítica, ya incluso con una notación obsoleta, tenía simplemente un valor histórico para atestiguar (debido a la fecha de composición y a su contenido) la independencia de la Geometría Analítica de Fermat respecto de la de Descartes. Así pues, el nombre de Geometría cartesiana con que se denomina a veces a la Geometría Analítica no hace justicia a ambos fundadores, incluso entre profesionales de la Matemáticas se desconoce, a veces, la copaternidad de Fermat, pero es bien cierto que fue bajo la forma cartesiana como este magnífico instrumento se impuso y echó raíces en la Matemática.

Al contrario que la *Isagoge*, *La Geometría* de Descartes tuvo una rápida difusión, de modo que por la importancia que se dio a la obra, enseguida aparecieron nuevas ediciones que recibieron infinidad de comentarios por parte de matemáticos coetáneos. Además, no todo el mundo entendía la obra de Descartes, de modo que incluso algunos eruditos solicitaron aclaraciones para poderla seguir. Estas preocupaciones latentes en los ámbitos matemáticos propiciaron el que van Schooten –que había sido el diseñador de las figuras de la primera edición– añadiera, a su traducción latina de 1649, toda una serie de comentarios propios, las *Notas Breves* de F. de Beaune y aportaciones de Witt, de Hudde, de van Heuraet y otros, que contribuyeron a extender su difusión e incrementar su inteligibilidad. Tanto éxito tuvo la publicación de van Schooten que se reeditó en 1659 y 1695.

LA GEOMETRÍA ANALÍTICA DE FERMAT DE LA INTRODUCCIÓN A LOS LUGARES PLANOS Y SÓLIDOS



1. Retrato de Fermat como consejero del parlamento de Toulouse (atribuido a Antoine Durand). Académie des Sciences et Belles Lettres de Toulouse.
2. Edición de Samuel de Fermat de *VARIA OPERA MATHEMATICA* de D. PETRI DE FERMAT. Tolosa, 1679.

La particular forma que tenía Fermat de trabajar en Matemáticas, así como de comunicar sus descubrimientos, unida a la despreocupación por la conservación de sus papeles y la constante reticencia en torno a su eventual publicación –Fermat no escribió grandes tratados, sino apuntes episódicos y notas marginales–, supuso que a su muerte en 1665 gran parte de su trabajo quedara desperdigado en numerosos ambientes científicos de toda Europa. Por esta razón su influencia directa no tuvo la envergadura y la inmediatez de la de Descartes.

Catorce años después de la muerte de su padre, habiendo reunido la mayor parte de los escritos latinos, así como un número suficiente de cartas inéditas, Samuel de Fermat hizo imprimir en 1679 *Varia Opera Mathematica*, que a pesar de las lagunas de importantes desarrollos de Fermat y de las excesivas incorrecciones –Samuel no era matemático–, constituyó hasta finales del siglo XIX –se reimprimió en 1861– la única publicación donde se podían estudiar los trabajos de Fermat.

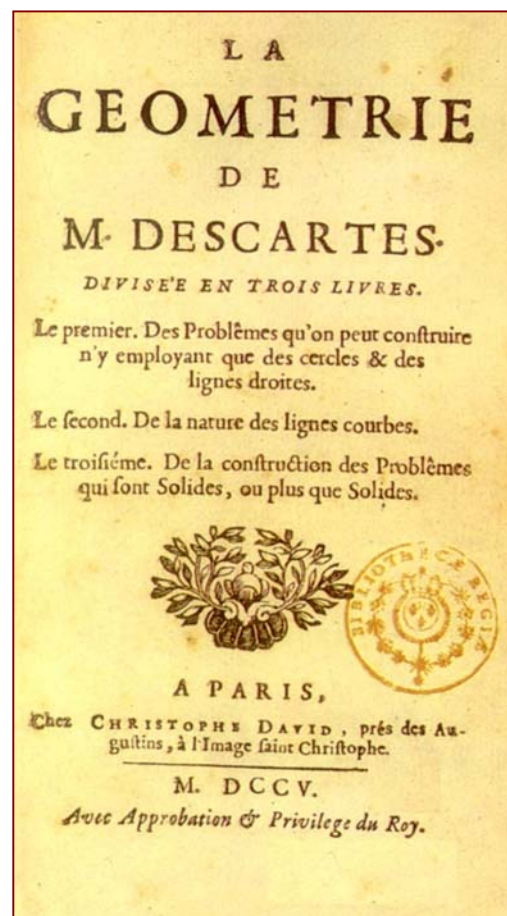
La Geometría Analítica de Fermat tiene su origen en su profundo conocimiento de la Geometría de Apolonio y Pappus y del *Arte Analítica* de Vieta. Fermat se dio cuenta de que las relaciones de áreas, expresadas según el Álgebra Geométrica de los griegos en forma de proporción, mediante las que Apolonio escribía las propiedades intrínsecas de las cónicas se prestaban con gran facilidad a ser traducidas en el lenguaje de ecuaciones del Álgebra simbólica de Vieta. De esta forma el *symptoma* de la curva de Las Cónicas de Apolonio, forma retórica de la expresión de la curva en el lenguaje pitagórico de la *Aplicación de las Áreas*, evolucionaba hacia la *ecuación característica* de la curva de la *Introducción a los Lugares Planos y Sólidos* (*Ad Locos Planos et Solidos Isagoge*) de Fermat, memoria que contiene la llamada Geometría Analítica de Fermat.

Al vincular los trabajos matemáticos de Vieta y Apolonio, Fermat alumbró su Geometría Analítica que establece un efectivo puente entre la Geometría y el Álgebra, lo que le permitirá la asociación de curvas y ecuaciones, a base de aplicar el Análisis algebraico de Vieta a los problemas de lugares geométricos de Apolonio y Pappus, definidos, en un sistema de coordenadas, por una ecuación indeterminada en dos incógnitas. De este modo Fermat resolverá los problemas del Análisis Geométrico de los antiguos mediante la mecánica operatoria del Álgebra simbólica.

Con la Geometría Analítica de Fermat se alcanzaba el máximo grado de consumación en la aplicación a los problemas geométricos del antiguo método de *Análisis* (de ahí procede el adjetivo Analítica que acompaña al sustantivo Geometría), siendo el Álgebra por su carácter algorítmico el principal instrumento de la aplicación de ese Análisis.

La Geometría Analítica se convierte enseguida, en la mente de Fermat, en una poderosa herramienta heurística de investigación, mediante la cual él mismo resolverá de forma prodigiosa y brillante, numerosos problemas, antiguos y nuevos, en particular numerosas cuestiones de lugares geométricos, máximos y mínimos, tangentes, cuadraturas y cubaturas, centros de gravedad y problemas de rectificación de curvas.

NUEVAS EDICIONES DE LA GEOMETRÍA DE DESCARTES



1. Edición latina de 1695 de van Schooten de *La Geometría* de Descartes.
2. Edición francesa de 1705 de *La Geometría* de Descartes.

A diferencia de las obras de Fermat, *La Geometría* de Descartes tuvo numerosas ediciones, tanto en latín como en francés, algunas de ellas con prolijos comentarios para hacerla más inteligible, es decir, que eran auténticas ediciones críticas. Por ello los rudimentos de Geometría Analítica de *La Geometría* de Descartes recibieron una amplia difusión.

La Edición latina de 1695 de van Schooten contiene entre otros elementos los siguientes:

- Geometria, una cum notis Florimondi De Beaune.
- Francisci à Schooten In Geometriam Renati Des Cartes Commentarii.
- Johannis Huddenii Epistola prima de Reductione *Æquationum*.
- Johannis Huddenii Epistola secunda de maximis et minimis.
- Renati Des Cartes Principia Matheseos Universalis seu Introductio ad Geometriæ Methodum
- conscripta ab. Er. Bartholino. De *Æquationum* Natura, Constitutione, et Limitibus Opuscula Duo.
- Incepta à Florimondo De Beaune ab Erasmio Bartholino.
- Johannis De Witt Elementa Curvarum Linearum edita operâ Francisci à Schooten.
- Francisci à Schooten Tractatus de Concinnandis Demonstrationibus Geometricis ex Calculo Algebraico.

La proyección histórica de la Geometría Analítica cartesiana

Al partir del *Análisis Geométrico* griego como trampolín y punto de arranque y al utilizar el *Arte Analítica* de Vieta como instrumento algorítmico básico, Descartes conduce el *Análisis* a su máximo poder heurístico para la resolución de los problemas geométricos, a base de aunar el estudio analítico con la síntesis algebraica, lo que permitirá, mediante las ecuaciones, transitar de la Geometría al Álgebra y del Álgebra a la Geometría. La Geometría Analítica resultante, dotada del simbolismo literal, con todo el potencial de la mecánica algorítmica operatoria de cálculo, manipulación y simplificación propias de las ecuaciones del Álgebra, reemplaza las ingeniosas construcciones geométricas de la rígida, farragosa y retórica *Álgebra Geométrica* de los griegos por sistemáticas operaciones algebraicas que permiten mediante un proceso analítico-sintético de resolución de los problemas, no sólo reconstruir la Geometría clásica con más claridad, flexibilidad, operatividad y versatilidad, sino crear, además, una potente heurística geométrica mediante la cual Descartes pudo plantear y resolver de forma admirable, brillante y prodigiosa problemas difíciles, algunos clásicos –el *Problema de Pappus* y el *Problema de Apolonio*, entre otros–, y otros nuevos como la determinación de las rectas normales a las curvas.

Descartes creará, además, las herramientas geométrico-algebraicas para resolver con eficacia otros muchos problemas como los de lugares geométricos, el estudio de elementos notables de las curvas y los problemas infinitesimales –extremos, tangentes, cuadraturas y cubaturas, centros de gravedad, rectificación, etc.– de gran interés e importancia en los ambientes científicos de la primera mitad del siglo XVII. En este sentido, la Geometría Analítica cartesiana tuvo una decisiva influencia, según veremos, como instrumento clave de la eclosión de multitud de métodos y técnicas infinitesimales, que convergen en la invención del Cálculo Infinitesimal.

Una de estas herramientas fundamentales es precisamente la nueva notación cartesiana. Descartes aplica a los problemas y a las ecuaciones un nuevo y potente simbolismo simplificador, explicativo y resolutivo, que va mucho más allá de la abreviatura cóscica iniciada por Diofanto y desarrollada por los algebristas italianos e incluso allende la escritura simbólica de Vieta. Los símbolos y términos de la matemática son el soporte de sus conceptos y métodos, por tanto tienen una gran importancia, y a pesar de la arbitrariedad en la elección de los signos, conviene adoptar un criterio unificador, que al ser adoptado universalmente, facilita la interpretación y la comprensión, ahorra tiempo y espacio, entraña economía de pensamiento y permite una mayor y más rápida difusión. Esto es precisamente lo que consiguió Descartes con los convenios notacionales fijados en *La Geometría*, que han tenido la virtualidad de convertirse en algo poderosamente definitivo, de modo que *La Geometría*, es el primer texto matemático en el que un lector actual no encontraría dificultades con la notación.

Como escribe E. Colerus, en un lenguaje casi místico, en su *Breve Historia de la Matemática* (Vol. II, pág.17, Doncel, Madrid, 1973):

«*La Matemática no es sino una obra mágica del pensamiento, y los espíritus aparecen cuando se les invoca con las fórmulas adecuadas.*»

La notación de Descartes fue la fórmula oportuna para su magno proyecto de reforma que alcanzó a una completa reconstrucción de la Matemática sobre premisas muy sencillas, no geométricas como en Euclides, sino algebraicas. La *Geometría* de Descartes elimina toda una serie de limitaciones que encorsetaban a la Geometría griega:

- Limitación pitagórica de la inconmensurabilidad.
- Limitación platónica de los instrumentos geométricos –regla y compás–.
- Limitación euclídea de la homogeneidad dimensional.
- Limitación tridimensional.
- Limitación de la dependencia de las figuras geométricas.
- Limitación de la imposibilidad de asignar números a las figuras geométricas.

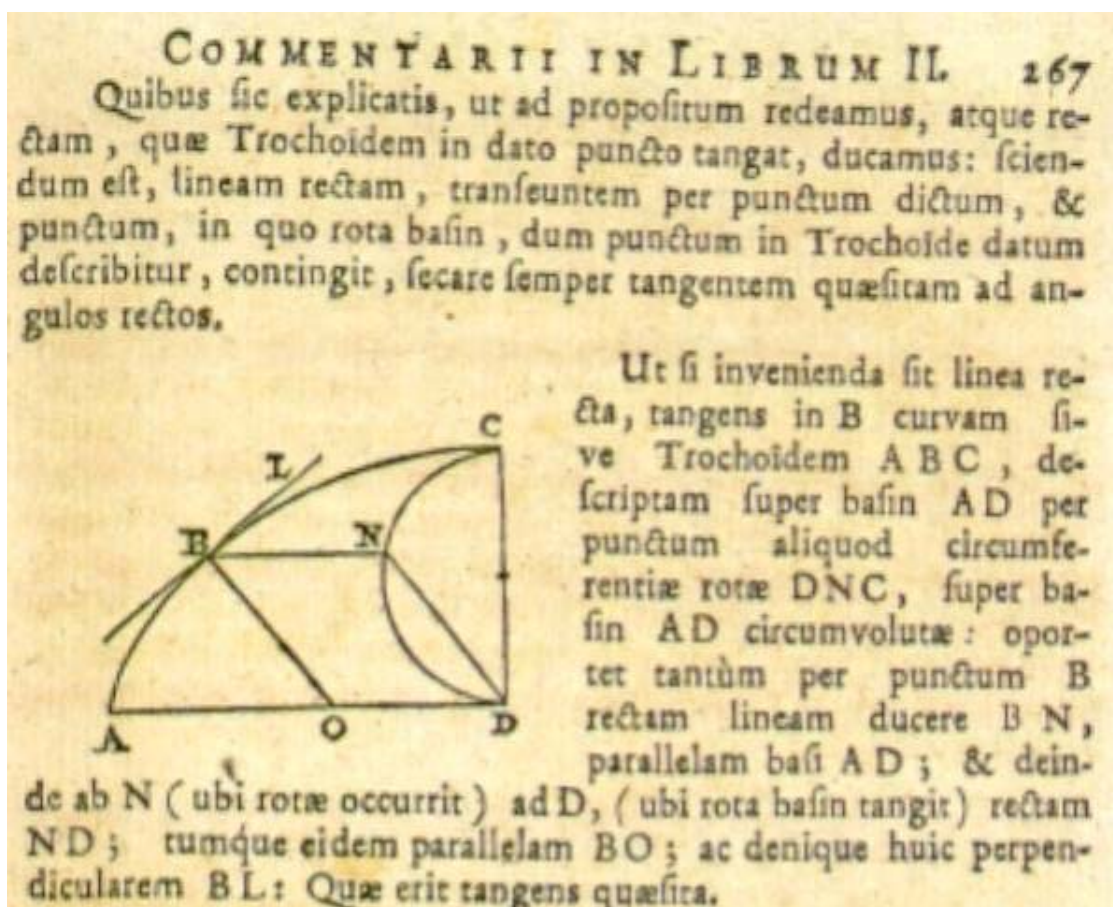
A título de ejemplo sobre lo que introduce la Geometría Analítica en el panorama matemático pensemos en el estudio de las curvas, un tema de importancia esencial en la Geometría de toda época y en particular en los estudios infinitesimales. Las limitaciones algebraicas del Álgebra Geométrica de los griegos, consecuencia de los inconmensurables, hizo imposible la introducción en el mundo griego de nuevas curvas por medio de ecuaciones. Las curvas se obtenían constructivamente mediante intersección de superficies y lugares geométricos y también a través de relaciones de áreas o longitudes, que daban la propiedad de definición de la curva. De esta forma, el elenco de curvas que manejaron los griegos hubo de ser necesariamente muy limitado –*las cónicas* de Menecmo y Apolonio, *la espiral* de Arquímedes, *la cuadratriz* de Hippias o Dinóstrato, *la cisoide* de Diocles, *la hipopede* de Eudoxo, *la conchoide* de Nicomedes, y pocas más–.

La investigación infinitesimal en los albores del siglo XVII tiene lugar con el planteamiento y resolución de problemas de cuadraturas y tangentes sobre curvas. Cabe decir que pioneros de los métodos y técnicas del Cálculo del siglo XVII, como Kepler e incluso Cavalieri, no tuvieron a su disposición los desarrollos geométricos de Descartes, de modo que el número de curvas que manejaron y a las que podían aplicar las técnicas algorítmicas del Cálculo que iban descubriendo era muy limitado, prácticamente las mismas que conocieron los griegos. Además, todavía manejaron las curvas en el farragoso lenguaje del *Álgebra Geométrica* griega mediante relaciones de áreas y proporciones. El trabajo de Descartes en *La Geometría* abre el camino a la introducción sistemática de nuevas curvas y a un manejo más útil, sencillo y operativo, mediante las ecuaciones de las curvas. En efecto, de acuerdo con el *Principio Fundamental de la Geometría Analítica* las curvas planas están determinadas por la ecuación canónica asociada, y por tanto, por el simple hecho de escribir una ecuación una nueva curva queda definida en el ambiente geométrico para la indagación de problemas infinitesimales vinculados a ella, de modo que aparece en el ambiente matemático de los dos primeros tercios del siglo XVII una ingente cantidad de nuevas curvas que se definen a propósito de la introducción de la Geometría Analítica, entre las que sobresalen: el caracol de Pascal, el folium de Descartes o galande de Barrow, la curva de Lamé, la espiral logarítmica, la kappa-curva, la curva tangencial, pero sobre todo las parábolas, hipérbolas y espirales generalizadas o de orden superior –llamadas de Fermat por ser él quien las introdujo– y por encima de todas ellas, en cuanto a importancia, la cicloide, la reina de todas las curvas, llamada la *Helena de la Discordia*, por las polémicas que surgieron sobre cuestiones de prioridad y acusaciones de plagio acerca de la resolución de problemas vinculados a ella. El vasto conjunto de nuevas curvas promueve la aparición de multitud de variadas técnicas algorítmicas infinitesimales al disponer de un amplio material geométrico al que aplicarlas. Se comprende, pues, la amplitud panorámica que sobreviene en el ámbito matemático con la emergencia de la Geometría Analítica.

La propia Geometría Analítica en sí misma era un instrumental algorítmico de primer orden, por eso jugó un papel decisivo en la investigación Infinitesimal. La Geometría Analítica de Descartes permite utilizar la expresión algebraica de la ecuación de una curva para encontrar sus elementos geométricos más notables –diámetros, ejes, centros, etc.– y, en particular, en el terreno infinitesimal resolver los problemas de cuadraturas y tangentes relacionadas con la curva. Es decir, la ecuación de la curva es un elemento esencial para esclarecer las propiedades y encontrar los elementos relevantes de la curva. La Geometría Analítica traslada los problemas infinitesimales de la Geometría al Álgebra, la cual por su carácter operacional, permite, tras la realización de cálculos y en particular la resolución de ecuaciones, regresar a la geometría del problema, para encontrar y solucionar cuestiones geométricas. Como consecuencia, la tarea de probar un teorema o resolver un problema geométrico de índole infinitesimal se conduce de forma muy eficiente a probarlo o resolverlo mediante el Álgebra, de modo que la aplicación de la Geometría Analítica proporciona una potente técnica de resolución de problemas infinitesimales, y algo que es todavía más importante, un poderoso instrumento de investigación geométrica en el ámbito infinitesimal.

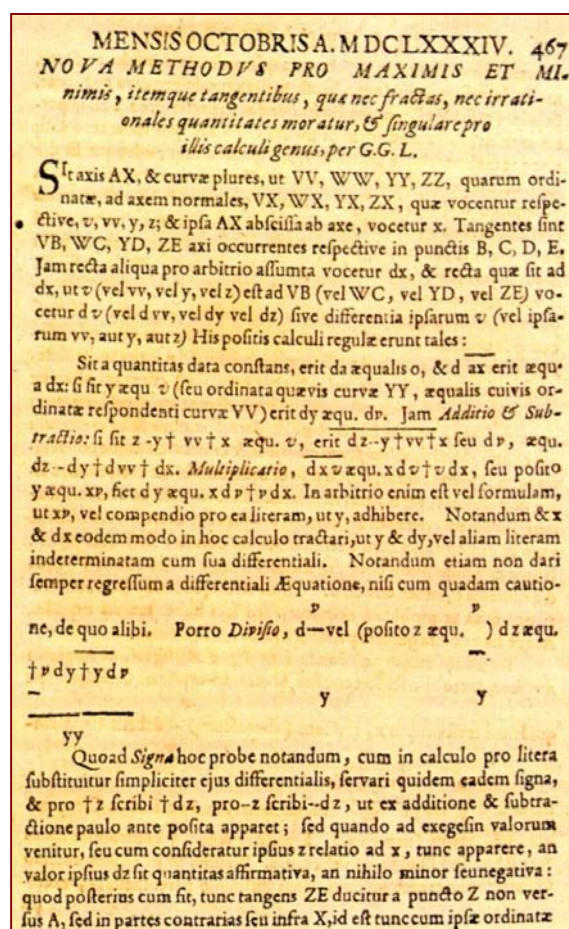
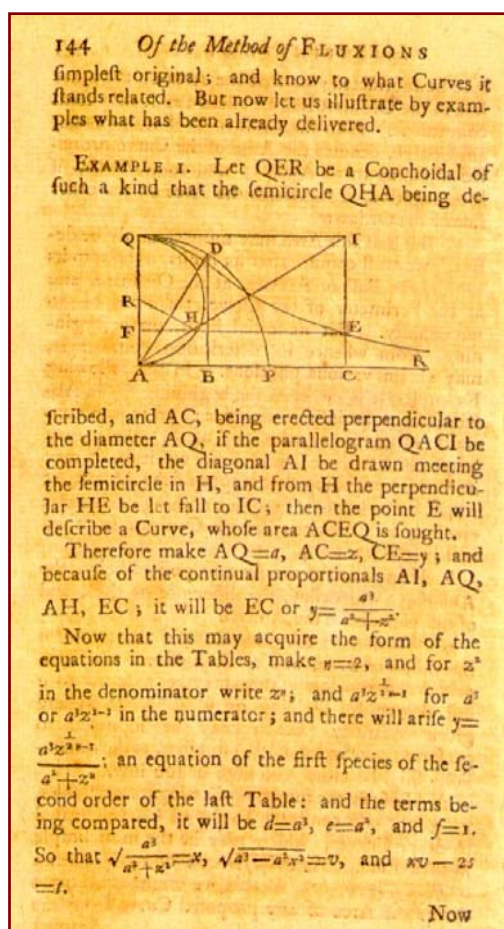
La Geometría Analítica desarrollada por Descartes tuvo, pues, un papel decisivo en todo este proceso de alumbramiento de las técnicas del Cálculo del siglo XVII. El impacto del Álgebra tiene lugar no sólo sobre la Geometría sino también sobre el Cálculo Infinitesimal a través de la propia Geometría Analítica, apareciendo como resultados positivos los intentos

Puede decirse que el Cálculo anterior a Newton y Leibniz es una ingente casuística de métodos heurísticos, aplicados a problemas geométricos específicos, que se resuelven mediante técnicas *ad hoc* vinculadas a las correspondientes figuras geométricas, que desarrollan multitud de resultados particulares que, al traducirlos al lenguaje moderno, muestran los conceptos esenciales del Cálculo, que de alguna manera yacían en ellos, pero de forma tan fragmentaria que sólo se referían a problemas individuales y no a teorías generales, aunque la perspectiva de generalización estaba implícita en esos métodos. Es precisamente la Geometría Analítica de Descartes la que favorece este proceso de búsqueda del algoritmo válido en general e independiente de la estructura geométrica intrínseca de cada problema. La generalidad del Álgebra frente a la especificidad de la Geometría, permite, por ejemplo, que en la traducción geométrico-algebraica en que consiste la Geometría Analítica, cada caso particular del trazado geométrico de la tangente, que es diferente y específico para cada curva, de acuerdo con su naturaleza geométrica deje de serlo y se pueda aplicar, mediante un proceso analítico, el mismo procedimiento a todas las curvas de las que se conozca su expresión analítica —su ecuación—, es decir, el proceso algorítmico de cálculo de una derivada. He aquí una muestra muy significativa de la trascendencia de la Geometría Analítica como herramienta que simplifica y reduce una extensa tipología de problemas geométricos —el trazado de las tangentes de las diversas curvas— a un único y concreto problema analítico —el cálculo de la derivada—.



Se trata de un apunte de van Schooten donde se explica el cálculo cartesiano de la tangente a la cicloide, sin duda la curva más importante sobre la que se ensayaron los métodos y técnicas infinitesimales que aparecieron a lo largo del siglo XVII como consecuencia del desarrollo de la Geometría Analítica de Descartes.

LA GEOMETRÍA ANALÍTICA Y EL DESCUBRIMIENTO DEL CÁLCULO INFITESIMAL



1. Página de *The Method of Fluxions* de Newton (Londres, 1737), con el trazado de la tangente a la conchoide. En esta obra Newton unifica la mayor parte de resultados sobre tangentes y cuadraturas que ocuparon a buena parte de los matemáticos del siglo XVII.
2. Página de *Nova Methodus pro Maximis et Minimis* de Leibniz (Leipzig, 1684), donde aparecen las reglas para derivar sumas, productos y cocientes. Esta obra es considerada como la primera publicación sobre Cálculo Infinitesimal de la historia.

«Apoyándose en hombros de gigantes» como Fermat y Descartes, apurando y exprimiendo la capacidad de unificación y generalización que permitían los procedimientos del Álgebra y de la Geometría Analítica, bajo concepciones y métodos infinitesimales diferentes, Newton y Leibniz fueron capaces de separar la ganga geométrica de los resultados de sus antecesores y encontrar el principio general que les permitiría reducir las operaciones fundamentales del Cálculo Infinitesimal a una operativa universalmente válida, concibiendo la idea de sustituir todas las operaciones de carácter geométrico involucradas en el cálculo de tangentes, por una única operación analítica, la derivación del Cálculo Diferencial, que resolvería, además por inversión -cálculo de la antiderivada o primitiva- los problemas de cuadraturas del Cálculo Integral, a través del *Teorema Fundamental del Cálculo*, que vincula ambos problemas y permite la obtención de cuadraturas mediante la resolución del problema inverso de la tangente.

En la brillante operación realizada por Newton y Leibniz, que se ha venido en llamar el descubrimiento del Cálculo Infinitesimal, y que es sin lugar a dudas, uno de los logros más importantes en la Historia del Pensamiento matemático, coadyuvó de forma decisiva la creación y aplicación de un simbolismo que propiciara traducir en fórmulas los resultados y en algoritmos los métodos, a base de utilizar los recursos algebraicos de la Geometría Analítica para independizar el discurso matemático de las figuras geométricas y con todo ello reconocer y aislar los conceptos fundamentales del Cálculo Infinitesimal y crear un cuerpo de doctrina dotado de algoritmos eficaces, es decir, funcionando como un Cálculo operacional que resuelve todos los problemas planteados anteriormente, mediante procedimientos uniformes y con una proyección a nuevos y más complicados problemas, como un potente instrumento de investigación. En palabras del propio Leibniz, se trataba de hacer con las técnicas del Cálculo lo mismo que había hecho Vieta con la Teoría de Ecuaciones y Descartes con la Geometría.

Con la fusión del *Análisis Geométrico* griego y la síntesis algebraica de Vieta, Descartes da a luz la Geometría Analítica, algo auténticamente revolucionario que consigue aniquilar, en gran parte, su raíz primigenia: la propia Geometría griega. Es la primera vez en la Historia moderna que se tiene el convencimiento de haber superado a los antiguos en algún aspecto. A este respecto, pueden ser muy oportuno recordar las reflexiones de O. Spengler, matemático y ensayista de éxito, de los años 20 del siglo pasado, en su libro *La decadencia de Occidente* donde desarrolla su teoría de la Historia como una sucesión de ciclos culturales. Para Spengler, no hay una Matemática que se desarrolle linealmente y cuyo contenido vaya acumulándose a través de los siglos, sino que hay tantas Matemáticas como culturas, como ciclos históricos y cabría distinguir entre otras, «la Matemática antigua», de la cultura griega y la «Matemática moderna» de la cultura occidental y cristiana, esencialmente distintas y que serían fruto y consecuencia de los componentes culturales de cada época y al mismo tiempo un factor decisivo en la configuración global de las mismas. En el capítulo I de la citada obra, titulado «El sentido de los números», Spengler (1998, p.144): escribe:

«No hay una Matemática, hay muchas Matemáticas. [...] El espíritu antiguo creó su Matemática casi de la nada. El espíritu occidental, histórico, había aprendido la Matemática antigua, y la poseía, aunque sólo exteriormente y sin incorporarla a su intimidad; hubo, pues, de crear la suya modificando y mejorando, al parecer, pero en realidad aniquilando la matemática euclidiana, que no le era adecuada. Pitágoras llevó acabo lo primero; Descartes lo segundo. Pero los dos actos son, en lo profundo, idénticos.»

En efecto, Descartes parte de la Geometría griega para construir algo completamente nuevo, que se convertirá en una Matemática universal, que, en particular apartará a la Geometría del eje central de la Matemática y la destrona de forma definitiva de su rango de reina de la Matemática de modo que la Matemática algebrizada de Descartes desplazará y ocupará el lugar de la Matemática geometrizada de los griegos. Descartes trastoca completamente la jerarquía de las diversas partes de la Matemática, de modo que en su pensamiento la Aritmética y el Álgebra no sólo preceden lógicamente a la Geometría, sino que, además, son superiores en esencia, porque al ser las ciencias de las magnitudes, son mucho más generales y aplicables, entre otros ámbitos al de la Geometría. Es más con Descartes el Álgebra figura en primera línea como técnica, como método de combinación y construcción, de tal modo que es el cálculo algebraico el que legitima los resultados de la nueva Geometría Analítica, que destruye los escrúpulos de los griegos relativos a la definición de las curvas y hace inútil la teoría de la construcción geométrica, que queda sustituida por la síntesis de la construcción algebraica. Así pues, Descartes, con su Geometría Analítica, otorga al Álgebra el gobierno soberano de las Matemáticas, hasta que en el siglo XIX Gauss afirme que es la Aritmética quien debe ocupar el trono de esta ciencia.

La importancia que la posteridad ha concedido a *La Geometría* de Descartes no coincide con los aspectos que interesaban a su autor, porque la idea esencial de futuro de la Geometría Analítica es la tan reiteradamente apuntada de la asociación de ecuaciones y curvas en un sistema de coordenadas, pero como bien señala Kline (1992, vol.1. p.419):

«Para Descartes esto [asociar ecuación y curva] no era más que un medio para un fin, a saber la resolución de problemas de construcciones geométricas.»

De hecho las construcciones geométricas que con tanto esmero describe Descartes en *La Geometría* desde el mismo comienzo de la obra han ido perdiendo importancia, porque a diferencia de lo que sucede en la Matemática griega y en la del siglo XVII, la constructibilidad ha dejado de ser una condición necesaria para la existencia. No obstante, más allá del acento en la construcción geométrica de las soluciones de las ecuaciones, por fortuna, Descartes también dio unos usos alternativos a las ecuaciones de las curvas, como en la resolución del *Problema de Pappus* (G.AT,VI,377-387) y en la determinación de las normales a las curvas (G.AT,VI,412-423), donde se sirve de las propiedades geométricas de las curvas para «construir» las raíces comunes de las ecuaciones determinando los puntos

de encuentro de las curvas correspondientes; y a la inversa, partir de las ecuaciones y de sus raíces para obtener los puntos de intersección de las curvas correspondientes. Por eso estos dos problemas han ocupado siempre un lugar distinguido en todo estudio de *La Geometría* de Descartes. De hecho aquí emerge el segundo Principio fundamental de la Geometría Analítica, que al sintetizar los desarrollos de Descartes (G.AT,VI, 417), se expresaría en la forma:

«El problema geométrico de la intersección de curvas se reconduce al problema algebraico de resolución de sistemas de ecuaciones.».

La solución de Descartes al problema del trazado de las normales a una curva en un punto se considera uno de los más brillantes logros del método cartesiano, y es, sin duda, uno de los más conocidos y apreciados. Descartes despliega una eficaz alfombra que enlaza la Geometría y el Álgebra –análisis geométrico de los problemas, síntesis algebraica del análisis mediante las ecuaciones y finalmente y traducción geométrica de los resultados algebraicos–. Descartes va escribiendo un verdadero diccionario reversible entre los dos lenguajes, el geométrico y el algebraico, que traduce no sólo lo gramatical –puntos por coordenadas, curvas por ecuaciones–, sino que va mucho más allá al alcanzar el dominio sintáctico –relaciones entre los elementos geométricos, por ejemplo, intersecciones de curvas, se traducen en relaciones entre los correspondientes elementos algebraicos, mediante sistemas de ecuaciones–. No es extraño que, con una retórica altisonante, Descartes considere que el problema del trazado de las normales a una curva en un punto es el más importante, no sólo de cuantos ha resuelto sino de cuantos aspirara a descubrir en Geometría (G.AT,VI, 413). Realmente es una de las muestras más representativas de las raíces cartesianas de la Geometría Analítica por la inmensa capacidad que desarrolla Descartes para establecer caminos reversibles que conectan una y otra vez el Álgebra y la Geometría, mediante los que Descartes aplica toda la potencia algorítmica del Álgebra para resolver problemas geométricos, que en ello consiste la virtualidad de la Geometría Analítica.

A pesar de ciertas reticencias por parte de Pascal, Barrow, Hobbes, e incluso Newton en la aceptación de los nuevos métodos de la Geometría Analítica de Descartes, la extensión de sus aplicaciones a todos los ámbitos de la Matemática fue cada vez más inexorable. A ello contribuyó sobremanera la difusión de las diversas ediciones críticas de van Schooten, plenas de comentarios explicativos, aclaraciones complementarias y apostillas extensivas de los métodos cartesianos del propio editor y de otros matemáticos.

En una de las entradas de la Enciclopedia, la que define el concepto de *Curva*, D'Alembert expresa la idea básica de la asociación de curvas y ecuaciones de la Geometría Analítica de Descartes en relación con los lugares geométricos de los antiguos:

«Descartes es el primero que haya pensado en expresar las líneas curvas por medio de ecuaciones. Esta idea sobre la que se funda la aplicación del Álgebra a la Geometría ha sido muy feliz y fecunda. Está claro que al resolver la ecuación de una curva se obtiene uno o varios valores de la ordenada y para una misma abscisa x , y que, en consecuencia, una curva trazada no es otra cosa que la solución geométrica de un problema indeterminado, es decir, que tiene una infinidad de soluciones: es lo que los antiguos llamaban lugar geométrico. Así pues, aunque ellos no pudieron tener la idea de expresar las curvas por medio de ecuaciones, habían visto, sin embargo, que las curvas geométricas no eran otra cosa que el lugar, es decir la sucesión de una infinidad de puntos que satisfacían a la misma cuestión. Por ejemplo, que el círculo era el lugar de todos los puntos que describen los vértices de los ángulos rectos, que se pueden formar sobre una misma base dada tomada como diámetro del círculo, y así para las demás curvas.»

Aunque la referencia de D'Alembert no hace ningún honor a su compatriota Fermat, tiene el interés de conocer el concepto que se tenía de *La Geometría* de Descartes, ciento treinta años después de su publicación.

En las dos centurias siguientes a la de Fermat y Descartes, matemáticos de la talla de Euler, Monge, Lagrange, Lacroix, etc. imprimirán a la Geometría Analítica un ingente desarrollo hasta situarla en el umbral de la Geometría Analítica moderna —la que se imparte hoy académicamente—, salvo en lo que se refiere al instrumento vectorial, que la convertirá en una de las vetas más fructíferas del pensamiento matemático, en un instrumento responsable de la increíble pujanza y del impresionante progreso que ha desarrollado la Matemática desde entonces. Por ejemplo, más allá del Análisis Matemático, del encuentro de esta materia con la Geometría Analítica aplicada al estudio de curvas y superficies surge, sobre todo tras los trabajos de Euler y Monge, la Geometría Diferencial.

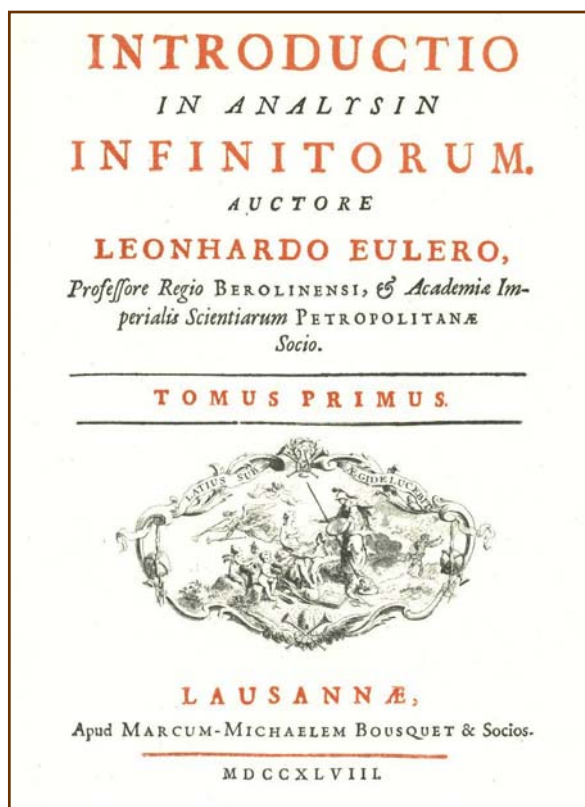
La Geometría Analítica goza de una serie de virtudes que hacen de ella una cómoda y didáctica herramienta matemática para el abordaje de los problemas geométricos. Por una parte permite que las cuestiones geométricas puedan formularse algebraicamente y que los objetivos geométricos puedan alcanzarse por medio del Álgebra, e inversamente, facilita la interpretación geométrica de los enunciados algebraicos, lo que propicia una percepción más intuitiva de su significado, con la posible apertura a la visión de nuevos problemas y conclusiones. Así lo ve Lagrange cuando escribe en sus *Leçons élémentaires de mathématiques* (1795):

«Mientras el Álgebra y la Geometría han estado separadas, su progreso ha sido lento y sus aplicaciones limitadas; pero cuando estas dos ciencias han sido vinculadas, se han prestado su fuerza mutuamente y han caminado juntas hacia la perfección.»

Ilustremos estas ideas de Lagrange mediante las originales motivaciones de Descartes, es decir, la asociación de curvas y ecuaciones. Toda curva construida según una regla geométrica se puede representar mediante su propia ecuación, que caracteriza a la curva y por ello es diferente de la que corresponde a otra curva distinta. De este modo, las propiedades geométricas de una curva pueden ser descubiertas sin más que examinar el comportamiento algebraico de su ecuación. Los vínculos entre curvas, por ejemplo, si se cortan o si son tangentes, se pueden predecir estudiando las relaciones algebraicas que existen entre sus ecuaciones. Por tanto, una vez que de la definición geométrica o cinemática de una curva hayamos derivado la ecuación algebraica que tiene asociada, el establecimiento de las propiedades geométricas restantes de la curva es una cuestión de cálculo algebraico. El poder algorítmico de la máquina simbólica creada por el Álgebra aplicado a la Geometría convierte a la Geometría Analítica en un magnífico instrumento de investigación. Así lo describe de forma magistral el historiador y filósofo de la ciencia Hull (1981, p.268):

«Su mérito consiste en que capacita para hallar resultados geométricos mediante un procedimiento sistemático que, si se aplica bien, no puede prácticamente fallar. El descubrimiento de nuevos teoremas particulares que en el caso de los métodos griegos, dependía siempre de la llama genial de la imaginación [que se fatiga según Descartes] o bien de la buena suerte [de la idea feliz], pasa a la esfera de la competencia profesional ordinaria. El progreso de la Geometría, esencial para el de la ciencia, se hace ahora mucho menos romántico, pero mucho más rápido de lo que fue. La Geometría Analítica ha afectado probablemente a la vida humana más profundamente, aunque menos violentamente, que la máquina de vapor o el aeroplano. La creación de nuevos métodos generales es de mucha mayor importancia que el descubrimiento de conocimientos particulares, por interesantes o útiles que éstos sean.»

EULER, EL SHAKESPEARE DE LAS MATEMÁTICAS



Portada de *Introductio in Analysin infinitorum* (1748) de Euler.

En la *Introductio* Euler trata sistemáticamente la Geometría con coordenadas Euler da un paso de gigante en la sistematización de la Geometría Analítica de dos y de tres dimensiones y es el introductor como Descartes de nuevas y definitivas notaciones.

De acuerdo con Descartes, Euler reconoce que «*La naturaleza de una curva cualquiera viene dada por una ecuación en dos variables, x, y* ». Euler sustituyó el término cartesiano de *construcción* por el de gráfico. La *Introductio* es uno de los primeros tratados donde se dan numerosos gráficos de curvas específicas dadas por sus ecuaciones indicando claramente las unidades utilizadas en el eje de abscisas. Quizá lo más sobresaliente de la *Introductio*, desde el punto de vista del desarrollo de la Geometría Analítica, sea el tratamiento general de los problemas. A partir de Euler surge una de las grandes ventajas de los métodos analíticos modernos frente al enfoque sintético de los antiguos: muchos casos específicos de las cuestiones geométricas pueden ser incluidos en una formulación global. Este aspecto de generalidad que permitía el Álgebra frente a la singularidad de cada problema en la Geometría de los griegos era uno de los rasgos más relevantes señalados por Descartes, pero había sido en parte pasado por alto durante la siguiente centuria, incluso en cuestiones muy básicas como por ejemplo en el estudio de la ecuación de la recta, que se subdividía en numerosos casos diferentes. Euler manejó ya una única forma general: $\alpha x + \beta y - a = 0$. Euler realizó un estudio exhaustivo de las cónicas y las cuádricas que alcanzó a su clasificación.

En Geometría elemental el resultado más famoso de Euler es la conocida *Recta de Euler*, sobre la que se sitúan tres de los puntos notables de un triángulo, el Ortocentro, el Baricentro y el Circuncentro, resultado de la más bella Geometría, que ignorado por todas las generaciones anteriores de geómetras, de Euclides a Descartes, de Apolonio a Fermat y de Arquímedes a Newton, fue obtenido por Euler como magistral aplicación de la Geometría Analítica.

La *Introductio* de Euler es una de las tratados más importantes de toda la Historia de la Matemática. C.B. Boyer dice sobre ella en su obra *History of Analytic Geometry* (Scripta Mathematica, New York, 1956), p.180:

«*La Introductio es probablemente el libro de texto más influyente de los tiempos modernos. Es el trabajo que convirtió el concepto de función en básico para las Matemáticas [...]. La Introductio es para el Análisis elemental lo que Los Elementos de Euclides es para la Geometría.*»

W. Dunham escribe: «*Euler es el Shakespeare de las Matemáticas*» (El Universo de las Matemáticas, Pirámide, Madrid, 1995, p.103).

Decía Euler: «*Mejor que de nuestro juicio, debemos fiarnos del cálculo algebraico.*»

LOS ARTÍFICES DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA MODERNA

MONGE Y LAGRANGE



Monge y Lagrange son dos de los matemáticos mas importantes de la época de la Revolución francesa. Ambos dieron un impulso inusitado a la Geometría Analítica.

Monge escribe algunas memorias, a modo de libros de texto para los cursos que se imparten en la Escuela Politécnica, que son auténticos manuales de Geometría Analítica. Sobresalen *Feuilles d'analyse appliquée a la géométrie* (1795) y *Application de l'algèbre à la géométrie* (1802), donde da una forma bastante definitiva a la Geometría Analítica. Además de generalizaciones de teoremas elementales como el Teorema de Pitágoras, aparecen las fórmulas de traslación y rotación de ejes para las ecuaciones del cambio de ejes de coordenadas, el tratamiento habitual de rectas y planos, la determinación del plano que pasa por tres puntos mediante coeficientes indeterminados, los cosenos directores, las condiciones de paralelismo y perpendicularidad, los ángulos entre rectas y planos, la determinación de los planos principales de una cuádrica, etc. Monge extendió para el tetraedro ortocéntrico el resultado de la *Recta de Euler* demostrando que el Baricentro está a doble distancia del Ortocentro que del Circuncentro. Ante la impresionante profusión de importantes resultados sobre Geometría Analítica obtenidos por Monge, no es extraño que Lagrange asombrado exclamara:

«Con sus aplicaciones del Análisis a la Geometría este demonio de hombre [Monge] conseguirá hacerse inmortal».

Lagrange también realizó importantes contribuciones a la Geometría Analítica, siempre bajo la filosofía de aplicar el carácter algorítmico del Álgebra para superar toda representación concreta. En sus desarrollos analíticos, su formulación, de una brillante elegancia, ya está muy próxima a la escritura del Álgebra Lineal, por ejemplo en cálculos que se asemejan a aspectos matriciales y determinantes. En el artículo *Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires* (1775), Lagrange resolvió, de forma puramente analítica, diversas cuestiones ya conocidas sobre la geometría del tetraedro: las fórmulas, en función de las coordenadas de los vértices, del área, centro de gravedad y volumen, así como los centros y radios de las esferas inscrita y circunscrita. Al desconocer la ecuación normal del plano, Lagrange obtiene las alturas como problemas de mínima distancia mediante los recursos del Cálculo Infinitesimal. Estos resultados están redactados de tal forma analítica que pueden ser entendidos sin aludir a figura alguna, como el propio Lagrange escribe en el artículo:

«Me siento halagado por el hecho de que las soluciones que voy a dar serán ciertamente de interés para los geómetras tanto por los métodos como por los resultados. Estas soluciones son puramente analíticas y pueden entenderse incluso sin figuras.»

Y efectivamente, no hay ni una figura a lo largo de este trabajo, lo que prefigura la ulterior concepción y estructura de la Geometría Analítica.

Con los trabajos mencionados de Monge y Lagrange, que para algunos historiadores representan una auténtica «Revolución analítica», la Geometría Analítica se convirtió en una rama de las Matemáticas independiente y cerrada, muy próxima al enfoque actual en cuanto a los métodos y la notación, salvo en lo que se refiere a las cuestiones vectoriales.

A partir de Descartes habrá dos tipos de tratamiento de los problemas geométricos que darán lugar a dos Geometrías, la Analítica, que aplicará el nuevo lenguaje algebraico y la Sintética, que prescindirá del mismo. Gracias al lenguaje analítico podrán resolverse problemas para los que el lenguaje geométrico puro era impotente, como hallar la normal o la tangente a una curva, calcular el área encerrada por una curva, máximos y mínimos, y demás problemas infinitesimales, cuya resolución se inicia en simultaneidad con el trabajo cartesiano. Pero aunque un problema pueda ser tratado de las dos formas, la analítica dependerá menos de la geometría de la figura y por tanto será más simple y más general. Por ejemplo, para demostrar que las alturas o mediatrices de un triángulo se cortan en un punto, en Geometría Sintética hay que considerar por separado la forma del triángulo según los ángulos, porque ello condiciona si la intersección tiene lugar en el interior o en el exterior del triángulo. En Geometría Analítica, los dos casos se consideran de consuno.

Las maravillosas virtudes de la Geometría Analítica, ponderadas por todos los grandes matemáticos a partir de Descartes, no suponen ni obligan a abandonar la Geometría Sintética, simplemente el profesional sabe que hay dos métodos geométricos y utilizará uno u otro según el objetivo del problema o según el gusto y el sentido estético.

¿Por qué renunciar a las diversas herramientas del taller geométrico?

Por ejemplo, el gran maestro Euler, en un pequeño artículo de 1747 que lleva el poco original título de *Variae demonstrationes geometricae*, aplica Geometría Sintética pura para demostrar, con una elegancia incomparable, la clásica y famosa *Fórmula de Herón* para el área del triángulo en función de los lados (Dunham, 2000, p.215). Pero en otro artículo de 1767, haciendo gala de una increíble intuición geométrica y de una audaz perseverancia algebraica, Euler descubre y demuestra, con la más bella y brillante aplicación de Geometría Analítica, el resultado que ha pasado a los manuales de Geometría con el nombre de *Recta de Euler*:

«En cualquier triángulo el Ortocentro, el Baricentro y el Circuncentro están sobre la misma recta. Además, el Baricentro está dos veces más lejos del Ortocentro que del Circuncentro.»

Conocidos ambos ejemplos, podemos decir que la versatilidad analítica, sintética algebraica, geométrica, teórica y práctica de Euler no tiene límites. Las dos demostraciones eulerianas podrían representar en su propia persona a los dos bandos, el analítico y el sintético, enfrentados en una controversia que se remonta al umbral de la aplicación de los métodos cartesianos. Por fortuna, para los grandes artífices de la Matemática, como el propio Euler o Monge, la polémica es de lo más estéril y debe ceñirse a cuestiones de tipo exclusivamente estético, sin elevarla a juicios de valor acerca de cuál de las dos Geometrías es superior, aunque se esté de acuerdo en que, ciertamente, por el automatismo del Álgebra Simbólica que se aplica en la Geometría Analítica, la Geometría Sintética, como dice W.Dunham (*Euler, el maestro de todos los matemáticos*. Nivola, Madrid, 2000. Cap.7. pp.229-230):

«requiere a menudo un punto de intuición, que habitualmente se conoce como inspiración. [...] ¿Cómo sabía Euler qué hacer [en uno y otro problema]. En última instancia, la respuesta a esta pregunta se halla en el misterioso territorio de la imaginación humana. [...] Por supuesto, uno puede preguntarse si la Geometría Analítica es realmente Geometría. Carente de gracia y elegancia, dependiente de lo que Carnot llamó “los jeroglíficos del Análisis”, ¿no es una mera aplicación de una fuerza algebraica inexorable?»

La fuerza incuestionable de la Geometría Analítica y su generalidad e independencia de la «idea feliz que trae la divina inspiración», permite entender que, por ejemplo, el discípulo de Monge, Poncelet, uno de los artífices de la Geometría Proyectiva moderna, autor de la importante obra *Traité des propriétés projectives des figures* (1822), y no precisamente un gran admirador de la Geometría Analítica, escribiera:

«Mientras la Geometría Analítica ofrece su característico método general y uniforme como forma de proceder en la resolución de problemas [...], la otra [la Geometría Sintética clásica] actúa al azar y depende completamente de la sagacidad de los que la emplean.»

Por la misma época, Lacroix, el matemático y profesor que más contribuyó a difundir la Geometría Analítica, formula, en su *Traité de calcul* (1810), un punto de vista próximo al actual:

«Obviando todas las construcciones geométricas se hará ver al lector que existe una manera de considerar la geometría que se podría llamar geometría analítica, y que consiste en deducir las propiedades de la extensión del mínimo número posible de principios por métodos puramente analíticos, de la misma manera que ha hecho Lagrange en su mecánica con respecto a las propiedades del equilibrio y del movimiento.»

Aun así, Lacroix fue algo reacio a titular sus obras con el nombre de «Geometría Analítica». Aunque este nombre había ido apareciendo subrepticamente a lo largo del siglo XVIII, parece que el primero que lo utiliza como título es Lefrançais en una edición de sus *Essais de géométrie* de 1804 y Biot en la edición de 1805 de sus *Essais de géométrie analytique*.

La Geometría Analítica se ha convertido en una poderosa herramienta de investigación y exploración científica, en el más útil instrumento para resolver con elegancia, rapidez y plenitud heurística las cuestiones geométricas. Al fundir en un único acto intelectual el descubrimiento y la demostración —el *ars inveniendi* y el *ars disserendi*— la Geometría Analítica permite alcanzar un objetivo básico que se había propuesto su fundador, Descartes:

«Ejercitar el entendimiento sin fatigar mucho la imaginación» (DM.AT,VI,17–18).

La Geometría Analítica, de origen remoto en el Análisis Geométrico de los griegos con su incipiente uso retórico de coordenadas en Apolonio y Pappus y su apoyo en la mecánica algorítmica del Álgebra simbólica de Vieta, domina el pensamiento matemático desde la época de Descartes hasta nuestros días. El empleo sistemático de las coordenadas tratadas con el cálculo algebraico, es una potente herramienta algorítmica de resolución de problemas geométricos, un método de un poder y una universalidad tan eficientes en la Matemática, que supera cualquier otro instrumento anterior, y más allá de la Geometría y de la Matemática, la Geometría Analítica ha revolucionado todas las ciencias relacionadas con el tiempo y el espacio, a través del concepto de función, la herramienta más importante para el conocimiento y dominio de la naturaleza. Como escribe Kline (1992, vol.1, p.425):

«La Geometría Analítica cambió la faz de las Matemáticas».

La fuerza algebraica inexorable de la Geometría Analítica, su universalidad y su autonomía de la «fortuna de la inspiración», democratiza la Geometría y la Matemática en general y pone al servicio de la Humanidad, es decir, de cualquier persona normal, de todo escolar que tenga pequeños rudimentos de Álgebra, un eficaz instrumento que potencia la intuición, facilita la investigación y promueve que no sea imprescindible un gran talento y una gran sagacidad y sutileza intelectual en la resolución de los problemas geométricos. Por eso nos permitimos completar la frase anterior de Kline para sentenciar:

«La Geometría Analítica cambió la faz de las Matemáticas y de la Educación matemática.»

Bibliografía

Obras de Descartes

1. DESCARTES, R.: *Vie et Oeuvres de Descartes*. Publiées par C. Adam y P. Tannery. 13 volúmenes. Léopold Cerf, imprimeur Paris, 1897-1913.
2. DESCARTES, R.: *La Geometría*. Espasa-Calpe. Buenos Aires, 1947.
3. DESCARTES, R.: *The Geometry*. Dover, New York, 1954.
4. DESCARTES, R.: *Oeuvres de Descartes*. Publiées par C. Adam y P. Tannery. 12 volúmenes. Librairie philosophique J. Vrin. Paris, 1964-74.
5. DESCARTES, R.: *Discurso del Método / Reglas para la dirección de la mente*. Orbis. Barcelona, 1983.
6. DESCARTES, R.: *Reglas para la dirección del espíritu*. Alianza Editorial, 1034, Madrid, 1989.
7. DESCARTES, R.: *Discurso del Método*. Alianza Editorial, 736, Madrid, 1991.
8. DESCARTES, R.: *La Geometría*. Institut d'Estudis Catalans. Barcelona, 1999.
9. DESCARTES, R.: *Discurso del Método / Meditaciones Metafísicas*. Austral. Madrid, 2002.

Obras sobre Descartes

10. ÁLVAREZ, C.: *Descartes y la ciencia del siglo XVII*. Siglo XXI. México, 2000. Caps. 1, 3, 4.
11. CHICA, A.: *Descartes, Geometría y Método*. Nivola. Madrid, 2001.
12. CROMBIE, A. C.: *Grandes Matemáticos. R. Descartes*. Investigación y Ciencia. Cap. 3. 18-24. Barcelona, 1995.
13. GARIN, E.: *Descartes*. Crítica, Barcelona, 1989.
14. GÓMEZ PIN, V.: *Descartes*. Barcanova. Barcelona, 1984.
15. MARITAIN, J.: *Le songe de Descartes*. Buchet/Chastel. Paris, 1922.
16. RODIS-LEWIS, G.: *Descartes et le Rationalisme*. PUF. Paris, 1996.
17. ROSSELLINI, R.: *Cartesius*. RAI, una produzione Orizzonte 2000. 180'.
18. SIRVEN, J.: *Les années d'apprentissage de Descartes*. Albi. Paris, 1928.
19. SHEA, W. R.: *La magia de los números y el movimiento: la carrera científica de Descartes*. Alianza Universidad, 746, Madrid, 1993.
20. TURRÓ, S.: *Descartes. Del Hermetismo a la nueva Ciencia*. Anthropos. Barcelona, 1985.
21. VALENSIN, A.: *Imágenes de Descartes*. Cuadernos Taurus. Madrid, 1963.
22. VUILLEMIN, J.: *Mathématiques et métaphysique chez Descartes*. PUF. Paris, 1987.
23. WILLIAMS, B.: *Descartes*. Catedra, Teorema, Madrid, 1996.

Obras originales sobre La Matemática Griega

24. EUCLIDES: *Elementos*. Traducción y notas de M. L. Puertas. Gredos, Madrid, 1996.
25. HEAT, T. L.: *The thirteen books of The Elements*. 3 Vols. Dover, New York, 1956.
26. VER ECKE, P.: *Les Coniques d'Apolonius de Pergue*. Blanchard, Paris, 1959.
27. VER ECKE, P.: *Diophante d'Alexandrie. Les six livres arithmétiques*. Blanchard, Paris, 1959.
28. VER ECKE, P.: *Les Oeuvres complètes d'Archimède*. Vaillant-Carmanne, Liège, 1960.
29. VER ECKE, P.: *Pappus d'Alexandrie. La Collection Mathématique*. Blanchard. Paris, 1982.
30. VERA, F.: *Científicos griegos* (Ediciones en español de *Los Elementos* de Euclides, *Las Cónicas* de Apolonio, *La Aritmética* de Diofanto y *La Colección Matemática* de Pappus). Aguilar, Madrid, 1970.

Obras originales de otros autores

31. VIETA: *Introduction a l'Art Analytique*. Traduit par M. F. Ritter. 1867.
32. VIETA: *The Analytic Art*. Translated by T. R. Witmer. The Kent University Press, Ohio, 1983.
33. VIETA: *Oeuvres Mathématiques*. Traduction du latin in français par J. Peyroux. Blanchard, Paris, 1991-92.
34. EULER, L.: *Introducción al Análisis de los infinitos*. Edición crítica con facsímil de A. Durán de la obra de Euler *Introductio in Analysin Infinitorum*. SAEM Thales, RSME, Sevilla, 2003.
35. FERMAT, P.: *Oeuvres*. 4 vols. C. Henry, P. Tannery, eds. Gauthier-Villars. Paris, 1891-1912.

Obras generales de Historia de las Matemáticas

36. BELL, E. T.: *Les grands mathématiciens*. Payot. Paris, 1950. Caps. 3, 4.
37. BELL, E. T.: *Historia de las Matemáticas*. Fondo de Cultura Económica. México, D.F., 1985. Caps. 3, 6, 7.
38. BOYER, C. B.: *History of Analytic Geometry*. Scripta Mathematica. Yeshiva Univ. New York, 1956.
39. BOYER, C. B.: *Historia de las Matemáticas*. Alianza Universidad. Madrid. 1986. Caps. 4, 7, 9, 11, 16, 17, 21, 22.

40. CAJORI, F.: *A History of Greek Mathematics*. The MacMillan Company. Londres, 1919. Cap.11.
41. CAJORI, F.: *A History of mathematical notations*. Dover, New York, 1983.
42. COLERUS, E.: *Breve historia de las Matemáticas*, Vol.2, Cap.1. Doncel. Madrid, 1972.
43. DAINVILLE, F.: *L'éducation des jésuites (XVI-XVII siècles)*. Editions de minuit. París, 1978. Cap.3
44. D'ALEMBERT, J.: *Discurso preliminar de la Enciclopedia*. Losada, Buenos Aires, 1954.
45. D'ALEMBERT, J.: *Discurso preliminar de la Enciclopedia*. Orbis, Barcelona, 1984.
46. DEDRON, P.: *Mathématiques et Mathématiciens*. Magnard, París, 1959. Cap.X.3.
47. DUNHAM, W.: *Euler, el maestro de todos los matemáticos*. Nivola, Madrid, 2000. Cap.7.
48. EVES, H.: *An Introduction to the History of Mathematics*. CBS College Publishing, New York, 1983. Caps. 5,6,10.
49. EVES, H.: *Great Moments in Mathematics*. The math association of America, 1977. Vol.1, Cap.23.
50. GELFAND, E.: *EL método de las coordenadas*. MIR, Moscú, 1981
51. GONZALEZ URBANEJA, P.M.: *Las raíces del Cálculo Infinitesimal en el siglo XVII*. Alianza. Madrid, 1992. Cap.1.2.
52. GONZALEZ URBANEJA, P.M.: *El Pensament geomètric en el món grec*. ICE. Universitat de Barcelona, 1996. Caps. 8,10,12.
53. GONZALEZ URBANEJA, P.M.: *La Matemática de la Revolución Francesa*. Seminario Orotava de Historia de la Ciencia, Actas, año II, Las Palmas, 1997.
54. GONZALEZ URBANEJA, P.M.: *Matemáticas y matemáticos en el mundo griego (en El legado de las Matemáticas. De Euclides a Newton. Los genios a través de sus libros)*. Consejería de Cultura. Junta de Andalucía. Sevilla, 2000.
55. GONZALEZ URBANEJA, P.M.: *Los orígenes de la Geometría Analítica*. Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia. Tenerife, 2003.
56. HEAT, T.L.: *A History of Greek Mathematics*. 2 Vols. Dover, New York, 1981. Caps.5,6,9,10,11,14,19,20.
57. KLEIN, J.: *Greek mathematical thought and the origin of algebra*. Dover, New York, 1992. Caps.10,11.
58. KLINE, M.: *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*. 3 Vols. Alianza Univ. Madrid, 1992. Caps.3,4,5,15,23.
59. LABRADOR, C.: *La ratio studiorum de los Jesuitas*. Universidad Pontificia de Comillas, Madrid, 1986.
60. LORIA, G.: *Histoire des sciences mathématiques dans l'antiquité hellénique*. Gauthiers-Villars, París, 1929. Caps.2,3.
61. MALET, A.: *El Álgebra en el período renacentista. La recuperación de los clásicos griegos*. PPU. Barcelona, 1989. Caps.1,2, Ap.1,3,4.
62. MONTESINOS, J (Compilador): *Historia de la Geometría griega*. Seminario Orotava de Historia de la Ciencia. Tenerife, 1992.
63. MONTESINOS, J.: *Historia de las Matemáticas en la Enseñanza Secundaria*. Síntesis. Madrid.2000. Caps.1,6.
64. MONTUCLA, J.F.: *Histoire des Mathématiques*. Tomo II, Libro II, Cap.V. Blanchard. París, 1968.
65. NICOLAU, F.: *La Matemática i els matemàtics*. Claret, Barcelona, 2000. Cap.29.
66. REY PASTOR, J.; BABINI, J.: *Historia de la Matemática*. Espasa-Calpe, Buenos Aires, 1951. Caps. III.19, III.22, VI.33.
67. REY PASTOR, J.; BABINI, J.: *Historia de la Matemática*. Gedisa, 2 Vols. Barcelona, 1984. Caps. 3,4,7,8,9.
68. RÍBNIKOV, K.: *Historia de las Matemáticas*. MIR, Moscú, 1974. Cap. 5.2.
69. ROUSE BALL, W.: *Histoire des Mathématiques*. Libr. scientifique A.Hermann, París, 1906. Cap.15.
70. SCOTT, J.F.: *A History of Mathematics*. Taylor and Francis, New York, 1975. Cap.7.
71. SMITH, D.E.: *History of Mathematics*. Dover. New York, 1959. Vol.II, Cap.5.8.
72. SMITH, D.E.: *A Source Book in Mathematics*. Dover. 2 Vols. New York. Caps. III.14, III.15.
73. STRUIK, D.J.: *A Source Book in Mathematics, 1200-1800*. Harvard University Press, Cambridge, 1969. Caps.2.5,3.1,3.3,3.4,3.5.
74. UNIVERSIDAD COMPLUTENSE: *Libros antiguos de Matemáticas*. Madrid, 2000.
75. VAN DER WAERDEN, B.L.: *Geometry and Algebra in Ancients civilizations*. Springer-V, Berlín, 1983. Caps.3,4.
76. VAN DER WAERDEN, B.L.: *A History of Algebra*. Springer-Verlag. Berlín, 1985. Cap.3.
77. VARIOS AUTORES: *Sigma, el mundo de las Matemáticas*. Grijalbo. Barcelona, 1969. Vol.I, Cap.7.
78. VARIOS AUTORES: *Mathématiques a fil des âges*. Gauthiers-Villars, París, 1990. Cap.6.
79. VERA, F.: *Breve Historia de la Geometría*. Losada. Buenos Aires. 1963. Caps. 2,3,4,5,7.
80. VERA, F.: *Veinte matemáticos célebres*. Mirasol. Buenos Aires, 1961. Cap.5.
81. WUSSING, H.: *Lecciones de Historia de las Matemáticas*. Siglo XXI. Madrid, 1989. Cap.7.2.

Obras de Filosofía de la Ciencia y de las Matemáticas

82. BRUNSCHVIC, G.L.: *Les étapes de la Philosophie Mathématique*. Blanchard, París, 1972. Cap. 7.
83. GARCÍA FONT, J.: *Historia de la Ciencia*. Barcelona, 1980. Caps. 5, 7, 14.
84. HULL, L.W.H.: *Historia y Filosofía de la Ciencia*. Ariel, Barcelona, 1981. Cap. 8.
85. KLINE, M.: *Matemáticas, la pérdida de la certidumbre*. Siglo XXI, Madrid, 1985. Caps. 2, 3.
86. LORENZO, J.: *Introducción al estilo matemático*. Tecnos, Madrid, 1971. Cap. 4.
87. MAGEE, B.: *Historia de la Filosofía*. Blume. Barcelona, 1999. Caps. 1, 4.
88. RUNES, D.: *Historia ilustrada de la Filosofía*. Grijalbo. México, 1967.
89. RUSSELL, B.: *Historia de la Filosofía occidental*. Austral. Madrid, 1995. Vol. 2. Libro 3. Cap. 9.
90. SPENGLER, O.: *La decadencia de Occidente*. Austral, Madrid, 1998. Cap. I. 1.
91. VARIOS AUTORES: *Historia del Pensamiento*. Orbis, Vol. 2. Cap. 3. Barcelona, 1983.

Artículos de revistas científicas

92. BERTHET, J.: *La méthode de Descartes avant le discours*. Rev. de Métaphysique, 1896, 388-415.
93. BOS, H.J.M.: *On the Representation of Curves in Descartes' Géométrie*. Archiv of History of Exactes Sciences, 24, 295-338, 1981.
94. BOYER, C.B.: *Early contributions to Analytic Geometry*. Scripta Mathematica, XIX, 1953, 97-108, 230-238.
95. BOYER, C.B.: *Analytic Geometry in the alexandrian age*. Scripta Mathematica, XX, 1954, 30-36, 143-154.
96. BOYER, C.B.: *Fermat and Descartes*. Scripta Mathematica, XX, 1955. 189-217.
97. BOYER, C.B.: *Post-Cartesian Analytic Geometry*. Scripta Mathematica, XXI, 1956, 101-135.
98. BOYER, C.B.: *Mathématiciens of the French Revolution*. Scripta Mathematica. XXV, 1960, 11-31.
99. CAÑÓN, C.: *El alcance de un sueño. La Mathesis Universales (en Descartes, el sueño y la razón)*. Revista Quark. UPF. Barcelona, abril-junio, 1996. 22-28.
100. COOLIDGE, J.L.: *The Origin of Analytic Geometry*. Osiris, I, 1936, 231-250.
101. DAINVILLE, F.: *L'enseignement des mathématiques dand les Collèges Jésuites de France du XVIe au XVIIIe siècle*. Revue d'Histoire des Sciences, 1954, 6-21.
102. GALUZZI, M.: *Il Problema della Tangenti nella "Géométrie" di Descartes*. Archiv of History of Exactes Sciences, 22, 1980, 37-51.
103. GIBSON, B.: *La Géométrie de Descartes au point de vue de sa méthode*. Revue de Métaphysique, 1896, 387-398.
104. GONZALEZ URBANEJA, P.M.: *La aparición de los inconmensurables*. Mundo científico, nº 220, 2/2001.
105. MAHONEY, M.S.: *Another Look at Greek Geometrical Analysis*. Archiv of History of Exactes Sciences, 5, 1968-69, 318-348.
106. MOLLAND, G.: *Shifting the foundations: Descartes transformation of ancient geometry*. Historia Mathematica, 3, 1976, 21-49.
107. RITTER, F.: *François Viète, inventeur de l'algebre moderne, 1540-1603, essai sur sa vie et son oeuvre*. Revue occidentale philosophique sociale et politique, 10 (1895) 234-74.
108. VARIOS AUTORES. *Descartes, les nouvelles lectures* (Artículos sobre Descartes en el cuarto centenario de su nacimiento). Magazine littéraire, 342. París, abril, 1996.
109. VARIOS AUTORES. Artículos en la Prensa española sobre Descartes en el cuarto centenario de su nacimiento. LA VANGUARDIA, 26/3/96; EL PAÍS, 3/1/96, 2/3/96, 25/3/96, 30/3/96, 19/7/96; EL MUNDO, 23/3/96; AVUI 27/3/96, ABC, 29/3/96, 20/4/96, 4/5/96; HISTORIA Y VIDA, 341, 8/96.
110. WHITESIDE, D.T.: *Patterns of mathematical thought in de later 17th century*. Archiv of History of Exactes Sciences, 1, 1960-62, Cap. 7, págs. 290-311.

La Historia de la Matemática como recurso didáctico e instrumento de integración cultural de la Matemática

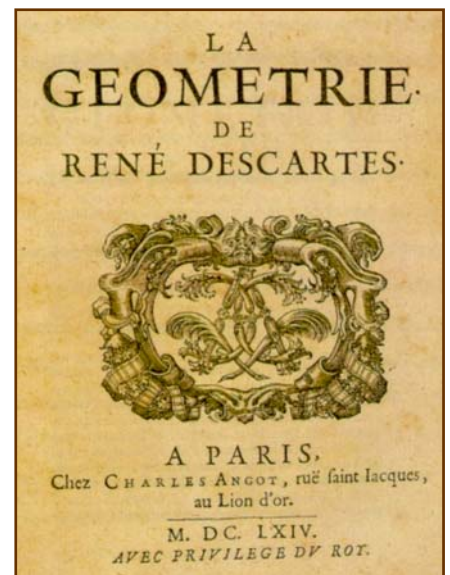
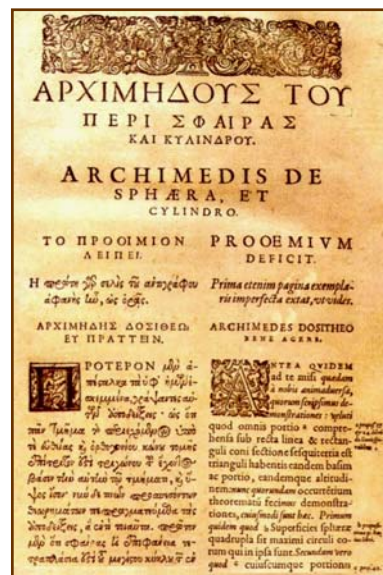
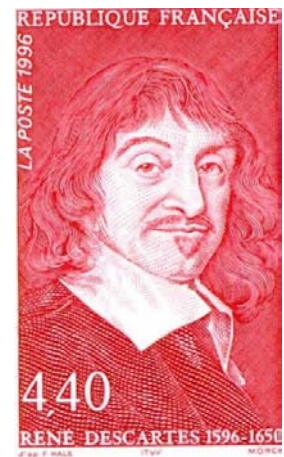
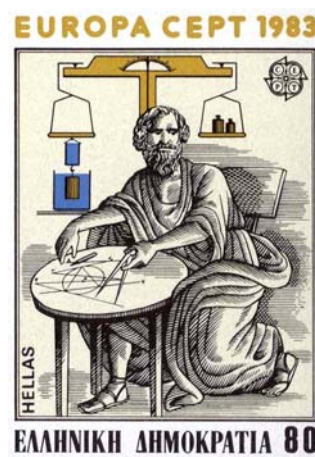
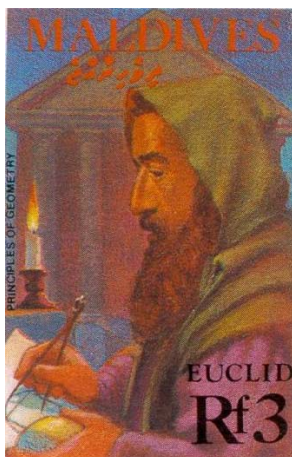
HISTORIA DE LA MATEMÁTICA PARA LA ENSEÑANZA SECUNDARIA

ESTUDIO CRÍTICO DE TRES OBRAS CUMBRES DE LA LITERATURA MATEMÁTICA:

LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES

EL MÉTODO DE ARQUÍMEDES

LA GEOMETRÍA DE DESCARTES



Pedro Miguel González Urbaneja
pgonzale@pie.xtec.es