EL MÉTODO SOBRE LOS TEOREMAS

MECÁNICOS DE ARQUÍMEDES

> ***Estoy convencido de que el método mecánico no será menos útil para demostrar los propios teoremas. Pues algunos de los que primero se me hicieron patentes mecánicamente, recibieron luego demostración geométricamente* [...] *pues es más fácil, después de haber adquirido por ese método cierto conocimiento de las cuestiones objeto de investigación, dar luego la demostración, que investigar sin ningún conocimiento previo*.**
> **Arquímedes. *El Método*. Preámbulo dirigido a Eratóstenes.**
>
> ***La imaginación no actúa menos en un geómetra que crea que en un poeta que inventa*. [...] *De todos los grandes hombres de la antigüedad, es acaso Arquímedes el que más merece figurar al lado de Homero.***
> **D'Alembert. *Discurso preliminar de la Enciclopedia.* Orbis, Barcelona, 1984. p.63.**
>
> ***Arquímedes es el científico que ha llegado a la más alta cima de la abstracción, y, según Plutarco, la muerte le acechaba, en uno de sus momentos de éxtasis.***
> **F.Vera. *Arquímedes* (en *Científicos griegos*). Aguilar, 1970. p.11.**
>
> ***Entre todos los trabajos que se refieren a las disciplinas matemáticas, parece que el primer lugar puede ser reivindicado por los descubrimientos de Arquímedes, que confunden a las almas por el milagro de su sutilidad.***
> **Torricelli. *Opera Geometrica.* Florencia, 1644. Proemio.**

Introducción: del *Método* de Arquímedes al Cálculo Integral

Arquímedes es reconocido, con sorprendente unanimidad, como el más importante de los matemáticos de la antigüedad, sus principales obras fueron impresas y traducidas al latín por vez primera entre 1503 y 1588, ejerciendo una decisiva influencia sobre el pensamiento de esa época. El estudioso contemporáneo, A.Koyré, llega a afirmar –en su obra *Estudios de Historia del Pensamiento Científico*– que se podría resumir el trabajo científico del siglo XVI en la admisión y comprensión gradual de la obra de Arquímedes. En la centuria siguiente Benedetti, Stevin, Galileo, Cavalieri, Kepler, Torricelli y muchos otros reconocerán la inmensa deuda con el «*sobrehumano Arquímedes*», cuya obra, pródiga en asombrosos resultados y modelo de exposición rigurosa, constituyó un sólido punto de partida tanto para la configuración de la nueva física como para la invención del cálculo infinitesimal.

Como veremos, con frecuencia, sin soporte en fuentes fidedignas y por tanto sin fundamento histórico serio, a Arquímedes se le atribuyen desde la más remota antigüedad toda clase de inventos, algunos de ellos comentados y reproducidos por Leonardo, de quien Arquímedes sería digno antecesor. Esto quiere decir que la genialidad y la capacidad inventiva de Arquímedes también en el campo de la Mecánica Aplicada forma parte de la tradición. La atribución, más o menos impropia, a Arquímedes, de algunos inventos puede provenir del hecho de que desde antiguo el sabio tuvo la gloria de ver adjetivado su nombre en las fuentes históricas y literarias, de modo que invento arquimédeo o arquimediano tanto podría significar un artilugio diseñado por el propio Arquímedes como un instrumento realizado con el ingenio, el arte y la sutileza de Arquímedes. A título de ejemplo mencionemos la célebre *Esfera de Arquímedes*, una especie de planetario que reproducía de modo mecánico el movimiento de los cuerpos celestes del sistema solar entonces conocido, a saber: el sol, la luna y los cinco planetas, emulando, asimismo, la formación de los eclipses y la descarga de ciertos fenómenos atmosféricos, como el rayo y el trueno. Según Pappus y Proclo, la descripción del ingenio habría sido hecha por Arquímedes en la obra *Esferopea*, ahora perdida. Muchos escritores –Ovidio, Sexto Empírico, Claudiano, Lactancio, Escoto, Mirabella, Mazuchelli, Favaro, Cardano, ...– han hablado de la famosa *Esfera de Arquímedes*. Destaquemos entre todos a Cicerón (*Tusculanae disputationes*, I.63):

> «*Cuando Arquímedes fijó en una Esfera los movimientos del sol, de la luna y de los cinco planetas, realizó lo mismo que el Dios de Platón, que en el Timeo construyó el mundo de manera que una sola revolución rigiese movimientos muy distintos, combinando lentitud y celeridad. Y si esto en este mundo no se puede hacer sin Dios, tampoco Arquímedes, ciertamente sin una inteligencia divina habría podido imitar en una Esfera los mismos movimientos.*
>
> [...] *Tuvo más ingenio Arquímedes al imitar las órbitas de la Esfera, que la naturaleza al concebirlas.*»

Vemos que la Literatura ha embellecido la figura de Arquímedes a quien se describe como el sagaz ingeniero de la antigüedad que pone su ingenio al servicio de la construcción de increíbles máquinas que multiplican hasta lo inverosímil el trabajo de los hombres, algunas de las cuales destinará al servicio de la incansable defensa de su ciudad natal Siracusa ante las embestidas de los ejércitos romanos.

Pero más allá del romanticismo que las narraciones más o menos fantásticas ha impregnado a la figura de Arquímedes, interesa sobremanera a la Historia de la Ciencia y en particular a la Historia de la Matemática, su ingente contribución al engrandecimiento del patrimonio matemático de su época, en una triple vertiente, la de la propia ampliación considerable de los conocimientos matemáticos euclídeos, la consolidación del impecable procedimiento demostrativo y lo que desde el punto de vista heurístico es todavía más importante: la aplicación de una metodología nueva en el alumbramiento del descubrimiento matemático.

Sin descuidar los dos primeros aspectos, el tratado de Arquímedes que nos proponemos estudiar –*El método sobre los teoremas mecánicos*–, cuyo largo título indicaremos por *EL MÉTODO*, cubre la tercera cuestión, que desarrollaremos con amplitud, al ver cómo

Arquímedes aplica la famosa ley que rige la más sencilla de sus máquinas –*La Ley de la Palanca*– y da muestras de una agilidad mental y una ductilidad investigadora que combina el rigor intelectual con la orientación natural de la intuición sensorial. Con ello, Arquímedes es capaz de obviar e incluso de desafiar los presupuestos ideológicos de la Filosofía platónica de la Matemática –que desdeñaba hasta la condena las aplicaciones prácticas de la Matemática– para vincular la investigación teórica de la especulación abstracta con las realizaciones técnicas, nacidas de la necesidad de resolver problemas concretos, desarrollando una concepción matemático-experimental que inaugura una tradición científica –llamada después *Filosofía Natural* y mucho más tarde *Física Matemática*–, que retomada por Galileo, establece las bases de la Revolución científica del siglo XVII.

Estamos ante una obra que nos despierta una gran inquietud científica, e incluso nos incita a especular con fantasías ucrónicas. *EL MÉTODO* sólo es conocido por la comunidad científica internacional desde 1906, cuando el brillante helenista e historiador científico J.L.Heiberg, lo descubre en novelescas circunstancias. Es, por lo tanto, una obra de Arquímedes que no ha ejercido directamente influencia sobre la trayectoria conocida del pensamiento científico, pero que, en cierto modo, ha estado presente como una especie de *variable oculta*, al suscitarse a lo largo de la historia discusiones acerca de la posesión por parte de Arquímedes de algún presunto método de descubrimiento que el sabio había silenciado. Una vez conocido *EL MÉTODO*, la relectura de las otras obras de Arquímedes nos obliga a plantearnos diversas cuestiones epistemológicas acerca de la relación entre procesos de descubrimiento–invención y métodos de exposición–demostración, reflexiones que nos conducirán a interrogarnos acerca de las relaciones entre la dominante escuela deductiva platónico-euclídea y la nebulosa y subordinada escuela inductiva de Demócrito. De aquí a cuestionarse si es posible que *EL MÉTODO* haya sido conocido en alguna época, o a preguntarse cómo hubiera sido la Historia de la Ciencia si se hubiese conocido *EL MÉTODO* desde el Renacimiento, sólo hay un paso, que algún osado estudioso de la ciencia griega se ha atrevido a dar.

El pensamiento y la obra de Arquímedes han ejercido siempre una irresistible atracción, por su genialidad y originalidad, que hacen de su legado un manantial de savia singular para muchos caminos de la Ciencia y especialmente de la Matemática, donde se le considera uno de sus cultivadores más grandes de todos los tiempos. En su penetrante conciencia del rigor, Arquímedes compartía con los clásicos, en particular los de la escuela euclídea, la potencia demostrativa, pero en la genialidad de la invención superó con creces a todos sus coetáneos y antecesores. Es precisamente de la conjunción de ambas de donde Arquímedes obtenía su instrumental creativo. Al desmarcarse del idealismo matemático platónico coetáneo, Arquímedes no descarta ningún procedimiento técnico en su invención, sino que aprovecha cuanto habían desdeñado o proscrito los que le precedieron, lo mecánico, lo físico, lo operativo, y todo lo que le ofrece la realidad, por irregular y corpórea que sea, como elementos de una investigación objetiva precedente, a la que sigue, bajo un espíritu de rigor, la demostración de todo cuanto en la fase inventiva anterior ha intuido.

Arquímedes lleva por tanto una doble actividad como matemático, la inventiva y la demostrativa, pero en sus grandes tratados clásicos sólo da cuenta de la segunda, produciendo una gran admiración sus magníficos resultados matemáticos, pero también una gran perplejidad, ante la ocultación del camino seguido en la investigación. Sólo en una obra, *El Método sobre los teoremas mecánicos*, Arquímedes comunica, de forma heurística, las vías y los procedimientos mecánicos que utilizaba en sus descubrimientos. Debido a que la obra de Arquímedes permaneció ignorada durante siglos, hasta comienzos del siglo XX, muchos matemáticos estaban convencidos de una intuición que gravitaba sobre su creatividad, según la cual Arquímedes había utilizado un método singularmente original en su investigación, que habría mantenido en secreto para la posteridad.

Tras esta introducción donde se ha presentado a Arquímedes y al *MÉTODO*, vamos a describir el estilo matemático de Arquímedes de una excepcional originalidad; haremos una síntesis de su inmensa aportación matemática y estudiaremos la cuestión epistemológica de cómo se interpenetran en la Matemática de Arquímedes el descubrimiento y la demostración.

A continuación, pasamos a estudiar ya propiamente *EL MÉTODO* de Arquímedes, su estructura y naturaleza como tratado matemático, que contiene los procedimientos heurísticos de tipo mecánico que Arquímedes utilizaba en sus extraordinarios descubrimientos y en la preparación de la demostración de los resultados matemáticos. Sigue el relato de las vicisitudes históricas sufridas por este tratado de Arquímedes y la encomiable labor de «*arqueología matemática*» realizada por J.L. Heiberg en su reconstrucción. Se describe el contenido de todas las proposiciones del *MÉTODO* y se estudia en profundidad las dos primeras proposiciones –la *Cuadratura del segmento parabólico* y *la Cubatura de la esfera*–, que además de ser las más sencillas y significativas, desde el punto de vista didáctico, para ilustrar el *método mecánico* de Arquímedes, nos dan un modelo de su aplicación al cálculo de áreas y de volúmenes. También se hace un Análisis crítico del *método mecánico* de Arquímedes, en el que, deliberadamente, de forma anacrónica se compara la práctica arquimediana con los procedimientos del Cálculo Integral, para poder explicar por qué, con métodos no ortodoxos del todo, pudo Arquímedes obtener resultados absolutamente correctos.

Con ello entramos en la última parte, donde tras describir quizá el ejemplo más representativo de la aplicación del método demostrativo de exhaución –*la Cuadratura de la Espiral*– estudiamos la trascendente influencia de Arquímedes en la génesis del Cálculo Integral, a través de dos analogías manifiestas –*el método mecánico de descubrimiento* y *los Indivisibles* del siglo XVII, por una parte, y *el método de demostración por exhaución* y *los límites* de la aritmetización del Análisis del siglo XIX, por otra–.

A lo largo de la exposición aparecen comentarios alusivos a las relaciones del *MÉTODO* con las restantes obras de Arquímedes, así como referencias, más o menos legendarias, a algunos de sus inventos y a importantes episodios, a caballo entre la mitología y la realidad, de la vida del más egregio científico del mundo clásico griego, de gran trascendencia en la historia política y militar de su tiempo.

EL MÉTODO de Arquímedes es una obra fundamental en la moderna Historia de las Ciencias, una pieza básica y ejemplar porque su lectura conduce a interrogarnos acerca de los resultados y de los procedimientos de investigación que se utilizaban en una de las épocas más importantes en la historia de nuestra cultura. El tratado de Arquímedes tiene un interés singular tanto desde el punto de vista del proceso heurístico, como por su inconmensurable valor científico y como documento histórico.

Con este estudio sobre uno de los tratados más importantes de la Matemática griega queremos rendir tributo a un pensamiento ético que reza: «*nuestra recompensa se encuentra en el esfuerzo y no en el resultado*» que en otro ámbito expresaría que «*el camino es lo más importante del viaje, incluso más que la meta*», sentencias que aplicadas al descubrimiento científico nos indican que «*el método es al menos tan importante como el resultado*», pensamiento que mucho mejor expresado en palabras del eximio científico y amigo de Napoleón, Laplace (*Oeuvres. Mécanique Céleste*, Académie des Sciences, París, 1878, vol.3), diría:

> «*El conocimiento del método del hombre de genio no es menos útil al progreso de la ciencia e incluso a su propia gloria que sus descubrimientos.*»

La originalidad y el estilo matemáticos de Arquímedes

Arquímedes es, sin duda, uno de los científicos más conocidos en la Historia de la Cultura, ya no sólo porque su nombre está asociado al célebre Principio de la Hidrostática que lleva su nombre, sino también por ser uno de los creadores de la Estática, que es el primer embrión de la Mecánica Racional. En el ámbito de la Matemática se le considera el más ilustre de los Matemáticos griegos, por haber encontrado y demostrado muchas de las fórmulas geométricas que no figuraban en *Los Elementos* de Euclides, como expresiones equivalentes a la longitud y área del círculo, superficie y volumen de la esfera, conos y cilindros, así como volúmenes de otras cuádricas de revolución.

Si Euclides es el gran maestro, Arquímedes es el investigador por antonomasia, que, aunque se atiene al estándar geométrico euclídeo establecido para la exposición, a base de fijar con antelación las hipótesis que postula, previo a la demostración cuidadosamente rigurosa de las proposiciones que enuncia, tiene una actuación matemática que enlaza más directamente con el genio creador del siglo IV a.C. representado por Eudoxo, ya que el propósito fundamental de Arquímedes no es de índole metodológica, como el caso de Euclides, sino el aporte de nuevos resultados, la magnificación del acervo matemático. Por eso sus escritos son verdaderas memorias científicas originales en las que se da por sabido todo lo descubierto con anterioridad.

Arquímedes era hijo del astrónomo Fidias y por tanto es probable que su primera formación proviniera de su padre; pero enseguida se traslada de Siracusa –donde había nacido el año 287 a.C.– a Alejandría, que por entonces era el más importante centro de estudios del Mediterráneo y el núcleo de la cultura helenística, con sus dos instituciones, El Museo y La Biblioteca.

Al llegar a Alejandría, Arquímedes debió encontrar un ambiente científico polarizado hacia las Matemáticas, que habiendo recibido un enorme impulso gracias a la figura de Euclides, quedaron imbuidas del modelo de racionalidad geométrica fundado por él, y mantenido por sus discípulos, los cuales se lo transmitirían en sus enseñanzas a Arquímedes.

Arquímedes estuvo algún tiempo en Alejandría completando su formación. En este período debió trabar amistad con ciertos científicos (en particular Conón de Samos, Dositeo de Pelusa y Eratóstenes de Cirene), a quienes, de regreso a Siracusa, dirigirá posteriormente sus tratados. Sorprende que Arquímedes, con su vocación estudiosa e investigadora, no permaneciera en Alejandría, donde tenía un emporio científico institucional a su disposición. Se puede conjeturar que fue la llamada de Hierón –rey de Siracusa con el que Arquímedes estaba emparentado–, empeñado en favorecer la cultura en su tierra natal, lo que le indujo a regresar a su patria. A este respecto relata Plutarco (*Vida de Marcelo*, XIV):

> «[....]. *Y le persuadió* [el rey Hierón] *a que convirtiese alguna parte de aquella ciencia de las cosas intelectuales a las sensibles y que, aplicando sus conocimientos a los usos de la vida, hiciese que le entrasen por los ojos a la muchedumbre*.»

Sin embargo los motivos que impelieron a Arquímedes a abandonar Alejandría pueden ser de índole más profunda aún que el propio patriotismo, enraizados en su propia personalidad como científico. La ciencia alejandrina estaba muy mediatizada por la influencia ideológica del platonismo. Con casi la única excepción de la Medicina, la cultura helenística desarrolló una ciencia sustancialmente teórica y abstracta, que, complacida en su idealidad en los métodos y en los contenidos, permaneció ligada al modelo teórico de la Matemática pura, que rechazaba las aplicaciones prácticas de la ciencia a la realidad corpórea y sensible por considerarlas objeto de oficios toscos y manuales e impropias de una actividad liberal que debía dedicarse sólo al estudio de la dimensión inteligible de la realidad bajo una Filosofía de la actividad científica e intelectual que describe Plutarco en *Vida de Marcelo*, XIV.

Bajo esta filosofía del trabajo científico, el técnico, como vendía su obra, quedando así rebajada a la categoría de mercancía, no era un auténtico científico. El verdadero científico era el que, gracias a la protección oficial, basaba su prestigio en el saber teórico, único digno de una posición social eminente.

Es posible que fueran estos presupuestos ideológicos los que indujeran a Arquímedes a abandonar Alejandría, consciente de que allí su espíritu científico no iba a tener un ámbito adecuado. En efecto, la actividad investigadora de Arquímedes fue profundamente original y diferente de la ciencia alejandrina, porque, fundiendo los aspectos científicos con los técnicos, logró alcanzar una síntesis armónica que, elevándose a las más altas cotas del rigor, produjo extraordinarios resultados al complementar la investigación teórica con las aplicaciones prácticas. Arquímedes se enfrentó contra todos los prejuicios platónicos y en aras de la realidad no dudó en extraer de la Mecánica y de la Geometría del mundo sensible –en el que no hay puntos sin extensión ni líneas sin grosor y en el que todo es material–, los elementos y recursos físicos que, contando, midiendo e incluso pesando y no haciendo metafísica, como los platónicos epígonos de Euclides, conducen por abstracción al conocimiento lógico. Así pues, el abismo que el idealismo de Platón había establecido entre la teoría y la práctica fue salvado por Arquímedes con la aplicación de la técnica y de instrumentos geométricos más allá de la Geometría que permitía la regla y el compás platónicos; por ejemplo al prescindir de los cánones euclídeos e introducir una de las curvas más importantes de la Matemática como la Espiral llamada de Arquímedes.

De ello es buena muestra su magnífica obra *El Método sobre los teoremas mecánicos* (*EL MÉTODO*), donde, de una forma totalmente diferente a los esquemas metodológicos alejandrinos, con una brillante conjunción de la Mecánica y la Geometría, Arquímedes revela el camino que seguía para descubrir sus resultados matemáticos. Arquímedes crea en dos estadios de actividad científica, con dos métodos diferentes que se complementan, el primero intuitivo donde se descubre y se inventa, el segundo apodíctico donde se convalida lo intuido y se demuestra de forma rigurosamente deductiva siguiendo el modelo euclidiano.

A pesar de que Arquímedes desarrolló su ingente labor investigadora lejos de Alejandría, no permaneció totalmente aislado. Convencido de la importancia de sus descubrimientos, dejó que los doctos de Alejandría mantuviesen incólume el patrimonio euclídeo, pero se comunicaba con ellos. Es posible que Arquímedes viera como una necesidad la aprobación por parte de los científicos del Museo de sus resultados matemáticos. Quizá por ello también, después de realizar sus descubrimientos con su original método mecánico, como obedeciendo a la ciencia oficial, Arquímedes realizaba una impecable demostración mediante el método de exhaución. No es probable que Arquímedes hiciera esto por la persistencia en él de la influencia platónica; antes bien, parece que él mismo, como manifiesta en el Preámbulo del *MÉTODO*, sentía necesario confirmar sus intuiciones mecánicas con una demostración rigurosa. Así, por una parte, su obra queda perfectamente engarzada en la rígida tradición de la Geometría griega; y por otra, sus descubrimientos pudieron ser conocidos y ponderados por el resto del mundo científico helénico y a través suyo permanecer para la posteridad.

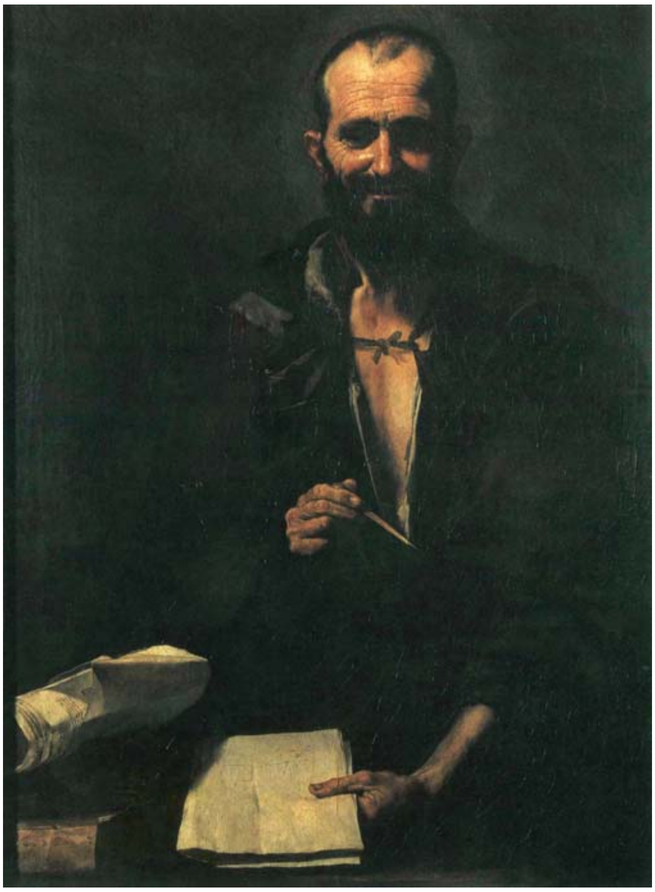
Arquímedes supo partir de la realidad material, como fuente intuitiva del descubrimiento matemático, y, recíprocamente, aplicar las Matemáticas a la realidad, pero lo hizo con un férreo apoyo en las sólidas y firmes bases euclídeas, para trascender la tradición y ampliar de forma considerable los horizontes metodológicos de la Matemática de su tiempo y ampliar el cumulo de conocimientos sobre todo con la ubérrima fecundidad del método mecánico del *MÉTODO*, en el que Arquímedes escribe al final del Preámbulo:

> «[...] *Estoy convencido de que* [*EL MÉTODO*] *puede representar una contribución no poco provechosa a la investigación matemática. Pues supongo que algunos estudiosos, contemporáneos o futuros, llegarán a encontrar, por el método expuesto, otros teoremas que a mí no se me han ocurrido todavía*.»

Estas palabras nos recuerdan la frase antológica con la que termina el célebre ensayo geométrico que acompaña al *El Discurso del Método, La Geometría* de Descartes:

«[...] *Y yo espero que nuestros descendientes me estarán agradecidos no sólo por las cosas que aquí he explicado, sino también por aquellas que he omitido voluntariamente a fin de dejarles el placer de descubrirlas.*» (G.AT,VI, 485)

ARQUÍMEDES, UN SABIO DE LEYENDA



1. Arquímedes pintado por Ribera en 1630. Museo del Prado (Madrid)
2. Sello de correo español de 24/3/1963 que reproduce el cuadro de Ribera sobre Arquímedes.

Ribera representa a Arquímedes de una forma un tanto irreverente exhibiendo una socarrona sonrisa, lo que ha inducido a algunos críticos a aducir que tal vez el personaje sería más bien Demócrito

Por fortuna, Arquímedes es uno los pocos personajes matemáticos griegos de quien nos ha llegado noticias de su vida, ya que han glosado su figura los historiadores y escritores más eximios de la antigüedad –Tito Livio, Plutarco, Polibio y Cicerón, entre otros–. Tal vez sean éstas las fuentes más fiables, pero hay otras muchas –Valerio Máximo, Silio Itálico, Giorgio Valla, Eutocio, Zonaras, Tzetzes– que han visto estimulada su fantasía por las asombrosas invenciones técnicas, que parecían subvertir las propias leyes de la naturaleza, que la tradición ha atribuido a Arquímedes.

A pesar de las múltiples fuentes, lo único que podemos afirmar con certeza es que Arquímedes murió en el año 212 a.C. en la caída de Siracusa en manos del cónsul romano, Marcelo, durante la segunda guerra púnica, tras un prolongado cerco de tres años, en el que Arquímedes habría participado brillantemente como defensor, ingeniando espectaculares artilugios militares, que causando el terror al enemigo, prolongarían de forma considerable la de otro modo inminente toma de la ciudad.

Para sus conciudadanos, Arquímedes fue un personaje célebre, curioso y famoso por sus méritos científicos, por sus excentricidades, por los originales inventos que le atribuyeron y por su vinculación con la familia real, que siempre le tuvo en una gran estima, como manifiesta la frase de Hierón II:

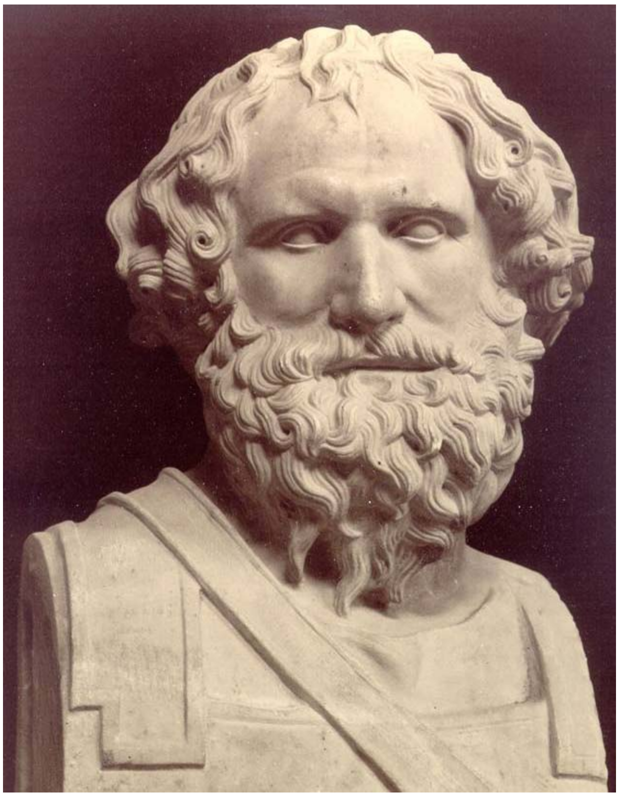
> «*Mostradme un hombre que haga crecer dos espigas de trigo donde hoy sólo crece una, y le concederé más honores que al propio Arquímedes*».

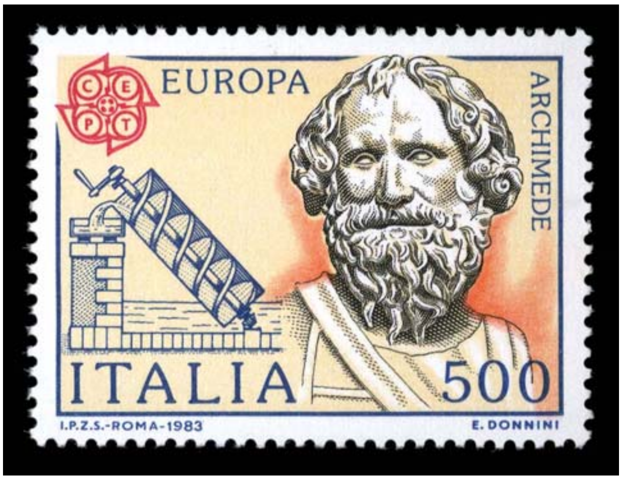
La vida de Arquímedes se ha reconstruido sobre la base de fragmentos de diversos autores, sobre todo de los historiadores de las guerras púnicas. Su figura histórica fue embellecida hasta la hagiografía o deformada por la imaginación popular y por la tradición legendaria ulterior, que la revestiría con anécdotas muchas de ellas inverosímiles que llegaban a impregnar al personaje de una aureola casi sobrenatural

Así por ejemplo Silio Itálico escribe sobre Arquímedes en el poema dedicado a la segunda guerra púnica (*Punica*, pp.341–342):

> «*Había, pues, en Siracusa, un hombre que, sin estar favorecido por una gran fortuna, se elevó por su genio por encima de la esfera de la humanidad y de la gloria inmortal de esa ciudad. Todos los secretos del universo le eran conocidos. Sabía cuando los oscuros rayos del sol naciente presagiaban la tempestad, si la tierra estaba fija o suspendida por su eje, por qué el mar extendido sobre el globo se mantenía encadenado a su superficie, cuáles eran las causas de la agitación de las olas y de las diferentes fases de la luna, qué ley seguía el océano en el flujo y reflujo de las mareas. Fama tenía de haber contado las arenas de la tierra; él, que supo poner a flote una galera con el esfuerzo de una sola mujer; él, que hizo subir rocas amontonadas en contra de la pendiente del terreno*».

EL GENIO DE ARQUÍMEDES SEGÚN PLUTARCO





1. **Busto de Arquímedes. Museo Nacional de Nápoles. Es uno de los iconos más conocidos de Arquímedes.**
2. **Sello de correo italiano de 2/5/1983 que reproduce el mismo busto junto a un tornillo hidráulico ideado por Arquímedes.**

Es sobre todo Plutarco, en sus *Vidas Paralelas*, quien con más detalle relata la genialidad teórica y práctica, así como ciertos episodios de la vida de Arquímedes, en su *Vida de Marcelo*, en relación con la intervención del científico en la defensa de Siracusa.

Sobre el carácter especulativo en la invención así como riguroso y claro en la demostración, Plutarco platoniza a Arquímedes escribiendo (Marcelo, XVII):

> «*En cuanto a Arquímedes , fue tanto su juicio, tan grande su ingenio y tal su riqueza en teoremas, que sobre aquellos objetos que le habían dado el nombre y gloria de una inteligencia sobrehumana, no permitió dejar nada escrito; y es que tenía por innoble y ministerial toda ocupación en la mecánica y todo arte aplicado a nuestros usos, y ponía únicamente su deseo de sobresalir en aquellas cosas que llevan consigo lo bello y excelente, sin mezcla de nada servil, diversas y separadas de los demás, pero que hacen que se entable contienda entre la demostración y la materia; de parte de la una, por lo grande y lo bello, y de parte de la otra, por la exactitud y por el maravilloso poder; pues es imposible encontrar en toda la Geometría cuestiones más difíciles y más importantes explicadas con términos más sencillos ni más comprensibles; lo cual unos creen debe atribuirse a la sublimidad de su ingenio, y otros, a un excesivo trabajo,* **[...].**

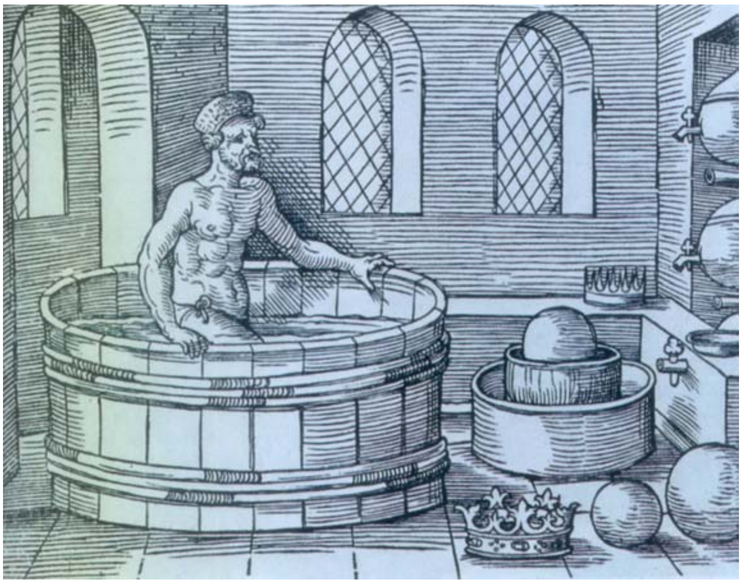
Sobre ciertas actitudes excéntricas de Arquímedes a las que le llevarían su actividad creativa, continúa el testimonio de Plutarco (Marcelo, XVII):

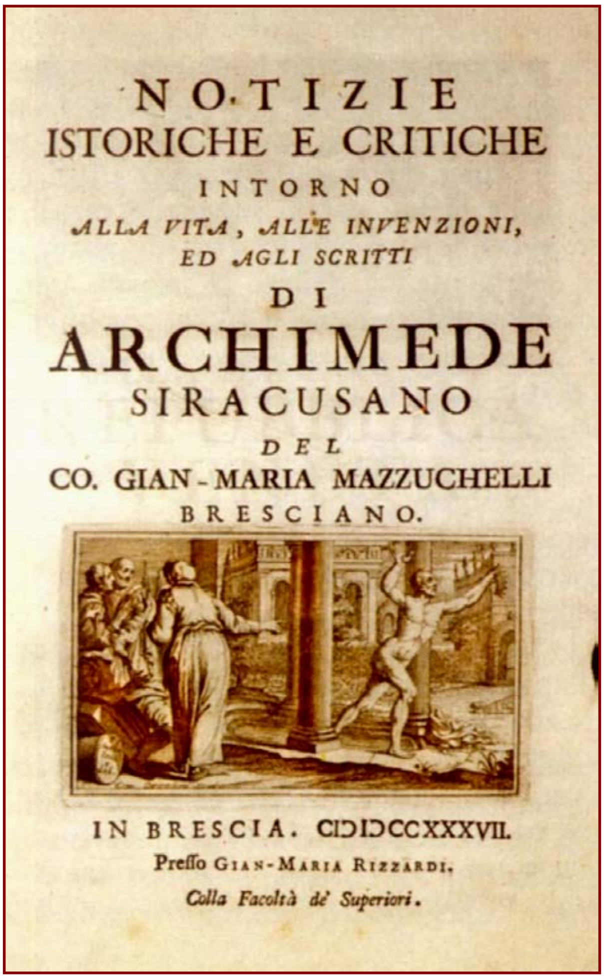
> «*Halagado y entretenido de continuo por una sirena doméstica y familiar, se olvidaba del alimento y no cuidaba de su persona y llevado por la fuerza a ungirse y bañarse, formaba figuras geométricas en el mismo hogar, y después de ungido tiraba líneas con el dedo, estando verdaderamente fuera de sí, y como poseído de las musas, por el sumo placer que en estas ocupaciones hallaba.*»

A pesar de estas manifestaciones de Plutarco, muchos de los trabajos de Arquímedes están vinculados a la experiencia, de modo que muchas de sus investigaciones y descubrimientos resultan de la necesidad de resolver problemas prácticos. De hecho a Arquímedes se le conoce como el físico e ingeniero más famoso de la antigüedad por la cantidad de máquinas que se le atribuyen. A título de ejemplo mencionemos el tornillo hidráulico de la imagen del sello, llamado también «*cóclea*», una ingeniosa máquina construida por Arquímedes a la que Galileo calificó como «*maravillosa y milagrosa*», que permite elevar el agua de forma rápida venciendo la resistencia gravitatoria. Fue utilizada para extraer agua de los ríos para convertir en fértiles tierras yermas, así como para desaguar las tierras más bajas, donde se originaban pestes por el estancamiento de las aguas. En el Renacimiento, Leonardo vuelve a estudiar y reproducir el instrumento de Arquímedes, quien resulta ser un digno antecesor de aquél.

En su *Naturalis Historia*, Plinio el Viejo, que en su juventud había sido administrador de las minas del noroeste de España, relata cómo se soltaba agua a presión desde la cima de las montañas auríferas de las Médulas, en el Bierzo leonés, para proceder después al lavado de las arenas. ¿Se utilizaría el tornillo de Arquímedes para elevar el agua a las alturas? De esta forma se recogían veinte mil libras anuales de oro, que surtían a todo el imperio romano.

EL FRAUDE DE LA CORONA DEL REY HIERÓN DE SIRACUSA Y LOS PRINCIPIOS DE ARQUÍMEDES DE LA HIDROSTÁTICA





NOTIZIE
ISTORICHE E CRITICHE
INTORNO
ALLA VITA, ALL'E INVENZIONI,
ED AGLI SCRITTI
DI
ARCHIMEDE
SIRACUSANO
DEL
CO. GIAN-MARIA MAZZUCHELLI
BRESCIANO.

IN BRESCIA. CIϽIϽCCXXXVII.
Presso GIAN-MARIA RIZZARDI.
Colla Facoltà de' Superiori.

1. **Grabado tardomedieval en madera que reproduce el episodio del fraude de la corona del rey Hierón de Siracusa. Museo Municipal de Trieste.**
2. **Portada de la obra crítica de Mazzuchelli sobre Arquímedes publicada en Brescia, en 1737. Biblioteca Municipal de Mantua.**

Este tratado, de un gran valor histórico e iconográfico, intenta ordenar las múltiples informaciones, muchas de ellas legendarias sobre los episodios más o menos inverosímiles de la vida de Arquímedes, en relación con su brillante actividad científica y técnica. La propia portada ilustra la escena urbana del «*Eureka*» de un Arquímedes pletórico de alegría ante la intuición del descubrimiento hidrostático.

La anécdota más conocida de Arquímedes es la de la «*corona de oro del rey Hierón*», simplemente mencionada por Plutarco, pero extensamente relatada por Vitrubio, para quien la forma de descubrir el fraude cometido contra el rey, constituye la más sutil y genial de las intuiciones de Arquímedes. Vitrubio –en su *De Architectura*, IX, Pref,9–10–, refiere el episodio en estos términos:

> *«Arquímedes realizó un gran número de admirables descubrimientos, pero de entre todos, el que voy a exponer manifiesta una sutileza increíble. Reinando Hierón en Siracusa, debido a los éxitos logrados en sus empresas, se propuso ofrecer en un cierto templo una corona de oro a los dioses inmortales. Acordó con un artesano la confección de la obra mediante una buena suma de dinero y la entrega de la cantidad de oro en peso. El artesano cumplió los plazos de entrega, encontrando el rey la corona perfectamente realizada. Pero habiendo encontrado indicios de que el artesano había sustituido parte del oro por plata, el rey, indignado ante el presunto engaño, pero no teniendo medios para demostrar el fraude del artesano, encargó a Arquímedes que aplicara su inteligencia a dilucidar el asunto. Preocupado Arquímedes por el tema, y habiendo entrado un día por azar en una casa de baños, advirtió que cuanto más se sumergía en el agua mayor cantidad de ella salía de la tina. Esta observación le dio la luz para resolver la cuestión; de modo que loco de alegría por el descubrimiento, saltó fuera de la bañera, y tal como estaba, totalmente desnudo corrió hacia su casa clamando: ¡Eureka, Eureka!»*

Vitrubio continúa el relato explicando que Arquímedes introdujo sucesivamente pesos iguales de plata y oro en un vaso lleno de agua y comprobó los volúmenes de agua desalojados en los dos casos; pesó la corona, la sumergió en agua y midió el líquido desalojado. De este modo, mediante un sencillo cálculo, pudo determinar la cantidad de oro y plata que se había utilizado. De su experiencia Arquímedes concluyó que era evidente el fraude que había cometido el orfebre, poniendo una parte de plata en la corona.

El sabio de Siracusa introduce el llamado «*Principio de Arquímedes*» de la Hidrostática en su obra *Sobre los Cuerpos Flotantes* :«*Todo cuerpo sumergido en un líquido experimenta un empuje hacia arriba igual al peso del líquido desalojado*». Con los desarrollos matemáticos introducidos en este tratado, Arquímedes contribuyó de forma poderosa al ulterior desarrollo de la arquitectura naval.

La obra matemática de Arquímedes

Arquímedes afrontaba y resolvía problemas que iban más allá de la Geometría tradicional, y lo hacía sin el rigor suntuoso de sus colegas alejandrinos, aplicando a las cuestiones geométricas razonamientos análogos a los empleados en las cuestiones mecánicas. En los contenidos trascendió de forma considerable *Los Elementos* de Euclides. Así, por ejemplo, consiguió obtener la primera cuadratura de la parábola, comunicando a los científicos de Alejandría el procedimiento mecánico del que se sirvió para descubrir el resultado, así como la demostración rigurosa, en su tratado *Sobre la Cuadratura de la Parábola*, en cuyo preámbulo dirigido a Dositeo, Arquímedes escribe:

> «[...] *Pero ninguno de mis predecesores, que yo sepa, ha buscado la cuadratura del segmento comprendido por una recta y una sección de cono rectángulo, problema cuya solución he encontrado* [...].»

Efectivamente, tras la cuadratura de las lúnulas de Hipócrates, la cuadratura de la parábola es el primer ejemplo histórico de la obtención de un área limitada por curvas.

Análogamente Arquímedes tiene conciencia de la originalidad e importancia de los resultados sobre la esfera, el cilindro y el cono, en donde no sólo considera los volúmenes de estas figuras, sino que va más allá del Libro XII de *Los Elementos* de Euclides, al estudiar también las superficies, llegando a obtener la cuadratura de la esfera. En el preámbulo de su obra *Sobre la Esfera y el Cilindro*, Arquímedes dice:

> «[...] *Aunque estas propiedades eran inherentes a las figuras a que acabo de referirme* [la esfera y el cilindro], *no habían sido conocidas por quienes me han precedido en el estudio de la Geometría* [...].»

En *Sobre el Equilibrio de los Planos* Arquímedes estudia las leyes del equilibrio de la palanca. Esta obra de Matemática aplicada, construida con el rigor habitual, nos permite asegurar que desde un principio Arquímedes se inhibió de los escrúpulos del idealismo y el purismo platónicos, que censuraba toda aplicación práctica de la Matemática. Arquímedes, al contrario, quiebra los esquemas ideológicos vigentes del euclidianismo platónico que ligan la ciencia exacta con la reflexión abstracta y trasciende los límites de la teoría pura al vincular estrechamente la investigación teórica con sus aplicaciones prácticas.

Asimismo, en su tratado *Sobre la Medida del Círculo,* Arquímedes va mucho más allá de la Geometría de Euclides, ya que no sólo trata el área del círculo que Euclides –en la Proposición XII.2 de *Los Elementos*– había establecido –con base en Eudoxo– que era proporcional al cuadrado del diámetro, sino que al considerar la circunferencia obtiene un valor aproximado del número π.

También en *Sobre las Espirales* Arquímedes inventa, construye y estudia una nueva curva, la espiral, que todavía lleva su nombre, resolviendo entre otros el problema de cuadrar la porción limitada por las espiras de la curva.

Finalmente en *Sobre Conoides y Esferoides*, Arquímedes estudia sólidos de revolución, de los que nadie se había ocupado con anterioridad.

Los escritos de Arquímedes son densas memorias científicas en las que se asumen, sin mencionarlos explícitamente, todos los resultados matemáticos concebidos anteriormente.

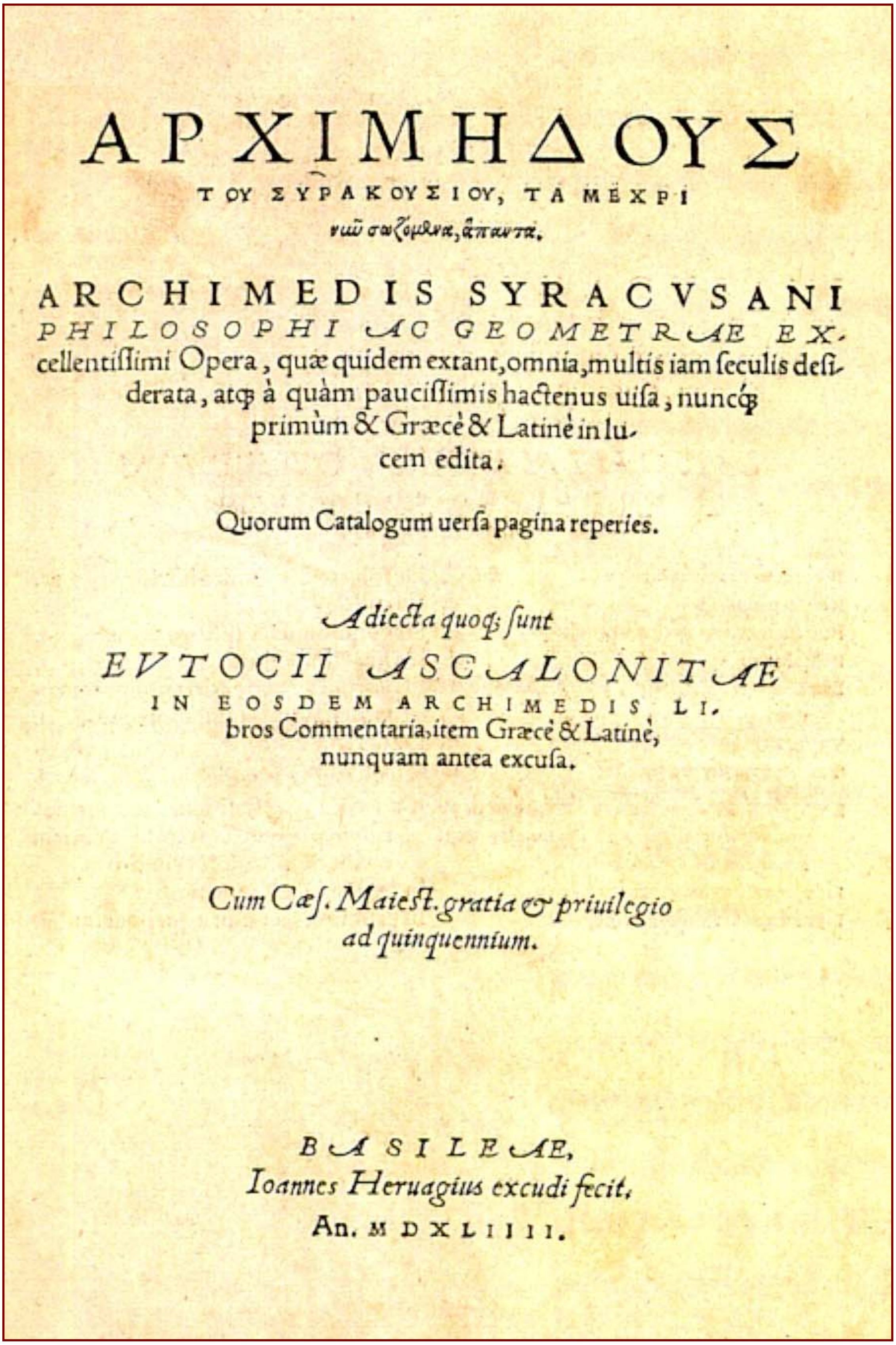
Todos los escritos de Arquímedes son originales y tienen la estructura euclídea de empezar postulando las hipótesis, a las que siguen las proposiciones impecablemente demostradas, con una ocultación –salvo precisamente en *EL MÉTODO*–, que parece deliberada, del proceso inventivo.

LAS PRINCIPALES OBRAS DE ARQUÍMEDES CON SUS RESULTADOS MATEMÁTICOS MÁS IMPORTANTES

Exceptuando ciertas obras menores (*El Stomachion*, *El Libro de los Lemas* y *El Problema de los bueyes*), en los restantes tratados Arquímedes demuestra importantes resultados sobre la determinación de áreas, volúmenes y centros de gravedad, que actualmente se obtienen con el Cálculo Integral.

La secuencia lógica y cronológica de los escritos de Arquímedes no es fácil de establecer. Enumeraremos y describiremos muy sucintamente las obras referentes a los temas mencionados según el orden propuesto por J.L.Heiberg.

1. ***Sobre la Esfera y el Cilindro*: resultados sobre la esfera, el cono y el cilindro, en particular la legendaria propiedad de la razón de 2 a 3 entre la esfera y el cilindro circunscrito, tanto en superficie total como en volumen.**
2. ***Sobre la Medida del Círculo*: resultados sobre la equivalencia entre el círculo y el triángulo de base la circunferencia del círculo y altura el radio (es decir, reducción de la cuadratura del círculo a la rectificación de la circunferencia), y cálculo aproximado de la razón entre la circunferencia y el diámetro (valor aproximado del número π).**
3. ***Sobre Conoides y Esferoides*: resultados sobre la razón entre segmentos de elipsoides, paraboloides e hiperboloides de revolución y los conos de igual base y eje.**
4. ***Sobre las Espirales*: resultados sobre el área encerrada por las espiras de «*La Espiral de Arquímedes*» y rectificación de un arco de la circunferencia mediante esta curva.**
5. ***Sobre el Equilibrio de los Planos*: resultados sobre el centro de gravedad de figuras poligonales, del segmento de parábola y del trapecio parabólico. Aunque es un tratado de Estática, formalmente sigue la línea euclídea con definiciones, postulados y demostraciones en los que además de conceptos geométricos se utilizan el peso y el centro de gravedad de figuras. En este escrito Arquímedes formula la famosa «*Ley de la palanca*».**
6. ***Sobre la Cuadratura de la Parábola*: resultados sobre la cuadratura de un segmento de parábola, primero mediante recursos de estática extraídos de Sobre el Equilibrio de los Planos y después mediante consideraciones geométricas.**
7. ***Sobre los Cuerpos Flotantes*: resultados sobre la posición de equilibrio de un segmento de paraboloide de revolución parcialmente sumergido en un fluido. En este tratado, elaborado también a la manera euclídea, aparece el famoso «*Principio de Arquímedes*» de la Hidrostática.**
8. ***El Método sobre los teoremas mecánicos* donde Arquímedes pone de manifiesto el procedimiento heurístico seguido en el descubrimiento de resultados.**



ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ
ΤΟΥ ΣΥΡΑΚΟΥΣΙΟΥ, ΤΑ ΜΕΧΡΙ
νῦν σωζόμενα, ἅπαντα.

ARCHIMEDIS SYRACVSANI
PHILOSOPHI AC GEOMETRAE EX-
cellentissimi Opera, quæ quidem extant, omnia, multis iam seculis desi-
derata, atque à quàm paucissimis hactenus uisa, nuncque
primùm & Græcè & Latinè in lu-
cem edita.

Quorum Catalogum uersa pagina reperies.

Adiecta quoque sunt
EVTOCII ASCALONITAE
IN EOSDEM ARCHIMEDIS LI-
bros Commentaria, item Græcè & Latinè,
nunquam antea excusa.

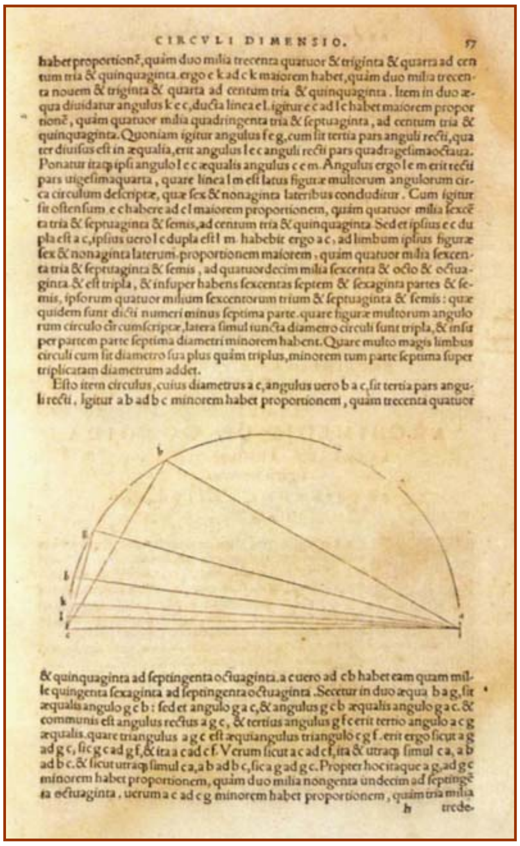
Cum Cæs. Maiest. gratia & priuilegio
ad quinquennium.

BASILEAE,
Ioannes Heruagius excudi fecit,
An. M D X L I I I I.

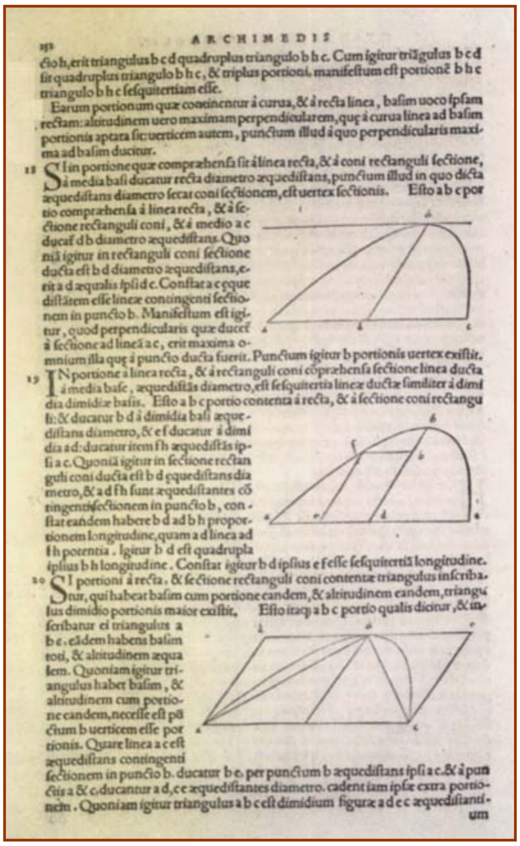
***Archimedis Opera Omnia*, Basilea, 1544. Ejemplar de la Universidad de Valladolid. Esta edición forma parte de la *edición princeps* de las Obras de Arquímedes**

Hasta el hallazgo de J.L.Heiberg del palimpsesto de Jerusalén en 1906, la fuente primigenia de las Obras de Arquímedes era un manuscrito de Constantinopla del siglo IX que llegó a Europa Occidental a través de la corte normanda de Palermo, y que fue traducida al latín por Guillermo de Moerbeke en 1269 –la traducción manuscrita forma parte de la Colección vaticana–, y por Jacobo de Cremona en 1450, siendo ésta última revisada por Regiomontano.

ALGUNAS PÁGINAS DE OBRAS DE ARQUÍMEDES EN *ARQUÍMEDES OPERA OMNIA* (BASILEA, 1544).



1. Página de *Sobre la Medida del Círculo.*
2. Página de *Sobre las Espirales.*
3. Página de *Sobre el Equilibrio de los Planos.*
4. Página de *Sobre la Cuadratura de la Parábola.*



Descubrimiento y demostración en Arquímedes

Arquímedes demuestra los resultados matemáticos relacionados anteriormente mediante el método de exhaución ideado por Eudoxo, el más importante matemático de la Academia platónica. El método de exhaución confiere un rigor lógico impecable al argumento matemático, pero tiene ciertas servidumbres. En primer lugar suele resultar bastante engorroso el establecimiento de las desigualdades básicas que se necesitan para iniciar una doble reducción al absurdo, lo que hace onerosa la lectura de las obras de Arquímedes, pero lo más grave es que este método obliga a conocer previamente el resultado a demostrar, es decir carece de valor heurístico, no sirve para encontrar nuevas verdades sino sólo para demostrar aquellas de las cuales ya se tiene un conocimiento previo. El método de exhaución es pues un método de demostración y no de descubrimiento, precisando ser complementado *a priori* con otro método, ya sea analítico o mecánico, para descubrir los resultados.

Siendo esto así, surge de forma natural la pregunta acerca de cómo conocía y obtenía Arquímedes los magníficos resultados que luego demostraba con un rigor absoluto, porque en ninguna de las obras citadas en el apartado anterior Arquímedes sugiere lo más mínimo al respecto. Cabe decir que en los casos sencillos, Arquímedes puede haber llegado intuitivamente a los resultados por vía inductiva. Por ejemplo, relacionando un polígono con el cuadrado construido sobre el diámetro de su círculo circunscrito, sabiendo que las áreas de dos polígonos regulares de igual número de lados están en razón como los cuadrados correspondientes aludidos (*Euclides*, XII.1), razonando inductivamente resulta plausible que la misma razón se mantenga para los propios círculos (*Euclides*, XII.2). Así se aventuraría un resultado –ya conocido por Hipócrates de Quíos–, que el método de exhaución –aplicado por Eudoxo– confirmaría plenamente a posteriori.

Pero el alcance de la intuición tiene sus límites:

- ¿Cómo se puede intuir que «*la superficie de la esfera es cuatro veces un círculo máximo*»?
- ¿Cómo se puede inducir que «*el área de la primera vuelta de la espiral es un tercio del primer círculo*»?
- ¿Cómo se puede augurar que «*el área de un segmento parabólico es cuatro tercios del área del triángulo inscrito de la misma base y altura sobre el eje*»?
- ¿Cómo se puede vaticinar que «*el volumen del segmento de paraboloide de revolución es tres medios el del cono de igual base y altura*»?

Ante estos sorprendentes descubrimientos, no es extraño que muchos matemáticos creyeran que Arquímedes disponía de un método milagroso que aplicaba en sus investigaciones.

Cuando en el Renacimiento y siglos posteriores tiene lugar la recuperación, reconstrucción y divulgación del legado clásico griego y en particular se difunde un entusiasta interés por las obras de Arquímedes, todos los estudiosos, impresionados por estos trabajos, se formulan las anteriores preguntas, sintetizadas en la formulación de la siguiente:

¿Cómo había alcanzado Arquímedes sus impresionantes resultados sobre cuadraturas y cubaturas, que luego demostraba rigurosamente mediante el método de exhaución?

Como bien señaló Galileo, en la práctica de la investigación científica y en particular en la investigación matemática siempre existe un dualismo metódico, dos momentos distintos y consecutivos en el proceder, la fase de la invención, intuitiva, no rigurosa y cargada de hipótesis, sugerencias, analogías, argumentos plausibles y razonamientos informales, es el «*ars inveniendi*» o vía del descubrimiento; y la fase apodíctica, donde se impone el rigor, el «*ars disserendi*» o vía de la demostración. De ambas vías que son complementarias en la investigación científica, ¿dónde está en Arquímedes el primer camino?

Ignorada por todos la forma en que Arquímedes había alcanzado sus descubrimientos, muchos matemáticos albergaron la sospecha de que Arquímedes disponía de un método que deliberadamente había mantenido en secreto, una vía de descubrimiento que no surge ante el lector de sus obras y que parece haber ocultado voluntariamente. Así por ejemplo Torricelli manifiesta:

> «*Los geómetras antiguos empleaban en sus demostraciones un método diferente al seguido en la fase inventiva y procedían así, entre otras razones, para ocultar el secreto del arte*.»

También Wallis, que tuvo a su cuidado una edición de las Obras de Arquímedes, publicada en Oxford en 1676, escribía:

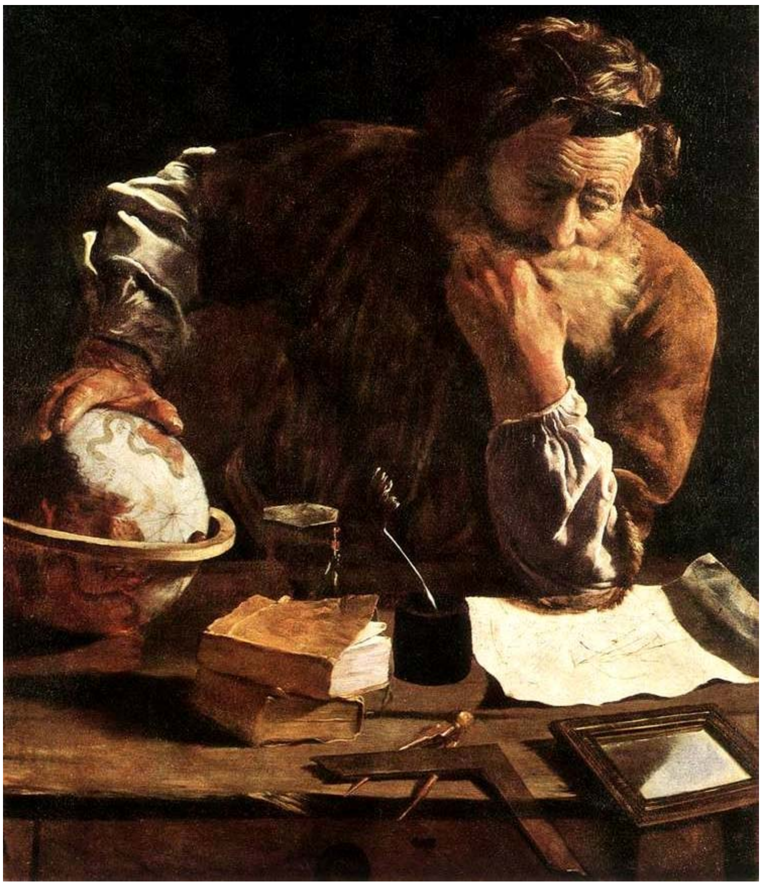
> «*Al parecer Arquímedes ocultó adrede las huellas de su investigación, como si hubiera sepultado para la posteridad el secreto de su método de investigación*.»

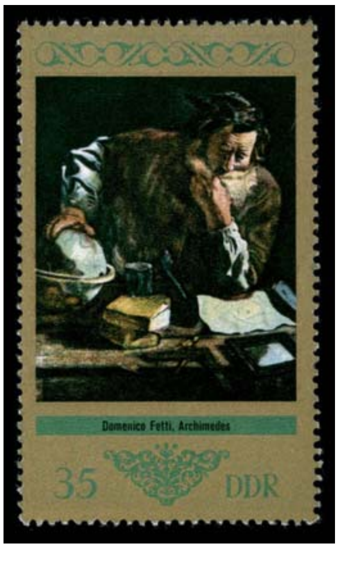
Asimismo, Barrow, que se encargó también de una edición en latín de las Obras de Arquímedes, que se publicó en Londres en 1675, se manifestaba en estos términos:

> «*Al no poder imaginar qué ingenio mortal pueda llegar a tanto mediante la virtud del razonamiento, estoy seguro que Arquímedes se vio ayudado por el Álgebra, a la que conocía en secreto y que ocultaba de forma estudiada*.»

Efectivamente Arquímedes poseía un método de investigación, que plasmó en su obra *EL MÉTODO*, en la que mediante procedimientos reconocidos por él mismo como no rigurosos, descubría sus famosos teoremas matemáticos. Pero fueron, como veremos, los avatares históricos y no su voluntad, quien lo dejó oculto para la posteridad. En palabras de E. Rufini (en *Il Metodo d'Archimede e le origine dell'analisi infinitesimale nell'antichità*, Feltrinelli, 1926, p.91):

> «[....] *La obra escasamente estudiada y quizá poco comprendida por los propios griegos, cayó fatalmente en un completo olvido*.»





1. **Cuadro titulado *Arquímedes* del pintor italiano Domenico Fetti (1589-1624). Gemäldegalerie Alte Meister (Dresde, Alemania).**
2. **Sello de correo de la antigua Alemania Oriental de 13/11/1973 ede 24/3/1963 que reproduce el cuadro sobre Arquímedes de D.Fetti**

CITAS MEMORABLES SOBRE ARQUÍMEDES

1. Considero que hubo en aquel siciliano [Arquímedes] más inteligencia que la que parece que haya podido producir la naturaleza humana. Cicerón. *De Republica*, I,14.
2. Es imposible encontrar en toda la Geometría cuestiones más difíciles y más importantes explicadas con términos más sencillos ni más comprensibles que los teoremas de la inteligencia sobrehumana de Arquímedes. Plutarco. *Vidas paralelas. Marcelo*, XVII.
3. Marcelo, lleno de admiración por ese genio extraordinario, dio orden de conservarle la vida, siendo para él de tanta gloria la conservación de Arquímedes como la toma de Siracusa [...] Pero mientras Arquímedes con la vista y la atención fijos en el suelo trazaba figuras, un soldado, le cortó la cabeza; y la sangre de Arquímedes se confundió con la labor de su ciencia. Valerio Máximo. *Facta et dicta memorabilia*, VIII, 7,7.
4. Podríamos obtener demostraciones perfectas de los libros de Arquímedes, a nosotros no nos repele la espinosa lectura de ellos. J.Kepler. *Nova stereometria doliorum vinariorum*. Praga, 1615.
5. Entre todos los trabajos que se refieren a las disciplinas matemáticas, parece que el primer lugar puede ser reivindicado por los descubrimientos de Arquímedes, que confunden a las almas por el milagro de su sutilidad. E.Torricelli. *Opera geometrica*. Florencia, 1644. Proemio.
6. Al no poder imaginar qué ingenio mortal pueda llegar a tanto mediante la virtud del razonamiento, estoy seguro que Arquímedes se vio ayudado por el Álgebra, a la que conocía en secreto y que ocultaba de forma estudiada. I.Barrow. *Archimedis Opera*. Londres, 1675.
7. Había más imaginación en la cabeza de Arquímedes que en la de Homero. Voltaire. *Diccionario filosófico*.
8. La imaginación no actúa menos en un geómetra que crea que en un poeta que inventa, aunque operan de manera diferente sobre su objeto: el primero lo desnuda y analiza, el segundo lo compone y embellece. [...]. De todos los grandes hombres de la antigüedad, es acaso Arquímedes el que más merece figurar al lado de Homero. D'Alembert. *Discurso preliminar de la Enciclopedia.* Orbis, Barcelona, 1984. p.63
9. Arquímedes abrió nuevas vías en la Geometría e hizo tan gran número de descubrimientos, que la antigüedad le ha concedido de común acuerdo el primer lugar entre los geómetras. J.F.Montucla. *Histoire des Mathématiques.* Blanchard. París, 1968. Tomo I, Libro IV, Cap.V, p.223.
10. Arquímedes anticipa nuestro Cálculo Integral, tanto en el tiempo como en la seguridad de los procedimientos y en la genialidad de los artificios no superados por los precursores del siglo XVII. E.Rufini. *Il Metodo d'Archimede e le origine dell'analisi infinitesimale nell'antichità*. Feltrinelli. Milán, 1926. p.187.
11. Arquímedes es, acaso, el hombre de ciencia que ha llegado a la más alta cima de la abstracción, y, según Plutarco, la muerte le acechaba, en uno de sus momentos de éxtasis. F.Vera. *Arquimedes* (en *Científicos griegos*. Aguilar, 1970. p.11).
12. Son la maduración y la asimilación de la obra de Arquímedes las que sirven de base a la revolución científica que se realizará en el siglo XVII. A.Koiré. *Estudios de Historia del Pensamiento Científico*. Siglo XXI. Madrid, 1971. p.44.
13. La carta a Eratóstenes sobre el Método, no hallada hasta 1906, es la clave de los principales descubrimientos de Arquímedes. Gracias a ella podemos representarnos de forma aproximada el proceso de pensamiento del sabio.[...]. Arquímedes no aplica, en general, las Matemáticas a la técnica, sino que, muy al contrario, la técnica es la inspiradora de sus trabajos teóricos.[...]. Arquímedes logra completar su análisis intuitivo con una síntesis rigurosa. Da airosamente ese paso difícil, hecho en el cual se encierra una prueba de la magnitud de su genio. R.Taton. *Historia general de las Ciencias*. Orbis. Barcelona, 1988. Vol.2. Libro II, Cap.II.2. pp.355, 356, 357.
14. Las matemáticas griegas perduran más incluso que la Literatura griega. Arquímedes será recordado cuando Esquilo haya sido olvidado, porque las lenguas mueren y las matemáticas no. G.Hardy. *Apología de un matemático*. Nivola. Madrid, 1999. p.82.
15. la revisión de las investigaciones de Arquímedes por Leonardo fue la oportunidad para actualizar un método geométrico–mecánico de investigación que transformaría radicalmente la forma de entender el conocimiento científico. C.Pedreti. *Leonardo, Arte y Ciencia*. Susaeta. Madrid, 2003. p.137.

El Método sobre los Teoremas Mecánicos

La naturaleza del *MÉTODO* como tratado matemático

Muchas de las obras de Arquímedes están precedidas por ciertos preámbulos dirigidos a varios de sus amigos matemáticos alejandrinos. Esto parece revelar que Arquímedes tenía la costumbre de enviar a Alejandría los enunciados de los teoremas que encontraba, pidiendo a los matemáticos que los demostraran. Como seguramente la petición de Arquímedes no debía ser satisfecha, él mismo enviaba más tarde los resultados de sus investigaciones, redactados y demostrados impecablemente, eliminando pasos intermedios y alusiones a los teoremas en que se basaba. Al no mencionar el proceso heurístico seguido en el descubrimiento, muchos de los teoremas resultaban realmente sorprendentes.

EL MÉTODO es una obra singular de Arquímedes, porque en ella se decide a revelar a la comunidad matemática alejandrina, en carta dirigida a Eratóstenes, la vía de investigación de cuestiones matemáticas por medio de la mecánica, un método que Arquímedes utilizaba en sus descubrimientos y que había omitido en todos los restantes escritos científicos. La combinación de Geometría y Estática que Arquímedes había hecho en *Sobre el Equilibrio de los Planos* y en *Sobre los Cuerpos Flotantes* para establecer rigurosamente ciertas propiedades relacionadas con el equilibrio de ciertos cuerpos geométricos, la realiza de nuevo en *EL MÉTODO* para descubrir e investigar resultados, que, obtenidos de forma mecánico-geométrica, demostrará de forma rigurosa en sus tratados científicos.

Los brillantes resultados de Arquímedes ponderados por todas las generaciones de matemáticos a partir del Renacimiento, pueden crear unas falsas expectativas acerca del contenido real de la obra, al confiar en que Arquímedes nos revele en ella una «*vía secreta y segura*» del descubrimiento matemático, la piedra filosofal del éxito geométrico. Más vale no esperar nada de esto. *EL MÉTODO* de Arquímedes es un magnífico informe científico sobre un método de investigación y de argumentación plausible en Geometría, ilustrado con algunos ejemplos, unos conocidos y otros nuevos, donde Arquímedes da muestras de una pericia y de una imaginación teórica inefables, así como de una intuición que se mueve con un increíble instintivo olfato matemático. Pero la lectura del *MÉTODO* no pone al lector frente al proceso psicológico revelador de la actividad creadora de Arquímedes, es decir, la comunicación de Arquímedes a Eratóstenes no es una confidencia psicológica que ponga de manifiesto la psicogénesis del pensamiento arquimediano. En realidad *EL MÉTODO* es una memoria científica muy elaborada, bastante singular por su carácter metodológico dentro del conjunto de los grandes tratados de la Geometría griega, pero es fácil tomarlo por un escrito más de Arquímedes, estructurado con el mismo rigor. Claro está que el propio Arquímedes lo desmiente cuando manifiesta a Eratóstenes en el preámbulo del *MÉTODO*:

> «[...] *He creído oportuno exponerte por escrito y desarrollar en este mismo libro las particularidades de un método, por medio del cual te será posible iniciar la investigación de ciertas cuestiones matemáticas por medio de la mecánica. Estoy convencido, además, de que dicho método no será menos útil para demostrar los propios teoremas. Pues algunos de los que primero se me hicieron patentes mecánicamente, recibieron luego demostración geométricamente, habida cuenta de que la investigación hecha por este método no comporta demostración*; [...].»

Es decir, *EL MÉTODO*, al utilizar consideraciones mecánicas, desarrolla sugerencias que descubren resultados por analogía que ilustran el arte de la invención con una argumentación científica informal que establece una pauta de discurso matemático dirigida a mostrar el carácter plausible de unas conclusiones que serán enseguida convalidadas en la forma demostrativa vigente, es decir, mediante el método de exhaución. Pero no sólo esto, porque la propia confirmación del resultado mediante rigurosa demostración se ve también favorecida por la forma de descubrirlo, pues como señala también Arquímedes:

> «[....] *pues es más fácil, después de haber adquirido por ese método cierto conocimiento de las cuestiones objeto de investigación, dar luego la demostración, que investigar sin ningún conocimiento previo*.»

Las vicisitudes históricas del *Método* y la reconstrucción de Heiberg

Antes de su recuperación en 1906, no se tenían más que informaciones bastante vagas sobre *EL MÉTODO* de Arquímedes. Suidas, un escritor que vivió en el siglo X, alude a la obra, sosteniendo que Teodosio de Trípoli, autor de un tratado sobre la esfera *Las Esféricas*, había escrito un comentario al respecto. También Herón, en el siglo I a.C., había hablado de ella –haciendo alusión a tres proposiciones– en su *Métrica*, pero también este escrito se perdió, y no fue redescubierto, según Heath, hasta 1896 por H.Schöne de Constantinopla (aunque un fragmento de la *Métrica* había sido anteriormente recuperado en 1894 por P.Tannery). Por todo ello sobre el real contenido de la obra de Arquímedes circularon las más variadas hipótesis, hasta que, como vamos a ver, la perspicacia del historiador de la ciencia danés J.L.Heiberg, Profesor de la Universidad de Copenhague, editor de las obras de Arquímedes y Apolonio y uno de los helenistas más competentes de Europa, cerró con éxito el asunto.

Schöne había visto atraída su atención por una cita efectuada en 1899 por el paleógrafo griego Papadopoulos Kerameus (autor de un voluminoso catálogo de los manuscritos del Patriarcado griego de Jerusalén), de un palimpsesto conservado en la colección de manuscritos de la biblioteca del monasterio de Saint-Savas en Palestina, donde se aludían a la presencia de algunas conocidas obras de Arquímedes. Estas citas llegaron a los oídos de J.L.Heiberg, quien, confirmando que se trataba de pasajes conocidos de Arquímedes, sospechó que podría contener otros trabajos de Arquímedes. El intento de obtener el palimpsesto por vía diplomática no dio resultado, lo que incitó a J.L.Heiberg, en el verano de 1906, a trasladarse a Constantinopla, a donde, mientras tanto, había sido trasladado el manuscrito. J.L.Heiberg relatará poco más tarde que Nikolaos Tsoukaladakis, el bibliotecario del priorato del Phanar (el metochion del claustro del Santo Sepulcro de Jerusalén), tuvo la amabilidad de facilitarle el acceso al manuscrito para estudiar el preciado documento e intentar transcribirlo. En el examen J.L.Heiberg advirtió que el palimpsesto, aunque muy mutilado, era el más completo de cuantos manuscritos se disponía sobre las obras de Arquímedes y además aparecían en él textos nuevos que exigían para su estudio mucho más tiempo del disponible, por lo que sin hacer más estudios de momento, fotografió el manuscrito para estudiarlo con tranquilidad.

El excepcional documento contenía:

A. Partes considerables de algunos tratados de Arquímedes ya conocidos en su totalidad (*Sobre la Esfera y el Cilindro*, *Sobre la Medida del Círculo*, *Sobre las Espirales* y *Sobre el Equilibrio de los Planos*).
B. La mayor parte del texto griego del tratado *Sobre los Cuerpos Flotantes* del que no se disponía más que de una traducción latina medieval realizada a través del árabe.
C. El prefacio y dos proposiciones de un tratado completamente inédito, el *Stomachion*, una especie de puzzle geométrico recreativo.
D. El texto igualmente inédito del tratado *El método sobre los teoremas mecánicos*.

No aparece en cambio ninguna huella de los tratados *Sobre Conoides y Esferoides* y *Sobre la Cuadratura de la Parábola*.

J.L.Heiberg se propuso utilizar todos estos materiales para la nueva edición de sus *Archimedis Opera Omnia*, que tenía en preparación, pero en atención a la impaciencia de los estudiosos publicó en la revista Hermes (vol.XLII, Berlín, 1907), utilizando las notas y las fotografías que había tomado, el texto griego del *MÉTODO*, junto con una reproducción en facsímil de uno de los folios del palimpsesto, acompañando notas y comentarios sobre las vicisitudes en torno a la obtención del palimpsesto, así como en torno a las características y estado en que se encontraba el documento, con el título: *Eine neue Archimedeshandschrift* (*Un nuevo manuscrito de Arquímedes*).

De acuerdo con la descripción de J.L.Heiberg, el palimpsesto consta de 185 hojas, de las cuales 177 son de pergamino y las últimas de la 178 a la 185 son de papel del siglo XVI. A primera vista sobresale una escritura superior, que debe ser de los siglos XII-XIII (XIII-XIV según Kerameus), que se trata de un devocionario con oficios litúrgicos o eucologio, escrito sobre textos que reproducen algunos fragmentos de obras de Arquímedes, en una tinta marrón claro. Es decir, el amanuense que escribió el eucologio aprovechó un material anterior, pero por fortuna no raspó la escritura original, sino que antes de escribir encima se limitó a lavarla. J.L.Heiberg, proveyéndose de una potente lupa consiguió leer las 177 hojas de pergamino, de las que 29 (los folios 7-13, 23-26, 51-54, 73-80, 83-86, 151-152) habían sido completamente lavadas, no conservando huella alguna de la escritura original, 14 tienen otro tipo de letra y en algunas había palabras ilegibles. Continúa J.L.Heiberg diciendo que los escritos tienen letra bonita y minúscula del siglo X, a dos columnas de 24,4 cms. de altura por 6,8 cms. de anchura y alrededor de 35 líneas por columna; las letras iniciales de cada fragmento son grandes y retiradas saliendo del borde; los titulares son mayúsculas; la escritura no es regular en general y contiene muchas abreviaturas y expresiones taquigráficas, de modo que el amanuense domina un sistema de abreviaturas y otro taquigráfico, utilizando ambos de forma caprichosa. Falta con frecuencia la iota suscrita, aunque los acentos y espíritus constan en general; no así los signos de puntuación que suelen faltar. En el documento aparecen figuras geométricas con letras, pero son dibujadas a la ligera, nunca completadas y sólo esbozadas. El folio 41^r es el más claro, por ello es el único que reproduce J.L.Heiberg en facsímil. El amanuense del escrito superior ha cambiado el orden de los folios, poniéndolos en una sucesión arbitraria; ha separado las hojas de folio pequeño del manuscrito originario y las ha plegado en dos para pasar de folio a cuartilla, perdiendo líneas y cambiando la dirección de las mismas.

Conociendo todos estos detalles es justo ponderar el mérito poco común de la publicación de J.L.Heiberg. El sabio danés ha tenido que descifrar con la lupa, letra por letra, un texto muy poco legible, reconstruir figuras semiborradas y restablecer el orden profundamente variado de las hojas. Además, J.L.Heiberg ha tenido que rectificar en concisas notas un gran número de errores manifiestos introducidos por el copista, así como indicar sumariamente en qué orden de ideas se pueden colmar las pequeñas y grandes lagunas que aparecen en el texto. A este respecto comenta J.L.Heiberg que el modo de pensar de Arquímedes está tan claro que es posible rellenar las lagunas con seguridad casi absoluta y además uno puede, a través de presunciones, completar demostraciones matemáticas que se habían perdido.

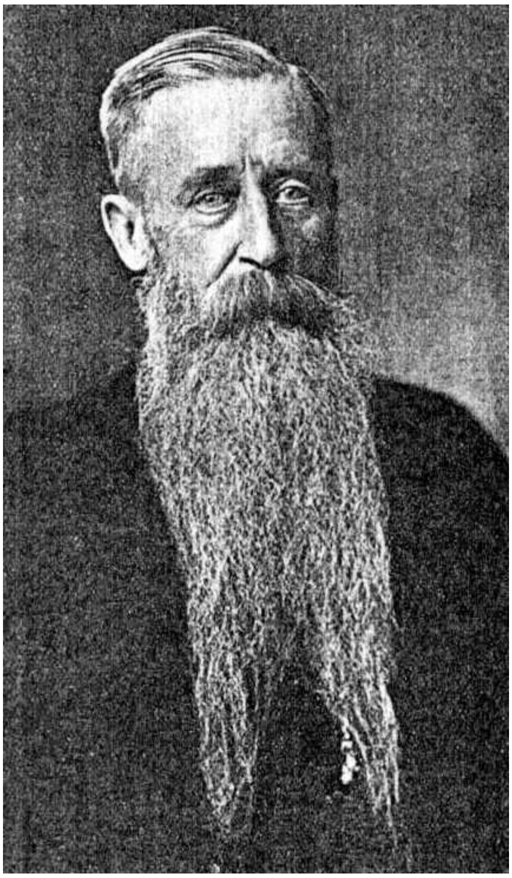
La publicación de J.L.Heiberg comienza con una introducción erudita y acaba con un comentario, donde resalta el elevado interés científico, heurístico e histórico del nuevo tratado, *El método sobre los teoremas mecánicos*, pondera su importancia como obra metodológica, la sitúa cronológicamente en la obra y en el pensamiento de Arquímedes y aporta conclusiones muy interesantes de carácter histórico sobre la manera de trabajar de Arquímedes y sus predecesores.

C.B.Boyer en su *Historia de la Matemática* (Alianza Editorial, Madrid, 1986, p.186) termina su capítulo sobre Arquímedes describiendo enfáticamente una realidad histórica paradójica, con estas significativas palabras:

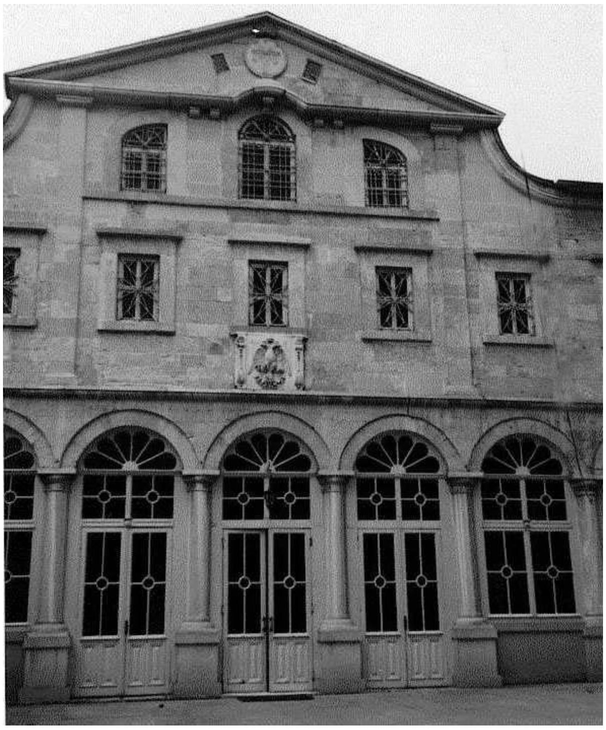
> «*En cierto sentido el palimpsesto que contenía el Método es un fiel símbolo de la contribución de la Edad Media a la historia de la Matemática. La ferviente preocupación por los asuntos religiosos estuvo a punto de borrar de la faz de la tierra una de las obras más importantes del matemático más grande de la antigüedad; y, sin embargo, a fin de cuentas fue la erudición medieval la que, en parte de una manera involuntaria, la conservó, así como muchas otras cosas que de otra forma se habrían perdido casi con toda seguridad*.»

La exhumación de la obra perdida de Arquímedes *El método sobre los teoremas mecánicos*, fruto de la labor investigadora de J.L.Heiberg y comentadora de otros historiadores de la ciencia (H.G.Zeuthen, T.Reinach, E.Rufini, P.Ver Eecke, F.Vera, J.Babini, ...,) es probablemente el suceso y el descubrimiento más importante de los últimos tiempos para el conocimiento de la Historia de la Geometría griega en general y del genio de Arquímedes en particular.

LA RECONSTRUCCIÓN DEL *MÉTODO* DE ARQUÍMEDES POR HEIBERG



1. **Imagen venerable de Johan Ludving Heiberg (1854-1928).**
2. **Página 41r del palimpsesto encontrado por Heiberg con la obra *El Método sobre los teoremas mecánicos,* donde Arquímedes describe la vía heurística de sus magníficos descubrimientos matemáticos.**



Priorato del Phanar del Patriarcado griego del Santo Sepulcro de Jerusalén, en Constantinipla.

El gran helenista e historiador de la Matemática J.L Heiberg exhumó, en circunstancias casi novelescas, en 1906, de un palimpsesto medieval conservado en la biblioteca del Priorato del Phanar del Patriarcado griego del Santo Sepulcro de Jerusalén, en Constantinopla, la obra de Arquímedes *EL MÉTODO,* reproduciendo en el artículo *Eine neue Archimedeshandschrift* (en la revista *Hermes*, vol.XLII, Berlín, 1907) el folio 41r.

El documento era un eucologio de los siglos XII al XIV con textos litúrgicos escritos en un manuscrito que contenía fragmentos de Obras de Arquímedes. Por fortuna, el amanuense no raspó la escritura original sino que se limitó a lavarla escribiendo después encima. Tras una titánica labor de arqueología matemática, J.L.Heiberg consiguió transcribir, letra a letra, el contenido del texto arquimediano, situado en la escritura inferior, reconstruir figuras semiborradas y restablecer el orden secuencial de las hojas que había sido muy alterado. El contenido del palimpsesto que fue utilizado por J.L.Heiberg para la edición de sus *Archimedis Opera Omnia*, de 1910-1913, es considerado por los historiadores de la Matemática Zeuthen, Reinach, E.Rufini, Ver Eecke, Vera y Babini como el descubrimiento más importante de los tiempos modernos para el conocimiento de la Historia de la Geometría griega.

El contenido matemático del *Método*

EL MÉTODO de Arquímedes consta de tres partes: *El Preámbulo* dirigido a Eratóstenes, ciertas asunciones previas o *Lemas* y los resultados propiamente dichos, recogidos en 16 proposiciones.

Arquímedes, en el Preámbulo, dedica el tratado a su amigo alejandrino Eratóstenes, a quien desvela su método mecánico como fuente de sus principales descubrimientos. Arquímedes alude a la resolución de numerosos problemas y menciona el que resolverá en primer lugar –la cuadratura del segmento de parábola– y sobre todo los dos problemas que en realidad son el objetivo fundamental de la comunicación de Arquímedes a Eratóstenes: la cubatura de la uña cilíndrica –sólido obtenido seccionando un cilindro circular recto por un plano que pasa por un diámetro de la base y la tangente paralela a la base opuesta– y de la bóveda cilíndrica –-volumen común a dos cilindros inscritos en un cubo que se cortan ortogonalmente–, resultados cuyos enunciados había enviado con anterioridad para su estudio. Arquímedes abunda sobre el carácter metodológico que tiene el tratado como fuente heurística de sus investigaciones y pondera su valor a pesar de sus limitaciones demostrativas.

A continuación del preámbulo, Arquímedes enuncia once lemas o asunciones previas, que describen (salvo la última) propiedades de los centros de gravedad de diversas figuras planas y sólidas, algunas de los cuales figuran en la obra *Sobre el Equilibrio de los Planos*, aunque otras, referentes a centros de gravedad de sólidos, no figuran en ninguno de los escritos que nos han llegado de Arquímedes, lo que avala la conjetura de que debían quizá aparecer en los tratados *Sobre la Palanca* o *Sobre los Centros de Gravedad*, ambos perdidos. Estos lemas son constantemente utilizados por Arquímedes, a veces sin mención explícita, en el curso de las proposiciones del MÉTODO.

Los resultados que Arquímedes obtiene en EL MÉTODO y que desarrolla en forma de proposiciones son los siguientes :

I.- Determinación por el método mecánico de la cuadratura del segmento parabólico, obteniendo que el área del mismo es cuatro tercios del triángulo de igual base y altura.

II.- Determinación por el método mecánico de la equivalencia de la esfera con el cuádruple del cono (resp. con los dos tercios del cilindro) de base el círculo máximo de la esfera y de altura el radio (resp. el diámetro), de donde felizmente intuye que la superficie de la esfera equivale a cuatro de sus círculos máximos, ya que, como todo círculo equivale al triángulo cuya base es igual a la circunferencia y la altura es igual al radio, se debe suponer que toda esfera equivale a un cono cuya base es equivalente a la superficie de la esfera y cuya altura es igual al radio.

III.- Determinación por el método mecánico de análogas equivalencias que en la Proposición II, entre un elipsoide de revolución, un cono y un cilindro.

IV.- Determinación por el método mecánico de la equivalencia entre un segmento de paraboloide de revolución, de base perpendicular al eje, y los tres medios del cono de igual base y eje que el segmento.

V.- Determinación por el método mecánico del centro de gravedad de un segmento de paraboloide de revolución.

VI.- Determinación por el método mecánico del centro de gravedad de un hemisferio.

VII.- Determinación por el método mecánico de la razón entre un segmento esférico y el cono de igual base y altura.

VIII.- Determinación por el método mecánico de la razón entre un segmento de elipsoide de revolución y el cono de igual base y altura.

IX.- Determinación por el método mecánico del centro de gravedad de un segmento esférico.

X.- Determinación por el método mecánico del centro de gravedad de un segmento de elipsoide de revolución.

XI.- Determinación por el método mecánico del volumen y centro de gravedad de un segmento de hiperboloide de revolución.

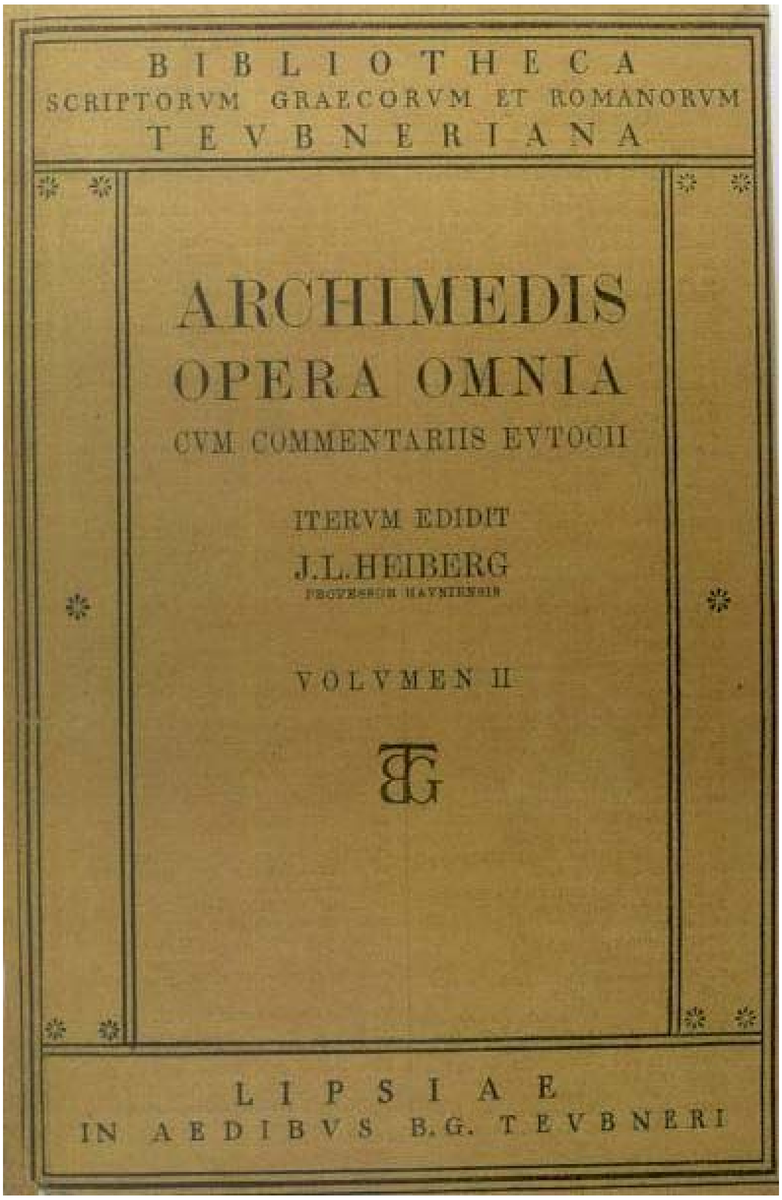
XII-XIII.- Determinación por el método mecánico de la equivalencia de la uña cilíndrica y la sexta parte de todo el prisma circunscrito al cilindro.

XIV.- Determinación mecánico-geométrica del volumen de la uña cilíndrica.

XV.- Determinación geométrica (por el método de exhaución) del volumen de la uña cilíndrica.

XVI.- Determinación mecánica de la equivalencia de la bóveda cilíndrica y los dos tercios del cubo correspondiente.

Las cinco últimas proposiciones (XII-XVI, relativas a la uña cilíndrica y a la bóveda cilíndrica) con las que finaliza la carta de Arquímedes a Eratóstenes son en realidad el objeto esencial de la misma. Como dice en el preámbulo, Arquímedes se propone remitir la demostración de dos teoremas, cuyos enunciados sin demostración había enviado anteriormente, pero indicando el método mediante el cual los había encontrado, método que dice que «*no implicaba una verdadera demostración*» dando luego la demostración rigurosa por medio del método de exhaución. Es decir, mientras que en las primeras once proposiciones del MÉTODO Arquímedes muestra simplemente el método de descubrimiento, en las últimas realiza todo el ciclo de la investigación científica desde descubrir los resultados hasta demostrarlos de forma geométrica por exhaución .



Portada de la definitiva edición de J.L.Heiberg de las Obras de Arquímedes, *Archimedes Opera Omnia* (Leipzig, 1910-1913), que incluye *El Método sobre los teoremas mecánicos*.

El Preámbulo y los Lemas del *Método* dirigido a Eratóstenes

Arquímedes saluda a Eratóstenes:

....

Reconociendo tu celo y tu dominio de la filosofía, tan digno de mención, además de que sabes apreciar la investigación de cuestiones matemáticas a medida que se van presentando, he creído oportuno exponerte por escrito y desarrollar en este mismo libro las particularidades de un método, por medio del cual te será posible iniciar la investigación de ciertas cuestiones matemáticas por medio de la mecánica. Estoy convencido, además, de que dicho método no será menos útil para demostrar los propios teoremas. Pues algunos de los que primero se me hicieron patentes mecánicamente, recibieron luego demostración geométricamente, habida cuenta de que la investigación hecha por este método no comporta demostración; pues es más fácil, después de haber adquirido por ese método cierto conocimiento de las cuestiones objeto de investigación, dar luego la demostración, que investigar sin ningún conocimiento previo. Por esta razón, asimismo en el caso de los teoremas referentes al cono y a la pirámide, cuya demostración fue Eudoxo el primero en encontrar, a saber: que el cono es la tercera parte del cilindro y la pirámide es la tercera parte del prisma, con la misma base e igual altura, conviene atribuir un mérito no pequeño a Demócrito, el primero que formuló este enunciado sin demostración acerca de dicha figura. Como quiera que el descubrimiento del teorema que ahora doy a conocer, ha tenido lugar de modo semejante al de los anteriores, he querido exponer por escrito y divulgar este método, para que no den en pensar algunos que hablaba por hablar al haberme referido a él anteriormente y, al mismo tiempo, porque estoy convencido de que puede representar una contribución no poco provechosa a la investigación matemática. Pues supongo que algunos estudiosos, contemporáneos o futuros, llegarán a encontrar, por el método expuesto, otros teoremas que a mí no se me han ocurrido todavía.

Así pues, expongo en primer lugar el resultado que también fue el primero en manifestarse por vía mecánica, a saber: que todo segmento de una sección de cono rectángulo es cuatro tercios del triángulo que tiene la misma base e igual altura, y seguidamente uno por uno los resultados obtenidos con el mismo método. [...]

Sigue a este preámbulo el enunciado los siguientes lemas:

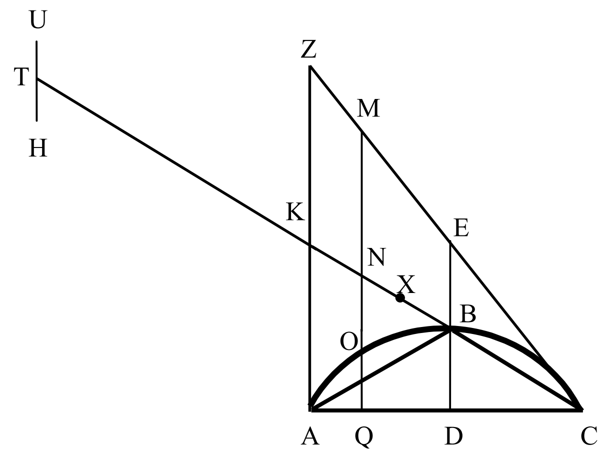
1. *Si de una magnitud se quita otra magnitud, y un mismo punto es el centro de gravedad de la magnitud entera y de la que se ha quitado, el mismo punto es centro de gravedad también de la magnitud restante.*
2. *Si de una magnitud se quita otra magnitud, y la magnitud entera y la que se ha quitado no tienen el mismo centro de gravedad, el centro de gravedad de la magnitud restante se encuentra sobre la prolongación de la recta que une los centros de gravedad de la magnitud entera y la magnitud quitada, situado a una distancia cuya razón con la recta que une dichos centros de gravedad es la misma que la del peso de la magnitud quitada con el de la magnitud restante.*
3. *Si los centros de gravedad de tantas magnitudes como se quiera se encuentran sobre una misma recta, el centro de gravedad de la magnitud compuesta de las magnitudes consideradas estará también sobre la misma recta.*
4. *El centro de gravedad de una recta cualquiera es su punto medio.*
5. *El centro de gravedad de un triángulo cualquiera es el punto en que se cortan las rectas que unen los ángulos del triángulo con los puntos medios de los lados.*
6. *El centro de gravedad de un paralelogramo cualquiera es el punto en el cual convergen las diagonales.*
7. *El centro de gravedad de un círculo es el mismo centro del círculo.*
8. *El centro de gravedad de un cilindro cualquiera es el punto medio del eje.*
9. *El centro de gravedad de un prisma cualquiera es el punto medio del eje.*
10. *El centro de gravedad de un cono cualquiera está sobre el eje, en un punto que lo divide de tal manera que la parte hacia el vértice es el triple de la restante.*

A continuación Arquímedes estudia las 16 proposiciones que hemos mencionado anteriormente, de las cuales trataremos las dos primeras– la cuadratura del segmento parabólico y la cubatura de la esfera– que, además, son las más significativas.

Las Proposiciones del Método
La Cuadratura del segmento parabólico

PROPOSICION I [1]

Sea ABC un segmento comprendido entre la recta AC y la sección ABC de un cono rectángulo[2]; divídase AC por la mitad en D y trácese la recta DBE paralela al diámetro[3], y uniendo B con A y B con C, trácense las rectas AB y BC.



Digo que el segmento ABC es cuatro tercios del triángulo ABC.

Trácense por los puntos A y C la recta AZ paralela a DBE y la CZ tangente a la sección en el punto C; prolónguese CB hasta K y sea KT igual a CK. Considérese CT como una palanca, siendo K su punto medio, y sea MQ una recta paralela a ED.

Puesto que CBA es una parábola y que CZ es tangente a ella, y CD es una ordenada[4], EB es igual a BD, como se demuestra en los Elementos [5] [6]. Por lo mismo y puesto que ZA y MQ son

---

[1] En su tratado *Sobre la Cuadratura de la Parábola* Arquímedes había dado ya una primera demostración mecánica de la cuadratura de la parábola (proposiciones 1-17), más larga que la presente, basada en los postulados de la Estática y previa a la geométrica por exhaución (proposiciones 18-24) que desarrolla posteriormente en el mismo tratado. Arquímedes distingue según que el diámetro sea perpendicular o no a la base del segmento (proposiciones 14 y 15), pero en ambos casos la solución es la misma.

[2] Arquímedes utiliza la perífrasis «*sección de cono rectángulo*» para referirse a una parábola.

[3] Aquí Arquímedes entiende por diámetro el eje de la parábola

[4] CD es la cuerda paralela a la tangente en el vértice del segmento parabólico.

[5] Arquímedes no se refiere aquí a *Los Elementos* de Euclides sino a alguno de los tratados elementales sobre las secciones cónicas, ahora perdidos, debidos también a Euclides o quizá a Aristeo (véase LORIA,G.: *Histoire des Sciences Mathématiques dans l'antiquité hellénique*. Gauthiers-Villars. París, 1929. Cap.III), y que son reseñados por Pappus en el *Tesoro del Análisis* del Libro VII de la *Colección Matemática*.

La proposición utilizada por Arquímedes que viene a decir que «*la subtangente relativa a un punto de la parábola es doble de la abscisa de este punto*», es también formulada sin demostración (aunque expresada en otros términos) como Proposición 2 en *Sobre la Cuadratura de la Parábola*. Apolonio daría más tarde una demostración de este resultado en la Proposición 2 del Libro II de *Las Cónicas*.

[6] En nuestro lenguaje este resultado es consecuencia de la expresión analítica de la tangente a la parábola en un punto. En efecto, dada la parábola $Y^2 = 2pX$, la tangente en el punto C de coordenadas (x,y) es $Yy = p(X+x)$, siendo $p=y^2/2x$, de donde al hacer la intersección con el eje X (Y=O), resulta: $X = -x$, es decir: $E=(-x,o)$ y por tanto $EB=BD$.

paralelas a la recta ED, son iguales MN y NQ, así como ZK y KA [7]. Y puesto que la razón entre CA y AQ es igual que la razón entre MQ y QO, lo cual se expone en un lema [8], y la razón entre CA y AQ es igual a la razón entre CK y KN [9], sucede que siendo también CT igual que KT, la razón entre TK y KN será igual a la razón entre MQ y QO. Ahora bien, puesto que el punto N es el centro de gravedad de la recta MQ, por ser MN igual que NQ [10], si tomamos la recta UH igual a QO de manera que su centro de gravedad sea el punto T, de modo que sea UT igual que TH, la recta UTH estará en equilibrio con la recta MQ, que permanece en su sitio, por estar TN dividida por el punto K en partes que están en razón inversa a los pesos UH y MQ, siendo la razón entre TK y KN igual a la razón entre MQ y HU [11], y por lo tanto K es el centro de gravedad del conjunto de ambos pesos [12]. Análogamente si en el triángulo ZAC se trazan tantas paralelas como se quiera a ED, éstas, permaneciendo en su lugar, estarán en equilibrio con los segmentos determinados sobre ellas por la sección y trasladados al punto T, de manera que el centro de gravedad de unas y otros será K.

Ahora bien, las rectas trazadas en el triángulo CZA componen el propio triángulo y los segmentos rectilíneos obtenidos en la sección del mismo modo que OQ componen el segmento ABC; por lo tanto el triángulo ZAC, permaneciendo en su lugar, estará en equilibrio, respecto del punto K, con el segmento de la sección trasladado hasta tener su centro de gravedad en T, de manera que el centro de gravedad del conjunto de ambos será el punto K.

Divídase ahora CK por el punto X de manera que sea CK sea el triple de KX; por tanto el punto X será el centro de gravedad del triángulo AZC, como está demostrado en el libro *Sobre el Equilibrio* [13]. Y puesto que el triángulo ZAC, permaneciendo en su lugar, está en

---

[7] De la semejanza de los triángulos MNC y EBC, así como QNC y DBC, resulta (*Euclides*, VI.4) : EB/MN = BC/CN = BD/NQ, y de aquí: MN/NQ = EB/BD ,
de donde al ser EB=BD, se deduce que MN=NQ. Análogamente se razona que ZK=KA.

[8] Arquímedes se refiere aquí a la Proposición 5 de *Sobre la Cuadratura de la Parábola*. La demostración en lenguaje actual sería la siguiente:

Sean BD=x, C=(x,y).

Sean asimismo: LB=x', QD=y', es decir O=(x',y').

Sea también ML=x'', como LB=QD=y', se tendrá M=(x'',–y').

Ahora, de la ecuación de la tangente a la parábola en el punto C, al ser M un punto de esta tangente, resulta: $-y'y = (y^2/2x)\cdot(-x''+x)$.

De aquí obtenemos, despejando, una expresión para ML=x'' = (xy + 2y'x)/y, que añadida a LQ=BD, nos dará MQ. En efecto: MQ = ML+LQ = x''+x = 2x(y+y')/y.

Los otros segmentos de la proporción CA/AQ = MQ/QO, se obtienen fácilmente:

QO = BD-LO = x–x', CA = AD+DC = 2y, AQ = AD–QD = y–y'.

De la definición de la parábola y al aplicar las propiedades de las proporciones, al ser los puntos C y O de la parábola, se tiene: $\frac{y^2}{x} = \frac{y'^2}{x'} = \frac{y^2 - y'^2}{x - x'}$

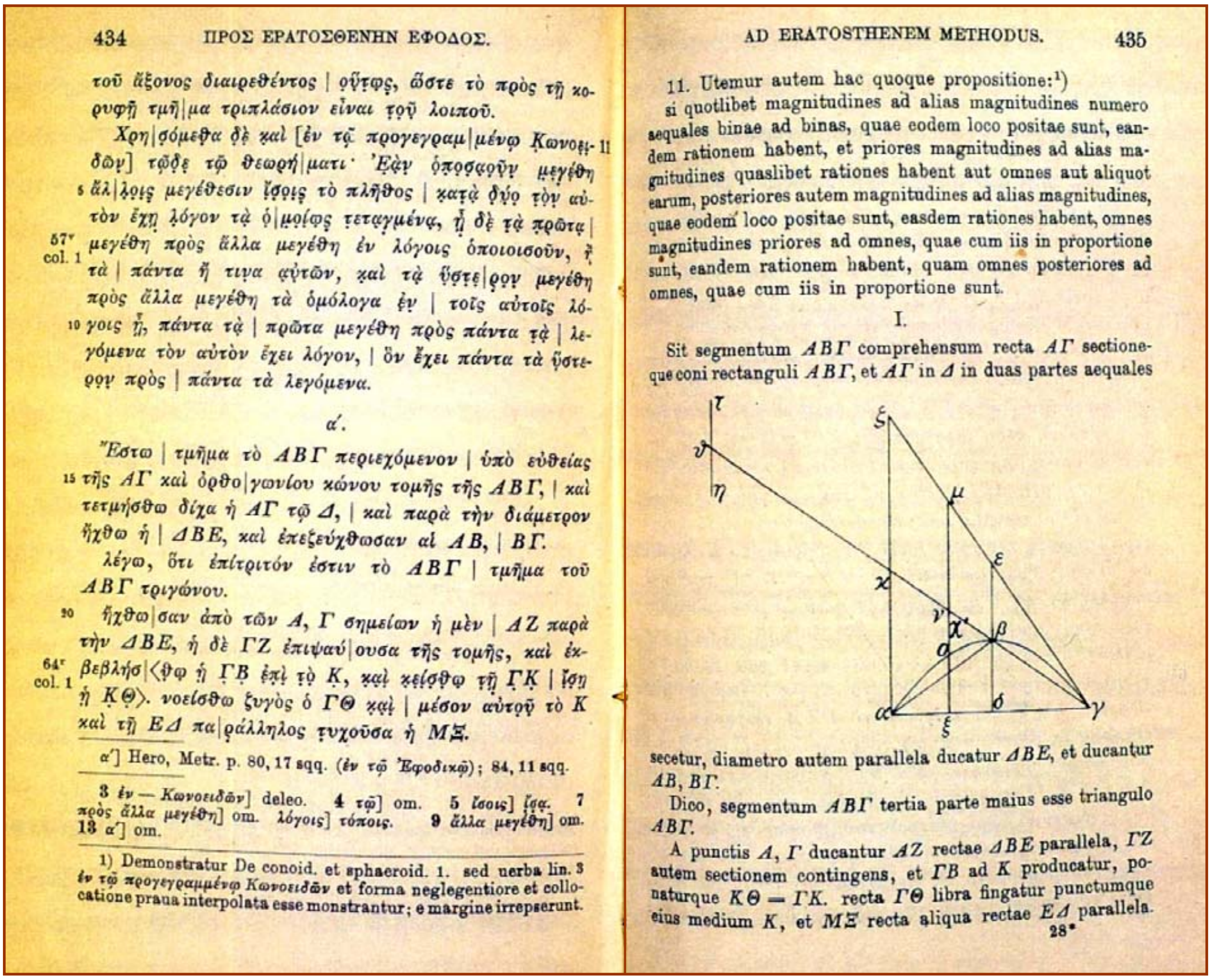
A partir de los resultados obtenidos, podemos comprobar definitivamente la validez de la proporción.
En efecto : $\frac{MQ}{QO} = \frac{2x(y+y')}{y(x-x')} = \frac{2x(y+y')}{y(x-x')}\cdot\frac{(y-y')}{(y-y')} = \frac{2x(y^2-y'^2)}{y(x-x')(y-y')} = \frac{2x}{y}\cdot\frac{y^2}{x}\cdot\frac{1}{y-y'} = \frac{2y}{y-y'} = \frac{CA}{AQ}$.

[9] De la semejanza de los triángulos ACK y QCN.
[10] Según el lema 4.

[11] *Sobre el Equilibrio de los Planos*, I.6.
[12] Lema 3.
[13] *Sobre el Equilibrio de los Planos*, I.14 y lema 5.

equilibrio, respecto del punto K, con el segmento BAC, trasladado con centro de gravedad en T, y que X es el centro de gravedad del triángulo ZAC, se verifica, por consiguiente, que la razón del triángulo AZC al segmento ABC colocado alrededor del centro T es igual a la razón de TK a XK. Ahora bien, siendo TK triple de KX, el triángulo ZAC será triple del segmento ABC. Además, el triángulo ZAC es cuádruple del triángulo ABC, ya que ZK es igual que KA y AD es igual que DC, luego el segmento ABC equivale a cuatro tercios del triángulo ABC [14].

En realidad, la proposición no queda demostrada por lo que hemos dicho ahora, pero da una cierta idea de que la conclusión es verdadera. Por lo cual, nosotros, viendo que la conclusión no está demostrada, pero sospechando que es verdadera, daremos la demostración geométrica, que encontramos y publicamos anteriormente [15] [16].



434 ΠΡΟΣ ΕΡΑΤΟΣΘΕΝΗΝ ΕΦΟΔΟΣ.

τοῦ ἄξονος διαιρεθέντος | οὕτως, ὥστε τὸ πρὸς τῇ κορυφῇ τμῆ|μα τριπλάσιον εἶναι τοῦ λοιποῦ.

Χρη|σόμεθα δὲ καὶ [ἐν τῷ προγεγραμ|μένῳ Κωνοει- 11 δῶν] τῷδε τῷ θεωρή|ματι· Ἐὰν ὁποσαοῦν μεγέθη ἄλ|λοις μεγέθεσιν ἴσοις τὸ πλῆθος | κατὰ δύο τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον τὰ ὁ|μοίως τεταγμένα, ᾖ δὲ τὰ πρῶτα |
57r col. 1 μεγέθη πρὸς ἄλλα μεγέθη ἐν λόγοις ὁποιοισοῦν, ᾖ τὰ | πάντα ἤ τινα αὐτῶν, καὶ τὰ ὕστε|ρον μεγέθη πρὸς ἄλλα μεγέθη τὰ ὁμόλογα ἐν | τοῖς αὐτοῖς λόγοις ᾖ, πάντα τὰ | πρῶτα μεγέθη πρὸς πάντα τὰ | λεγόμενα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, | ὃν ἔχει πάντα τὰ ὕστερον πρὸς | πάντα τὰ λεγόμενα.

α΄.

Ἔστω | τμῆμα τὸ ΑΒΓ περιεχόμενον | ὑπὸ εὐθείας τῆς ΑΓ καὶ ὀρθο|γωνίου κώνου τομῆς τῆς ΑΒΓ, | καὶ τετμήσθω δίχα ἡ ΑΓ τῷ Δ, | καὶ παρὰ τὴν διάμετρον ἤχθω ἡ | ΔΒΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, | ΒΓ.

λέγω, ὅτι ἐπίτριτόν ἐστιν τὸ ΑΒΓ | τμῆμα τοῦ ΑΒΓ τριγώνου.

ἤχθω|σαν ἀπὸ τῶν Α, Γ σημείων ἡ μὲν | ΑΖ παρὰ τὴν ΔΒΕ, ἡ δὲ ΓΖ ἐπιψαύ|ουσα τῆς τομῆς, καὶ ἐκ-
64r col. 1 βεβλήσ|<θω ἡ ΓΒ ἐπὶ τὸ Κ, καὶ κείσθω τῇ ΓΚ | ἴση ἡ ΚΘ>. νοείσθω ζυγὸς ὁ ΓΘ καὶ | μέσον αὐτοῦ τὸ Κ καὶ τῇ ΕΔ πα|ράλληλος τυχοῦσα ἡ ΜΞ.

α΄] Hero, Metr. p. 80, 17 sqq. (ἐν τῷ Ἐφοδικῷ); 84, 11 sqq.

3 ἐν — Κωνοειδῶν] deleo. 4 τῷ] om. 5 ἴσοις] ἴσα. 7 πρὸς ἄλλα μεγέθη] om. λόγοις] τόποις. 9 ἄλλα μεγέθη] om. 13 α΄] om.

1) Demonstratur De conoid. et sphaeroid. 1. sed uerba lin. 3 ἐν τῷ προγεγραμμένῳ Κωνοειδῶν et forma neglegentiore et collocatione praua interpolata esse monstrantur; e margine irrepserunt.

AD ERATOSTHENEM METHODUS. 435

11. Utemur autem hac quoque propositione:[1])
si quotlibet magnitudines ad alias magnitudines numero aequales binae ad binas, quae eodem loco positae sunt, eandem rationem habent, et priores magnitudines ad alias magnitudines quaslibet rationes habent aut omnes aut aliquot earum, posteriores autem magnitudines ad alias magnitudines, quae eodem loco positae sunt, easdem rationes habent, omnes magnitudines priores ad omnes, quae cum iis in proportione sunt, eandem rationem habent, quam omnes posteriores ad omnes, quae cum iis in proportione sunt.

I.

Sit segmentum ΑΒΓ comprehensum recta ΑΓ sectioneque coni rectanguli ΑΒΓ, et ΑΓ in Δ in duas partes aequales

secetur, diametro autem parallela ducatur ΔΒΕ, et ducantur ΑΒ, ΒΓ.

Dico, segmentum ΑΒΓ tertia parte maius esse triangulo ΑΒΓ.

A punctis Α, Γ ducantur ΑΖ rectae ΔΒΕ parallela, ΓΖ autem sectionem contingens, et ΓΒ ad Κ producatur, ponaturque ΚΘ = ΓΚ. recta ΓΘ libra fingatur punctumque eius medium Κ, et ΜΞ recta aliqua rectae ΕΔ parallela.

28*

la aplicación del método mecánico de Arquímedes al cálculo de la cuadratura de un segmento parabólico en *Archimedis Opera Omnia* de J.L. Heiberg.

[14] Aquí Arquímedes aplica que triángulos de la misma base y altura tienen igual área, así como la semejanza de los triángulos ACK, DCB : AK/BD = AC/DC = 2,

de donde resulta: AK = 2BD, AK·AC = 2AC·BD.

Ahora se tiene: ZAC = 2KAC = AK¨AC = 2BD·AC = 4ABC.

[15] En el texto de J.L.Heiberg este último párrafo aparece al comienzo de la proposición siguiente. Debido a su significado, como colofón de la proposición sobre la cuadratura de la parábola, y de acuerdo con la mayor parte de los autores, parece más razonable ubicarlo aquí.

[16] Arquímedes se refiere a la demostración puramente geométrica de la cuadratura del segmento parabólico ya publicada en la segunda parte del libro *Sobre la Cuadratura de la Parábola*. Aunque aquí anuncia la reproducción de esta demostración, seguramente al final del tratado, ésta no ha aparecido en el palimpsesto de Jerusalén.

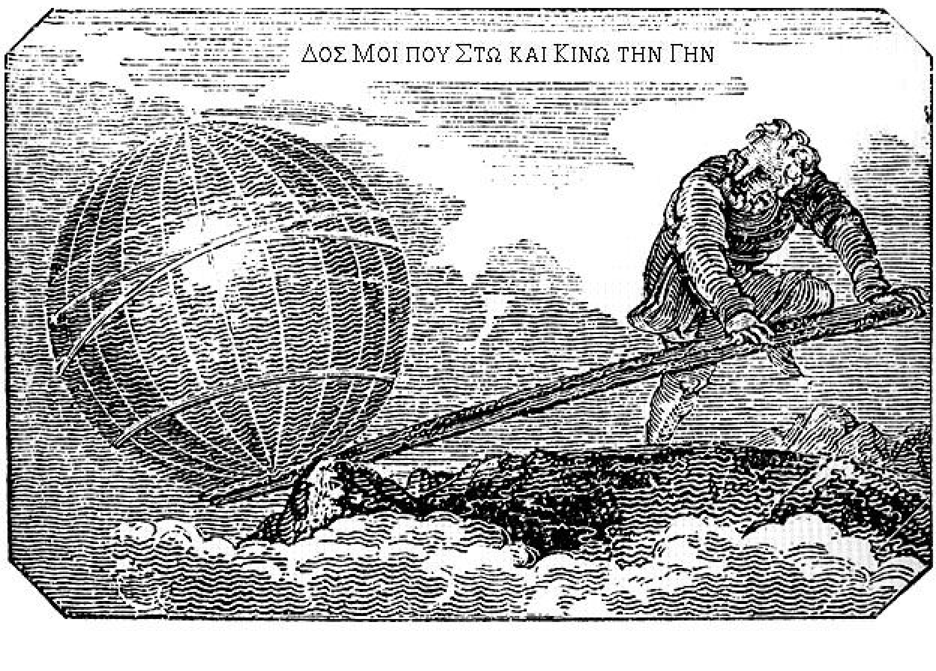
LA LEY DE LA PALANCA DE ARQUÍMEDES

Una anécdota muy conocida de Arquímedes tiene que ver con la famosa «*Ley de la Palanca*» que Arquímedes aplica en su método mecánico del *MÉTODO* para encontrar las cuadraturas y cubaturas. Según Pappus de Alejandría, Arquímedes habría pronunciado la célebre frase, tan arrogante como retórica y absurda: «*Dadme un punto de apoyo y levantaré el mundo*», en conexión con el problema de mover un peso dado, mediante una fuerza dada. Poco antes de narrar los asedios de Siracusa por Marcelo, Plutarco describe así las palabras de Arquímedes (Marcelo, XIV):

> **«*Arquímedes escribió a Hierón que con una potencia dada, se puede mover un peso igualmente dado; y jugando, como suele decirse con la fuerza de la demostración, le aseguró que si le dieran otra tierra, movería ésta después de pasar a aquélla. Maravillado Hierón, y pidiéndole que verificara con obras este problema e hiciese ostensible cómo se movía una gran mole con una potencia pequeña, compró un gran transporte de tres velas, que fue sacado a tierra con mucho trabajo y a fuerza de gran número de brazos; le cargó de gente y del resto que solía echársele, y sentados lejos de él, sin esfuerzo alguno y con sólo mover con la mano el cabo de una máquina de gran fuerza atractiva, lo llevó así derecho y sin detención, como si corriese por el mar. Pasmóse el rey, y convencido del poder del arte, encargó a Arquímedes que le construyese toda especie de máquinas de sitio, bien fuese para defender o para atacar.*»**

Grabados alusivos a la famosa frase presuntamente pronunciada por Arquímedes:«*Dadme un punto de apoyo y levantaré el mundo*».

1. **Ilustración de la Estancia de la Matemática en la Galería de los Uffizi de Florencia, pintada por G. Parigi hacia 1600.**
2. **Ilustración de *Mechanics Magazine*. Londres, 1824.**



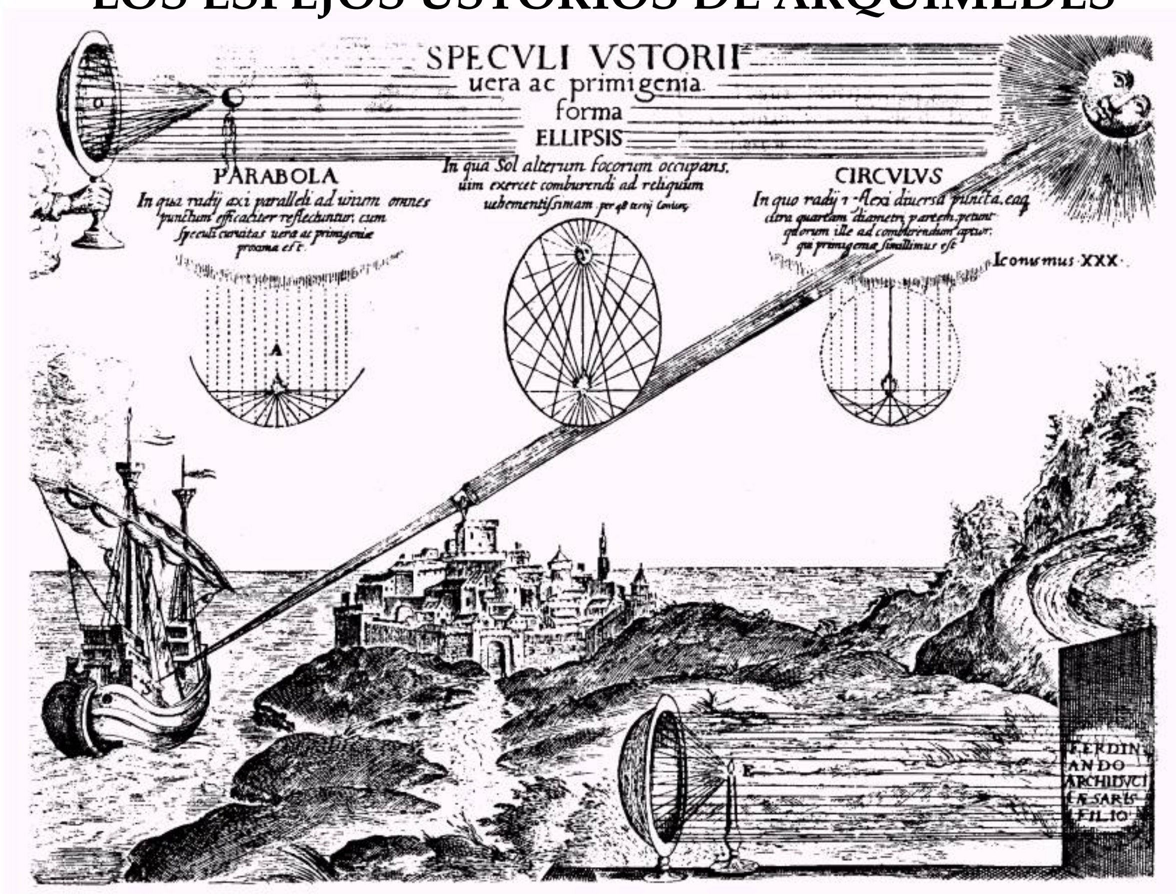
ARQUÍMEDES Y LA DEFENSA DE SIRACUSA

Grabados sobre la utilización de Arquímedes de los espejos ustorios en la defensa de Siracusa.

Siracusa era en tiempos de Arquímedes una fortaleza magníficamente fortificada, que ya en el pasado le había permitido resistir los asedios de atenienses y cartagineses. Los romanos que habían sido humillados por los cartagineses de Aníbal en Trebia (218 a.C.), Trasimeno (217) y sobre todo en Cannas (216) envían un ejército y una flota contra Siracusa que, al mando del cónsul Marcelo, iniciarán un largo asedio. Y es aquí donde interviene, con las oportunas concesiones a la fantasía épica, el increíble despliegue de la ingeniería militar diseñada por Arquímedes: construcciones a base de palancas, poleas, catapultas, ruedas dentadas, sogas, garfios, etc., que lanzando ingentes cantidades de piedras de enorme tamaño, sometiendo al enemigo a un bombardeo permanente de miles de flechas y elevando en el aire los barcos romanos, cual objetos ingrávidos y destruyéndolos como quien de cascanueces se sirviese, o dejándoles caer contra las rocas o hundiéndoles en el mar, convertía el asedio de Siracusa en un espectáculo dantesco para los asaltantes romanos, según describe Plutarco (Marcelo XV–XVIII) con todo lujo de detalles.

Según la narración épico-científica de Plutarco, Arquímedes tuvo en jaque al poderoso ejército romano, siendo el artífice y el alma de la defensa de Siracusa, ya que la ciudad se valía exclusivamente de sus ingenios, tanto para defenderse como para atacar. Los romanos llegaron a creer que luchaban contra dioses invisibles o gigantes de cien manos. Marcelo, considerando ya vanos todos los intentos de ataque directo durante cerca de ocho meses, suspende la acción armada y se acoge al tiempo que puedan soportar los siracusanos el bloqueo por tierra y por mar, como único aliado. De esta forma Arquímedes mantuvo invicta a su ciudad en el campo y en el mar.

LOS ESPEJOS USTORIOS DE ARQUÍMEDES



Grabado del siglo XVII sobre la utilización de Arquímedes de los espejos ustorios en la defensa de Siracusa, durante la segunda guerra púnica.

La leyenda también atribuye a Arquímedes los terroríficos espejos ustorios, que reflejando los rayos solares sobre las velas de los barcos romanos enemigos que asediaban Siracusa, les hacia arder. El fundamento de estos incendiarios artefactos ópticos estribaría en las leyes minimales de la reflexión de los rayos luminosos («*los rayos de luz siempre buscan el camino más corto*») y en las propiedades geométricas de las cónicas en las que se basarían la forma de los espejos.

Las propiedades ustorias de la parábola se basan en su naturaleza geométrica. Todos los rayos que emanen del foco de la parábola formarán un haz de rayos paralelos después de reflejarse en ella. Recíprocamente todos los rayos procedentes de una gran distancia, como los rayos del sol, pueden considerarse paralelos, por tanto la parábola los hará reflejarse a todos ellos y los concentrará en un sólo punto, el foco de la parábola. De este modo, un espejo parabólico tendría una terrible propiedad destructiva: concentrará en el foco todos los rayos provenientes del sol; cualquier objeto situado en el foco, acabará rápidamente incinerado.

Las alusiones a los espejos ustorios de Arquímedes no tienen una gran fiabilidad. Los testimonios sobre el evento defensivo son de época muy posterior y además las referencias contienen frases del tipo «*se cree* ...». Los estudios de la investigación histórica tienden casi con unanimidad a negar el episodio de la intervención de los espejos ustorios de Arquímedes en la defensa de Siracusa. Un argumento decisivo es que no es citado por los historiadores más fiables en la narración de la conquista de Siracusa: Plutarco, Tito Livio y Polibio; mientras que no escatiman imaginación y exageración hiperbólica en la descripción del sorprendente despliegue de otros artilugios utilizados por Arquímedes para desbaratar la acción militar de los soldados de Marcelo.

Se han intentado dar explicaciones a la atribución que la tradición ha hecho sobre Arquímedes de los espejos ustorios. Quizá la más plausible sea la que resulta de la conjunción de dos informaciones, según las cuales, por una parte, Arquímedes se habría ocupado –como afirma Apuleyo– de espejos ustorios, y por otra, algunas de las naves romanas que sitiaban Siracusa, habrían sido incendiadas, según asegura Silio Itálico. La combinación de ambas afirmaciones habrían acuñado para la posteridad, sin fundamento histórico, la utilización por Arquímedes de espejos ustorios como maquinaria bélica en la defensa de Siracusa.

Ya en el Renacimiento y poco más tarde, importantes científicos se ocuparon del tema de los espejos ustorios. Dignos de mención son los estudios de Leonardo y Galileo, así como los de Kepler y Descartes. De las investigaciones de los primeros no parece deducirse la hazaña óptica de Arquímedes y las de los segundos resueltamente la desmienten. También parecen desmentirlo los estudios posteriores de A. Kircher, profesor Colegio Romano, en su obra *Ars Magna Lucis et Umbrae* de 1646, así como las investigaciones experimentales de Buffon en su *Histoire Naturelle* de 1774 y un comentario de Peyrard, apéndice de su traducción de 1807 de las obras de Arquímedes.

LA ÉPICA MUERTE DE ARQUÍMEDES

La muerte de Arquímedes ha sido descrita en diversas narraciones por parte de numerosos historiadores y literatos (Plutarco, Valerio Máximo, Tito Livio, Silio Itálico, Giorgio Valla, Zonarás, Tzetzes, Cicerón, etc.) siempre rodeada de una atmósfera novelesca épica.

Mientras duraba el cerco romano sobre Siracusa, Marcelo conquistó gran parte de Sicilia. Las conversaciones entre sitiadores y sitiados para la liberación de un rehén, permitió a Marcelo acercarse a la ciudad y observar que sus formidables defensas tenían un punto débil. Marcelo que era un sagaz estratega, esperó un momento propicio, cuando los siracusanos celebraban las fiestas en honor de Artemisa, pródigas en ebriedad y disipación, para penetrar en las defensas de la ciudad. Los sitiados, que no estaban en condiciones de organizar la resistencia, se dieron a la fuga, y así en el 212 a.C. Siracusa fue conquistada, perdiendo su secular y gloriosa independencia.

Se sabe que Marcelo, mientras era exaltado y glorificado por sus soldados, manifestó llanto y dolor ante la previsible ruina que amenazaba el saqueo de la ciudad, que el general romano no podría impedir, ya que sus soldados estaban exasperados después de tres años de asedio. Pero lo que más afligió a Marcelo fue la desgraciada muerte de Arquímedes, a manos de un soldado romano, a pesar de haber dado órdenes para que se respetara su vida. En su sincera condolencia Marcelo discriminó al soldado ejecutor como un sacrílego y buscó a los familiares de Arquímedes para poder honrarles. Veamos el relato de Plutarco (Marcelo, XIX):

> **«[...]** ***Lo que principalmente afligió a Marcelo*** **[tras la conquista de Siracusa]** ***fue lo que ocurrió con Arquímedes: hallábase éste casualmente entregado al examen de cierta figura matemática, y fijos en ella su ánimo y su vista, no sintió la invasión de los romanos ni la toma de la ciudad. Presentósele repentinamente un soldado, dándole orden de que le siguiera a casa de Marcelo; pero él no quiso antes de resolver el problema y llevarlo hasta la demostración; con lo que, irritado el soldado, desenvainó la espada y le dio muerte. Otros dicen que ya el romano se le presentó con la espada desenvainada en actitud de matarle, y que al verle le rogó y suplicó se esperara un poco, para no dejar imperfecto y oscuro lo que estaba investigando; de lo que el soldado no hizo caso y le pasó con la espada. Todavía hay acerca de esto otra relación, diciéndose que Arquímedes llevaba a Marcelo algunos instrumentos matemáticos, como cuadrantes, esferas y ángulos, con los que manifestaba a la vista la magnitud del sol, y que dando con él los soldados, como creyesen que dentro llevaba oro, le mataron. Fuese como fuese, lo que no puede dudarse es que Marcelo lo sintió mucho, que al soldado que le mató de su propia mano le mandó retirarse de su presencia como abominable, y que habiendo hecho buscar a sus deudos, los trató con el mayor respeto y distinción.*****»**

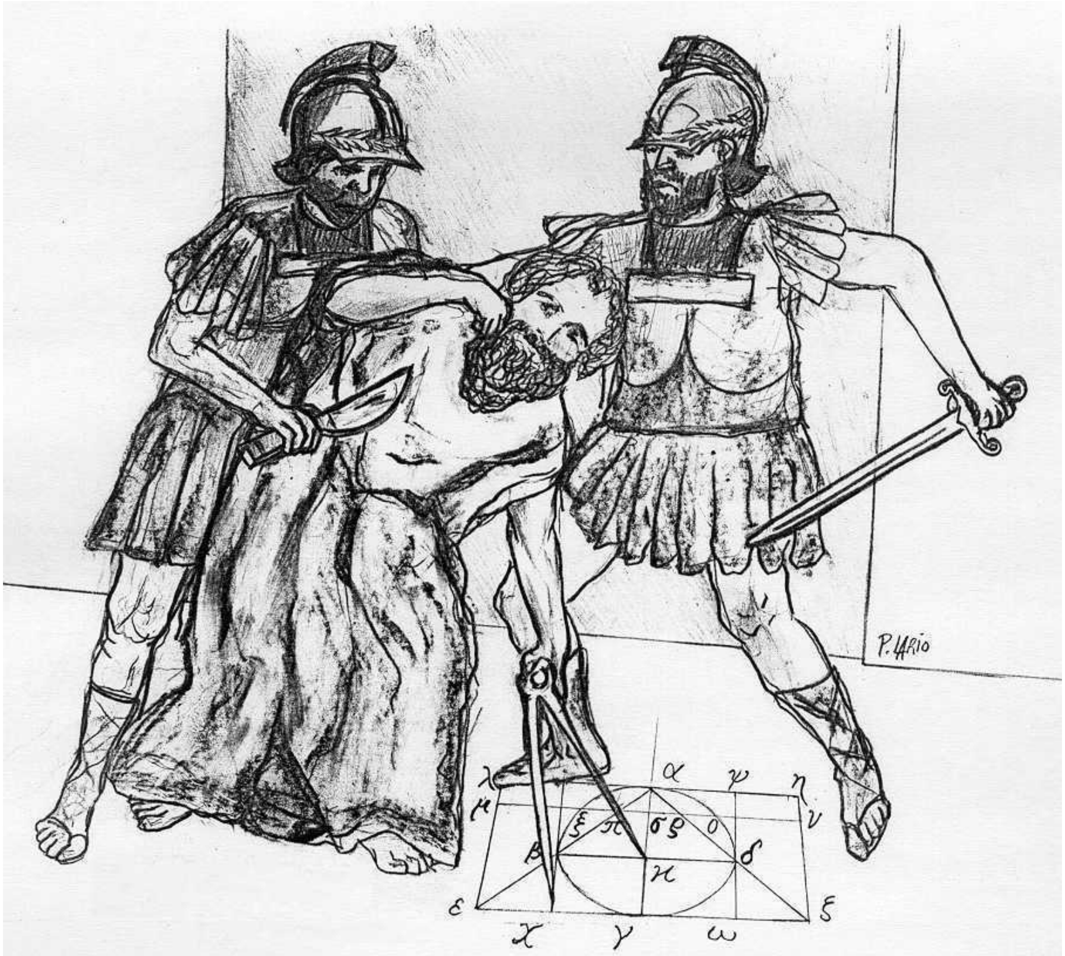
Una versión ligeramente distinta es la de Valerio Máximo (*Facta et dicta memorabilia*, VIII, 7,7):

> **«*Marcelo, dueño finalmente de Siracusa, no ignoraba que habían sido las máquinas de ese geómetra las que habían demorado tanto tiempo la victoria. Sin embargo, lleno de admiración por ese genio extraordinario, dio orden de conservarle la vida, siendo para él de tanta gloria la conservación de Arquímedes como la toma de Siracusa. Pero mientras Arquímedes con la vista y la atención fijos en el suelo trazaba figuras, un soldado que había penetrado en la casa para saquearla, levantó sobre él su espada preguntándole quien era. Arquímedes, totalmente dedicado al problema cuya solución buscaba, no atinó a decirle su nombre, sino que mostrándole con las manos las líneas dibujadas sobre la arena, le dijo: "Por favor, no borres eso". Y el soldado, viendo en esta respuesta un insulto al poder de los vencedores, le cortó la cabeza; y la sangre de Arquímedes se confundió con la labor de su ciencia.*».**

Otras narraciones de la muerte de Arquímedes son más sucintas. Según Tito Livio, Arquímedes fue asesinado por un soldado que no le reconoció; Silio Itálico afirma que Arquímedes «*fue muerto por un soldado que ignoraba su identidad, mientras meditaba sobre unas formas geométricas dibujadas en al arena, en nada alterado su ánimo en medio de tan inmensa destrucción*». Giorgio Valla sostiene que Arquímedes le dijo al soldado que le amenazaba: «*la cabeza sí, pero no el dibujo*», queriendo manifestar que le diera muerte, pero que no destruyera lo que había dibujado. Zonarás ofrece una versión similar. Para Tzetzes, Arquímedes no advirtió quien era aquel que le obligaba a acompañarle mientras él estaba dedicado a trazar una figura mecánica, por lo que le rogó que se alejase de ella. Pero al volverse y ver que se trataba de un soldado romano comenzó a gritar: «*Que alguien me dé una de mis máquinas*». Entonces, el soldado romano, reconociendo al defensor genial de Siracusa, contraviniendo la orden de Marcelo, lo mató inmediatamente, por lo que más tarde sería ajusticiado.

La capacidad abstractiva de Arquímedes, absorto siempre en sus especulaciones geométricas, le inhibió la atención sobre el evento más dramático que vivió su patria en toda su historia. Cualquiera que sea la versión auténtica, todos los historiadores coinciden en que Marcelo quería proteger a Arquímedes, es decir que la admiración del militar hacia el sabio, convertía la hostilidad que debía tener hacia su enemigo principal en magnanimidad. Así desapareció el más grande de todos los sabios del mundo antiguo, víctima, como muchos, de la violencia que trae los desastres de la guerra.

ICONOGRAFÍA DE LA MUERTE DE ARQUÍMEDES



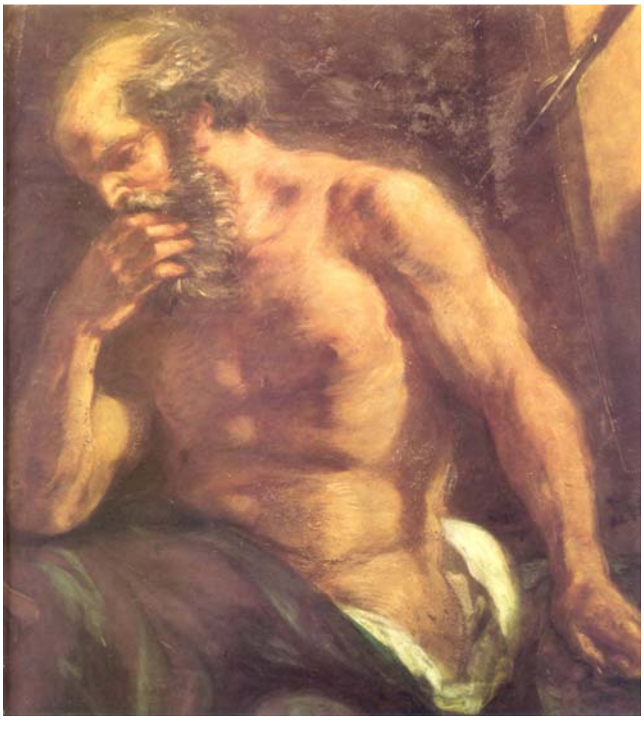
Recreación libre, realizada por Pedro Lario, del grabado sobre la muerte de Arquímedes que se conserva en la Biblioteca del Monasterio de San Lorenzo del Escorial. La figura geométrica corresponde a la utilizada por Arquímedes para la cuadratura de la esfera en *EL MÉTODO*.

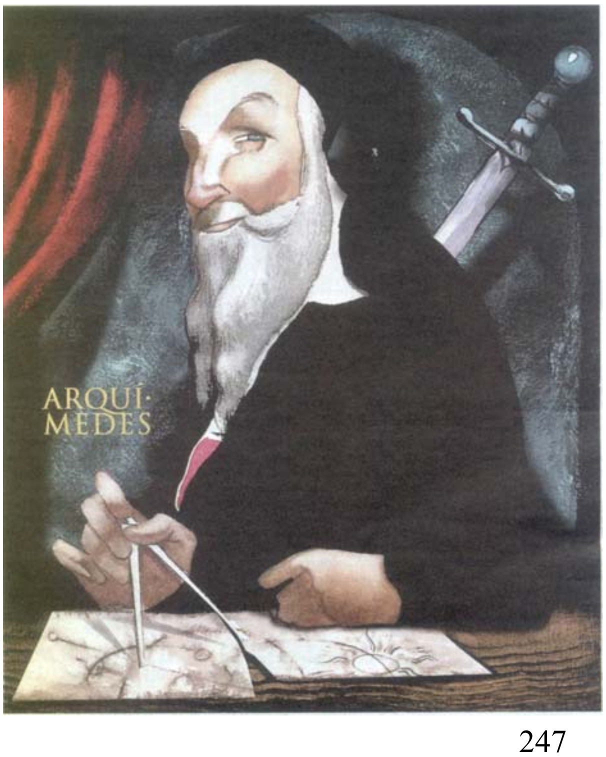
Ilustración sobre la muerte de Arquímedes de un texto inglés sobre la segunda guerra púnica.

ICONOGRAFÍA DE LA MUERTE DE ARQUÍMEDES

1. **Mosaico procedente de Pompeya que representa la muerte de Arquímedes.**
2. **Detalle del cuadro de Delacroix que representa la muerte de Arquímedes.**
3. **Ilustración sobre la muerte de Arquímedes que acompaña al artículo de J.E. Zúñiga titulado «*Arquímedes intelectual comprometido*», publicado en el suplemento de libros *Babelia* del diario *EL PAÍS* de 10/07/04. La personalidad excepcional de Arquímedes está siempre de permanente actualidad.**

La biografía histórica y la literatura ha descrito la figura de Arquímedes como el paradigma del ingeniero de la antigüedad, que pone su genio y su ingenio, como técnico, al servicio del patriotismo que exige la difícil situación política y militar de su tierra, con una actuación épica que alcanza a dar la vida por la patria. Tal vez por esto la Historia del Arte ha sido muy generoso con Arquímedes al tomar su figura y su historia personal, en particular sus últimos momentos, como tema artístico en los más diversos estilos, lo que se refleja en la abundante iconografía arquimediana. Aquí tal vez las dos imágenes de Arquímedes (1 y 3) más alejadas en el tiempo.

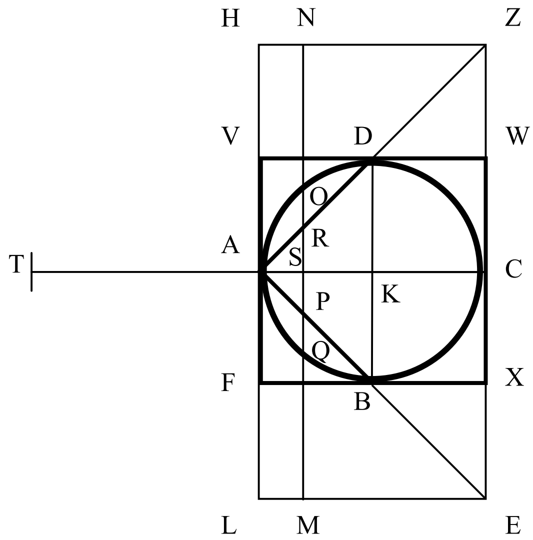




La Cubatura de la esfera

PROPOSICION II

Toda esfera es cuádruple del cono cuya base sea igual al círculo máximo de la esfera y cuya altura sea igual al radio de la esfera [17]; a su vez el cilindro cuya base sea igual al círculo máximo de la esfera y cuya altura sea igual al diámetro de la esfera, es igual a vez y media la esfera [18]. Ambas proposiciones se ilustran del siguiente modo:



Sea una esfera cuyo círculo máximo sea ABCD, siendo AC y BD dos diámetros perpendiculares. Sea también en la esfera un círculo de diámetro BD, perpendicular al círculo ABCD; y a partir de ese círculo constrúyase un cono que tenga por vértice el punto A. Prolongada la superficie del cono, córtese éste por un plano que pase por C y sea paralelo a la base, que dará un círculo perpendicular a AC, cuyo diámetro será la recta EZ. Constrúyase después a partir de este círculo un cilindro de eje igual a AC y sean EL y ZH generatrices del mismo. Prolónguese CA y tómese en su prolongación una recta AT igual a ella, y considérese CT como una palanca cuyo punto medio sea A. Trácese una paralela cualquiera MN a BD, que corte al círculo ABCD en Q y O, al diámetro AC en S, a la recta AE en P y a la recta AZ en R. Levántese sobre la recta MN un plano perpendicular a AC, que cortará al cilindro según el círculo de diámetro MN, a la esfera ABCD según el círculo de diámetro QO y al cono AEZ según el círculo de diámetro PR.

Puesto que el rectángulo determinado por CA y AS equivale al determinado por MS y SP, ya que AC es igual a SM y AS es igual a SP, y el determinado por CA y AS equivale al cuadrado de AQ, es decir a los cuadrados de QS y SP, resulta que el rectángulo determinado por MS y SP equivale a los cuadrados de QS y SP [19].

[17] La demostración geométrica de este resultado está en la proposición I.34 del tratado *Sobre la Esfera y el Cilindro*.

[18] La demostración geométrica de este resultado está en el corolario de la proposición I.34 del tratado *Sobre la Esfera y el Cilindro*.

[19] Arquímedes utiliza que «*en un círculo una cuerda es media proporcional entre el diámetro que pasa por uno de sus extremos y la proyección de la cuerda sobre él*», lo cual es consecuencia de *Euclides* III.31 (uno de los famosos teoremas de Tales de Mileto), y de un corolario de *Euclides* VI.8 («*en un triángulo rectángulo un cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella*». Mediante este resultado y el Teorema de Pitágoras (*Euclides* I.47) Arquímedes va obteniendo:

Por ser la razón de CA a AS como la de MS a SP y ser CA igual a AT, la razón de AT a AS es como la razón de MS a SP, es decir como la razón del cuadrado de lado MS al rectángulo determinado por MS y SP. Y habiéndose demostrado que el rectángulo determinado por MS y SP equivale a los cuadrados de QS y SP, la razón de AT a AS será como la razón del cuadrado de MS a los cuadrados de QS y SP [20]. Y por ser la razón del cuadrado de MN a los cuadrados de QO y PR como la razón del cuadrado de MS a los cuadrados de QS y SP y la razón del círculo sección del cilindro de diámetro MN a los círculos, secciones del cono y de la esfera, de diámetros PR y QO respectivamente, como la razón del cuadrado de MN a los cuadrados de PR y QO, resulta que la razón del círculo sección del cilindro a los círculos secciones del cono y la esfera, es como la de AT a AS [21]. **L**uego, dado que la razón de AT a AS es como la razón del círculo que está en el cilindro, permaneciendo en su lugar, a los círculos cuyos diámetros son QO y PR, trasladados y colocados sobre el punto T, de tal manera que el centro de gravedad de cada uno de ellos sea T, estos círculos estarán en equilibrio respecto del punto A.

De la misma forma se puede ver que si se traza otra paralela a EZ en el paralelogramo LZ, y sobre la recta así trazada se levanta un plano perpendicular a la recta AC, el círculo determinado en el cilindro, permaneciendo en su lugar, estará en equilibrio, respecto del punto A, con los dos círculos determinados, respectivamente, en la esfera y en el cono, trasladados y colocados de tal modo sobre la palanca en el punto T, que el centro de gravedad de cada uno de ellos sea el punto T. Así pues llenados con tales círculos el cilindro, la esfera y el cono, el cilindro, permaneciendo en su lugar, estará en equilibrio, respecto del punto A, con la esfera y el cono juntos, trasladados y colocados sobre la palanca en el punto T, de manera que el centro de gravedad de cada uno de ellos sea T.

Así pues, dado que dichos sólidos están en equilibrio respecto del punto A, permaneciendo el cilindro en torno al centro de gravedad K [22], y la esfera y el cono trasladados, como se ha dicho, con el centro de gravedad en T, resultará que la razón del cilindro a la esfera y el cono juntos, será la misma que la razón de AT a AK [23], y como AT es doble de AK, el cilindro será doble de la esfera y el cono juntos, y siendo el cilindro triple del mismo cono [24], tres conos equivalen a dos de los mismos conos y dos esferas. Sustráiganse dos conos comunes y resultará que el cono cuya sección a través del eje es el triángulo AEZ, equivale a las dos esferas mencionadas. Ahora bien, el cono cuya sección a través del eje es el triángulo AEZ equivale a ocho conos cuya sección a través del eje es el triángulo ABD, porque EZ es doble de BD. Los ocho conos indicados equivalen, pues, a dos esferas. Por tanto la esfera cuyo

---

$AQ^2 = AC \cdot AS$, $AQ^2 = QS^2 + SP^2$.

$MS \cdot SP = AC \cdot AS = AQ^2 = QS^2 + SP^2$.

[20] A partir de la relación deducida: MS/SP = AT/AS, si se multiplican los dos términos de la primera fracción por MS y se tiene en cuenta la nota anterior resulta:

$$\frac{AT}{AS} = \frac{MS \cdot MS}{MS \cdot SP} = \frac{MS^2}{QS^2 + SP^2} \ .$$

[21] Arquímedes utiliza aquí que «*la razón entre círculos es igual a la razón entre los cuadrados de sus diámetros*» (*Euclides*, XII.2), de modo que a partir de la igualdad de la nota anterior se obtiene:

$$\frac{AT}{AS} = \frac{MS^2}{QS^2 + SP^2} = \frac{MN^2}{Q0^2 + PR^2} = \frac{c(MN)}{c(Q0) + c(PR)}$$

siendo c(MN), c(QO), c(PR) los círculos de diámetro MN, QO, PR, respectivamente.

[22] Lema 8.

[23] *Sobre el Equilibrio de los Planos* I.6 y I.7.

[24] *Euclides*, XII.10.

círculo máximo es ABCD, es cuádruple del cono cuyo vértice es el punto A y cuya base es el círculo de diámetro BD perpendicular a AC [25].

Trácense ahora en el paralelogramo LZ por los puntos B y D las rectas FBX, IDU, paralelas a AC; y considérese un cilindro cuyas bases sean los círculos de diámetros FI y XU, y cuyo eje sea AC. Entonces, por ser el cilindro, cuya sección a través del eje es el paralelogramo FU, doble del cilindro que tiene por sección a través del eje el paralelogramo FD [26], y siendo este último cilindro, según *Los Elementos* [27], triple del cono cuya sección a través del eje es el triángulo ABD, el cilindro es séxtuplo de este cono; y habiéndose demostrado que la esfera de círculo máximo ABCD es cuádruple de este cono, el cilindro es una vez y media la esfera, que era lo que había que demostrar [28].

Habiéndose visto que toda esfera es cuádruple del cono que tiene por base un círculo máximo y cuyo eje es igual al radio de la esfera, se me ocurrió que la superficie de toda esfera es cuádruple del círculo máximo de la esfera [29]; porque tenía la intuición de que, puesto que todo círculo es equivalente al triángulo cuya base es igual a la circunferencia del círculo y cuya altura es igual al radio [30], toda esfera es equivalente al cono cuya base es la superficie de la esfera y cuya altura es igual al radio [31] [32] [33] ..

---

[25] Desarrollemos simbólicamente los cálculos que Arquímedes describe retóricamente.

Sean:

e = esfera ABCD.

c = cilindro de diámetro EZ y generatrices EL, ZH.
a = cono cuya sección es el triángulo AEZ.
b = cono cuya sección es el triángulo ABD.

Aplicando el método mecánico, Arquímedes muestra que c = 2(e+a) .

Pero como según *Euclides* XII.10 se verifica que c = 3a, se tiene: a = 2e.

Ahora bien como los conos a y b son semejantes, la razón entre ellos será el cubo de la razón entre los diámetros de sus bases (*Euclides* XII.12,), por tanto se tiene: a = 8b .

Combinando los resultados se obtiene finalmente: e = 4b.

[26] *Euclides*, XII.14.

[27] Arquímedes se refiere a *Euclides* XII.10. Algunos autores, entre ellos el editor J.L.Heiberg, sospechan que esta referencia explícita de Arquímedes a *Los Elementos* de Euclides, es una interpolación. En toda la obra de Arquímedes hay sólo dos citas explícitas de *Los Elementos* de Euclides, una en *Sobre la Esfera y el Cilindro* I.2 –refiriéndose a *Euclides*, I.2– y otra también en *Sobre la Esfera y el Cilindro* –refiriéndose a *Euclides* XII.2–.

[28] Según nota al píe de J.L.Heiberg «*esta solemne cláusula*» («*lo que había que demostrar*») es una interpolación. Como se ha visto tanto en el preámbulo como al final de la Proposición I, Arquímedes manifiesta que el procedimiento del *MÉTODO* no constituye verdadera demostración. También al final del primer párrafo de la Proposición II, Arquímedes no utiliza el término demostrar sino «*ilustrar*».

[29] La demostración geométrica de este resultado está en la proposición I.33 del tratado *Sobre la Esfera y el Cilindro*.

[30] Sobre la Medida del Circulo, Proposición 1.

[31] La feliz intuición de Arquímedes le lleva al resultado correcto. En efecto sean:

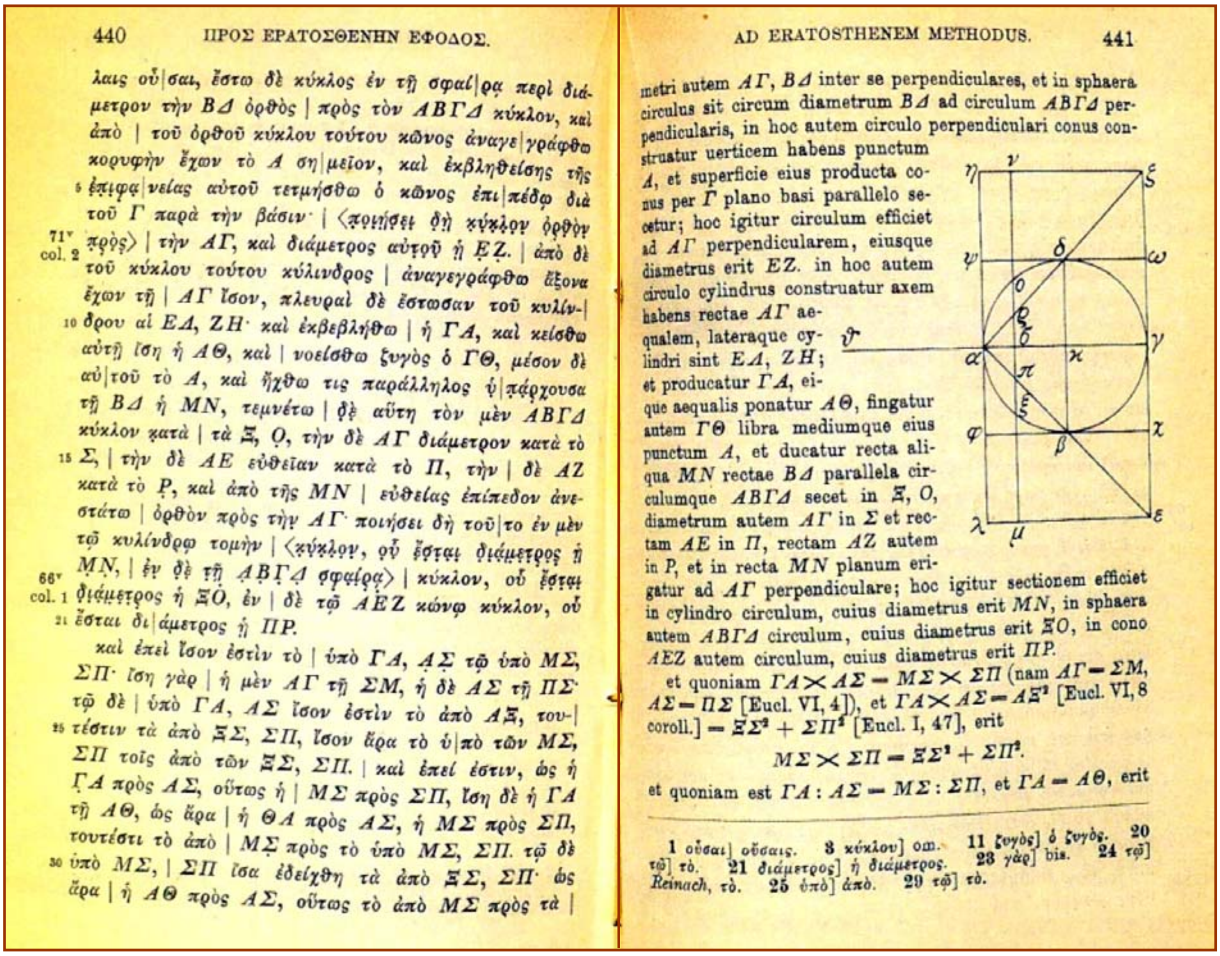
S = superficie de una esfera e de radio r.
s = área de un círculo máximo de la esfera e.
C = cono de base S y altura r.
c = cono de base s y altura r.

Del resultado de Arquímedes: e = 4c .

De la intuición de Arquímedes obtenida por analogía con la Proposición 1 de *Sobre la Medida del Círculo*, se tiene: e = C .

Por tanto C = 4c, de donde según *Euclides*, XII.11 se deduce: S = 4s ,es decir la superficie de una esfera es cuatro veces un círculo máximo.

LA CUBATURA DE LA ESFERA



440 ΠΡΟΣ ΕΡΑΤΟΣΘΕΝΗΝ ΕΦΟΔΟΣ.

λαις οὖ|σαι, ἔστω δὲ κύκλος ἐν τῇ σφαί|ρᾳ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ ὀρθὸς | πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, καὶ ἀπὸ | τοῦ ὀρθοῦ κύκλου τούτου κῶνος ἀναγε|γράφθω κορυφὴν ἔχων τὸ Α ση|μεῖον, καὶ ἐκβληθείσης τῆς ἐπιφα|νείας αὐτοῦ τετμήσθω ὁ κῶνος ἐπι|πέδῳ διὰ τοῦ Γ παρὰ τὴν βάσιν· | ⟨ποιήσει δὴ κύκλον ὀρθὸν 71ʳ col. 2 πρὸς⟩ | τὴν ΑΓ, καὶ διάμετρος αὐτοῦ ἡ ΕΖ. | ἀπὸ δὲ τοῦ κύκλου τούτου κύλινδρος | ἀναγεγράφθω ἄξονα ἔχων τῇ | ΑΓ ἴσον, πλευραὶ δὲ ἔστωσαν τοῦ κυλίν-|δρου αἱ ΕΛ, ΖΗ· καὶ ἐκβεβλήσθω | ἡ ΓΑ, καὶ κείσθω αὐτῇ ἴση ἡ ΑΘ, καὶ | νοείσθω ζυγὸς ὁ ΓΘ, μέσον δὲ αὐ|τοῦ τὸ Α, καὶ ἤχθω τις παράλληλος ὑ|πάρχουσα τῇ ΒΔ ἡ ΜΝ, τεμνέτω | δὲ αὕτη τὸν μὲν ΑΒΓΔ κύκλον κατὰ | τὰ Ξ, Ο, τὴν δὲ ΑΓ διάμετρον κατὰ τὸ Σ, | τὴν δὲ ΑΕ εὐθεῖαν κατὰ τὸ Π, τὴν | δὲ ΑΖ κατὰ τὸ Ρ, καὶ ἀπὸ τῆς ΜΝ | εὐθείας ἐπίπεδον ἀνεστάτω | ὀρθὸν πρὸς τὴν ΑΓ· ποιήσει δὴ τοῦ|το ἐν μὲν τῷ κυλίνδρῳ τομὴν | ⟨κύκλον, οὗ ἔσται διάμετρος ἡ ΜΝ, | ἐν δὲ τῇ ΑΒΓΔ σφαίρᾳ⟩ | κύκλον, οὗ ἔσται 66ʳ col. 1 διάμετρος ἡ ΞΟ, ἐν | δὲ τῷ ΑΕΖ κώνῳ κύκλον, οὗ ἔσται δι|άμετρος ἡ ΠΡ.

καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶν τὸ | ὑπὸ ΓΑ, ΑΣ τῷ ὑπὸ ΜΣ, ΣΠ· ἴση γὰρ | ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΣΜ, ἡ δὲ ΑΣ τῇ ΠΣ· τῷ δὲ | ὑπὸ ΓΑ, ΑΣ ἴσον ἐστὶν τὸ ἀπὸ ΑΞ, του-|τέστιν τὰ ἀπὸ ΞΣ, ΣΠ, ἴσον ἄρα τὸ ὑ|πὸ τῶν ΜΣ, ΣΠ τοῖς ἀπὸ τῶν ΞΣ, ΣΠ. | καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως ἡ | ΜΣ πρὸς ΣΠ, ἴση δὲ ἡ ΓΑ τῇ ΑΘ, ὡς ἄρα | ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, ἡ ΜΣ πρὸς ΣΠ, τουτέστι τὸ ἀπὸ | ΜΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΣ, ΣΠ. τῷ δὲ ὑπὸ ΜΣ, | ΣΠ ἴσα ἐδείχθη τὰ ἀπὸ ΞΣ, ΣΠ· ὡς ἄρα | ἡ ΑΘ πρὸς ΑΣ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΜΣ πρὸς τὰ |

AD ERATOSTHENEM METHODUS. 441

metri autem $A\Gamma$, $B\Delta$ inter se perpendiculares, et in sphaera circulus sit circum diametrum $B\Delta$ ad circulum $AB\Gamma\Delta$ perpendicularis, in hoc autem circulo perpendiculari conus construatur uerticem habens punctum A, et superficie eius producta conus per Γ plano basi parallelo secetur; hoc igitur circulum efficiet ad $A\Gamma$ perpendicularem, eiusque diametrus erit EZ. in hoc autem circulo cylindrus construatur axem habens rectae $A\Gamma$ aequalem, lateraque cylindri sint $E\Lambda$, ZH; et producatur ΓA, eique aequalis ponatur $A\Theta$, fingatur autem $\Gamma\Theta$ libra mediumque eius punctum A, et ducatur recta aliqua MN rectae $B\Delta$ parallela circulumque $AB\Gamma\Delta$ secet in Ξ, O, diametrum autem $A\Gamma$ in Σ et rectam AE in Π, rectam AZ autem in P, et in recta MN planum erigatur ad $A\Gamma$ perpendiculare; hoc igitur sectionem efficiet in cylindro circulum, cuius diametrus erit MN, in sphaera autem $AB\Gamma\Delta$ circulum, cuius diametrus erit ΞO, in cono AEZ autem circulum, cuius diametrus erit ΠP.

et quoniam $\Gamma A \times A\Sigma = M\Sigma \times \Sigma\Pi$ (nam $A\Gamma = \Sigma M$, $A\Sigma = \Pi\Sigma$ [Eucl. VI, 4]), et $\Gamma A \times A\Sigma = A\Xi^2$ [Eucl. VI, 8 coroll.] $= \Xi\Sigma^2 + \Sigma\Pi^2$ [Eucl. I, 47], erit

$$M\Sigma \times \Sigma\Pi = \Xi\Sigma^2 + \Sigma\Pi^2.$$

et quoniam est $\Gamma A : A\Sigma = M\Sigma : \Sigma\Pi$, et $\Gamma A = A\Theta$, erit

1 οὖσαι] οὔσαις. 3 κύκλου] om. 11 ζυγὸς] ὁ ζυγός. 20 τῷ] τό. 21 διάμετρος] ἡ διάμετρος. 23 γάρ] bis. 24 τῷ] Reinach, τό. 25 ὑπὸ] ἀπό. 29 τῷ] τό.

La cubatura de la esfera en *Archimedis Opera Omnia* de J.L. Heiberg.

La cubatura de la esfera es, sin duda es el ejemplo más ilustrativo de la aplicación del método mecánico de Arquímedes al cálculo de cuadraturas y cubaturas.

---

[32] Arquímedes tiene claro que la argumentación mecánica del *MÉTODO*, que tan fructífera era para conocer áreas de figuras planas y volúmenes de sólidos, no le servía para determinar áreas de superficies curvas, lo que le lleva a soslayar tal impedimento mediante un razonamiento por analogía, comparando la situación entre el volumen y superficie de la esfera con la situación entre el área y el perímetro de un círculo, cambiando cono por triángulo, es decir, como se verifica:

Area del círculo = triángulo de base la circunferencia y altura el círculo.

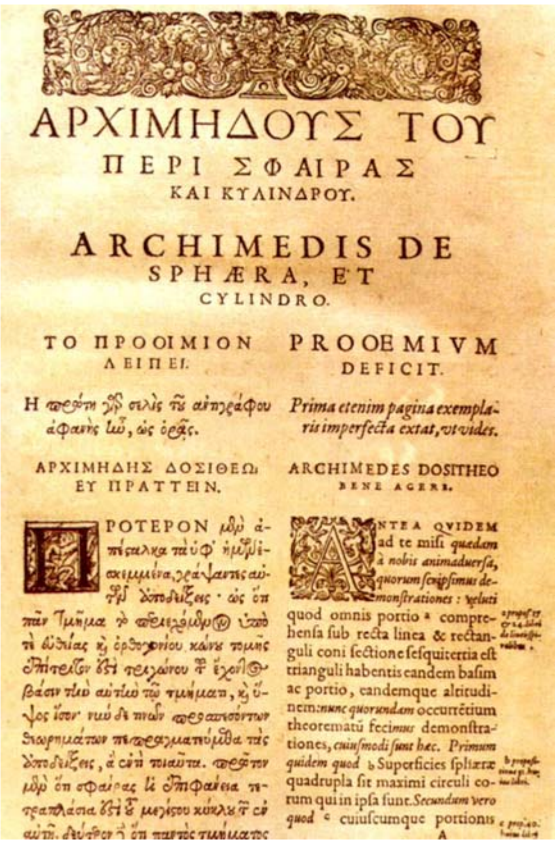
Análogamente debe verificarse:

Volumen de la esfera = cono de base la superficie de la esfera y altura igual al radio.

Arquímedes da muestras de una intuición genial, pero en este lugar no cabe duda de que ha tenido una idea feliz, porque no siempre la analogía conduce a un resultado correcto. Por ejemplo, un triángulo es igual a la mitad de un paralelogramo de igual base y altura, pero en cambio la pirámide no es equivalente a la mitad del prisma de igual base y altura, sino a su tercera parte.

[33] Observemos que Arquímedes, en *EL MÉTODO*, encuentra el volumen de una esfera antes que el área de la misma y deduce ésta de aquél. No obstante, como hemos mencionado anteriormente, Arquímedes demuestra el resultado del área de la esfera, en la Proposición 33 del Libro I de su tratado *Sobre la Esfera y el Cilindro*, es decir antes y de forma independiente del volumen de la esfera, que lo demuestra en la proposición siguiente. Es por tanto interesante observar como en Arquímedes, y así también en otros geómetras griegos, la secuencia de las proposiciones en los grandes tratados clásicos no es la misma que la seguida en el proceso heurístico del descubrimiento.

LA ESFERA Y EL CILINDRO
EN LA TUMBA DE ARQUÍMEDES EN SIRACUSA



ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΤΟΥ ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΣ ΚΑΙ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ.

ARCHIMEDIS DE SPHÆRA, ET CYLINDRO.

ΤΟ ΠΡΟΟΙΜΙΟΝ ΛΕΙΠΕΙ.

PROOEMIVM DEFICIT.

Prima etenim pagina exemplaris imperfecta extat, vt vides.

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ ΔΟΣΙΘΕΩ ΕΥ ΠΡΑΤΤΕΙΝ.

ARCHIMEDES DOSITHEO BENE AGERE.

ANTEA QVIDEM ad te misi quedam à nobis animaduersa, quorum scripsimus demonstrationes: veluti quod omnis portio comprehensa sub recta linea & rectanguli coni sectione sesquitertia est trianguli habentis eandem basim ac portio, eandemque altitudinem: nunc quorundam occurrẽtium theorematũ fecimus demonstrationes, cuiusmodi sunt hec. Primum quidem quod Superficies sphæræ quadrupla sit maximi circuli eorum qui in ipsa sunt. Secundum vero quod cuiuscumque portionis

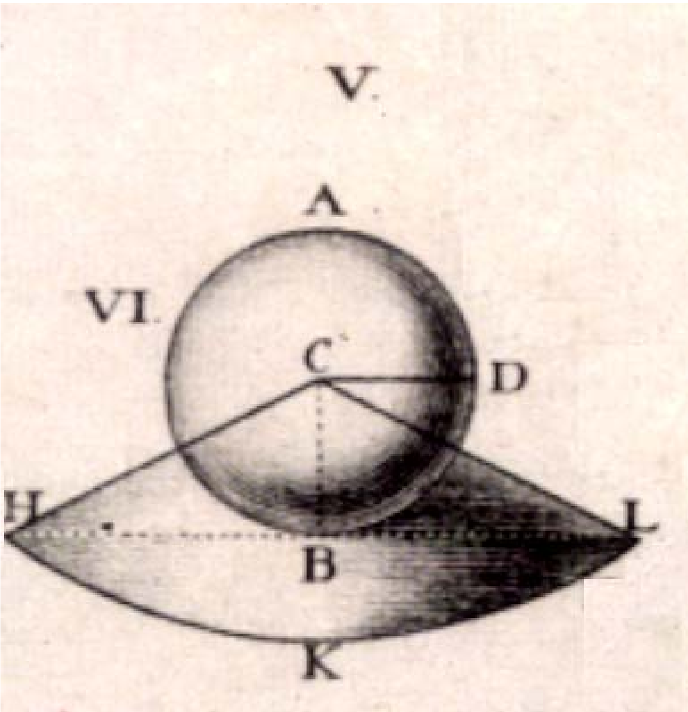
Primera página de la obra de Arquímedes *Sobre la Esfera y el Cilindro*. Museo Municipal de Trieste.

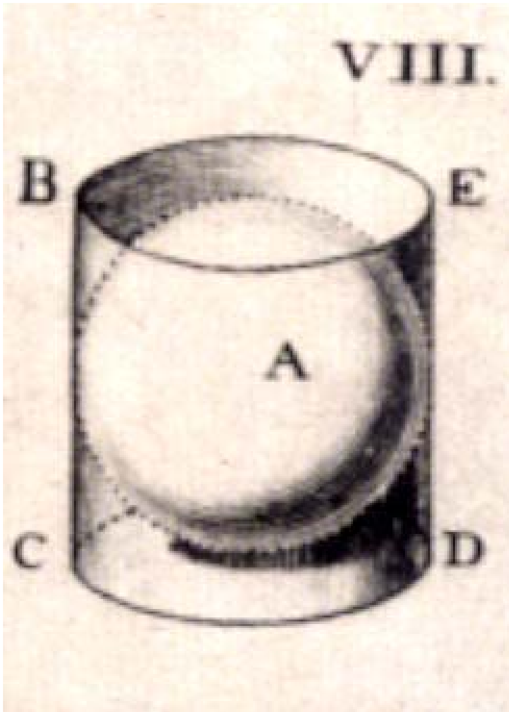
la obra de Arquímedes *Sobre la Esfera y el Cilindro* se considera la continuación natural del Libro XII de *Los Elementos* de Euclides. Ambas tratan de las figuras esferas, cilindros y conos, pero Arquímedes trasciende de forma considerable los resultados de Euclides, al demostrar aquí, de forma impecable, mediante el método de exhaución, nuevos y fundamentales teoremas sobre el volumen y la superficie de la esfera, que Arquímedes había obtenido mediante el *Principio de la Palanca* del *método mecánico*.

Euclides se había limitado a dar la proporcionalidad entre dos esferas y los cubos construidos sobre sus diámetros (XII.18). Arquímedes no sólo da las razones entre la esfera, el segmento esférico y el sector esférico y ciertos conos, sino también la razón entre la superficie de la esfera y del casquete esférico y ciertos círculos.

Los trabajos geométricos desarrollados por Arquímedes en esta obra son probablemente considerados los más importantes por el científico, hasta el punto que exhortó a sus deudos a que se grabara en su tumba las figuras de un cilindro circunscrito a una esfera junto con un epigrama que describiese la relación que las vincula, que son sencillas proporciones que debieron impresionar al propio Arquímedes:

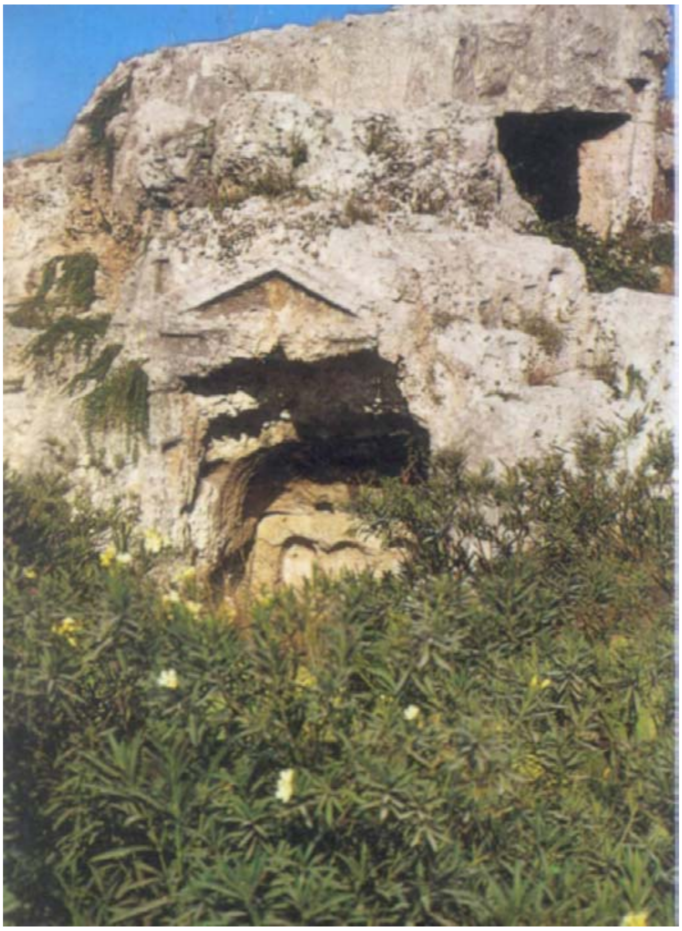
- «*La esfera y el cilindro circunscrito a ella están en la relación de 2 a 3, tanto en volumen como en superficie total.*»
- «*los volúmenes de un cono, una semiesfera y un cilindro de la misma altura y radio están en la razón* 1:2:3.»





Figuras de la obra de Arquímedes Sobre la Esfera y el Cilindro que aparecen en la edición crítica de Mazzuchelli de 1737 de las Obras sobre Arquímedes

EL PRIMER EPITAFIO CIENTÍFICO DE LA HISTORIA EN LA TUMBA DE ARQUÍMEDES EN SIRACUSA



La llamada tradicionalmente «*tumba de Arquímedes*», situada en Siracusa, en las cercanías de Acradina.

La tumba de Arquímedes fue hallada por Cicerón –como describe en sus *Tusculanorum disputationum*– gracias a que, impresionado quizá por la sencillez de un resultado, Arquímedes manifestó el deseo de que se grabara en su tumba la figura de un cilindro circunscrito a una esfera.

Efectivamente, según referencia de Plutarco (Marcelo, XVII):

> «[...] *Habiendo sido autor de muchos y excelentes inventos, dícese haber encargado a sus amigos y parientes que después de su muerte colocasen sobre su sepulcro un cilindro con una esfera inscrita, poniendo en la inscripción la cantidad en que en esos dos sólidos el continente supera al contenido.*»

Estos hechos –que han contribuido a mitificar la relación obtenida por Arquímedes entre la esfera y el cilindro circunscrito– fueron ratificados por Cicerón cuando fue a Siracusa como cuestor de Sicilia. Cicerón se propuso encontrar la tumba de Arquímedes, quien siglo y medio después de su muerte era prácticamente ignorado por sus conciudadanos, lo que consiguió gracias a la identificación de la inscripción.

Cicerón describe el hallazgo en sus *Tusculanorum disputationum* , V:

> «[...] *Arquímedes, cuyo sepulcro ignorado por los siracusanos, rodeado de zarzas y espesos matorrales, hasta el punto de haberse perdido todo rastro de él, yo descubrí siendo cuestor de Siracusa. Yo conocía ciertos versos senarios, que eran copia de los de un epigrama que había sido inscrito en su monumento, los cuales declaraban que había en su sepulcro una esfera con un cilindro.* »

Después de la conquista, la ciudad de Siracusa entró en una decadencia irreversible, hasta el punto de ignorar, como hemos visto en el relato de Cicerón, al más ilustre de su personajes.

Tras el hallazgo de Cicerón, la tumba fue olvidada de nuevo, se perdió su localización y desapareció toda huella que permita su reubicación. Sin embargo, como recuerdo de la hazaña arqueológica de Cicerón, existe en Siracusa, cerca de Acradina un lugar que llaman «*La tumba de Arquímedes*» pero la atribución tiene un valor simplemente simbólico.

No obstante, hace unos años un estudioso de Siracusa anuncio, que según el relato de Cicerón, estaba seguro de haber encontrado la verdadera tumba de Arquímedes, incluso ofreció un informe del presunto descubrimiento en un opúsculo titulado precisamente «*La tumba de Arquímedes*». El evento suscitó en su momento cierta polémica con trascendencia en la prensa, pero quizá al no ser demasiado fiable, el tema ha vuelto a perder interés.

la inscripción geométrica en la tumba de Arquímedes constituye el primer epitafio científico en la Historia de la Cultura.

Análisis crítico del *Método Mecánico* de Arquímedes

EL MÉTODO de Arquímedes es un tratado donde se resuelven unos cuantos problemas geométricos mediante consideraciones mecánicas, con importantes resultados obtenidos por deducciones informales, que destilan un método de descubrimiento al servicio de un desarrollo sustancial del conocimiento matemático.

Es interesante hacer un análisis de la estructura interna del proceso discursivo de Arquímedes en EL MÉTODO, a través de un planteamiento abstracto de las diversas fases del método mecánico, a fin de que, aunque Arquímedes reconozca que:

> «[....] *la investigación hecha por este método no comporta demostración* [....]»,

intentar dilucidar la cota de rigor que subyace en cada una de esas fases.

La esencia del método mecánico se deduce de cualquiera de los problemas que Arquímedes trata. Se pueden considerar tres fases. En una primera fase, puramente geométrica, seleccionados los objetos geométricos pertinentes, se procede a la comparación de secciones del cuerpo cuyo volumen es objeto de investigación, con otras secciones de cuerpos ya conocidos. Sea determinar el volumen de un sólido S, cuyas secciones s, determinadas por un sistema de planos paralelos, son comparadas con las secciones t, de un sólido conocido T. Arquímedes fija la posición de los extremos y punto de apoyo de una palanca y obtiene, en virtud de las propiedades geométricas conocidas de S y T, una relación geométrica:

$$s/t = k/h ,$$

siendo h la distancia fija del extremo de la palanca al punto de apoyo y k la distancia de la sección t –de su centro de gravedad– al punto de apoyo.

A continuación se entra en la segunda fase del método, la fase mecánica, en la que aplicando consideraciones estáticas que Arquímedes había desarrollado en su tratado *Sobre el Equilibrio de los Planos*, establece que la sección t del sólido T, «*permaneciendo en su lugar*», equilibra, respecto del fulcro de la palanca, a la sección s del sólido S, trasladada a una posición de forma que su centro de gravedad sea un extremo de la palanca.

Hasta aquí el desarrollo lógico e intuitivo seguido por Arquímedes es totalmente riguroso, ya que es consecuencia lógica de los postulados admitidos y de los teoremas demostrados en otros tratados. Pero Arquímedes entra ahora en una tercera fase en la que dice que las secciones s y t llenan o componen, respectivamente, los sólidos S y T, de manera que repitiendo la operación anterior para todas las secciones paralelas, el sólido T «*permaneciendo en su lugar*», equilibrará, respecto del fulcro de la palanca, al sólido S trasladado a una posición de forma que su centro de gravedad sea un extremo de la palanca. Por tanto, conociendo el centro de gravedad de las figuras y el volumen de una de ellas, su posición de equilibrio permitirá encontrar el volumen de la otra.

Si en lugar de sólidos se consideran figuras planas, el proceso es similar considerando un sistema de rectas paralelas, que determinan sobre las figuras unas cuerdas que llenan o componen las figuras.

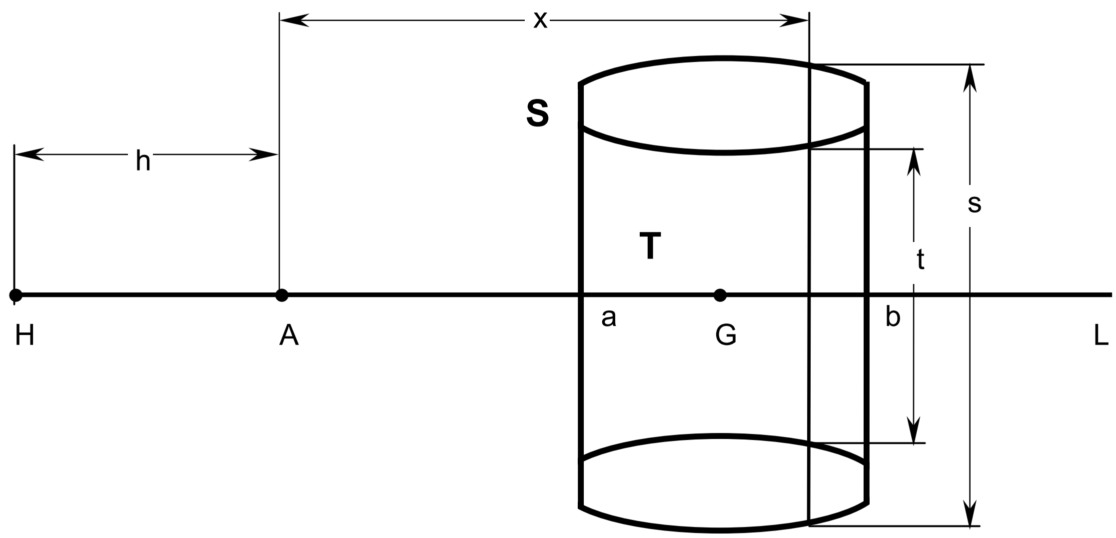
Está claro que la clave del método mecánico de Arquímedes estriba en el proceso que tiene lugar en la tercera fase y que él mismo llama con gran acierto «*composición*», mediante el cual como buen griego soslaya y camufla la presencia del infinito.

Para el caso de la cubatura de sólidos consideremos nuevamente los sólidos anteriores S y T. Consideremos el lado de la palanca en el que el sólido T «*ha permanecido en su lugar*», Arquímedes dice que las secciones t de T llenan o componen T, pero esto, además de no tener ninguna base matemática, ya que no se deduce de ningún postulado ni teorema, no tiene base material alguna, pues las secciones t que son superficies no pueden componer ni llenar de manera alguna ningún sólido (por ejemplo los círculos no pueden llenar un cilindro), pues ello violaría la «*ley de la homogeneidad*». No obstante, el error lógico de la consideración de Arquímedes se ve atemperado intuitivamente por el hecho de que el sólido T no se ha desplazado, está «*en su lugar*». Sin embargo las secciones s que componen el sólido S, se han movido paralelamente a su posición inicial hasta coincidir sus centros en el otro extremo de la palanca, de manera que todas quedan colocadas en un mismo plano que debería equilibrar a un sólido, lo cual lógica e intuitivamente es absurdo.

Sin embargo Arquímedes, con un esfuerzo de intuición ideal, imagina que las secciones s del sólido S, trasladadas, recomponen y reconstruyen el sólido del cual eran sus componentes, como si los elementos geométricos que se desplazan no fueran en realidad elementos planos, sino elementos sólidos de cierto espesor capaces de recomponer el sólido del que proceden. Tratándose de una intuición ideal que no casa con la intuición sensible de la experiencia y con el sentido común, Arquímedes tiene muy en cuenta que estos resultados sólo tienen «*cierta apariencia de verdad*» y el método «*no comporta demostración*».

Aunque resulte anacrónico es interesante hacer un análisis y valoración del método mecánico de Arquímedes a la luz de nuestro Cálculo Integral, sobre todo porque con ello se comprende cómo con métodos tan poco ortodoxos pudo Arquímedes obtener resultados absolutamente correctos.

Considerando el caso plano, sean S y T dos figuras planas situadas a lo largo del mismo intervalo de un eje horizontal L . Dada el área a(T) y el centro de gravedad G de T, se quiere hallar el área a(S) de S.



Podemos interpretar las dos figuras planas como láminas de densidad unidad, compuestas de un número infinitamente grande de elementos geométricos elementales –segmentos de línea o rectángulos de anchura infinitesimal, es decir indivisibles o infinitesimales, respectivamente, que dirían los matemáticos del siglo XVII–, perpendiculares al eje L.

Tomemos el eje L como una palanca con el punto de apoyo en A y supongamos que podemos encontrar una constante h tal que cada línea vertical, a una distancia x de A, determina en las figuras S y T segmentos de línea de longitudes s y t, respectivamente, tales que se verifica:

$s/t = x/h$ (1) .

La ley de la palanca implica entonces que el segmento desplazado al punto H, que está a una distancia h de A, equilibra al segmento t, mantenido «*en su lugar*». De ello deduce Arquímedes que si la figura S se desplaza de forma que llegue a tener su centro de gravedad en H, equilibrará a la figura T mantenida «*en su lugar*», es decir que se tiene:

$a(S)/g(T) = a(T)/h$ (2) ,

siendo g(T) la distancia del punto A al centro de gravedad G de T y asumiendo que cada figura actúa como una masa puntual situada en su centro de gravedad. Conocidos entonces el área a(T) y las distancias h y g(T), aplicando (2) se obtendrá el área a(S).

El punto crucial del desarrollo anterior estriba en el tránsito lógico de (1) a (2), es decir en la forma de demostrar que (1) implica (2), deducción que Arquímedes no realiza sino que lo asume. El paso de (1) a (2) es resuelto fácilmente mediante Cálculo Integral. En efecto, sean s(x) y t(x) las secciones de las figuras S y T a la distancia x del fulcro de la palanca A; tenemos para las áreas S y T, y para el centro de gravedad de T, las siguientes expresiones:

$$a(S)=\int_a^b s(x)\,dx\ ,\ a(T)=\int_a^b t(x)\,dx\ ,\ g(T)=\frac{1}{a(T)}\int_a^b x\,t(x)\,dx\ .$$

Ahora bien, de la igualdad (1) se deduce: s(x)=x·t(x)/h, de donde se obtiene:

$$a(S)=\int_a^b s(x)\,dx=\frac{1}{h}\int_a^b x\,t(x)\,dx\ ,$$

es decir: a(S)= g(T)·a(T)·(1/h), expresión equivalente a (2).

Así pues, en términos de integrales, el efecto del método mecánico del MÉTODO es expresar una integral que hay que calcular para hallar el área de una figura S, en términos de otras integrales, el área y el centro de gravedad de otra figura conocida T.

J.Babini en su introducción a su versión del *MÉTODO*, describe muy significativamente que al pensar en el proceso discursivo que tiene lugar al realizar una integral definida, se puede explicar la aparente paradoja de cómo Arquímedes pudo lograr con método tan poco riguroso un resultado correcto. Escribe J.Babini (Eudeba, 1996, p.24):

> «[...] *El cálculo actual de cuadraturas y cubaturas, así como la determinación de centros de gravedad, se realiza mediante el cálculo de integrales definidas, que pueden considerarse como límites de sumas, cuyos sumandos son productos de dos factores: la función integrando que en nuestro ejemplo está dada por la sección, y un incremento o diferencial que corresponderá a la distancia entre dos secciones consecutivas. Ahora bien, el resultado de la integral depende exclusivamente de la forma y propiedades de la función integrando, no desempeñando el otro factor sino el papel pasivo destinado a mantener la homogeneidad; es pues, explicable que Arquímedes, al despreciar en absoluto la homogeneidad y atender únicamente a las propiedades de la sección, expresada en su proporción de equilibrio, logre resultados correctos*.»

Parece pues que el método mecánico del *MÉTODO* es una etapa intermedia entre el momento realmente creador que Arquímedes oculta y la etapa final, rigurosamente deductiva, en la que a mediante el *Método de Exhaución* Arquímedes demuestra sus magníficos tratados geométricos. Pero estas etapas están íntimamente vinculadas, porque, como bien señala Arquímedes en el Preámbulo:

> «[...] *Estoy convencido, además, de que dicho método no será menos útil para demostrar los propios teoremas. Pues algunos de los que primero se me hicieron patentes mecánicamente, recibieron luego demostración geométricamente* [...] *pues es más fácil, después de haber adquirido por ese método cierto conocimiento de las cuestiones objeto de investigación, dar luego la demostración, que investigar sin ningún conocimiento previo* [...].»

En definitiva el método mecánico de Arquímedes es una genial combinación de consideraciones geométricas y mecánicas, en las que en esencia subyacen ciertos procedimientos de nuestro Cálculo Integral.

Grabado anónimo del siglo XVI que representa a Arquímedes planificando la defensa de Siracusa. Biblioteca Nacional de París.

En el gorro del científico reza la leyenda en griego: «*Arquímedes geómetra*»

El método de exhaución en Arquímedes. La cuadratura de la espiral

El método de exhaución utilizado por Arquímedes en la demostración de los resultados obtenidos por vía mecánica es aplicado de diversas formas que pueden clasificarse en dos tipos fundamentales: *el método de compresión* y *el método de aproximación*. Veamos el aspecto formal del primer método y una ilustración práctica del mismo mediante un ejemplo: el método de compresión aplicado a la cuadratura de la espiral.

El método de compresión de Arquímedes se aplica de la siguiente forma:

Dada una magnitud geométrica A, ya sea longitud, área o volumen, se quiere demostrar que es igual a otra magnitud B conocida. Basándose en la geometría de la figura A, se construyen dos sucesiones de figuras geométricas: $\{I_n\}$ monótona creciente (inscritas en A) y $\{C_n\}$ monótona decreciente (circunscritas a A) tales que:

$I_n<A<C_n$ para todo n (1) ,

entonces se demuestra:

a. La diferencia $C_n–I_n$ se puede hacer *tan pequeña como se quiera* para n suficientemente grande, es decir, en nuestro lenguaje:

   para todo e >0 existe N tal que para todo n>N, $C_n–I_n < \varepsilon$ (2)

b. Para todo n, In<B<Cn (3)

A partir de (1), (2) y (3) se demuestra fácilmente que A=B.

En efecto:

a. Supongamos A>B. Tomando ε=A–B, podemos encontrar un n tal que $C_n–I_n < \varepsilon$=A–B, pero según (1) $A<C_n$, luego $A–I_n<A–B$, por tanto se verificaría $B<I_n$, lo que está en contradicción con (3).
b. Supongamos A<B. Tomando ε=B–A, podemos encontrar un n tal que $C_n–I_n < \varepsilon$=B-A, pero según (1) $I_n<A$, luego $C_n–A<B–A$, por tanto se verificaría $C_n<B$, lo que está en contradicción con (3).

En consecuencia, al no ser A<B ni B<A, debe ser A=B.

La aplicación del método de compresión no es uniforme, sino que difiere de un ejemplo a otro dependiendo de la magnitud conocida B, con la que se compara la desconocida A y no hay ninguna regla general válida en todo caso. No obstante, una vez que se han demostrado las desigualdades (1) y (3), el proceso demostrativo subsiguiente es automático; sin embargo, Arquímedes realiza el proceso para cada caso particular basándose en la geometría de las figuras.

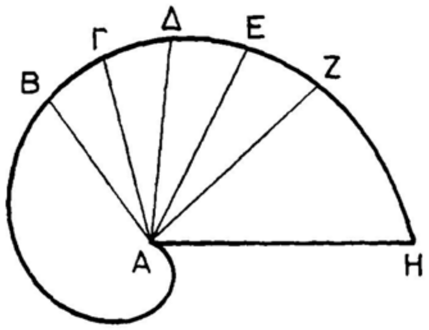
Arquímedes aplica el método de compresión en las proposiciones 1 de *Sobre la Medida del Círculo*; 22, 26, 28, 30 de *Sobre Conoides y Esferoides*; 24, 25 de *Sobre las Espirales;* 16 de *Sobre la Cuadratura de la Parábola* y 15 de *El método sobre a los teoremas mecánicos*.

Uno de los ejemplos mas significativos de la aplicación del método de compresión es la cuadratura de la primera vuelta de la espiral que Arquímedes consigue en la Proposición 24 de *Sobre las Espirales*.

Arquímedes dedica toda una obra, *Sobre las Espirales*, al estudio de la curva que lleva su nombre. La introduce, en la Definición I, en términos de composición de movimientos:

> «*Si una línea recta trazada en un plano gira un número cualquiera de veces con movimiento uniforme, permaneciendo fijo uno de sus extremos, y vuelve a la posición inicial, mientras que, sobre la línea en rotación, un punto se mueve uniformemente como ella a partir del extremo fijo, el punto describirá una espiral en el plano.*»

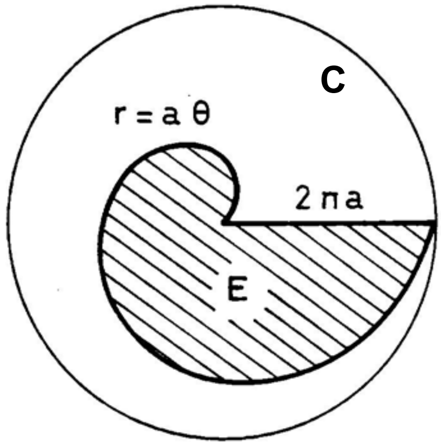
A lo largo del tratado *Sobre las Espirales*, Arquímedes va obteniendo las cuadraturas de diversas áreas relacionadas con la espiral.



En las definiciones 4, 5 y 7, respectivamente, Arquímedes define respecto de la primera vuelta de la espiral, *la primera recta* –que une el punto inicial con el final–, *el primer área* E –la región determinada por la curva y la primera recta– y *el primer círculo* C –con centro en el origen de la espiral y radio la primera recta–. Tras diversas proposiciones y corolarios, Arquímedes acaba demostrando el siguiente resultado fundamental:

PROPOSICION 24

«*El área comprendida entre la espiral descrita en la primera vuelta y la primera de las rectas en posición inicial de giro, es equivalente a un tercio del primer círculo.*»



Es decir, se tiene: a(E) = (1/3)a(C) (4).

En la prueba de (4) Arquímedes utiliza resultados previos a las definiciones, que obtiene en la proposición 10, y que son equivalentes a las habituales fórmulas para la suma de enteros consecutivos y sus cuadrados, que a la postre le llevarán a ciertas desigualdades necesarias para emprender la exhaución. Transcribamos la Proposición 10:

PROPOSICION 10

«*Si varias líneas en número cualquiera que sucesivamente se superan unas a otras en una misma magnitud se colocan unas a continuación de las otras, siendo el exceso igual a la más pequeña, y se dispone del mismo número de otras líneas iguales a la mayor de las anteriores, los cuadrados construidos sobre estas ultimas, juntamente con el cuadrado de la mayor y el rectángulo delimitado por la menor y una línea formada por todas las que se superan igualmente, valen el triple de todos los cuadrados construidos sobre éstas.*»

Despojando esta proposición de su carácter geométrico y traduciendo el lenguaje retórico a expresión algebraica, se encuentra una progresión geométrica: a, 2a,3a, ... , na, para la cual Arquímedes demuestra la relación:

$$(a^2n^2+a^2n^2+ \cdots +a^2n^2) + a^2n^2 + a(a+2a+ \cdots +na) = 3[a^2+(2a)^2+ \cdots +(na)^2]$$

resultado equivalente a la fórmula para la suma de los n primeros cuadrados de enteros

$$1^2+2^2+ \cdots +n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (5) .$$

Prosigue Arquímedes con el Corolario de la Proposición 10:

COROLARIO

«*De aquí resulta que la suma de los cuadrados construidos sobre las líneas iguales a la mayor es menor que el triple de los construidos sobre las líneas que se superan sucesivamente en la misma magnitud, porque la primera suma sería triple de la segunda si se le añadiese la primera de esas magnitudes y mayor que el triple de la segunda si se resta de ésta el triple del cuadrado de la línea mayor, porque lo aumentado a la primera suma es mayor que el triple del cuadrado de la línea mayor. Por consiguiente, si se construyen figuras semejantes sobre las líneas que se superan unas a otras en la misma magnitud, y sobre las iguales a la mayor, la suma de las figuras construidas sobre éstas será menor que el triple de las construidas sobre las líneas desiguales, y la primera suma será mayor que el triple de la segunda si se resta de ésta el triple de la figura construida sobre la línea mayor, porque estas figuras por ser semejantes tienen la misma razón que los cuadrados de los que con anterioridad hemos hablado* [Euclides, VI.20].»

Nuevamente al despojar el Corolario de Arquímedes de su ganga geométrica, y expresarlo en lenguaje algebraico, se puede escribir:

$$1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2 < \frac{n^3}{3} < 1^2+2^2+\cdots+n^2 \quad (6),$$

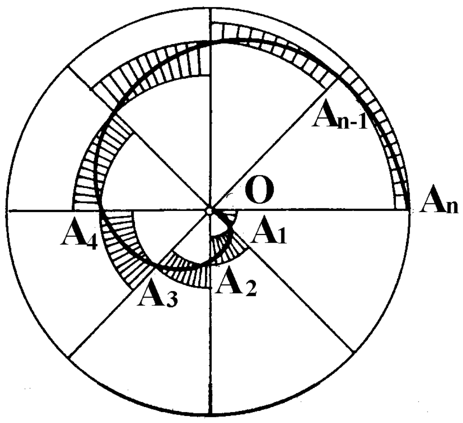
resultado que se podría obtener al expresar (5) en la forma:

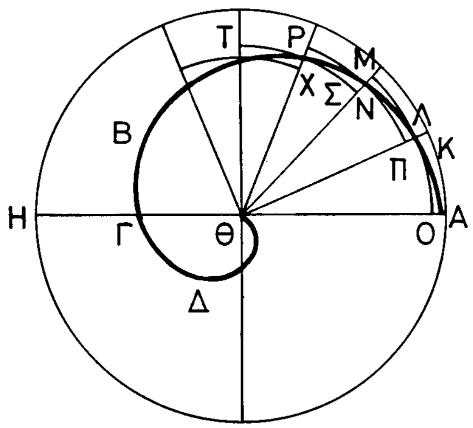
$$1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6} .$$

A partir de aquí, Arquímedes prepara el terreno para resolver el problema considerando las habituales figuras –en este caso sectores circulares– inscritas y circunscritas, y lo hace en la Proposición 21 y siguientes, y finalmente en la Proposición 24 aplica impecablemente el método de exhaución para obtener con todo rigor el resultado.

Interpretando el razonamiento de Arquímedes en lenguaje aritmético se tendrá:

Con referencia a la figura siguiente (similar a la figura contigua, utilizada por Arquímedes en la Proposición 21 de *Sobre las Espirales*), se divide el círculo C en n sectores, que intersecan a la espiral en los puntos O, A_1 , A_2, ... A_n.





Escribiendo OA_1 = c, resulta:

$OA_1=c$, $OA_2=2c$, ... $OA_n=nc$.

Se tiene, entonces, que la región espiral E contiene una región P, formada por sectores circulares inscritos P_i, de radios o, c, ... , (n–1)c, y está contenida en una región Q, formada por sectores circulares circunscritos Q_i, de radios c, 2c, ... , nc.

Trivialmente las áreas de P, E, Q, verifican: a(P) < a(E) < a(Q).

Además, la cantidad a(Q)–a(P) es igual al área de un sector circular y por tanto puede hacerse tan pequeña como se quiera tomando n suficientemente grande, de modo que, conociendo previamente el resultado (4) de la cuadratura, éste se demostrará con todo rigor mediante la doble reducción al absurdo del método de exhaución.

En efecto, supongamos $a(E) < (1/3)a(C)$, escojamos n suficientemente grande para que se verifique:

$$a(Q) - a(P) < (1/3)\, a(C) - a(E),$$

como $a(P)$ es menor que $a(E)$, se tiene:

$$a(Q) < (1/3)a(C) \quad (7)\ .$$

Ahora bien, la razón de las áreas de sectores circulares semejantes es igual a la razón de los cuadrados de sus radios (*Euclides*, XII.2), es decir:

$$\frac{a(Q)}{a(C)} = \frac{(ic)^2}{(nc)^2} \qquad i = 1,2,\ \ldots, n \qquad (8)$$

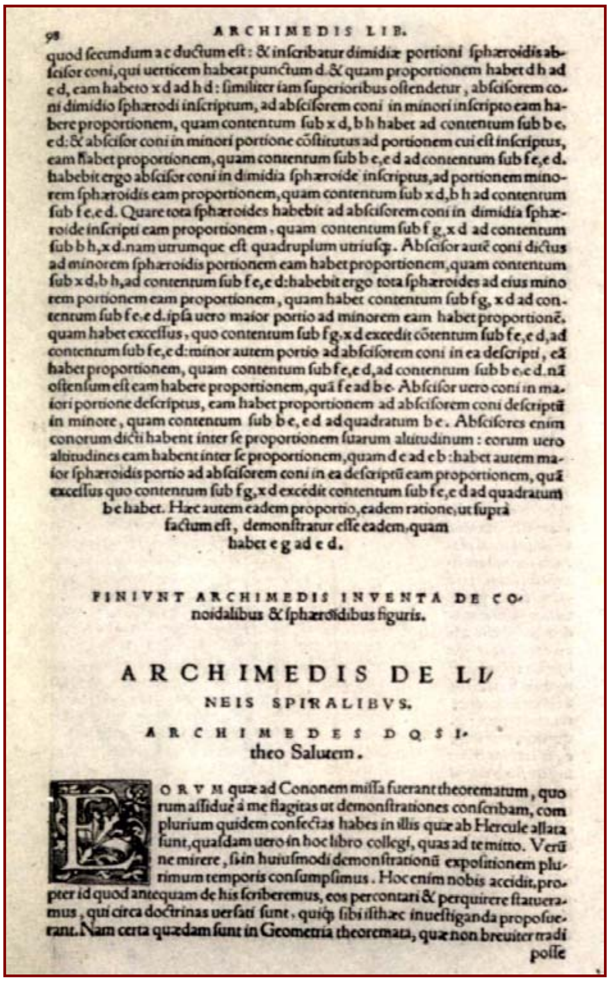
donde C son los sectores del círculo C circunscrito a la espiral. A partir de (8) aplicando las propiedades de la suma de proporciones (*Euclides*, 5.12) se obtiene:

$$\frac{a(Q)}{a(C)} = \frac{c^2 + (2c)^2 + \cdots + (nc)^2}{n(nc)^2} = \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3} > \frac{1}{3} \qquad (9)\ ,$$

la última desigualdad siendo consecuencia de (6).

A partir de (9) se obtiene el resultado $a(Q) > (1/3)a(C)$, contradictorio con (7), luego no puede suceder que $a(E)$ sea menor que un tercio de $a(C)$.

De forma análoga se aborda el supuesto $a(E) > (1/3)a(C)$.



98 ARCHIMEDIS LIB.

quod ſecundum a c ductum eſt: & inſcribatur dimidiæ portioni ſphæroidis abſciſor coni, qui uerticem habeat punctum d. & quam proportionem habet d h ad e d, eam habeto x d ad h d: ſimiliter iam ſuperioribus oſtendetur, abſciſorem coni dimidio ſphærodi inſcriptum, ad abſciſorem coni in minori inſcripto eam habere proportionem, quam contentum ſub x d, b h habet ad contentum ſub b e, e d: & abſciſor coni in minori portione cõſtitutus ad portionem cui eſt inſcriptus, eam habet proportionem, quam contentum ſub b e, e d ad contentum ſub f e, e d. habebit ergo abſciſor coni in dimidia ſphæroide inſcriptus, ad portionem minorem ſphæroidis eam proportionem, quam contentum ſub x d, b h ad contentum ſub f e, e d. Quare tota ſphæroides habebit ad abſciſorem coni in dimidia ſphæroide inſcripti eam proportionem, quam contentum ſub f g, x d ad contentum ſub b h, x d. nam utrumque eſt quadruplum utriuſq;. Abſciſor autẽ coni dictus ad minorem ſphæroidis portionem eam habet proportionem, quam contentum ſub x d, b h, ad contentum ſub f e, e d: habebit ergo tota ſphæroides ad eius minorem portionem eam proportionem, quam habet contentum ſub f g, x d ad contentum ſub f e, e d. ipſa uero maior portio ad minorem eam habet proportionẽ, quam habet exceſſus, quo contentum ſub f g, x d excedit cõtentum ſub f e, e d, ad contentum ſub f e, e d: minor autem portio ad abſciſorem coni in ea deſcripti, eã habet proportionem, quam contentum ſub f e, e d, ad contentum ſub b e, e d. nã oſtenſum eſt eam habere proportionem, quã f e ad b e. Abſciſor uero coni in maiori portione deſcriptus, eam habet proportionem ad abſciſorem coni deſcriptũ in minore, quam contentum ſub b e, e d ad quadratum b e. Abſciſores enim conorum dicti habent inter ſe proportionem ſuarum altitudinum: eorum uero altitudines eam habent inter ſe proportionem, quam d e ad e b: habet autem maior ſphæroidis portio ad abſciſorem coni in ea deſcriptũ eam proportionem, quã exceſſus quo contentum ſub f g, x d excedit contentum ſub f e, e d ad quadratum b e habet. Hæc autem eadem proportio, eadem ratione, ut ſuprà factum eſt, demonſtratur eſſe eadem, quam habet e g ad e d.

FINIVNT ARCHIMEDIS INVENTA DE CONOIDALIBUS & ſphæroidibus figuris.

ARCHIMEDIS DE LINEIS SPIRALIBVS.

ARCHIMEDES DOSITHEO Salutem.

EORVM quæ ad Cononem miſſa fuerant theorematum, quorum aſſidue à me flagitas ut demonſtrationes conſcribam, complurium quidem confectas habes in illis quæ ab Hercule allata ſunt, quaſdam uero in hoc libro collegi, quas ad te mitto. Verũ ne mirere, ſi in huiuſmodi demonſtrationũ expoſitionem plurimum temporis conſumpſimus. Hoc enim nobis accidit, propter id quod antequam de his ſcriberemus, eos percontari & perquirere ſtatueramus, qui circa doctrinas uerſati ſunt, quiq; ſibi iſthæc inueſtiganda propoſuerant. Nam certa quædam ſunt in Geometria theoremata, quæ non breuiter tradi poſſe

Página de *Sobre las Espirales* en *Archimedis Opera Omnia* (Basilea, 1544).

Este tratado está dedicado al estudio de una curva llamada *Espiral de Arquímedes*, que el científico de Siracusa define de forma cinemática. Está catalogado como la obra más importante de Arquímedes sobre Geometría Plana. No es una obra fácil de entender y de hecho no es bien interpretada hasta después del Renacimiento. Quizá el primero en hacerlo con certeza es Cavalieri, quien por sus importantes estudios sobre la curva arquimediana fue considerado por Galileo como un «*émulo de Arquímedes*».

La cuadratura de la espiral de Arquímedes constituye uno de los ejemplos más representativos de la aplicación del método de exhaución de los griegos a los problemas de cuadraturas. Además, este trabajo de Arquímedes tuvo una influencia decisiva en los métodos de cuadratura aritmética del siglo XVII.

Puede decirse, en cierto modo, que esta memoria es el tratado más antiguo sobre Cálculo Diferencial, ya que Arquímedes presta atención a la determinación de las tangentes, y ello desde el mismo prólogo:

> **«*Si una recta es tangente a la espiral en su extremo obtenido en último lugar, y si, sobre la recta que ha girado y vuelto a su lugar, se alza en su extremo fijo una perpendicular hasta que se encuentre con la tangente, digo que la recta así llevada hasta ese encuentro es igual a la circunferencia del* [primer] *círculo*. »**

Como vemos *Sobre las Espirales* tiene que ver también con las investigaciones teóricas de Arquímedes sobre la rectificación de la circunferencia del círculo.

El *método de exhaución* en Arquímedes según J.Babini

ARQUIMEDES: *El Método*. Introducción y notas de J. Babini.

Eudeba, Buenos Aires, 1966, pp.14-17.

A comienzo del siglo IV a.C. la matemática tenía mas de un siglo de existencia. Nacida a la sombra de la metafísica pitagórica fundada en la omnipresencia y omnipotencia del numero «*el numero es la esencia de todas las cosas*», ya había andado mucho. Sin embargo, pronto mostró su incompatibilidad con aquella metafísica, pues se demostró que no había numero (racional) para expresar la relación entre elementos tan simples como la diagonal y el lado de un cuadrado, o el lado de un triángulo equilátero y el diámetro de su circunferencia circunscrita, y así sucesivamente. Este hecho planteaba a los pitagóricos una tremenda alternativa: de mantener su metafísica, mutilaban la geometría; de mantener la geometría anulaban su metafísica. Mientras los pitagóricos se debatían en esta cuestión, los matemáticos encararon el problema desde el punto de vista técnico, y uno de ellos, Eudoxo de Cnido, encuentra una escapatoria. La solución de Eudoxo comprende una definición, un principio y un método. La definición de Eudoxo evita la dificultad que había presentado la razón entre cantidades inconmensurables, por carecer los griegos del concepto de nuestro «*numero irracional*», definiendo, no esa razón, sino la igualdad de razones; es decir, la proporción, de una manera tal de soslayar esa carencia. Para ello, mediante desigualdades y números enteros, logra definir la proporcionalidad, sean conmensurables o no las cantidades proporcionales. Esta definición de la proporcionalidad **[Euclides V.5]** es la que luego servirá de base a la teoría de la semejanza que aparece en los *Elementos* de Euclides **[Libro VI]**.

El principio de Eudoxo establece la condición para que dos cantidades tengan razón. Ese «*principio*», que figura entre las definiciones del libro V de los *Elementos* **[Euclides V.4]**, establece como tal condición que «*existe razón entre dos cantidades cuando un múltiplo de la menor supera a la mayor*», expresión en la que vuelven a aparecer números enteros y una desigualdad. Ahora bien, en su libro de la Esfera y del Cilindro **[y también en la carta a Dositeo que antecede a la obra *Sobre la Cuadratura de la Parábola*]** Arquímedes incluye esa proporción entre los postulados [Postulado **I.5**], ya que no obstante la gran evidencia que el «*principio*» revela, su perspicacia matemática le advierte que no se trata de una definición, sino de una proposición de la cual debe partirse, es decir, de un postulado. La existencia de «*geometrías no arquimedianas*» demostradas este siglo que ni cumplen con ese postulado, muestran claramente cuan acertada fue la ubicación que Arquímedes asignó a este «*principio*» en la construcción geométrica. Hoy, ese postulado es el importante «*Postulado de Continuidad*», a veces llamado «*Postulado de Arquímedes*» o «*Postulado de Eudoxo–Arquímedes*», en vista de su origen.

Tal postulado desempeña un papel fundamental en el «*método de exhaución*». Este método ideado por Eudoxo y aplicado por éste por primera vez, es el que en la geometría griega suple los actuales métodos infinitesimales. La primera observación importante que se formula es que no se trata de un método de descubrimiento sino de demostración, es decir, que supone conocido de alguna manera el resultado y ofrece un procedimiento riguroso para demostrarlo. De paso observemos como, ya en la época de Eudoxo, la matemática reflejaba su característica fundamental de poner el acento en el proceso deductivo, en la demostración, y no en el resultado.

Conocido, pues, de antemano el resultado, la demostración por el método de Eudoxo de que, por ejemplo, una cierta figura A es equivalente a una cierta figura B, consiste en una doble reducción al absurdo, probando que los supuesto de ser A mayor o menor que B conducen a contradicciones, de manera que no queda otra alternativa que A sea equivalente a B. Y es en esta demostración que juega su papel el postulado anterior, ya que la demostración exige que se pueda descomponer la figura en partes tales que una de ellas sea inferior a una figura dada, y esto se logra precisamente en virtud el postulado. Esta descomposición de la figura en partes cada vez más pequeñas fue la causa por la cual un matemático renacentista dio al método el nombre de «*método de exhaución*», aunque en verdad tal descomposición «*no agota*» la figura, sino que sólo llega al punto en que cierta figura es menor que una figura dada.

El método de exhaución, aplicado por Euclides en los *Elementos* en la demostración de unos pocos teoremas se convierte en manos de Arquímedes en el método riguroso con el cual determina sus muchísimas cuadraturas y cubaturas que hoy se logran más fácilmente mediante los métodos infinitesimales.

Así como el «*Principio de Eudoxo*», convertido por Arquímedes en postulado, es nuestro actual «*Postulado de Continuidad*», indispensable en el Análisis Infinitesimal, el método de exhaución es la traducción geométrica de la operación de «*paso al límite*», característica de los métodos infinitesimales. Así como en el método de exhaución se trata de llegar a una figura menor que una figura prefijada, la definición de límite exige precisar un valor menor que una cantidad prefijada.

De ahí que no ha de extrañar que se advierta en los escritos de Arquímedes una estrecha analogía con los métodos infinitesimales de hoy, que permiten calcular las cuadraturas y las cubaturas de Arquímedes mediante integrales definidas. Estas integrales que los recursos del Calculo Integral proporcionan fácilmente, comportan por su definición el concepto de límite aplicado a ciertas sumas. Ahora bien, estas sumas aparecen en sus escritos como material previo a la determinación de las cuadraturas o las cubaturas.

La influencia de Arquímedes en la génesis del Cálculo Integral

A partir del Renacimiento la Matemática empieza a presentar una inflexión respecto a la clásica griega. El paradigma formal y demostrativo que impuso la filosofía platónica en *Los Elementos* de Euclides y demás obras clásicas evoluciona bajo el principio de que lo que importa es la consecución de nuevos resultados, aunque sea sin expresión rigurosa. Se impone el lema «*primero inventar, después demostrar*». Bajo el nuevo enfoque se trata de crear y descubrir y no de expresar axiomática y apodícticamente.

Tras la recuperación y reconstrucción del legado clásico, la Matemática griega es ponderada por su alto grado de rigor y es la fuente de formación intelectual y de inspiración de los matemáticos, pero se abandonan y critican sus métodos porque no son heurísticos. En efecto el camuflaje permanente del infinito convierte a casi toda la Matemática griega en Geometría y el tratamiento absolutamente riguroso de los problemas infinitesimales requiere un subterfugio, el método de exhaución de Eudoxo–Arquímedes, que obliga a tratar cada problema de forma particular, dependiendo de su estructura geométrica concreta, además de precisar un método complementario para prever los resultados. Por eso ya en el siglo XVII, una vez recuperada gran parte de la Matemática griega, era general el deseo de encontrar nuevos métodos para resolver rápidamente los problemas, métodos que permitieran obtener de forma directa los resultados, aunque hubiera que relajar el rigor.

En particular respecto del Cálculo Integral se abre al comienzo del siglo XVII una etapa empírica, que cubre los dos primeros tercios de este siglo, en los que manejando unos elementos con un estatuto ontológico no muy bien definido –«*indivisibles*», «*infinitamente pequeños*», «*incrementos evanescentes*», «*cantidades despreciables*», etc.–, se desarrollan multitud de técnicas y métodos infinitesimales, que contribuyeron a resolver de forma sorprendente antiguos y nuevos problemas, bajo la acción de profundas intuiciones, que, supliendo la falta de rigor, evitaban las contradicciones y el absurdo adonde podía haber llevado tanto desenfreno conceptual, y que condujeron bajo una perspectiva de generalización y unificación, a la destilación de un algoritmo universal, al descubrimiento simultáneo del Cálculo Infinitesimal por parte de Newton y Leibniz.

Bajo esta perspectiva resulta que los matemáticos que desarrollaron el germen del Cálculo Integral, habiendo bebido en las fuentes de los grandes tratados conocidos de Arquímedes, –que ahora tenían a su disposición–, donde el método de exhaución presidía todo el desarrollo con un férreo rigor, al intentar soslayar la rigidez de la exhaución mediante artificios geométricos que les condujeran a procedimientos heurísticos de rápido descubrimiento, se aproximan de forma sorprendente a la técnica del método mecánico del MÉTODO de Arquímedes. Esto es particularmente cierto en el caso de B.Pascal –que aplica ingeniosamente su «*método de la balanza*», llamada «*balanza de Arquímedes*» en los famosos problemas sobre la cicloide–, y sobre todo en el caso de Cavalieri con sus *Indivisibles.* Evidentemente en este asunto no se puede hablar de la influencia directa de Arquímedes, toda vez que el siglo XVII no dispuso del *MÉTODO*, sino de analogías, pero hace aún más comprensible el que muchos matemáticos de esta época estuvieran convencidos, como se comentó con anterioridad, de que Arquímedes disponía de un método especial de descubrimiento.

En los albores del siglo XVII muchos métodos infinitesimales aparecen como modificaciones y simplificaciones de los métodos de Arquímedes, intentando metodizar las técnicas arquimedianas obviando la necesidad de la doble reducción al absurdo de la exhaución, resintiéndose el rigor en las demostraciones con el uso de los indivisibles y los infinitamente pequeños y apareciendo de forma latente consideraciones sobre límites basadas en la incipiente Teoría de Números.

El excesivo abuso de la intuición inmediata de las magnitudes geométricas y la violación del principio de homogeneidad espacial dimensional con los indivisibles, provocaba que no hubiera en el ambiente matemático un consenso acerca del valor demostrativo de los métodos utilizados. Algunos concebían el método como simplemente heurístico y creían necesaria una demostración por exhaución –punto de vista arquimediano–. En general se consideraba que los resultados obtenidos mediante indivisibles podían justificarse fácilmente con la exhaución, pero no era necesario porque concebían el nuevo método inventivo, no más que como un lenguaje diferente, un estilo distinto de expresar unos mismos conceptos. Saben que los resultados son correctos, porque saben y pueden probarlos rigurosamente mediante los métodos de Arquímedes. En el cuadro siguiente reproducimos algunas frases representativas de lo que se acaba de exponer:

LOS MÉTODOS DE ARQUÍMEDES Y LOS DE LOS MATEMÁTICOS DEL SIGLO XVII

J.KEPLER (*Nova stereometria doliorum vinariorum* de 1615):
[....] ***Podríamos obtener demostraciones perfectas de los libros de Arquímedes, a nosotros no nos repele la espinosa lectura de ellos.***

B.CAVALIERI (*Geometría Indivisibilibus continuorum* ... de 1635):
[...] ***Se podría demostrar todo esto*** **[cuadraturas y cubaturas]** ***utilizando las técnicas arquimedianas, pero supondría un gran esfuerzo.***

P.FERMAT (*De aequationum localium ... in quadrandis infinitis parabolis et hiperbolis* [Tratado sobre cuadratura] de 1658):
[...] ***Basta hacer esta observación*** **[sobre las condiciones para poder aplicar el método de Arquímedes]** ***una vez para no obligarse a recordar y a insistir constantemente sobre un artificio bien conocido de todos los geómetras.*** **[...].** ***Así alcanzamos la conclusión, que podría ser fácilmente confirmada por una más prolija prueba llevada a cabo a la manera de Arquímedes.***

B.PASCAL (*Lettre à Carcavi* de 1659):
[...] ***He querido hacer esta advertencia para mostrar que todo lo que está demostrado por las verdaderas reglas de los indivisibles se demostrará también con el rigor y a la manera de los antiguos*** **[como Arquímedes]** ***y que así ambos métodos no difieren más que en la manera de hablar.***

I.BARROW (*Lectiones Geometricae* de 1670):
[...] ***Se podría alargar mediante un discurso apagógico*** **[mediante la doble reducción al absurdo del método de exhaución de Arquímedes].**

J.WALLIS (*Arithmetica infinitorum* de 1656):
[...] ***Este procedimiento es altamente heterodoxo, pero puede verificarse mediante el bien conocido método apagógico*** **[arquimediano]** ***de figuras inscritas y circunscritas, lo que es superfluo, porque la frecuente iteración produce náusea en el lector. Cualquiera ducho en Matemáticas puede realizar tal prueba.***

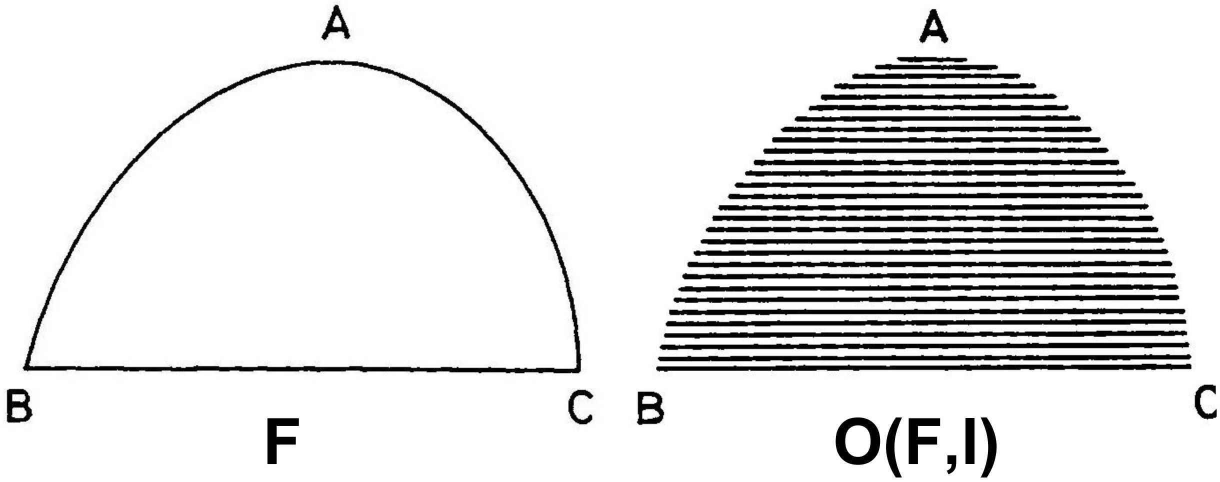
C.HUYGENS (*Horologium oscillatorium* de 1673):
[...] ***No es de gran interés el que demos una demostración absoluta, después de haber visto que una perfecta demostración puede ser dada. Concedo que debería aparecer en una forma clara, ingeniosa y elegante, como en todos los trabajos de Arquímedes. Pero lo primero y más importante es el método de descubrimiento mismo.***

Las frases transcritas son muy significativas para comprender la enorme influencia de los tratados conocidos de Arquímedes sobre los artífices del Cálculo Infinitesimal, pero también nos sirven para mostrar la analogía entre la argumentación heurística de los matemáticos del siglo XVII y el discurso informal y sugerente del método mecánico del *MÉTODO* de Arquímedes que actúa de forma ascendiente como una variable oculta.

El *método mecánico* de Arquímedes y los Indivisibles de Cavalieri

El cúmulo de analogías entre los procedimientos heurísticos del Cálculo del siglo XVII y el método mecánico del MÉTODO de Arquímedes tiene su más clara representación en los Indivisibles de Cavalieri. En 1635 Cavalieri publica su famosa obra *Geometría Indivisibilibus continuorum ....* (*Geometría de los continuos por indivisibles presentada por métodos nuevos*). También sobre Indivisibles publica en 1653 *Exercitationes geometricae sex* (seis ejercicios geométricos).

El concepto fundamental de la teoría de Cavalieri es el de «*Omnes lineae*» («*todas las líneas*» o «*colección de líneas*» de una figura dada), que es introducido en la definición II.1 de la *Geometria Indivisibilibus*:



> «*Dada una figura plana, se consideran dos planos perpendiculares al plano de la figura, entre los que ésta esté exactamente contenida. Si uno de los dos planos se mueve paralelamente hacia el otro hasta coincidir con él, entonces las líneas que durante el movimiento forma la intersección entre el plano móvil y la figura dada, consideradas en conjunto, se llaman* "*Omnes lineae*" ["Todas las líneas"»] *de la figura, tomada una de ellas como* "*regula*" ["directriz"].»

Es decir, dada la figura plana F=ABC, la recta BC determina una dirección que tomaremos como «*regula*». «*Todas las líneas*» o *Indivisibles* de la figura ABC, O(F,l) respecto de la *regula* BC, representa el conjunto de cuerdas de la figura ABC, paralelas a BC.

El propósito de Cavalieri introduciendo su método de Indivisibles era proporcionar unos medios de obtener cuadraturas y cubaturas, que superaran la pesadez e insuficiencia del método de exhaución de Arquímedes, es decir, que consiguieran los resultados y las pruebas al mismo tiempo, fundiendo en un solo acto lo heurístico y lo apodíctico. El método de Cavalieri sería nuevo, pero las ideas básicas de lo que debe entenderse por cuadratura o cubatura descansan completamente en la teoría griega clásica de magnitudes, que se describe en el Libro V de *Los Elementos* de Euclides.

Cavalieri no sólo asumió la doctrina griega clásica de magnitudes, sino que se propuso ampliar el conjunto de magnitudes, extendiendo la teoría de magnitudes de Eudoxo, para incluir en ella cada conjunto de «*Todas las líneas*» de una figura dada, creando así una nueva categoría de magnitudes que le permite realizar los cálculos a los que le conducen sus cuadraturas, directamente con sus propias nuevas magnitudes, es decir, con «*Todas las líneas*» de una figura dada. Por eso Cavalieri dedica una buena parte del Libro II de la *Geometria Indivisibilibus* a intentar justificar que efectivamente «*Todas las líneas*» pueden ser tratadas como cualquier otra magnitud geométrica; en particular debe demostrar que la razón entre dos *colecciones de líneas* existe, es decir que las nuevas magnitudes cumplen el *Axioma de Eudoxo-Arquímedes* (definición V.4 de *Los Elementos*). A partir de aquí

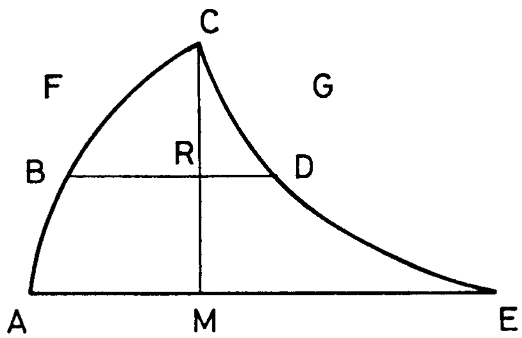
Cavalieri ya puede plantearse establecer la relación entre las cuadraturas y las colecciones de líneas, lo que hace en uno de los teoremas fundamentales de la *Geometria Indivisibilibus,* el II.3:

> «*La razón entre dos figuras es igual a la razón entre sus colecciones de líneas, tomadas respecto de la misma "regula.*»

El Teorema II.3 encierra la idea básica y central de toda la teoría de Cavalieri. Por medio de este resultado, reduce el problema de obtener la razón entre dos áreas a hallar la razón entre sus *colecciones de líneas*. Con gran ingenio Cavalieri calculará estas últimas razones, para lo que utiliza como uno de sus instrumentos más útiles lo que se conoce como el *Principio de Cavalieri*, el Teorema II.4:

> «*Si dos figuras planas tienen la misma altura y si las secciones determinadas por líneas paralelas a las bases y a igual distancia de ellas están siempre en la misma razón, entonces las figuras planas también están en esta misma razón.*»

Cavalieri ilustra su teorema con una figura similar a la siguiente:



Si dos figuras planas ACM y MCE, cumplen que para cada línea BD paralela a la base AE (*regula*), las secciones BR y RD –que llama líneas correspondientes por estar a igual distancia de la base–, verifican la relación:

BR/RD = AM/ME ,

entonces se cumple:

ACM/MCE = AM/ME .

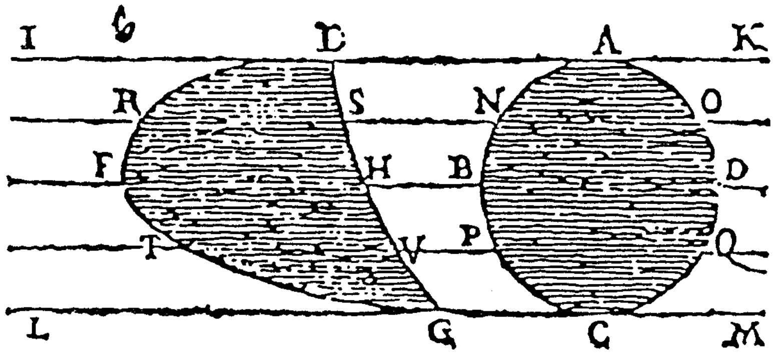
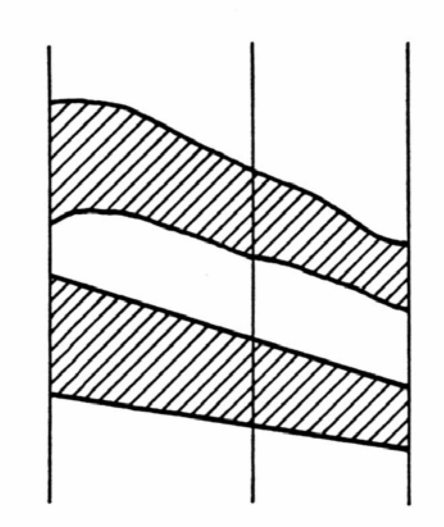


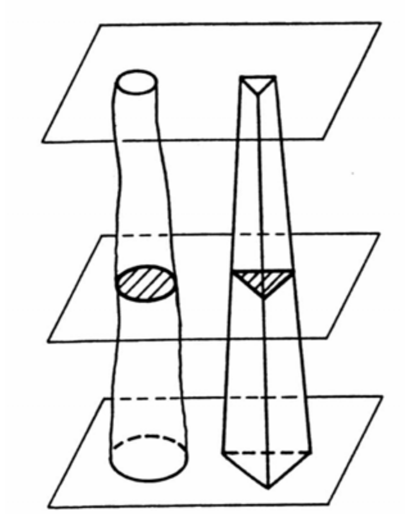
Figura utilizada por Cavalieri para ilustrar su teorema en el Libro I de las *Exercitationes*.

Cavalieri generaliza a dimensión tres los resultados que había obtenido para figuras planas, de modo que se podrá enunciar un teorema análogo al II.4:

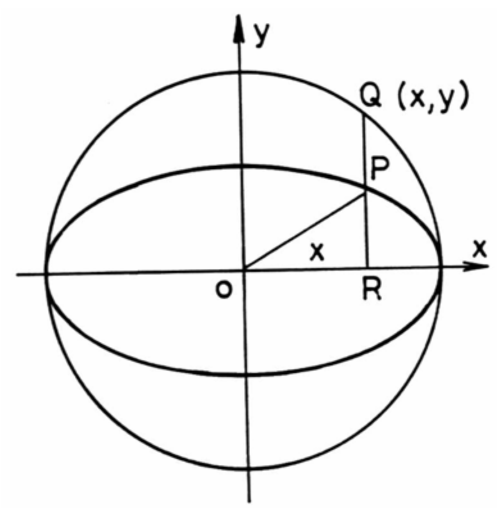
«*Si dos sólidos tienen la misma altura y si las secciones determinadas por planos paralelos a las bases y a igual distancia de ellas están siempre en la misma razón, entonces los volúmenes de los sólidos están en esa misma razón*.»

Las figuras siguientes proporcionan ilustraciones sencillas del *Teorema de Cavalieri* en el caso particular de secciones iguales.





El Teorema de Cavalieri permite calcular por ejemplo el área de la elipse a partir del área del círculo y el volumen de un cono a partir del volumen de una pirámide.



Sea una elipse E de semiejes a y b (a>b). Sea C un círculo concéntrico con la elipse y radio la longitud del eje mayor a de la elipse Tomando como «*regula*» la dirección del eje de ordenadas, comparando los indivisibles de la elipse con los del círculo, obtenemos de las ecuaciones de las curvas:

RP/RQ = b/a ,

de donde resulta según el «*Principio de Cavalieri*»:

a(E)/a(C) = b/a ,

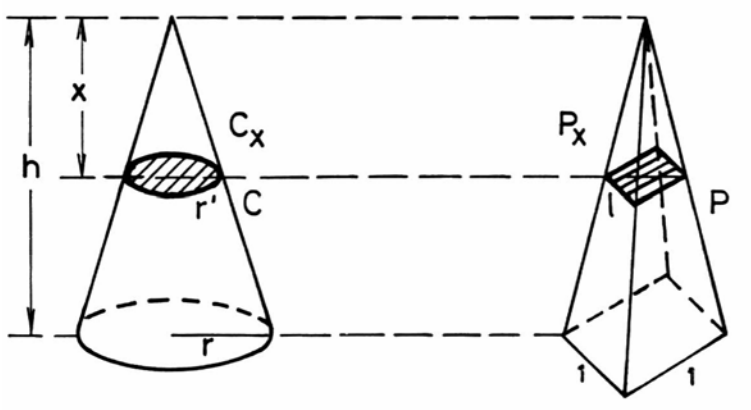
por tanto:

a(E) = (b/a)·a(C) = πab .

Si dos pirámides tienen la misma base y la misma altura, por razones de semejanza las secciones situadas a la misma altura tienen el mismo área; así que, de acuerdo con el «*Principio de Cavalieri*», las dos pirámides tienen el mismo volumen. Los griegos utilizaron este resultado para demostrar que el volumen de la pirámide es un tercio de la base por la altura (*Euclides*, XII.7). Según se vio en el preámbulo del *MÉTODO*, Arquímedes atribuye el descubrimiento a Demócrito y la demostración a Eudoxo.

A partir del volumen de la pirámide se puede obtener fácilmente el volumen del cono, por aplicación del *Principio de Cavalieri* .

En efecto, sea un cono C con radio de la base r y altura h. Comparemos el cono C con una pirámide P con base el cuadrado unidad y altura h. Sean C_x, P_x, las secciones respectivas del cono y pirámide a una distancia x del vértice.



Por semejanza resulta:

$L/1 = x/h = r'/r$,

de donde se obtiene:

$a(C_x) = \pi r^2 x^2/h^2$, $a(P_x) = x^2/h^2$,

es decir:

$a(C_x) = \pi r^2 a(P_x)$,

por tanto del *Principio de Cavalieri* se obtiene:

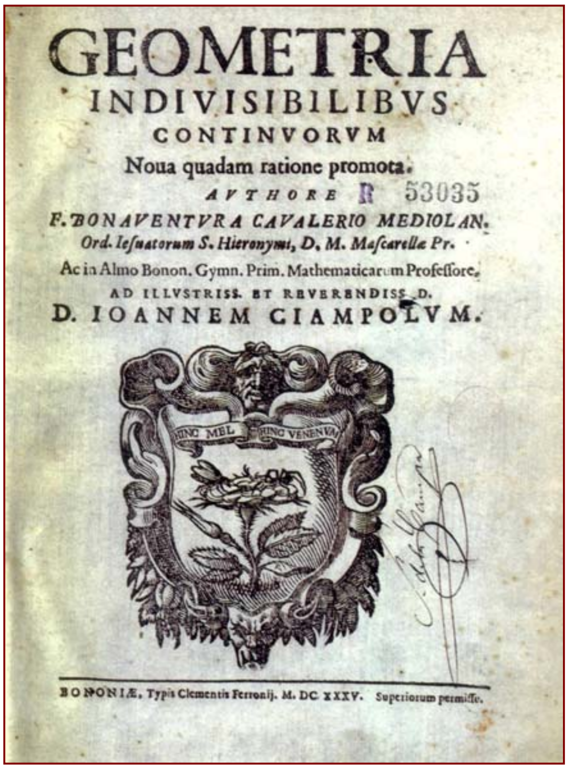
$v(C) = \pi r^2 \cdot v(P) = \pi r^2 h/3$.

Como se ve, sorprende la estrecha analogía entre la aplicación del «*Principio de Cavalieri*» y el método mecánico del *MÉTODO* de Arquímedes. Ambos participan de puntos de vista muy próximos sobre los indivisibles en la composición de las figuras planas o sólidas para la búsqueda de los resultados de su cuadratura o cubatura. La analogía está en las primeras fases, pues desde luego Cavalieri ya no necesita recurrir al recurso de la palanca para sumar sus indivisibles; el Álgebra le facilita esta operación y además le da unas posibilidades de generalización imposibles de lograr en la Geometría arquimediana.

El «*Principio de Cavalieri*» tiene como efecto práctico ocultar el papel que juega en los cálculos de áreas y volúmenes el proceso del paso al límite. Es decir al igual que Arquímedes con la «*composición*» de su método mecánico, Cavalieri con su Principio evita los problemas del infinito, soslayando, como Arquímedes, las dificultades lógicas del paso al límite, que substituye por la intuición geométrica.

Cavalieri al igual que Arquímedes se cuida muy bien de no explicar claramente la naturaleza del elemento infinitesimal que utiliza en su método, el indivisible. En efecto, con su atomismo matemático parece convencerse a sí mismo de que su método es independiente de las doctrinas sobre la naturaleza del continuo. De hecho, considera pragmáticamente que como la noción de infinito no aparece en las conclusiones no necesita aclarar su naturaleza. Y en efecto, igual que en Arquímedes, el infinito en la forma en que es camuflado, no participa explícitamente en el discurso de Cavalieri, porque su argumentación está centrada en la comparación o correspondencia entre los indivisibles de dos configuraciones, como bien queda de manifiesto en lo que todavía hoy llamamos *Principio de Cavalieri*, lo que le lleva a obtener, como a los griegos, razones más que valores concretos de un área o volumen. Pero como los otros matemáticos del siglo XVII, Cavalieri considera su método simplemente como un instrumento geométrico para evitar el método de exhaución, de modo que el rigor no le preocupa demasiado. Cavalieri, como Arquímedes, no estuvo especialmente interesado en las cuestiones metafísicas acerca de la naturaleza del continuo, hasta el punto de aseverar de forma reiterada que el rigor es un asunto de los filósofos más que de los matemáticos.

LOS INDIVISIBLES DE CAVALIERI
Y LA COMPOSICIÓN DE ARQUÍMEDES



GEOMETRIA
INDIVISIBILIBVS
CONTINVORVM
Noua quadam ratione promota.
AVTHORE
F. BONAVENTVRA CAVALERIO MEDIOLAN.
Ord. Iesuatorum S. Hieronymi, D. M. Mascarellæ Pr.
Ac in Almo Bonon. Gymn. Prim. Mathematicarum Professore.
AD ILLVSTRISS. ET REVERENDISS. D.
D. IOANNEM CIAMPOLVM.

BONONIÆ, Typis Clementis Ferronij. M. DC XXXV. Superiorum permissu.

Portada de la primera edición de *Geometría Indivisibilibus Continuorum* de Cavalieri (Bolonia, 1635).

Cavalieri introduce para cada figura el indivisible de una dimensión menor, que excluye lo infinitamente pequeño y permite soslayar las dificultades lógicas del paso al límite, que substituye por la intuición geométrica, mientras se acerca, gracias a la incipiente Álgebra, a las ventajas de los métodos infinitesimales, de simplicidad y mayor generalidad frente a la complejidad y particularidad del método de exhaución de Arquímedes.

Con los Indivisibles, Cavalieri introduce una especie de atomismo geométrico que le aleja del infinito potencial de Aristóteles y le acerca a las bases metodológicas del *Método Mecánico* de Arquímedes. De forma similar a cómo Arquímedes llena sus figuras, Cavalieri considera las áreas formadas por la yuxtaposición de segmentos, que al considerarlos en conjunto, los llama «*Omnes lineae*» y demuestra que a estas *colecciones de líneas* les puede asignar la categoría de magnitudes de acuerdo con la *Teoría de la Proporción* de Eudoxo del Libro V de *Los Elementos* de Euclides. En este sentido Cavalieri se mantiene todavía próximo a los procedimientos sintéticos de la Geometría griega incapaces debido al insuficiente desarrollo algorítmico del Álgebra simbólica de asignar a las figuras números que midieran sus áreas o sus volúmenes, por tanto Cavalieri, como los griegos, todavía tenía que calcular directamente con las figuras, que se trataban como magnitudes.

Cavalieri compara el área de dos figuras –por ejemplo el área de un círculo y una elipse– a base de comparar los correspondientes conjuntos de «*Todas las líneas*» –tal como, por ejemplo, había comparado Arquímedes el área del segmento parabólico con el área de un triángulo–, y lo hace mediante el famoso el *Principio de Cavalieri:* «*La razón entre dos figuras es igual a la razón entre sus colecciones de líneas, tomadas respecto de la misma "regula"*», artificio de sorprendente parecido con el *Método* mecánico de Arquímedes, con el que de forma ingeniosa Cavalieri reduce el problema de obtener la razón entre dos áreas a hallar la razón entre sus *colecciones de líneas*.

Cavalieri extiende sus conceptos al cálculo de volúmenes de sólidos desarrollando una *Teoría de Indivisibles* con el objetivo de evitar la presencia ostensible del infinito que queda ocultado a través de la correspondencia entre los indivisibles de las figuras que compara. Pero un análisis a conciencia de sus métodos nos advierten de la presencia subrepticia del infinito actual, de ahí que adolezcan de rigor.

De hecho la pretensión de Cavalieri con su método de Indivisibles parece ser acercar el descubrimiento y la demostración, hasta fundirlos en un sólo acto matemático que encuentra los resultados y prueba su validez. Por eso en su propósito, Cavalieri se acerca a la heurística del *Método Mecánico* de Arquímedes pero se aleja de la apodíctica de su *Método de exhaución*, único argumento, hasta ese momento histórico, que permite convalidar demostrativamente –con todo rigor– los resultados geométricos descubiertos por las diversas vías y procedimientos.

La influencia de Cavalieri ha sido decisiva en la elaboración de los diversos conceptos y técnicas del Cálculo del siglo XVII, durante el cual es el autor más citado después de Arquímedes. Cavalieri consiguió la cuadratura de parábolas generales $y=x^n$ que constituye el primer teorema general del Cálculo Infinitesimal y la piedra de toque para la eclosión de multitud de métodos infinitesimales. La cuadratura básica de Cavalieri $\int x^n dx$, resumía muchos resultados clásicos y resolvía otros muchos desconocidos; por ello se considera que es el primer eslabón importante, después de Arquímedes, en la cadena que condujo desde el método mecánico del *MÉTODO*, al algoritmo infinitesimal que descubrieron Newton y Leibniz.

A pesar del insuficiente rigor de la vaguedad geométrica del fluir de los indivisibles, estos entes infinitesimales no sólo llegarían a influir en la concepción de Newton sobre momentos y fluxiones y en la noción de diferencial de Leibniz, sino que han sobrevivido a la creación del Cálculo por ambos.

El *método de exhaución* en Arquímedes y los límites

El método de exhaución aplicado por Arquímedes para demostrar con todo rigor el resultado de sus cuadraturas se llama a veces, «*método indirecto del proceso infinito*» e incluso «*método indirecto del paso al límite*».

Como vimos en el estudio del problema de la cuadratura de la espiral, Arquímedes obtiene geométricamente, de forma previa, resultados equivalentes a la suma de los cuadrados de enteros:

$$1^2+2^2+ \cdots +n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (1) .$$

Mediante esta fórmula, Arquímedes logra un resultado equivalente a nuestra integral:

$$\int_0^a x^2\,dx = \frac{x^3}{3} \ ,$$

la cual hoy se puede establecer mediante el límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+ \cdots +n^2}{n^3} = \frac{1}{3} \ ,$$

que se deduce de la fórmula (1).

Arquímedes deduce, a partir de (1), de forma geométrica, la desigualdad:

$$1^2+2^2+ \cdots +(n-1)^2 < \frac{n^3}{3} < 1^2+2^2+ \cdots +n^2 \quad (2) ,$$

de donde considerando las regiones P y Q formadas respectivamente por sectores circulares inscritos y circunscritos al círculo C asociado a la región E determinada por la primera vuelta de espiral obtiene:

$$\frac{a(P)}{a(C)} = \frac{1^2+2^2+ \cdots +(n-1)^2}{n^3} < \frac{1}{3} < \frac{1^2+2^2+ \cdots +n^2}{n^3} = \frac{a(Q)}{a(C)} \ .$$

Al llegar a este punto es una auténtica tentación el tomar límite a ambos extremos de las desigualdades. De esta forma obtendríamos directamente el resultado demostrado por Arquímedes:

a(E)=(1/3)a(C).

Pero Arquímedes no establece el resultado de esta forma; en lugar de tomar el límite, cuestión fuera de lugar para él, carente del desarrollo aritmético necesario para realizar esta operación, aplica los resultados geométricos equivalentes a las desigualdades para, habida cuenta de que la diferencia a(Q)–a(P) se puede hacer «*tan pequeña como se quiera*», deducir, mediante una doble reducción al absurdo, que a(E) no puede ser ni mayor ni menor que (1/3)a(C), es decir obtener el resultado de la cuadratura de la espiral aplicando el método de exhaución por compresión. Ciertamente que la similitud entre el cálculo del límite y la exhaución es manifiesta, pero Arquímedes no aplica exactamente la argumentación inherente al concepto de límite.

La cuadratura de Arquímedes de la espiral fue el modelo en que se basaron muchos matemáticos del siglo XVII –en particular Fermat y Pascal– para obtener sus cuadraturas aritméticas. A base de generalizar las desigualdades (2) para cualquier entero n, se conseguía cuadrar las espirales generalizadas $r=\theta^k$, de donde tras un simple cambio, aparecían las ideas para cuadrar las parábolas generalizadas $y=x^k$, k=1, 2, ..., es decir obtener resultados equivalentes a la cuadratura general:

$$\int_0^a x^k\,dx = \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

Los resultados sobre cuadraturas de Fermat y Pascal descansan en fórmulas recurrentes para la suma de potencias de enteros. Mediante su aplicación se conseguía obtener la desigualdad:

$$1^k+2^k+\cdots+(n-1)^k < \frac{n^{k+1}}{k+1} < 1^k+2^k+\cdots+n^k$$

de la que mediante consideraciones implícitamente vinculadas al límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$$

se obtenían el resultado de la cuadratura general.

No obstante estas pruebas sobre cuadraturas adolecían de falta de rigor, porque para soslayar la rigidez del método de exhaución, de forma intuitiva, se aplicaban subrepticiamente ideas de aproximación mediante límites, sustituyendo al argumento intuitivo de los indivisibles. Estos matemáticos saben que la doble reducción al absurdo es lo único que puede concluir con rigor el argumento, pero ninguno sigue fielmente todos los pasos que en rigor hay que dar, como hacía Arquímedes, sino que se quedan en el umbral de la exhaución, comentando que es de dominio público el camino a seguir.

El modelo Arquimediano de la cuadratura de la espiral es utilizado por Fermat y Pascal para realizar sus cuadraturas aritméticas, obteniendo un resultado equivalente a la cuadratura básica $\int_0^a x^k dx = \frac{a^{k+1}}{k+1}$, a base de extender las desigualdades que Arquímedes utilizó para aplicar el método de exhaución por *compresión*. La base para estos desarrollos son las fórmulas recurrentes para la suma de potencias de enteros, fundamentadas, en el caso de Fermat, en las propiedades de los números poligonales, que obtiene inspirándose en los apéndices de *La Aritmética* de Diofanto, y en el caso de Pascal en las propiedades del *Triángulo aritmético de Tartaglia*.

LA EXHAUCIÓN ARQUIMEDIANA Y LOS LÍMITES

1. Fragmento de la obra de Arquímedes *Sobre las Espirales* con los segmentos circulares inscritos y circunscritos a la curva espiral para aplicar el método de exhaución. *Arquímedes Opera Omnia*, Basilea, 1544.
2. Arquímedes geómetra con vestimenta oriental. Colección Municipal de la imprenta Bertarelli de Milán.

En manos de Arquímedes el método de exhaución, combinado con su heurístico método mecánico de descubrimiento se convierte en un poderoso instrumento rigurosamente lógico que le permite alumbrar intuitivamente y convalidar apodícticamente numerosos resultados sobre cuadraturas y cubaturas, que hoy obtenemos con nuestros perfeccionados y rigurosos algoritmos infinitesimales, y con los que Arquímedes, trasciende *Los Elementos* de Euclides y amplía de forma considerable el patrimonio matemático de su época.

Para demostrar un resultado geométrico mediante el método de exhaución, Arquímedes considera una magnitud como «*el límite*» –en sentido geométrico– al cual se aproximan cada vez más una serie de figuras inscritas y circunscritas en ella, y construidas *ad hoc*, aumentando de forma continua el número de ellas –el número de lados si se trata de polígonos inscritos y circunscritos–, de manera que la diferencia «*se agote*», es decir, se haga más pequeña que cualquier magnitud dada *a priori*, de modo que mediante una rigurosa doble reducción al absurdo se demuestra la igualdad de una magnitud geométrica desconocida con una conocida.

Con su argumentación basada en la estructura geométrica particular de cada problema, Arquímedes se sitúa en el umbral de la moderna *Teoría de límites*, pero carente de aparato aritmético, el método de exhaución evita el paso al límite y excluye toda consideración infinitesimal directa.

Sobre el nombre de *Método de Exhaución* conviene observar que es bastante inapropiado porque nunca se llega a agotar, con los entes geométricos que van aproximando, la figura cuya magnitud se quiere estudiar. Es más, la exhaución paradójicamente pretende resolver rigurosamente el problema de la inexhaustividad del infinito. De hecho el nombre del método no lo utilizaron los griegos, sino que es una desafortunada acuñación introducida en el siglo XVII por G. de Saint Vincent, pero su uso se ha hecho habitual en la literatura matemática, aunque alguno de los más importantes estudiosos de Arquímedes, como E.J.Dijksterhuis se resisten a llamarlo así y prefieren denominarle «*el método indirecto del proceso infinito*». Así pues, aunque el término exhaución sugiere una aproximación indefinida hasta alcanzar el resultado de forma equivalente a la aplicación de un límite, no es realmente así, sino que, como vimos en la cuadratura de la espiral, Arquímedes aplica un proceso indirecto de prueba que evita el empleo de límites. Es más esa es la principal virtualidad del método de exhaución con el que Euclides y Arquímedes obtuvieron con todo rigor los mismos resultados que cuando se efectúan investigaciones propiamente infinitesimales mediante el uso aritmético de los límites.

Hasta que tenga lugar el proceso de la aritmetización del Análisis a lo largo del siglo XIX no se pueden realizar con rigor las operaciones de «*paso al límite*». Los límites y la exhaución están naturalmente interrelacionados y en consecuencia dan idénticos resultados, pero los puntos de vista de la cuestión infinitesimal son diferentes en uno y otro. Por tanto en un sentido estrictamente correcto no se debiera afirmar categóricamente que los procedimientos geométricos de Arquímedes constituyen un paso al límite, porque entre la exhaución arquimediana y los límites hay una gran analogía pero no una identificación.

Una imagen de las diferencias entre la exhaución y los límites lo daría la consideración de las curvas como polígonos de infinitos lados. Contrariamente a lo que se interpreta a veces, nunca los griegos pudieron hacer tal consideración, que atentaría en su Geometría contra todo rigor, nacido del fantasma del infinito convertido en tabú. Para la Matemática moderna la imagen descrita no repugna a la razón si aplicamos el concepto aritmético de límite que simplifica de forma muy considerable las antiguas demostraciones. De esta forma se pasa del método de exhaución al método infinitesimal.

Epílogo: los métodos de Arquímedes y el calculo integral

Mediante su brillante método mecánico, Arquímedes realiza una investigación preliminar que ratifica con absoluto rigor mediante el método de exhaución. Con ello anticipa infinidad de resultados sobre cuadraturas, cubaturas y centros de gravedad, que forman parte de la doctrina de nuestro Cálculo Integral, y que actualmente obtenemos mediante los recursos analíticos del cálculo algebraico y de la aplicación de los límites, que descubren y demuestran simultáneamente. Pero las rigurosas demostraciones de Arquímedes deben implicar bajo una forma estrictamente geométrica –la del Algebra Geométrica de los Libros II y VI de *Los Elementos* de Euclides– todos esos medios infinitesimales modernos. Todo ello ubica a Arquímedes en antesala histórica del Cálculo Integral. Por eso como afirma E.Rufini (*Il Metodo d'Archimede e le origine dell'analisi infinitesimale nell'antichità,* p.187):

> «*Arquímedes anticipa nuestro Cálculo Integral, tanto en el tiempo como en la seguridad de los procedimientos y en la genialidad de los artificios no superados por los precursores del siglo XVII.*»

A veces se dice de forma entusiasta que Arquímedes es el artífice del Cálculo Integral, queriendo indicar que por primera vez en la historia, Arquímedes realiza una verdadera integración. La integral definida se concibe en el Análisis Infinitesimal como límite de una sucesión infinita y no como una suma infinita de puntos, líneas o superficies. En un sentido amplio los procedimientos de Arquímedes son en la práctica integraciones, pero, en puridad, no podemos asegurar que Arquímedes realiza una auténtica integración –en el sentido genuino de calcular el límite de una suma cuando el número de sumandos crece indefinidamente mientras se hacen infinitamente pequeños–, porque Arquímedes soslaya el paso al límite con la doble reducción al absurdo del método de exhaución.

Las afirmaciones categóricas como la de J.L.Heiberg que manifestaba que «*el método de Arquímedes se identifica con el Calculo Integral*» deben ser ecuánimemente aquilatadas. Sería quizá más exacto y ajustado manifestar que «*el método de Arquímedes constituye un método de integración*».

Por otra parte, la propia naturaleza del método de exhaución obliga a Arquímedes a tratar cada problema de forma particular, atendiendo a la estructura geométrica intrínseca de la figura, es decir, no puede haber una formulación de procedimientos generales para resolver problemas análogos, no hay ni un esbozo de clasificación de los problemas, sino que, como consecuencia de no manejar Algebra simbólica sino geométrica, el tratamiento de cada problema depende de la estructura geométrica particular del mismo.

A lo largo del desarrollo del Cálculo Infinitesimal en el siglo XVII se contempla cómo se van abriendo paso lentamente las cuestiones de la clasificación de los problemas (advirtiendo los lazos de parentesco entre los diversos problemas tratados, relaciones que nosotros expresaríamos diciendo que la misma integral aparece en muchos lugares bajo aspectos geométricos diferentes), así como de la aplicación subrepticia de límites, mediante la introducción de la incipiente *Teoría de Números*, mientras que la fundamentación de la noción de límite permitirá realizar, tras su aritmetización, la reconstrucción, a lo largo del siglo XIX, del Análisis con todo rigor.

Con su capacidad inventiva y su ductilidad investigadora, Arquímedes aventuraba los resultados que después demostraba rigurosamente, desarrollando su actividad creativa en tres fases: una fase inicial basada en la pura intuición de la simplicidad de las leyes geométricas, una fase intermedia de comprobación mediante el método mecánico de las hipótesis intuitivas y una fase final, en la que el método de exhaución confirmaba la validez de lo augurado en la fase inventiva. Así podemos sintetizar el proceso creador de la actividad científica de Arquímedes, después de tener a nuestra disposición EL MÉTODO. Por eso el valor de esta obra es incalculable, ya no sólo desde el punto de vista científico o como documento histórico, sino sobre todo porque pone de manifiesto el proceso heurístico de los magníficos descubrimientos de Arquímedes, lo cual le da un carácter radicalmente singular en todo el ámbito de la Geometría griega.

ARQUÍMEDES ANTECEDENTE DEL CÁLCULO INTEGRAL

Arquímedes representado como geómetra. Colección municipal de Milán.

Edición de Maurólico de 1685 de las obras de Arquímedes. Biblioteca de la Universidad de Pavía.

Arquímedes compartía con Euclides la potencia demostrativa, pero en la genialidad de la invención superó con creces a todos sus coetáneos y antecesores, magnificando de forma muy considerable el patrimonio matemático griego. Arquímedes crea en dos estadios de actividad científica, con dos métodos diferentes que se complementan, el primero intuitivo donde se descubre y se inventa, el segundo apodíctico donde se convalida lo intuido demostrándolo de forma rigurosamente deductiva según el modelo euclidiano. Arquímedes desarrolla, pues, una doble actividad como matemático, la inventiva y la demostrativa, pero en sus grandes tratados clásicos sólo da cuenta de la segunda, produciendo una gran admiración sus magníficos resultados matemáticos, pero también una gran perplejidad, ante la ocultación del camino seguido en la investigación. Sólo en una obra, *El Método relativo a los teoremas mecánicos*, Arquímedes comunica, de forma heurística, las vías y los procedimientos mecánicos que utilizaba en sus descubrimientos. Desgraciadamente la obra de Arquímedes desapareció, siendo recuperada por J.L.Heiberg en 1906, de modo que aunque se intuía que Arquímedes utilizaba un método singularmente original en su investigación, permaneció oculto durante siglos.

R.Taton escribe sobre Arquímedes en su *Historia general de las Ciencias* (Orbis. Barcelona, 1988. Vol.2. Libro II, Cap.II.2. p.355–357):

> «*Arquímedes fue célebre por sus trabajos matemáticos, por sus invenciones mecánicas y por la sabia defensa de su patria.*
>
> **[...]** *La carta a Eratóstenes sobre el Método, no hallada hasta 1906, es la clave de los principales descubrimientos de Arquímedes. Gracias a ella y al orden de las memorias, establecido utilizando los prefacios, podemos conocer de forma aproximada el proceso de pensamiento del sabio.* **[...]** *Arquímedes no aplica, en general, las Matemáticas a la técnica, sino que, muy al contrario, la técnica es la inspiradora de sus trabajos teóricos.* **[...]** *Dos hechos hay que observar en esta inducción* **[de la Física y la Técnica sobre la Matemática]** *que Arquímedes utiliza* **[en EL MÉTODO]** *para una gran cantidad de cuadraturas y cubaturas. El primero es el empleo de la estática para conseguir descubrimientos geométricos; Arquímedes no tiene ningún prejuicio de purista, y aprovecha toda analogía fecunda entre dos dominios científicos distintos. El segundo hecho es la asimilación de un área a una suma de segmentos rectilíneos; la de un volumen, a una suma de secciones planas, y la de un continuo en general, a la suma de una infinidad de indivisibles. Cuando Cavalieri vuelve a tomar, en el siglo XVII, este mismo camino, el método no resultará menos fecundo. Pero el sutil italiano será siempre, hasta cierto punto, prisionero de su propia conquista, y no logrará completar su análisis intuitivo con una síntesis rigurosa. Su predecesor griego había dado airosamente ese paso difícil, echo en el cual se encierra una prueba de la magnitud de su genio.*»

En suma, la influencia de Arquímedes ha sido decisiva en la génesis del Cálculo Infinitesimal. Los impresionantes problemas de cuadraturas y cubaturas, resueltos mediante el método mecánico son el antecedente directo –aunque oculto– de los indivisibles e infinitesimales del siglo XVII que anticipan el Calculo Integral, mientras que el método demostrativo de exhaución es el antecedente directo de los límites de la aritmetización del Análisis del siglo XIX.

Como conclusión de este estudio histórico sobre una de las figuras más universales de la Ciencia y en particular sobre una de las obras más singulares de Arquímedes y de la Geometría griega en general, *EL MÉTODO*, podemos decir que Arquímedes comenzó los cimientos del sólido edificio que hoy constituye el Cálculo Integral. Y lo hizo con una sabia conjunción de la técnica del descubrimiento y la demostración, moviéndose con la más amplia libertad en aquél y exigiéndose el más absoluto rigor lógico para ésta.

Partiendo de bases euclídeas, pero trascendiendo la tradición geométrica, teniendo en su haber todo el bagaje matemático clásico, Arquímedes amplió considerablemente los horizontes metodológicos de la ciencia de su tiempo y con su capacidad para conjugar consideraciones teóricas e invenciones prácticas creó un estilo, que si no tuvo eco en sus días por la especial estructura social del mundo helenístico y grecorromano, emergió en el Renacimiento para constituir la esencia de la ciencia moderna.

Después del descubrimiento y divulgación del *METODO*, sabemos, como hemos ido viendo anteriormente, que quienes en el siglo XVII buscaban con ansiedad nuevos métodos más heurísticos de rápido descubrimiento, nuevos caminos en la Matemática, se hallaban, muchos de ellos sin saberlo, más cerca de Arquímedes de lo que nunca hubieran imaginado. En toda la parafernalia de técnicas y métodos infinitesimales, con indivisibles o infinitamente pequeños, se recorren nuevamente los caminos abiertos por Arquímedes y no sólo en cuanto a los elementos infinitesimales utilizados, sino que también se redescubre el procedimiento inventivo. También, cuando tras el proceso de aritmetización del Análisis se fundamenta el Cálculo Infinitesimal a través del concepto de límite, los matemáticos encuentran modelos de rigor impecable en los procedimientos arquimedianos de los métodos de exhaución. He aquí una doble analogía histórica –entre los desarrollos del método mecánico y los resultados obtenidos mediante indivisibles, así como entre el riguroso método de exhaución y la fundamentación rigurosa del Análisis mediante los límites– que nos da una idea de la trascendental ascendencia de Arquímedes en la génesis de las raíces del Calculo Integral.

A este respecto escribe J.Babini (*EL MÉTODO de Arquímedes*, p.27):

> «*Aunque los matemáticos del Renacimiento no conocieron EL MÉTODO, conocieron la Geometría griega, el método de exhaución y el carácter riguroso que este método confería a las demostraciones. Pero otros eran los recursos y los problemas matemáticos, y otra era la atmósfera que los envolvía. El Álgebra permitía una generalización imposible de lograr con la Geometría griega, mientras que en los problemas mecánicos, que se presentan en primer plano y exigen recursos infinitesimales, el método de exhaución es inaplicable*. *¿Por qué entonces la Matemática demoró un par de siglos en dar con un recurso analítico que sustituyera con igual rigor el método de exhaución*? *¿Por qué los matemáticos de los siglos* XVII *y* XVIII *no sintieron aquella exigencia de rigor de los geómetras griegos y de los analistas del siglo* XIX? *Quizá la respuesta resida en la diferente concepción del saber en la Antigüedad y en la Edad Moderna; esa diferencia entre el griego, contemplativo y teórico, más interesado en el proceso que en el producto, más en la demostración que en el resultado; y el hombre moderno, activo y práctico, que ve en el resultado correcto la garantía de la validez de la demostración.*»

Pero más allá del aspecto apodíctico de las densas memorias de Arquímedes, el ancestro de los grandes creadores del Cálculo Integral hay que buscarlo en la magnífica obra de Arquímedes *EL MÉTODO*, un documento histórico de un valor científico inconmensurable, cuyo descubrimiento constituye uno de los sucesos mas importantes que han tenido lugar para el estudio y conocimiento de la Geometría griega. Tras su lectura, nos podemos explicar el profundo misterio que rodeaba la actividad investigadora de Arquímedes, plasmada en todas sus tratados científicos conocidos y desmentir a Descartes cuando manifiesta –en la Regla IV de *Las Reglas para la dirección del espíritu*– la insatisfacción de la curiosidad frustrada por la ocultación *–con audacia perniciosa*– de los métodos de descubrimiento de la Geometría griega. Como se dijo en la Introducción, aunque *EL MÉTODO* no fue conocido hasta 1906, ha estado presente de forma subrepticia en la Historia de la Matemática como una *variable oculta* de la función generadora de los resultados del Calculo Integral.

Bibliografía

Obres originales sobre Arquímedes y el MÉTODO

1. ARCHIMÈDE: *Les Oeuvres complètes d'Archimède*. Introducción y notas de P.Ver Eecke, Vaillant-Carmanne. Liège, 1960.
2. ARCHIMEDES: *Arquimedis Opera Omnia*. Edición de J. L. Heiberg. Leipzig, 1910-1913.
3. ARQUIMEDES: *El Método*. Introducción y notas de J. Babini. Eudeba, Buenos Aires, 1966.
4. ARQUIMEDES: *El Método*. Introducción y notas de L. Vega. Alianza Editorial, Madrid, 1986.
5. ARQUIMEDES (en *Científicos Griegos*. Antología. Recopilación, estudio preliminar, preámbulo y notas de F. Vera). Aguilar, 1970.
6. GONZÁLEZ URBANEJA, P.M; VAQUÉ, J.: *El método relativo a los teoremas mecánicos de Arquímedes*. Pub. Univ. Autónoma de Barcelona, Ed. Univ. Politècnica de Catalunya. Colección *Clásicos de las Ciencias.* Barcelona, 1993. Edición crítica en Español de esta obra de Arquímedes.
7. GONZÁLEZ URBANEJA, P.M; y VAQUÉ, J.: *Mètode d'Arquimedes sobre els teoremes mecànics dedicat a Eratòstenes*. Fundació Bernat Metge. Barcelona, 1997. Edició crítica en català d'aquesta obra d'Arquimedes.
8. HEATH,T.: *The Method of Archimedes recently discovered by Heiberg (A supplement to the works of Archimedes,* 1897). Cambridge University Press, 1912.
9. HEIBERG,J.: *Eine neue Archimedeshandschrift*, *Hermes*, vol. XLII, pàgs. 234-303, Berlín, 1907.
10. HEIBERG, J. L.; ZEUTHEN, H. G.: *Eine neue Schrift des Archimedes*, Bibliotheca Mathematica de Teubner, pàgs. 321-363, Vol. VII_3, Leipzig, juny, 19O7.
11. REINACH,T.: *Un traité de Géométrie inédit d'Archimède. Restitution d'après un manuscrit récemment découvert*. Revue général des Sciences pures et appliquées, n^{os} de 30/11/1907, 15/12/1907, XVIII, París, 1907.
12. RUFINI,E.: *Il Metodo d'Archimede e le origine dell'analisi infinitesimale nell'antichità,* Casa Editrice Alberto Stock, Roma, 1926. Nueva edición de Feltrinelli, Milán, 1961.

Obras monográficas sobre Arquímedes

13. BABINI,J.: *Arquímedes*. Espasa-Calpe, Buenos Aires, 1948.
14. CLAGETT,M.: *Archimedes* (en *Dictionary of Scientific Biography*), Charles Scribners sons, New York, 1970. Vol. I, pp. 213-231.
15. DIJKSTERHUIS,E.: *Archimedes*, Princeton University Press, 1987.
16. HEATH, T. L.: *The Works of Archimedes*. Dover, New York, 2002.
17. TORIJA,R.: *Arquímedes. Alrededor del círculo*. Nivola, Madrid, 1999.
18. VARIOS AUTORES: *ARQUÍMEDES*, Editorial Debate/Itaca, Madrid, 1954.

Obras generales sobre Historia del Cálculo Infinitesimal

19. BARON, M. E.: *The Origins of the Infinitesimal Calculus,* London, Pergamon, 1969. Caps 1,2.
20. BOYER, C. B.: *The History of the Calculus and its conceptual development*, Dover, New York, 1949. Caps. II, IV.
21. CASTELNUOVO,G.: *Le Origini del Calcolo Infinitesimale nell'èra moderna*. Zanichelli. Bologna, 1938. Cap. I.
22. EDWARDS, C. H.: *The Historical Development of the Calculus,* Springer-Verlag, New York, 1979. Caps. 1, 2, 4.
23. GONZALEZ URBANEJA, P. M.: *Las raíces del Cálculo Infinitesimal en el siglo XVII,* Alianza Universidad, Madrid, 1992. Caps. 1, 2.
24. GONZÁLEZ URBANEJA,P.M.: *La aparición de los inconmensurables*. Mundo Científico, 220, pp.56-63. Barcelona, 2000.
25. GONZÁLEZ URBANEJA,P.M.: *De la cuadratura de la espiral a la cuadratura de parábolas. La integración de* x^k (en *Resolución de problemas en los albores del siglo XXI*, pp.39-79). Editora Andaluza, Huelva, 2000.
26. GRATTAN-GUINNESS,I.: *Del Cálculo a la Teoría de Conjuntos*, Alianza Universidad, Madrid, 1984. Cap. 1.
27. NATANSON, I. P.: *Suma de cantidades infinitamente pequeñas,* MIR, Moscú, 1973.
28. TOEPLITZ, O.: *The Calculus, a Genetic Approach*, Univ. Chicago Press, 1963. Caps. 1, 2.

Obras generales sobre Historia y Filosofía de la Ciencia y de las Matemáticas

29. BELL,E.T.: *Les grands mathématiciens*. Payot. París, 1950. CapII.
30. BERNAL, J. D.: *Historia Social de la Ciencia.* Península, Barcelona, 1979. Vol.1, Cap.4.7.
31. BOYER, C. B.: *Historia de las Matemáticas*. Alianza Universidad, Madrid, 1986. Cap. 7.
32. BRUNSCHVICG, L.: *Les étapes de la Philosophie Mathématique,* Blanchard, París, 1972. Libro III, cap.9.
33. COLERUS, E.: *Breve historia de las Matemáticas*, Doncel, Madrid, 1972. Vol. 1, Cap. 3.
34. DEDRON,P.: *Mathématiques et Mathématiciens*. Magnard, París, 1959. Cap.IV.2.
35. DIVERSOS AUTORS: *Dictionary of Scientific Biography,* Scribners sons, New York, 1970.
36. DUNHAM,W.: *Viaje a través de los genios*. Pirámide. Madrid, 1992. Cap.4.
37. EUCLID: *Elements*. Edición de T.Heath, Dover, New York, 1956.
38. EUCLIDES: *Elementos*. Edición de F. Enriques, C.S.I.C., Madrid, 1954.
39. EUCLIDES: *Elementos*. Traducción y notas de M.L.Puertas. Gredos, Madrid, 1996.
40. EVES,H.: *An Introduction to the History of Mathematics,* CBS Coll. Publ. N. York, 1983. Cap. 11.
41. EVES, H.: *Great Moments in Mathematics*. The Mat. Assoc. of America, 1977. Vol. 1, Caps. 9,22.
42. GARCIA BACCA, D.: *Textos clásicos para la historia de las ciencias*, Univ. Central, Caracas, 1961.
43. GARCÍA FONT,J.: *Historia de la Ciencia.* Barcelona, 1980. Cap. 7.
44. GONZÁLEZ URBANEJA,P.M.: *Matemáticas y matemáticos en el mundo griego* (en *El legado de las Matemáticas: de Euclides a Newton*). Universidad de Sevilla, 2000, Cap.1.
45. HEATH, T. L.: *A History of Greek Mathematics*. Vol.2, Cap.XIII.
46. KLINE,M.: *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*. Alianza Universidad, Madrid, 1992. Cap.5.3.
47. KOYRÉ, A.: *Estudios de Historia del Pensamiento Científico,* Siglo XXI, Madrid, 1971.
48. LORIA, G.: *Histoire des Sciences Mathématiques dans l'antiquité hellénique,* Gauthiers-Villars, París, 1929. Cap. III.
49. MONTESINOS,J. (Coordinador): *Historia de la Geometría griega*. Actas del Seminario *Orotava* de Historia de la Ciencia. Tenerife, 1992. Cap. 22.
50. MONTESINOS,J.: *Historia de las Matemáticas en la Enseñanza Secundaria*. Síntesis. Madrid.2000. Caps. 3,4.
51. MONTUCLA,J.: *Histoire des Mathématiques*. Blanchard. París, 1968. Tomo I, Libro IV, Cap.V
52. NICOLAU,F.: *La Matemàtica i els matemàtics.* Claret, Barcelona, 2000. Cap.10.
53. PLUTARCO: *Vidas paralelas* , "*Vida de Marcelo*", XIV–XIX, pp.339–343 (en de *Biógrafos griegos*). Aguilar, Madrid, 1970
54. REY, A.: *El apogeo de la ciencia técnica griega,* UTEHA, México, 1962. Libro V.
55. REY PASTOR,J.: BABINI, J: , 1951.: *Historia de la Matemática,* Espasa-Calpe, Buenos Aires, 1951. Cap. III.17.
56. REY PASTOR,J. ; BABINI,J: *Historia de la Matemática*. Gedisa, Barcelona, 1984, Vol.1, Cap.IV.3.
57. TATON,R.: (compilador): *Historia general de las Ciencias*. Orbis. Barcelona, 1988. Vol.2. Libro II, Cap.II.2.
58. VARIOS AUTORES: *Historia del Pensamiento*. Ediciones Orbis. Barcelona, 1983. Vol.1.
59. VERA,F.: *Breve Historia de la Geometría*. Losada. Buenos Aires. 1963. Cap. IV.

Artículos de revistes científicas

60. ANDERSEN, K.: *Cavalieri's Method of Indivisibles*. Archive for History of Exact Sciences, 291-367, febrero, 1984.
61. BRUSOTTI, L.: *I metodi di esaustione nella storia della matematica*, Periodico di Matematiche, Serie IV, Vol. XXX, nº 5, 1952.
62. CASSINA, U.: *Storia dal concetto di limite*. Periodico di Matematiche, Serie IV, Vol. XVI, 1-19, 82-1O3, 144-167, 1936.
63. DIVERSOS AUTORS: *Sur le nombre* π, Revue "*Le petit Archimède*", nº. 64-65, París, 5/1980.
64. GOULD, S. H.: *The Method of Archimedes*. American Mathematical Monthly, LXII, 473-476, 1955.
65. HEATH, T. L.: *Greek Geometry with Special Reference to Infinitemals*, The Mathematical Gazette, XI, 248-59, 1922-23.
66. HILL, J. M.: *The Theory of Proportion*, The Mathematical Gazette, VI, 324-32, 36O-368, 1912.
67. KNORR, W. R.: *Archimedes and the pre-euclidean proportion theory*, Archives Internat. Hist. Sciences, 28, 183-244, 1978.
68. KNORR, W. R.: *Archimedes and the Elements, Proposal for a Revised Chronological Ordering of the Archimedean Corpus*. Archive for History of Exact Sciences, 19, 211-29O, 1978.
69. RAEDER, HANS: *Johan Ludving Heiberg*, Isis, Vol. 11, 367-74, 1928.
70. WHITESIDE,D.: *Patterns of mathematical thought in the later 17th century*. Archive for History of Exact Sciences, 1, 1960-62, 179-388, 1983.