La Historia de la Matemática como recurso didáctico e instrumento de integración cultural de la Matemática

HISTORIA DE LA MATEMÁTICA ELEMENTAL PARA LA ENSEÑANZA SECUNDARIA

ESTUDIO HISTÓRICO INTERDISCIPLINAR DE CUATRO TEMAS CLAVE DE LA MATEMÁTICA ELEMENTAL:

EL TEOREMA LLAMADO DE PITÁGORAS
LA DIVINA PROPORCIÓN Y EL PENTAGRAMA PITAGÓRICO
EL DESCUBRIMIENTO DE LOS INCONMENSURABLES
LOS SÓLIDOS PITAGÓRICO-PLATÓNICOS

Pedro Miguel González Urbaneja
pgonzale@pie.xtec.es

SONETO A PITÁGORAS

Tu Teorema me enseñó a amar la Geometría
y desde ésta aprendí a adorar la Matemática
quise hacer la existencia menos enigmática
con Platón pensando entrar en la Filosofía.

Pitágoras, ayúdame a alcanzar la armonía
a que la vida sea menos problemática
siendo el estudio y el amor nuestra pragmática
concediéndonos parte de tu sabiduría.

Apliquemos en todo tu divina proporción
no sintamos temor hacia lo inconmensurable
al transmitir estos valores en la educación.

Tu doctrina nos enseña lo que es demostrable
Tus números y poliedros engendran percepción
Por eso tu magisterio ha sido perdurable.

Pedro Miguel González Urbaneja.

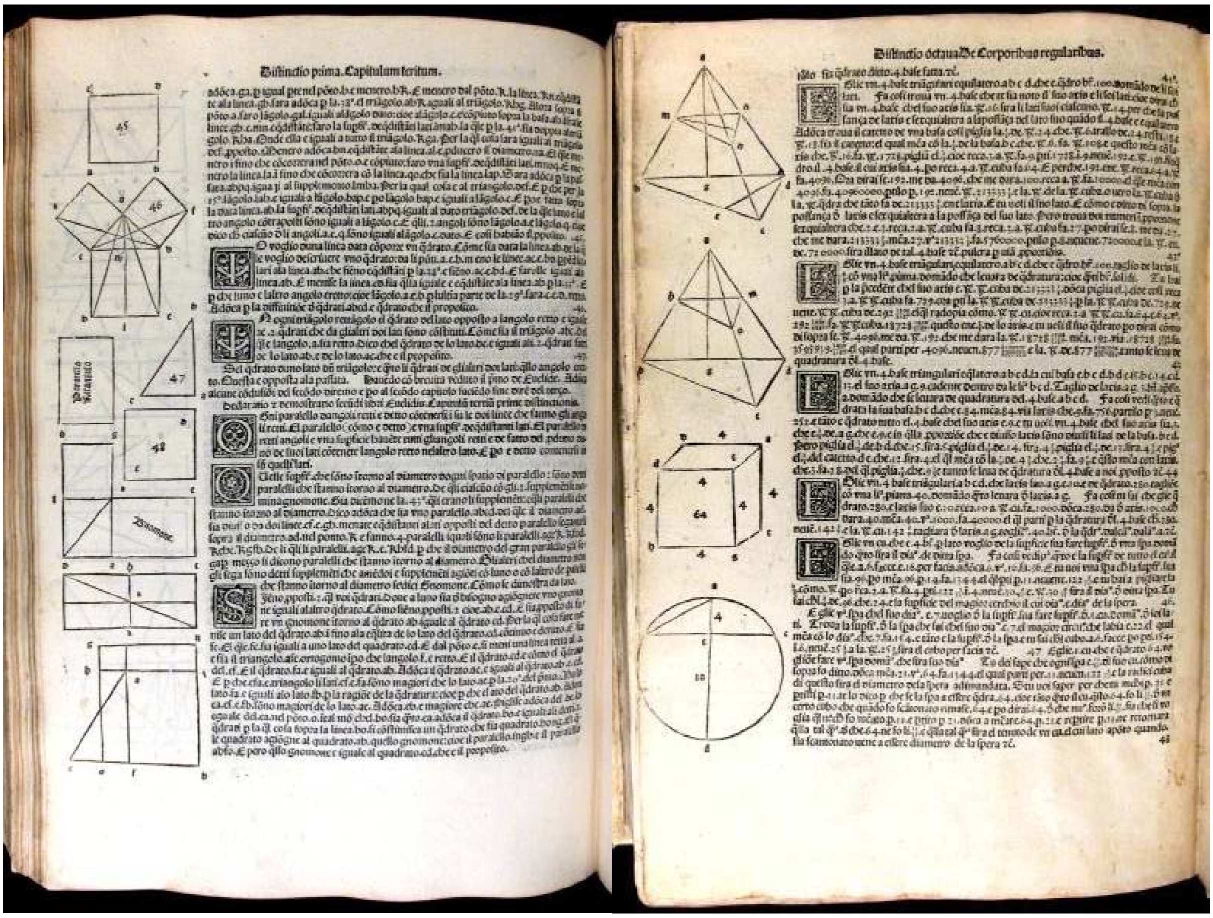
EL TEOREMA LLAMADO DE PITÁGORAS
LA DIVINA PROPORCIÓN Y EL PENTAGRAMA PITAGÓRICO
EL DESCUBRIMIENTO DE LOS INCONMENSURABLES
LOS SÓLIDOS PITAGÓRICO-PLATÓNICOS

La universalidad del teorema de Pitágoras y la invención de la demostración geométrica son las hadas que vemos en torno a la cuna de la Geometría griega y del milagro griego en Matemática.
A.REY. *El apogeo de la ciencia técnica griega.* UTEHA, México, 1962. Vol.1. p.13.

La Geometría tiene dos grandes tesoros, uno es el Teorema de Pitágoras y otro la división de un segmento en media y extrema razón* [la Divina Proporción]*. Si el primero es una joya de oro, el segundo viene a ser una piedra preciosa.
J.KEPLER. *Mysterium Cosmographicum.* Tubinga,1596.

El descubrimiento del inconmensurable pone en cuestión no sólo el concepto antiguo del número, sino hasta el concepto del mundo antiguo.
O.SPENGLER. *La decadencia de Occidente.* Austral, Madrid, 1998. Cap.I.1, p.152.

Quedaba aún una sola y única combinación* [el Dodecaedro]*; el Dios se sirvió de ella para el Todo cuando esbozó la disposición final del universo.
PLATÓN. *Timeo* (55c).



Pedro Miguel González Urbaneja
pgonzale@pie.xtec.es

HISTORIA DE LA MATEMÁTICA ELEMENTAL
PARA LA EDUCACIÓN SECUNDARIA

EL TEOREMA LLAMADO DE PITÁGORAS
4000 AÑOS DE HISTORIA GEOMÉTRICA

LA DIVINA PROPORCIÓN Y EL PENTAGRAMA PITAGÓRICO

EL DESCUBRIMIENTO DE LOS INCONMENSURABLES
PRIMERA CRISIS DE FUNDAMENTOS EN LA HISTORIA DE LA MATEMÁTICA

LOS SÓLIDOS PITAGÓRICO-PLATÓNICOS
GEOMETRÍA, ARTE, MÍSTICA Y FILOSOFÍA

HISTORIA DE CUATRO TEMAS CLAVE DE LA MATEMÁTICA ELEMENTAL:

EL TEOREMA LLAMADO DE PITÁGORAS

LA DIVINA PROPORCIÓN Y EL PENTAGRAMA PITAGÓRICO

EL DESCUBRIMIENTO DE LOS INCONMENSURABLES

LOS SÓLIDOS PITAGÓRICO-PLATÓNICOS

Introducción

El Teorema de Pitágoras, la Divina Proporción, los Inconmensurables y los Poliedros regulares son cuatro capítulos fundamentales de la Matemática elemental escolar, que forman parte de lo que genéricamente se denomina, desde el punto de vista histórico, como Geometría pitagórica. De hecho estos temas, que estudiaremos sucesivamente en el orden mencionado, aparecen en los albores de la Matemática griega, cuando gracias a la figura iniciática de Pitágoras, la ciencia del número y la extensión trasciende la práctica meramente empírica e inductiva de las civilizaciones del Próximo Oriente y da el gran salto cualitativo hacia una ciencia especulativa y deductiva, es decir, se funda propiamente la Matemática como ciencia. Esta realidad es la que expresa una de las fuentes de conocimiento más importantes que tenemos sobre los primeros matemáticos griegos. Se trata del *Comentario al Libro I de los Elementos de Euclides*, un valioso documento en el que el filósofo neoplatónico Proclo de Licia escribe:

> «*Pitágoras transformó la doctrina de Tales en enseñanza liberal, examinó desde lo alto los principios de la Geometría, investigó los teoremas de un modo inmaterial e intelectual y descubrió la dificultad de los números irracionales y la construcción de las figuras cósmicas* [poliedros]».

De acuerdo con la cita de Proclo, dos de los temas considerados, los inconmensurables y los poliedros regulares, habrían sido estudiados directamente por Pitágoras. Proclo, habla, además de la investigación intelectual de teoremas, entre los que habría que suponer precisamente los que vamos a tratar: el llamado *Teorema de Pitágoras* y los relacionados con la *sección áurea* o *Divina Proporción*. Así que la referencia de Proclo aludiría directamente a los cuatro temas claves, que lo fueron de las doctrinas geométricas pitagóricas y lo son de la Educación matemática elemental escolar. Claro está que cuando hablamos de doctrinas pitagóricas no nos referimos exclusivamente a las establecidas por el propio Pitágoras en persona, asunto que no se puede dilucidar debido a la falta de documentos históricos, sino que debemos realizar la atribución al llamado Pitagorismo, corriente de Filosofía, Ciencia y Religión desarrollada en una comunidad llamada la *Escuela pitagórica* que empieza a florecer en la Magna Grecia hacia el año 550 a.C.,y perdura hasta el 475 a.C., en que se dispersa por diversas vicisitudes entre las que según multitud de leyendas habría que mencionar la divulgación del secreto sobre la aparición de las magnitudes inconmensurables, de consecuencias catastróficas para la metafísica pitagórica fundamentada en la omnipresencia y omnipotencia del número, de acuerdo con la sentencia pitagórica: «*el número es la esencia de todas las cosas*».

La debacle de las concepciones pitagóricas que provocan los inconmensurables pudo haber sobrevenido por la aplicación del *Teorema de Pitágoras* para intentar expresar la relación entre elementos tan simples como la diagonal y el lado de un cuadrado, o la aplicación de resultados geométricos vinculados a la *Divina Proporción* para perseguir relacionar la diagonal y el lado de un pentágono regular. Hay, pues, una íntima vinculación entre tres de nuestros temas: el Teorema de Pitágoras, la Divina Proporción y los inconmensurables, los dos primeros llevan inexorablemente al tercero. Así lo expresamos, de forma lírica, al comienzo del capítulo 3, en la página 113:

> La grandeza sublime del *Teorema de Pitágoras* y la mágica belleza del *Pentagrama místico* pitagórico –generador de la *sección áurea* como razón entre la diagonal y el lado del pentágono regular– fueron dos de los tópicos más relevantes de la Escuela pitagórica, pero se convirtieron en dos caballos de Troya para la Geometría griega, porque llevaban en su interior el germen de la profunda crisis de la comunidad pitagórica donde aparecieron.

Por razones intuitivas se tiende a pensar –o más bien a creer– que dos segmentos tienen siempre una parte común, es decir que son conmensurables. Así ocurre en las etapas primitivas del desarrollo matemático, tanto en el ámbito histórico como en el escolar, y desde luego en el medio artesanal por la necesidad práctica de la medida, siempre aproximada de longitudes. La aparición de los inconmensurables es un revulsivo en la línea programática de la Matemática y Filosofía pitagóricas que pone término al sueño filosófico del número entero como vertebrador de la Matemática, ya que elimina la posibilidad de medir siempre con exactitud. El efecto más inmediato fue que, de pronto, quedaban invalidadas todas la pruebas pitagóricas de los teoremas que involucraban proporciones. Este desafío que lanza la naturaleza a la Aritmética produce una tremenda crisis en los fundamentos de la Matemática que se solventa en la Academia platónica de donde surgen los principios que se plasmarán en la solución final de la compilación geométrico-deductiva de *Los Elementos* de Euclides. El precio a pagar incluye el desarrollo de la Geometría griega al margen de la Aritmética y del Álgebra, el horror al infinito en la cultura griega, el énfasis en el rigor como supremo valor de la Matemática y el estilo sintético-apodíctico de exposición *–ars disserendi–* que oculta la vía heurística del descubrimiento *–ars inveniendi–* alcanzado por vía analítica o mecánica, entre otros muchos condicionamientos.

Los principios aludidos de la solución a la crisis de los inconmensurables son introducidos por el matemático más brillante de la Academia platónica, Eudoxo de Cnido, que idea la *Teoría de la Proporción* (Libro V de *Los Elementos* de Euclides), la cual permite reconstruir de forma rigurosa la demostración de los resultados geométricos pitagóricos que habían sufrido su invalidez por los inconmensurables, lo que constituye la doctrina geométrica de la Semejanza (Libro VI de *Los Elementos* de Euclides). Eudoxo también concibe el *Método de Exhaución* (introducción en la Proposición 1 del Libro X de *Los Elementos* de Euclides, y su aplicación a las áreas y volúmenes en el Libro XII) que inaugura los problemas infinitesimales en la Historia de las Matemáticas e influyen sobre las concepciones acerca del infinito en la *Teoría de la Potencia y el Acto* de la Física de Aristóteles.

Como se ha dicho el núcleo de la emergencia de los inconmensurables pudo tener su origen tanto en el *Teorema de Pitágoras* como en la *Divina Proporción*, por tanto nos ocupamos previamente de estos dos temas.

A lo largo de este escrito decimos varias veces que «*el Teorema de Pitágoras pertenece al imaginario cultural de todos los pueblos*». Desde luego nadie duda de que el *Teorema de Pitágoras* es el más popular, famoso y espléndido de todos los resultados de la Geometría elemental, que yace, de forma ineludible, en el pasado de toda persona, como recuerdo infantil inmarcesible de la Matemática escolar. El *Teorema de Pitágoras* es un preciado tesoro geométrico al que se le ha bautizado con numerosos nombres y que constituye la fuente principal de las relaciones métricas de la Geometría elemental. No es extraño, pues, que personajes del más heterogéneo pelaje se hayan ocupado de dejar su impronta con una nueva demostración, desde los orígenes hasta nuestros días, de lo que se obtiene como valor moral que, al menos en Matemática, hay muchas formas de alcanzar la misma verdad, así que, paradójicamente la verdad por antonomasia «*la verdad matemática*» no es dogmática. La importancia histórica y la relevancia escolar del *Teorema de Pitágoras* concurren en las mismas razones (capítulo 1, página 13):

> «La emergencia de este teorema en el horizonte histórico cultural pero también en el horizonte escolar señala el primer salto intelectual entre los confines de la especulación empírica y los dominios del razonamiento deductivo. En efecto, el *Teorema de Pitágoras* pudo estar en el origen de la demostración –que caracteriza a la Matemática con respecto a las demás ciencias– ya que la prueba pitagórica del *Teorema de Pitágoras* tal vez sea la primera demostración verdaderamente matemática de la Historia–. Y también el *Teorema de Pitágoras* está situado en el umbral que inicia una pauta deductiva en el desarrollo de la Matemática escolar elemental. [...].

> Estamos ante un auténtico paradigma para la Matemática y sobre todo para la Educación matemática. Por esto y por la universalidad que le caracteriza, el *Teorema de Pitágoras* pertenece al imaginario cultural de casi todos los pueblos.»

Así pues, le prestamos una gran atención a los saberes matemáticos vinculados al *Teorema de Pitágoras* que desarrollaron, por una parte, las civilizaciones orientales y sobre todo la cultura griega –en especial el propio Pitágoras, Platón y Euclides–, y por otra parte, figuras aisladas que aportaron demostraciones nuevas. Naturalmente la parte más importante, intensa y extensa del estudio sobre el *Teorema de Pitágoras* se refiere a su ubicación y su significado en los *Los Elementos* de Euclides donde ocupa las Proposiciones 47 y 48 del Libro I. En fin, aludimos también a múltiples facetas del *Teorema de Pitágoras* propiamente geométricas conjugadas con vertientes didácticas, culturales, curiosas y recreativas

En el segundo capítulo dedicado al estudio de la *Divina Proporción* y el *Pentagrama pitagórico* o estrella pentagonal que surge al trazar las diagonales de un pentágono, manantial inagotable de secciones áureas, también añadimos a la bellísima geometría de las relaciones áureas, donde anida la *Divina Proporción*, una miscelánea de aspectos curiosos e incluso místicos y esotéricos. Los aspectos geométricos son apoyados, como siempre ocurre en la Geometría elemental escolar, en *Los Elementos* de Euclides. Concretamente encontramos elementos sobre la sección áurea –denominada por los griegos como «*la división de un segmento en media y extrema razón*»– en los Libros II, IV, VI y XIII. Muchos de ellos están relacionados, como es natural, con la construcción del pentágono regular.

Pero quizá los aspectos más interesantes de la *Divina Proporción* sean los vinculados a su intervención decisiva y palmaria en la explicación de la Belleza en la Naturaleza y en el Arte. Lo primero por la asociación de la sección áurea con los *Números de Fibonacci*, y lo segundo por ser la sección áurea un canon fundamental en la armonía, equilibrio y proporción de las formas artísticas. La cuestión es que la fascinación por la *Divina Proporción* ha patrocinado a lo largo de la Historia de la Cultura, multitud de especulaciones de naturaleza teológica –de ahí proviene el nombre de *Divina Proporción*–, filosófica, científica, estética e incluso esotérica y mágica, que se inician con las primigenias reflexiones del Pitagorismo sobre las formas geométricas y alcanzan en nuestro tiempo a los geniales artistas Gaudí y Dalí, donde encontramos las últimas reminiscencias pitagóricas.

En cuanto a los poliedros regulares, su ubérrima y fascinante geometría depende del *Teorema de Pitágoras*, porque la relación entre los lados de un triángulo rectángulo es de aplicación esencial y constante para el estudio de los polígonos que son las caras de los poliedros. Además, la *Divina Proporción* juega en estos cuerpos su papel geométrico, sobre todo en el Dodecaedro que tiene las caras pentagonales. De hecho una de las leyendas apocalípticas sobre la divulgación de los secretos pitagóricos se refiere a la construcción del dodecaedro inscrito en una esfera (Proposición XIII.17 de *Los Elementos* de Euclides), donde tiene una función importante la *Divina Proporción*.

Los poliedros fueron precisamente el tópico geométrico más notable de la Academia platónica –de ahí el nombre de *sólidos platónicos*–, que habiendo recibido de forma directa, y a veces personal, una herencia notable de la Ciencia y la Filosofía pitagóricas, se aplicará, como se ha dicho, en resolver la tremenda crisis de fundamentos que acarrea la súbita emergencia de las magnitudes inconmensurables en la cultura griega. Esto nos da la ocasión de profundizar en los amplísimos contenidos y métodos matemáticos desarrollados por los matemáticos de la Academia platónica –donde su líder, Platón ejercía un mecenazgo decisivo de orientación filosófica– de tanta trascendencia en la generación de *Los Elementos* de Euclides.

Platón dedicará uno de sus *Dialogos* más importantes, el *Timeo*, a la construcción de una compleja cosmogonía basada en la Geometría de los cinco poliedros regulares, que tendrá una influencia decisiva en el impresionante modelo cosmológico de Kepler, donde un complejo sistema de sólidos platónicos encajados albergan a los planetas conocidos y explican sus movimientos. El *Timeo* de Platón inspira también la famosa obra de Luca Pacioli, *La Divina Proporción*, dedicada como su nombre indica a un estudio geométrico–

místico de la sección áurea, pero sobre todo a un profundo análisis de los poliedros regulares y algunos arquimedianos y estrellados, donde hay un despliegue de hermosísimas ilustraciones realizadas por el inefable arte del amigo de Luca Pacioli, Leonardo da Vinci. Precisamente el neoplatonismo vigente durante el Renacimiento propicia que la geometría de los poliedros sea un tópico matemático muy importante en los llamados artistas geómetras renacentistas, en particular Piero della Francesca, Durero y el propio Leonardo, quienes dedicarán buena parte de sus especulaciones sobre la Perspectiva al estudio de las propiedades de los sólidos platónicos e incluso al descubrimiento de nuevos poliedros semirregulares, lo que nos da la oportunidad para concretar las aportaciones matemáticas de estos geómetras, conocidos sobre todo como artistas, para los que la ciencia geométrica era la esencia y la fuente de la belleza. Así, por ejemplo Leonardo da Vinci escribe en *El Tratado de la Pintura* «*No lea mis principios quien no sea matemático*» y, según Durero, la práctica de las construcciones geométricas forma el ojo y el espíritu del artista-geómetra y le proporciona la seguridad «*que hace la mano obediente*». No es extraño que un gran geómetra e historiador de la Matemática, M.Chasles, escribiera tres siglos después, en 1837 que «*Alberto Durero y Leonardo da Vinci merecen ser considerados entre los geómetras más sabios de su época*».

En los tiempos modernos los poliedros se han revitalizado como nexo de unión de heterogéneas disciplinas como la Topología Algebraica, la Teoría de Grupos, la Resolución de ecuaciones algebraicas y la cristalografía.

Como tema clave de la Matemática pitagórica y platónica, los poliedros, con su fuerte carga simbólica de verdades religiosas y profundas ideas filosóficas y por su especial belleza, simetría y regularidad, reaparecen en el arte del siglo XX, sobre todo en Gaudí, Escher y Dalí, quien, sobre todo siguiendo a Platón y a Kepler, les sigue atribuyendo importantes funciones de índole estética, cosmológica, simbólica, mística y teológica.

Los Elementos de Euclides alcanzan precisamente su clímax final con un estudio exhaustivo de los sólidos platónicos, a los que está dedicado la mayor parte del Libro XIII, que después de 2300 años desde su composición sigue siendo la principal fuente geométrica de información sobre un tema matemático secular.

A lo largo de esta introducción hemos ido aludido de forma reiterada a *Los Elementos* de Euclides. Es inevitable. Aún hoy, después de 23 siglos, la lectura de *Los Elementos* sigue provocando una profunda admiración, seguida de fruición intelectual, por el derroche inusitado de ingenio, lógica, rigor, didáctica, exactitud, certeza, pureza, belleza, coherencia y elegancia. Todo lo que se haya dicho y se diga sobre la obra euclidiana, que es mucho, siempre resulta insuficiente: Tesoro matemático de la humanidad, cumbre de la Matemática griega, compilación de la Geometría platónica, una de las voces más importantes de la herencia clásica, Biblia de las Matemáticas, demostración de humanidad y manifestación de cultura y civilización superiores, Geometría popular de todos los tiempos, cima del pensamiento matemático, codificación de los fundamentos de la Geometría de la regla y el compás, libro secular más estudiado de toda la Historia, primera teoría propiamente dicha que registra la Historia, el libro más grande y más maravilloso de las Matemáticas, el más famoso libro de texto, y un larguísimo etcétera.

Los Elementos de Euclides es el tratado de Matemáticas que mayor influencia ha tenido a lo largo de toda la Historia de la Cultura –incluso mucho más allá de la propia Matemática y ciencias afines– y que más veces se ha editado, después de la Biblia. La principal obra de Euclides ha constituido, como autoridad indiscutida, el cuerpo de doctrina central de la totalidad de las ciencias matemáticas elementales hasta mediados del siglo XIX, del que se puede derivar el resto y ha sido a lo largo de la Historia de la Ciencia y de la Educación el principal vehículo de la transmisión del saber matemático hasta mediados del siglo XX. Pero aún hoy la carrera de Euclides no ha concluido, porque *Los Elementos* de Euclides siguen siendo, por una parte, una fuente inagotable de estudios epistemológicos y de investigaciones históricas, y por otra, una fuente fundamental del currículum de la Matemática elemental, que determina el contenido y el orden lógico secuencial y por tanto la ordenación curricular de los diversos temas y capítulos de los Libros de Texto de la Matemática escolar básica y secundaria.

Todas estos asuntos se estudian con todo lujo de detalles, muchos de ellos, por supuesto de tipo técnico, sobre las cuestiones geométricas involucradas, pero se abunda también en multitud de aspectos históricos, filosóficos, artísticos y en general de múltiple cariz cultural sobre los que los problemas matemáticos intervienen y a su vez son influidos. Y se hace desde sus orígenes en Grecia y a lo largo de toda la Historia ya que son problemas seculares sobre los que toda generación ha hecho su aportación.

Los argumentos que se despliegan a lo largo de este escrito se sustentan de forma esencial en numerosos textos originales de los matemáticos, filósofos y escritores. También se apoyan en las opiniones y reflexiones que sobre las matemáticas han vertido numerosos pedagogos, historiadores y filósofos de la Ciencia y de la Matemática, e incluso literatos y artistas. Estos textos originales cumplen una función muy importante. Son textos con auténtica atribución histórica y bibliográfica, elegidos muy cuidadosamente de forma erudita, extraídos directamente de los escritos originales de los creadores de la Matemática y de los filósofos e historiadores, y en muchos casos en torno a estos textos se articula la descripción de la Historia del Pensamiento matemático. De estos textos surgen numerosas citas extraídas directamente y referenciadas, con autor, texto y página, reseñados en la generosa bibliografía que incluye junto a las fuentes, tanto obras de largo aliento como otras de divulgación científica con indicación de los capítulos que interesan a cada tema.

A lo largo del documento se insertan numerosas y originales ilustraciones que siempre tienen una relación contextual con el tema que se esta tratando. Son piezas artísticas de una gran belleza en las que la Matemática o los matemáticos son los protagonistas principales y el objeto de expresión. Bastantes de estas ilustraciones son portadas o páginas significativas de famosas ediciones de obras matemáticas clásicas que son crónicas visuales y auténticas joyas matemáticas iconográficas.

También insertamos numerosos cuadros de texto enfatizado con esquemas, sinopsis y resúmenes; ampliaciones del contenido general, datos biográficos y bibliográficos; recopilación de citas; una condensación de ideas referentes a una cuestión matemática; cuestiones de historiografía y su incidencia en el desarrollo de algunas teorías matemáticas; aplicaciones de técnicas y métodos matemáticos a la resolución de ciertos problemas históricos; interpretaciones de problemas matemáticos con el simbolismo algebraico actual; aspectos curiosos y singulares; importancia e influencia histórica ulterior de técnicas y métodos matemáticos y vínculos con otros temas; conexiones con cuestiones eruditas de gran relevancia en la Historia de la Cultura y del Pensamiento; relaciones de las cuestiones matemáticas sobre hechos científicos y filosóficos; etc. Estos cuadros pueden ir solos o acompañados de alguna ilustración *ad hoc* y permiten una doble lectura de los documentos. Pero su omisión en la lectura del grueso del texto no resta inteligibilidad. No obstante, por su contenido, estos cuadros son interesantes centros de atención que discurren a lo largo de todo el documento y constituyen un buen complemento en muchos aspectos.

A través de estos estudios comprobamos de forma fehaciente que la Historia de las Matemáticas es una fuente inagotable de material didáctico, de ideas y problemas interesantes y también, en un alto grado, de diversión y recreo intelectual, en suma de enriquecimiento personal, científico y profesional, que el profesor puede aprovechar para motivar su labor de transmisión del conocimiento, desdramatizando la Enseñanza de las Matemáticas. La Historia de las Matemáticas como lugar de encuentro entre las ciencias y las humanidades, es un instrumento magistral para enriquecer culturalmente la Enseñanza de la Matemática e integrarla de forma armónica e interdisciplinar en el currículum académico.

EL TEOREMA LLAMADO DE PITÁGORAS
4000 AÑOS DE HISTORIA GEOMÉTRICA

La universalidad del teorema de Pitágoras y la invención de la demostración geométrica son las hadas que vemos en torno a la cuna de la Geometría griega y del milagro griego en Matemáticas.
A.REY. *El apogeo de la ciencia técnica griega* (UTEHA, México, 1962. Vol.1. p.13).

Este teorema con la multitud de demostraciones del mismo ilustra de forma sorprendente el hecho de que hay muchas formas de alcanzar la misma verdad.
E.S.LOMIS. *The Pythagorean Proposition*. NCTM, 1968. p.3.

La contestación más frecuente a la cuestión de lo que se recuerda de la Matemática escolar es el Teorema de Pitágoras.* [...] *Debemos considerar al Teorema de Pitágoras como un activo cultural de primer orden que pertenece a la base intelectual común de la humanidad.* [...] El *Teorema de Pitágoras* es *con razón y con frecuencia un símbolo de todas las Matemáticas.
B.ARTMANN. *Euclid–The Creation of Mathematics*. Springer. New York, 1996. p.57

El Teorema de Pitágoras ha tenido ocupados a los matemáticos desde la época clásica hasta el presente.
W.DUNHAM. *El Universo de las Matemáticas*. Pirámide, 1995. Cap.H. p.136

El *Teorema de Pitágoras* es tal vez la relación matemática más importante, más conocida, más admirada, más aludida, más popular, que más nombres y más pruebas ha recibido, y la que ocupa el primer plano en el recuerdo de los tiempos escolares. Todo ello hace justicia a su relevante valor práctico, teórico y didáctico. Al ser la fuente de todas las relaciones métricas que aparecen en la Geometría elemental, el *Teorema de Pitágoras* es el más útil y espléndido.

La magnífica grandeza del *Teorema de Pitágoras* inicia una decisiva inflexión intelectual entre la práctica empírica e inductiva y la argumentación deductivo-demostrativa, tanto en el devenir histórico cultural matemático –germen de la Matemática racional en Grecia– como en el espacio escolar de la Educación matemática –umbral de la Matemática deductiva elemental–.

Se pasa revista a los saberes acerca del *Teorema de Pitágoras* que tuvieron las civilizaciones orientales prehelénicas –Babilonia, Egipto, India y China– para entrar después en el mundo griego a través de Pitágoras y cruzarlo con Platón y Euclides, cuyas demostraciones paradigmáticas revisten una singular importancia histórica. Se estudian muchas otras pruebas de los más diversos personajes, y que por su riqueza conceptual merecen ser destacadas como auténticas joyas de sabiduría geométrica en las que el afamado teorema logra magnificar su frescura y su belleza. Finalmente se abunda en generalizaciones y curiosidades.

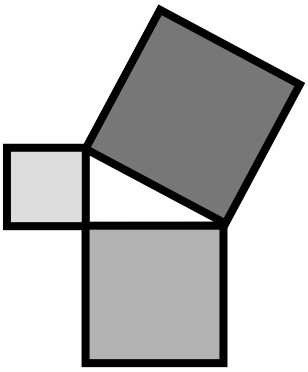
Las facetas y vertientes históricas se conjugan con las propiamente geométricas, didácticas, recreativas y curiosas, en un trabajo interdisciplinar de compilación y codificación exhaustiva de los aspectos matemático–culturales vinculados al más fascinante teorema geométrico.

El Teorema llamado de Pitágoras

En las Matemáticas de todas las civilizaciones históricas, las relaciones entre los lados de un triángulo rectángulo han sido siempre uno de los temas más relevantes objeto de estudio y especulación. La primera y más sobresaliente de estas relaciones es el Teorema universalmente asociado, por tradición, con la figura de Pitágoras, en el que se establece:

> «*El área del cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos*.»

Este enunciado es considerado por muchos historiadores de la Matemática como el más deslumbrante, atractivo, famoso y útil teorema de la Geometría elemental, porque ha marcado un hito fundamental en la Historia de las Matemáticas. Además de Teorema de Pitágoras, se le ha llamado de muy diversas formas a lo largo de la Historia. Los griegos le llamaban *Teorema de la mujer casada*, en la Edad Media se le apodó *Inventum hecatombe dignum* y *Magister matheseos* y muy habitualmente se le ha llamado la proposición I.47, atendiendo al lugar que ocupa en *Los Elementos* de Euclides.



Ningún teorema matemático ha recibido tanta atención y curiosidad y tantas pruebas, ilustraciones y demostraciones de personajes muy diferentes y con intereses intelectuales muy heterogéneos. Es un teorema que ha causado una gran admiración a todo tipo de personas, matemáticos y no matemáticos, pero también una gran extrañeza y perplejidad a otras –Leonardo, Hobbes, Schopenhauer, Einstein– porque, a diferencia de otros teoremas, aparentemente no existe ninguna razón intuitiva para que los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo –la hipotenusa y los catetos– deban tener un vínculo tan estrecho entre sí.

La verosimilitud del *Teorema de Pitágoras* no depende de un dibujo bien ilustrado sino que obedece por completo a un ejercicio intelectual puro alejado de lo sensorial –la deducción lógica–. Por eso, para muchos historiadores de la Ciencia, el *Teorema de Pitágoras* tiene un valor simbólico iniciático como elemento cultural responsable de la aparición de la Geometría racional en la Escuela Pitagórica y por tanto forma parte ineludible de la semilla básica de la propia naturaleza de la Matemática desde su origen como ciencia especulativa y deductiva en los albores de la civilización helénica.

La emergencia de este teorema en el horizonte histórico cultural pero también en el horizonte escolar señala el primer salto intelectual entre los confines de la especulación empírica y los dominios del razonamiento deductivo. En efecto, el *Teorema de Pitágoras* pudo estar en el origen de la demostración –que caracteriza a la Matemática con respecto a las demás ciencias– ya que la prueba pitagórica del *Teorema de Pitágoras* tal vez sea la primera demostración verdaderamente matemática de la Historia–. Y también el *Teorema de Pitágoras* está situado en el umbral que inicia una pauta deductiva en el desarrollo de la Matemática escolar elemental.

El Teorema de Pitágoras aparece por doquier en la Matemática. Es la base de multitud de teoremas geométricos, de los estudios sobre polígonos y poliedros, de la Geometría Analítica y de la Trigonometría –la fórmula $\cos^2\alpha+\text{sen}^2\alpha=1$ es un caso particular del *Teorema de Pitágoras* y el *Teorema del coseno* es una generalización del mismo–. La ecuación pitagórica $x^2+y^2=z^2$ es la ecuación de la circunferencia y la raíz histórica del Análisis indeterminado de Diofanto y Fermat. *El Teorema de Pitágoras* también pudo ser el germen de la dramática aparición de la inconmensurabilidad en la Escuela Pitagórica, de gran trascendencia en la estructuración y sistematización euclídea de la Geometría griega.

Así pues, por todo lo dicho y por lo que diremos acerca del *Teorema de Pitágoras,* estamos ante un auténtico paradigma para la Matemática y sobre todo para la Educación matemática. Por esto y por la universalidad que le caracteriza, el *Teorema de Pitágoras* pertenece al imaginario cultural de casi todos los pueblos.

El Teorema de Pitágoras en las civilizaciones prehelénicas

Una tradición muy persistente, que toma como base documental a Plutarco, Diógenes Laercio, Ateneo y Proclo, atribuye el Teorema de Pitágoras al propio Pitágoras. Pero el examen arqueológico realizado en el pasado siglo de las tablillas de arcilla encontradas en Mesopotamia, pertenecientes a las civilizaciones que se desarrollaron entre los ríos Tigris y Éufrates en el segundo milenio antes de J.C., ha revelado que los antiguos babilonios conocían aspectos del Teorema, más de mil años antes que el propio Pitágoras. Algo similar se puede afirmar respecto de las culturas que aparecieron a lo largo del río Nilo, así como de la antigua civilización hindú y de las antiguas civilizaciones chinas que surgieron en las cuencas de los ríos Yangtze y Amarillo. Pero parece ser que no lo conocían ni las grandes civilizaciones precolombinas de América ni tampoco las del continente africano, exceptuando la egipcia.

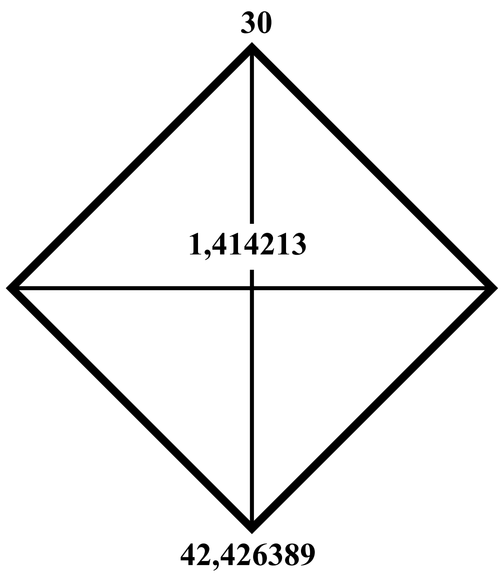
Las referencias prehelénicas al Teorema no contienen, sin embargo, pruebas del mismo, mientras que es generalizada la creencia de que fue Pitágoras el primero en proporcionarnos una demostración lógica del Teorema, lo que hará justo que éste haya pasado a la historia con su nombre.

El análisis histórico de la relación entre los lados de un triángulo rectángulo se puede dividir en tres estadios de desarrollo. En el estadio inicial, puramente aritmético y empírico-práctico se obtienen resultados numéricos concretos para los lados del triángulo. En el estadio siguiente aritmético-geométrico, se obtienen leyes generales de formación de los lados. Finalmente se penetra en la profundidad del pensamiento matemático investigando las demostraciones de los resultados generales de los estadios precedentes. Las dos primeras etapas corresponden a las civilizaciones orientales aludidas, mientras que a la tercera etapa sólo contribuyeron los griegos, particularmente Pitágoras y Euclides.

El Teorema de Pitágoras en Babilonia

Mucho antes de que Pitágoras enunciara la ley general a la que la Historia ha bautizado con su nombre, la Babilonia de la dinastía de Hammurabi sabía cómo calcular ternas de números pitagóricos.

La Arqueología ha recuperado cerca de medio millón de tablillas de arcilla con textos cuneiformes, de las cuales casi trescientas tienen contenido matemático. Entre ellas sobresalen la tablilla YALE o YBC 7289, conservada en la Universidad de Yale y la PLIMPTON 322 en la Universidad de Columbia.



La tablilla YALE (YBC 7289), de 1600 a.C. Universidad de Yale.

De acuerdo con la interpretación de los números sexagesimales inscritos en la tablilla, este documento mesopotámico estaría relacionado con el Teorema de Pitágoras

La tablilla YALE está fechada hacia 1600 a.C. Figura en ella un cuadrado, los triángulos rectángulos resultantes de trazar las diagonales y varios números en caracteres cuneiformes escritos en el sistema de numeración sexagesimal babilónico, basado en las potencias de 60. La relación con el Teorema de Pitágoras se observa al traducir estos números a nuestro sistema decimal.

En la diagonal horizontal aparece un número que al transcribirlo en caracteres modernos se expresaría en la forma: 1;24,51,10, donde el punto y como representa la separación entre la parte entera y la fraccionaria –como nuestra como o nuestro punto decimal– y las comas se utilizan para separar las sucesivas posiciones sexagesimales. Es decir, que para pasar a nuestro sistema decimal se haría:

$$1;24,51,10 = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} \simeq 1,414213... \simeq \sqrt{2}\,.$$

Es realmente sorprendente que resulta el valor de $\sqrt{2}$ con una aproximación bastante superior a la que obtendrían los griegos muy posteriormente.

En la parte superior de la tablilla YALE aparece el número 30; mientras que en la parte inferior aparece 42;25,35, que pasados a decimales resultan ser los números 30 y 42,426389, respectivamente. Dado que la diagonal de un cuadrado se obtiene –aplicando el *Teorema de Pitágoras*– multiplicando el lado por $\sqrt{2}$, y se comprueba que:

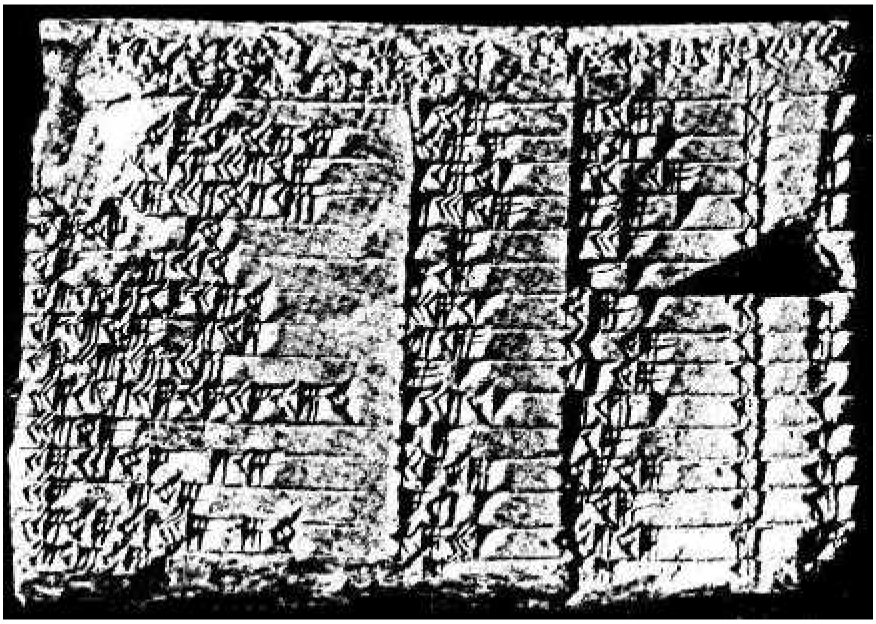
$$42;25,35 \approx 30 \cdot 1;24,51,10\,,$$

es decir:

$$42,426389 \approx 30 \cdot 1,41421$$

las relaciones aritméticas entre los números que aparecen en la tablilla YALE resultan ser un caso particular de una implícita aplicación primitiva y empírica del Teorema de Pitágoras.

La tablilla PLIMPTON es el documento matemático más importante de Babilonia. Está fechada entre 1900 y 1600 antes de J.C. y ha sido descrita por varios historiadores, siendo muy significativa la interpretación que dieron en 1945 Neugebauer y Sachs en su libro *Mathematical Cuneiform Texts*.



La tablilla PLIMPTON 322 ¿1900–1600 a.C.? Universidad de Columbia.

Según ciertas interpretaciones de algunos historiadores, esta tablilla contiene una descripción empírica de números pitagóricos y de primitivas tablas trigonométricas .

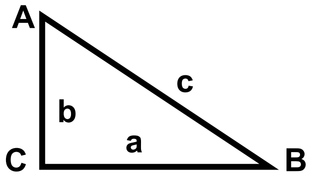
La tablilla PLIMPTON parece un simple registro de cuentas de operaciones comerciales, pero los intérpretes han querido ver una descripción empírica de números pitagóricos e incluso de primitivas tablas trigonométricas .

119	169	1
3367	4825	2
4601	6649	3
12709	18541	4
65	97	5
319	481	6
2291	3541	7
799	1249	8
481	769	9
4961	8161	10
45	75	11
1679	2929	12
161	289	13
1771	3229	14
56	106	15

La tablilla consta de cuatro columnas de números distribuidos en 15 filas horizontales. En la primera tabla se reproducen las tres últimas columnas en nuestro sistema decimal, habiéndose corregido algunos errores aritméticos según las orientaciones de Neugebauer. La columna del extremo derecho contiene los números del 1 al 15 y representa meramente el número de orden de cada línea de números.

La parte de la tablilla que se conserva está algo dañada, de forma que no permite leer algunos números, sobre todo en la primera columna, pero una vez descubierta la ley de formación de la tabla, ha sido posible reconstruir los números que faltaban.

Las columnas segunda y tercera representan el cateto menor b y la hipotenusa c de triángulos rectángulos de lados enteros, o la altura b y la diagonal c de un rectángulo



De las diversas investigaciones parece deducirse que los escribas que construyeron la tablilla debieron comenzar por tomar dos enteros sexagesimales regulares –enteros cuyos únicos divisores primos son 2, 3 y 5, es decir, los divisores primos de 60–, u, v, con u>v, y formar con ellos la terna de números:

$$a = 2uv\ ,\ b = u^2 - v^2\ ,\ c = u^2+v^2$$

que como se comprueba fácilmente forman una terna pitagórica, es decir: $a^2+b^2=c^2$.

Así se obtendría la segunda tabla que contiene valores de a,b,c, que corresponden a valores de v menores que 60 y a valores de u tales que $1<u/v<1+\sqrt{2}$, es decir, a triángulos rectángulos con catetos b<a.

u	v		a	b	c
12	5		120	119	169
64	27		3456	3367	4825
75	32		4800	4601	6649
125	54		13500	12709	18541
9	4		72	65	97
20	9		360	319	481
54	25		2700	2291	3541
32	15		960	799	1249
25	12		600	481	769
81	40		6480	4961	8161
2	1		60	45	75
48	25		2400	1679	2929
15	8		240	161	289
50	27		2700	1771	3229
9	5		90	56	106

Por ejemplo, los números que aparecen en la primera fila de la tabla se obtienen a partir de u=12, v=5, a los que corresponden los valores a=120, b=119, c=169, siendo los valores de b y c los que aparecen en segundo y tercer lugar, respectivamente, en la primera fila de la tablilla PLIMPTON.

La tablilla contiene 15 de las 38 ternas pitagóricas que existen en las condiciones definidas y están ordenadas de forma decreciente de la razón c/a, lo cual ha permitido conjeturar que la primera columna de la tablilla sería una tabla de valores de los cuadrados de la secante del ángulo B o una tabla de valores de los cuadrados de la tangente del ángulo B. Al ser $1+tg^2B=sec^2B$ y comenzar todos los números de la columna inicial por el dígito 1, al estar la tablilla parcialmente deteriorada por la izquierda, no es posible determinar cual de las dos hipótesis, la de la secante o la de la tangente, es la cierta.

EL TEOREMA DE PITÁGORAS Y LAS TERNAS PITAGÓRICAS EN EL SISTEMA NUMÉRICO SEXAGESIMAL BABILÓNICO

Tablilla babilónica (hacia 1800 a.C.) con motivos geométricos relativos al cuadrado y al círculo y escritura cuneiforme. Museo Británico, BM 15285.

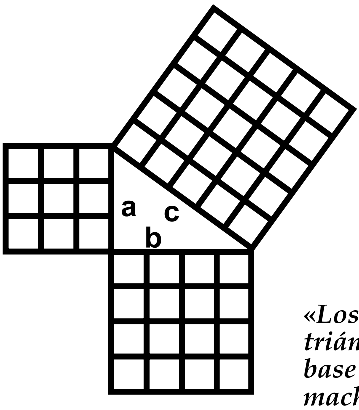
Las más antiguas manifestaciones de cuestiones matemáticas vinculadas al Teorema de Pitágoras proceden de la cultura mesopotámica anterior a 1500 a.C.

Junto a documentos en arcilla que contienen ejercicios sobre casos específicos de ternas pitagóricas, han sido encontrados diversas tablillas con ilustraciones del *Teorema de Pitágoras* en el caso concreto del triángulo rectángulo isósceles.

La cultura babilónica poseía un sistema de numeración posicional sexagesimal, antecedente del actual sistema posicional decimal de origen indo-arábigo. Para ponderar el valor del sistema numeral posicional, recordemos lo inmanejable que era para escribir números grandes y para realizar operaciones aritméticas el sistema de numeración romano y todavía más el griego, que utilizaban letras del alfabeto para representar los números. El hecho de que con sólo diez símbolos, independientes de cualquier lenguaje concreto, puedan escribirse todos los números y puedan realizarse de manera tan sencilla todas las operaciones aritméticas, convierte al sistema posicional en uno de los instrumentos más potentes y valiosos de la Ciencia y por ende en uno de los logros más sublimes del espíritu humano, comparable a la escritura.

El Teorema de Pitágoras en Egipto

Los famosos papiros de *Rhind* y de *Moscú*, a pesar de su alto valor matemático, no mencionan el Teorema de Pitágoras ni las ternas pitagóricas. No obstante, los egipcios conocían y utilizaban el hecho de que el triángulo de lados 3, 4 y 5 (o proporcionales a estos números), llamado «*Triángulo egipcio*», es rectángulo, para trazar una línea perpendicular a otra, a modo de «*escuadra de carpintero*», que era una práctica habitual de los agrimensores oficiales para recuperar las fronteras de los lindes de las tierras tras los periódicos corrimientos de tierras producidos por las crecidas del río Nilo.

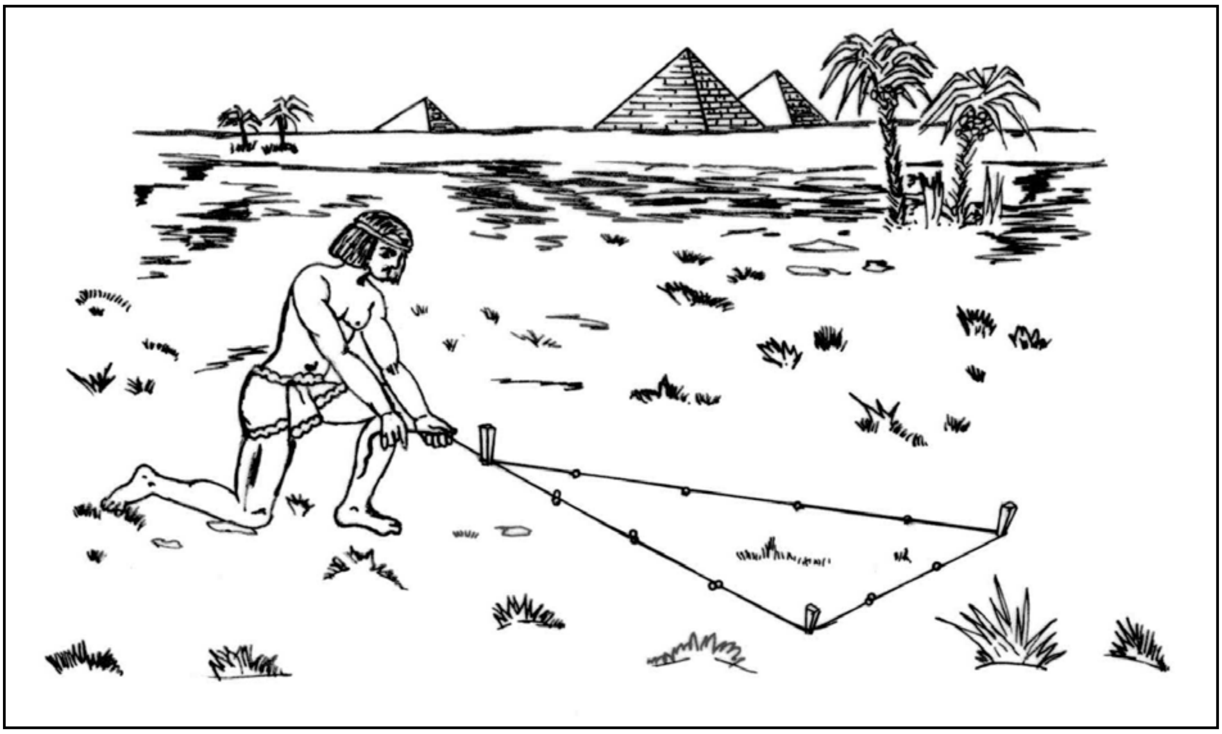


a	b	c
3	4	5
6	8	10
9	12	15
12	16	20
15	20	25

En el antiguo Egipto el *Triángulo egipcio*, era llamado también «*Triángulo de Isis*» y tenía un cierto carácter sagrado, porque el número tres representaba a Osiris, el cuatro a Isis y el cinco a Horus. Así lo relata Plutarco en *Sobre Isis y Osiris*, VIII,4:

«Los egipcios se imaginaban el mundo la forma del mas bello de los triángulos. Este triángulo, símbolo de la fecundidad, tiene su lado vertical compuesto de tres, la base de cuatro y la hipotenusa de cinco partes. El lado vertical simbolizaba al macho, la base a la hembra, y la hipotenusa a la primogenitura de los dos.»

Todas las pirámides de Egipto, excepto la de Keops, incorporan, de alguna manera, este triángulo rectángulo en su construcción, el cual añade a su sencillez –que permite una comprobación visual instantánea del Teorema– el hecho de ser el único cuyos lados son enteros consecutivos, teniendo los obtenidos por proporcionalidad los lados en progresión aritmética.



Los agrimensores egipcios utilizaban el triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5, llamado *Triángulo egipcio* a modo de escuadra para trazar líneas perpendiculares. Así nació la profesión de *arpedonapta* –palabra griega traducción de otra egipcia que significa *tendedor de cuerda*–.

Fue precisamente este hecho lo que indujo al gran historiador Herodoto a escribir:

> **«...*A partir de esta práctica, es como se llegó al conocimiento de la Geometría en Egipto en primer lugar, de donde más tarde pasó a Grecia*».**

EL ORIGEN DE LA GEOMETRÍA EN EGIPTO

Los sacerdotes de Egipto dividiendo las tierras. **Fragmento de un fresco de la Biblioteca de El Escorial de P.Tibaldi. 1586.**

Según el Padre Sigüenza, cronista y Prior del Monasterio de El Escorial (Historia de la Orden de San Jerónimo, Madrid,1909, pág. 582):

> «*Los AEGEPTI SACERD son los filósofos de Egipto, los primeros en utilizar los métodos geométricos para medir bien las tierras que riega el Nilo. La Geometría tuvo, pues, en Egipto su principio, porque como el Nilo baña e inunda las tierras con sus crecientes y turba la división de las posesiones y heredades, encargaron a los sacerdotes que se las tornasen a partir de la Geometría, mostrándoles con la razón matemática que no padecían ningún agravio. La Geometría sería así admirada como ciencia justa.*»

También San Isidoro sostiene, en el Libro III de ***Las Etimologías*****, los mismos argumentos acerca del origen de Geometría como instrumento de restitución de la propiedad de la tierra tras las periódicas inundaciones producidas por el desbordamiento del río Nilo (Isidoro de Sevilla,** ***Etimologiarium III, de Mathematica*****, Universidad de León, Cátedra de San Isidoro de la Real Colegiata de León, III.10, pág.25):**

> «*Se cuenta que la ciencia geométrica fue iniciada por los egipcios, ya que, al desbordarse el Nilo y borrarse con el limo los lindes de los campos, se comenzó -y esto dio nombre a esta disciplina- a delimitar mediante líneas y medidas las tierras que debían dividirse. Más tarde esta ciencia llegó a una altura tal, que comenzaron a medirse también los espacios marinos, los del cielo y el firmamento: una vez conocidas las dimensiones de la tierra, los hombres, arrastrados por su afán de estudio, emprendieron la investigación de los ámbitos del cielo* [...]. *Pero como esta ciencia tuvo su inicio en la medición de la tierra, conservó por ello el nombre de lo que fue su origen. De ahí su denominación de Geometría, derivada de "tierra" y de "medida"*.»

Con anterioridad, Proclo en sus ***Comentarios al Libro I de los Elementos de Euclides*****, escribe:**

> «[...] *Muchos autores creen que la Geometría que nació de la medida de los campos, la inventaron los egipcios porque necesitaban medirlos, ya que los desbordamientos del Nilo borraban los límites de las propiedades* [...].»

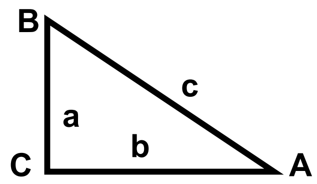
La mención explícita de la relación pitagórica aparece en Egipto en cuatro casos numéricos concretos proporcionales a los del ***Triángulo egipcio*** **–$1^2+(3/4)2=(1\frac{1}{4})^2$, $8^2+6^2=10^2$, $2^2+(1\frac{1}{2})^2$, $16^2+12^2=20^2$– en un papiro de la XII dinastía –hacia el 2000 a.C.– encontrado en Kahun.**

El Teorema de Pitágoras en la India

Como resultado de la planificación de templos y de la construcción de altares, entre los siglos octavo y segundo a.C, en la India se desarrollan conocimientos aritmético–geométricos, prácticos y primitivos, relacionados con el Teorema de Pitágoras. Todo este venerable saber adoptó la forma de un cuerpo de doctrina conocido por el nombre de «*Sulvasutras*» o «*Manual de las reglas de la cuerda*». *Sulva* es un término que se refiere a las cuerdas utilizadas para realizar mediciones, pues la India tuvo también, como Egipto, los «*tensadores de la cuerda*», mientras que el término *sutra* hace referencia a un libro de reglas o aforismos relativos a un determinado ritual o a una ciencia. Así pues, los *Sulvasutras* hindúes eran una especie de manuales donde se detallaban prescripciones para la construcción ritual de altares de forma y tamaño determinados.

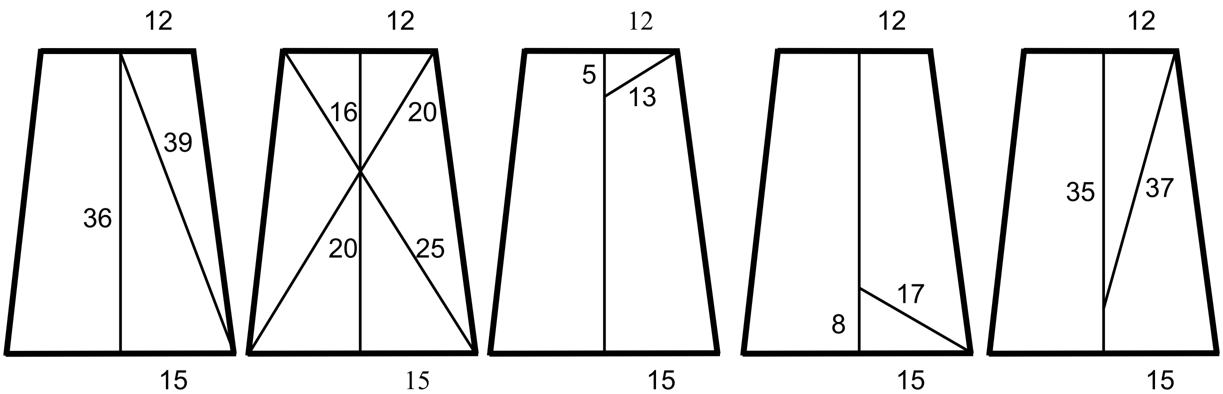
Los *Sulvasutras* más interesantes son los de Baudhayana y Apastamba que pueden remontarse al siglo V a.C. En ellos se describe el uso de la cuerda no sólo para medir, sino también para el trazado de líneas perpendiculares, por medio de ternas de cuerdas cuyas longitudes constituyen ternas pitagóricas tales como 3,4,5; 5,12,13; 8,15,17; 7,24,25. Aunque para este fin se utilizaba sobre todo el triángulo de lados 15, 36 y 39 –derivado del triángulo de lados 5, 12 y 13, llamado el «*Triángulo indio*» de forma similar al *Triángulo egipcio*–. Las ternas pitagóricas son clasificadas en la forma siguiente:

c – b = 1			c – b = 2			c – b = 3		
a	**b**	**c**	**a**	**b**	**c**	**a**	**b**	**c**
3	4	5	8	15	17	15	36	39
5	12	13	12	35	37			
7	24	25						



Ternas pitagóricas de los hindúes

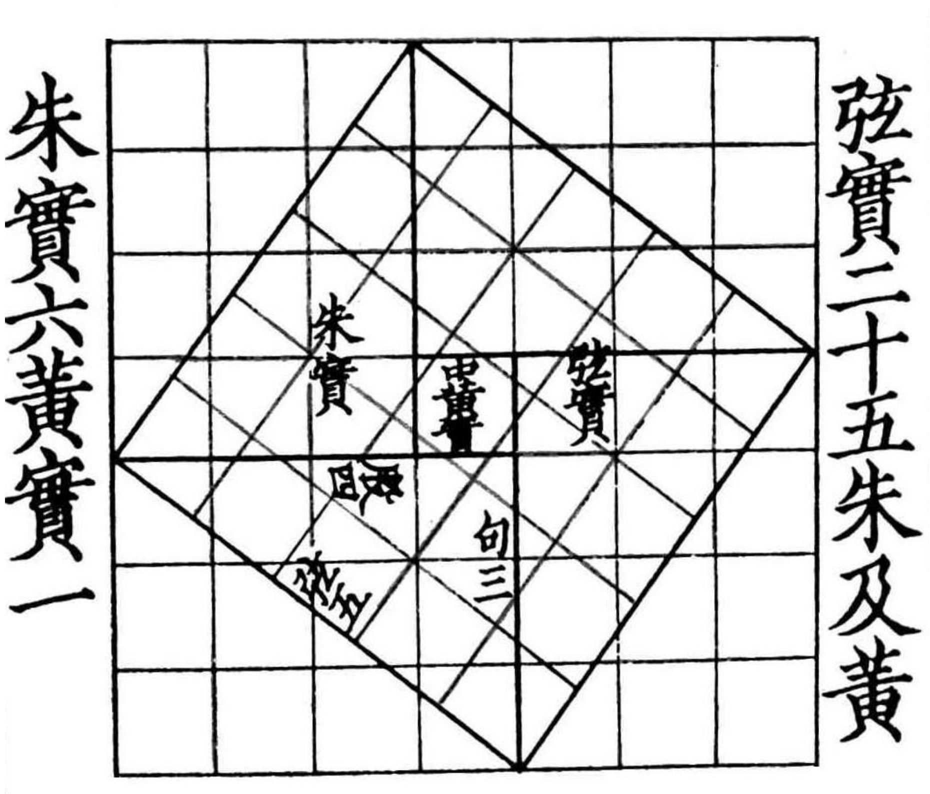
Resulta difícil valorar la originalidad de los conocimientos sobre el Teorema de Pitágoras en la India. El hecho cierto de que todas las ternas pitagóricas que aparecen en los *Sulvasutras* se puedan derivar fácilmente de la vieja regla babilónica para construirlas, permite asegurar la influencia mesopotámica sobre el saber hindú acerca del tema.



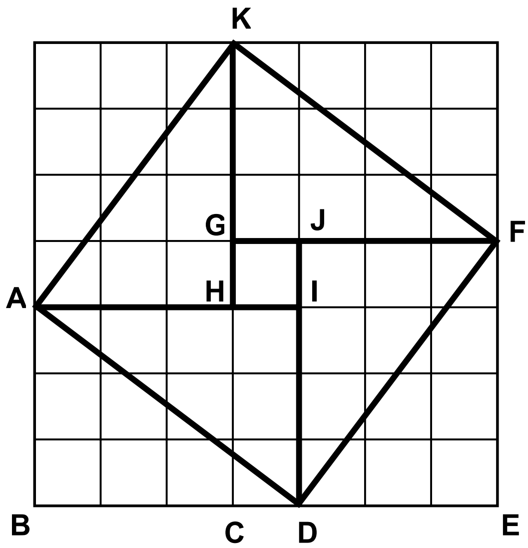
Trazas de los altares trapezoidales del *Sulvasutra* de Apastamba (siglo V a.C.) con indicación de las ternas pitagóricas utilizadas en la construcción ritual.

El Teorema de Pitágoras en China

Aspectos geométricos vinculados al Teorema de Pitágoras aparecen en dos tratados clásicos chinos de contenido matemático. Se tratan de el *Chou-Pei Suan-Ching* (*Aritmética clásica del gnomon y estudio de las órbitas circulares en los cielos*), de cronología muy incierta, probable en torno al año 300 a.C., y el *Chui-Chang Suang-Shu* (*Nueve capítulos sobre el arte matemático*), fechado hacia el año 250 antes de J.C. Todo lo que se conoce en la literatura china antigua relativo al Teorema de Pitágoras, está incluido en estas obras, las cuales, muy probablemente, son el resultado de la recopilación de conocimientos añadidos sucesivamente en muy diversas épocas anteriores a las fechas citadas. Su contenido fue sustancialmente ampliado y desarrollado por dos comentaristas del siglo III de nuestra era, Zho-Shuang y Liu-Hui. Los tratados originales tratan los aspectos primitivos del Teorema, es decir los resultados numéricos concretos, así como las leyes generales de formación de las ternas pitagóricas, mientras que los aspectos más evolucionados de la demostración son elaborados por Zhao y Liu.



El Diagrama de la hipotenusa* del tratado Chino *Chou-Pei Suan-Ching* (300 a.C.) ilustra empíricamente una prueba del *Teorema de Pitágoras.



La parte más antigua del *Chou-Pei Suan-Ching* se abre con una discusión sobre triángulos rectángulos, pero lo más destacable es la descripción de una figura llamada «*Diagrama de la hipotenusa*». La porción inferior de este diagrama, el hexágono AHGFEB, se compone de dos cuadrados AHCB y CEFG que tienen por lados, los catetos del triángulo rectángulo. Este área es equivalente al cuadrado ADFK sobre la hipotenusa del triángulo, de donde resulta el Teorema de Pitágoras.

Esta elegante prueba del Teorema de Pitágoras es implícitamente dada por Zhao, pero naturalmente no aparece así en el *Chou-Pei* original. Aquí con un lenguaje muy retórico describe la figura, en términos estrictamente numéricos, diciendo:

> «*En cada semirectángulo de anchura 3 y longitud 4, la diagonal debe valer 5, y si se resta del cuadrado total de área 49 los cuatro semirectángulos exteriores, que suman área 24, el resto es un cuadrado de área 25.*»

El *Chui-Chang Suang-Shu* contiene 246 problemas de los cuales los 24 del capítulo noveno y último se refieren a triángulos rectángulos. Todas las soluciones a los problemas se basan de una u otra forma en el Teorema de Pitágoras.

El más famoso es «*el problema del bambú roto*»:

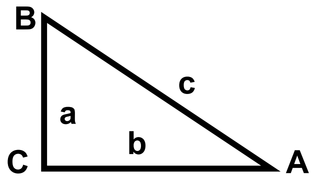
> «*Hay un bambú de diez pies de altura, que se ha roto de tal manera que su extremo superior se apoya en el suelo a una distancia de tres pies de la base. Se pide calcular a qué altura se ha producido la rotura*»,

donde se combina el Teorema de Pitágoras con la resolución de ecuaciones cuadráticas, ya que el problema supone resolver la ecuación: $x^2 + 3^2 = (10-x)^2$.

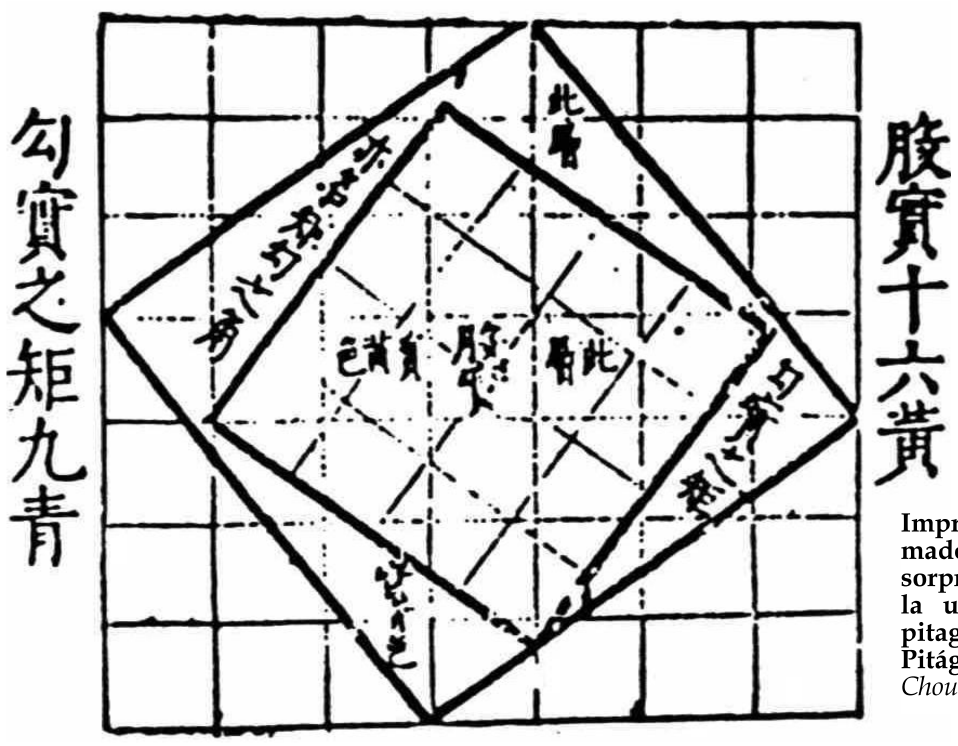
En muchos otros problemas se aplica proporcionalidad a partir de la consideración de ternas de números –llamadas *ternas pitagóricas de los chinos*– y que se obtienen a partir de las leyes de formación siguientes:

$$\left\{\begin{aligned} a &= u \cdot v \\ b &= \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \\ c &= \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \end{aligned}\right\}$$

u	v		a	b	c
3	1		3	4	5
5	1		5	12	13
5	3		15	8	17
7	1		7	24	25
7	3		21	20	29



Ternas pitagóricas de los chinos



Impresión china en placa de madera de una figura de sorprendente parecido con la utilizada en la prueba pitagórica del Teorema de Pitágoras, que aparece en el *Chou-Pei Suan-Ching*

EL PROBLEMA CHINO DEL *BAMBÚ ROTO*

冪令如高而一凡爲高一丈爲股弦并之
差所得以減竹高而半其餘卽折者之高
索之類更相返覆也亦可如上術令高自
冪去本自乘爲矩冪減之餘爲實倍高爲
高數也

股弦和與勾求股法曰勾自乘爲實變股

El problema chino del *bambú roto*, en el texto *Xiangjie Jiuz-Hang Suanf* (1261) de Yang-Hui.

El famoso problema chino del *bambú roto* procede del tratado *Chui-Chang Suang-Shu* (*Nueve capítulos sobre el arte matemático*), que data del año 250 a.C.

La cuestión se plantea en el ámbito de la resolución de problemas algebraicos recreativos de segundo grado y es una excelente combinación del Teorema de Pitágoras con la resolución de ecuaciones cuadráticas.

El Teorema de Pitágoras en el mundo griego

Las demostraciones de Pitágoras

Diógenes Laercio en su *Vida de los más ilustres filósofos griegos* recoge (*Pitágoras* VIII.7) una referencia de un tal Apolodoro «*El Calculador*» sobre Pitágoras, en la que asegura que este filósofo sacrificó una hecatombe –cien bueyes–, habiendo hallado que en un triángulo rectángulo «*la potestad de la línea hipotenusa es igual a la potestad de las dos que lo componen*». Continua diciendo que Apolodoro compuso un epigrama en verso: «*Pitágoras hallada / aquella nobilísima figura /bueyes mató por ello en sacrificio*».

También Vitrubio escribe en el *Los diez libros de la Arquitectura* (Libro IX,Cap.2):

> «*Pitágoras halló y demostró teóricamente la forma de la escuadra, consiguiéndose por su raciocinio y método una escuadra perfecta: coda que los artífices, después de mucho trabajo, apenas pueden lograr. Porque si se toman tres reglas, una larga de tres pies, otra de cuatro, y la tercera de cinco, adaptándolas de forma que se toquen unas a otras por sus extremidades en figura de triángulo, se tendrá una escuadra perfecta*. [...] *Cuando Pitágoras halló esto, no dudando que las musas le habían iluminado en su invención, dicen que las hizo sacrificios en acción de gracias*.»

Asimismo, Proclo, en sus *Comentarios al Libro I de los Elementos de Euclides* da cuenta de la invención pitagórica y del sacrificio ofrecido:

> «*Si escuchamos a los que gustan recordar a los antiguos, encontraremos que ellos atribuyen este teorema a Pitágoras y dicen que sacrificó un buey cuando lo descubrió*.»

EL TEOREMA DE PITÁGORAS, LAS DOCTRINAS PITAGÓRICAS Y EL SACRIFICIO DE LOS BUEYES

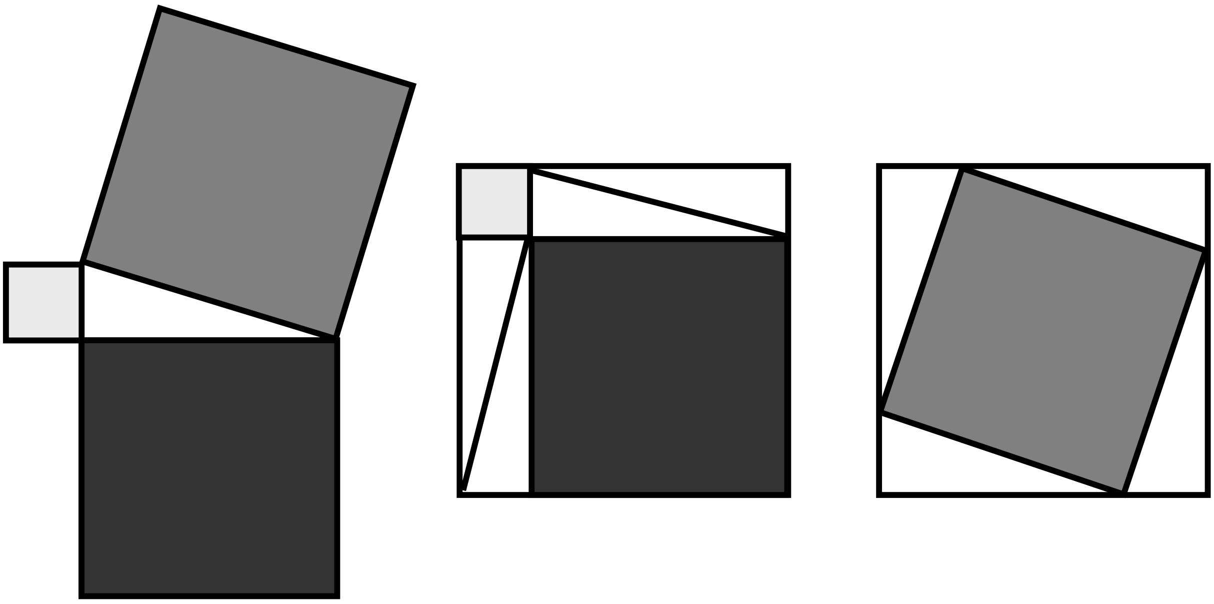
Pitágoras. Grabado del siglo XVI.

Según relatos de diversos escritores –Diógenes Laercio, Vitrubio, Plutarco, Ateneo, Proclo y otros– Pitágoras se dio cuenta del alcance de la demostración del teorema al que la historia bautizaría con su nombre y entusiasmado por el hallazgo ordenó una hecatombe –el sacrificio de cien bueyes a los dioses– como muestra de alegría y gratitud.

Pero según *Los Versos Dorados* (*VD*), síntesis de la enseñanza pitagórica, la metempsicosis o transmigración de las almas era una de las creencias más arraigadas en la comunidad pitagórica. De acuerdo con ella, la esencia del hombre, el alma, es inmortal (*VD*, 63), aunque temporalmente viva prisionera en un cuerpo perecedero, y a través de consecutivos procesos de purificación (*VD*, 66, 67), vaya transmigrando de cuerpo en cuerpo –de hombre o de animal– hasta desprenderse totalmente de toda impureza carnal (*VD*, 70) y escapar del ciclo de reencarnaciones para alcanzar la beatitud final fundiéndose con el alma universal, eterna y divina, a la que por su propia naturaleza pertenece (*VD*, 71). Ahora bien, el proceso de purificación y salvación del alma puede acelerarse mediante el uso de los poderes de la razón y la observación para la obtención del conocimiento (*VD*, 68, 69), es decir, mediante la Filosofía.

Esta doctrina pitagórica exigía un escrupuloso respeto a la vida animal lo que obligaba a abstenerse de comer carne y hacer sacrificios. Por tanto las anécdotas sobre presuntos sacrificios deben de ser apócrifas, ya que contradicen la filosofía religiosa pitagórica sobre la transmigración de las almas, pero han contribuido a magnificar el halo legendario, casi hagiográfico, que envuelve al personaje de Pitágoras, y, además, determinaron que en la Edad Media al *Teorema de Pitágoras* se le llamara «*Inventum hecatombe dignum*».

Ha habido muchas conjeturas en torno a la naturaleza de las presuntas pruebas de Pitágoras del Teorema asociado con su nombre. La tradición establece que Pitágoras habría dado una prueba empírica del Teorema del tipo disección con base en las figuras siguientes:



Consideremos los dos cuadrados iguales de la derecha de la figura. El primero de ellos se disecciona en seis piezas: los dos cuadrados sobre los catetos y cuatro triángulos rectángulos congruentes con el triángulo dado. El segundo cuadrado se disecciona en cinco piezas: el cuadrado sobre la hipotenusa y otra vez cuatro triángulos rectángulos congruentes con el triángulo dado. Si ahora sustraemos a los dos cuadrados considerados los aludidos cuatro triángulos rectángulos congruentes con el triángulo dado, resulta que *el cuadrado sobre la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados sobre los catetos*.

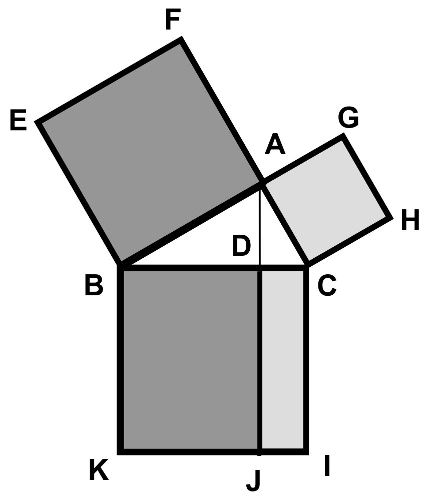
La prueba descrita requiere la comprobación de que la pieza central de la segunda disección es realmente un cuadrado de lado la hipotenusa del triángulo rectángulo dado, lo cual depende del hecho de que

> «*la suma de los ángulos de un triángulo rectángulo es igual a dos ángulos rectos*» (*Euclides*, I.32),

proposición que para un triángulo general se atribuye a Pitágoras o a los Pitagóricos. Puesto que a su vez una prueba general de este resultado geométrico requiere un conocimiento de algunas propiedades del paralelismo, se imputa a los primeros pitagóricos el desarrollo, al menos preliminar, de esa teoría.

Muchos historiadores admiten que la demostración de Pitágoras se basaría en su propia *Teoría de las Proporciones* –imperfecta por aplicarse sólo a cantidades conmensurables–, de modo que la prueba de Pitágoras podría haber sido alguna de las dos siguientes :

Sea ABC un triángulo rectángulo, con el ángulo recto en A, y sea AD perpendicular al lado BC. Según *Euclides* VI.8 los triángulos DBA y DAC son ambos semejantes con el triángulo ABC y semejantes entre sí.



- Prueba 1. De la semejanza de los triángulos ABC, DBA y DAC resulta:

  BA/BD = BC/BA , AC/CD = BC/AC (*Euclides* VI.4).

De aquí se obtienen las expresiones del llamado «*Teorema del cateto*»:

$BA^2 = BD \cdot BC$, $AC^2 = CD \cdot BC$,

de donde al sumar las dos expresiones, se obtiene:

$BA^2 + AC^2 = (BD+CD) \cdot BC = BC \cdot BC = BC^2$,

es decir:

$BA^2 + AC^2 = BC^2$.

En esta demostración del *Teorema de Pitágoras* –basada en el *Teorema del cateto*–, se descompone, de forma implícita, el cuadrado sobre la hipotenusa, BCIK, en dos rectángulos, BDJK y DCIJ, cada uno de ellos con el mismo área que cada uno de los cuadrados construidos sobre los catetos –el rectángulo BDJK de área como el cuadrado ABEF sobre el cateto AB –ya que $BA^2=BD \cdot BK$, y el rectángulo DCIJ de área como el cuadrado ACHG sobre el cateto AC –ya que $AC^2 = CD \cdot CI$–.

Debemos observar que la figura exhibida forma parte de la figura que utiliza Euclides en su demostración del *Teorema de Pitágoras* en la Proposición I.47 de *Los Elementos* de Euclides, y además, puntualizar que variantes de esta prueba se encuentran en el hindú Bhaskara, en Leonardo de Pisa (Fibonacci) y en Wallis.

- Prueba 2. De la semejanza de los triángulos ABC, DBA y DAC resulta, según *Euclides* VI.19 («*la razón entre las áreas de los triángulos semejantes será igual al cuadrado de la razón de semejanza*»): $DBA/AB^2 = DAC/AC^2 = ABC/BC^2$

pero de las propiedades de la suma de proporciones (*Euclide*s 5.12) resulta:

$ABC/BC^2 = DBA/AB^2 = DAC/AC^2 = (DBA+DAC)/(AB^2+AC^2) = ABC/(AB^2+AC^2)$

por tanto se tiene:

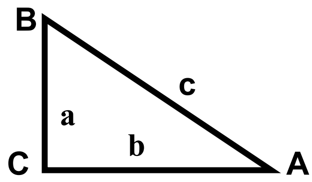
$AB^2+AC^2 = BC^2$.

Como vemos, estas pruebas del *Teorema de Pitágoras* mantienen su plena vigencia en los libros de texto de matemáticas escolares elementales.

Los pitagóricos buscaron ávidamente el camino para obtener ternas de números a,b,c, cumpliendo $a^2+b^2=c^2$, encontrando una ley de formación que se puede expresar en la forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} a = m, \text{ m impar} \\ b = \frac{1}{2}(m^2 - 1) \\ c = \frac{1}{2}(m^2 + 1) \end{array} \right\}$$

m	a	b	c
3	3	4	5
5	5	12	13
7	7	24	25
9	9	40	41
11	11	60	61
13	13	84	85



Ternas pitagóricas de Pitágoras

En las «*Ternas pitagóricas de Pitágoras*» la hipotenusa y el cateto mayor se diferencian en una unidad. Además, para m=3 resulta el «*Triángulo egipcio*», mientras que para m=5 resulta el origen del «*Triángulo indio*».

EL TEOREMA DE PITÁGORAS. LA DEMOSTRACIÓN Y EL MILAGRO GRIEGO EN MATEMÁTICAS

1. **Busto de Pitágoras en bronce. s.IV a.C. Museo Nacional. Nápoles.**
2. **Página de *Los Elementos de Euclides* alusiva a la Proposición I.47 –Teorema de Pitágoras– en un manuscrito del siglo IX de la Colección Vaticana (*Vat. gr. 190, vol. 1 fol.. 39 recto math01 NS.01*).**

El filósofo neo-platonico Proclo (siglo V d.C.) en sus *Comentarios al Libro I de los Elementos de Euclides* da unas valiosísimas referencias biográficas y bibliográficas, que constituyen un resumen sumario de la historia de las Matemáticas griegas desde los orígenes hasta Euclides, y que tiene la excepcional importancia de ser uno de los escasos documentos escritos sobre los primeros matemáticos griegos. Sobre Pitágoras escribe:

> **«*Pitágoras transformó la doctrina de Tales en enseñanza liberal, examinó desde lo alto los principios de la Geometría, investigó los teoremas de un modo inmaterial e intelectual y descubrió la dificultad de los números irracionales y la construcción de las figuras cósmicas* [poliedros]».**

Según Proclo, Pitágoras marca un hito en la historia de la Matemática, porque transformó el saber geométrico en disciplina puramente teórica, investigando los teoremas de manera inmaterial y abstracta, es decir sin instrumentos ni mediciones materiales, sin referencia a materiales concretos y sólo por medio de la intuición de ideas y del discurso mental, dando el gran salto cualitativo, que supone el verdadero nacimiento en Grecia de las Matemáticas como ciencia especulativa y deductiva, más allá de la práctica empírica e inductiva de las civilizaciones del próximo, medio y lejano oriente. Con Pitágoras podemos hablar del *Milagro griego en Matemáticas* como parte del milagro que supuso la inflexión radical que realizaron los griegos en el ámbito general de la Cultura y el Pensamiento.

En concreto respecto del Teorema atribuido por tradición a Pitágoras, digamos que éste realiza la primera demostración del mismo. Entre la ley general que establece el Teorema y los casos específicos de la Geometría babilónica, egipcia, hindú o china, hay el abismo que media entre un instrumento primitivo que no se pregunta cómo funciona y un mecanismo universalmente aplicable. El aporte esencialmente original es que el Teorema da una verdad general y universal independiente de los particulares valores de los lados del triángulo rectángulo.

La prueba pitagórica del llamado Teorema de Pitágoras pudo ser tal vez, la primera demostración verdaderamente matemática de la Historia. He aquí pues, en la demostración, la aportación fundamental del Pitagorismo a la Matemática, valorado siempre muy por encima de sus magníficas contribuciones particulares en ámbitos concretos de esta ciencia, siendo considerada, además, la demostración, como elemento esencial en el tránsito del mito al logos que tiene lugar en la cultura griega. La demostración va mucho más allá de la mera persuasión de la Retórica en la que los griegos eran grandes maestros, pues es posible con persuasión argüir lo falso contra lo verdadero –de ahí los reproches de Sócrates hacia los sofistas–. La demostración convence por la ilación argumental incontrovertible que alcanza algo legítimo mientras no se pongan en entredicho las leyes de la lógica. Por eso a partir de Pitágoras la Matemática es universalmente considerada como un manantial primario de verdad objetiva.

EL TEOREMA DE PITÁGORAS. LA DEMOSTRACIÓN Y EL MILAGRO GRIEGO EN MATEMÁTICAS

Dibujo a plumilla de la estatua de Pitágoras situada en la Puerta derecha de la fachada oeste de la Catedral de Chartres.

Sobre la importancia histórica del *Teorema de Pitágoras* como origen de la aparición del fenómeno de la demostración que en el mundo griego dará carta de naturaleza a la Geometría racional, y por ende al verdadero nacimiento en Grecia de las Matemáticas como ciencia especulativa y deductiva, transcribimos unas significativas citas de dos importantes historiadores de la Matemática:

Abel Rey (*El apogeo de la ciencia técnica griega,* UTEHA, México, 1962. Vol.1. pp.11, 13):

> ***«La demostración guió a los pitagóricos. Desde entonces el método y la actitud del pensamiento son búsqueda de lo necesario y de lo universal, y el Teorema de Pitágoras, en primer lugar, sirve en esto de completa ilustración.»***
>
> ***«La universalidad del teorema de Pitágoras y la invención de la demostración geométrica son las hadas que vemos en torno a la cuna de la Geometría griega, del milagro griego en matemática y del espíritu científico que ha llegado hasta nosotros.»***

H.G.Zeuthen. (*Théorème de Pythagore, origine de la Géométrie scientifique,* II Congreso internacional de Ginebra, 1904).

> ***«El Teorema de Pitágoras constituyó el origen de la Geometría racional en la Escuela Pitagórica y las deducciones que paulatinamente fue realizando la Escuela, tuvieron por objeto lograr una demostración general del teorema, advertida su verdad en casos particulares. »***

ALEGORÍA DEL *TEOREMA DE PITÁGORAS* Y LOS PITAGÓRICOS ACUSMÁTICOS Y MATEMÁTICOS

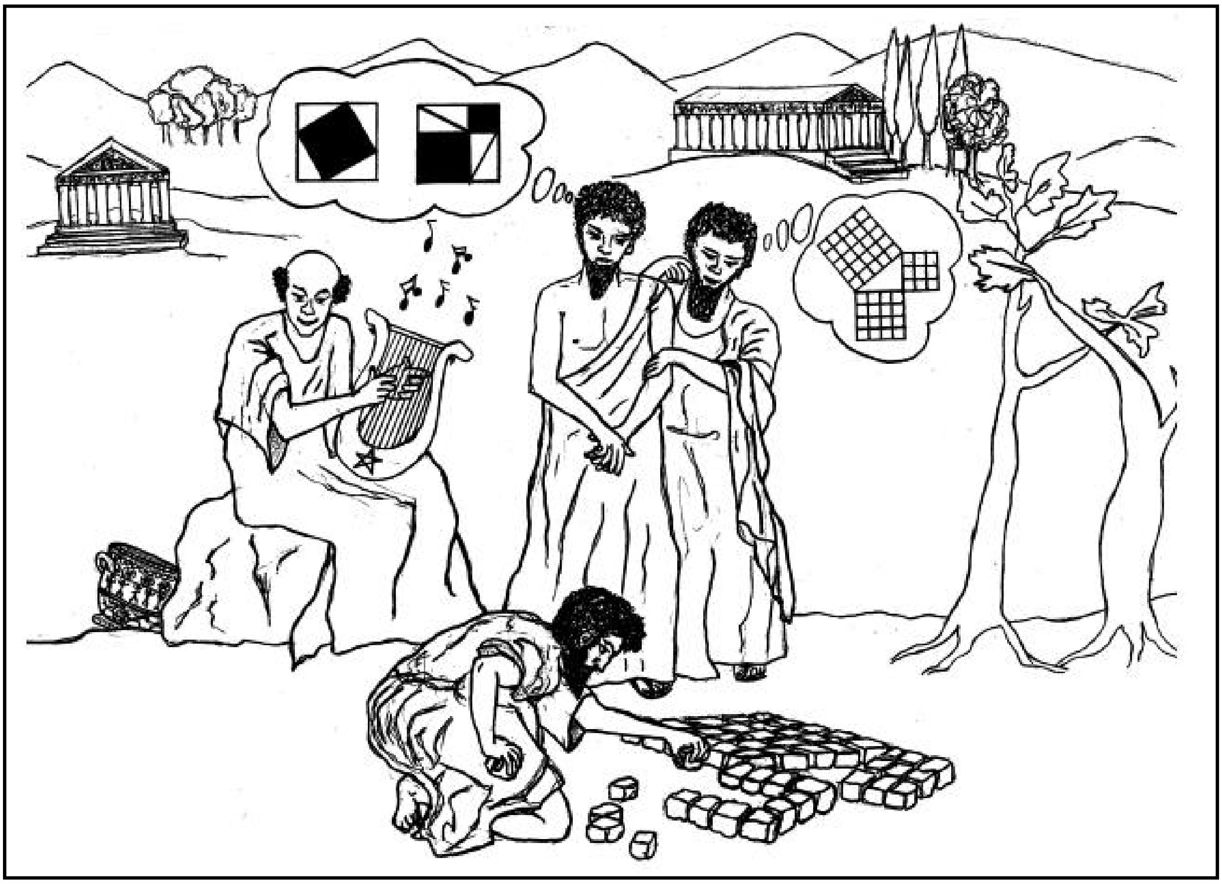


Ilustración realizada por Pedro Lario Cruz (Mayo, 2000) que alegoriza la actividad práctica y especulativa de los pitagóricos en torno al *Teorema de Pitágoras*.

Entre la dimensión de lo sensible –construcción con guijarros del *Triángulo egipcio*– y la esfera de lo intelectual –demostración del *Teorema de Pitágoras*– los pitagóricos desarrollan, como miembros de una comunidad de carácter científico, filosófico, místico y religioso, actividades que persiguen el conocimiento del Cosmos como universo ordenado por el maravilloso poder de la armonía matemática y musical.

Pitágoras desarrolló en su comunidad dos modos de enseñanza, que darían lugar según Jámblico (*Vida Pitagórica*, XVIII.80–87) a dos tipos de miembros en la primitiva comunidad pitagórica:

- **Los *Matemáticos* («*conocedores*»), jóvenes especialmente dotados para el pensamiento especulativo abstracto generador del conocimiento científico y matemático, y creadores de ideas, conceptos y demostraciones.**
- **Los *Acusmáticos* («*auditores*»), hombres más maduros y más simples, pero igualmente valiosos y virtuosos, que reconocían la verdad de forma intuitiva a través de los sentidos, los dogmas y las creencias, y basaban su sabiduría en principios indemostrables, sentencias y aforismos.**

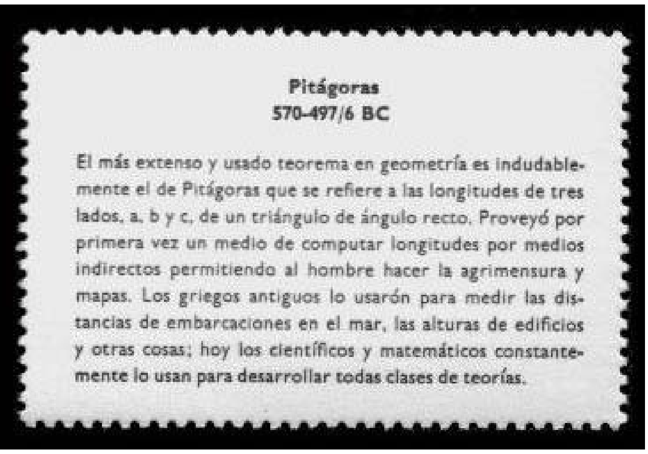
Porfirio es más explícito cuando define los dos tipos de pitagóricos –*Matemáticos* y *Acusmáticos*– independientes de su edad (*Vida de Pitágoras*, 37):

> «*Matemáticos eran los que él* [Pitágoras] *había adiestrado en las partes más profundas y eran instruidos con rigor acerca del fundamento de la ciencia. Los Acusmáticos, en cambio, atendían sólo a instrucciones compendiadas de los escritos, sin una descripción rigurosa.*»

Pitágoras y los pitagóricos *matemáticos* fueron los primeros en someter la Matemática a la exigencia de la rigurosa deducción lógica. La evidencia sensible que concluía para los *acusmáticos* en una receta útil se manifiesta, para los *matemáticos*, insuficiente en el plano de las necesidades racionales, lo que obliga a trascender lo que hasta entonces era la práctica empírica sobre los casos particulares y desarrollar métodos deductivos para demostrar de forma general. Cierto que en muchas ocasiones la comprobación geométrico-empírica de carácter inductivo de los *acusmáticos* puede satisfacer el espíritu y producir resultados visualmente palmarios, como ocurre en la inmensa parafernalia de fórmulas aritméticas que los propios pitagóricos obtienen con el atomismo numérico-geométrico de los números poligonales, pero hay problemas de la Matemática como el propio *Teorema de Pitágoras* en los que sólo una rigurosa demostración, como acto intelectual puro, más allá de la intuición sensible, puede resultar satisfactorio.

PITÁGORAS Y SU TEOREMA EN LOS SELLOS DE CORREOS

Sellos emitidos en Grecia el 20 de agosto de 1955 con ocasión de un Congreso sobre Pitágoras conmemorativo del 2500 aniversario de la fundación de la primera Escuela de Filosofía de la historia. El primero representa al propio Pitágoras retratado en una moneda encontrada en Samos y el segundo es una imagen visual del Teorema de Pitágoras aplicado al sagrado *triángulo egipcio*.

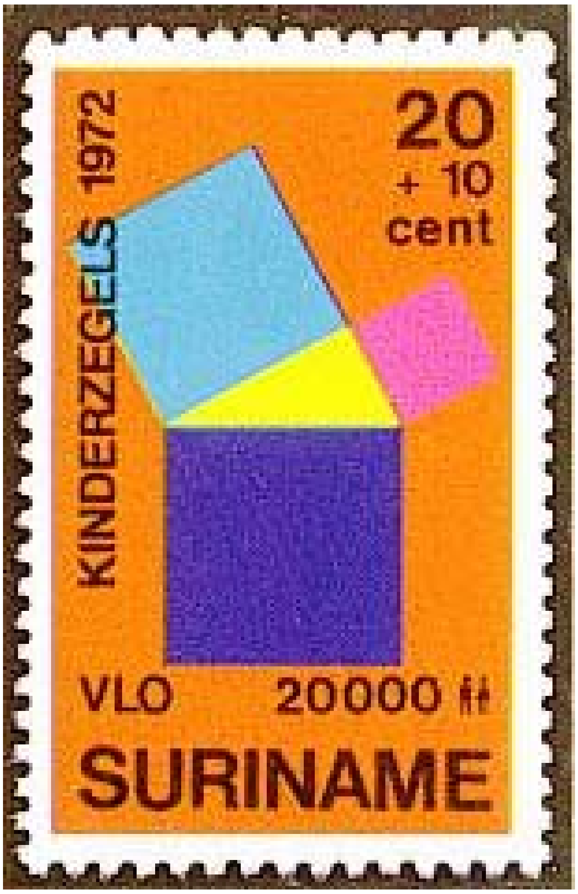


Sello de correo nicaragüense, emitido el 15 de mayo de 1971 que representa la famosa *Ley de Pitágoras*, considerada como una de «*las diez fórmulas matemáticas que cambiaron la faz de la tierra*».

En su interesante obra, *Great Moments in Mathematics*, H.Eves (The mathematical association of America, 1977. Cap.4, pp.39–40) escribe:

> ***«En 1971 Nicaragua emite una serie de sellos en homenaje a las "diez fórmulas matemáticas más importantes". Cada sello lleva una fórmula particular acompañada de una apropiada ilustración y en su reverso aparece un breve texto en español que comenta la importancia de la fórmula. Uno de los sellos de la serie honra la relación pitagórica. Debe ser muy grato para los científicos y los matemáticos ver esas fórmulas tan ponderadas, ya que ellas han contribuido al desarrollo humano mucho más que los generales y reyes tan frecuentemente estampados en los sellos.»***

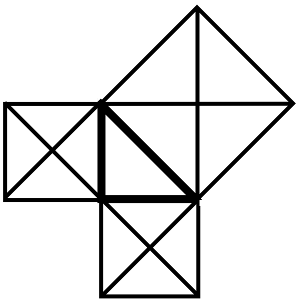
EL TEOREMA DE PITÁGORAS EN LOS SELLOS DE CORREOS

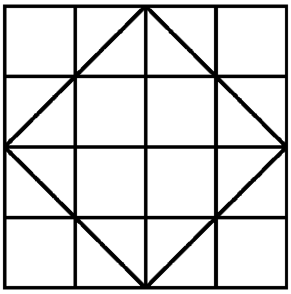


1. El *Teorema de Pitágoras*. Surinam, 1972.
2. El famoso audiovisual *Donald en el país de las Matemáticas*. Sierra Leona.
3. El *Teorema de Pitágoras.* Japón, 1984.
4. El *Teorema de Pitágoras* y otras expresiones. Sello conmemorativo del Día de la Educación en Israel.
5. El *Teorema de Pitágoras*. Macedonia, 1988.
6. El *Teorema de Pitágoras*. Matasellos croata conmemorativo del año 2000 de las Matemáticas.

El Teorema de Pitágoras en la Academia Platónica

El Teorema de Pitágoras en el caso particular del triángulo rectángulo isósceles aparece en el diálogo *El Menón* (82d–83e) de Platón a propósito del problema de la «*duplicación del cuadrado*» que es la antesala del famoso problema *délico* de la duplicación del cubo. Curiosamente Platón utiliza el problema para sustentar la doctrina de la reminiscencia. Sócrates y un esclavo mantienen una conversación, en la que mediante una concatenación de preguntas de aquél, entrelazadas heurísticamente con las respuestas de éste, se resuelve el problema. Las primeras respuestas del esclavo son de índole aritmética, pero «*resultando la imaginación aritmética inexacta*», Sócrates reconducirá el diálogo, induciendo un tratamiento exclusivamente geométrico.

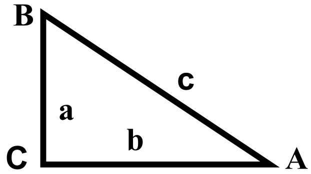




En la búsqueda de *ternas pitagóricas*, Platón encontró una ley de formación que se puede expresar en la forma:

$$\left\{\begin{array}{l} a = 2m \\ b = (m^2 - 1) \\ c = (m^2 + 1) \end{array}\right\}$$

m	a	b	c
2	4	3	5
3	6	8	10
4	8	15	17
5	10	24	26
6	12	35	37

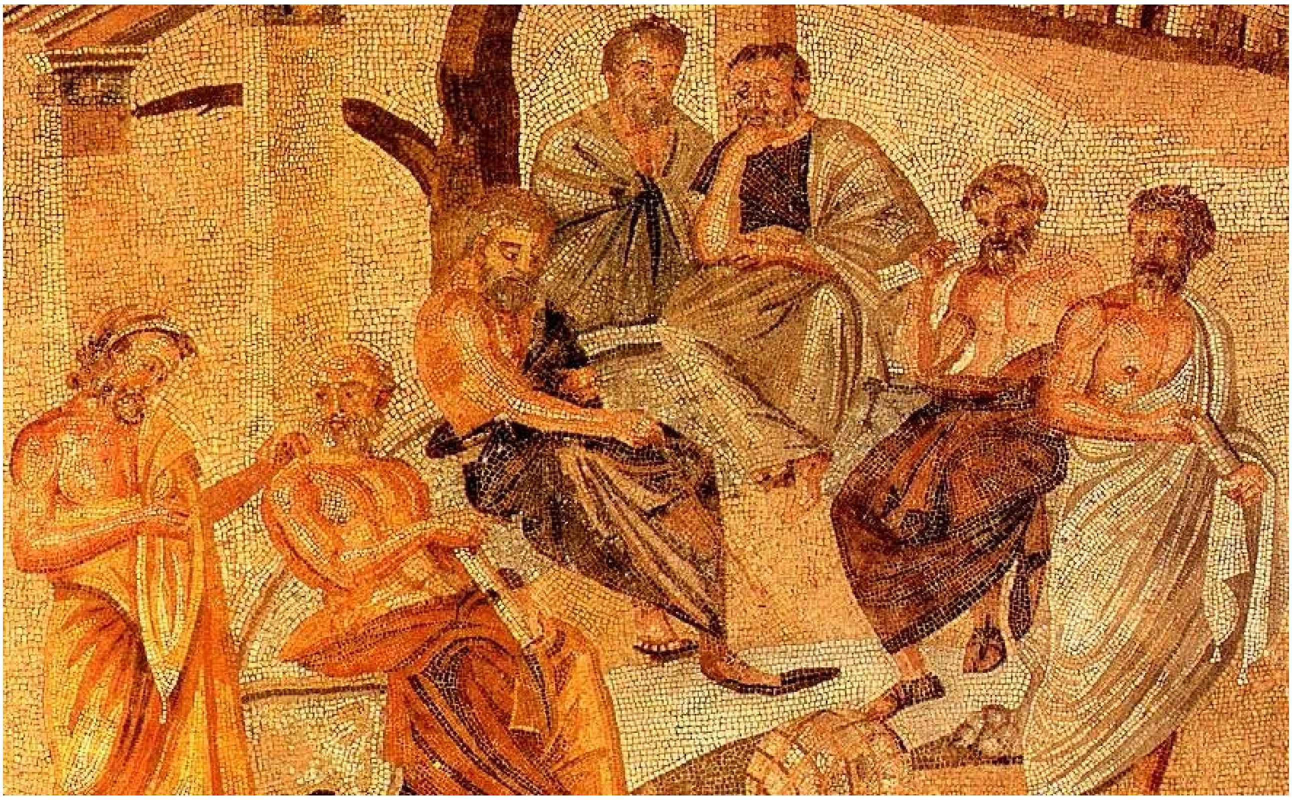


Ternas pitagóricas de Platón

En las «*Ternas pitagóricas de Platón*» la hipotenusa y uno de los catetos se diferencian en dos unidades.

1. **Platón. Museo Pío Clementino. Vaticano.**
2. **Restos arqueológicos de *La Academia* platónica en los alrededores de Atenas. Se cuenta que en el frontispicio de la entrada de *La Academia* había una inscripción que rezaba: «*No entre nadie ignorante en Geometría*».**

LA MATEMÁTICA DE LA ACADEMIA PLATÓNICA



Platón dando una lección de Geometría a sus discípulos en *La Academia de Atenas* (Mosaico procedente de Pompeya. Mansión de Siminio Estéfano, siglo I a.C. Museo Arqueológico, Nápoles). Según otras interpretaciones, este mosaico podría representar a los Siete Sabios de Grecia.

Con la fundación en 387 a.C. de *La Academia de Atenas*, Platón crea el centro más importante de especulación matemática y filosófica de la Antigüedad. Según el testimonio de Proclo –en su *Comentario al Libro I de Los Elementos de Euclides*– todo el desarrollo de la Matemática del siglo anterior a Euclides estuvo dominado por la Academia de Platón, a quien describe como alguien que estimuló a sus discípulos en el estudio de las Matemáticas al incluir con frecuencia textos de contenido matemático en sus obras, despertando la pasión y el encanto por la Geometría en los estudiosos de la Filosofía:

> «*Después de los pitagóricos vivió Platón, que dio a las Matemáticas en general, y a la Geometría en particular, inmenso impulso gracias al celo que desplegó por ellas y del que son testimonio suficiente sus escritos llenos de discursos matemáticos, y que, a cada momento, despiertan el entusiasmo por estas ciencias en aquellos que se entregan a la Filosofía.*»

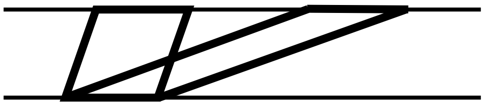
Platón fue efectivamente un gran artífice de numerosos matemáticos a los que Proclo cita a continuación, y atribuye diversas actuaciones en Matemáticas que nos dan una idea de la naturaleza de la Matemática que se desarrolla en la Academia crean bajo la orientación de Platón, y que se resume en los puntos siguientes:

- «*Multiplicaron los teoremas y los pusieron en un orden más sistemático.*»
- «*Añadieron muchas soluciones a los problemas anteriores.*»
- «*Ampliaron considerablemente los conocimientos precedentes y compusieron Elementos muy superiores por el número y por la importancia de las demostraciones.*»
- «*Descubrieron las delimitaciones para saber cuándo es posible resolver un problema que se investiga y cuándo es imposible.*»
- «*Hicieron uso del Análisis para resolver las cuestiones suscitadas por Platón.*»
- «*Perfeccionaron el conjunto de la Geometría al convertir en generales muchas definiciones y proposiciones particulares.*»
- «*Se distinguieron tanto en Matemáticas como en el resto de la Filosofía.*»
- «*Todos estos sabios se reunían en la Academia y realizaban sus investigaciones en común.*»
- «*Realizaron investigaciones siguiendo las instrucciones de Platón planteándose cuestiones acerca de lo que podía contribuir a la Filosofía de su maestro.*»

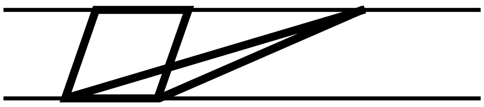
Dos de las cuestiones más relevantes de la Academia platónica son, por una parte, la resolución de la crisis de los inconmensurables mediante la *Teoría de la Proporción* y el *Método de exhaución*, y por otra, la aplicación universal del *Método analítico*, en la investigación de problemas geométricos que alcanzará plenos frutos cuando dos mil años después al aunarse con las técnicas algorítmicas del Álgebra simbólica, produzca la eclosión inexorable de la Geometría Analítica y del Análisis Infinitesimal, los más potentes instrumentos matemáticos que reciben del *Análisis geométrico* griego no sólo el nombre sino también los procedimientos.

El *Teorema de Pitágoras* en *Los Elementos* de Euclides

Euclides enuncia y demuestra el Teorema de Pitágoras en la Proposición I.47 de *Los Elementos*. La demostración de Euclides del Teorema de Pitágoras es una prueba muy elegante, que la tradición se la ha atribuido y que precisa un bagaje considerable de conocimientos geométricos, desarrollados por Euclides en las proposiciones anteriores de *Los Elementos*. La diferencia con la prueba de Pitágoras estriba en que Euclides utiliza las relaciones entre paralelogramos y triángulos con la misma base y situados entre las mismas paralelas, en vez de proporciones que ya no podían ser utilizadas, en forma pitagórica, después del descubrimiento de las magnitudes inconmensurables.

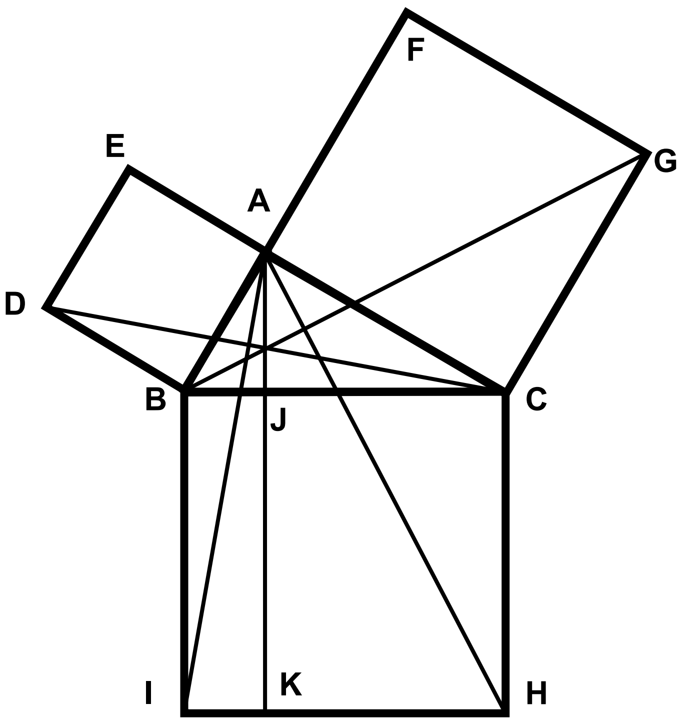


«*Los paralelogramos que tienen la misma base y están situados entre las mismas paralelas tiene el mismo área*» (*Euclides* I.36).



«*Si un paralelogramo tiene la misma base que un triángulo y están situados entre las mismas paralelas el área del paralelogramo es doble de la del triángulo*» (*Euclides* I.41).

Parece que Euclides está ansioso de situar lo más pronto posible el Teorema de Pitágoras en *Los Elementos*, ante la perentoria necesidad de utilizarlo ulteriormente con asiduidad, pero ante la imposibilidad de aplicar de forma tan temprana la *Teoría de la Proporción* de Eudoxo que será desarrollada en los Libros V y VI, basándose en las proposiciones descritas (I.36, I.41), realiza, con una estética inefable y con un ingenio sublime, la siguiente demostración:



- Los triángulos DCB y ABI son iguales ya que AB=BD, BI=BC y el ángulo B del triángulo DCB es igual al ángulo B del triángulo ABI.
- El área del cuadrado ABDE es doble del área del triángulo DCB ya que tienen la misma base y están situados entre las mismas paralelas.
- El área del rectángulo BIKJ es doble del área del triángulo ABI ya que tienen la misma base y están situados entre las mismas paralelas.

De modo que se verifica:

▭BIKJ=2ΔABI=2ΔDCB=□ABDE

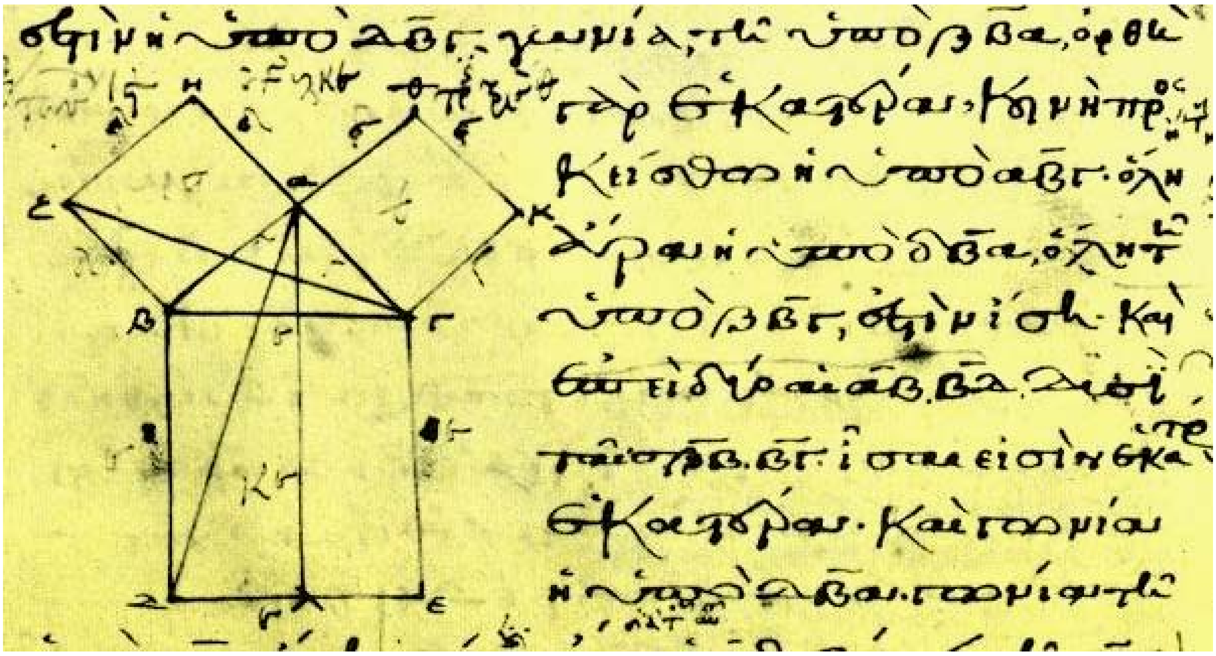
Razonando de forma análoga se tiene:

▭CHKJ=2ΔAHC=2ΔBCG=□ACGF.

De donde resulta: □ABDE + □ACGF =

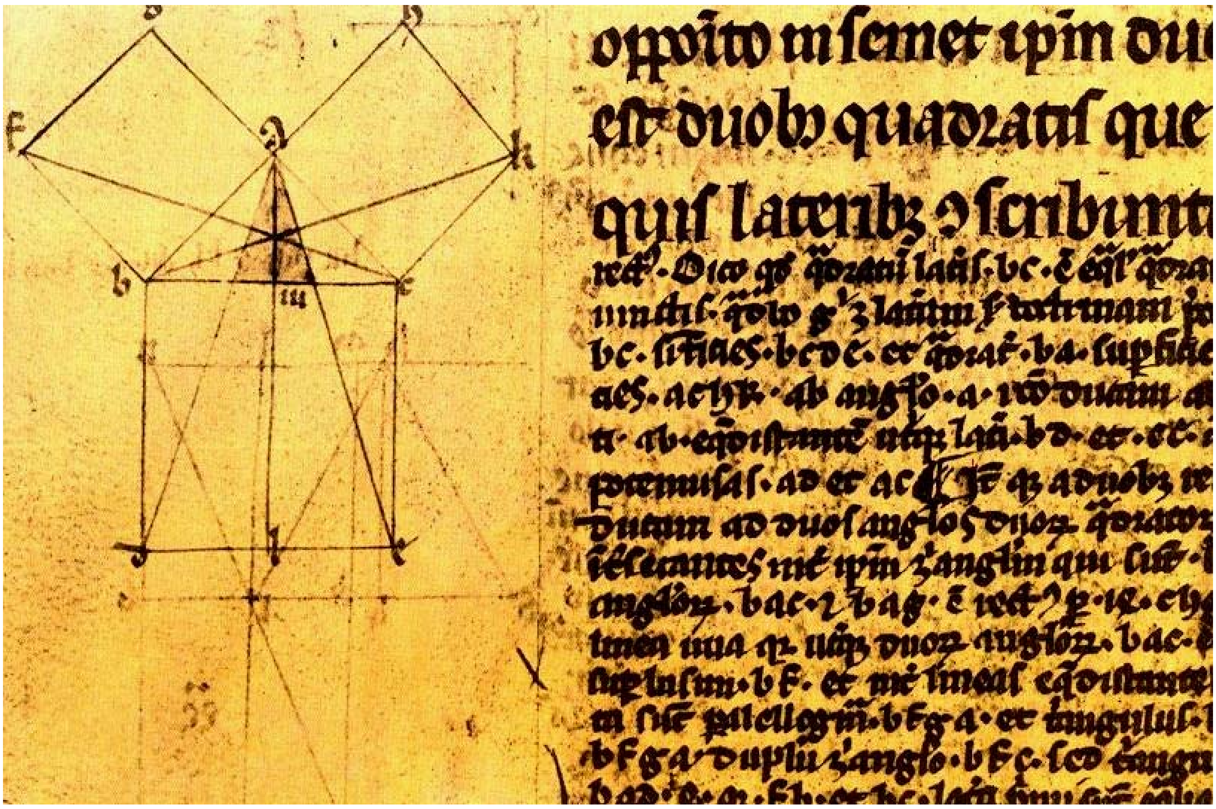
▭BIKJ + ▭CHKJ = □BIHC.

ILUSTRACIONES HISTÓRICAS
DEL TEOREMA DE PITÁGORAS EN EUCLIDES

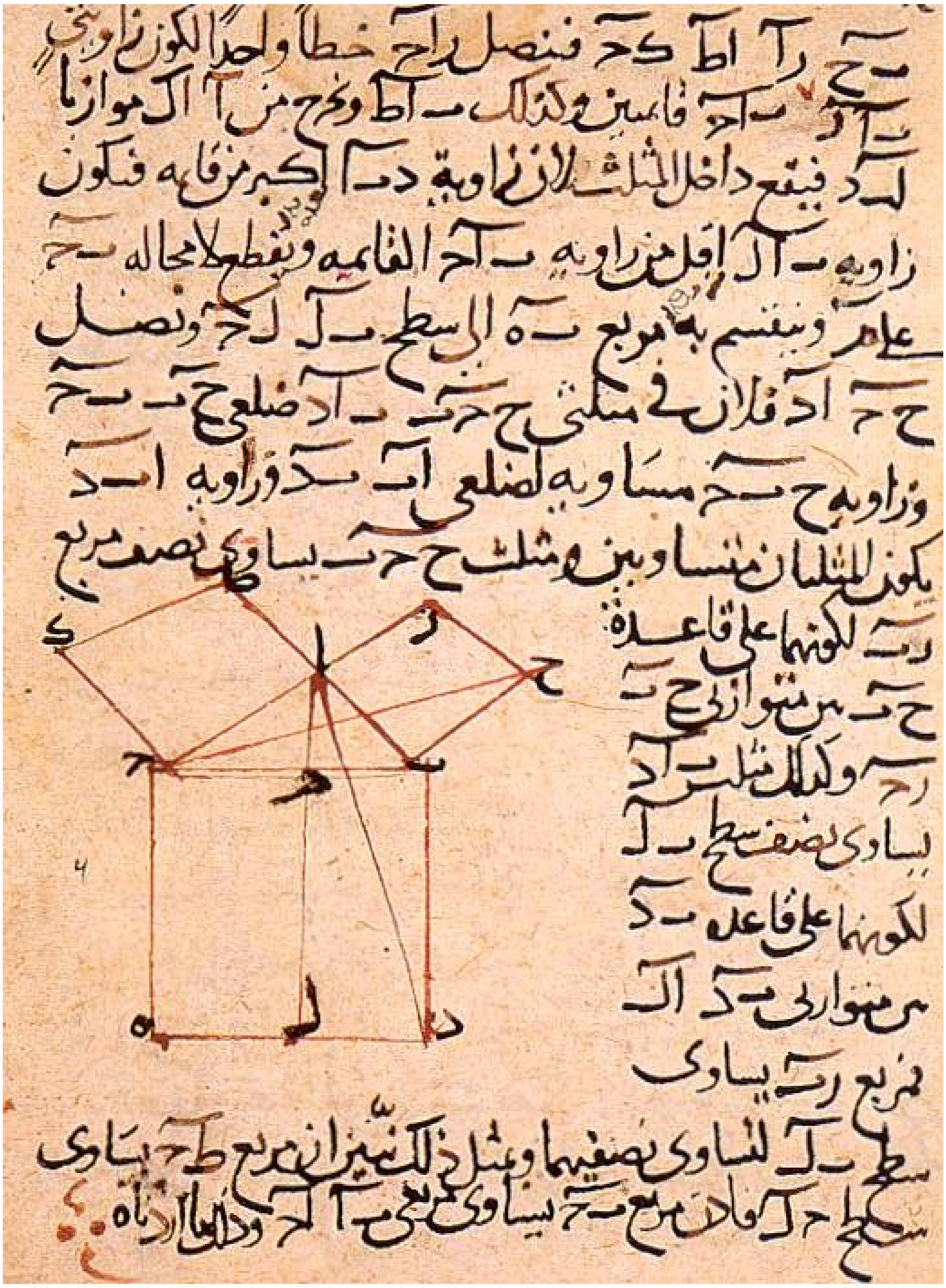


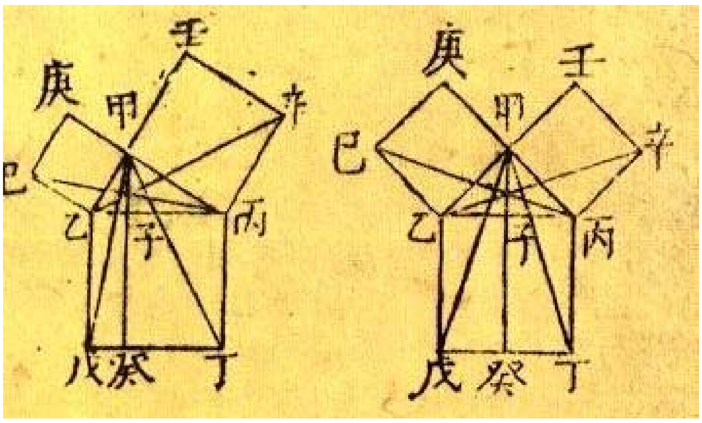
1. *El Teorema de Pitágoras* en griego. Manuscrito de *Los Elementos* de Euclides del siglo XII. Biblioteca Nacional de París.
2. *El Teorema de Pitágoras* en latín. Traducción de *Los Elementos* de Euclides al latín de fecha incierta. La primera traducción medieval al latín procede del árabe y es atribuida al filósofo escolástico Adelardo de Bath (hacia 1142). En ella las proposiciones se exponen someramente mediante diversas figuras y diagramas, y los únicos comentarios a las demostraciones se encuentran en el Libro I del manuscrito, quizá reafirmando la idea de que las enseñanzas medievales de Matemáticas se limitaban a los conocimientos más sencillos de los primeros libros de *Los Elementos*.

Los Elementos de Euclides es, sin duda alguna, el libro científico más traducido y divulgado a lo largo de la Historia de la Cultura. *E*s el texto que más veces se ha editado, después de *La Biblia*, siendo, además, la obra más influyente de toda la literatura matemática.



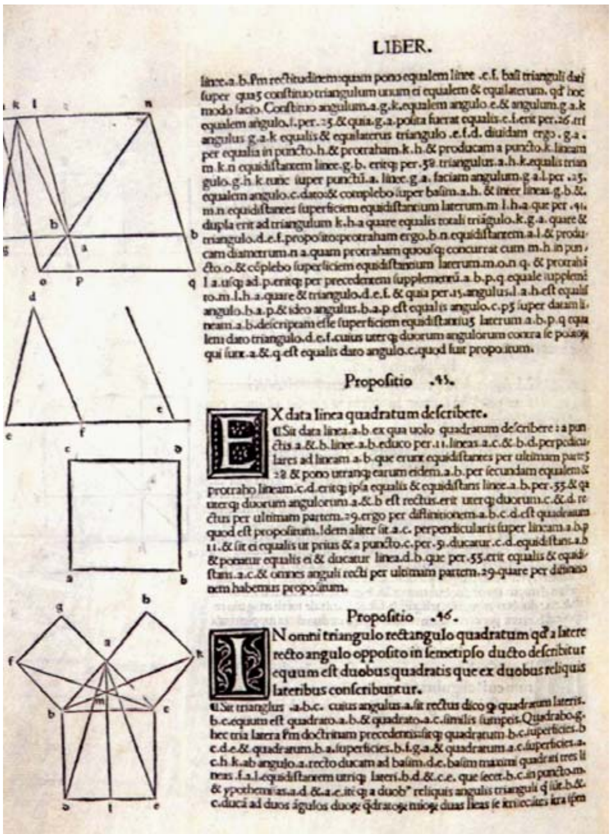
ILUSTRACIONES HISTÓRICAS
DEL TEOREMA DE PITÁGORAS EN EUCLIDES





1. *Teorema de Pitágoras* **en árabe. Página de un Comentario de 1250 sobre Euclides.**
2. *Teorema de Pitágoras* **en chino. Manuscrito del siglo XVII.**

EL TEOREMA DE PITÁGORAS EN LA PRIMERA EDICIÓN IMPRESA DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES


LIBER.

Propositio .45.

Propositio .46.

1. Página inicial (Folio 2 recto) de la primera edición impresa de *Los Elementos* de Euclides. Ejemplar de la Biblioteca de Santa Cruz de la Universidad de Valladolid.
2. El Teorema de Pitágoras (Proposición I.47) en esta edición.

La primera impresión de *Los Elementos de Euclides* tiene lugar en Venecia en 1482 y se debe al impresor E.Ratdolt. Se hizo a partir de una versión arábigo-latina comentada por Campano de Novara a mediados del siglo XIII. Seguramente este texto contiene la primera impresión de figuras geométricas en un libro de contenido matemático.

En el largo El título *Euclidis Megarensis ... Geometricorum Elementorum Opus*, se confunde al verdadero autor de Los Elementos con el filósofo Euclides de Megara, coetáneo de Platón y por tanto casi un siglo anterior. Esta confusión se mantendrá en muchas ediciones posteriores, a pesar de que Commandino la despejará en sus versiones de *Los Elementos*.

La edición de Ratdolt, además de ser la primera que aparece en imprenta, es posiblemente una de las más conocidas. Sin embargo, por su procedencia arábigo-latina, su fiabilidad respecto a la tradición euclídea fue puesta en entredicho por las traducciones latinas de Zamberti y Commandino.

Los Elementos de Euclides son un *Corpu*s geométrico que compila de forma enciclopédica la Geometría griega elemental. Se componen de trece libros, organizados en 465 proposiciones, 23 definiciones, 5 postulados y 5 nociones comunes o axiomas.

En *Los Elementos* –que representan el apogeo del idealismo platónico en Matemáticas– Euclides realiza una ordenación sistemática de la Geometría elemental griega en una rígida estructura apodíctica que establece un férreo paradigma estilístico axiomático-deductivo de exposición y de demostración en Matemáticas, a base de disponer en una secuencia jerárquica lógica los resultados geométricos de sus antecesores –en particular los de Pitágoras, Hipócrates, Eudoxo y Teeteto–, y plasmar en un cuerpo de doctrina geométrica la forma definitiva que debía configurar toda la Matemática griega después de la solución que dio la *Academia* platónica a la profunda crisis de fundamentos que produjo la aparición de las magnitudes inconmensurables.

El sintético estilo euclídeo de exposición y demostración, que establece un severo e impecable rigor como supremo valor lógico de la Matemática y que oculta la vía heurística del descubrimiento alcanzado por vía analítica o mecánica, se impondrá como paradigma normativo en los más importantes tratados de la Matemática griega, en particular *Las Cónicas* de Apolonio y *Las Obras* de Arquímedes. Y más allá de la Matemática, también, fue aplicado por Arquímedes en la Estática, Galeno en la Medicina, Galileo en la Física, Spinoza en la Ética y Hobbes en la Filosofía Política.

EL TEOREMA DE PITÁGORAS EN LA EDICIÓN PRINCEPS DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛ. ΙΕ.
ΕΚ ΤΩΝ ΘΕΩΝΟΣ ΣΥΝ-
ΟΥΣΙΩΝ.
Εἰς τοῦ αὐτοῦ τὸ πρῶτον, ἐξηγημάτων Πρόκλου βιβλ. δ.
Adiecta præfatiuncula in qua de disciplinis
Mathematicis nonnihil.

BASILEAE APVD IOAN. HERVAGIVM ANNO
M. D. XXXIII. MENSE SEPTEMBRI.

1. **Portada de la *Editio princeps* de *Los Elementos* de Euclides (S.Grynaeus *el viejo*,Basilea, 1533) que fija por primera vez el texto estándar en griego con base en dos manuscritos griegos: uno de Venecia (*codex venetus marcianus* 301) y otro de París (*codex Paris* gr. 2343). Ejemplar de la Biblioteca de la Universidad de Sevilla.**
2. **El Teorema de Pitágoras (Proposición I.47) en esta edición.**

Proclo, en su *Comentario al libro I de Los Elementos de Euclides*, escribe sobre Euclides y *Los Elementos*:

- ***Euclides, el autor de los Elementos, ordenó diversos trabajos de Eudoxo, mejoró los de Teeteto y produjo también demostraciones irrefutables para aquello que sus predecesores no habían probado de manera rigurosa.***
- ***Euclides era platónico en cuanto a su opinión y la filosofía del maestro le era muy familiar.***
- ***Son singularmente admirables sus Elementos de Geometría por el orden que reina en ellos, la selección de los teoremas y problemas tomados como elementos, pues no insertó en modo alguno todos los que podía dar, sino únicamente aquellos que son susceptibles de desempeñar el papel de elementos, y también la variedad de los razonamientos desarrollados de todas las maneras y que conducen a la convicción, ya partiendo de las causas, ya remontándose a los hechos, pero que son siempre irrefutables, exactos y del más científico carácter.***
- ***Los Elementos son una guía segura y completa para la consideración científica de los objetos de la Geometría.***
- ***Euclides dio los procedimientos que emplea la perspicaz inteligencia y por los cuales es posible ejercitar a los principiantes en el estudio de la Geometría para que reconozcan los paralogismos y eviten los errores.***

EL TEOREMA DE PITÁGORAS EN *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES

1. *La Matemática conduciendo a Pitágoras.* **Fragmento de la tabla de Da Ponte** *Las Artes Liberales.* **Museo del Prado. Madrid.**
2. *Euclides a los pies de la Geometría.* **Colección Cambó de Barcelona.**

El primer Libro I de *Los Elementos* **de Euclides termina con el teorema más importantes de la Geometría elemental: El** *Teorema de Pitágoras* **(la Proposición I.47), donde alcanza una verdadera apoteosis geométrica la forma magistral y sumamente bella con que Euclides realiza la proeza de demostrar el Teorema, con una lógica intachable y una modesta economía de elementos geométricos construidos de forma muy cuidadosa en las proposiciones anteriores.**

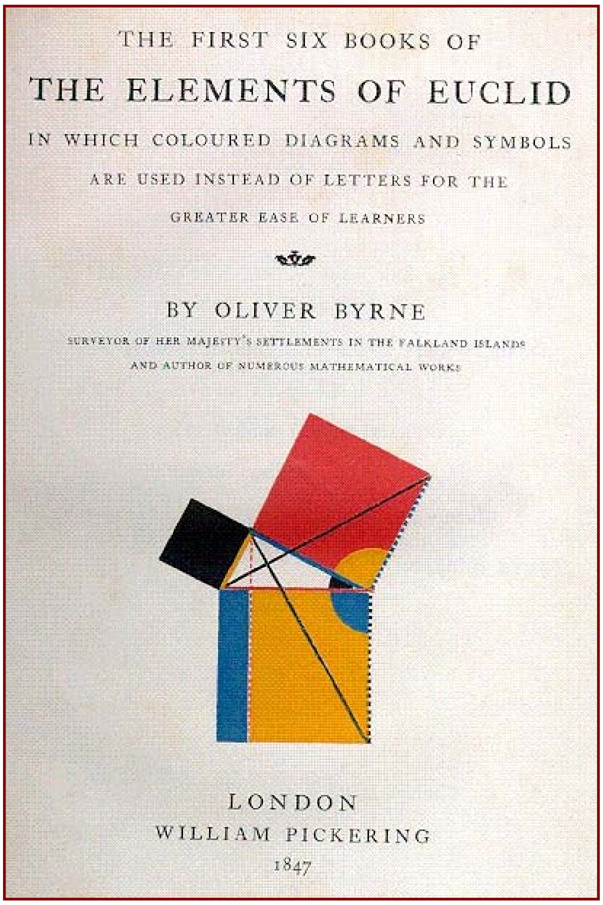
Al no poder utilizar las proporciones –por el fantasma de la presencia inexorable de las magnitudes inconmensurables– que suponen la aplicación de la semejanza –que no aparecerá en *Los Elementos* **hasta el Libro VI–, Euclides agudiza el ingenio y obtiene el magnífico resultado aplicando elementos muy simples de Geometría. Entre ellos:**

- **La construcción de cuadrados sobre segmentos (I.46).**
- **Ángulos adyacentes que suman dos rectos (I.14).**
- **El primer teorema de congruencia de triángulos (I.4).**
- **La relación entre triángulos y paralelogramos que tienen la misma base y situados entre las mismas paralelas (I.36, I.41),**
- **Algún que otro postulado y axioma.**

Como muy acertadamente señala W. Dunham en su obra: *Viaje a través de los genios* **(Pirámide. Madrid, 1992, pág. 76):**

> **«[...]** *Gran parte de lo que precede* **[en** *Los Elementos de Euclides* **a la Proposición I.47]** *estaba apuntando al gran Teorema de Pitágoras, que sirve de adecuado clímax al Libro I.***»**

EL TEOREMA DE PITÁGORAS (I.47)
EN LA EDICIÓN DE O.BYRNE (1847) DE *LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES*


THE FIRST SIX BOOKS OF
THE ELEMENTS OF EUCLID
IN WHICH COLOURED DIAGRAMS AND SYMBOLS
ARE USED INSTEAD OF LETTERS FOR THE
GREATER EASE OF LEARNERS

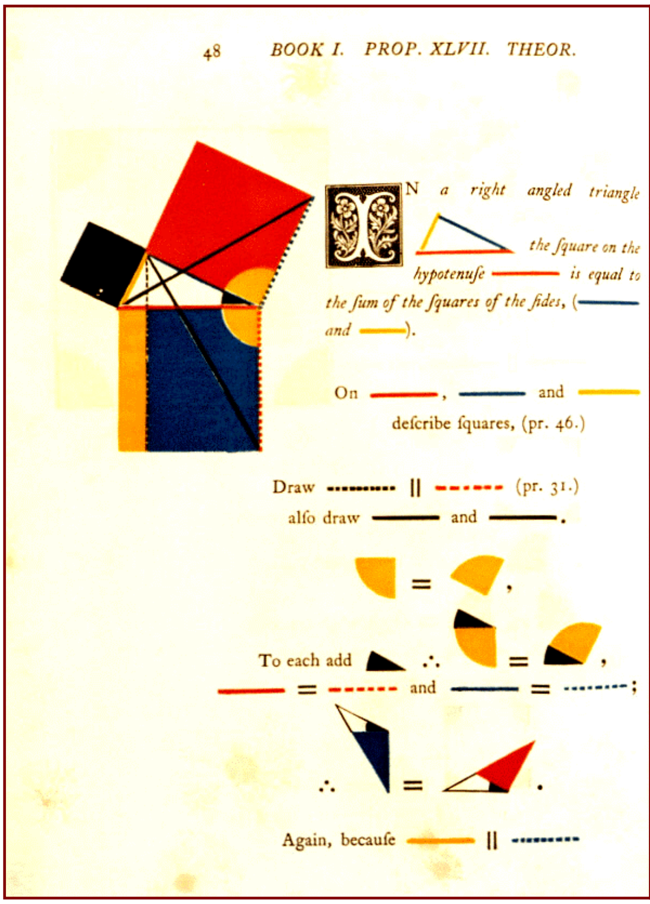
BY OLIVER BYRNE
SURVEYOR OF HER MAJESTY'S SETTLEMENTS IN THE FALKLAND ISLANDS
AND AUTHOR OF NUMEROUS MATHEMATICAL WORKS

LONDON
WILLIAM PICKERING
1847

La edición de Oliver Byrne de *Los Elementos de Euclides* : *The first six books of the Elements of Euclid, in which coloured diagrams and symbols are used instead of letters for the greater ease of learners.* Colbeck collection (Library of the University of British Columbia).

Es una versión muy peculiar de los seis primeros libros de Euclides, es decir, la Geometría Plana elemental, en la que el matemático Byrne, reduce al mínimo el texto aclaratorio de las proposiciones y teoremas euclídeos, siendo reemplazado por un despliegue inusitado de preciosas ilustraciones en color que son magníficos diagramas descriptivos de las construcciones de Euclides, que «*entran por los ojos*», y en los que la fuerza sensorial de la percepción visual de las figuras refuerza la intelección de los teoremas y problemas geométricos. Por ejemplo, la igualdad de ciertas magnitudes se prueba mediante la identidad de forma y color, de modo que, como escribe Byrne en su larga introducción explicativa, la verdad se pone de manifiesto con la «*demostración ocular*», en la que juega un papel fundamental no sólo la forma sino sobre todo el color. La edición de Byrne es un sacrilegio para el idealismo platónico que presidía *Los Elementos de Euclides* , pero tiene un alto valor didáctico, casi de Geometría empírica.

En la portada de esta edición de los Elementos de Euclides se exhibe el anagrama euclídeo de la que debe ser considerada por el editor como la más importante de las 173 proposiciones descritas, la I.47 –*el Teorema de Pitágoras*–.


48 BOOK I. PROP. XLVII. THEOR.

IN a right angled triangle the ſquare on the hypotenuſe is equal to the ſum of the ſquares of the ſides, (and).

On , and deſcribe ſquares, (pr. 46.)

Draw || (pr. 31.)
alſo draw and .

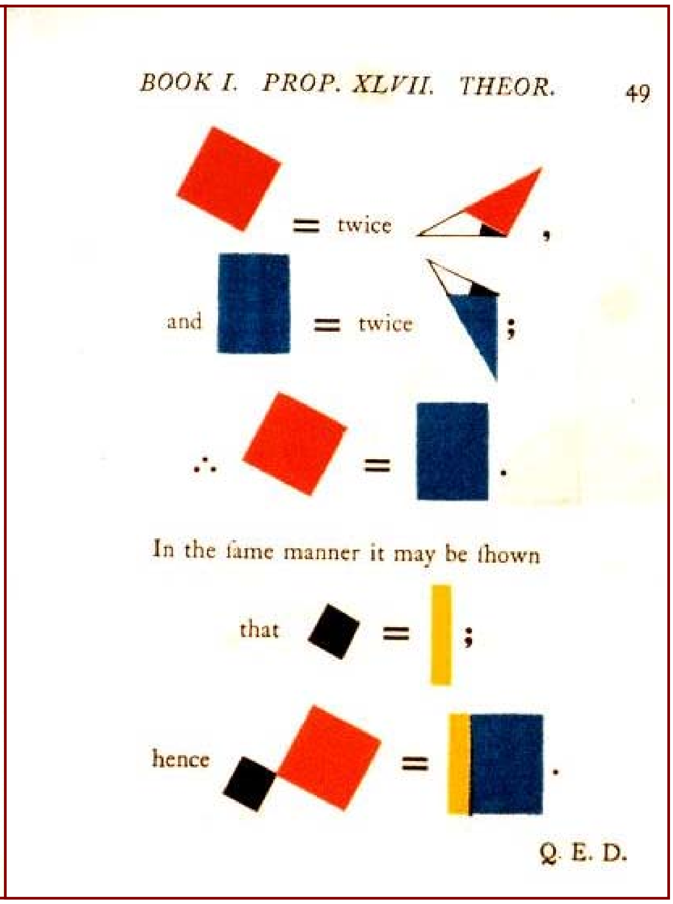
= ,

To each add ∴ = ,

= and = ;

∴ = .

Again, becauſe ||


BOOK I. PROP. XLVII. THEOR. 49

= twice ,

and = twice ;

∴ = .

In the ſame manner it may be ſhown

that = ;

hence = .

Q. E. D.

El recíproco del Teorema de Pitágoras en *Los Elementos* de Euclides

La Proposición I.47 marca la cumbre del Libro I de *Los Elementos*, pero el ingenio de Euclides va todavía más allá demostrando el resultado inverso del Teorema de Pitágoras en la Proposición I.48 con una economía de medios sorprendente:

> «*Si en un triángulo el cuadrado construido sobre uno de los lados es igual a la suma de los cuadrados construidos sobre los restantes lados del triángulo, el ángulo comprendido por estos dos lados es recto.*»

En la demostración Euclides traza un segmento AD=AB y perpendicular a AC. De la hipótesis: $AB^2 + AC^2 = BC^2$,

y al ser rectángulo el triángulo ADC, resulta:

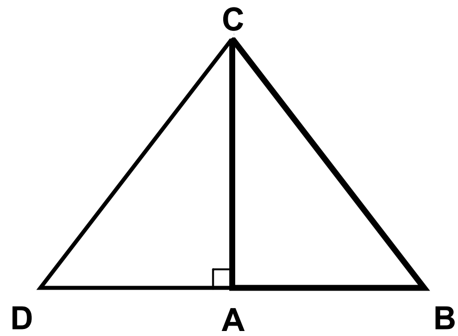
$AD^2 + AC^2 = DC^2$ (I.47, *Teorema de Pitágoras*).

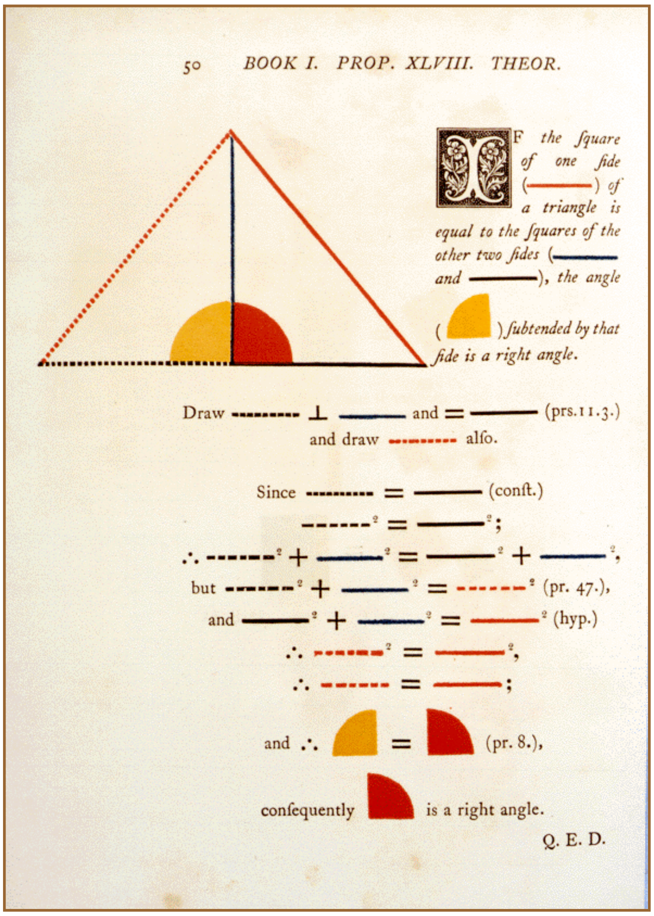
Pero como AB=AD, será:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = AD^2 + AC^2 = DC^2$.

por tanto BC=DC; de manera que los triángulos DAC y CAB son congruentes, ya que al ser el lado AC común los dos triángulos tienen los tres lados iguales.

Por tanto el ángulo CAB que es igual al CAD (*Euclides* I.8), debe ser recto.





el inverso del *Teorema de Pitágoras* (Proposición I.48) en la edición de visual de O.Byrne (1847) de *Los Elementos* de Euclides.

Tras la demostración del *Teorema de Pitágoras*, Euclides hace gala del mismo ingenio para obsequiarnos con una demostración del teorema inverso –la Proposición I.48– que es un increíble modelo de economía de recursos en Geometría.

Dos notas son dignas de ser remarcadas sobre esta demostración: su concisión y el hecho de gran valor lógico-deductivo de que Euclides aplica el propio Teorema de Pitágoras para demostrar su recíproco.

Por desgracia esta sencilla demostración es obviada en los libros de texto aunque paradójicamente es utilizada implícitamente tanto como el propio Teorema de Pitágoras y ello desde los antiguos agrimensores egipcios. En efecto, es curioso que mientras cualquier persona se enfrenta al *Teorema de Pitágoras* en su etapa escolar, muy pocas personas conocen la demostración del teorema inverso, aunque están seguros de su legitimidad y de hecho lo aplican cuando es necesario.

Las dos proposiciones, I.47 y I.48 constituyen una unidad secuencial con la que se alcanza el esplendor geométrico en el Libro I de *Los Elementos*, ya que tomadas en conjunto caracterizan por completo los triángulos rectángulos, es decir:

> *«Un triángulo es rectángulo si y sólo si el cuadrado sobre la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados sobre los catetos».*

He aquí otro relevante rasgo del alto valor pedagógico de *Los Elementos* de Euclides.

EL GRAN TEOREMA: EL *TEOREMA DE PITÁGORAS* EN UN TEXTO DE W.DUNHAM

Viaje a través de los genios. Pirámide. Madrid, 1992. Cap. 2 (la demostración de Euclides del _Teorema de Pitágoras_), p.76-82.

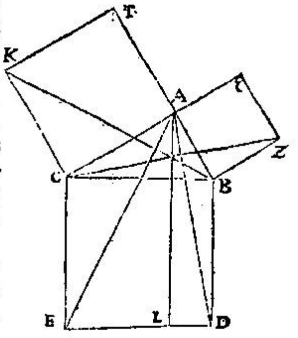
[...] Este hito histórico se conocía mucho antes de la época de Euclides, de manera que en absoluto lo descubrió él. Sin embargo merece que se reconozca su particular demostración, una prueba que muchos creen que es original de Euclides. Su belleza radica en la economía de sus presupuestos; después de todo Euclides disponía de sus postulados, sus nociones comunes y las primeras 46 proposiciones –una caja de herramientas más bien escasa– para, a partir de ellos montar una demostración. Considérense los temas de Geometría de los que aún no se había ocupado: los únicos cuadriláteros por él investigados eran los paralelogramos; los círculos en su práctica totalidad aún estaban inexplorados, y el tema extremadamente importante de la semejanza no se mencionaría hasta el Libro VI. Con toda seguridad es posible diseñar demostraciones breves del _Teorema de Pitágoras_ utilizando triángulos semejantes, pero Euclides no quiso diferir la demostración de su importante proposición hasta el Libro VI. Claramente pretendía demostrar el _Teorema de Pitágoras_ de la manera más rápida y directa posible y, en consecuencia, diseñó una demostración que se convertiría en la proposición 47 de _Los Elementos_. Desde esta perspectiva, se puede considerar que gran parten de lo que había precedido estaba apuntando al gran _Teorema de Pitágoras_, que sirve de adecuado clímax al Libro I

La Proposición I.47 marca la cima del Libro I, pero Euclides tenía un resultado final que demostrar, la inversa del _Teorema de Pitágoras_ (la Proposición I.48). En este caso el ingenio y la economía de medios son innegables. Por desgracia, esta demostración no es tan bien conocida como debiera serlo. De hecho, mientras la mayoría de los estudiantes se tropiezan con una demostración del _Teorema de Pitágoras_ en algún momento de sus vidas, muy pocos ven una demostración de la inversa, o lo que es equivalente, están seguros de su validez.

LIBRO PRIMERO DE

¶En los triangulos rectangulos el quadrado que es hecho de el lado q̃ esta opuesto al angulo recto es ygual a los dos quadrados q̃ son hechos de los lados q̃ cõtienen el angulo recto,

Sea el triangulo rectãgulo. A B C. q̃ tenga recto el angulo B A C. digo que el quadrado q̃ es hecho del lado. BC. es ygual a los quadrados q̃ se hazen de B A. y de. A C. Describase, por la. 46. dela. B C. el quadrado. B D C E, y por la misma, de la B A. y dela, A C. los quadrados. A B Z I. A C K T. y por el pũto A. tirese. A L. parallela cõ la. B D. C E, por la proposiciõ. 31, y por la. 1. peticiõ tirese A D. C Z. y porq̃ los ãgulos. B A C. B AI son rectos. Luego tiradas dos lineas rectas. A C, A I. desde vna linea recta. A B. y desde vn pũcto en ella. A. no hacia vnas mismas ptes hacẽ de vna y otra pte ãgulos yguales a dos rectos, por la. 14. pposiciõ) luego ẽ derecho esta la. A C. dla. A I y por esto tãbiẽ BA esta ẽ derecho de. AT y por q̃ el angulo. D B C. es ygual al angulo. ZB A. porq̃ cada vno dellos es recto: põgase comũ el angulo A B C. Luego todo D B A es ygual a todo el angulo Z B C. y porq̃ las dos. A B. B D, son yguales a las dos B Z, B C. la vna a la otra, y el ãgulo. D B A es ygual al angulo. Z B C. luego la basis, A D, por la. 4. pposiciõ, es ygual a la basis. Z C. y el triangulo. A B D. al triangulo. Z B C. es tãbien ygual. Y el parallelogramo. BL, por la. 4 1, es doblo del triangulo. A B D por



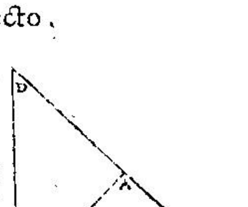
EVCLIDES. 34.

porq̃ tiene vna misma basis q̃ es. B D. y esta en vnas mismas parallelas, es a saber. D B. A L. y tãbiẽ el quadrado I B. por la misma, es doblo del triãgulo. Z B C. porq̃ tiene la misma basis q̃ es. B Z. y esta en vnas mismas parallelas, es a saber. Z B. I C. y las cosas q̃ son doblo de cosas yguales, por la. 6. comun sentẽcia, entre si son yguales, Luego el parallelogrãmo. B L. es ygual al quadrado. I B. Semejãtemente si, por la. 1. peticion, se tirã. A E. B K. se demostrara el parallelogrãmo. C L. ser ygual al quadrado, T C, Luego todo el quadrado. B D EC, es ygual a los dos quadrados, I B, T C, Y el quadrado, B D E C, es hecho de la, B C, y los quadrados, I B, C T, son hechos dela, B A A C, Luego el quadrado q̃ de el lado. B C. se hizo es ygual a los quadrados q̃ son hechos de los lados, B A, A C, luego en los triangulos rectangulos el quadrado q̃ es hecho del lado q̃ esta oppuesto al angulo recto y lo que mas se sigue como ẽ el theorema, que se hauia de demostrar,

Theorema. 34. Proposicion. 48.

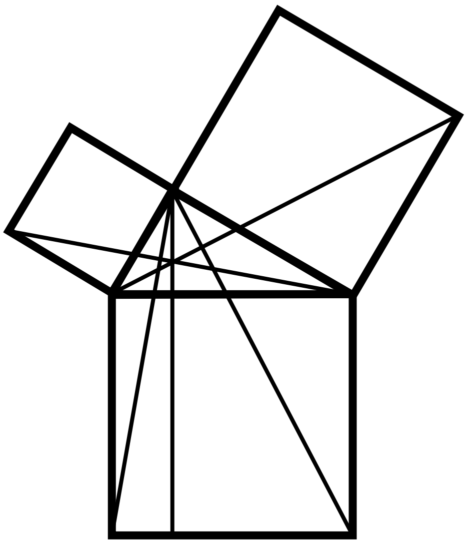
¶Si el quadrado que es hecho de vno de los lados del triãgulo fuere ygual a aq̃llos quadrados que de los demas lados del triãgulo: el angulo comprehendido de los dos lados restantes del triangulo, sera recto.

El quadrado que es hecho del vn lado. B C. del triangulo. A B C. sea ygual a aq̃llos quadrados que son hechos de los lados. B A. A C. digo que el angulo. B A C. es recto. Saquese (por la. 11. propositiõ) desde el puncto. A. la. A D. en angulos rectos con la linea recta. A C. y (por la. 3. proposicion) pongase. A D. ygual a la. A B, y (por la. 1. peticiõ) tire se. D C. y porque es ygual. D A. a la. A B. el quadrado



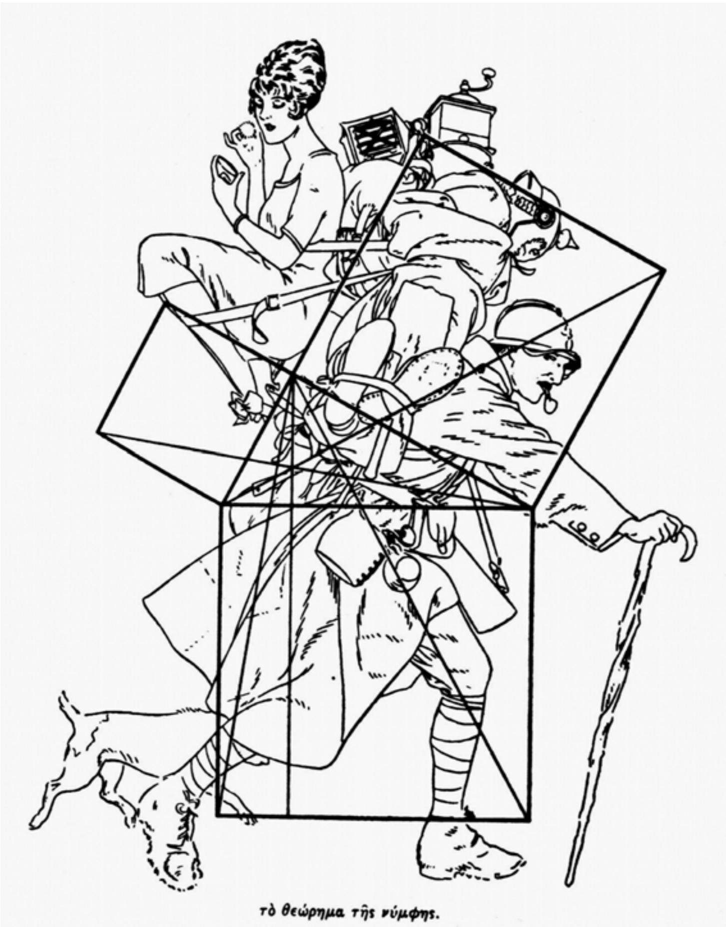
El _Teorema de Pitágoras_ y su inverso –Proposiciones I.47 y I.48 de _Los Elementos_ de Euclides– en la edición de Rodrigo Çamorano, primera en idioma castellano, Sevilla, 1576.

LA FIGURA EUCLÍDEA DE LA DEMOSTRACIÓN DEL *TEOREMA DE PITÁGORAS*

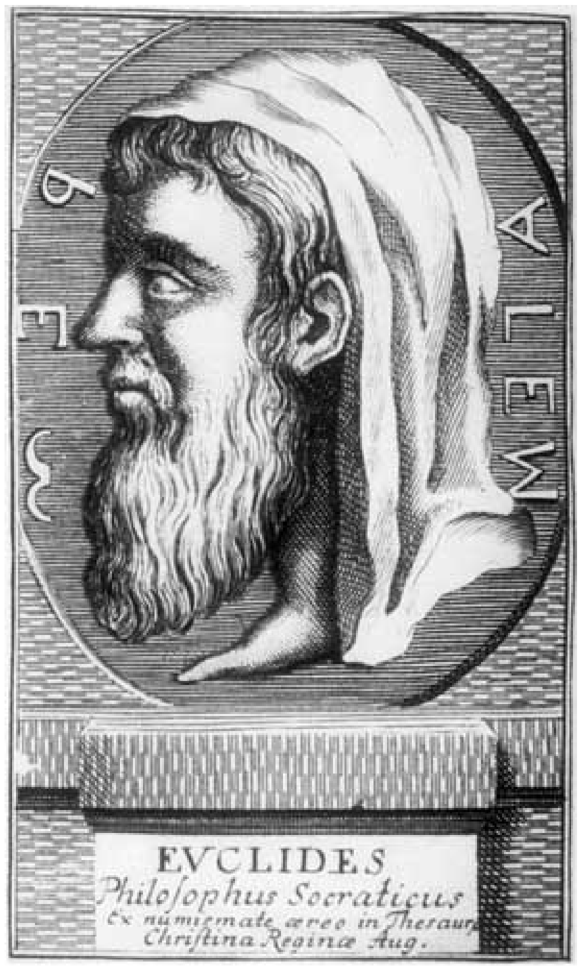


La demostración euclídea del *Teorema de Pitágoras* es de naturaleza estrictamente geométrica, y en ella juega un papel fundamental una figura que procede de una secuencia de construcciones que mediante ciertas congruencias de triángulos va transformando los cuadrados sobre los catetos en dos rectángulos que al encajarse componen el cuadrado sobre la hipotenusa

La figura que utiliza Euclides en su demostración del *Teorema de Pitágoras* se ha hecho famosa también por la gran cantidad de calificaciones curiosas que se le han dado. E. Lucas en *Recréations mathématiques* dice que los árabes le llamaban «*silla de la novia*», porque se parece a la silla que en algunos países orientales llevaba un esclavo a la espalda para transportar a la novia hasta la ceremonia. También se ha llamado «*calesa de la mujer recién casada*» (Bhaskara), «*capucha de franciscano*», «*cola de pavo real*», «*figura del molino de viento*». El filósofo Schopenhauer, que muy impresionado por el hecho del teorema, siempre se preguntó por la razón natural de la relación pitagórica, llamaba a la demostración de Euclides «*una prueba paseando en zancos*» y también «*prueba de la ratonera*».



Caricatura alegórica de la «*silla de la novia*» del Teorema de Pitágoras en *Los Elementos* de Euclides, en el contexto de la primera guerra mundial, que aparece en *The Mathematical Gazette* 11 (1922), pág.346.

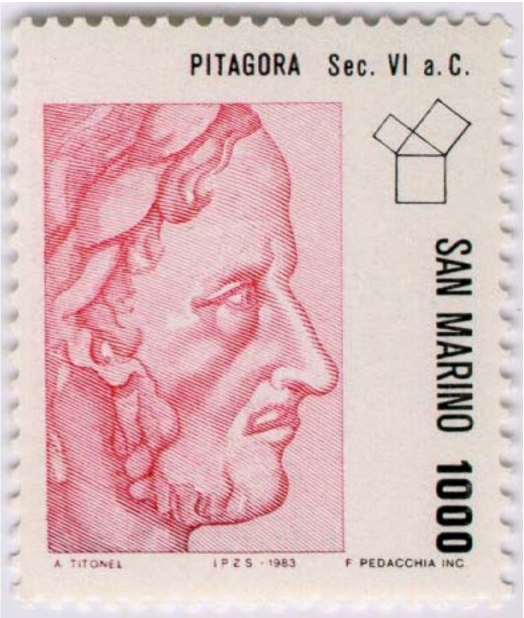


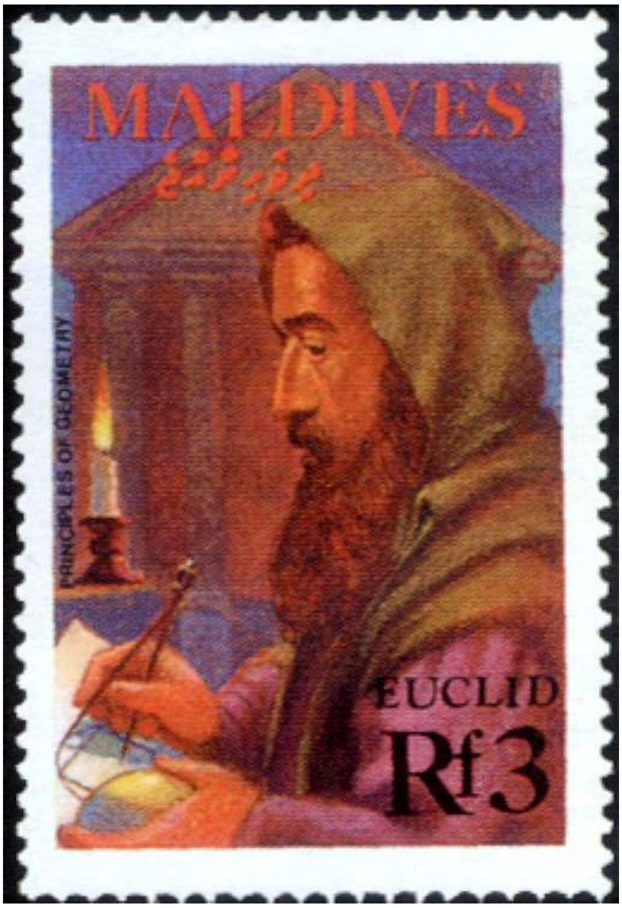
Retrato caricaturesco de Euclides. En el título se confunde, como es habitual, al autor de *Los Elementos* con el filósofo socrático Euclides de Megara.

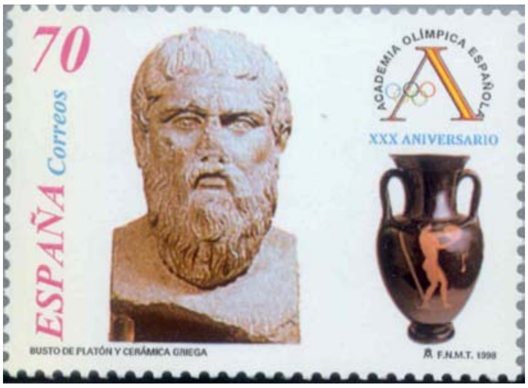
CITAS MEMORABLES SOBRE EL TEOREMA DE PITÁGORAS

1. Los egipcios se imaginaban el mundo la forma del mas bello de los triángulos. Este triángulo, símbolo de la fecundidad, tiene su lado vertical compuesto de tres, la base de cuatro y la hipotenusa de cinco partes. El lado vertical simbolizaba al macho, la base a la hembra, y la hipotenusa a la primogenitura de los dos. **Plutarco *(Sobre Isis y Osiris*,VIII,4).**
2. Pitágoras hallada, aquella nobilísima figura, bueyes mató por ello en sacrificio. **Diógenes Laercio. *Vidas de los más ilustres filósofos griegos (Pitágoras VIII.7)*.**
3. Mientras admiro a los que han observado la verdad de este teorema, ensalzo más todavía al escritor de Los Elementos, no sólo porque consiguió una demostración mucho más lúcida, sino también porque consiguió obtuvo un teorema mucho más general, mediante los irrefutables argumentos del Libro VI. **Proclo. *Comentarios al Libro I de los Elementos de Euclides*.**
4. La Geometría tiene dos grandes tesoros, uno es el Teorema de Pitágoras y otro la división de un segmento en media y extrema razón. Si el primero es una joya de oro, el segundo viene a ser una piedra preciosa. **Kepler. *Mysterium Cosmographicum*, 1596.**
5. Hasta los 40 años no se interesó por la Geometría, hecho que ocurrió por accidente al hojear casualmente en una biblioteca un libro de Los Elementos de Euclides, abierto por la Proposición I.47. ***De la vida de T.Hobbes* en *Brief Lives* de J.Aubrey, 1694.**
6. Este Teorema constituyó el origen de la Geometría racional en la Escuela Pitagórica y las deducciones que poco a poco fue realizando la Escuela, tuvieron por objeto lograr una demostración general del teorema, advertida su verdad en casos particulares. **H.G.Zeuthen. (*Théorème de Pythagore, origine de la Géométrie scientifique*, II Congreso internacional de Ginebra,1904).**
7. A los 12 años un tío mío me había contado el Teorema de Pitágoras antes de que la Santa Geometría cayera en mis manos. [...] Es maravilloso que un hombre sea capaz de alcanzar tal grado de certeza y pureza haciendo uso exclusivo de su pensamiento. **Sketch autobiográfico sobre A.Einstein en *Philosopher-Scientist*. P.A.Schilpp, 1951.**
8. Cientos de pruebas ha sugerido la proposición pitagórica. [...] Una de las primeras es la de Los Elementos de Euclides que ha soportado la prueba del tiempo mejor que cualquier otra. **D.Smith. *History of Mathematics*. Dover. New York, 1958. Vol.2 p.289.**
9. La demostración guió a los pitagóricos. Desde entonces el método y la actitud del pensamiento son búsqueda de lo necesario y de lo universal, y el Teorema de Pitágoras, en primer lugar, sirve en esto de completa ilustración. **A.Rey. *El apogeo de la ciencia técnica griega* (UTEHA, México, 1962. Vol.1. p.11).**
10. La universalidad del teorema de Pitágoras y la invención de la demostración geométrica son las hadas que vemos en torno a la cuna de la Geometría griega, del milagro griego en matemática y del espíritu científico que ha llegado hasta nosotros. **A.Rey. *El apogeo de la ciencia técnica griega.* UTEHA, México, 1962. Vol.1. p.13.**
11. Este teorema con la multitud de demostraciones del mismo ilustra de forma sorprendente el hecho de que hay muchas formas de alcanzar la misma verdad. **E.S.Lomis. *The Pythagorean Proposition*. NCTM, 1968. p.3.**
12. La Trigonometría existe porque existe el Teorema de Pitágoras. **E.S.Lomis. *The Pyitagorean Proposition*. NCTM, 1968. p.244.**
13. Gran parte de lo que precede en Los Elementos de Euclides [a la Proposición I.47] apuntaba al gran Teorema de Pitágoras, que sirve de adecuado clímax al Libro I. [...] La sutileza de la demostración de Euclides es un ejemplo de la mejor Geometría. **W.Dunham. *Viaje a través de los genios.* Pirámide, Madrid, 1992. p.76.**
14. El Teorema de Pitágoras ha tenido ocupados a los matemáticos desde la época clásica hasta el presente. [...] Sus múltiples demostraciones ilustran la agilidad de los matemáticos al atacar el mismo problema desde ángulos diferentes. [...] Con independencia de la frecuencia con que se demuestre, el Teorema de Pitágoras logra siempre retener su belleza, su frescura y su eterno sentido de admiración. **W.Dunham. *El Universo de las Matemáticas*. Pirámide. Madrid, 1995. Cap.H. pp.136, 153.**
15. La contestación más frecuente a la cuestión de lo que se recuerda de la Matemática escolar es el Teorema de Pitágoras. [...] Debemos considerar al Teorema de Pitágoras como un activo cultural de primer orden que pertenece a la base intelectual común de la humanidad. [...] En sentido cultural, Homero es a Grecia, lo que la Biblia es a la Edad Media, Shakespeare a Inglaterra (Goethe a Alemania y Cervantes a España) y lo que el Teorema de Pitágoras es a las Matemáticas, que es independiente de los lenguajes específicos y trasciende las fronteras culturales. Es con razón y con frecuencia un símbolo de todas las matemáticas. **B.Artmann. *Euclid–The Creation of Mathematics*. Springer. New York, 1996. Cap.6. pp.57–58.**
16. En la demostración de Euclides del Teorema de Pitágoras están mezcladas de tal modo la intuición y l a lógica, que cada paso lógico está evidenciado intuitivamente. **Felix Klein. *Matemática elemental desde un punto de vista superior*. Vol. II. Geometría Biblioteca Matemática. Dtor: J.Rey Pastor. Madrid, 1931. P.319.**

PITÁGORAS, PLATÓN Y EUCLIDES, ARTÍFICES DE LA FUNDAMENTACIÓN DE LA GEOMETRÍA GRIEGA







1. Sello con la efigie de Pitágoras. San Marino, 1983.
2. Sello con la efigie de Platón. España, 1998.
3. Sello con la efigie de Euclides. Maldivas, 1988

La Matemática, griega se desarrolla en tres estadios fundamentales –La Magna Grecia, Atenas y Alejandría– siendo las principales figuras Pitágoras, Platón y Euclides. Cada uno de ellos aporta una singularidad esencial. Pitágoras es el fundador de la tradición matemática griega y el artífice de la fundamentación filosófica e ideológica de la Matemática. Platón es la figura central en todos los sentidos; su actividad es la que confiere un estatuto gnoseológico y ontológico a la Geometría griega. Además, creó un entorno académico donde se potenciaron hasta el paroxismo los estudios geométricos. Euclides es el sistematizador de todos los conocimientos precedentes. Su obra, *Los Elementos*, se convierte en modelo canónico de exposición y demostración en Matemáticas. La tradición matemática de la Escuela Pitagórica es recogida por Platón para ponerla en manos de Euclides, que en la compilación de *Los Elementos* creará un modelo geométrico estructural paradigmático.

La tradición matemática griega instaurada por Pitágoras es la base de los estudios matemáticos de la Academia de Platón y en manos de Euclides alcanza el carácter de modelo geométrico ejemplar en *Los Elementos*, gran parte de cuyo contenido, sobre todo los Libros I, II, III, IV, VII y XIII es de raíz pitagórica, siendo el resto de origen platónico.

Cuatro aspectos fundamentales caracterizan y estructuran las Matemáticas griegas: «*la organización deductiva*», «*la orientación geométrica*», «*la consideración de ciencia liberal y desinteresada*» y «*la vinculación estrecha de la Matemática con la Filosofía*». *La organización deductiva*, es el canon paradigmático de exposición de la Matemática griega donde se persigue un rigor impecable e implacable, que nace de la las exigencias de escuelas filosóficas, la Pitagórica y la Academia platónica; *la orientación geométrica*, incluso en aspectos aritméticos, fue una de las consecuencias más notables de la crisis producida por la aparición de las magnitudes inconmensurables –como aplicación del *Teorema de Pitágoras* o de la *Sección áurea*–, que sacudió los fundamentos filosóficos y matemáticos de la Escuela pitagórica y provocó la geometrización de sus concepciones aritméticas en la Academia platónica. En cuanto a «*la consideración de ciencia liberal y desinteresada*», los griegos, a partir de Pitágoras, independizaron las Matemáticas del pragmatismo empírico y de la utilidad inmediata, liberándola intelectualmente de instrumentos materiales, porque como aduce Platón en la *República*: las ciencias matemáticas tienen la misión pedagógica de formar mentes bien hechas, cumpliendo con el fin propedéutico de servir de introducción al estudio de la Filosofía. Las Matemáticas, según los griegos, deben estudiarse por la afición y el amor al saber en sí mismo, es decir, las Matemáticas deben estudiarse por Filosofía y para la Filosofía.

Las más famosas demostraciones del Teorema de Pitágoras

Quizá ningún teorema de la amplia Matemática haya recibido tantas demostraciones diversas como el Teorema de Pitágoras. Bien puede decirse, por ello, que este teorema y la multitud de demostraciones del mismo que se han dado a lo largo de la historia constituyen una prueba fehaciente de que hay muchos caminos para alcanzar la verdad.

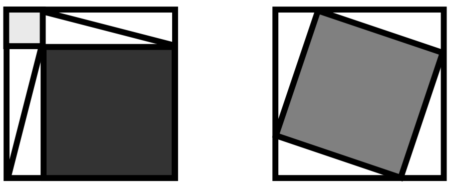
En la Edad Media esta Proposición se la consideraba la base de toda sólida formación matemática. En algunos centros docentes además de exigir, para obtener el grado de maestro, un profundo conocimiento del Teorema, se obligaba a exhibir una nueva y original demostración del mismo, por eso el Teorema de Pitágoras alcanzó la honrosa designación de «*Magister matheseos*». Este hecho y la gran significación del teorema explica la razón de las innumerables demostraciones que los matemáticos y no matemáticos de todas las épocas y personajes tan diversos como filósofos, monjes, políticos, juristas, ingenieros y artistas, han encontrado del más famoso Teorema de la Geometría.

Se describirán de forma, cronológica, algunas de las más famosas demostraciones, que lo son, tanto porque se les ha podido atribuir a un personaje histórico concreto, matemático o no, como porque gozan de una gran claridad y sencillez.

Dadas dos figuras P y Q, se dice que:

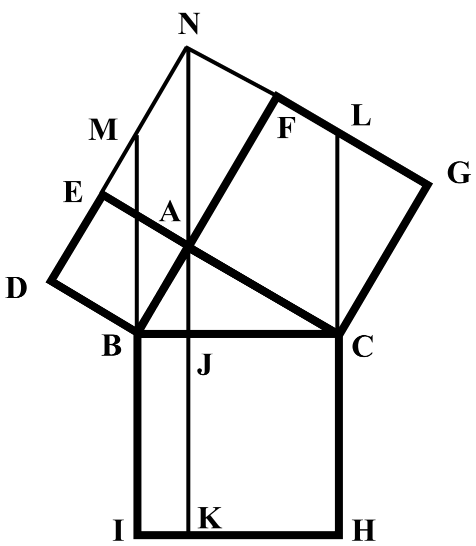
- P y Q son «*congruentes por adición*» si pueden ser seccionadas en pares correspondientes de piezas congruentes.
- P y Q son «*congruentes por sustracción*» si añadiendo a las figuras P y Q pares correspondientes de piezas congruentes, se obtienen dos nuevas figuras que son *congruentes por adición*.

En general, como vamos a ver, muchas de las pruebas del *Teorema de Pitágoras* consisten en mostrar que el cuadrado sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es congruente, por adición o sustracción, con los cuadrados construidos sobre los catetos.



Por ejemplo, la tradicional prueba pitagórica del *Teorema de Pitágoras*, basada en la figura adjunta, es una prueba paradigmática de congruencia por sustracción.

La demostración de Pappus (hacia 300 d.C.)



La demostración de Pappus utiliza un argumento similar al de la de Euclides: la comparación de áreas de figuras de la misma base, situadas entre paralelas.

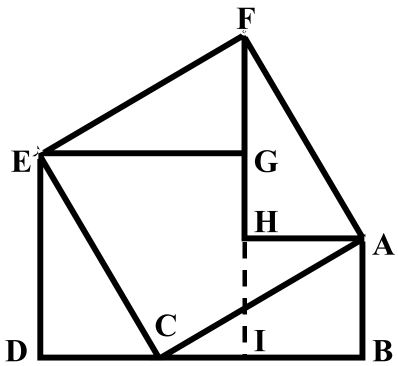
Como los segmentos JK y AN son iguales, el rectángulo JKIB y el paralelogramo NABM son iguales (*Euclides* I.36). A su vez este paralelogramo es igual al cuadrado ABDE. Por tanto el rectángulo JKIB es igual al cuadrado ABDE.

Análogamente se comprueba que el rectángulo JKHC es igual al cuadrado ACGF.

Así pues el cuadrado BIHC sobre la hipotenusa BC es igual a la suma de los cuadrados ABDE, ACGF, sobre los catetos AB, AC.

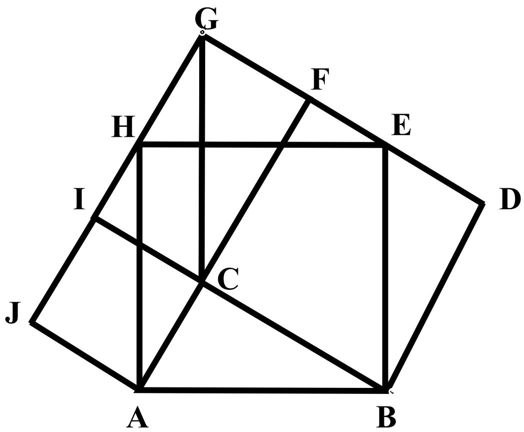
Las demostraciones de Thâbit Ibn Qurra (826-901)

La demostración de Thâbit Ibn Qurra es la respuesta a la carta de un amigo que, conociendo el caso particular para un triángulo rectángulo isósceles de la «*prueba socrática*» del teorema –el pasaje de Platón en *El Menón* sobre la *duplicación del cuadrado*–, le solicitaba que le comunicara la prueba del caso general. Thâbit Ibn Qurra atiende la petición y busca una nueva prueba, según él, en el espíritu de la «*prueba socrática*» particular, es decir, con el «*método de reducción y composición*», que «*reduce a triángulos y recompone por yustaposición*». Thâbit Ibn Qurra da dos demostraciones del tipo de *congruencia por sustracción*:



Prueba 1.

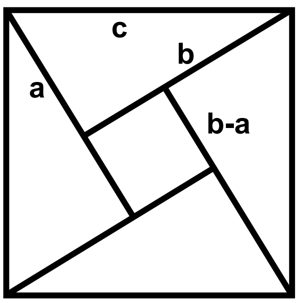
Sea el triángulo rectángulo ABC. Si a la figura ABCDEF se le sustraen los triángulos ABC y CDE iguales al dado, resulta el cuadrado ACEF construido sobre la hipotenusa AC, mientras que sustrayendo los triángulos AHF y FGE, resulta la figura formada por los cuadrados ABIH, GIDE, construidos sobre los catetos AB, BC.

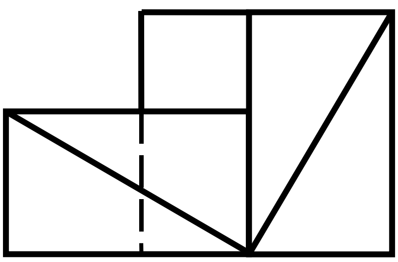


Prueba 2.

Sea el triángulo rectángulo ABC. Si a la figura ABDGJ se le sustraen los triángulos AJH, BDE, HEG, iguales al dado, resulta el cuadrado ABEH sobre la hipotenusa AB, mientras que sustrayendo los triángulos ABC, CIG, CFG, resulta la figura formada por los cuadrados ACIJ, BCFD, sobre los catetos AC, BC.

La demostración de Bhaskara (1114–1185)





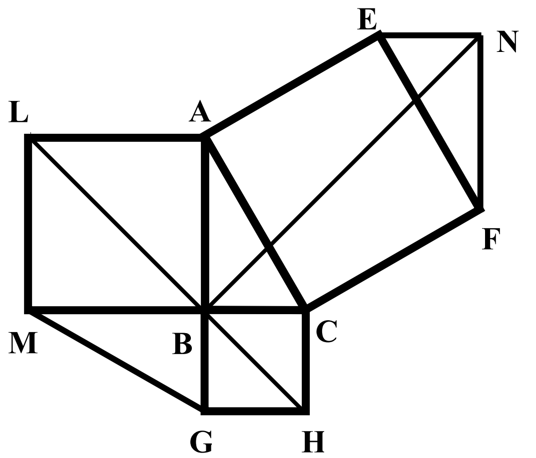
El monje, matemático y astrónomo hindú, Bhaskara dio una demostración muy sencilla del Teorema de Pitágoras, del tipo de *congruencia por sustracción*, basada en los diagramas adjuntos, que aparece en el *Vijaganita* (cálculo de raíces).

El cuadrado sobre la hipotenusa se divide, como indica la figura, en cuatro triángulos equivalentes al dado y un cuadrado de lado igual a la diferencia de los catetos. Las piezas son reordenadas fácilmente para formar una figura que resulta ser la yuxtaposición de los cuadrados sobre los catetos.

La prueba geométrica se traduce enseguida en términos algebraicos al expresar la igualdad de las figuras dibujadas:

$c^2 = 4\cdot[(1/2)ab] + (b-a)^2 = 2ab + b^2-2ab+a^2 = b^2+a^2$.

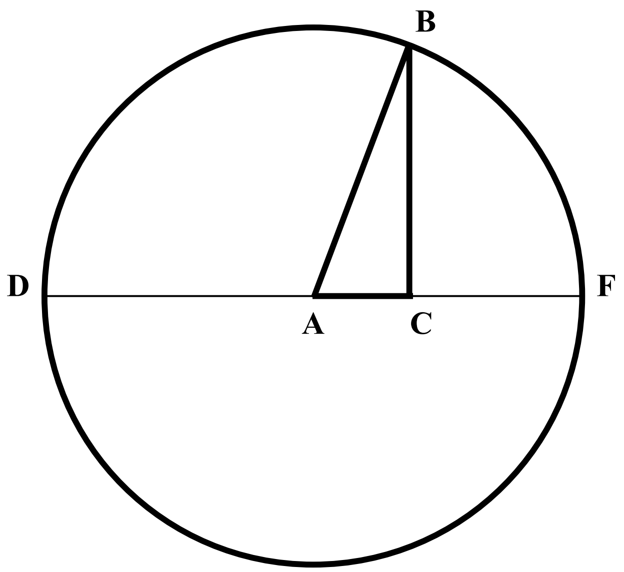
La demostración de Leonardo da Vinci (1452–1519)



Leonardo da Vinci muestra también su ingenio con una prueba del *Teorema de Pitágoras* del tipo de *congruencia por sustracción.*

El esquema habitual de los cuadrados sobre los lados del triángulo rectángulo dado ABC es completado con los triángulos MBG y ENF equivalentes al dado. La recta LH común a las diagonales de los cuadrados sobre los catetos determina dos cuadriláteros LMGH, LACH, iguales. Asimismo la recta NB determina dos cuadriláteros BAEN, BCFN, iguales, y a su vez iguales a los resultantes de la división anterior, de donde resulta el Teorema al sustraer a cada uno de los pares de cuadriláteros dos triángulos rectángulos equivalentes al dado.

La demostración de Vieta (1540–1610)



La demostración de Vieta es, sin duda, una de las más sencillas y originales.

A partir de la figura resulta:

$DC = DA+AC = AB + AC$, $CF = AF - AC = AB - AC$

$DC \cdot CF = (AB+AC)\cdot(AB-AC)=AB^2-AC^2$.

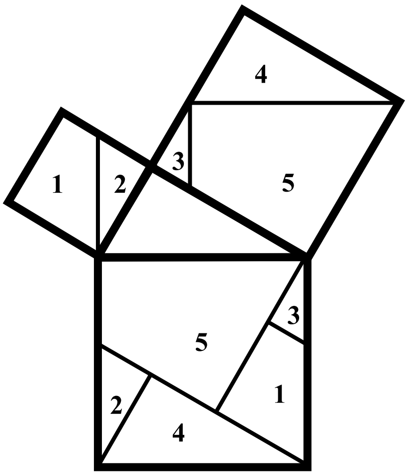
Aplicando potencia respecto de la circunferencia (*Euclides* III.35) resulta:

$DC \cdot CF=CB^2$,

de donde se obtiene:

$AB^2=AC^2+ CB^2$.

La demostración de Anaricio–Göpel (hacia 1824)

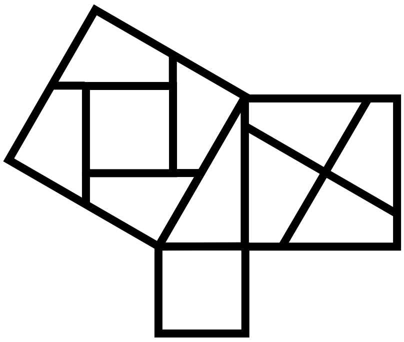


La figura ofrece la descomposición del cuadrado construido sobre la hipotenusa en cinco partes, que reordenadas convenientemente proporcionan los cuadrados construidos sobre los catetos.

Tomando como criterio de sencillez el número de partes en que se divide el cuadrado sobre la hipotenusa, la prueba de Anaricio–Göpel –que es del tipo *congruencia por adición*– es una de las más notables, por eso se la considera como el ejemplo paradigmático de las pruebas del Teorema tipo puzzle.

La demostración de Perigal (hacia 1830)

Henry Perigal era un corredor de bolsa londinense y astrónomo aficionado que ideó hacia 1830 una sencilla prueba del *Teorema de Pitágoras* del tipo *congruencia por adición,* muy singular y elegante por su simetría, siendo publicada en su artículo «*On geometric dissections and transformations*» (M*essenger of Mathematics,* Vol. I, 1874, pp.103-105)

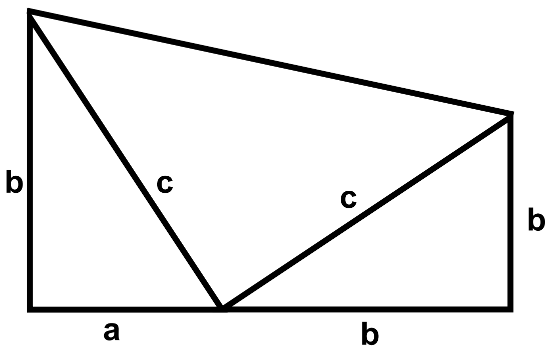


El cuadrado sobre el mayor de los catetos del triángulo rectángulo se divide en cuatro partes iguales, mediante dos segmentos perpendiculares que se cortan en el centro del cuadrado, siendo, además, uno de ellos paralelo a la hipotenusa. Desplazando paralelamente estas cuatro piezas, junto con el cuadrado sobre el cateto menor, es posible componer, yuxtaponiendo las cinco piezas, el cuadrado sobre la hipotenusa.

Perigal estaba tan entusiasmado con el hallazgo que hizo imprimir el anagrama de la figura en sus tarjetas de visita y repartió centenares de rompecabezas con las piezas que compuestas adecuadamente de dos maneras diferentes ilustraban el *Teorema de Pitágoras*. En el Este de Londres se le erigió un monumento con inscripciones que sintetizan su actuación matemática.

La demostración de Garfield (hacia 1876)

El veinteavo presidente de los Estados Unidos J.A.Garfield, que había desarrollado en su época de estudiante una gran habilidad y un gran interés por las Matemáticas, obtuvo una sencilla prueba del Teorema de Pitágoras, mientras era miembro de la Cámara de Representantes, cinco años antes de convertirse en presidente. Garfield encontró la prueba en una discusión matemática con algunos miembros del Congreso y enseguida se publicó en el *New England Journal of Education*.



La prueba de Garfield consiste en calcular de dos formas distintas el área del trapecio de la figura, en primer lugar utilizando la fórmula del área del trapecio (semisuma de los lados paralelos multiplicada por la distancia entre ellos) y en segundo lugar mediante la suma de las áreas de los tres triángulos rectángulos en que el trapecio puede ser seccionado, resultando: $(a+b)\cdot(a+b)/2 = (ab/2)+(ba/2)+c^2/2$, de donde se obtiene: $a^2+2ab+b^2 = 2ab+c^2$, es decir: $a^2+b^2 = c^2$.

El mayor repertorio de pruebas del teorema pitagórico

E.S.Loomis, profesor de Matemáticas (1885–95) de la Universidad de Baldwin (E.E.U.U) y Jefe del Departamento de Matemáticas (1895-1923) de la West High School (en Cleveland, Ohio), realizó durante muchos años una recopilación exhaustiva de las múltiples pruebas que se han dado del *Teorema de Pitágoras* a lo largo de la historia. Su encomiable labor de investigación, dio como fruto la publicación en 1927 de una magna obra de gran valor didáctico, *The Pythagorean Proposition*. El texto de E.S.Loomis –magnífica compilación donde se codifican hasta 370 pruebas del *Teorema de Pitágoras*– fue reeditado en1940 (en Ann Arbor, Michigan) y en 1968 como el primer título de una serie de «*Classics in Mathematics Education*» de la National Council of Teachers of Mathematics.

En el prefacio de su obra Loomis intenta discernir entre lo que es una auténtica demostración y una mera ilustración del *Teorema de Pitágoras* y realiza una clasificación de las pruebas en cuatro tipos:

1. Pruebas algebraicas: basadas en relaciones entre lados y segmentos (109).
2. Pruebas geométricas: basadas en comparaciones de áreas (255).
3. Pruebas dinámicas: basadas en los conceptos de masa, velocidad, fuerza, etc. (4).
4. Pruebas cuaterniónicas: basadas en operaciones vectoriales (2).

Además, Loomis establece que el número de pruebas algebraicas es ilimitado, también el de las geométricas –aunque sólo hay diez tipos de figuras que permiten establecer una prueba– y que una prueba trigonométrica es imposible.

A propósito de la diversa pluralidad de pruebas del *Teorema de Pitágoras* y sobre la obra de Loomis escribe W.Dunham en su obra *El Universo de las Matemáticas* (Pirámide. Madrid, 1995. Cap.H –La Hipotenusa–, pp.136–153:

> «*El Teorema de Pitágoras es un profundo resultado sobre triángulos rectángulos que ha permitido a los matemáticos atajar en su trabajo durante siglos. Este teorema es, seguramente, el más grande de todas las Matemáticas. Si la grandeza de un teorema se midiera por el número de demostraciones diferentes de que puede presumir, entonces la obra maestra de Pitágoras gana con diferencia, pues existen literalmente cientos de argumentaciones que establecen su validez.* [...] *El profesor Loomis reunió y publicó a principios del siglo XX numerosas pruebas en un libro algo excéntrico llamado The Pythagorean Proposition que deja muy claro que este teorema ha tenido ocupados a los matemáticos desde la época clásica hasta el presente* (p.137).
>
> *Cada argumento demostrativo ilustra una joya de sabiduría matemática* [...] *y los que digieran una determinada demostración tendrán pronto otra vez hambre de conocimientos matemáticos* (p.141).
>
> *Tantas demostraciones convencerán al más recalcitrante escéptico. Por supuesto, se podría preguntar por la necesidad de demostrar el mismo resultado de múltiples maneras. ¿No son estas pruebas extra redundantes? Lo son en un sentido práctico. No hay una necesidad lógica de probar un teorema más de una vez. Pero hay razones estéticas para reexplorar el mismo fundamento. Por la misma razón que si alguien escribiera una canción de amor, ello no debería impedir que otros autores de esas canciones siguieran escribiéndolas, aunque con una melodía diferente, otras letras o distinto ritmo, de la misma manera estas diferentes demostraciones del Teorema de Pitágoras revelan diferentes melodías y ritmos matemáticos, no menos bellos por tratar un tema antiguo* (p.151).
>
> *Ni una riada de demostraciones diferentes diluirá la importancia de este gran resultado. Pues con independencia de la frecuencia con que se demuestre, el Teorema de Pitágoras logra siempre retener su belleza, su frescura y su eterno sentido de admiración* (p.153)

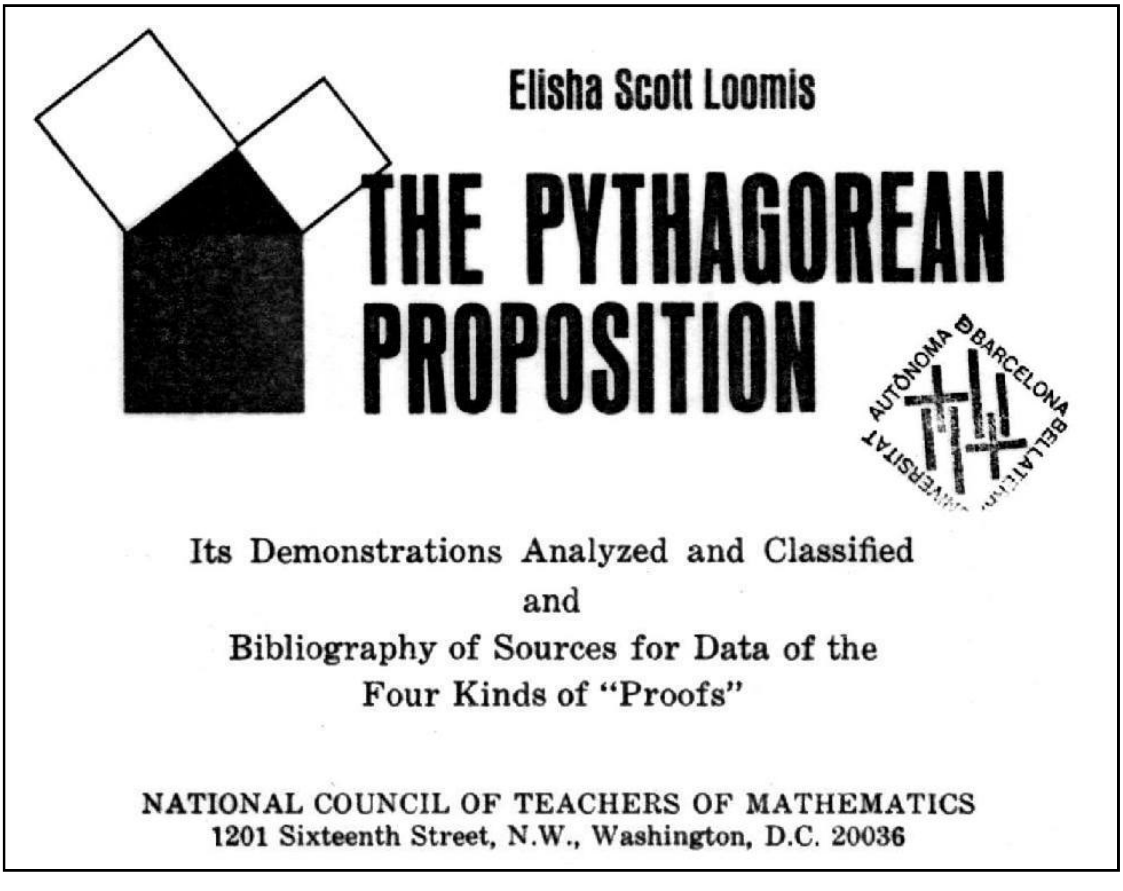
A continuación transcribiremos de la obra de Loomis unas cuantas pruebas del *Teorema de Pitágoras*, que, a nuestro criterio, son muy ilustrativas y tienen un gran valor didáctico. Estas pruebas las clasificaremos en tres tipos: algebraico-geométricas, tipo puzzle o «*de cortar y pegar*» y geométricas. Entre estas últimas describiremos las que son variantes de las demostraciones de Pitágoras y de Euclides.

EL MAYOR COMPENDIO DE PRUEBAS DEL *TEOREMA DE PITÁGORAS*

Elisha S. Loomis en una fotografía de 1935 y su magnífica obra de largo título: *The Pythagorean Proposition, Its Demostrations Analyzed and Classified*. (National Council of Teachers of Mathematics. «*Classics in Mathematics Education*». Washington, 1968.

La recopilación de Loomis es, sin duda alguna, una de las más importantes colecciones de pruebas y demostraciones del *Teorema de Pitágoras.*

La obra de Loomis contiene 370 pruebas o demostraciones donde las correspondientes figuras, son dibujadas de forma artesanal con los limitados medios gráficos de la época y con las letras manuscritas, lo que no le resta mérito a una obra de valor científico y didáctico inconmensurable que tiene la gracia de concluir con la frase: «[...] *y el final no ha llegado todavía*».



Elisha Scott Loomis

THE PYTHAGOREAN PROPOSITION

Its Demonstrations Analyzed and Classified

and

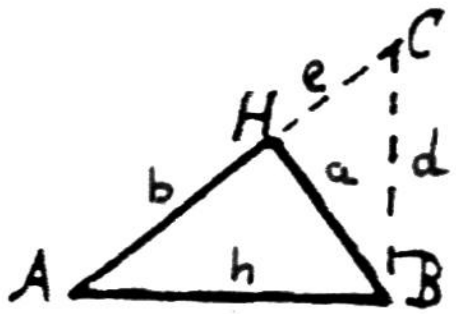
Bibliography of Sources for Data of the

Four Kinds of "Proofs"

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS

1201 Sixteenth Street, N.W., Washington, D.C. 20036

Algunas pruebas algebraico-geométricas del *Teorema de Pitágoras*

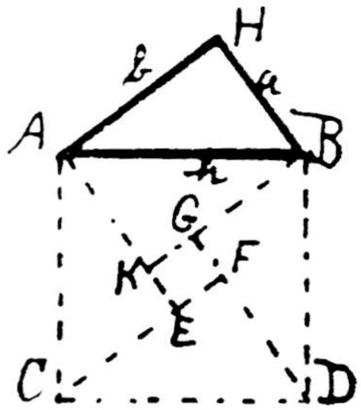


AG.1

A partir del triángulo dado HAB, se construye el triángulo BAC, también rectángulo, aplicando *el teorema de la altura* y *el teorema del cateto* al triángulo ABC, resulta:

$$a^2 = b \cdot e\ ,\quad h^2 = (b + e) \cdot b\ ,$$

de donde resulta: $h^2 = a^2 + b^2$.



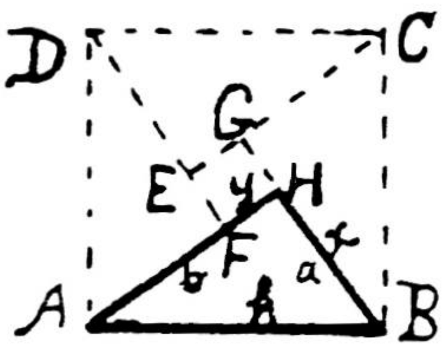
AG.2

El cuadrado sobre la hipotenusa h, ACBD, se descompone en cuatro triángulos iguales al ABH, más un cuadrado EFGK de lado b–a. De donde resulta:

$$h^2 = 4 \cdot (ab/2) + (b - a)^2 = 2ab + (b^2 - 2ab + a^2).$$

Así pues:

$$h^2 = a^2 + b^2\ .$$



AG.3

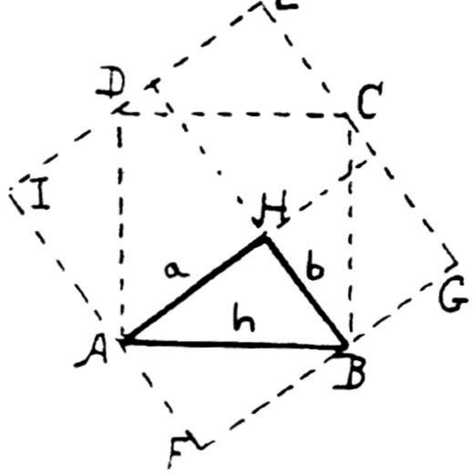
Sea BH=x, HF=y, entonces AH=x+y.

El cuadrado sobre la hipotenusa h, ABCD, se compone de cuatro triángulos iguales al ABH, más un cuadrado EFHG. Por tanto resulta:

$$h^2 = 4 \cdot \frac{x \cdot (x+y)}{2} + y^2 = 2x^2 + 2xy + y^2 =$$

$$h^2 = x^2 + x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + (x+y)^2 = a^2 + b^2.$$

Así pues: $h^2 = a^2 + b^2$.



AG.4

El cuadrado EIFG se compone del cuadrado sobre la hipotenusa del triángulo dado ABH, ABCD, y de cuatro triángulos iguales al ABH. Por tanto resulta:

$$(a+b)^2 = h^2 + 4 \cdot (ab/2).$$

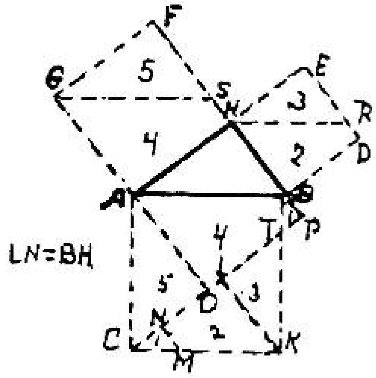
Haciendo operaciones resulta:

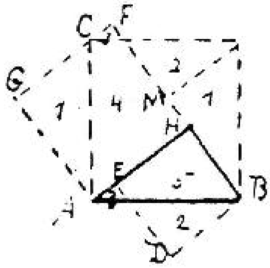
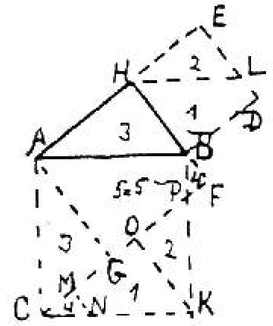
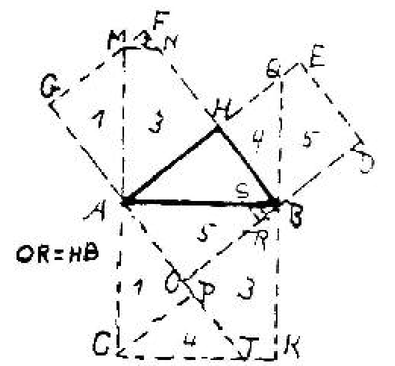
$$a^2 + 2ab + b^2 = h^2 + 2ab\ ,$$

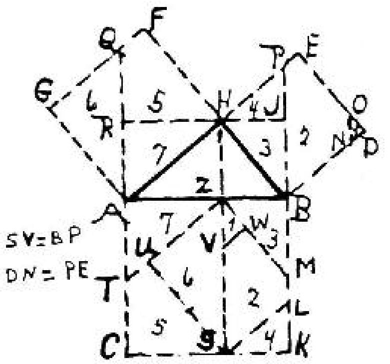
de donde simplificando se obtiene: $a^2 + b^2 = h^2$.

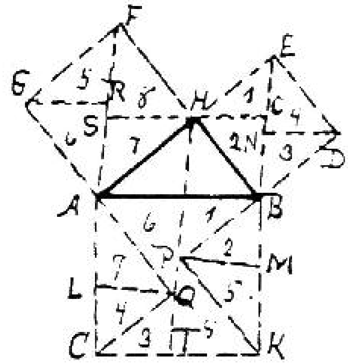
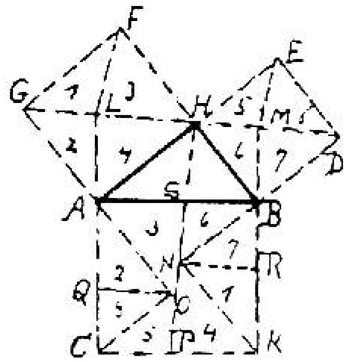
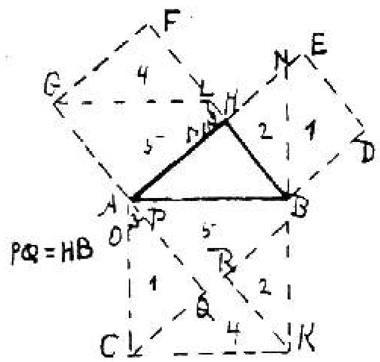
Pruebas del *Teorema de Pitágoras* tipo *puzzle* o de *cortar y pegar*

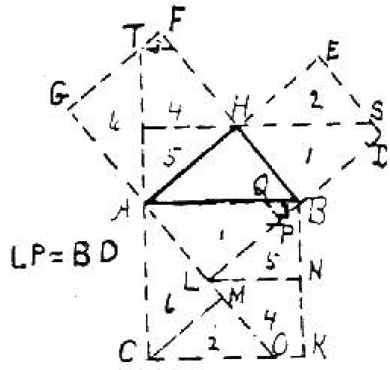
Este tipo de pruebas no requieren aclaración alguna, son similares a la de Anaricio y a la de Perigal. De cada esquema resulta un *puzzle* en el que una combinación de las piezas nos da el cuadrado sobre la hipotenusa y otra los dos cuadrados sobre los catetos. He aquí una muestra representativa de las pruebas de este tipo que exhibe el texto de Loomis:

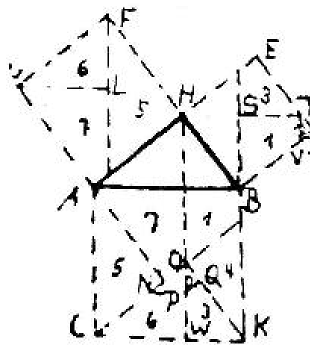
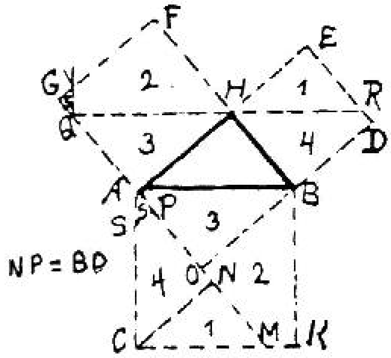


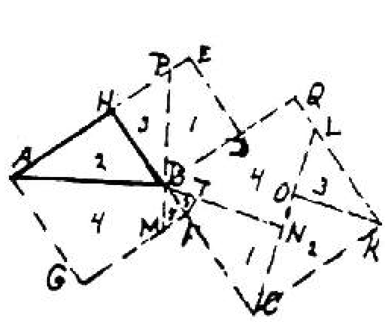








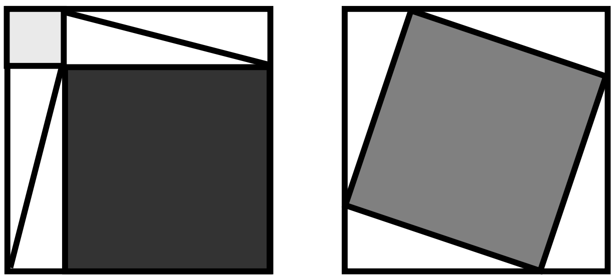



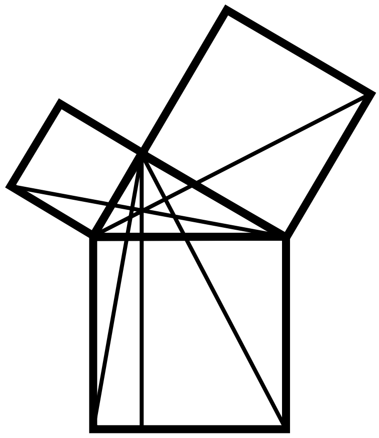


Pruebas geométricas del *Teorema de Pitágoras*

Pruebas *tipo Pitágoras* y pruebas *tipo Euclides*

La obra de Loomis presenta 255 pruebas geométricas del *Teorema de Pitágoras* basadas en comparaciones de áreas. Entre ellas las más interesantes quizá sean las que llamaremos «*demostraciones tipo Pitágoras*» y «*demostraciones tipo Euclides*», por similitud, respectivamente, con las correspondientes demostraciones de Pitágoras y Euclides desarrolladas con base en las siguientes figuras:

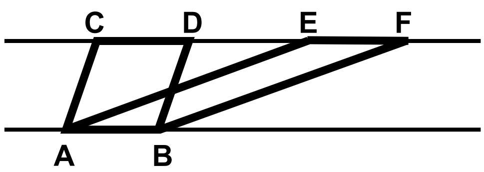




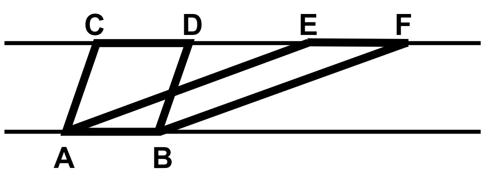
En las *demostraciones tipo Pitágoras* el cuadrado sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo dado junto con ciertos triángulos congruentes con el dado o rectángulos formados por dos triángulos congruentes con el dado, determina una figura, que resulta también a partir de la yuxtaposición de los cuadrados sobre los catetos del triángulo rectángulo dado con los mismos triángulos o rectángulos, de donde se obtiene mediante una prueba de *congruencia por sustracción* que «*el cuadrado sobre la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados sobre los catetos*».

Las múltiples *demostraciones tipo Pitágoras* se diferencian únicamente en las diversas posiciones relativas de los triángulos y rectángulos aludidos. La diferencia de estas demostraciones con la original de Pitágoras se reduce a que ésta utiliza dos figuras mientras que aquéllas con una única figura resuelven la demostración.

En las *demostraciones tipo Euclides* se utiliza principalmente la relación entre las áreas de paralelogramos y triángulos situados entre las mismas paralelas –tal como se vio en la demostración original de Euclides y en la de Pappus–, según se indica en las siguientes figuras



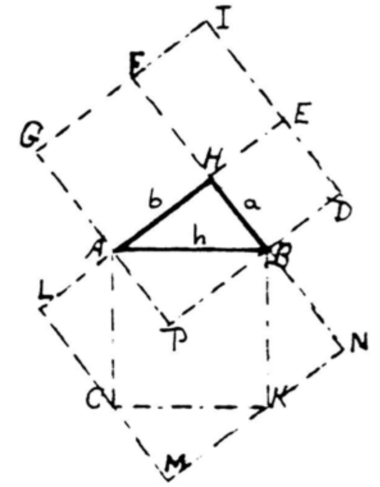
Los paralelogramos ABCD y ABEF tienen el mismo área, ya que ambos tienen la misma base AB, y al estar situados entre paralelas tienen la misma altura (*Euclides*, I.36).



El paralelogramo ABCD tiene área doble que el triángulo ABE, tienen el mismo área, ya que ambos tienen la misma base AB, y al estar situados entre paralelas tienen la misma altura (*Euclides*, I.41).

Vemos pues que los modelos de Pitágoras y Euclides de las demostraciones del *Teorema de Pitágoras* son verdaderos cánones paradigmáticos que subrayan la genialidad de estos dos matemáticos.

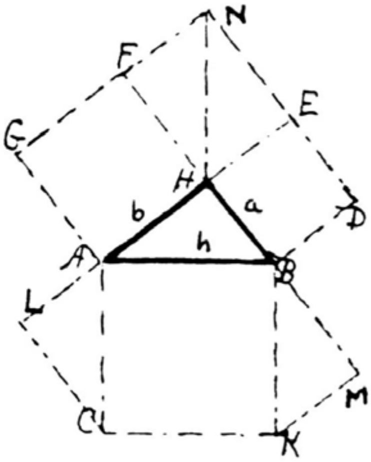
Demostraciones *tipo Pitágoras* del *Teorema de Pitágoras*



El cuadrado ACKB construido sobre la hipotenusa del triángulo dado ABH, completado con cuatro triángulos rectángulos congruentes con el dado, determina el cuadrado HLMN, que es igual al cuadrado GPDI, el cual a su vez se puede obtener al completar los dos cuadrados sobre los catetos, AHFG, HBDE, con sendos rectángulos iguales entre sí e iguales en área a los cuatro triángulos anteriores.

Por tanto: ACKB = AHFG + HBDE ,

Es decir: $h^2 = a^2 + b^2$.



Los polígonos HMKCL y NDBAG son congruentes.

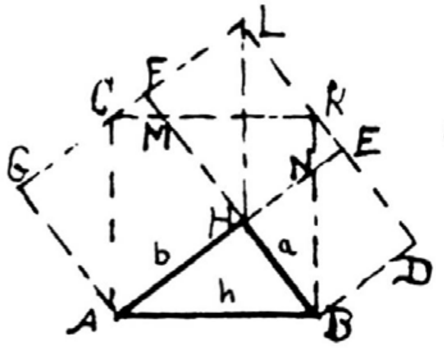
El polígono HMKCL se obtiene al completar el cuadrado sobre la hipotenusa del triángulo dado ABH, ABKC, con tres triángulos rectángulos congruentes con el dado.

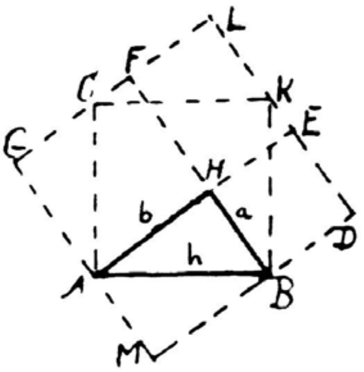
El polígono NDBAG se obtiene al completar los dos cuadrados sobre los catetos del triángulo dado ABH, HBDE y HAGF, con tres triángulos rectángulos congruentes también con el dado.

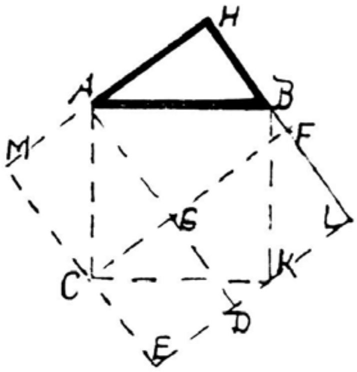
Por tanto: ABKC = HAGF + HBDE ,

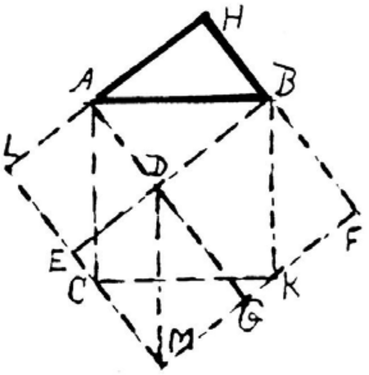
Es decir: $h^2 = a^2 + b^2$.

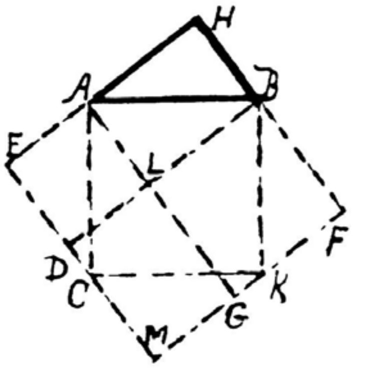
De forma totalmente análoga se razona la demostración del *Teorema de Pitágoras* a través de las seis figuras siguientes.

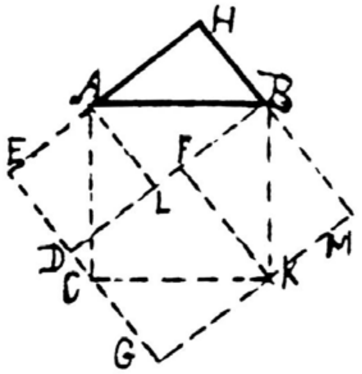




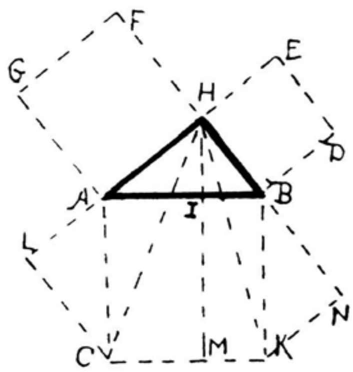








Demostraciones *tipo Euclides* del *Teorema de Pitágoras*



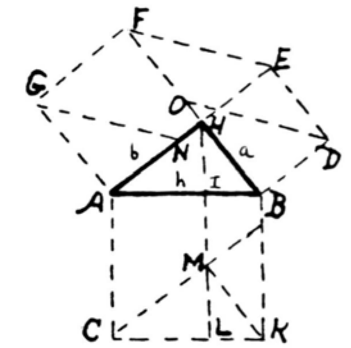
Se trata de una demostración que utiliza una figura muy parecida a la de Euclides.

Se prolonga el cateto HA hasta L, tomando AL=HE, y el cateto HB hasta N, tomando BN=HF. Se traza la perpendicular HM, y se une L y H con C, y H y N con K.

Obviamente los triángulos ALC y BNK son iguales al triángulo dado ABH. Se tiene entonces:

$ACKB=ACMI+BKMI=2ACH+2BKH=AH\cdot CL+BH\cdot KN=AH^2+BH^2=$
$=AHFG+HBDE.$

Es decir: «*el cuadrado sobre la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados sobre los catetos*»



En la figura se toma:

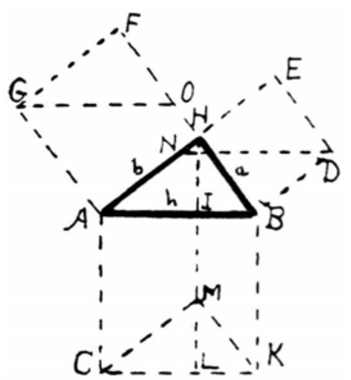
BO=OH y AN =BH, y se completa como se indica.

Se tiene entonces:

ACKB = ACLI + BKLI = ACMH + BKMH = GNEF +FODE = AHFG + BHED.

Por tanto: ACKB = AHFG + BHED.

Es decir: $h^2 = a^2 + b^2$.



En este caso la construcción de la figura es evidente.

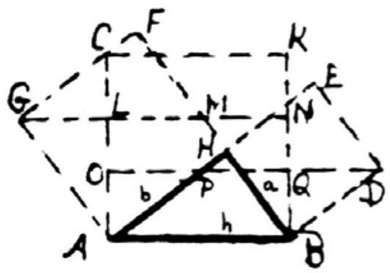
Se tiene:

ACKB = ACLI + BKLI = ACMH + BKMH = ABOG + ABDN =

= AHFG + BHED.

Por tanto: ACKB = AHFG + BHED.

Es decir: $h^2 = a^2 + b^2$.



En la figura se trazan GN y OD paralelas a AB.

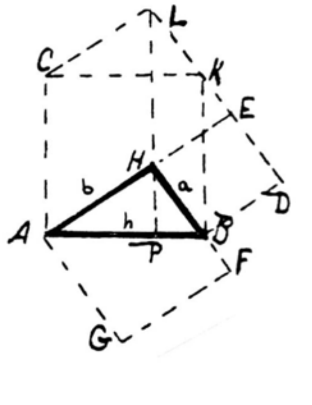
En este caso tenemos:

ABKC = ABQO + OQNL = ABDH + ABNL =

= BHED + ABMG= BHED + AHFG.

Por tanto: ABKC = BHED + AHFG.

Es decir: $h^2 = a^2 + b^2$.



En la figura se traza CL paralela a AH y KL paralelo a BH, y a través de H se traza LP. Se tiene entonces:

ABKC = AHBKLC = AHLC + BHLK = AHFG + BHED

Por tanto: ABKC = BHED + AHFG.

Es decir: $h^2 = a^2 + b^2$.

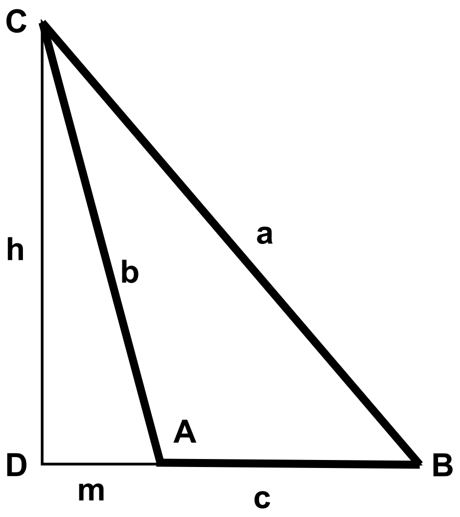
Aplicaciones y generalizaciones del *Teorema de Pitágoras*

Los antecedentes del *Teorema del coseno*

Casi al final del Libro II de *Los Elementos de Euclides* –en las Proposiciones 12 y 13– aparecen dos teoremas que anuncian la Trigonometría. Se trata de formulaciones geométricas primero para el ángulo obtuso y después para el ángulo agudo de lo que después se llamaría *Teorema del Coseno* para triángulos planos.

Euclides II.12 [Teorema del cuadrado del lado opuesto a un ángulo obtuso]:

«*En los triángulos obtusángulos, el cuadrado del lado que subtiende* [el opuesto] *el ángulo obtuso es mayor que los cuadrados de los lados que lo comprenden en dos veces el rectángulo* [formado por uno de los lados del ángulo obtuso y la proyección del otro sobre él] *comprendido por aquél de los lados del ángulo obtuso sobre el que cae la perpendicular y por la recta exterior cortada por la perpendicular, hasta el ángulo obtuso.*»



La demostración de Euclides desarrolla lo que en términos algebraicos escribiríamos en la forma:

al aplicar la Proposición I.47 (*Teorema de Pitágoras*) al triángulo rectángulo BDC, resulta: $a^2 = h^2 + (m + c)^2$.

Pero según la Proposición II.4 de *Los Elementos*:

$$(m + c)^2 = m^2 + c^2 + 2\, m{\cdot}c,$$

de modo que se tiene:

$$a^2 = h^2 + m^2 + c^2 + 2\, m{\cdot}c = b^2 + c^2 + 2c{\cdot}m,$$

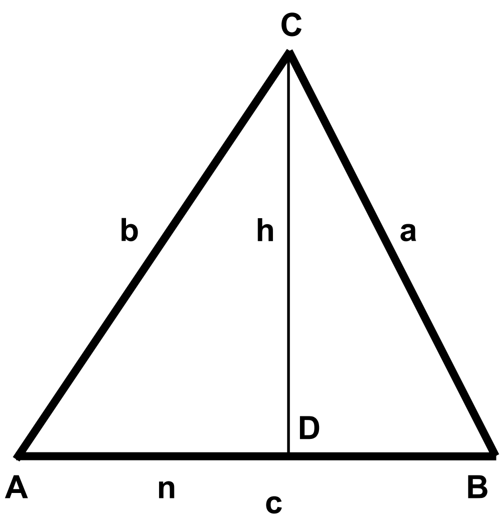
habiéndose aplicado de nuevo la Proposición I.47.

Es decir: $a^2 = b^2 + c^2 + 2c{\cdot}m$, según enuncia Euclides.

Ahora si aplicamos la definición de coseno de un ángulo: $m = b{\cdot}\cos(180–A) = –b \cos A$, de donde resulta a partir de la Proposición II.12 la ley del coseno para triángulos obtusángulos: $a^2 = b^2 + c^2 – 2bc \cos A$.

Euclides, II.13 [Teorema del cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo]:

«*En los triángulos acutángulos, el cuadrado del lado que subtiende un ángulo agudo es menor que los cuadrados de los lados que lo comprenden en dos veces el rectángulo comprendido por uno de los lados del ángulo agudo sobre el que cae la perpendicular y por la recta interior cortada por la perpendicular, hasta el ángulo agudo.*»



Al aplicar la Proposición I.47 (*Teorema de Pitágoras*) al triángulo rectángulo BDC, resulta:

$$a^2 = h^2 + (c – n)^2.$$

Pero según la Proposición II.7:

$$(c – n)^2 = c^2 + n^2 – 2\, n{\cdot}c,$$

de modo que se tiene:

$$a^2 = h^2 + c^2 + n^2 – 2\, n{\cdot}c = b^2 + c^2 – 2c{\cdot}n.$$

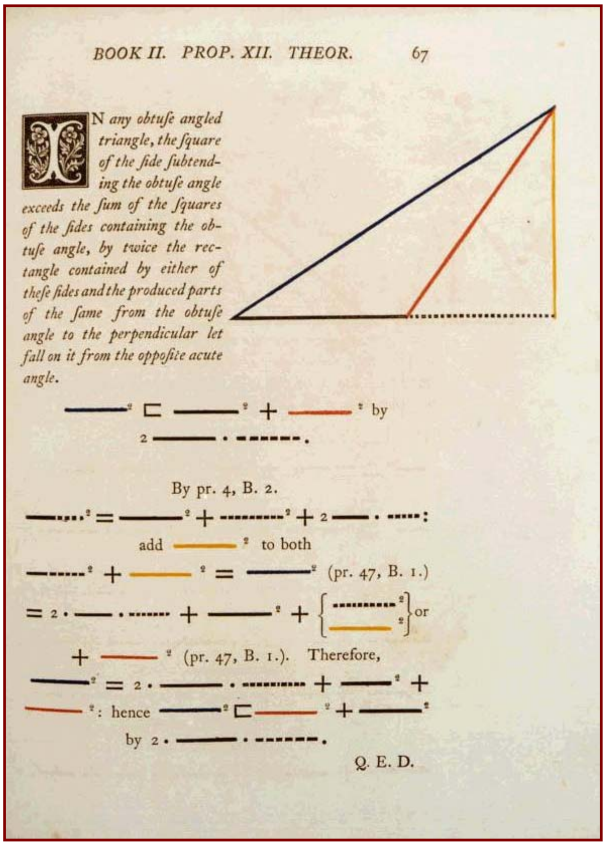
Es decir: $a^2=b^2+c^2–2c{\cdot}n$, según enuncia Euclides.

Ahora bien como $n = b{\cdot}\cos A$, resulta la ley del coseno para un ángulo agudo de un triángulo:

$$a^2 = b^2 + c^2 – 2bc \cos A.$$

GENERALIZACIONES DEL *TEOREMA DE PITÁGORAS*

LAS PROPOSICIONES II.12, II.13 DE *LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES* Y LOS ANTECEDENTES DEL *TEOREMA DEL COSENO*



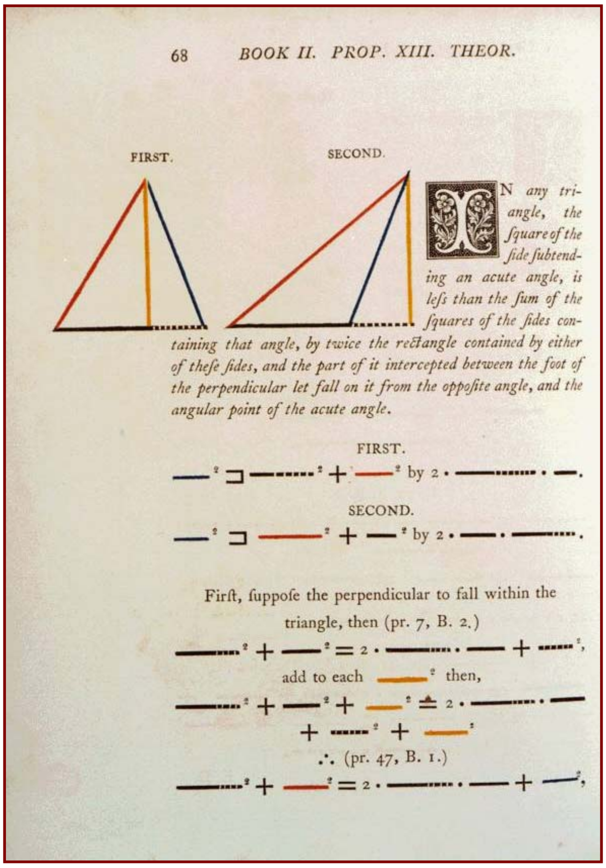
Las Proposiciones II.12 y II.13 de *Los Elementos de Euclides*, la edición visual de Oliver Byrne (Londres, 1847).

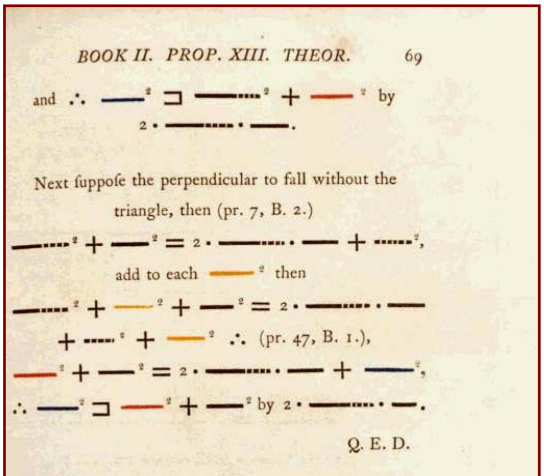
Estas proposiciones de Euclides, llamadas habitualmente «*Teorema del cuadrado del lado opuesto a un ángulo obtuso de un triángulo*» y «*Teorema del cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo de un triángulo*», forman parte ineludible –como el propio *Teorema de Pitágoras*– de la matemática escolar elemental.

Ambos teoremas son tanto una generalización de la Proposición I.47 –el *Teorema de Pitágoras*– para triángulos cualesquiera como una versión geométrica pre-trigonométrica de los *Teoremas del coseno* de los triángulos.

El matemático alejandrino del siglo I d.C. Herón –célebre por su famosa fórmula para el cálculo del área S de un triángulo tomando como datos los tres lados, a, b, c, $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ –, demostró ciertos teoremas inversos, en cierto modo, de las proposiciones II.12 y II.13, de manera que en conjunto cada teorema y su inverso permiten caracterizar a los triángulos obtusángulos y acutángulos tal como las Proposiciones I.47 y I.48 caracterizan los triángulos rectángulos.

- **Un triángulo es rectángulo si y sólo si el cuadrado del lado opuesto al ángulo recto –hipotenusa– es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados –catetos–.**
- **Un triángulo es obtusángulo si y sólo si el cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso es mayor que la suma de los cuadrados de los otros dos lados.**
- **Un triángulo es acutángulo si y sólo si el cuadrado de cualquier lado es menor que la suma de los cuadrados de los otros dos lados.**





En conjunto, las Proposiciones II.12 y II.13 complementan a la Proposición I.47 –el Teorema de Pitágoras–, de modo que los tres teoremas completan una teoría de las relaciones entre los cuadrados de los lados de cualquier triángulo, ya sea rectángulo, obtusángulo o acutángulo.

Además, las proposiciones II.12 y II.13 son el antecedente directo de las leyes trigonométricas del coseno de los ángulos de un triángulo.

La Proposición VI.31 de *Los Elementos* de Euclides

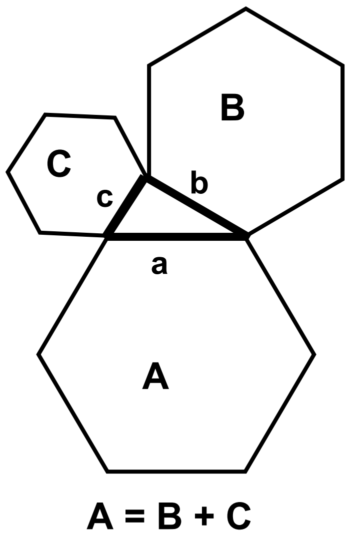
Casi al final del libro VI de *Los Elementos* de Euclides aparece una interesante generalización del *Teorema de Pitágoras* que sustituye los cuadrados sobre los lados por figuras semejantes y semejantemente situadas sobre los lados del triángulo rectángulo. Se trata de la Proposición VI.31:

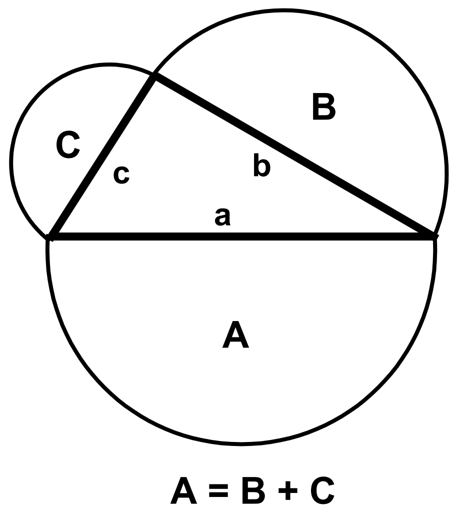
> «*En los triángulos rectángulos, la figura construida a partir del lado que subtiende el ángulo recto es equivalente a las figuras semejantes y construidas de manera semejante a partir de los lados que comprenden el ángulo recto.»*

En particular Proposición VI.31 se puede aplicar a figuras poligonales regulares y a círculos en las que el área es una función del cuadrado del lado. De modo que podríamos enunciar los siguientes teoremas:

a. *El área de un polígono regular construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo, es igual a la suma de las áreas de los polígonos regulares semejantes construidos sobre los catetos del triángulo.*

b. *El área de un círculo (o semicírculo) construido sobre la hipotenusa (tomada como diámetro) de un triángulo rectángulo, es igual a la suma de las áreas de los círculos (o semicírculos) construidos sobre los catetos*.

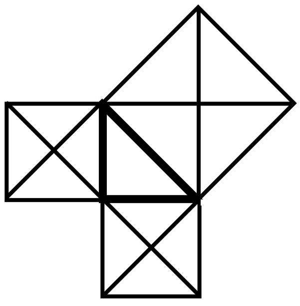




Aplicación de una generalización del *Teorema de Pitágoras* a polígonos regulares y al semicírculo (*Euclides,* VI.31) debida –según Proclo– a Euclides.

La Proposición VI.31 de *Los Elementos* de Euclides resuelve también el problema siguiente:

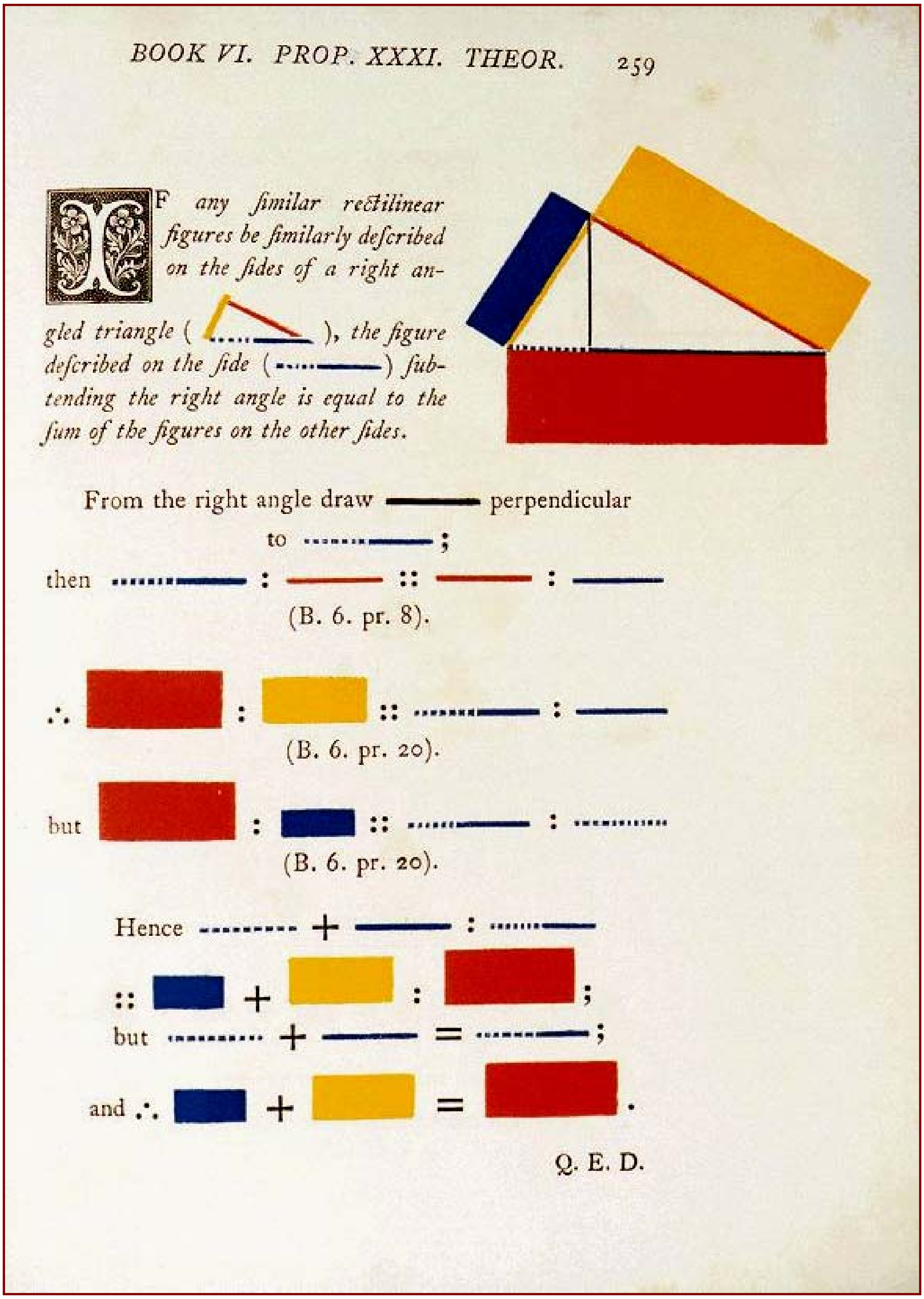
c. *Dados dos polígonos regulares P y Q, ambos de n lados, calcular el lado del polígono regular de n lados, que tenga por área la suma de las áreas de los polígonos P y Q.*



En particular, este último resultado, al tomar los polígonos P y Q iguales, resuelve el problema de la duplicación de cualquier polígono regular –dado un polígono regular construir un polígono regular del mismo número de lados y de área doble–, generalización del problema platónico del diálogo *El Menón* de la «*duplicación del cuadrado*».

GENERALIZACIONES DEL *TEOREMA DE PITÁGORAS*

LA PROPOSICIÓN VI.31 DE *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES


BOOK VI. PROP. XXXI. THEOR. 259

If any ſimilar rectilinear figures be ſimilarly deſcribed on the ſides of a right angled triangle ( ), the figure deſcribed on the ſide ( ) ſubtending the right angle is equal to the ſum of the figures on the other ſides.

From the right angle draw perpendicular to ;

then : :: :

(B. 6. pr. 8).

∴ : :: :

(B. 6. pr. 20).

but : :: :

(B. 6. pr. 20).

Hence + :

:: + : ;

but + = ;

and ∴ + = .

Q. E. D.

La Proposición VI.31 de *Los Elementos de Euclides* en la edición visual de O.Byrne (Londres, 1847).

Esta importante generalización del *Teorema de Pitágoras* es atribuida al propio Euclides por Proclo en su *Comentario* al Libro I de *Los Elementos* de Euclides cuando escribe:

> ***«Mientras admiro a los que han observado la verdad de este teorema* [la Proposición I.47], *ensalzo más todavía al escritor de Los Elementos, no sólo porque consiguió una demostración mucho más lúcida, sino también porque obtuvo un teorema mucho más general, mediante los irrefutables argumentos de la ciencia del Libro VI.»***

Las lúnulas de Hipócrates

Hipócrates de Quíos (hacia el 450 a.C.) consigue la primera cuadratura rigurosa de una figura curvilínea en la Historia de la Matemática, y en su trabajo juega un papel fundamental el *Teorema de Pitágoras* o la generalización de la Proposición VI.31 de *Los Elementos* de Euclides.

Hipócrates sitúa su actuación sobre cuadraturas de lúnulas –figuras planas curvilíneas cerradas limitadas por arcos de círculo de radios diferentes, ambos de la misma parte de una cuerda común– en el marco del famoso problema de la *cuadratura del círculo* que consiste en encontrar un cuadrado que tenga el mismo área que un círculo dado. Hipócrates no resuelve el problema de la cuadratura del círculo, ni tampoco el problema general de cuadrar cualquier lúnula, pero sí obtiene la cuadratura de lúnulas en algunos tres casos sencillos muy ilustrativos, correspondientes a cada uno de los tipos en que se dividen las lúnulas, según que el arco exterior sea mayor, igual o menor que una semicircunferencia.

Proclo en su *Comentario al Libro I de los Elementos de Euclides*, siguiendo al historiador de la Matemática del Liceo aristotélico, Eudemo de Rodas (hacia el 335 a.C.), informa que Hipócrates escribió unos *Elementos de Geometría* –la primera concatenación lógica de las proposiciones en un *corpus* racional– ahora perdidos, donde habría tratado, quizá a propósito del intento de resolver el problema de la cuadratura del círculo, la cuadratura de las lúnulas y en donde aparecería el famoso teorema (*Euclides*, XII.2):

> «*Los círculos están entre sí como los cuadrados de sus diámetros*»

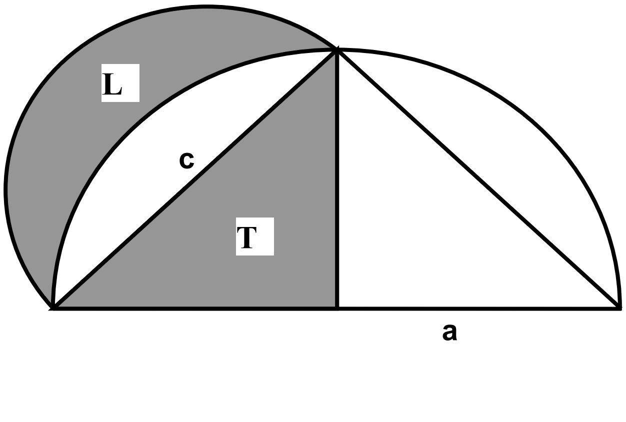
teorema que generalizando permite enunciar para segmentos semejantes de círculos (que subtienden ángulos iguales) de círculo:

> «*Segmentos semejantes de círculo están entre sí en la misma razón que los cuadrados construidos sobre sus bases* [cuerdas].»

Estos resultados serán considerados reiteradamente por Eudoxo, Euclides y Arquímedes en sus cuadraturas y cubaturas, y su importancia histórica es muy considerable, ya que le permitieron a Hipócrates probar que ciertas áreas limitadas por líneas curvas –ciertas *lúnulas*–, son conmensurables con áreas limitadas por líneas rectas, es decir, realizar la cuadratura de lúnulas.

Al utilizar crecientemente lúnulas de mayor tamaño, Hipócrates intentaría vanamente resolver el problema quimérico de la *cuadratura del círculo*. No sabemos si Hipócrates estaba convencido de haber resuelto el problema; es posible que así sea, porque recibiría la dura acusación de Aristóteles de haber incurrido en paralogismo.

Veamos el caso más simple de cuadratura de una lúnula, en la que el arco exterior es una semicircunferencia y tiene de cuerda el lado de un cuadrado inscrito en la semicircunferencia a la que pertenece el arco exterior de la lúnula.



LAS LÚNULAS DE HIPÓCRATES

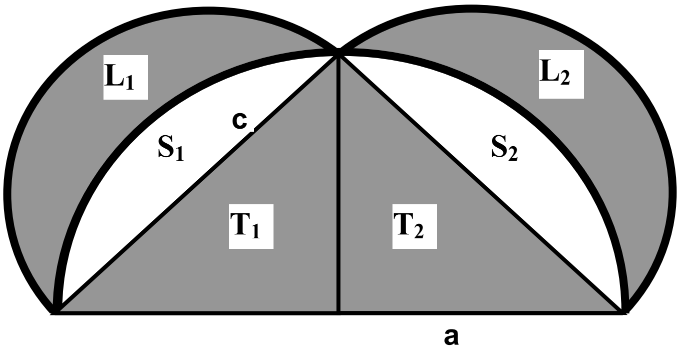
A = Semicírculo de radio a.
D = Cuadrante de radio a.
C = Semicírculo de diámetro c.
T = Triángulo.
L = Lúnula.

$$\frac{A}{C} = \frac{(2a)^2}{c^2} = 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Euclides, XII.2} \\ \text{Euclides, I.47} \end{array} \right\}.$$

A = 2C ; C = D ; L = T .

La lúnula L, que es una figura curvilínea, es equivalente al triángulo rectángulo T, que es una figura rectilínea.

Veamos otra forma alternativa, más sencilla, de cuadrar la misma lúnula de Hipócrates a base de utilizar la Proposición VI.31 de *Los Elementos* de Euclides:



LAS LÚNULAS DE HIPÓCRATES

D = Semicírculo de radio a.

D_1 , D_2 = Semicírculos iguales de diámetro c.

S_1 , S_2 = Segmentos iguales.

T_1 , T_2 = Triángulos iguales.

L_1 , L_2 = Lúnulas iguales.

$D = D_1 + D_2$ Euclides, VI.31

$D - (S_1 + S_2) = (D_1 - S_1) + (D_2 - S_2)$

$L_1 + L_2 = T_1 + T_2$

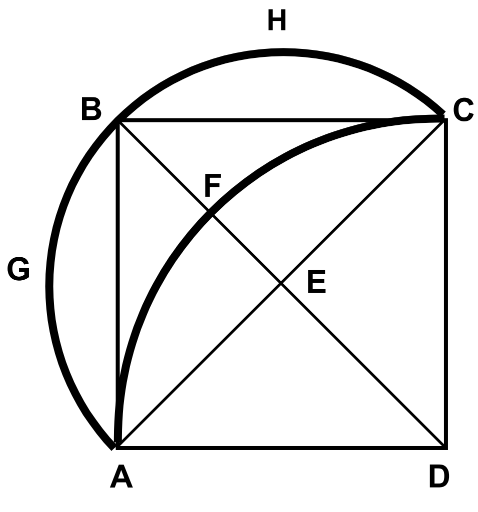
$L_1 = T_1$; $L_2 = T_2$

Dos observaciones resultan pertinentes a partir de la consideración de una y otra forma de realizar la cuadratura de la lúnula:

1. **En los tiempos de Hipócrates no se había desarrollado la *Teoría de la Proporción* de Eudoxo, por tanto no podía existir una teoría rigurosa y completa de figuras semejantes –que desarrollará Euclides en el Libro VI de *Los Elementos*–. Asimismo, el *Principio de exhaución* de Eudoxo –Proposición X.1 de *Los Elementos* de Euclides– será la base para justificar las áreas de figuras curvilíneas encontradas por diversos procedimientos. Ante la primera cuadratura de la lúnula se debe aventurar que Hipócrates debía conocer aspectos intuitivos de los teoremas euclídeos apuntados**
2. **Proclo asegura, como se ha dicho, que la Proposición VI.31, utilizada en la segunda cuadratura de la lúnula, es del propio Euclides, pero no cabe duda que el resultado debía ser conocido en los tiempos de Hipócrates, 150 años antes de Euclides.**

Reflexiones de tipo epistemológico en torno a la relación entre los procesos de invención–descubrimiento y métodos de exposición–demostración surgen ahora y siempre que se adentra uno en la Historia de las Matemáticas: la Matemática avanza hacia nuevos territorios mucho antes de consolidar los fundamentos que se desarrollan para justificar de forma lógica esos avances.

Ahora veremos otra manera de cuadrar la misma lúnula de Hipócrates que utiliza otra figura diferente y sigue otra orientación.



Tracemos un cuadrado ABCD con diagonales perpendiculares AC y BD que se cortan en el centro del cuadrado E. Circunscribamos una semicircunferencia AGBHC al triángulo rectángulo isósceles ABC mitad del cuadrado, y tracemos de A a C el arco de círculo AFC con centro en D y radio DA. Vamos a hallar el área de la lúnula formada por la semicircunferencia AGBHC y el arco AFC.

Aparecen en la figura tres segmentos de círculo: dos más pequeños e iguales entre sí, AGB de cuerda AB y BHC de cuerda BC; y uno mayor, AFC de cuerda AC. Estos tres segmentos son semejantes puesto que todos son segmentos en cuartos de círculo.

Ya que el triángulo ABC es rectángulo, la aplicación de la Proposición VI.31 de *Los Elementos* de Euclides nos dará en este caso:

(Segmento AGB de cuerda AB) + (Segmento BHC de cuerda BC) = (Segmento AFC de cuerda AC).

Así pues, la lúnula AGBHCFA –que es igual al semicírculo menos el segmento mayor AFC de cuerda AC– debe igualar al semicírculo menos la suma de los segmentos menores, AGB y BHC, que a su vez es igual al triángulo rectángulo ABC, de donde resulta finalmente:

La lúnula AGBHCFA que es una figura curvilínea es igual triángulo rectángulo ABC que es una figura rectilínea.

LAS LÚNULAS DE HIPÓCRATES EN LOS CUADERNOS DE LEONARDO DA VINCI

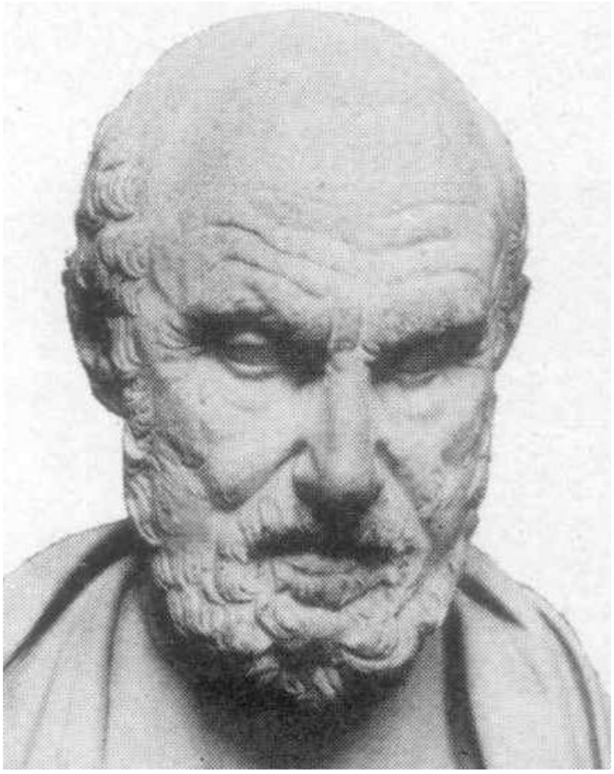
Según Proclo, en su *Comentario al Libro I de los Elementos de Euclides*:

> *«Hipócrates de Quíos es el inventor de la cuadratura de la lúnula y fue el primero que compuso Elementos.»*

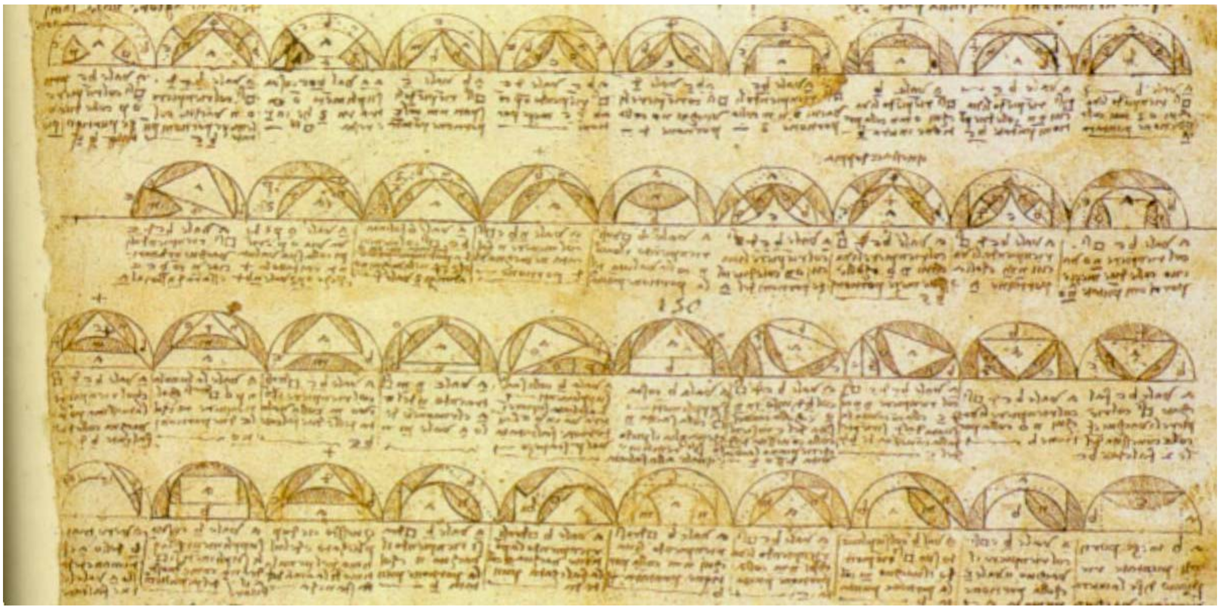
Hipócrates es, en cierto sentido, un pionero en la Historia de la Matemática, ya que inició la utilización de letras en las figuras geométricas para atemperar la excesiva retórica del discurso matemático, aplicó el *Método de Análisis* e ideó el método de demostración por *reducción al absurdo* que tanta influencia tendría sobre el *método de exhaución* de Eudoxo.

Hipócrates también estudió el problema de las proporciones continuas, es decir de la interpolación de dos medias entre dos magnitudes dadas, advirtiendo la relación de este problema con la resolución de la *duplicación del cubo*.

Se dice que Hipócrates es el primer matemático profesional de la historia, porque más allá de su ferviente afición a la Matemática, se ganaba la vida con esta ciencia. Siempre agradeció que un abordaje de piratas en el mediterráneo cambiara su destino de comerciante por el de matemático.



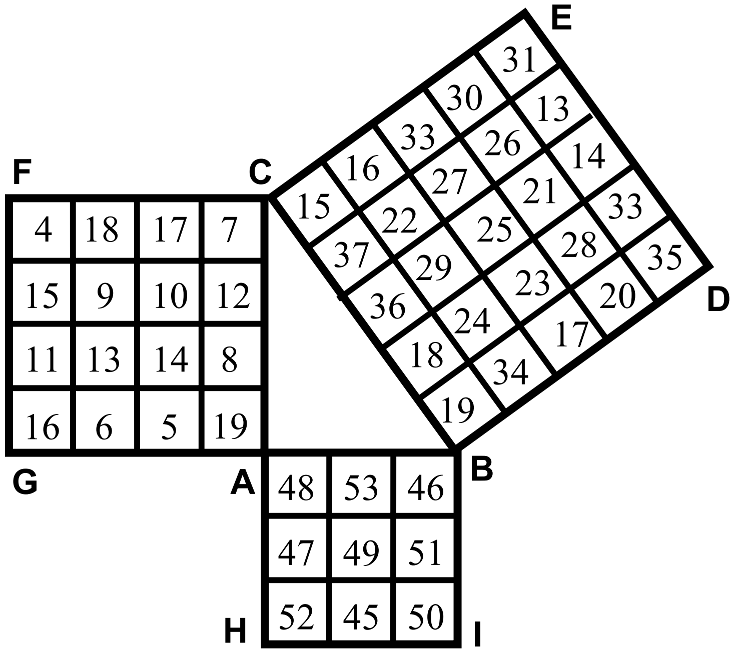
Hipócrates de Quíos



Estudios de Leonardo (hacia 1515) sobre las *Lúnulas de Hipócrates*. Códice Atlántico (f. 455r).

El sorprendente descubrimiento realizado por Hipócrates de Quíos acerca de la cuadratura de lúnulas impresionó considerablemente la mente de Leonardo. La posibilidad de que se puedan calcular ciertas áreas curvilíneas circulares, es decir, construir cuadrados equivalentes a ellas, fascinó de tal modo a Leonardo da Vinci, que le indujo a realizar en numerosos escritos multitud de estudios sobre lúnulas con la intención de perseguir la cuadratura del círculo.

Curiosidades sobre el Teorema de Pitágoras

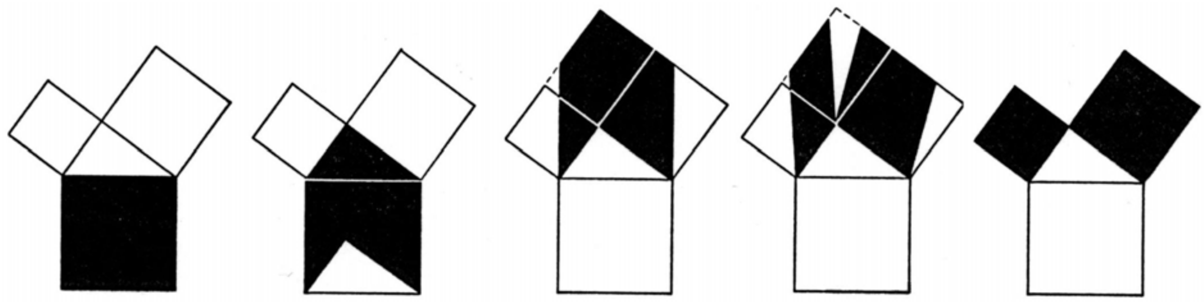


Cuadrados mágicos pitagóricos

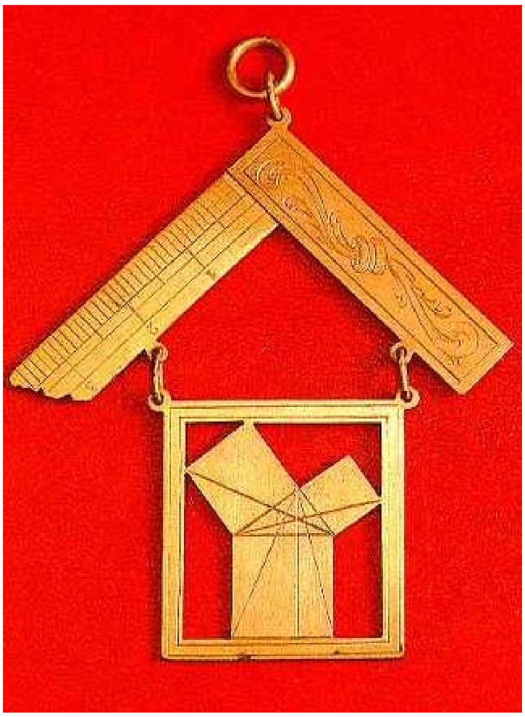
- **ABIH Cuadrado mágico de valor 147**
  Suma ABIH = 147·3 = 441.
- **AGFC Cuadrado mágico de valor 46**
  Suma AGFC = 46·4 = 184.
- **BCED Cuadrado mágico de valor 125**
  Suma BCED = 125·5=625

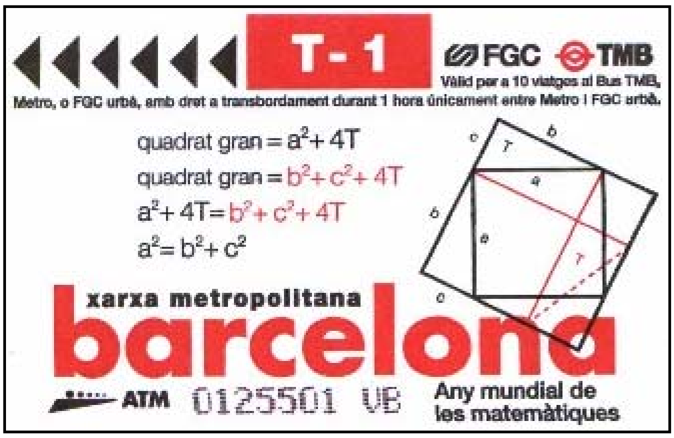
441 + 184 =625

S(ABIH)+S(AGFC) = S(BCED)



Prueba dinámica del *Teorema de Pitágoras* a modo de «*dibujos animados*» en la que el cuadrado sobre la hipotenusa se transforma continuamente hasta convertirse en los dos cuadrados sobre los catetos (H.Eves, *Great Moments in Mathematics*. The mathematical. association of America, 1977. Vol. 1, cap.4. p.32)

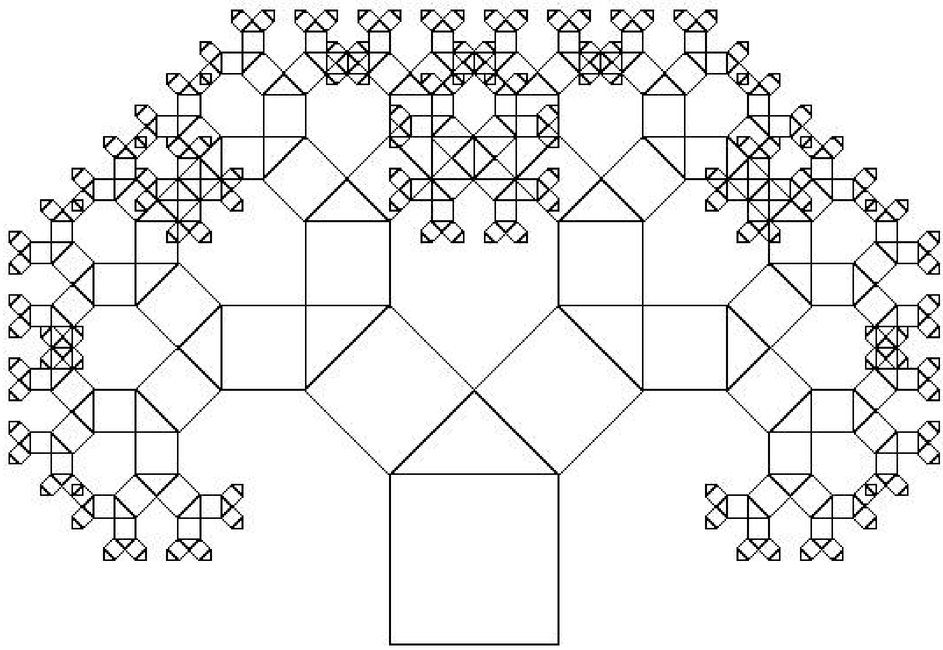




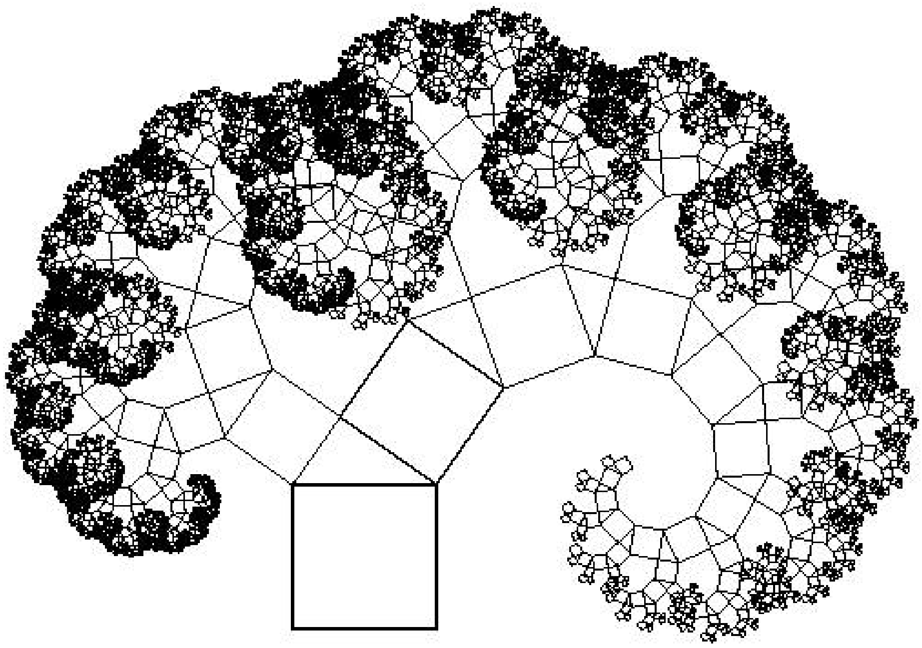
Billete del metro de Barcelona con el anagrama del *Teorema de Pitágoras*, emitido con motivo del 2000, *Año Mundial de las Matemáticas.*

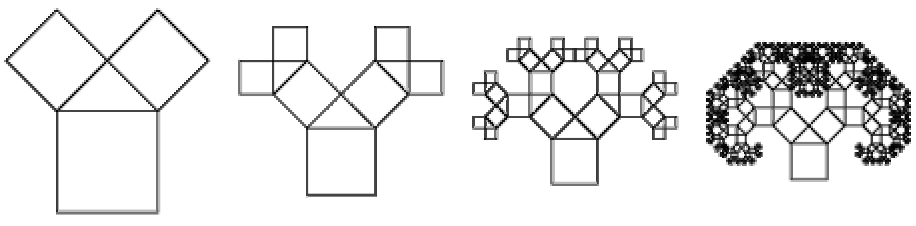
Joya del antiguo Venerable Maestro de una Logia Masónica. (Archivo Histórico Nacional). Exposición *La masonería española, 1728-1939.* Alicante, 1989

FRACTALES PITAGÓRICOS

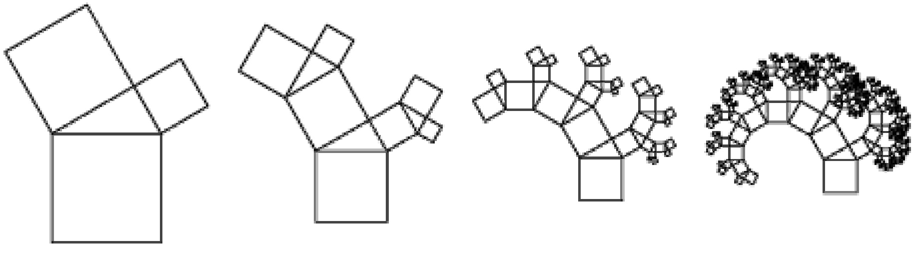


Dos tipos de fractales pitagóricos, uno simétrico y otro asimétrico.

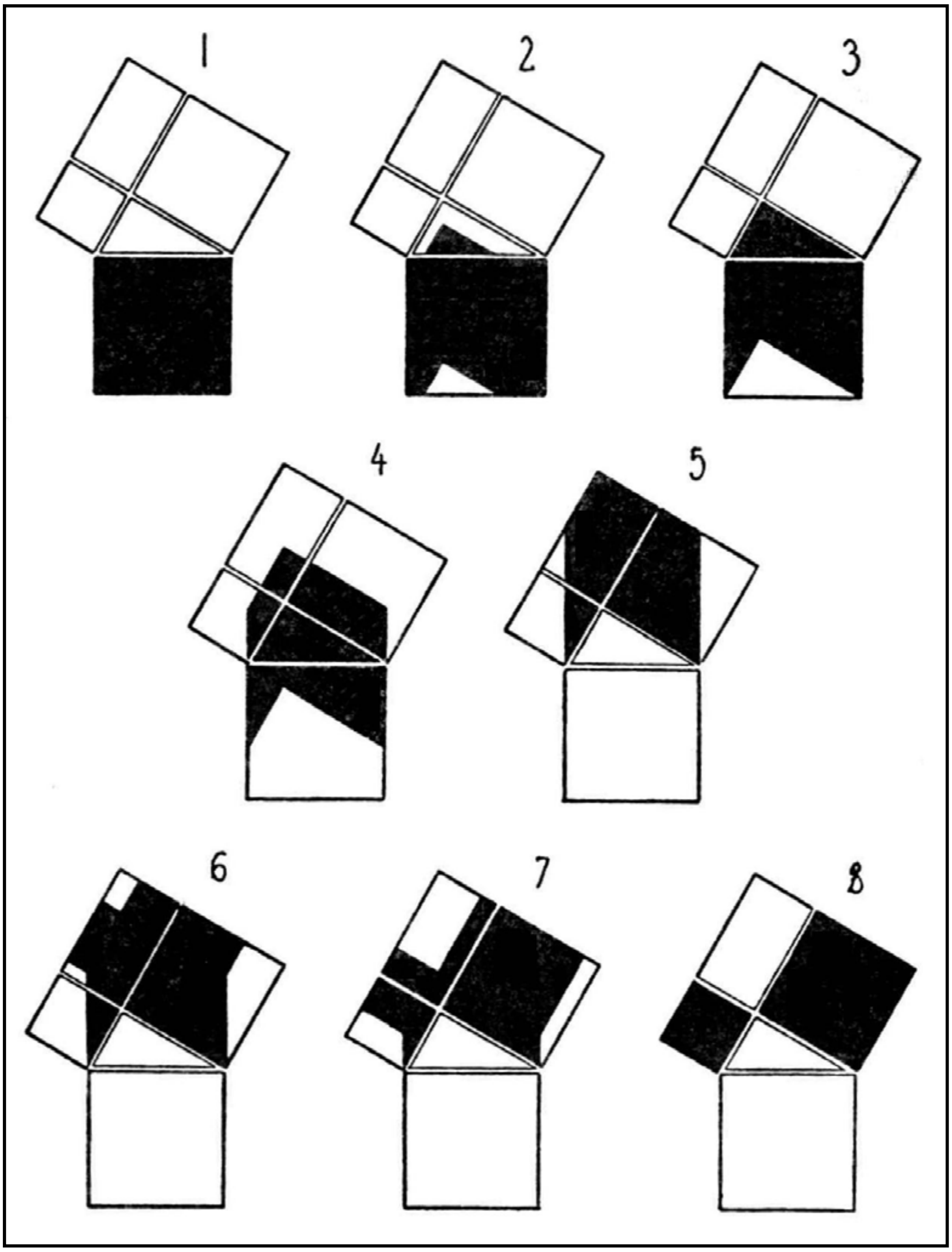


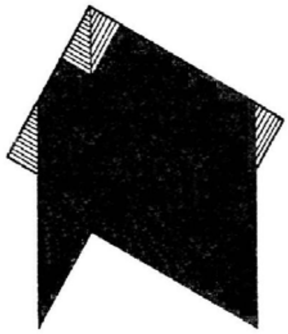


Generación de dos tipos de fractales pitagóricos, uno simétrico y otro asimétrico.



LA PRUEBA DINÁMICA DEL *TEOREMA DE PITÁGORAS* DE H.V. BARAVALLE



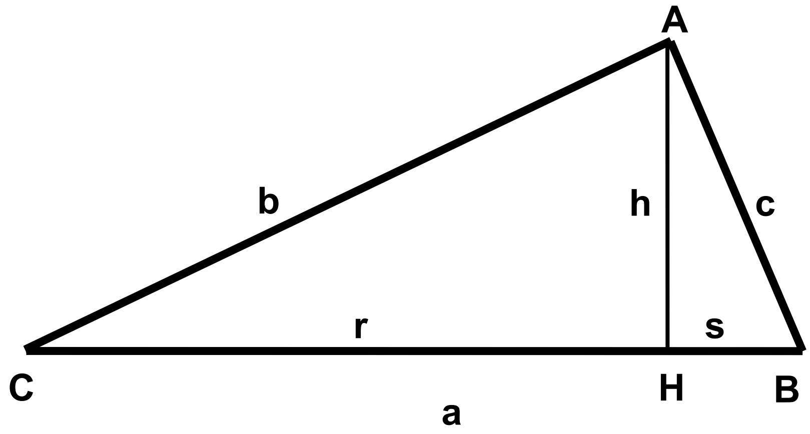


En el artículo de H.Baravalle, *A model for demostrating the Pytahgorean Theorem* (Scripta Mathematica. Vol.16, pp.203–207. Yeshiva University, New York, 1950), se exhibe una prueba dinámica del *Teorema de Pitágoras*, con más fases que la de H.Eves, en la que el cuadrado sobre la hipotenusa se va transformando de forma continua hasta convertirse en los dos cuadrados sobre los catetos.

Partiendo de la fase 1, del cuadrado sobre la hipotenusa, marcado en negro, se va sustrayendo, en la fase 2, de la parte inferior del cuadrado, triángulos semejantes al dado de tamaño continuamente creciente, que se van añadiendo a la parte superior del cuadrado, hasta alcanzar, en la fase 3, el tamaño del triángulo dado. En la fase 4, el área en negro se va desplazando de forma continua hacia arriba hasta que en la fase 5 alcanza la posición más alta. En la fase 6 una porción rectangular del área negra se corta en dos triángulos que son añadidos uno a cada lado. La igualdad de las áreas en negro de las fase 5 y 6 se muestra en la figura del margen, donde ambas áreas se han dibujado superpuestas, habiéndose señalado en negro la parte común y sombreadas la partes que se sustraen y se añaden. En la fase 7 estas partes sustraídas y añadidas, crecen de forma continua, hasta que en la fase 8, el área negra se transforma finalmente en los cuadrados sobre los catetos del triángulo rectángulo.

La matriz pitagórica del triángulo rectángulo

Dado el triángulo rectángulo ABC, sean:



BC=a, AC=b, AB=c, los lados del triángulo.

HB=s, HC=r, las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.

AH=h, la altura relativa a la hipotenusa.

Consideremos la matriz cuadrada simétrica de tres filas y tres columnas siguiente formada a partir de las longitudes descritas, vinculadas al triángulo rectángulo dado ABC:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & r & h \\ c & h & s \end{pmatrix}$$

Puesto que según la Proposición VI.8 de *Los Elementos* de Euclides los triángulos HBA y HAC son ambos semejantes con el triángulo ABC, resulta (*Euclides* VI.4):

$$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{HC} = \frac{AB}{AH}, \text{ es decir: } \frac{a}{b} = \frac{b}{r} = \frac{c}{h},$$

$$\frac{BC}{AB} = \frac{AC}{AH} = \frac{AB}{HB}, \text{ es decir: } \frac{a}{c} = \frac{b}{h} = \frac{c}{s}.$$

Así pues, al ser la primera fila de la matriz múltiplo de las otras dos, el rango o característica de la matriz es uno, por tanto todos los menores de orden dos de la matriz deben ser cero, lo que equivale a que la matriz M formada por estos menores es la matiz nula, es decir:

$$M = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rs - h^2 & bs - ch & bh - cr \\ bs - ch & as - c^2 & ah - bc \\ bh - cr & ah - bc & ar - b^2 \end{pmatrix} = 0.$$

De aquí resultan, las siguientes relaciones:

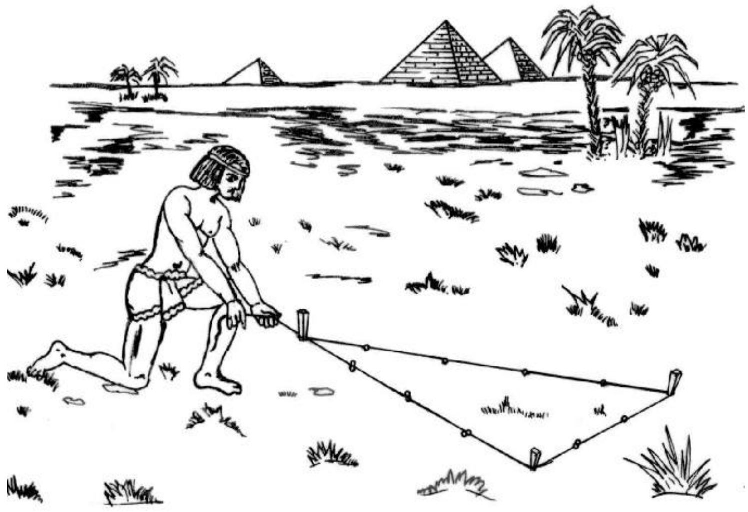
1. $A_{11} = rs - h^2 = 0$; $h^2 = rs$, es decir: la altura correspondiente a la hipotenusa de un triángulo rectángulo es la media proporcional entre los segmentos que su pie determina sobre ella (*Teorema de la altura* –Porisma Corolario de *Euclides* VI.8–).
2. $A_{22} = as - c^2 = 0$; $c^2 = as$, es decir: un cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella (*Teorema del cateto* c –*Euclides* VI.8–).
3. $A_{33} = ar - b^2 = 0$; $b^2 = ar$, *Teorema del cateto* para el cateto b.
4. $A_{12} = A_{21} = bs - ch = 0$; $b/c = h/s$; es decir: los triángulos ABC y HBA son semejantes.
5. $A_{13} = A_{31} = bh - cr = 0$; $b/c = r/h$; es decir: los triángulos ABC y HAC son semejantes.
6. $A_{23} = A_{32} = ah - bc = 0$; $ah = bc$, relación que expresa el área del triángulo ABC.
7. $A_{22} + A_{33} = (as - c^2) + (ar - b^2)$; $a(s+r) - (b^2 + c^2) = 0$; pero como $s+r=a$, resulta: $a^2=b^2+ c^2$, que es la forma algebraica del *Teorema de Pitágoras* –Euclides, I.47–

Como vemos, la llamada *matriz pitagórica del triángulo rectángulo* nos proporciona un cómodo artificio para describir las propiedades más significativas del triángulo rectángulo.

Durante los dos últimos años se ha realizado en el Instituto de Bachillerato Sant Josep de Calassanç, de Barcelona, en el marco de la «Semana Cultural», una experiencia con un protagonista bien conocido: la Matemática. Pero no la Matemática habitual, la del manual y la exposición, sino otra Matemática que está presente en casi todos los rincones de esta ciencia, pero que hay que acertar a descubrirla: la Matemática recreativa.

«No sólo del teorema vivió Pitágoras»

Los alumnos del Instituto Sant Josep de Calassanç, de Barcelona, descubren los aspectos lúdicos de las Matemáticas



Los talleres de Matemática Recreativa se plantean con un objetivo de interdisciplinariedad y de recuperación del valor histórico de los resultados matemáticos.

El carácter acumulativo y el sólido entramado lógico que definen la Matemática hacen de ella una disciplina especialmente difícil para los alumnos, no porque sea intrínsecamente difícil, sino porque su asimilación requiere una dedicación, no excesiva, pero sí continuada, lo que exige un esfuerzo que no admite pausas ni lagunas. Estos elementos, junto a la circunstancia que se da con relativa asiduidad, acerca del uso que el sistema educativo hace de la Matemática como filtro selectivo, transforma esta disciplina en una materia especialmente antipática para el alumno.

Estas preocupaciones nos han llevado a desarrollar una experiencia que ponga de manifiesto «otra cara de la Matemática», la faceta lúdica y divertida que numerosas cuestiones matemáticas llevan consigo, un *taller de Matemática recreativa.*

La Matemática recreativa se nutre en gran parte de problemas matemáticos que han tenido cierto interés a lo largo de la Historia de la Matemática. Esta es, por tanto, un manantial de problemas curiosos que pueden ser tratados de forma lúdica como actividades al margen de la clase y en el marco de las actividades culturales que se organizan periódicamente en los centros escolares, ya sea a lo largo del curso o concentradas en una «Semana Cultural». Estas actividades pueden tener un gran señuelo para los alumnos y hacer una sana competencia a las clásicas actividades organizadas por los departamentos de Humanidades, e incluso colaborando con ellos de forma interdisciplinar, salvando así una cierta incomunicación que existe entre los Seminarios de Ciencias y los de Letras, y que trasciende necesariamente a los alumnos de una y otra especialidad.

Bajo estos principios, además de informar en las propias clases se preparó una propaganda ilustrativa de las actividades proyectadas, de modo que los alumnos pudieran conocer exactamente la naturaleza y el contenido de éstas. La actividad se desarrolló a lo largo de una semana en tres sesiones de dos horas cada una, como una actividad cultural más, dentro del programa de la «Semana Cultural» de nuestro centro docente, y se programó para alumnos de segundo y tercero de BUP y para alumnos de COU.

Contenido

En cuanto al contenido, transcribimos literalmente parte del texto de la propaganda que se difundió:

1. *Curiosidades numéricas:* Donde además de plantear y resolver adivinanzas y acertijos numéricos veremos las enigmáticas leyes que rigen la formación de algunos números, de modo que no es extraño que se les hayan atribuido propiedades místicas y cabalísticas y virtudes mágicas.

2. *Falacias en las demostraciones:* Donde nos sorprenderemos con inquietantes resultados absurdos, obtenidos con una presunta lógica impecable, de modo que veremos cómo sin un riguroso uso de las propiedades se puede llegar a «demostrar» cualquier resultado, por chocante que sea.

3. *Pitágoras y su teorema:* Situaremos históricamente el personaje dando una breve visión de la Matemática prepitagórica (Egipto, Mesopotamia, India, China, Thales de Mileto), la legendaria vida de Pitágoras, anécdotas, su obra («La Divina Proporción», teoría de las medias y de las proporciones, Aritmología y mística numérica, números poligonales, cuerpos cósmicos, magnitudes inconmensurables, música, etcétera), la secta pitagórica (mística y esoterismo), Filosofía pitagórica («el número es la esencia de todas las cosas»), Astronomía (la música de las esferas), Pitágoras sobre Platón y Euclides, etcétera.

Pero sobre todo estudiaremos exhaustivamente el más antiguo y famoso Teorema de la Geometría elemental, al que la historia y la tradición han bautizado con el nombre de Pitágoras. Estudiaremos el nivel de conocimiento que del Teorema tenían las antiguas civilizaciones orientales pre-helénicas, y veremos cerca de 50 demostraciones diferentes que del mismo han dado a lo largo de la historia personajes tan diferentes como un presidente de los Estados Unidos y un monje hindú, un corredor de bolsa y un jurista, un filósofo como Platón y un ingeniero y artista como Leonardo da Vinci, etcétera.

Objetivos

Básicamente el objetivo general era pasar unas horas divertidas desarrollando el ingenio, resolviendo problemas lógicos y numéricos, sorprendiéndonos con misteriosas propiedades de los números y con ciertas paradojas geométricas, inquietándonos con ciertos resultados absurdos «demostrados» con una presunta lógica impecable, así como conocer ciertos aspectos de la Historia de la Matemática.

El tema de curiosidades numéricas es inagotable. Tras la sorpresa ante la increíble regularidad en la formación de algunas series de números, el objetivo sería ilustrar como no debemos la sorpresa más que a propiedades elementales de las operaciones o de ciertos números primos, a los criterios de divisibilidad o a las progresiones. De forma análoga, multitud de trucos sobre características personales («un truco para adivinar fácilmente tu edad y tu estatura», «unos sencillos cálculos para adivinar fácilmente tu edad y el número de calzado que usas», etcétera) son simples identidades basadas en la descomposición de un número en la base decimal. Un objetivo importante, asimismo, es ilustrar con ciertas paradojas numéricas sencillas el comportamiento radicalmente diferente de la Aritmética del infinito.

El segundo tema es, sin duda, la fuente de las mayores sorpresas para los alumnos. Exhibir una «demostración» para concluir que 2 = 3, o agotando ya toda capacidad de sorpresa, para no hacer nada que parezca estar amañado a priori, pedir dos números cualesquiera y «demostrar» que son iguales. La meditación sobre estos resultados lleva a los alumnos a desterrar para siempre la división por cero, a considerar necesariamente la doble determinación de una raíz cuadrada, etcétera.

Finalmente, el tercer tema tiene un objetivo de interdisciplinariedad y de recuperación del valor histórico de los resultados matemáticos. Contraviniendo a la visión al margen de la historia bajo la que se siguen desarrollando los programas oficiales, se intenta contextualizar históricamente los resultados, para entenderlos y aplicarlos mejor. Tomando como pretexto el más famoso y antiguo Teorema de la Geometría elemental, «el Teorema de Pitágoras», se pasa revista a la Matemática prehelénica (que desarrolla atisbos empíricos del Teorema), a la Matemática prepitagórica (que dio a luz la Matemática racional, en particular la idea de demostración) a la legendaria figura de Pitágoras y su Escuela, a su influencia sobre Platón y Euclides, y reencontrando el objetivo lúdico de la actividad, se reconstruyen docenas de demostraciones diferentes del Teorema de Pitágoras, creaciones de curiosos personajes de la Historia, concluyendo que en Matemática como en otros ámbitos hay muchos caminos para alcanzar la verdad.

Metodología

En primer lugar la participación de los alumnos sería la base del éxito de la experiencia. Como los alumnos disponían con anterioridad de una documentación con el guión de los problemas y temas tratados, estaban motivados por la curiosidad que despertaban las múltiples formaciones numéricas curiosas y los llamativos enunciados de algunos problemas y trucos de adivinación.

Los enunciados y problemas fueron rigurosamente seleccionados entre la legión de literatura matemática recreativa, bajo el criterio no sólo de que resultaran atractivos y sorprendentes, sino también que su estructura matemática fuera simple.

En cada cuestión se procuraba que la sorpresa indujera a buscar la explicación matemática, para lo que se entablaba una concatenación heurística de preguntas y respuestas inducidas. El mayor éxito tenía lugar cuando los alumnos incluso inventaban nuevos trucos y problemas similares a los desarrollados.

Conclusiones

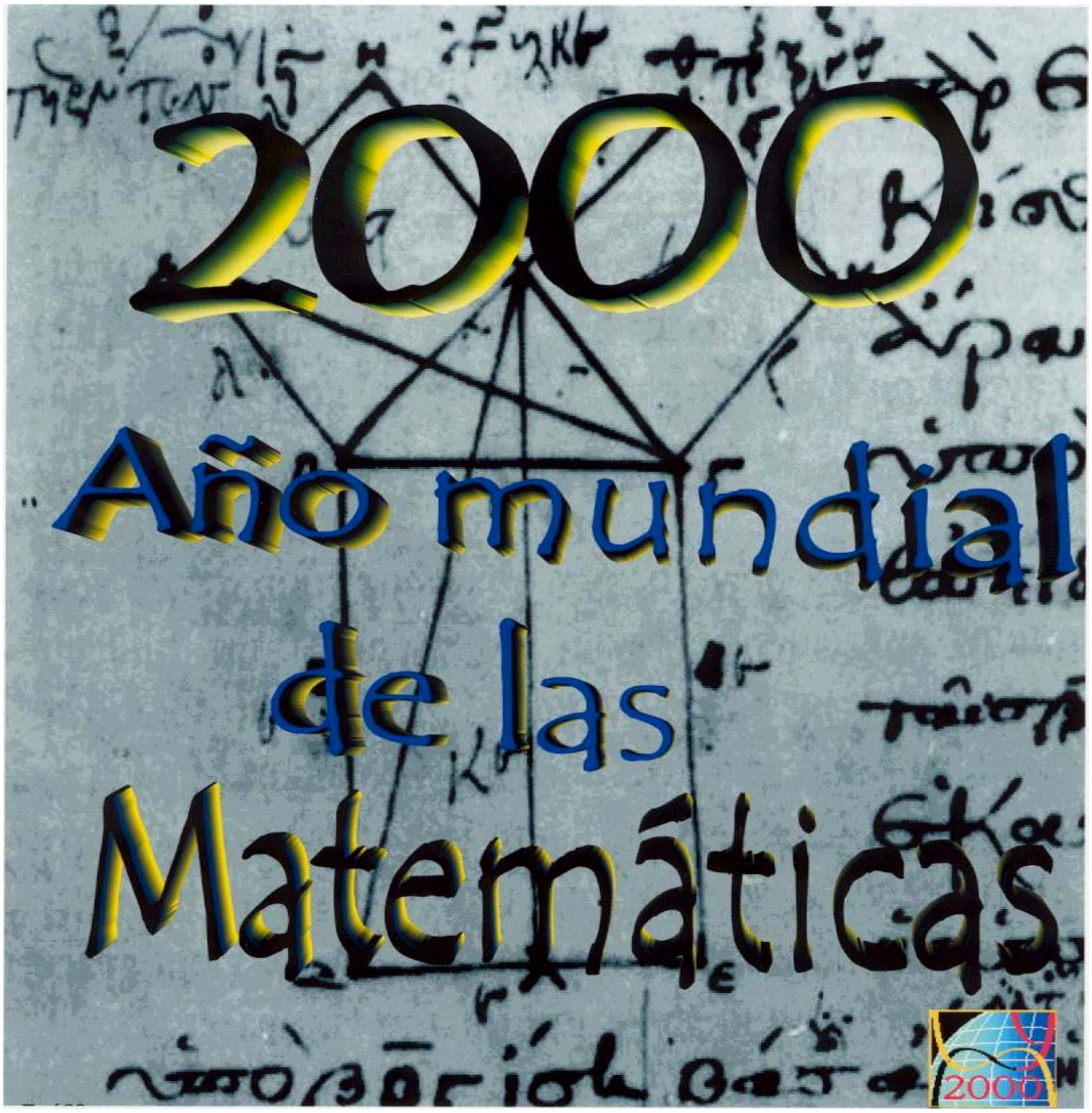
Hemos comprobado que los aspectos recreativos de las Matemáticas interesan considerablemente a todo tipo de alumnos, lo cual no debe sorprender porque se sabe el éxito que tienen los pasatiempos dominicales de muchos periódicos y revistas especializadas, cuyo contenido no está muy lejos de los desarrollados por nosotros. Es conveniente aprovechar esta realidad para relajar, en el buen sentido, la actitud de los alumnos hacia las Matemáticas, incidiendo en las clases, siempre que sea posible, sobre los aspectos históricos y recreativos.

Hay la intención de continuar en cursos sucesivos con actividades similares. Algunos temas que se prestan a ser desarrollados en estos talleres podrían ser, aparte de la ingente cantidad de curiosidades numéricas y los aspectos históricos, aritméticos y geométricos del Teorema de Pitágoras, el omnipresente número de oro, los cuadrados mágicos, el famoso número π, los tres problemas geométricos clásicos (la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección del ángulo), las inquietantes paradojas sobre el infinito, aspectos artísticos de la Geometría Proyectiva elemental, etcétera.

Concluyendo, la Historia de las Matemáticas tiende un puente de unión entre las ciencias y las humanidades, y es una fuente inagotable de material didáctico, de ideas y problemas interesantes y también en un gran grado, de diversión y recreo intelectual. En suma, de enriquecimiento personal, científico y profesional, que el profesor debe aprovechar para motivar su labor de transmisión del conocimiento.

Pedro M. González Urbaneja
Catedrático de Matemáticas
I. B. Sant Josep de Calassanç
Barcelona

EL TEOREMA DE PITÁGORAS EN EL 2000
AÑO MUNDIAL DE LAS MATEMÁTICAS



Póster de la celebración en España del ***Año 2000 Mundial de las Matemáticas*** **que incluye un fragmento con el anagrama euclideo de una demostración del** ***Teorema de Pitágoras*** **en una edición medieval en griego de los** ***Los Elementos*** **de Euclides.**

El ***Teorema de Pitágoras*** **como parte esencial de los bellísimos tesoros matemáticos de la tradición pitagórica es una de las joyas geométricas a las que alude Kepler en su obra** ***Mysterium Cosmographicum*** **de 1596.**

Sin duda alguna, el ***Teorema de Pitágoras*** **es el más espléndido, atractivo, célebre, popular, renombrado y útil de la Geometría elemental. Con toda seguridad es el Teorema más conocido, del que más demostraciones se han realizado, el que más nombres ha recibido y el que más pasión ha producido en toda una pléyade heterogénea de personajes ilustres, desde el alba de la historia hasta nuestros días. La multitud de pruebas del** ***Teorema de Pitágoras*** **ilustran la idea de que hay muchas formas de alcanzar la misma verdad.**

La soberbia grandeza del ***Teorema de Pitágoras*** **establece una radical inflexión intelectual entre la práctica empírica e inductiva y la argumentación deductivo-demostrativa, tanto en el marco histórico cultural matemático como en el ámbito escolar de la Educación matemática.**

Como origen de la Geometría racional, fundamento de multitud de teoremas geométricos, causa primera de la Inconmensurabilidad, umbral entre la Matemática empírica y la Matemática deductiva, paradigma para la Matemática y paradigma para la Educación matemática, bien podemos considerar que el ***Teorema de Pitágoras*** **pertenece al imaginario cultural de todos los pueblos.**

Bibliografía

Obras monográficas sobre Pitágoras y el *Teorema de Pitágoras*

1. BERGUA,J.B.: *Pitágoras*. Ediciones Ibéricas, Madrid, 1958.
2. EGGERS,C.: *Pitágoras y los primeros pitagóricos* (en *Los Filósofos presocráticos*. Vol.1.). Gredos, Madrid, 1994.
3. GIGON,O. *Pitágoras* (en *Los orígenes de la Filosofía griega*. Gredos, BHF, 67. Cap.5. Madrid,1994.
4. GONZALEZ URBANEJA,P.M.: *Pitágoras, el filósofo del número*. Nivola, Madrid, 2001.
5. GONZALEZ URBANEJA,P.M.: *Pitágoras. El umbral del Pensamiento occidental* (en *Reflexiones sobre el pasado, presente y futuro de las Matemáticas*, pp.77-117). Univer. Huelva. 2002.
6. GORMAN,P.: *Pitágoras*. Crítica. Barcelona, 1988.
7. GUTHRIE,W.: *Pitágoras y los pitagóricos* (en *Historia de la Filosofía griega*. Vol.I. Cap.IV). Gredos, Madrid, 1984.
8. GUZMÁN,M.: *Los Pitagóricos*. http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/ pitagoricos.htm.
9. JÁMBLICO. *Vida Pitagórica*. Etnos, Madrid, 1991.
10. LOOMIS,E.S.: *The Pythagorean Proposition*. *Its Demostrations Analyzed and Classified*. Ann Arbor, Michigan, 1940.
11. LOOMIS, E.S.: *The Pythagorean Proposition*. *Its Demostrations Analyzed and Classified*. National Council of Teachers of Mathematics («*Classics in Mathematics Education*»). Washington, 1968.
12. MATTEI,J.: *Pythagore et les Pythagoriens*. Presses Univ. de France, nº 2732. París, 1996.
13. MILHAUD,G.: *Les* Pythagoriciens (en *Les Philosophes-Géométres de la Grèce*. Cap.1.II). Librairie Germer Baillière, París, 1900. Arno Press, New York, 1976.
14. O'MEARA,D.: *Pythagoras Revived*. Clarendon Press. Oxford, 1989.
15. PÉREZ-RUIZ, M.: *Pitágoras.* Océano. Barcelona, 2000.
16. PÉREZ SANZ,A.: *Pitágoras: mucho más que un teorema* (en la Serie de TVE "*EL UNIVERSO MATEMÁTICO*"*)*. La Aventura del Saber, 2000.
17. REGHINI,A.: *Per la restituzione della Geometria Pitagorica*. Editrice "Atanor". Roma.
18. STRATHERRN,P.: *Pitágoras y su teorema*. Siglo XXI. Madrid, 1999.
19. SWETZ,F.: *Was Pythagoras Chinese*. The Pennsilvanya University, 1977.
20. VERA,F.: *Pitágoras* (en *Científicos griegos*). Aguilar, Madrid, 1970.

Ediciones de *Los Elementos* de Euclides

21. ENRIQUES,F.: *Los Elementos de Euclides y la crítica antigua y moderna*. *Libros* I-IV. Instituto Jorge Juan (CSIC). Madrid. 1954.
22. EUCLIDES: *Los seis primeros libros de Los Elementos*. Traducción de Rodrigo Çamorano. Casa de Alonso de la Barrera. Sevilla, 1576. Nueva edición de 2000 de Ediciones Universidad de Salamanca.
23. EUCLIDES: *Elementos*. Introducción de Luis Vega, traducción y notas de M.L.Puertas. Gredos. Madrid, 1996.
24. EUCLIDES: *Elementos*. Traducción y notas J.D. García Bacca. Universidad Nacional Autónoma de México, 1944.
25. HEAT,T.L.: *The thirteen books of The Elements*. 3 Vols. Dover. New York, 1956.
26. PEYRARD,F.: *Les Oevres d'Euclide*. C.F.Patris, París, 1819.
27. VERA,F.: *Los Elementos de Euclides* (en *Científicos griegos*). Aguilar, Madrid, 1970.

Los Elementos de Euclides en la Web

28. DOMENECH,J.: *Els Elements d´Euclides*. http://www.xtec.es/~jdomen28/indexeuclides.htm
29. DOMENECH,J.: Los *Elementos de Euclides.* http://www.xtec.es/~jdomen28/indiceeuclides.htm
30. JOYCE,D.: Euclid's *Elements*: http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html

Obras generales sobre Historia y Filosofía de la Ciencia y de las Matemáticas

31. ARTMANN,B.: *Euclid–The Creation of Mathematics*. Springer. New York, 1996. Cap.6.
32. BELL,E.T.: *Historia de las Matemáticas*. Fondo de Cultura Económica. México, 1985. Cap.1.
33. BOYER,C.B.: *Historia de las Matemáticas.* Alianza Universidad. Madrid. 1986. Caps. 2,3,4,5,6,7.
34. BUNT, L.: *The Historical Roots of Elementary Mathematics*. Dover, New York, 1988. Caps. 3,6.
35. CAJORI,F.: *A History of Mathematics*.The MacMillan Company. Londres, 1919. Cap. 3.3.
36. COLERUS,E.: *Breve historia de las Matemáticas*. Doncel, Madrid, 1972. Vol.1, cap.1.
37. DEDRON,P ; ITARD,I.: *Mathématiques et Mathématiciens.* Magnard. París, 1959. Cap.15.
38. DHOMBRES, J.: *Mathématiques a fil des âges*. Gauthiers-Villars, París, 1990. Cap. 6.1.
39. DIÓGENES LAERCIO: *Vidas de los filósofos más ilustres*. Porrúa. México, 1998. Cap. 8.1.
40. DUNHAM,W.: *Viaje a través de los genios*. Pirámide. Madrid, 1992. Caps. 1,2.
41. DUNHAM,W.: *El Universo de las Matemáticas*. Pirámide. Madrid, 1995. Cap.H.
42. EGGERS,C.: *El nacimiento de la Matemática en Grecia*. EUDEBA. Buenos Aires,1995. Caps.1,2.
43. EVES,H.: *An Introduction to the History of Mathematics*. CBS College Publishing, New York, 1983. Caps. 2,3,5.
44. EVES,H.: *Great Moments in Mathematics*. The mathem. assoc. of America, 1977. Vol. 1, cap.4.
45. GARCIA BACCA, D.: *Textos clásicos para la historia de las ciencias*. Universidad Central de Venezuela. Caracas, 1961.
46. GÓMEZ PIN,V.: *La tentación pitagórica*. Síntesis, Madrid, 1999. Cap.2.
47. GONZÁLEZ URBANEJA, P.M.: *Las raíces del Cálculo Infinitesimal en el siglo XVII*. Alianza Universidad, Madrid, 1992. Cap.1.1.
48. GONZÁLEZ URBANEJA, P.M.: *El Pensament geomètric en el món grec*. ICE. Universitat de Barcelona, 1996. Cap.8
49. GONZÁLEZ URBANEJA,P.M.: *Matemáticas y matemáticos en el mundo griego* (en *El legado de las Matemáticas: de Euclides a Newton, los genios a través de sus libros*). pp.24-75.Universidad de Sevilla. 2000.
50. GONZÁLEZ URBANEJA,P.M.: *Los orígenes de la Geometría Analítica*. Fundación Canaria *Orotava* de Historia de la Ciencia. Tenerife, 2003. Cap.1.
51. HEAT, T.L.: *A History of Greek Mathematics*. Dover, New York, 1981. Vol.1, Caps. 5,11.
52. HEILBRON, J.L. *Geometry Civilized*. Clarendon Press, 1988. Caps. 1.2, 4.1, 4.2.
53. KLINE,M.: *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*. vols. Alianza Universidad, Madrid, 1992. Vol.1, Caps. 3.5, 4.4.
54. KNORR,W.: *The evolution of the Euclidian Elements*. D.R.P.Company. Londres, 1990. Cap. 5.5.
55. LOMBARDO,L.: *La Matemática de Pitágoras a Newton*. Laia, Barcelona, 1983. Cap. 2.3.
56. LORIA,G.: *Histoire des sciences mathématiques dans l'antiquité hellénique*. Gauthier-Villars, París, 1929. Caps. 2.2, 3.1.
57. MONTESINOS,J. (Coordinador): *Historia de la Geometría griega*. Actas del Seminario *Orotava* de Historia de la Ciencia. Tenerife, 1992. Cap.4.
58. MONTESINOS,J.: *Historia de las Matemáticas en la Enseñanza Secundaria*. Síntesis. Madrid, 2000. Cap.2.
59. MONTUCLA,J.F.: *Histoire des Mathématiques*. Blanchard. París, 1968. Tomo 1, Libro I, Cap.VII.
60. NEUGEBAUER, O.: *The Exacts Sciences in Antiquity*. Dover. New York, 1957. Cap.2.
61. NOLLA,R. *Estudis i activitats sobre problemes clau de la Història de la Matemàtica. Per a una aproximació genètica al tractament de les idees matemàtiques*. Memòria de Llicència d'estudis. Departament d'Ensenyament, Generalitat de Catalunya. 2001. Caps. 1.1.2, 1.2.3, 1.10, 4.2.
62. PLATÓN: *Menón* (en Obras *Completas*). Aguilar,Madrid, 1969.
63. REY,A.: *El apogeo de la ciencia técnica griega*. UTEHA, México 1962. Libro I. Caps. 0,2,5.
64. REY PASTOR,J.; BABINI,J: *Historia de la Matemática*. Espasa-Calpe, Buenos Aires, 1951. Cap.2.7, 3.14.
65. REY PASTOR,J.; BABINI,J: *Historia de la Matemática*. Gedisa. Barcelona, 1984. Vol.1. Caps. 2.1, 3.3, 4.2.
66. ROUSE BALL,W: *Histoire des Mathématiques*. Lib. Scient. Hermann, París, 1906. Caps. 2.2, 4.1.
67. *RUSSELL,B.:* Historia de la filosofía occidental*. Austral.Madrid,1995. Vol.1. Lib.1. Cap.3.*
68. SCOTT,J.F.: *A History of Mathematics***.** Taylor and Francis, New York, 1975. Cap. 2.
69. *SERRES,M. (Compilador):* El Saber griego*. Akal. Madrid,2000. Caps. 3.3, 3.11, 4.8, 4.33.*
70. SMITH,D.E.: *History of Mathematics*. Dover. New York, 1958. Vol.1, caps. 3.4, 4.2; vol.2, cap.5.5.

71. SPENGLER,O.: *El sentido de los números* (en *La decadencia de Occidente*). Austral, Madrid, 1998. Cap.I.1.
72. STRUIK,D.J.: *La Matemática, sus orígenes y su desarrollo*. Siglo XX. Buenos Aires,1960. Cap.1.
73. TANNERY,P.: *La géométrie grecque*. Gauthier-Villars. París,1887. Caps. 5,6,7,8.
74. THE OPEN UNIVERSITY: *L'aparició de la Matemática grega*. Televisió de Catalunya. BBC, TV, Londres, 1987
75. VAN DER WAERDEN, B.L.: *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*. Springer-Verlag. New York, 1983. Cap.1.
76. VEGA REÑÓN,L.: *La Trama de la Demostración*. Alianza Universidad, Madrid, 1990. Cap.1.
77. VER EECKE,P: *Diophante d'Alexandrie. Les six livres arithmétiques et le livre des nombres polygones*. Blanchard. París, 1959. Libro VI.
78. VERA,F: *Breve Historia de la Geometría*. Losada. Buenos Aires, 1963. Caps. 1,2,3,4.
79. VITRUBIO: *Los Diez Libros de la Arquitectura*. Altafulla, Barcelona, 1987. Libro IX, cap.II.
80. WILSON,R.: *Stamping through mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2001.

Artículos de revistas científicas y didácticas.

81. ARSAC, G.: *L'origine de la démonstration*: *Essai d'épistémologie didactique, Recherches en Didactique des Mathématiques,* 8(3), 267-312. 1987.
82. BACCIANI,R.: *La matrice del triangolo rettangolo.* Periodico di Matematiche. Vol.XLVIII, pp.86–87. Bologna Nicola Zanichelli Editore, 1970.
83. BARAVALLE,H.: *A model for demostrating the Pytahgorean Theorem*. Scripta Mathematica. Vol.16, pp.203–207. Yeshiva University, New York, 1950.
84. BRUINS,E.: *Pythagorean triads in Babylonyan Mathematics*. The Mathematical Gazette, Vol. 41.
85. CHISINI,O.: *Osservazioni didattiche sul Teorema di Pitagora*. Periodico di Matematiche. Vol.X, pp.166–171. Bologna Nicola Zanichelli Editore, 1930.
86. DE AIMAS,M.: *Sobre el Teorema de Pitágoras*. Revista Números. Sociedad Canaria "*Isaac Newton*" de Profesores de Matemáticas, nº 10, Tenerife, agosto, 1984 pp.15–33.
87. DEDÒ,M.: *Triangoli pitagorici e triangoli eroniani*. Periodico di Matematiche. Vol.XXXIX, pp.160–161. Bologna Nicola Zanichelli Editore, 1961.
88. FRITZ, K.Von: *The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum*. Annals of Mathematics, 46, 242-64, 1945.
89. GONZÁLEZ URBANEJA,P.M.: *No sólo del teorema vivió Pitágoras.* Experiencias en el Aula. Revista Comunidad Escolar. Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid, Julio de 1988.
90. GONZÁLEZ URBANEJA, P.M.: *No sólo del teorema vivió Pitágoras* (*Taller de Matemática recreativa*). Cuadernos de Pedagogía, nº 166, pp.65–66. Barcelona, enero de 989.
91. GONZÁLEZ URBANEJA,P.M.: *Legado y herencia de Pitágoras* (en *APUNTES DE CPR*. Nº 10. pp. 16-21), Palencia, 2001.
92. GONZÁLEZ URBANEJA, P.M.: *La aparición de los inconmensurables*. Mundo Científico, nº 220. pp.56–63. Barcelona, 2001.
93. GUZMÁN, M.: *El Pitagorismo, vanguardia de la cultura*. Saber Leer, nº153, pp. 8–9. Madrid, marzo de 2000.
94. HEAT, T.L.: *Greek Geometry whith Special Reference to Infinitesimals*. The Matematical Gazzete, XI, 248-59, 1922-23.
95. KNORR.W.: *Aristotle and Incommensurability: Some Further Reflections*. Archive for History of Exacts Sciences, 24, 1-9, 1981.
96. LAY–YONG,L ; KANGSHENG,S.: *Right-Angled Triangles in Ancient China*. Archive for History of Exacts Sciences, 24, 1-9, 1983.
97. LIDONNICI,A.: *Il Teorema di Pitagora nelle civiltà prelleniche*. Periodico di Matematiche. Vol. XIII, pp. 74–86, 137–143. Bologna Nicola Zanichelli Editore, 1933.
98. LIDONNICI,A.: *Il Teorema di Pitagora nell' antica Grecia*. Periodico di Matematiche. Vol. XIII, pp.192–211. Bologna Nicola Zanichelli Editore, 1933.
99. LIDONNICI,A.: *Varie dimostazioni del Teorema di Pitagora nell' antica Grecia*. Periodico di Matematiche. Vol. XVI, pp. 22–57. Bologna Nicola Zanichelli Editore, 1935.
100. MARTÍNEZ,A.: *Teorema de Pitágoras: originalidad de las demostraciones de E. García Quijano*. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, Vol.3, nº 2, pp. 277–296, 05–08/2000.
101. SAYILI,A.: *Thâbit Ibn Qurra Generalitation of the Pytahgorean Theorem*. Isis, 51, 1969. pp. 35–37.