

MATERIALS FOTOCOPIABLES

A continuació es presenten alguns dels materials del treball que poden tenir interès per aplicar-los a l'aula en pàgines independents per facilitar-ne la possibilitat de fotocopiar-los.

1. EXEMPLES DE FITXES PER A L'ESTUDI LOCAL I GLOBAL DE LES EMOCIONS EN EL TREBALL MATEMÀTIC

(Del capítol 4)

a) Fitxes per a l'estudi local de les emocions

1. Fitxa que els alumnes emplenen després de treballar un problema

1. Com et trobes després d'acabar el problema?			
Molt satisfet	Satisfet	Insatisfet	Molt insatisfet
2. Explica de manera breu perquè et trobes així.			
.....			
.....			
.....			
3. Representa amb una gràfica els teus sentiments, les teves reaccions en el procés de resolució del problema.			
4. Penses que el que has après amb aquest problema, et pot servir per a la teva vida quotidiana?			
.....			
.....			
.....			

2. Mapa d'humor

Es tracta d'un instrument icònic, anàleg als mapes meteorològics, que permet als alumnes expressar les reaccions emocionals que experimenten en el decurs d'una activitat matemàtica. A continuació es presenta una llista de setze emocions que corresponen a setze símbols. Els símbols poden constar a l'encapçalament o al final de l'activitat i els alumnes només els han d'emmarcar.

Emocions positives	Símbol	Emocions negatives	Símbol
Sentiment de curiositat		Sentiment de bloqueig	
Sentiment de plaer		Sentiment de desesperació	
Sentiment de diversió		Sentiment d'avorriment	
Sentiment d'il·luminació, de joia i de triomf		Sentiment de desconcert	
Sentiment de repte mental		Sentiment d'indiferència	
Sentiment d'estar animat		Sentiment de pressa	
Sentiment de confiança		Sentiment de confusió	
Sentiment de tranquil·litat		Sentiment d'impotència	

b) Fitxes per a l'estudi global de les emocions

1. Frases per a completar

Completeu, de manera breu, les frases següents:

1. Els meus professors i professores de matemàtiques són
2. Les matemàtiques són
3. Les meves capacitats en matemàtiques són
4. Per ser bo en matemàtiques
5. Les matemàtiques que treballem a l'aula
6. En matemàtiques jo trobo difícil
7. Un bon professor de matemàtiques hauria de
8. Podria aprendre més matemàtiques si
9. La meva motivació per fer matemàtiques és
10. A primària a classe de matemàtiques jo
11. Ara, a classe de matemàtiques jo
12. La meva experiència més positiva a classe de matemàtiques
.....
13. La meva experiència més negativa a classe de matemàtiques
.....
14. Quan sento la paraula “matemàtiques” jo
15. Quan sento dir que les matemàtiques són interessants jo
16. Quan apreng matemàtiques, jo em sento

2. Qüestionari i eslògan per a les classes de matemàtiques

1. Què t'agradaria aprendre durant aquest curs a les classes de matemàtiques?

.....

.....

.....

2. Què és el que més t'agrada de les classes de matemàtiques?

.....

.....

.....

3. Com t'agradaria que fossin les classes de matemàtiques?

.....

.....

.....

4. Si reflexiones sobre el teu futur professional, què consideres imprescindible d'aprendre en l'àmbit de les matemàtiques?

.....

.....

.....

5. Indica alguns aspectes de les matemàtiques treballades el curs passat que consideres importants i que no convé oblidar.

.....

.....

.....

6. Inventa un eslògan que expressi allò que voldries per a les classes de matemàtiques d'aquest curs i posa'l en aquest marc:



3. Qüestionari per avaluar la dimensió cultural que s'atorga les matemàtiques i el concepte d'aprenentatge de les matemàtiques que té l'alumnat (1)

Expresseu el vostre grau d'acord o de desacord amb les afirmacions següents:

1. Les matemàtiques són un misteri assequible a poques persones.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

2. Aprendre matemàtiques consisteix a memoritzar un seguit de regles i de fórmules que permeten resoldre tots els problemes.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

3. En matemàtiques els punts de vista i les opinions no tenen cap valor.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

4. Les matemàtiques no tenen gaire cosa a veure amb la realitat.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

5. Les matemàtiques no són útils per a la vida quotidiana.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

6. Les matemàtiques només serveixen per estudiar més matemàtiques.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

7. Els professors i les professores de matemàtiques són persones una mica rares.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

8. Només algunes persones estan capacitades per aprendre matemàtiques.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

(Continua a la pàgina següent)

9. Si no vols seguir estudiant, no cal aprendre matemàtiques.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

10. A la nostra societat es miren les matemàtiques amb gran respecte.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

11. Per a la vida adulta n'hi a prou a conèixer les regles elementals de càlcul aritmètic.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

12. Les matemàtiques són una disciplina aspre en la qual no hi ha cap mena de fantasia.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

13. Les matemàtiques es perceben de forma negativa a la nostra societat.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

14. Si un alumne és bo en matemàtiques, vol dir que és molt intel·ligent.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

15. No cal anar a l'escola per aprendre les matemàtiques que es necessiten a la vida quotidiana.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

16. Les matemàtiques són la clau per entendre la realitat.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

17. Els raonaments matemàtics són perfectes.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

(Continua a la pàgina següent)

18. Les matemàtiques també serveixen per jugar i poden ser molt divertides.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

19. Un bon matemàtic no comet mai errors.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

20. Els raonaments matemàtics poden ser de gran bellesa.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

21. Les matemàtiques es poden aplicar a la majoria d'activitats humanes.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

Aquest qüestionari està pensat per passar-lo en iniciar l'activitat formativa. Algunes de les preguntes estan repetides tot i que es formulen amb lleugeres variacions per tal d'assegurar la veracitat i la intensitat de les respostes (així, les preguntes 4, 5, 6, 9, 11 i 15 es relacionen amb la utilitat i l'aplicabilitat de les matemàtiques escolars; la pregunta 1 i la 8 es relacionen amb la percepció elitista de les matemàtiques i les preguntes 2, 3, 12 i 19 es relacionen amb la visió algorísmica de les matemàtiques).

4. Qüestionari per avaluar la dimensió cultural que s'atorga les matemàtiques i el concepte d'aprenentatge de les matemàtiques que té l'alumnat (2)

Expresseu el vostre grau d'acord o de desacord amb les afirmacions següents:

1. Les matemàtiques són un conjunt de conceptes i de procediments que hem de memoritzar.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

2. Les matemàtiques consisteixen a resoldre problemes.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

3. Fer matemàtiques és investigar noves idees.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

4. Les matemàtiques són molt abstractes per a mi.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

5. En general aprenc els nous conceptes de matemàtiques ràpidament

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

6. Les matemàtiques són útils.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

7. Em costa molt entendre les matemàtiques.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

8. M'és fàcil relacionar els nous conceptes de matemàtiques amb coses ja apreses.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

Aquest qüestionari, força més breu que l'anterior, es pot passar a l'alumnat després d'uns mesos de classe per observar si hi ha hagut canvis en la percepció de l'activitat matemàtica.

5. Qüestionari per avaluar la confiança en les capacitats pròpies a l'hora de fer matemàtiques i la concepció d'allò que és fer matemàtiques

Expresseu el vostre grau d'acord o de desacord amb les afirmacions següents:

1. Tinc força confiança en la meva capacitat per resoldre problemes de matemàtiques.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

2. M'agrada molt resoldre problemes de matemàtiques.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

3. En matemàtiques, el que importa realment és donar bé el resultat final.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

4. Durant el curs, només intento resoldre problemes de matemàtiques si m'ho demana el professor.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

5. Em diverteixo més fent càlculs i operacions que resolent problemes.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

6. Quan un problema de matemàtiques no em surt amb certa facilitat, el deixo estar.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

7. Quan em demanen que resolgui problemes de matemàtiques, em poso nerviós.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

8. M'agrada parlar de matemàtiques amb els meus companys.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

9. Quan trobo un resultat, acostumo a pensar que no serà el resultat correcte.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

10. M'agrada trobar diverses maneres de resoldre problemes de matemàtiques.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

11. En general, sóc capaç de resoldre problemes de matemàtiques sense ajuda d'altres persones.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

12. Quan tinc un examen de matemàtiques, sento por.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

13. Quan em plantegen problemes de matemàtiques, sento molta curiositat per conèixer la resolució.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

14. Ara sento molta més confiança quan treballo els problemes de matemàtiques.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

15. Quan un problema de matemàtiques no em surt, ho intento de nou des d'un altre punt de vista.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

16. Quan resolc un problema de matemàtiques, sento una gran satisfacció.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

17. Comentar els problemes de matemàtiques amb els meus companys m'ajuda a resoldre'ls.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

18. Sempre sé quan he resolt correctament un problema de matemàtiques.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

19. Estudiar i treballar les matemàtiques no em fa cap mena de por.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

20. Quan intento resoldre problemes de matemàtiques estic molt tranquil.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

21. Abans sentia molta més confiança quan treballava els problemes de matemàtiques.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

El qüestionari anterior, tot i que se centre en l'àmbit de la resolució de problemes, hauria de permetre al professorat fer un diagnòstic referent a la confiança de l'alumnat a l'hora de fer matemàtiques.

Tots aquests instruments de diagnòstic són especialment importants per a l'alumnat amb dificultats d'aprenentatge de les matemàtiques. Això no treu, però, que el seu ús també sigui d'interès amb els altres alumnes. En qualsevol cas, aquest diagnòstic només és el primer pas per possibilitar la millora.

2. EXEMPLES DE MATERIALS PER AL TREBALL DE LES MATEMÀTIQUES AMB LES NOVES TECNOLOGIES

(Del capítol 5)

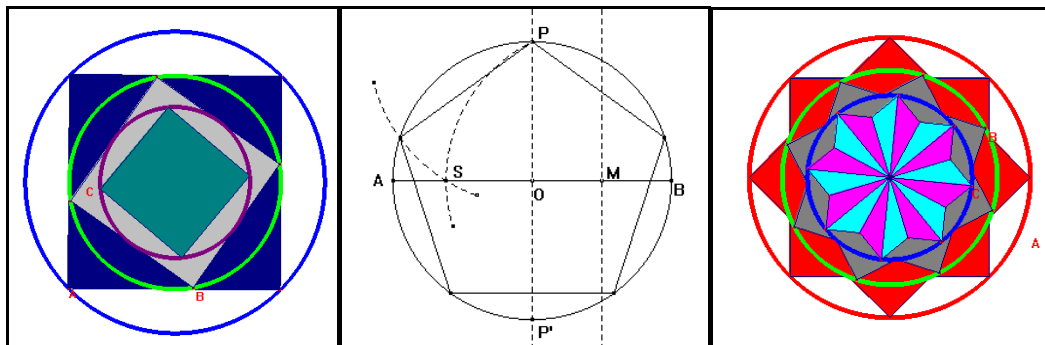
2.1. ÚS DE PROGRAMES ESPECÍFICS PER TREBALLAR LES MATEMÀTIQUES

A continuació s'exposa un exemple per al treball amb Cabri.

EXEMPLE D'ACTIVITAT AMB CABRI: INSCRIPCIÓ DE POLÍGONS

Activitat a desenvolupar en grups de dos alumnes.

Materials necessaris: llapis i paper, transportador d'angles, ordinador i programa Cabri-Géomètre.



1. Es vol fer un logotip en el qual hi hagi un cercle vermell que té inscrit un hexàgon verd. Feu un croquis del logotip.

2. Es vol fer el dibuix del logotip de forma precisa fent ús del programa Cabri-Géomètre:

- i) Creeu una circumferència.
- ii) Com podeu inscriure-hi de manera exacta l'hexàgon inscrit?

3. Us encarreguen també un logotip que consisteix en un triangle equilàter inscrit en una circumferència. Feu-ne el croquis.

4. Feu el dibuix del triangle inscrit en la circumferència de manera precisa amb el programa Cabri-Géomètre. Ajudeu-vos amb el dibuix fet a l'apartat 2.

5. Podríeu fer servir els apartats anteriors per inscriure un polígon regular de dotze costats en una circumferència? Feu el dibuix amb Cabri. Per cert, quin nom li poseu a aquest polígon?

6. En els apartats anteriors heu vist com es poden inscriure triangles equilàters, hexàgons i dodecàgons en una circumferència. Es podrà inscriure qualsevol polígon en una circumferència de manera exacta fent ús del regle i del compàs o del programa Cabri? Què us en sembla?

7. Proveu d'inscriure un quadrat en una circumferència fent ús del programa Cabri. Ajudeu-vos, si cal, amb un croquis.

8. Aproveiteu la feina feta a l'apartat anterior per tal d'aconseguir l'octàgon regular inscrit.

9. Amb el pentàgon les coses s'emboliquen. Es pot provar d'aclarir-ho una mica.

9.1. Feu un croquis amb un pentàgon regular inscrit en una circumferència.

9.2. Feu un dibuix més precís usant el transportador d'angles. Recordeu com podeu esbrinar quins són els angles centrals i interiors del pentàgon regular?

9.3. El dibuix exacte amb regla i compàs o amb Cabri del pentàgon inscrit en una circumferència no és pas senzill. Seguiu aquestes instruccions per fer-lo:

Creeu una circumferència i el seu centre O .
Traceu un diàmetre d'extrems A i B .
Traceu la mediatriu del diàmetre AB . Tallarà la circumferència en els punts P i P' .
Determineu el punt mitjà del radi AO i anomeu-lo M .
Traceu la circumferència de centre M i radi MP o MP' .
Sobre el diàmetre AB la circumferència anterior determina un punt S .
Aleshores el costat del pentàgon inscrit és precisament el segment PS (i el costat del decàgon inscrit és el segment OS).
Ara podeu completar el pentàgon inscrit, i el decàgon també.

10. Traceu les diagonals del pentàgon i l'estrella de cinc puntes.

11. Traceu les circumferències inscrites en els polígons dels apartats anteriors.

12. Ja sabeu inscriure triangles equilàters, hexàgons i dodecàgons; quadrats, octàgons i hexadecàgons; pentàgons i decàgons. Heu reeixit, doncs, amb polígons de 3,6,12,... i 4,8,16,... i 5,10,... costats. Us queda la família que comença amb el 7: què passa amb l'heptàgon? Repetiu les passes de l'apartat 9:

12.1. Feu un croquis amb un heptàgon regular inscrit en una circumferència.

12.2. Feu un dibuix més precís usant el transportador d'angles. Recordeu com podeu esbrinar quins són els angles centrals i interiors de l'heptàgon regular?

12.3. Per més que us hi esforceu amb el transportador no podreu fer un dibuix exacte. El dibuix exacte amb regla i compàs o amb Cabri de l'heptàgon inscrit en una circumferència no és que sigui difícil, és impossible de fer! No ha estat gens fàcil arribar a aquesta conclusió. Vegeu-ho a la lectura de l'apartat 13. Abans, però, vegeu un altre mètode de construcció aproximada que es pot fer amb regla i compàs o amb Cabri:

Creeu una circumferència.
Determineu un punt A sobre la circumferència.
Traceu el diàmetre que passa pel punt A . Anomeu B el seu altre extrem.
Dividiu aquest diàmetre en 7 parts iguals fent ús del teorema de Tales.
Trobeu el punt M que forma un triangle equilàter amb A i B .
Anomeu t la recta que uneix el punt M amb la segona divisió del diàmetre AB .
Si tal·leu t amb la circumferència obtindreu el costat de l'heptàgon inscrit aproximat.

13. LECTURA

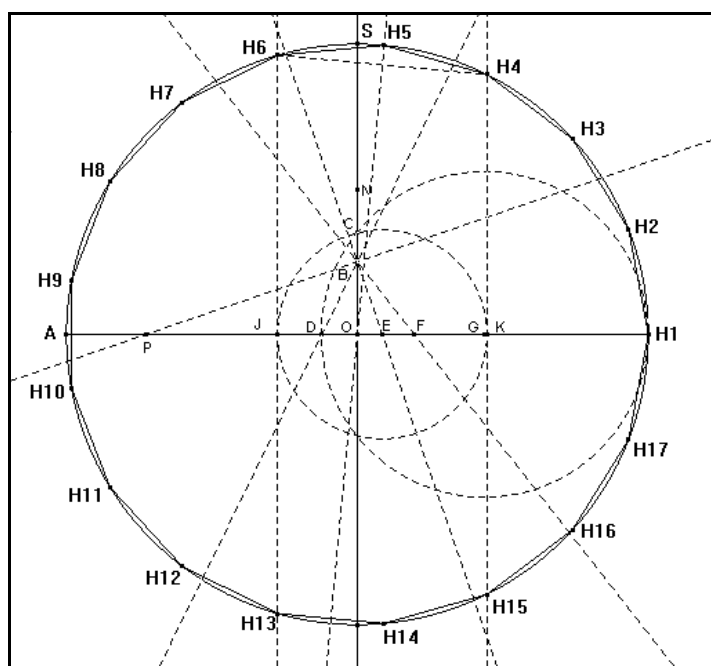
La història de la inscripció dels polígons regulars

Les columnes dels temples grecs tenen un seguit d'estries iguals. Els arquitectes grecs ho aconseguïen dividint la circumferència en parts iguals o, el que és el mateix, inscrivint-hi polígons regulars.

No és estrany, doncs, que es fessin la pregunta de quins polígons regulars es podien inscriure en una circumferència, com sempre amb regla i compàs. Van reeixir amb el triangle equilàter, amb el quadrat, amb el pentàgon, amb l'hexàgon, amb l'octàgon, amb el decàgon i amb els polígons regulars de 12, 15 i 16 costats, però no els va ser possible fer-ho amb l'heptàgon regular, ni amb els polígons de 9, 11, 13 i 17 costats.

Aquests problemes van resistir 2000 anys fins que, al començament del segle XIX, el matemàtic alemany Karl Friedrich Gauss (1777-1855) va trobar-ne la solució. De nen, Gauss, va ser d'una precocitat extraordinària i, més d'una vegada, va deixar bocabadats els seus mestres. De gran se'l coneixia com "princeps mathematicorum" (el príncep de les matemàtiques). Va fer contribucions de la màxima importància en àrees molt diverses de les matemàtiques.

El seu primer gran descobriment, tot just quan tenia 18 anys, va ser un mètode per construir el polígon regular de 17 costats que, tal i com hem dit, havia resistit tots els intents des de l'any 500 a.C. Precisament aquest èxit el va decidir a ser matemàtic i no filòleg, la seva altra gran vocació. Quan va morir, els seus deixebles li van erigir a Göttingen, la seva ciutat natal, una estàtua en el pedestal de la qual hi van posar un polígon regular de 17 costats. Aquesta és la construcció del jove Gauss:



Déu n'hi do el jove Gauss, no?

Amb això, però, encara no en va tenir prou i uns anys més tard, Gauss va demostrar que només es poden inscriure amb regla i compàs els polígons el nombre de costats dels quals es descompon en factors primers que siguin dos o nombres del tipus:

$$p = 2^{2^n} + 1$$

Aquests nombres no són necessàriament primers: per a $n = 5$ surt 4.294.967.297 que és divisible per 641. Fermat va conjecturar que tots podrien ser primers, però Euler va trobar el contraexemple que hem donat.

Així, per exemple, s'obté:

per a $n = 0, p = 3$
per a $n = 1, p = 5$
per a $n = 2, p = 17$
per a $n = 3, p = 257$
.....

El 7 no és, doncs, un nombre d'aquesta forma i l'heptàgon no és inscriptible, com tampoc ho són els polígons regulars de 9, 11, 13, 19, 21, 23,... costats. Gauss va donar, fins i tot, la llista dels 38 valors enters per sota de 300 que permeten la inscripció: 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 48, 51, 60, 64, 68, 80, 85, 96, 102, 120, 128, 136, 160, 170, 192, 204, 240, 255, 256, 257 i 272.

MATERIAL DEL PROFESSOR

A continuació, s'exposen els comentaris per al professorat referits a aquesta activitat. Cal entendre-ho tot amb certa dosi de flexibilitat, perquè l'alumnat pot ser molt divers.

Com a observació general, cal dir que el fet de tenir les activitats seqüenciades pas a pas dóna molta autonomia al professorat, que pot atendre millor la diversitat de ritmes d'aprenentatge. No s'ha de pretendre que tot l'alumnat arribi sempre al mateix lloc. Alguns alumnes podran fer més apartats que d'altres. A més, és convenient fer posades en comú de tant en tant.

DURADA PREVISTA: 4 o 5 HORES

1. Introducció

Tota l'activitat es pot fer dibuixant amb regle i compàs o emprant el programa Cabri-Géomètre. D'entrada, als alumnes els resulta més atractiva la segona possibilitat. Amb tot, si es disposa de més temps, és molt interessant combinar els dos instruments.

Es parteix del supòsit que l'alumnat ha tingut algun contacte amb el programa informàtic esmentat. Si no fos així tampoc no hi hauria problema, però caldria, òbviament, donar una mica més de temps a l'activitat. No sembla necessari dedicar gaire temps al programa en si, més aviat caldria pensar a anar aclarint els problemes que surtin sobre la marxa; a més, el programa compta amb ajudes senzilles que poden consultar els alumnes i estalviar feina al professorat. El que sí és imprescindible és tenir pocs alumnes per ordinador.

2. Què es treballa amb aquesta activitat?

- Nomenclatura i classificació dels polígons.
- Distinció entre polígon inscrit i polígon circumscrit.
- Mesura d'angles amb transportadors.
- Realització i construcció de dibuixos de forma esquemàtica, aproximada i exacta, i distinció de la utilitat de cadascuna d'aquestes modalitats.
- Inducció empírica de regularitats.
- Construcció de figures amb regle i compàs i amb programes informàtics.
- Ús de la mediatriu d'un segment.
- Història de les matemàtiques.

3. Comentaris als apartats

Apartats 1 a 5

L'elaboració de croquis i de dibuixos ràpids i informals és molt necessària per a l'alumnat i per això es demana en iniciar cada bloc d'apartats. Cal que els alumnes vegin que els croquis han de contenir la informació essencial encara que no siguin precisos.

S'ha optat per començar per l'hexàgon, perquè és el més senzill d'inscriure. Si no troben la solució autònomament caldrà demanar que pensin en els angles i que els posin sobre els seus croquis, per tal que concloguin que els 6 triangles en què es descompon l'hexàgon regular a partir del centre són equilàters, i que el costat del polígon és, en conseqüència, igual al radi de la circumferència circumscrita.

El pas al triangle equilàter (apartat 4) i al dodecàgon (apartat 5) és, aleshores, senzill.

La idea dels logotips pretén contextualitzar els problemes proposats.

Apartat 6

Aquest apartat pretén que l'alumnat faci una reflexió prèvia intuïtiva que després s'haurà de contrastar amb les conclusions posteriors.

Apartats 7 i 8

Les ajudes necessàries si no avancen són:

i) traceu un diàmetre; ii) traceu la mediatriu del diàmetre anterior.

Apartat 9

El croquis del subapartat 9.1 ja no els serà tan senzill, tot i que hauran vist uns quants pentàgons regulars en les activitats anteriors.

El dibuix aproximat amb el transportador d'angles té l'interès de retrobar els angles dels polígons. Pot ser que no acabin de veure clar que aquest dibuix no és exacte i caldrà aclarir-ho.

El dibuix amb Cabri s'ha de fer inevitablement de forma guiada, però no deixa de tenir interès.

Apartat 10

Amb aquest apartat els alumnes obtindran una construcció molt atractiva que es pot fer servir per als treballs d'ampliació que es proposen en acabar l'activitat.

Apartat 11

Amb aquest apartat els alumnes distingiran entre circumferència inscrita i circumferència circumscriu. Si no veuen com han de trobar el radi, caldrà donar la pista següent: "traceu la mediatriu d'un dels costats".

Apartat 12

Aquest apartat té la mateixa estructuració que el 9 amb la diferència que no poden arribar a la construcció exacta. Serà bo que debatin quina de les dues aproximacions -la que hauran fet amb transportador i la que hauran fet amb Cabri- és més bona.

Val la pena que el professor esmenti que el mètode exposat a 12.3 és vàlid per a qualsevol polígon. Fins i tot es pot proposar, com a exercici, que el provin amb l'hendecàgon.

El subapartat 12.3, tot i que és força interessant, es pot ometre sense problemes, si no es té prou temps.

Apartat 13

Amb aquesta lectura es pretén cloure l'activitat des d'una perspectiva històrica i global.

L'heptadecàgon construït es dona com a curiositat i no sembla recomanable explicitar-ne la construcció, que resulta massa complexa.

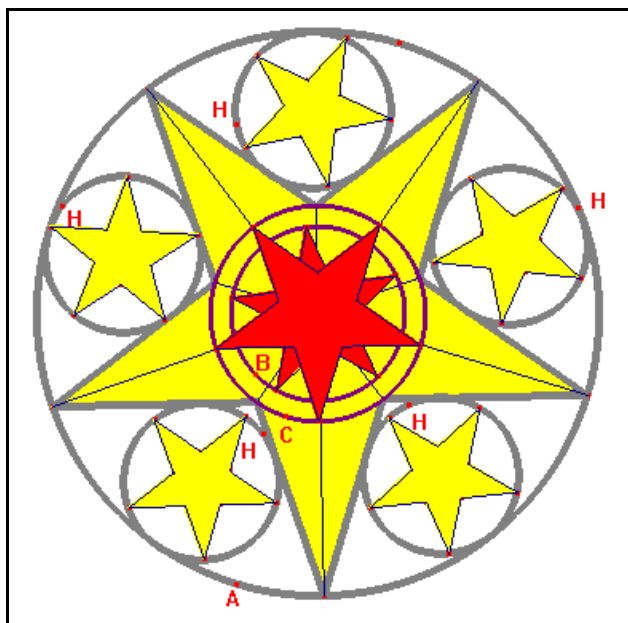
Els nombres de Fermat, que surten al final, poden tractar-se amb una mica més de profunditat, si es té temps.

4. Possibles activitats complementàries o de feina a casa

Com a possibles activitats complementàries, força interessants, cal incloure les següents:

1. Construcció d'estrelles poligonals a partir dels polígons inscrits.
2. Construcció dels polígons regulars conegut el costat.
3. Construcció de rosasses a partir dels polígons inscrits.

Exemple: Construcció d'una rosassa basada en el pentàgon regular inscrit.



Es poden seguir els passos següents:

- a) A partir del pentàgon regular inscrit es pot traçar l'estrella de cinc puntes inscrita. En aquest cas també convé partir d'un punt sobre la circumferència per facilitar les animacions (això s'aconsegueix amb la instrucció *punt sobre un objecte* del menú).
- b) Amb la instrucció *polígon* del menú, els alumnes han de redefinir l'estrella de cinc puntes i crear una macroconstrucció que, donada una circumferència i un punt sobre ella, construeixi l'estrella de cinc puntes inscrita. La macro facilitarà la feina posterior.
- c) No han de tenir problemes per traçar les circumferències concèntriques amb les seves estrelles corresponents. En canvi, les cinc circumferències tangents interiors (a la circumferència gran inicial i a l'estrella inscrita gran) presenten més dificultats. El seu centre es pot trobar per intersecció del radi que va del centre de la circumferència inicial a un dels vèrtexs còncaus de l'estrella (aquesta conclusió és relativament fàcil de trobar) i la bisectriu interior del parell de rectes format per un dels costats de l'estrella i la recta tangent a la circumferència inicial en el punt d'intersecció del radi esmentat abans (això és força més complicat i, probablement, caldran moltes ajudes del professorat).

EXEMPLE 2: EL PROGRAMA DERIVE

El programa Derive és un material que proporciona unes possibilitats excel·lents de treball de l'anàlisi matemàtica a l'aula. És especialment indicat per al batxillerat i es pot emprar com a complement del treball tradicional amb llapis, paper i calculadora. El programa permet fer tota mena de càlculs algebraics, de límits, de derivació i d'integració i, a més, permet fer la representacions de funcions i de recintes de manera molt ràpida i precisa. El poder atractiu de l'entorn informàtic serà un factor de motivació per a molts alumnes.

A continuació es presenta un exemple per al treball de les funcions transcendents amb el programa Derive.

Exemple d'activitat amb Derive: funcions transcendentals

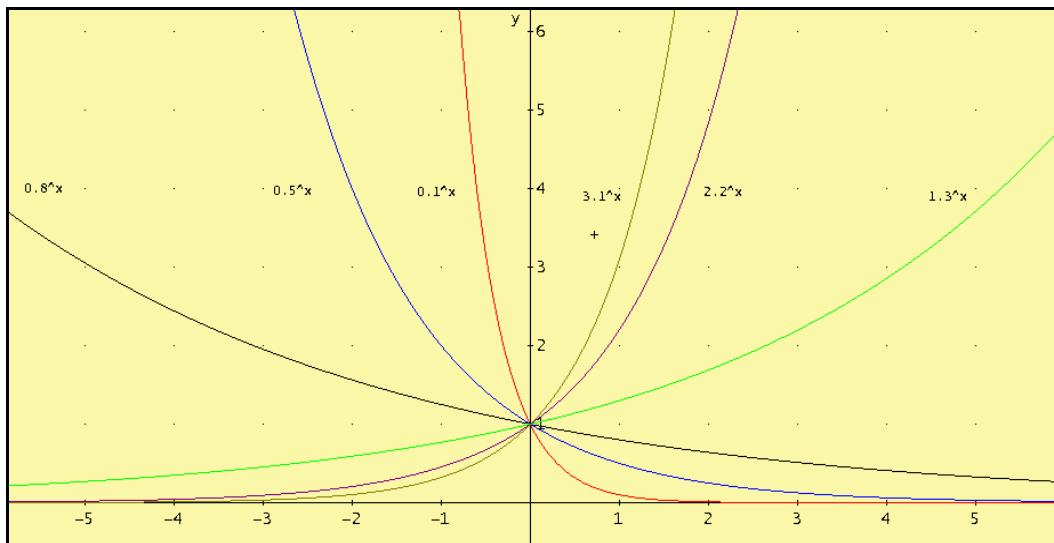
Activitat a desenvolupar en grups de dos alumnes.

Materials necessaris: llapis i paper, ordinador i programa Derive.

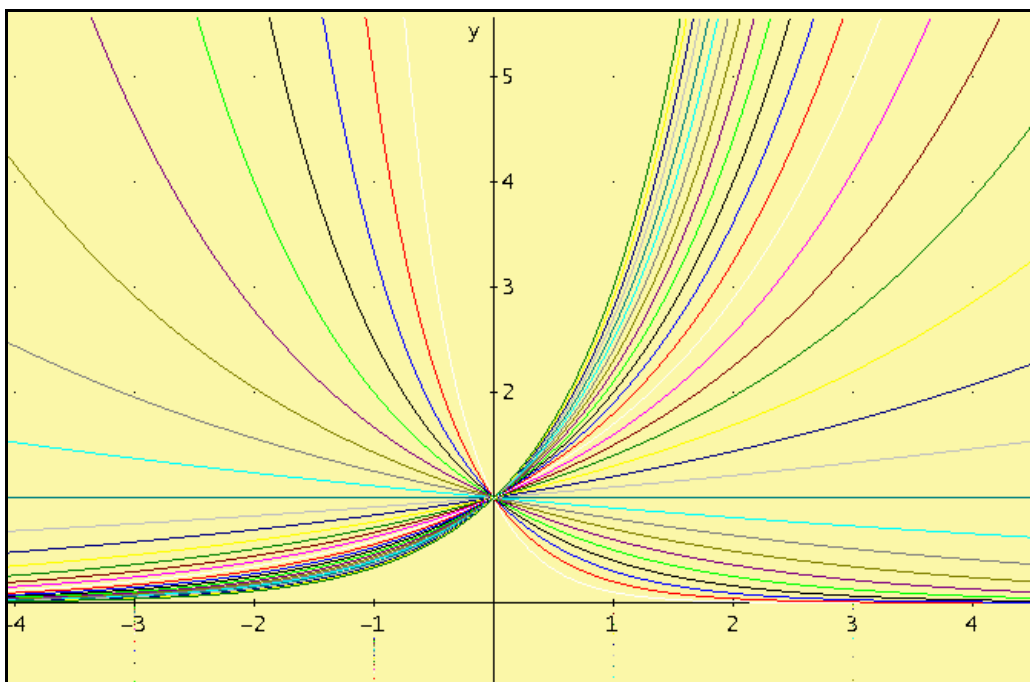
a) Representeu conjuntament les funcions exponencials següents:

$$f_1(x) = 0,1^x ; f_2(x) = 0,5^x ; f_3(x) = 0,8^x ; f_4(x) = 1,3^x ; f_5(x) = 2,2^x ; f_6(x) = 3,1^x$$

Quines característiques comunes tenen? Quines diferències observeu?



b) Empleu la instrucció $\text{vector}(a^x, a, -3, 3, 0.1)$ per representar la família de funcions exponencials $f(x) = a^x$ quan el paràmetre a varia de -3 a 3 de 0,1 en 0,1 (després d'emprar la instrucció $\text{vector}(a^x, a, -3, 3, 0.1)$ cal simplificar i demanar la representació després).



c) Representeu conjuntament les funcions exponencials següents:

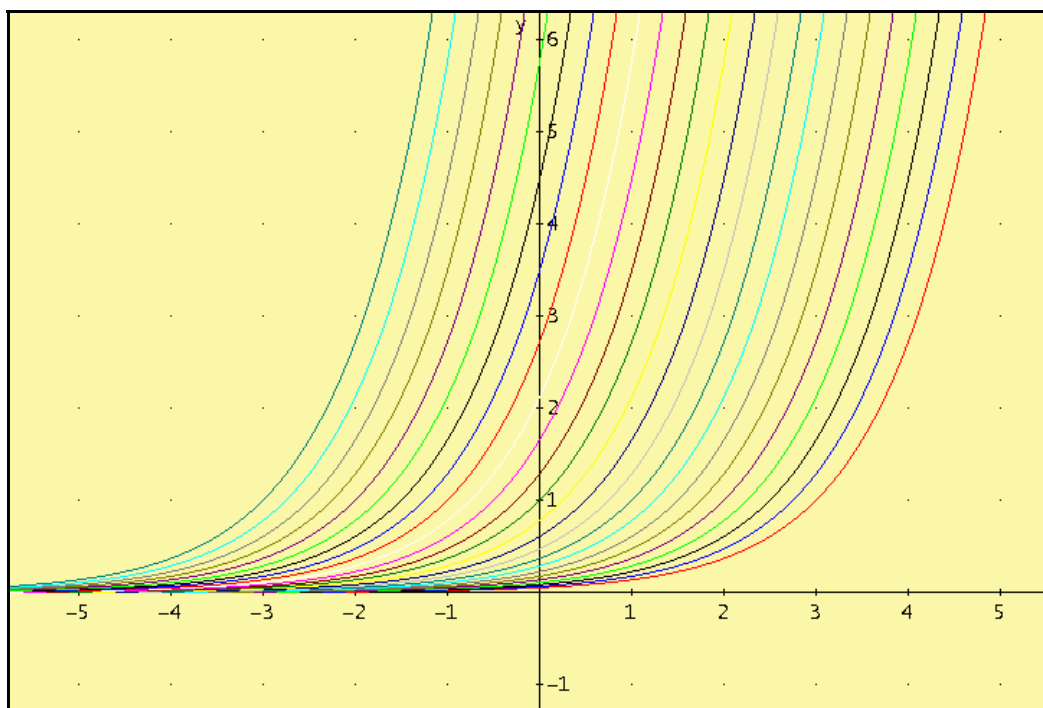
$$f(x) = e^x ; g(x) = e^x + 1 ; h(x) = e^x - 1 ; t(x) = e^{(x-1)} ; z(x) = e^{(x+1)}$$

Quins desplaçaments observeu respecte de la gràfica de $f(x)$? Sense fer noves representacions digueu com seran les gràfiques de les funcions següents:

$$m(x) = e^x + 2 ; n(x) = e^x - 2 ; r(x) = e^{(x-2)} ; t(x) = e^{(x+2)}$$

d) Empreu la instrucció `vector( $e^{ax}$ ,  $a$ , -3, 3, 0.25)` per representar la família de funcions exponencials $f(x) = e^{ax}$ quan el paràmetre a varia de -3 a 3 de 0,25 en 0,25.

e) Empreu la instrucció `vector( $e^x + a$ ,  $a$ , -3, 3, 0.25)` per representar la família de funcions exponencials $f(x) = e^x + a$ quan el paràmetre a varia de -3 a 3 de 0,25 en 0,25.



f) Empreu la instrucció `vector( $e^{(x+a)}$ ,  $a$ , -3, 3, 0.25)` per representar la família de funcions exponencials $f(x) = e^{(x+a)}$ quan el paràmetre a varia de -3 a 3 de 0,25 en 0,25.

g) Representeu conjuntament les funcions trigonomètriques següents:

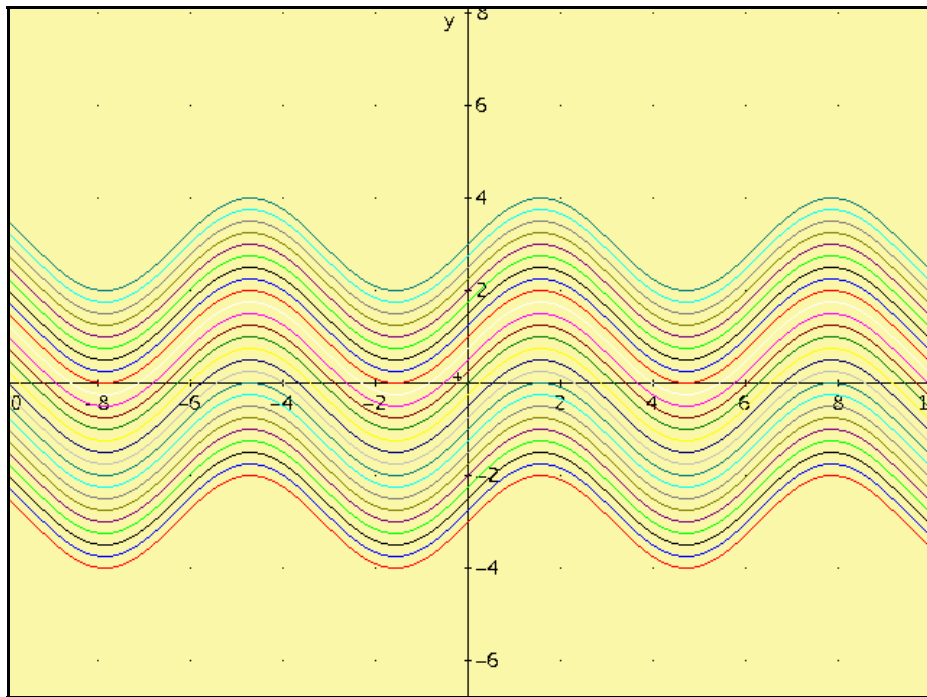
$$f(x) = \sin x ; g(x) = \sin x + 1 ; h(x) = \sin x - 1 ; t(x) = \sin(x-1) ; z(x) = \sin(x+1)$$

Quins desplaçaments observeu respecte de la gràfica de $f(x)$? Sense fer noves representacions digueu com seran les gràfiques de les funcions següents:

$$m(x) = \sin x + 2 ; n(x) = \sin x - 2 ; r(x) = \sin(x-2) ; t(x) = \sin(x+2)$$

h) Empreu la instrucció `vector( $\sin(ax)$ ,  $a$ , -3, 3, 0.25)` per representar la família de funcions trigonomètriques $f(x) = \sin(ax)$ quan el paràmetre a varia de -3 a 3 de 0,25 en 0,25.

i) Empreu la instrucció `vector(sinx+a, a, -3, 3, 0.25)` per representar la família de funcions trigonomètriques $f(x)=e^x+a$ quan el paràmetre a varia de -3 a 3 de 0,25 en 0,25.



j) Empreu la instrucció `vector(sin(x+a), a, -3, 3, 0.25)` per representar la família de funcions trigonomètriques $f(x)=e^{(x+a)}$ quan el paràmetre a varia de -3 a 3 de 0,25 en 0,25.

k) Empreu la instrucció `vector(a · sinx, a, -3, 3, 0.25)` per representar la família de funcions trigonomètriques $f(x)=a \cdot \sin x$ quan el paràmetre a varia de -3 a 3 de 0,25 en 0,25.

2.2. ÚS D'ACTIVITATS A INTERNET O AMB INTERNET

El treball de les matemàtiques fent ús d'internet admet dues possibilitats. D'una banda es pot anar a pàgines que tenen activitats preparades per al treball de les matemàtiques, d'altra banda també és possible fer recerques emprant internet com a instrument. A continuació es proposen exemples en cadascun d'aquests dos sentits.

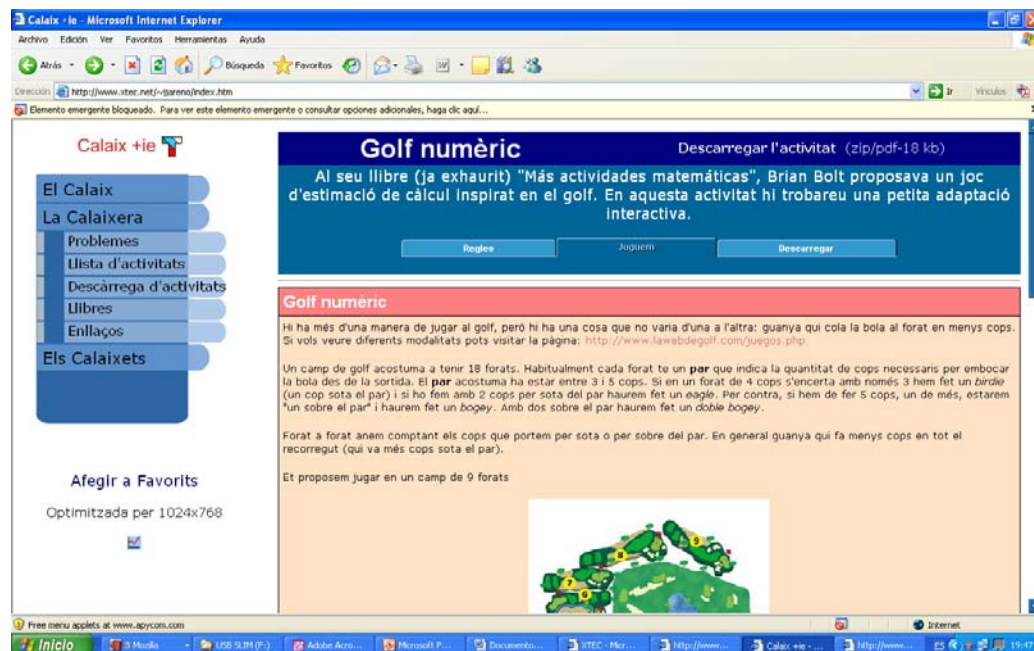
EXEMPLES D'ACTIVITATS A INTERNET PER A ALUMNES DE PRIMER CICLE D'ESO

1. Aneu a la pàgina web següent on trobareu un munt d'activitats per al treball de les matemàtiques. A l'esquerra premeu el botó de “Llista d'activitats” i a continuació “Numeració i càlcul”.

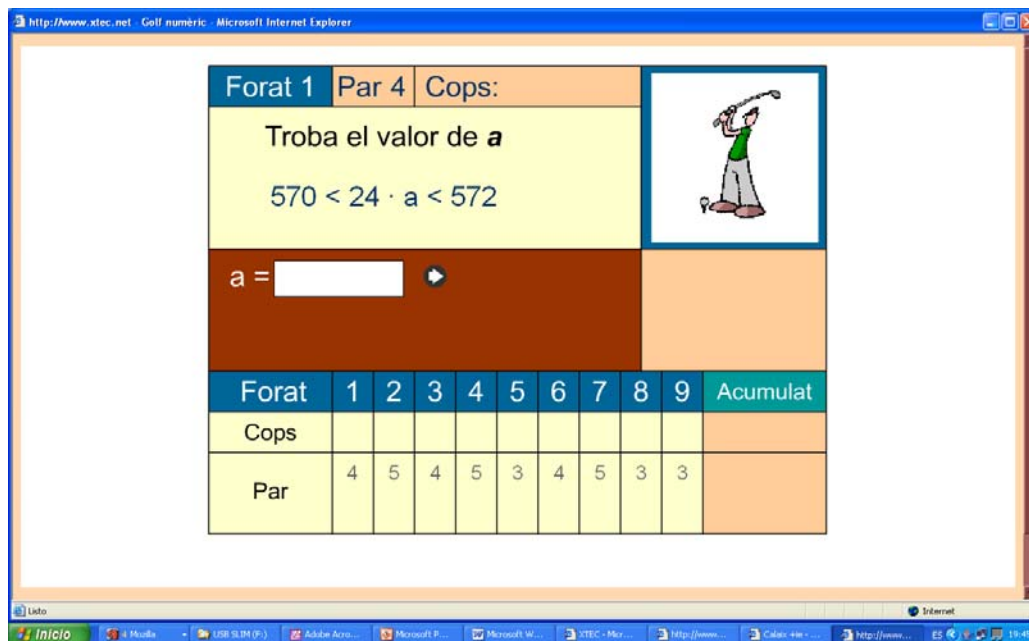
Aquí se us proposa de jugar al golf fent càlcul mental. Compte! No podeu emprar les calculadores!

<http://www.xtec.net/~jjareno/index.htm>

Aquesta és la pàgina inicial:



A l'esquerra premeu el botó de “Llista d'activitats” i a continuació “Numeració i càlcul”. Ja podeu començar a jugar al “golf”:



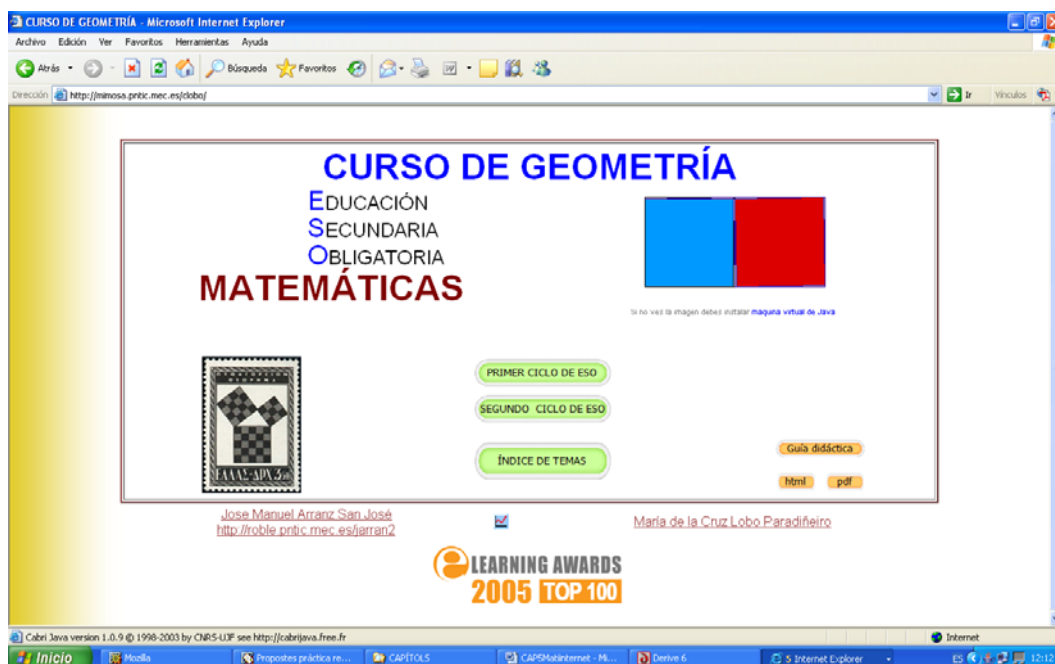
2. Aneu al web navarrès següent on trobareu una recopilació interessant de recursos, enllaceu amb el curs de geometria i comenceu a fer el capítol d'activitats de l'apartat dedicat als triangles.

<http://www.pnte.cfnavarra.es/%7Eiesozizu/departamentos/matematicas/recursos/infos/index.html>

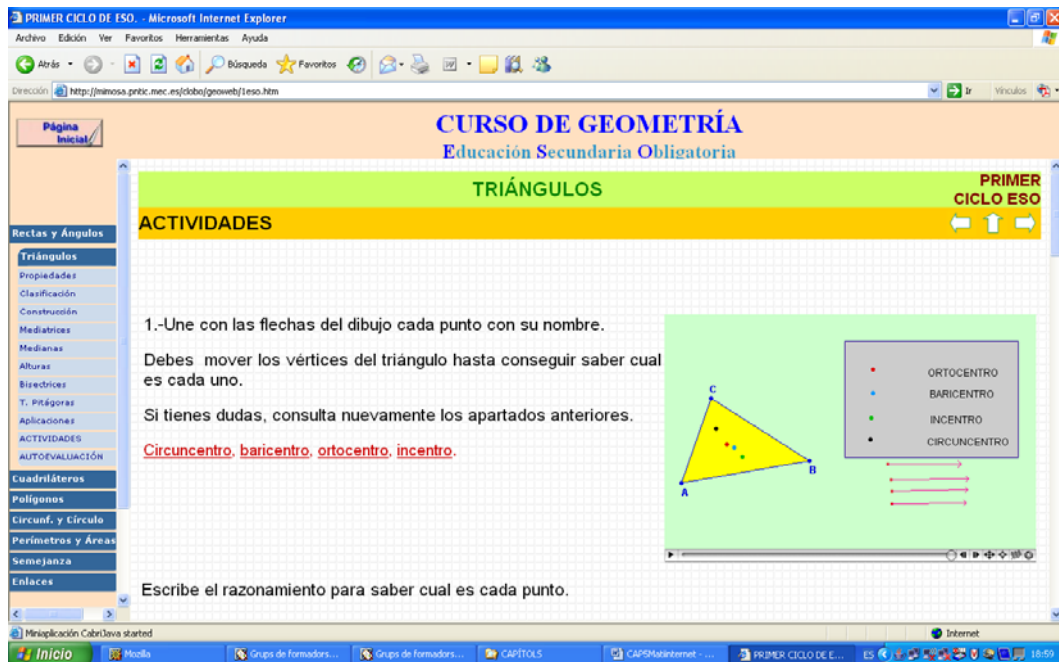
[Curso de Geometría](#)

<http://mimosa.pntic.mec.es/clobo/geoweb/indice.htm>

Aquesta és la pàgina inicial del curs:



Cliqueu primer cicle i després (a la dreta) triangles. A continuació, comenceu a treballar l'apartat d'activitats.

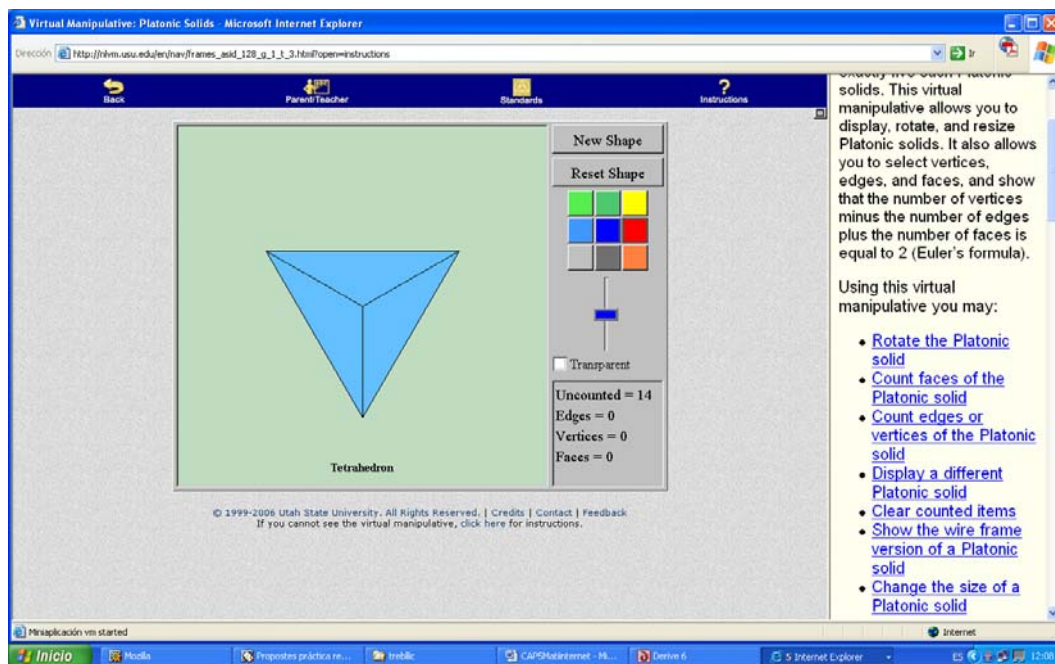


3. Entreu al web de la biblioteca virtual de la [National Library of Virtual Manipulatives for Interactive Mathematics](http://nlvm.usu.edu/en/nav/topic_t_3.html). Trobareu gran quantitat d'aplicacions interactives. Preneu l'apartat de geometria i comenceu a treballar amb els sòlids platònics. Si ho necessiteu, podeu fer consultes al diccionari.

Aquesta és la pàgina inicial:



Entreu a l'apartat dedicat als sòlids platònics (políedres regulars):



Exemple de recerca amb ús d'internet

La pilota d'or



Quin nom té aquest políedre? Quant pesaria una pilota de futbol si realment fos d'or?

Els alumnes i les alumnes hauran de trobar les dades necessàries (nomenclatura dels políedres, mides d'una pilota de futbol, densitat de l'or) a internet i després hauran de resoldre el problema.

3. EXEMPLES D'ACTIVITATS MATEMÀTIQUES FORA DE L'AULA, D'ACTIVITATS PER AL TREBALL COOPERATIU DE LES MATEMÀTIQUES, DE SITUACIONS PROBLEMA, D'ACTIVITAT PER AL TREBALL AMB MATERIALS, D'ACTIVITATS PER AL TREBALL AMB NOTÍCIES DE PREMSA I D'ACTIVITATS PER AL TREBALL AMB CONTES

(Del capítol 6)

EXEMPLES D'ACTIVITATS MATEMÀTIQUES FORA DE L'AULA

Exemple1: pintar el centre

Imagineu que sou un grup d'alumnes que s'ofereix a pintar el centre per finançar part del viatge d'estudis.

Heu de fer un pressupost i heu de calcular un termini d'execució de la feina; més concretament:

- 1) Heu trobat pintura blanca que té un rendiment de 5m^2 per kg i que val a 6,95 euros el pot de 5 kg. Cal donar dues capes de pintura. Què us costarà la pintura?
- 2) Si com a mitjana una persona pot pintar 10 m^2 per hora (tenint en compte les dificultats que comporten els marcs de portes i finestres que no es poden tacar), quantes hores caldrà esmerçar-hi?
Entre quants i durant quants dies deixareu llesta la feina?
- 3) Feu el pressupost atorgant un preu a cada hora treballada.

Comentaris sobre l'activitat

És evident que el plantejament d'una activitat com aquesta comporta algunes dificultats que caldrà valorar abans de posar-s'hi:

- a) Disposarem del temps necessari per fer-la bé?
- b) Disposarem dels materials adequats per dur-la a terme?
- c) Podrem controlar la feina dels grups i dels alumnes de manera efectiva?

Si no podem respondre afirmativament a aquestes qüestions l'activitat quedaria coixa i perdria, en gran part, el seu sentit. Preferiblement hauríem d'organitzar els alumnes en grups de treball per a totes les fases de la resolució. La fase de comprensió del problema i la fase que consisteix a fer el plantejament i a trobar estratègies (segons la terminologia de Pólya) s'haurien de fer a l'aula. La fase d'execució és la que comporta treball fora de l'aula. Finalment, la fase de revisió i conclusions s'ha de fer novament a l'aula.

Un cop tenim els alumnes organitzats en grups els hem de donar una estona perquè estudiïn l'enunciat i comencin a recollir a les seves observacions a les llibretes. El fet que una dada imprescindible -la superfície total a pintar- no consti en l'enunciat pot provocar algunes pertorbacions (estan massa acostumats que els donem totes les dades). Evidentment han d'arribar a la conclusió que cal obtenir aquesta dada i que han de dissenyar una estratègia fiable per tal d'aconseguir-la. Pot ser mot interessant demanar als grups que facin estimacions mentals raonades tant de la superfície total a pintar, com del pressupost final o del temps d'execució (després, en acabar, caldrà contrastar les estimacions mentals amb les reals). Pel que fa a l'organització pràctica de la mesura de la superfície a pintar serà bo deixar-los plena llibertat de propostes, com a mínim inicialment. Després caldrà arribar a conclusions conjuntes amb tot grup-classe.

S'han de considerar necessàries les conclusions següents:

- a) Llista de materials necessaris: instruments de mesura, escales, etc.

b) Organització efectiva de la mesura: repartiment dels espais a mesurar entre els grups (pot resultar interessant que cada zona sigui mesurada per dos grups de cara a controlar errors).

c) Organització de la recollida de dades. Notació a utilitzar. Unitats.

Si cal, es pot fer un assaig inicial amb l'aula abans que els grups comencin la seva actuació.

Una vegada tinguin la dada que els mancava no és de preveure que hi hagi dificultats per calcular els quilograms de pintura necessaris i el preu que tindran. Tampoc els ha de ser difícil de calcular les hores necessàries per a l'execució. De fet, aquí, el problema que tindran és que els caldrà decidir pel seu compte amb quanta gent ho fan i quantes hores treballen diàriament (la redacció final del pressupost també comportarà alguna dificultat).

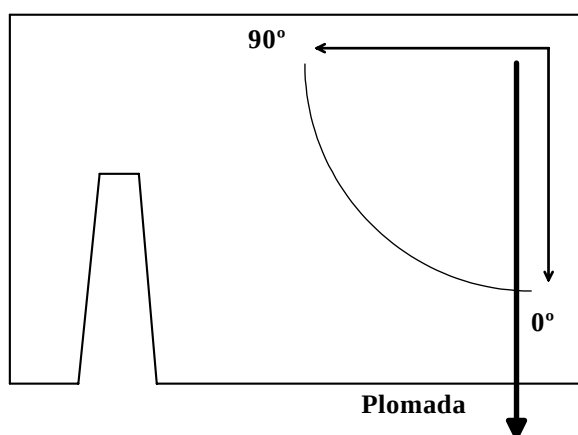
Com ja s'ha comentat, en acabar la feina, és interessant que els alumnes contrastin les seves estimacions inicials amb els resultats finals. També caldrà fer una revisió crítica de tot el procés (sobretot de l'organització) i fer propostes que el puguin millorar.

- Trigonometria al pati.

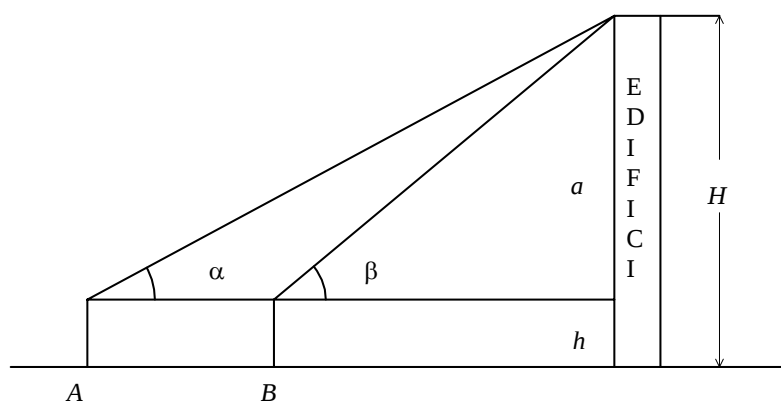
El jardí o el pati de l'escola poden ser bons llocs per fer trigonometria.

Exemple 2: calcular l'alçada de l'edifici

Per fer treball de camp l'ideal és disposar de teodolits (n'hi ha d'ús estrictament didàctic que són prou econòmics). Si això no és possible, l'alumnat pot construir instruments per mesurar angles: només cal un cercle graduat i una plomada. L'instrument, tot i ser rudimentari, permet fer mesures correctes.



Amb una cinta mètrica i el petit quadrant construït pels alumnes, es pot sortir a observar alguna part de l'edifici de la qual es vulgui esbrinar l'altura. Es resolen els triangles rectangles de l'esquema amb les dades obtingudes a l'observació - α , β , h i la distància entre A i B :



En primer lloc es calcula a i s'obté, finalment: $H = a + h$.

Pot resultar molt interessant utilitzar eines estadístiques, estudiar els errors comesos per alguns alumnes o grups d'alumnes en les seves mesures i reflectir la importància d'un treball científic, apuntar tot el que es fa per deduir després els possibles errors, ser meticulós amb la feina, presentar els resultats, etc.

Nota: cal anar amb compte amb la distància AB ; convé que sigui prou gran en comparació amb h perquè en cas contrari podem obtenir que, a efectes pràctics, $\alpha = \beta$.

EXEMPLES D'ACTIVITATS PER AL TREBALL COOPERATIU DE LES MATEMÀTIQUES

Exemple: els alumnes plantegen enunciats

En aquesta activitat es tracta que els alumnes i les alumnes plantegin problemes. L'objectiu és millorar els processos de comprensió d'enunciats i la motivació a les classes de matemàtiques.

Es distribueixen els alumnes en grups de 3 o 4 components. Cada grup formula un problema a partir d'unes dades o d'una imatge o d'un objecte que dóna el professor. Tots els enunciats es llegeixen públicament. S'intercanvien els enunciats entre els grups, es debat col·lectivament la correcció de les formulacions i es resolen els problemes. Els alumnes voten l'enunciat més interessant i l'enunciat més ben formulat.

1. Fitxa amb dades numèriques.

Dissenyeu un problema que inclogui les quantitats següents: 150 cm; 50 cm.

Dissenyeu un problema que inclogui les quantitats següents: 10 m; 25 m².

Dissenyeu un problema que inclogui les quantitats següents: 10 m; 205 m³.

2. Fitxa amb dades numèriques i amb dades qualitatives.

Dissenyeu un problema que inclogui les quantitats següents i les paraules següents: quadrat, diagonal; 110 m.

Dissenyeu un problema que inclogui les quantitats següents i les paraules següents: 6 hores, percentatge.

Dissenyeu un problema que inclogui les quantitats següents i les paraules següents: circumferència, preu; 110 euros.

3. Fitxa amb dades no numèriques.

Dissenyeu un problema que inclogui les paraules següents: triangle equilàter; àrea.

Dissenyeu un problema que inclogui les paraules següents: percentatge, increment i disminució.

4. Fitxa amb un objecte.

Dissenyeu un problema relacionat amb l'objecte següent: una llauna de refresc.

Dissenyeu un problema relacionat amb l'objecte següent: una bicicleta.

5. Fitxa amb un objecte que duen els alumnes.

Cada grup ha de dur un anunci de premsa. L'anunci serveix de base per a la formulació de l'enunciat.

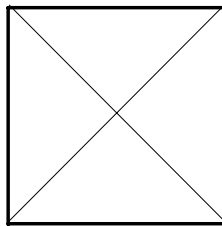
Cada grup ha de dur un envàs comercial. El problema es formula sobre l'envàs.

6. Fitxa amb una imatge

Dissenyeu un problema a partir de les imatges següents:



Dissenyeu un problema a partir de la imatge següent:



7. Fitxa amb una frase.

Dissenyeu un problema a partir de la frase següent: “el nombre de passatgers del tren de rodalies ha augmentat”.

Dissenyeu un problema a partir de la frase següent: “els alumnes de 4t d’ESO volen fer una excursió”.

EXEMPLES DE SITUACIONS PROBLEMA

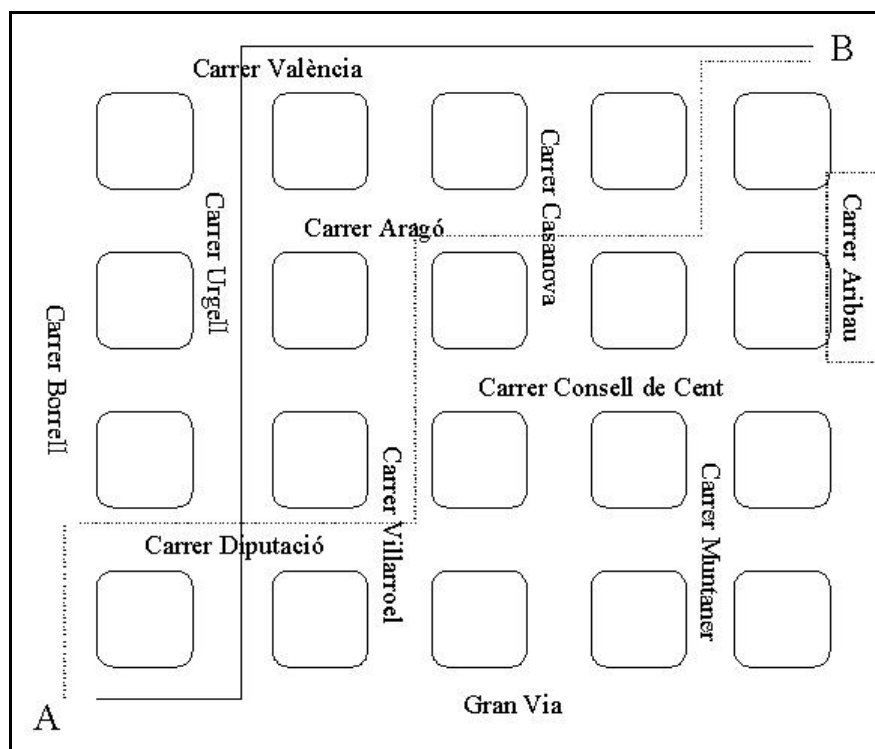
Situació-problema 1

Estudi de les talles de les sabates.

- 1) Què vol dir calçar un 40?
- 2) Com es pot establir una equivalència entre talles i mesures del sistema mètric decimal?
- 3) Aquestes mides són internacionals?
- 4) Quina correspondència hi ha entre les talles de les sabates i les de les altres peces de vestir?

Situació-problema 2

La figura representa una part de l'Eixample barceloní. Una persona vol anar des d'A (Gran Via - Borrell) fins a B (Aribau - València) pel camí més curt possible. De quantes maneres pot fer-ho?



Situació-problema 3

Com podríeu estudiar el consum del vostre cotxe (o del cotxe d'un conegut).

Situació-problema 5

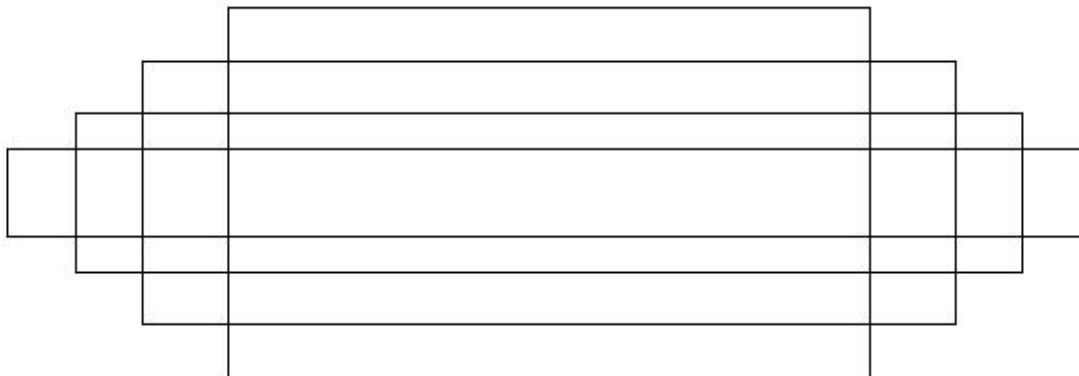
Estudieu els consums d'aigua, gas i electricitat d'una casa o d'un centre.

EXEMPLES D'ACTIVITATS PER AL TREBALL AMB MATERIALS

Exemple 1: treball a l'aula amb cordills

EL PROBLEMA ISOPERIMÈTRIC

Ajuntem els alumnes en grups de tres i els donem un cordill, amb els extrems lligats, d'1 m de longitud. Això els permetrà fer, físicament, els diferents rectangles que tenen 1 m de perímetre:



A continuació se'ls demana que omplin la taula següent:

LONGITUD cm	AMPLADA cm	PERÍMETRE cm	ÀREA cm ²
0	50		
5	45		
10	40		
15	35		
20	30		
25	25		
30	20		
35	15		
40	10		
45	5		
50	0		

La segona part de l'activitat consisteix a observar els resultats obtinguts i constatar què canvia i què no canvia.

Posteriorment es demana als alumnes que facin dues gràfiques de punts:

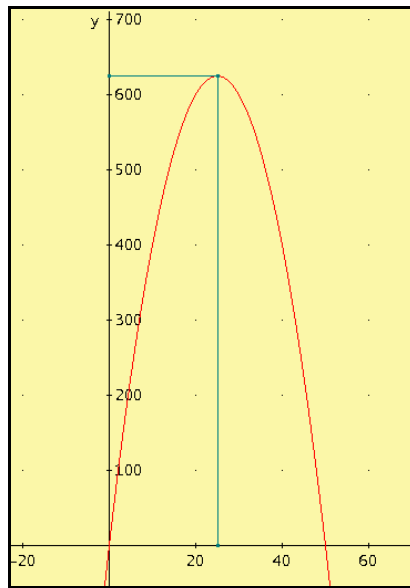
Gràfica 1: han de posar les longituds a l'eix de les *X* i els perímetres a l'eix de les *Y*.

Gràfica 2: han de posar les longituds a l'eix de les *X* i les àrees a l'eix de les *Y*.

A continuació, cal demanar als alumnes que facin estimacions del perímetre i de l'àrea per a valors intermedis dels costats no considerats en el quadre anterior. Aquestes estimacions s'han de fer sense emprar el model físic i només a partir de l'observació de la gràfica. Després caldrà completar la gràfica fins que tingui un aspecte continu.

Finalment, els demanarem que calculin el valor màxim i que en determinin el significat geomètric i gràfic.

Hi hauria encara la possibilitat d'una darrera part de l'activitat que tingués en compte -i això només serà possible en certs nivells- la fórmula obtinguda: $S(x) = x \cdot (50 - x) = 50x - x^2$



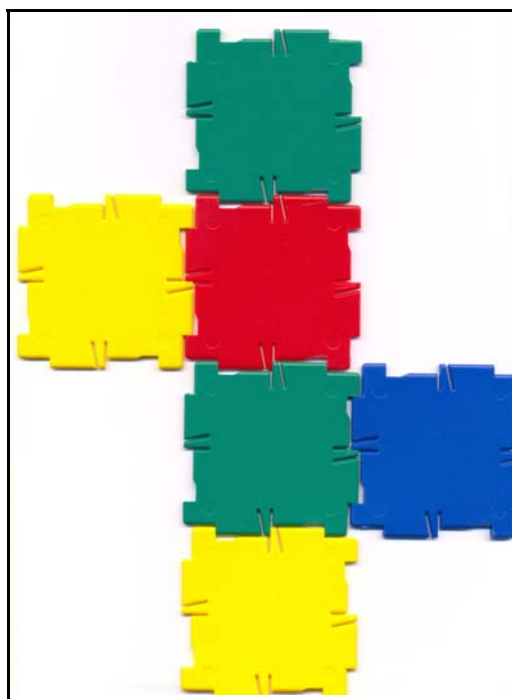
Exemple 2: treball a l'aula amb creator

DESENVOLUPAMENTS PLANS D'ALGUNS POLÍEDRES. CÀLCUL I ESTIMACIÓ DE VOLUMS.

Ajuntem els alumnes en grups de tres i els proposem les activitats següents:

1. Agafeu 4 peces en forma de triangle equilàter de Creator, poseu-les planes sobre la taula i estudieu quines agrupacions permeten construir tetràedres i quines no ho permeten. Dibuixeu-les totes.

2. Agafeu 6 peces en forma de quadrat de Creator, poseu-les planes sobre la taula i estudieu quines agrupacions permeten construir hexàedres i quines no ho permeten. Dibuixeu només les que ho permeten. Al dibuix teniu un exemple d'agrupació de sis quadrats que permet construir un cub.



3. Mesureu el costat del cub en cm i mm i calculeu la seva àrea en cm^2 i en mm^2 . Trobeu també el volum del cub en cm^3 i en litres. Aproximadament, quants cubs com aquests caldrien per omplir tota l'aula? Expliqueu com feu els càlculs.

4. Preneu 8 peces en forma de triangle equilàter de Creator, poseu-les planes sobre la taula i estudieu quines agrupacions permeten construir octàedres i quines no ho permeten. Dibuixeu les que ho permeten. Al dibuix teniu un exemple d'agrupació de vuit triangles que permet construir un octàedre.



5. Mesureu el costat de l'octàedre en cm i mm i empreu el teorema de Pitàgores per calcular les altures de les cares i l'altura del políedre. A continuació, calculeu-ne l'àrea en cm^2 i en mm^2 .

A partir de la fórmula que permet calcular el volum d'una piràmide, trobeu el volum de l'octàedre en cm^3 i en litres. Aproximadament, quants octàedres com aquests caldrien per omplir tota l'aula? Expliqueu com feu els càlculs.

EXEMPLES D'ACTIVITATS MATEMÀTIQUES PER AL TREBALL AMB CONTES

“Alguns dies després, un cop acabats els treballs que estàvem realitzant en el palau del visir, vam anar a donar un volt pel *suk* i pels jardins de Bagdad.

La ciutat presentava, aquella tarda, un moviment intens, febril, fora del comú. Això era perquè, al matí havien arribat dues caravanes de Damasc.

En el basar dels sabaters, per exemple, quasi ni s’hi podia entrar; hi havia sacs i caixes, plens de mercaderies, apilonats pels patis de les posades. Forasters damasquins, amb immensos turbants de diferents colors, que mostraven les seves armes penjades a la cintura, caminaven despreocupadament, mirant amb indiferència cap als mercaders. Se sentia una forta olor d’encens, de kif i d’espècies. Els venedors de faves discutien, quasi es barallaven, i deixaven anar uns renecs terribles en siri.

Un jove guitarrista de Modul, assegut sobre grans sacs plens de síndries, cantava una tonada monòtona i trista:

*Què importa la vida de la gent
Si la gent, per mal o per bé
Va vivint, simplement,
La vida que la gent té?*

Els venedors, a les portes de les seves parades, pregonaven les seves mercaderies, exaltant-les amb elogis exagerats i fantasiosos, demostrant fins a quin punt n’és, de fèrtil, la imaginació dels àrabs.

-Aquest ric teixit és digne del nostre emir!

-Amics! Vegeu quin deliciós perfum, que evoca les manyagueries de la vostra esposa!

-Fixis, oh Xeic, quines xinel·les i quina túnica brodada! Els *djins* les recomanen als àngels!

Beremiz es va interessar per un elegant i harmoniós turband de color blau clar que un siri, mig geperut li oferia per 4 dinars. Hi havia un cartell que, amb lletres ben vistoses, deia així:

Els quatre quates

En veure que Beremiz estava interessat a adquirir el turband blau, vaig dir-li:

-Em sembla una bogeria comprar aquest luxe. No tenim gaires diners i encara no hem pagat l’hostal.

-No és pas el turband que m’interessa –va respondre Beremiz- Fixeu-vos que la botiga d’aquest mercader es diu “Els quatre quates”. En això hi ha una sorprenent coincidència digna de ser estudiada!

-Una coincidència? Per què?

-Doncs perquè el que porta escrit aquest cartell fa pensar en una de les meravelles del Càlcul: podem formar un nombre qualsevol només fent servir quatre quates!

I abans que jo li demanés que m’aclarís aquell enigma, Beremiz m’ho va explicar, tot dibuixant en la sorra fina que cobria el terra:

-Vull formar un zero? No hi ha res més simple. Només cal escriure:

44- 44

Aquests quates formen una expressió que és igual a zero.
Passem al nombre 1. És la forma més còmode:

$$\frac{44}{44}$$

Aquesta fracció representa el quocient de la divisió de 44 per 44. I aquest quocient és 1.

-Vull, ara, fer el nombre 2? Poden utilitzar-se, igualment els quatre quatsres i escriure:

$$\frac{4}{4} + \frac{4}{4}$$

La suma de totes dues fraccions és exactament igual a 2. El tres és més fàcil. Només cal escriure la següent expressió:

$$\frac{4 + 4 + 4}{4}$$

Fixeu-vos que la suma de 12, dividida per quatre, dóna un quocient de 3. Heus aquí, doncs, el tres format a partir de quatre quatsres.

-I com fareu el mateix 4? – vaig preguntar.

-No hi ha res més senzill – va explicar Beremiz - . El 4 pot ser format de diverses maneres. Heus aquí una expressió equivalent a 4:

$$4 + \frac{4 - 4}{4}$$

Observeu que la segona part és nul·la, i per tant la suma equival a 4. Aquesta expressió és el mateix que dir $4 + 0$, és a dir, 4.

Vaig notar que el mercader siri escoltava atent, sense perdre's ni una sola paraula, l'explicació de Beremiz, com si l'interessessin aquestes operacions aritmètiques formades per *quatre quatsres*.*

Beremiz va prosseguir amb la seva explicació:

- Ara vull formar, per exemple, el nombre 5. No hi ha cap dificultat. Escriurem:

$$\frac{4 \times 4 + 4}{4}$$

Aquest operació expressa la divisió de 20 entre 4, el quocient de la qual és 5. Tenim d'aquesta manera el 5 escrit amb quatre quatsres.

Seguidament passarem al 6 que presenta una forma molt elegant:

$$\frac{4 + 4}{4} + 4$$

Una petita alteració en aquest interessant conjunt proporciona el nombre 7:

$$\frac{44}{4} - 4$$

* Tenint en compte la naturalesa i la finalitat d'aquest llibre, usem els signes matemàtics moderns, però és evident que en l'època en què va viure Beremiz la notació matemàtica era ben diferent. (Nota de l'autor)

En canvi, per aconseguir el nombre 8, farem servir una operació molt senzilla:

$$4 + 4 + 4 - 4$$

El nombre 9 no deixa de ser també molt interessant:

$$4 + 4 + \frac{4}{4}$$

Heus aquí una expressió molt interessant, igual a 10, formada també per quatre quatres:

$$\frac{44 - 4}{4}$$

En aquest moment el geperut, amo de la parada, que havia estat escoltant l'explicació del calculista amb un capteniment de respectuós silenci i interès, va dir:

- Pel que acabo d'escoltar, el senyor excel·leix en els comptes i els càlculs. Li donaria com a present el turbant blau si sabés explicar un cert misteri contingut en una suma, que fa dos anys que em tortura l'esperit.

I el mercader va explicar el següent:

-Vaig deixar, una vegada, una quantitat de 100 dinars, 50 a un xeic de Medina i 50 a un jueu del Caire.

El de Medina va pagar la quantitat en quatre parts, de la següent manera: 20, 15, 10 i 5.

Va pagar 20 i va quedar a deure 30	
Va pagar 15 i va quedar a deure 15	
Va pagar 10 i va quedar a deure 5	
<u>Va pagar 5 i va quedar a deure 0</u>	
Suma 50	Suma 50

Observi, amic meu, que tant la suma de les quantitats pagades, com la suma del que em devia, són iguals a 50.

El jueu del Caire va pagar, igualment, els 50 dinars en quatre parts, de la manera següent:

Va pagar 20 i va quedar a deure 30	
Va pagar 18 i va quedar a deure 12	
Va pagar 3 i va quedar a deure 9	
<u>Va pagar 9 i va quedar a deure 0</u>	
Suma 50	Suma 51

Cal observar, ara, que la primera suma és de 50 (com en el cas anterior), mentre que l'altra dóna un total de 51.

No sé explicar aquesta diferència de 1 que s'observa en la segona forma de pagament. Ja sé prou bé que no en vaig resultar perjudicat, perquè vaig rebre el total de la suma, però ¿com justificar el fet que la segona suma sigui 51 i no pas 50?

- Amic meu – va aclarir Beremiz – això s'explica amb poques paraules....”

Exercicis sobre la lectura

1. A la lectura hem vist que en Beremiz ha estat capaç d'escriure els nombres del 0 al 10 amb quatre quats. El podríeu ajudar a arribar fins al 20? Podeu emprar els símbols de les operacions suma, resta, multiplicació, divisió, arrel quadrada i potències - que ja coneixeu - i també l'anomenat factorial: per exemple $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, i, en general:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

Us donem un exemple més que fa servir l'arrel quadrada i el factorial perquè us serveixi de pista:

$$13 = \frac{4!}{\sqrt{4}} + \frac{4}{4}$$

Exercicis sobre la lectura (continuació)

2. Hi ha altres maneres d'escriure els nombres del 0 al 10 amb quatre quats? O les solucions d'en Beremiz són úniques?
3. Com penseu que es resol l'enigma que li planteja el venedor sobre els préstecs?
4. Intenteu arribar fins al 30 amb els quatre quats. No defalliu! S'hi pot arribar!

4. EXEMPLES DE RECURSOS DE LA MATEMÀTICA RECREATIVA

(Del capítol 7)

EXEMPLES D'ACTIVITATS DE L'ÀMBIT DE LA MATEMÀTICA RECREATIVA

Exemple 1

Tenim la següent operació:

$$\begin{array}{r} \text{AABB} \\ -\text{BBAA} \\ \hline \text{CDDC} \end{array}$$

- a) Quin és el nombre CDDC?
- b) Quins són els possibles nombres AABB?

Exemple 2

Esborreu dos nombres i només dos per fila i per columna de tal manera que els nombres restants sempre sumin 15:

3	7	3	1	7	4
3	8	2	2	6	1
4	4	3	4	5	2
8	1	5	7	1	6
7	2	1	5	4	8
1	5	9	4	2	3

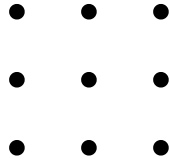
Exemple 3

	2		8	5				
4	5		3			2		9
	7				6		3	1
6	4	3		2			1	8
5	1			7		3	9	6
7	8		1				5	
2		9			3		7	4
				9	4		6	

Completeu la taula (subdividida en 9 quadres) de 81 caselles de tal manera que en cada fila, en cada columna i en cadascun dels 9 quadres hi surtin les xifres de l'1 al 9 i que no se'n repeteixi cap.

Exemple 4

Sense aixecar el llapis del paper fer un traç que consti de quatre segments i que passi pels nou punts dibuixats:



Exemple 5

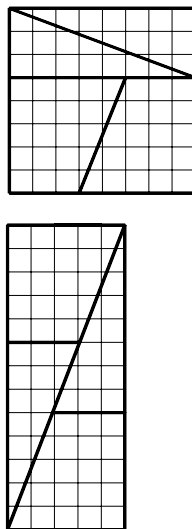
Sabríeu dibuixar dues circumferències concèntriques sense aixecar el llapis del paper i sense traçar cap marca entre les dues circumferències?

Exemple 6

Amb nou escuradents formeu set triangles.

Exemple 7

Observeu les figures següents: a primer cop d'ull les quatre peces en què queden dividits el rectangle i el quadrat són iguals; d'altra banda, el rectangle conté $5 \times 13 = 65$ quadradets i el quadrat en conté $8 \times 8 = 64$. Què és el que passa? Potser això demostra que $64=65$?



Exemple 8

Com us ho faríeu per tal de portar d'un riu 6 litres d'aigua si només teniu a la vostra disposició un recipient de 4 litres i un altre de 9 litres.

Exemple 9

Un capità té fills i filles. Té més anys que fills i filles junts, però no arriba als cent anys. Si es multiplica l'eslora del seu vaixell, donada en metres, per la seva edat i pel nombre total de fills i de filles que té, surt 32118. Quina és l'edat del capità? Quants fills i filles té en total? Quina és l'eslora del seu vaixell?

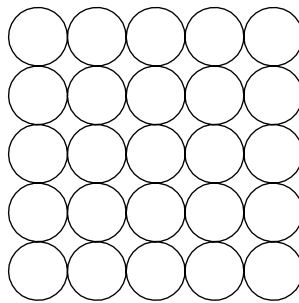
Exemple 10

Expliquen els més vells del poble que fa molts, molts anys, van acusar un home de bruixot, i el tribunal que el jutjava va condemnar-lo a una sentència ben cruel. El condemnat havia de pronunciar una frase de tal manera que si la frase resultava certa, moriria a la forca, i si resultava falsa, moriria a la foguera.

El condemnat, però, es va salvar. Com s'ho va fer ?

Exemple 11

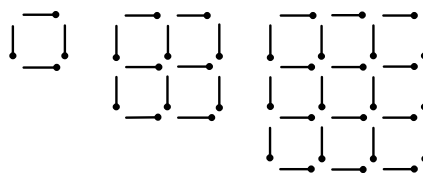
Al damunt d'una taula hi ha col·locades 25 monedes de 2 euros de la forma següent:



Ve una mosca volant i es posa a sobre d'una de les monedes. Se li acudeix, de sobte (és una mosca amb problemes psicològics...), que li agradaria pitjar totes les monedes caminant, tot i passant d'una moneda a una altra que la toqui i sense repetir-ne cap. Ho podrà fer? Podríeu fer-li l'itinerari?

Exemple 12

Quants llumins es necessiten per construir 36 quadrats unitaris formant un altre quadrat més gran, com en la successió següent? I si en tenim 144? I si en tenim 10.000?



Exemple 13

El nombre màgic 6174

Agafeu un nombre de quatre xifres no totes iguals, per exemple 9631. Reordeneu-les, si cal, per tal d'obtenir el major i el menor nombre que es pot aconseguir amb aquestes xifres.

A continuació resteu aquests nombres. A l'exemple que es proposa es tindria:

$$9631 - 1369 = 8262. \text{ Si es reitera el procés:}$$

$$8622 - 2268 = 6354; 6543 - 3456 = 3087; 8730 - 0378 = 8352;$$

$$8532 - 2358 = 6174$$

Feu proves amb altres nombres. Veureu que sempre anireu a parar al 6174 amb un màxim de set passos.

Exemple 14

Escriviu un nombre qualsevol de tres xifres i repetiu-lo a la seva dreta. Dividiu el nombre de sis xifres que es forma per 13 i el quocient obtingut per 11 i després per 7. Veureu que torna a sortir el nombre inicial.

Podríeu esbrinar què és el que passa? Podríeu donar una justificació general d'aquest fet?

Podríeu generalitzar el resultat?

Exemple 15

Observeu les operacions següents:

Agafem un nombre de tres xifres qualsevol, per exemple el 341, el girem i obtenim el 143.

Restem el petit del gran:

$$341 - 143 = 198.$$

Repetim el procés amb aquest nombre però ara els sumem:

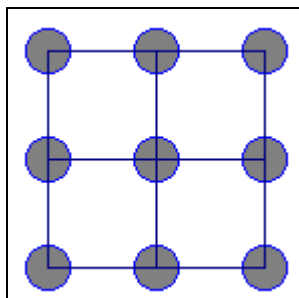
$$891 + 198 = 1089$$

Investigueu si passa el mateix amb altres nombres de tres xifres.

Exemple 16

Feu 10 partides al tres en ratlla amb el vostre company de taula i responeu les preguntes següents:

1. Hi ha alguna estratègia guanyadora? Per què?
2. Hi ha alguna posició que ofereixi algun avantatge? Per què?



Exemple 17

Si es juga al pòquer amb totes les cartes de la baralla, què és més probable:

- 1) Tenir un full servit; 2) Tenir color servit.

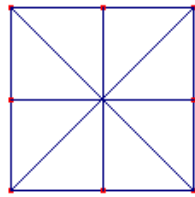
Exemple 18: exemples de cartolines per a un trivial matemàtic:

Completeu la sèrie: 1,1,2,3,5,8,13,21,...

1) 32, 43, 58,.. ; 2) 34, 55, 89,... ; 3) 18, 35, 56,.. ; 4) 34, 53, 77,..

Si $(x-1) \cdot (x+1) = 8$, quant val x ?

1) $x=0$; 2) $x=5$; 3) $x=3$; 4) No es pot calcular

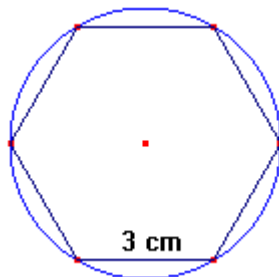


Quants triangles hi ha a la figura?

1) 10 ; 2) 12 ; 3) 8 ; 4) 16

Una bicicleta de muntanya costa 1000€ el mes de setembre. El mes d'octubre la rebaixen un 20% i el més de desembre L'apugen un 20%. Quant costa ara?

1) 1000€ ; 2) 1200€ ; 3) 960€ ; 4) 1240€



Si el costat de l'hexàgon regular inscrit mesura 3 cm, l'àrea de la circumferència val:

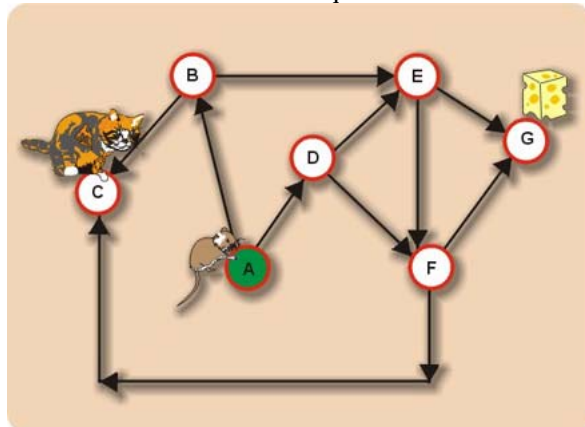
1) $9\pi \text{ cm}^2$; 2) $\pi\sqrt{3} \text{ cm}^2$; 3) $6\pi \text{ cm}^2$; 4) No es pot saber

L'home del temps afirma que el dissabte hi ha un 50% de probabilitat que plogui i que el diumenge també hi ha un 50% de probabilitat de tenir pluja. Per tant, la probabilitat que plogui el cap de setmana és del:

1) 100% ; 2) 50% ; 3) 75% ; 4) No es pot saber

Exemple 19

Una rata ha caigut a la sala A d'un laberint com el que teniu dibuixat a continuació:



La rata comença a moure's a l'atzar pels camins que va trobant, però sempre en el sentit de les fletxes.

Al final del seu passeig anirà a parar o bé a la sala C, on li espera un gat per a menjar-se-la, o bé, a la sala G on té un gran tros de formatge per a menjar i anar-se'n lliure.

Què creieu que és més fàcil, que acabi menjant-se-la el gat o que quedi lliure?

Penseu en una manera de poder simular aquesta situació de forma que sigui més fàcil el poder resoldre-la. Realitzeu l'experiment diverses vegades per a poder arribar a una conclusió. Si posem 8 rates a la sala A, quantes creieu que se salvaran? I si en posem 16?

Exemple 20: joc numèric per a dues persones

Cada jugador per torn diu un nombre comprès entre l'1 i el 5. El nombre que es diu se suma a la suma de tots els anteriors. Guanya el primer jugador que arriba al 100. Hi ha alguna estratègia guanyadora? Quina?

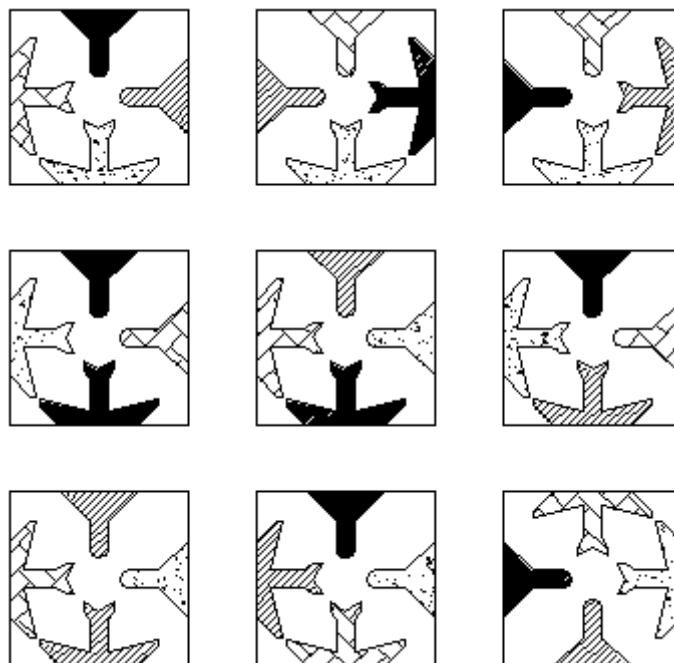
Exemple 21: tàngram



Amb les peces següents componeu un quadrat. Calculeu l'àrea de cadascuna de les peces i comproveu que, sumades, donen l'àrea del quadrat.

Exemple 22: avions

La companyia Swissair regalava aquest trencaclosques que consisteix en 9 fitxes quadrades amb dos caps i dues cues d'avió totes elles. Només es diferencien les fitxes pels 4 colors que es fan servir. El joc consisteix a disposar les 9 fitxes en un tauler 3x3 de manera que els avions quedin ben dibuixats i tinguin el mateix color.



Exemple 23: representació mímica de conceptes matemàtics

Els alumnes es divideixen en grups de dos. Per torn surten a la pissarra i fan un mim per tal de transmetre conceptes com ara quadrat, equilàter, hexàgon, teorema de Pitàgores, etc. Els altres grups, també per torn, han d'endevinar el concepte escenificat.

Exemple 24

El professor divideix la pissarra en 4 parts i posa el títol “Representació de fraccions sobre la recta”. A continuació, en cadascuna de les parts dibuixa una recta de més de 2 m de longitud i marca un 0 i un 1 a 2 m de distància.

Els alumnes es subdivideixen en 4 grups de treball. A cada grup se li dona un cordill de 2 m de longitud. Es demana als grups que representin a la pissarra, cada un en una de les subdivisions de la pissarra i amb l'ajut del seu cordill, les fraccions següents:

$$\frac{1}{4}; \frac{3}{8}; \frac{5}{6}; \frac{2}{7}; \frac{4}{9}$$

A continuació, per torn, els grups expliquen les estratègies que han emprat i col·lectivament es decideix quina estratègia es considera millor.

Exemple 25

El professor Claudi Alsina recull un curiós poema dedicat al nombre pi de l'enginyer català Frederic Masallé i Guarné:

Amb l'ajut d'amena habilitat,
De xifres, sèrie ben santa emplenes,
Recordant formosa quantitat
Que pi fou nomenada quan Atenes
Al cercle feia cas, com convenia
Per la ufanosa Geometria.

El poema conté els primers 30 decimals del nombre a partir de la mida de cada paraula:

3	1	4	1	5	9
2	6	5	3	5	8
9	7	9			
3	2	3	8	4	6
2	6	4	3	3	8
3	2	7	9		

$$\pi = 3,14159265358979323846264338327950288...$$

El senyor Masallé es va aturar poc abans d'haver d'inventar una paraula de zero lletres...

Podem proposar als nostres alumnes exercicis similars amb el mateix nombre pi o amb el nombre e:

Exercici

Trobeu una frase que reculli els primers deu decimals de pi.

Trobeu una frase que reculli els primers deu decimals del nombre e.

5. EXEMPLES PER AL TREBALL DE LA HISTÒRIA DE LES MATEMÀTIQUES A CLASSE

(Del capítol 8)

EXEMPLES DE LECTURES AMB EXERCICIS

EXEMPLE 1

LECTURA: NOTES SOBRE LA HISTÒRIA DE LES EQUACIONS

Molts científics, pensadors i matemàtics han col·laborat al llarg de la història a construir les teories sobre resolució d'equacions. Aquí s'ha optat, però, per citar només algunes figures especialment destacades d'èpoques o períodes fonamentals.

La primera gran figura que cal destacar és la de **Diofant**, que va viure i treballar a Alexandria, en el segle II o III (hi ha dubtes sobre quan va viure exactament). D'ell se'n conserven sis llibres de l'anomenada *Aritmètica* i fragments del llibre sobre els nombres poligonals.

En la *Aritmètica*, Diofant estudia les operacions amb nombres racionals i resol equacions lineals. També estudia equacions amb coeficients racionals i solucions racionals i problemes que condueixen a equacions de segon grau de les quals, en general, només en calcula una solució.

Diofant va elaborar un sistema de símbols per a tot això. Així, introdueix símbols per a les incògnites, les potències, la subtracció, els termes independents, etc. El sistema de numeració és alfabètic (encara no s'havia adoptat el sistema de numeració decimal que és d'origen hindú i no arriba a Europa fins el segle XII a través dels àrabs). Per a Diofant, per exemple:

$$\xi\xi\alpha\rho\alpha\mu^0\lambda\sigma\iota\epsilon\iota\sigma\iota\nu\xi\xi^{\sigma\iota\sigma}\kappa\mu\sigma^{\nu}\alpha\sigma\iota\epsilon$$

significa

$$10x + 30 = 11x + 5$$

Ho tenia, certament més difícil que nosaltres; tot i amb això, va fer grans avenços i van passar molts segles abans que la seva matemàtica, i la dels grecs en general, no fos superada.

Un tipus d'equacions de primer grau porten encara avui el seu nom. Són les equacions de la forma $ax + by = c$ amb a , b i c enters i de les quals interessen solucions enteres.

A partir del segle VII l'expansió de l'islam va portar a l'aparició d'una gran zona d'intercanvi cultural, des de l'Índia, a l'est, fins a la península ibèrica a l'oest.

Els àrabs van recollir els coneixements dels grecs i de Diofant en particular (Alexandria formava part del seu domini). Van afegir-hi aportacions que venien de l'Índia i de Xina i, amb molta habilitat, van donar un gran impuls a l'àlgebra.

Una figura de gran importància en el desenvolupament de les matemàtiques en aquesta època fou la de **Mohamed ibn Musa al Khuwarizmi**, que en el segle IX va escriure dues obres que tindrien una enorme transcendència històrica: *Llibre sobre els nombres hindús* i *Llibre de les operacions de restabliment i reducció*.

Ambdues obres arriben a Europa a través de la península ibèrica el segle XII i van tenir molt d'èxit al llarg dels anys. La primera va portar com a conseqüència l'adopció del sistema de numeració que utilitzem avui pràcticament a tot el món (les xifres del qual, recordem-ho, anomenem aràbigues).

La segona va donar un extraordinari impuls a l'àlgebra. De fet, aquest terme està extret del títol en àrab d'aquest segon llibre: *Hisab al-jabr wa-al-muqaba*.

També ha romàs el nom de l'autor, Al-khuwarizmi, en la forma llatinitzada d'algorisme (que significa sistema de càlcul).

A Europa les matemàtiques adquireixen un nou impuls a partir del Renaixement. Les obres dels clàssics i dels àrabs es difonen més fàcilment amb l'aparició de la impremta (que inventa l'alemany Johannes Gutemberg el segle XV) i sorgeixen molts estudiosos de les matemàtiques.

Concretament, a la Itàlia renaixentista va sorgir una enorme preocupació per a la resolució d'equacions. Ja es coneixien des de l'antiguitat els mètodes per resoldre equacions de primer i de segon grau. Les equacions de tercer grau, però, havien resistit tots els esforços intel·lectuals de la humanitat fins que **Scipio del Ferro (1465-1526)** va trobar la forma de resoldre-les.

D'acord amb els costums de l'època no va publicar els resultats. Tan sols abans de morir va decidir transmetre el seu secret a un dels seus deixebles. Aquest, orgullós del coneixement de tan important misteri, va reptar un dels grans matemàtics de la seva època, **Niccolo Tartaglia (1500-1557)** a resoldre un grapat d'equacions de tercer grau. Tartaglia va acceptar el repte i vuit dies abans que expirés el termini va trobar el mètode de resolució de les equacions cúbiques i en dues hores va resoldre tots els problemes plantejats pel seu oponent que va quedar bocabadat (això fou exactament el 12 de febrer de 1535).

Assabentat d'aquesta història, un professor de física i matemàtiques de Milà anomenat **Girolamo Cardano (1501-1576)** va començar a suplicar Tartaglia que l'informés del seu descobriment. Aquest va accedir-hi, finalment, amb la condició que Cardano mantingués el seu mètode en secret. Cardano però, el va trair i va publicar el resultat de Tartaglia en el seu treball *Ars magna* (cal dir en el favor de Cardano que va completar i millorar les propostes de Tartaglia). La fórmula de resolució d'equacions de tercer grau rep el nom, des de llavors, de "fórmula de Cardano".

Poc després va aparèixer una figura important per a la història de les equacions: el francès **François Viète (1540-1603)**.

Viète va estudiar ciències jurídiques. Sempre va mantenir, però, una gran afició a l'astronomia i a les matemàtiques. Va arribar a ser conseller dels reis de França, Enric III i Enric IV. Un dels seus grans mèrits va ser el de crear un nou llenguatge algebraic tot i emprant de manera sistemàtica les lletres per designar nombres. Així, per primera vegada, fou possible l'estudi de les equacions i de les seves propietats mitjançant fórmules generals.

No obstant, la simbologia de Viète era encara prou allunyada de l'actual i lligada a la geometria. Així, per exemple, per posar:

$$x^3 + 3bx = d$$

Viète escrivia:

$$x \text{ cubus} + b \text{ planum in } x_3 \text{ aequatur } d \text{ solido}$$

En tot cas, el pas que va fer Viète va ser molt important i es va difondre àmpliament per tot Europa.

Un dels primers a utilitzar la nova àlgebra creada per Viète fou el també francès **Pierre de Fermat (1601-1665)**.

Fermat procedia d'una família de comerciants que vivia al sud de França. Va estudiar a la Universitat de Tolosa, a la facultat de ciències jurídiques i es va dedicar professionalment al dret. S'ocupava de les matemàtiques en el seu temps lliure. Va fer aportacions importants a la

teoria de nombres, a la geometria, al càlcul infinitesimal i a l'òptica. Era un home molt reservat i no li agradava comunicar els seus descobriments que no es van publicar fins després de la seva mort.

Va conèixer i estudiar les obres dels contemporanis i dels clàssics. Les obres de Diofant d'Alexandria, per exemple, es van fer famoses a Europa amb la seva publicació en grec i en llatí el 1621 (editades pel francès Bachet de Méziriac). Així, Fermat les va poder estudiar amb profusió. Curiosament, en el marge d'una d'aquestes edicions va plantejar el famós teorema que porta el seu nom i que, fins fa molt poc, no s'havia pogut demostrar:

"l'equació $x^n + y^n = z^n$ amb n enter més gran que 2 no té solucions enteres"

Fermat afirmava, en el mateix marge, que tenia en un altre lloc la demostració del teorema (deia que allí no hi cabia). Aquesta demostració, però, mai no s'ha trobat i roman com un dels grans misteris de la matemàtica.

Més de tres-cents cinquanta anys després, el 1995, el britànic **Andrew Wiles** demostrava per fi el famós teorema com a conseqüència de complicades elaboracions matemàtiques.

Ara només cal que potser algú d'entre vosaltres segueixi aquest llarg camí.

Exercicis:

1. Cerqueu informació sobre els matemàtics que apareixen a la lectura.
2. Cerqueu informació sobre el símbol de la igualtat. Quan es va fer servir per primera vegada? Quin és el seu origen?
3. Cerqueu informació referent a les equacions diofàntiques.

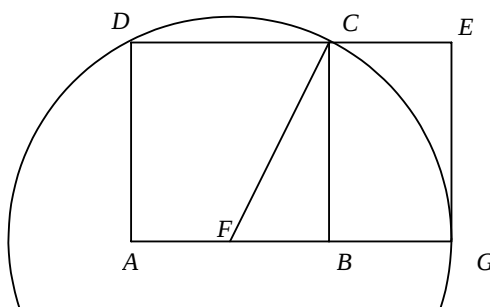
EXEMPLE 2

LECTURA: LA HISTÒRIA DE TRES PROBLEMES SENSE SOLUCIÓ

Per als geòmetres grecs fer geometria volia dir fer construccions amb regle i compàs. Amb aquests instruments van resoldre molts problemes com ara els següents:

- la bisecció del segment i de l'angle;
- la trisecció del segment;
- la duplicació del quadrat;
- la quadratura del rectangle;
- la construcció del rectangle d'or.

Aquí teniu, per exemple, la construcció de l'anomenat rectangle d'or, que segons els grecs de l'antiguitat és el rectangle més harmoniós que existeix: partim del quadrat $ABCD$, a continuació prenem el punt mitjà F del segment AB i tracem la circumferència de centre F i radi FC ; aquesta circumferència talla la recta que passa pel costat AB del quadrat en el punt G i ja tenim el rectangle d'or $AGED$.



En aquest rectangle es compleixen les relacions:

$$AB = AG \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

i, equivalentment:

$$AG = AB \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

De manera natural es van plantejar els problemes següents, que van tenir ocupats els matemàtics durant més de 2000 anys sense que se'n trobés la solució:

1. **La trisecció de l'angle**, és a dir, la divisió d'un angle donat en tres parts iguals.

2. **La duplicació del cub**, és a dir, obtenir un cub de volum doble del d'un cub donat.

La llegenda explica la història següent: a partir de l'any 427 aC una terrible pesta va assolar Grècia fins a causar la mort de la quarta part de la població d'Atenes -entre les víctimes hi havia, segons sembla, Pèricles. Per tal de conjurar la malaltia, els atenesos varen recórrer a l'oracle d'Apol·lo a Delfos. L'oracle els va demanar que dupliquessin l'altar cúbic que hi havia en aquells moments. Els atenesos van duplicar les dimensions de l'altar i, per sorpresa de tots ells, en va resultar un cub vuit vegades més gran que l'inicial. Així va néixer aquest problema clàssic.

3. **La quadratura del cercle**, és a dir, la construcció d'un quadrat d'àrea igual a la d'un cercle donat.

Els grans matemàtics i geòmetres grecs no van saber veure que tots aquests problemes no tenien solució. De fet, això no va ser possible fins més de dos mil anys més tard. Durant molt de temps, doncs, aquests tres reptes van desafiar les ments més privilegiades. A principi del segle XIX, un jove francès de poc més de vint anys, **Evarist Galois (1811-1832)**, va trobar-ne per fi la solució: aquestes construccions no es poden fer amb regla i compàs per més que ens hi escarrassem. No va ser gens fàcil provar això; cal dir que la genial feina del jove Galois no hauria estat possible sense les aportacions de molts predecessors i coetanis, especialment D'Alembert, Gauss, Lagrange, Ruffini i Abel.

Just abans del duel fatal en què va trobar la mort, Galois va formular i escriure en el decurs d'una nit els seus descobriments més importants i els va trametre, com a testament, al seu amic O. Chevalier perquè els publicqués en cas d'un final tràgic.

La carta va ser publicada tot just després de la mort d'Evarist Galois; les idees que s'hi recollien, però, no van tenir les repercussions i el reconeixement que es mereixien fins que el 1846 **Joseph Liouville (1809-1882)** va desxifrar i publicar tots els treballs de Galois.

La teoria de Galois, aparentment, era ben lluny dels problemes geomètrics que havien plantejat els grecs i es referia a la resolució d'equacions. Els nombres queden classificats en algebraics i transcendents segons siguin o no solució d'equacions a coeficients enters. Només alguns nombres algebraics són construïbles amb regla i compàs: els que són solucions d'equacions amb coeficients racionals de grau 1 o 2^k , amb k natural. Entre aquests no s'hi compten les solucions dels tres problemes clàssics exposats anteriorment.

Vegem-ho amb una mica més de detall:

1. La quadratura del cercle equival a resoldre l'equació:

$$\pi R^2 = x^2 \Leftrightarrow x = R\sqrt{\pi}.$$

El nombre π hauria de ser, doncs, construïble amb regla i compàs per tal que la quadratura fos realitzable, i això és impossible ja que no és ni tan sols algebraic. La transcendència de π no va ser demostrada fins el 1882 per **Ferdinand Lindemann (1852-1939)**.

2. La duplicació del cub, algebraicament, equival a resoldre l'equació $x^3 = 2a^3$, que és equivalent a resoldre $x = a\sqrt[3]{2}$. El nombre $\sqrt[3]{2}$ és algebraic perquè és solució de l'equació $x^3 - 2 = 0$, però no és solució de cap equació de grau 1 o 2^k amb coeficients racionals i no es pot dibuixar amb regla i compàs.

3. La trisecció de l'angle, per exemple de 60° , equival a resoldre l'equació $8x^3 - 6x - 1 = 0$ que no és reductible a equacions de segon grau o de primer grau resolubles.

Efectivament, trisecar l'angle de 60° equival a representar el punt del pla $(\cos 20^\circ, \sin 20^\circ)$ sobre la circumferència unitat. Si posem $y = 20^\circ$, es complirà $\cos 3y = 1/2$ i desenvolupant aquesta expressió:

$$\begin{aligned} \cos 3y &= \cos(2y+y) = \cos 2y \cos y - \sin 2y \sin y = (\cos^2 y - \sin^2 y) \cos y - 2 \sin y \cos y \sin y = \\ &= \cos^3 y - \sin^2 y \cos y - 2 \sin^2 y \cos y = \cos^3 y - 3 \sin^2 y \cos y = \cos^3 y - 3(1 - \cos^2 y) \cos y = \\ &= 4 \cos^3 y - 3 \cos y = 0,5 \end{aligned}$$

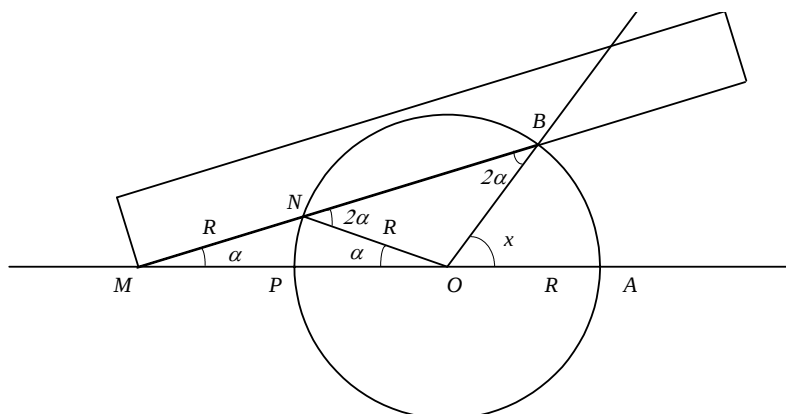
Si fem $\cos y = x$ i multipliquem per dos, obtenim l'equació $8x^3 - 6x - 1 = 0$.

De fet, tot i el mèrit global de Galois, s'ha de dir que la impossibilitat de la trisecció va ser provada específicament el 1837 pel jove francès de 23 anys **Pierre Laurent Wantzel (1814-1848)** en un memorable article de set pàgines aparegut en el *Journal des mathématiques pures et appliquées* que portava el títol *Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas*. Wantzel demostrà que les irracionalitats cúbiques no eren del cos dels racionals ni dels

cossos extensió obtinguts per adjunció d'irracionals quadràtics -els únics nombres construïbles amb regle i compàs- i va obtenir, com a corol·lari, la impossibilitat de la trisecció.

Tanmateix, gairebé 2000 anys abans, el genial **Arquimedes de Siracusa** tenia un mètode per trisecar angles “amb regle i compàs” que “funcionava” (i encara “funciona”) a la perfecció:

Si es vol trisecar l'angle AOB , es traça la circumferència de radi R i centre O i es marca, amb el compàs, aquest radi sobre el regle. A continuació, es recolza el regle sobre el punt B i desplaçant-lo fins a aconseguir els punts M (sobre la recta que passa per OA) i N (sobre la circumferència), de tal manera que $MN=R$. Aleshores, l'angle ONP que s'ha obtingut és exactament un terç de l'angle donat.



Efectivament, en el dibuix anterior el triangle OMN és isòsceles per construcció i, així, l'angle en O també és α i l'angle en N és $180^\circ - 2\alpha$. Aleshores, en el triangle ONB , que també és isòsceles, es té: angle en $N = 2\alpha =$ angle en B i angle en $O = 180^\circ - 4\alpha$. Finalment, s'obté l'angle x en funció del construït α :

$$x = 180^\circ - (\alpha + 180^\circ - 4\alpha) = 3\alpha$$

Així és com el geni de Siracusa trisecava angles. El cert és que Arquimedes era perfectament conscient de “l'abús” que feia del regle.

Exercicis:

1. Cerqueu informació sobre els matemàtics que apareixen a la lectura.
2. Estudieu i resoleu els quatre problemes que els geòmetres grecs sí que van resoldre: a) la bisecció del segment i de l'angle; b) la trisecció del segment; c) la duplicació del quadrat; d) la quadratura del rectangle.
3. Estudieu la figura que es proporciona a l'inici de la lectura i demostreu les relacions $AB = AG \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ i $AG = AB \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ tot i fent ús del teorema de Pitàgores.
4. Cerqueu informació sobre els nombres $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ i $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

EXEMPLES DE PROBLEMES AMB HISTÒRIA PER TREBALLAR A L'AULA

1) *Un problema sumeri.*

Un bastó de 30 unitats de llarg s'apuntala contra la paret d'una casa. Llisca cap avall 6 unitats per la part de dalt. Quantes unitats s'ha separat de la base de la paret el peu del bastó?

Aquest problema apareix en una tauleta sumèria del 2000 aC que inclou també la resolució. Els sumeris coneixien, doncs, el teorema de Pitàgores.

2) *Un problema xinès.*

Un arbre de 20 tx'ih d'alçada (cal entendre alçada del tronc) té una circumferència de 3 tx'ih. Una parra enfiladissa s'enrosca 7 vegades al tronc i arriba fins a l'enforcadura. Quina és la longitud de la parra?

Aquest problema apareix en el tractat xinès anomenat *Txiu txang suan-xu* que té uns dos mil anys tot i que recull problemes tradicionals l'origen dels quals es remunta al 2000 aC. La resolució que en donen demostra el coneixement que tenien del teorema de Pitàgores.

3) *Un problema plantejat per Diofant*

"Una persona compra garrafes de vi de dues menes, unes de quinze dracmes i les altres de quatre dracmes; en total paga un nombre quadrat que augmentat en seixanta unitats et donarà un altre quadrat l'arrel del qual és el nombre total de garrafes. Esbrina quantes garrafes de quinze i de quatre dracmes ha comprat."

Cal dir que l'enunciat que es presenta és una versió modificada -per tal que fos més entenedora- del problema original.

Aquest és l'únic problema de Diofant que conté nombres concrets. És el problema 30 del llibre V de la seva *Aritmètica*.

4) *L'epitafi de Metrodor*

L'Antologia Grega, compilada per Metrodor, conté el següent epitafi referit a Diofant d'Alexandria:

"Transeünt, aquesta és la tomba que guarda les cendres de Diofant. Ell mateix, amb aquesta sorprenent explicació et dirà els anys que va viure: vaig ser un nen la sisena part de la meua vida; després d'una dotzena part les meves galtes es varen cobrir de barba; encara va transcórrer un setè més de la meua vida abans de casar-me i cinc anys més tard vaig tenir un fill; aquest estimat fill, desgraciadament va morir, quan va assolir la meitat de l'edat que jo he arribat a viure; el vaig plorar al llarg de quatre anys dedicats a l'estudi de la ciència dels nombres, abans de morir i descansar en pau."

Quants anys va viure, doncs, Diofant?

On i quan va viure Diofant? Què en sabem d'ell?

5) Un problema de Robert Recorde

Venc un cavall amb quatre ferradures, i cada ferradura porta 6 claus, a condició que em paguin un “ob” pel primer clau, dos pel segon, quatre pel tercer, i així successivament tot i doblant el preu cada cop. Ara demano, quin és el preu del cavall?

El gal·lès Robert Recorde (1510- 1558) fou metge d'Eduard VI i matemàtic eminent del seu temps. Publicà un llibre en forma de diàlegs -el Grounde of Artes- entre un mestre i un alumne que contenia nombrosos problemes aritmètics.

6) Un problema de Bachet de Meziriac

Quin és el nombre menor de pesos de què cal disposar per pesar amb unes balances qualsevol nombre de quilograms entre 1 i 40?

El francès Claude Gaspar Bachet de Méziriac (1587-1638) fou el traductor i editor de l'*Aritmètica* de Diofant que després arribaria a mans de Fermat, i en els marges de la qual deixà plantejat el seu famós teorema.

7) Dos problemes de Newton

7.1) *Un comerciant té una quantitat determinada de diners. El primer any es va despendre de 100 lliures i augmentà el capital restant en un terç d'aquest restant. El segon any tornà a despendre's de 100 lliures i augmentà la suma restant en un terç d'ella mateixa. El tercer any es va despendre un altre cop de 100 lliures i, després d'afegir un terç del restant, el capital era el doble de la suma inicial. Quin era el capital inicial?*

7.2) *75 bous consumeixen en 12 dies l'herba d'un prat de 60 àrees. 81 bous consumeixen en 15 dies l'herba d'un prat de 72 àrees. Quants bous consumeixen en 18 dies l'herba d'un prat de 96 àrees? (Hom suposa que els 3 prats tenen la mateixa altura d'herba en entrar-hi els bous, i que aquesta continua creixent uniformement mentre mengen).*

Newton en el seu llibre *Aritmetica Universalis* va dir que "per resoldre un problema referent a nombres o relacions abstractes de quantitats, n'hi ha prou de traduir aquest problema, de l'anglès o una altra llengua al llenguatge de l'àlgebra".

Després de resoldre els problemes doneu una breu referència bibliogràfica sobre Newton i expliqueu quines aportacions va fer a les matemàtiques.

8) Les aproximacions del nombre π al llarg de la història

Aquí teniu una llista de disset aproximacions del nombre π donades al llarg de la història. El nombre π val, aproximadament:

- 1) $\frac{25}{8}$ (Babilònia: 2000 aC);
- 2) $\left(\frac{4}{3}\right)^3$ (Egipte; Papirus Rhind: 2000 aC);

3) 3 (Xina 1200 aC i La Bíblia, Llibre dels Reis I, VII: 500 aC);

4) $3 + \frac{10}{71} \leq \pi \leq 3 + \frac{1}{7}$ (Arquimedes: 300 aC);

5) $\frac{377}{120}$ (Ptolemeu: 200 dC);

6) $\frac{142}{45}$ (Wang Fau: 300 dC);

7) $\sqrt{10}$ (Chung Hing: 300 dC);

8) $3,1416$ (Arigabhata: 500 dC);

9) $\frac{355}{113}$ (Metius: 1400 dC);

10) $\sqrt{13 + \frac{1}{3} - 2\sqrt{3}}$ (Nicolàs de Cusa: 1400 dC);

11) $\frac{13\sqrt{146}}{150}$ (Speeht: 1836 dC);

12) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$;

13) $\frac{3}{4}(\sqrt{3} + \sqrt{6})$

14) $\frac{9 + 3\sqrt{5}}{5}$;

15) $2\sqrt{2\sqrt{5} - 2}$;

16) $\frac{5}{4} + \frac{\sqrt{229}}{8}$

17) $\frac{167}{80} + \frac{\sqrt{10}}{3}$

Es demana que:

1. Indiqueu el més petit dels conjunts numèrics ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$) als quals pertanyen aquestes aproximacions.

2. Per a les 11 primeres aproximacions busqueu informació sobre les fonts.

3. Per a cada aproximació, trobeu una equació polinòmica a coeficients enters de la qual sigui solució (es tracta sempre de nombres algebraics).

4. Feu ús de la calculadora per ordenar de més petita a més gran totes les aproximacions proposades.

5. Sabent el valor de π que dóna la vostra calculadora, ordeneu les aproximacions de més bona a més dolenta.

6. Comproveu que l'aproximació número 15 és igual a $\frac{4}{\sqrt{\Phi}}$ i que la número 14 és igual a $\frac{6\Phi^2}{5}$, essent $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ el nombre d'or.

6. EXEMPLES PER AL TREBALL DE LA RESOLUCIÓ DE PROBLEMES A CLASSE

(Del capítol 10)

a) En l'àmbit de les conjectures numèriques:

Situació-problema 1: productes d'enters consecutius

Observeu que:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 = 5^2 - 1$$

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 = 11^2 - 1$$

$$3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 360 = 19^2 - 1$$

Serà sempre el producte de quatre enters consecutius un quadrat perfecte menys 1?
Quina llei es pot conjecturar?

Situació-problema 2: sumes d'imparells

Observeu les següents sumes:

$$1 + 3 = 4 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

Quina conjectura podeu fer? La podeu provar?

Situació-problema 3: diferències de quadrats

Observeu les igualtats següents:

$$2^2 - 1^2 = 3$$

$$3^2 - 1^2 = 8$$

$$3^2 - 2^2 = 5$$

$$4^2 - 1^2 = 15$$

$$4^2 - 2^2 = 12$$

$$4^2 - 3^2 = 7$$

$$5^2 - 1^2 = 24$$

$$5^2 - 2^2 = 21$$

$$5^2 - 3^2 = 16$$

$$5^2 - 4^2 = 9$$

.....

.....

.....

Quins nombres poden expressar-se com a diferència de dos quadrats perfectes?

Situació-problema 4: sumes de quadrats consecutius

Observeu ara les següents sumes:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$$

$$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$$

Quina llei podríem conjecturar en aquest cas?

b) En l'àmbit de les petites investigacions:

Situació-problema 5: quadrats capgirats

1. Observeu: $13^2 = 169$ i $31^2 = 961$

Investigueu quins nombres de dues xifres hi ha que compleixin relacions anàlogues.

Situació-problema 6: fer girar un full de paper

Feu girar un full de paper de mida DIN A4 al voltant del costat petit i calculeu el volum del cilindre que genera. Feu el mateix tot i fent-lo girar al voltant del costat llarg. Què us sembla, sortirà el mateix volum? Calculeu-lo.

Com dividiríeu el full de paper amb unes tisores per obtenir un nou rectangle (l'enganxem amb celo) que en girar ens proporcionari un cilindre més voluminós?

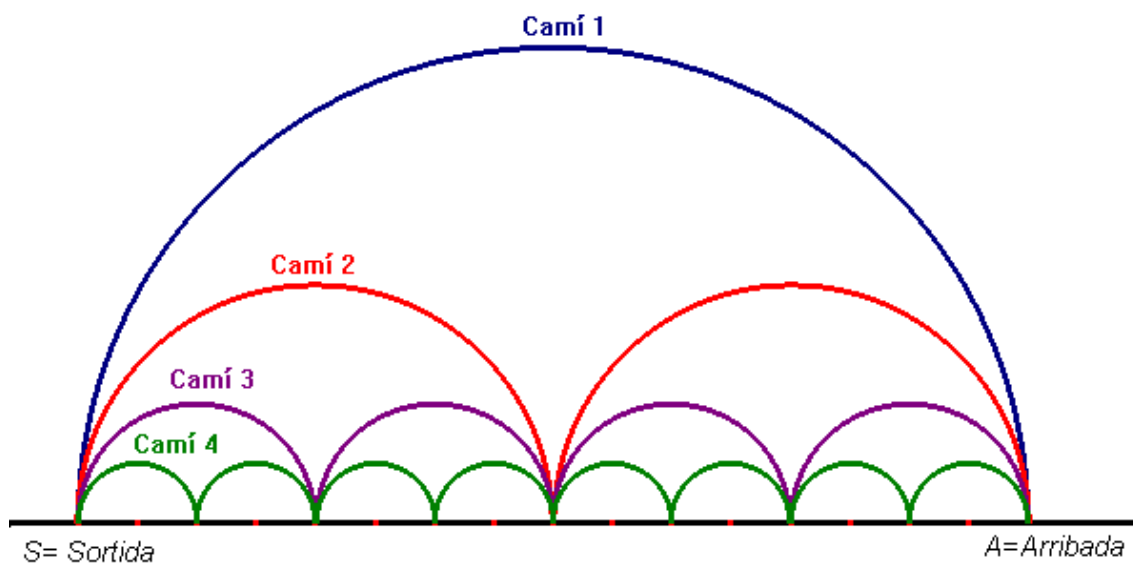
Hi ha algun cilindre de volum màxim que es pugui obtenir repetint aquest procés de retallar i enganxar?

Situació-problema 7: itinerari explicat

Un cargol surt d'un punt A i recorre 128 metres en línia recta en direcció nord. Després gira 90° a la seva dreta en direcció est i recorre 64 metres. Torna a girar 90° a la dreta - ara en direcció sud - i fa 32 metres més. Continua d'aquesta manera, és a dir, girant a la dreta 90° després de recórrer cada cop la meitat de metres, fins que fa 1 metre cap a l'oest i arriba al punt B. Feu un dibuix del seu itinerari i calculeu a quina distància es troben els punts A i B.

A continuació redacteu un enunciat anàleg amb l'itinerari a l'inrevés.

Situació-problema 8: Un problema d'investigació amb Cabri



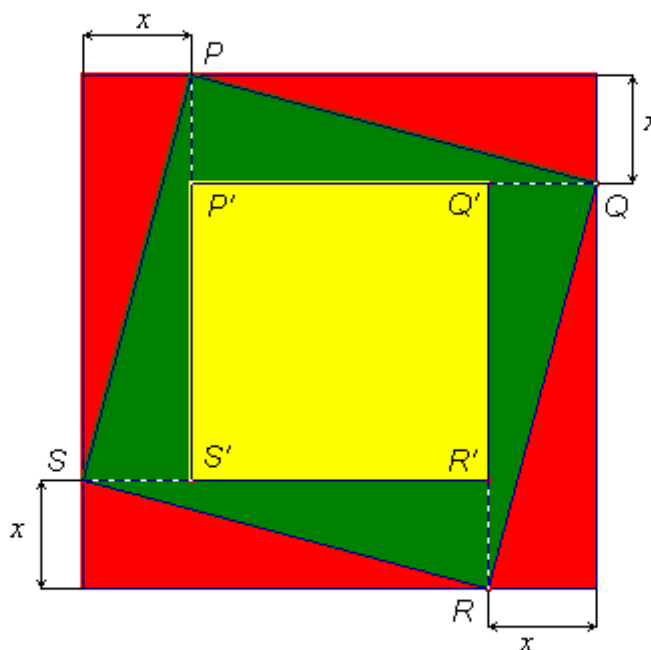
A la figura adjunta hi ha dibuixats quatre camins per anar del punt S al punt A.

1. Podríeu dibuixar amb l'ajut del programa Cabri dos camins més? Quin dels sis camins que van del punt S al punt A us sembla més curt ? Per què ?
2. Imagineu que repetim el procés indefinidament fins a tenir infinits camins. Podríem afirmar que el recorregut dels camins s'acosta a la distància en línia recta entre S i A? Justifiqueu la vostra resposta.
3. Calculeu les longituds dels 6 camins que teniu dibuixats si la distància SA és de 2 km i repenseu la resposta que heu donat a l'apartat anterior i extraieu les vostres conclusions.

Situació-problema 9: Un problema d'investigació amb Cabri

Prenem un punt P sobre un costat d'un quadrat a distància x d'un dels vèrtexs. A continuació prenem la mateixa distància x sobre els altres tres costats (vegeu el dibuix) i obtenim el quadrilàter $PQRS$. Feu el dibuix amb Cabri i doneu resposta a les qüestions següents:

1. El quadrilàter $PQRS$ és un quadrat? Per què?
2. Trobeu l'àrea del quadrilàter $PQRS$ en funció de la distància x . Podeu suposar que el quadrat gran (el vermell) té 1 m de costat.
3. Quin ha de ser el valor de la distància x per obtenir un quadrilàter $PQRS$ d'àrea mínima? Per què?
4. Tracem perpendiculars als costats pels punts P , Q , R i S i obtenim un nou quadrilàter $P'Q'R'S'$. Determineu-ne l'àrea en funció de la distància x . Quins són els valors màxim i mínim d'aquesta àrea quan varia x ?
5. Dissenyeu i resoleu problemes anàlegs amb un triangle equilàter i amb un pentàgon regular.



7. EXEMPLES PER AL TREBALL DE LA GEOMETRIA A CLASSE

(Del capítol 11)

Exemple 1: POLÍEDRES

1. Construïu políedres emprant les peces de Creator. Compteu el nombre de cares, el nombre de vèrtexs i el nombre d'arestes, i empleneu la taula següent:

NOM DEL POLÍEDRE	NOMBRE DE CARES	NOMBRE DE VÈRTEXS	NOMBRE D'ARESTES

2. Expliqueu el procediment que heu seguit per fer els recomptes demanats. Trobeu una estratègia que us permeti comptar amb seguretat els políedres “complicats”.

3. Feu una descripció senzilla i per escrit dels políedres que heu construït.

4. D'entre els políedres anteriors, quins us sembla que mereixen el qualificatiu de regulars i per què?

5. Si no els teniu tots (són cinc) construïu-los ara i feu una taula com l'anterior només amb aquests políedres:

NOM DEL POLÍEDRE	NOMBRE DE CARES	NOMBRE DE VÈRTEXS	NOMBRE D'ARESTES
TETRÀEDRE			
OCTÀEDRE			
ICOSÀEDRE			
HEXÀEDRE			
DODECÀEDRE			

6. Si no la teniu ja, feu una descripció per escrit dels políedres regulars.

7. Busqueu una relació entre el nombre de cares C , el nombre de vèrtexs V i el nombre d'arestes A dels políedres que us han sortit en els apartats anteriors. Aquesta relació s'anomena fórmula d'Euler, ja que fou aquest matemàtic suís del segle XVIII qui la va introduir.

8. Construïu els prismes que pugueu amb les peces de Creator i mireu si compleixen la relació que heu trobat abans.

9. Podríeu demostrar-la per a tots els prismes? Com podríeu comptar les cares, les arestes i els vèrtexs d'un prisma qualsevol?

10. Construïu les piràmides que pugueu amb les peces de Creator i mireu si compleixen la relació d'Euler.

11. Podríeu demostrar-la per a totes les piràmides? Com podríeu comptar les cares, les arestes i els vèrtexs d'una piràmide qualsevol?

12. Tots els políedres compliran la relació d'Euler? Què opineu i per quin motiu?

13. Empleneu la taula següent:

NOM DEL POLÍEDRE	ANGLES DE LES CARES α_i	SUMA DELS ANGLES A CADA VÈRTEX $\sum \alpha_i$	DEFICIÈNCIA ANGULAR EN UN VÈRTEX $360^\circ - \sum \alpha_i$	NOMBRE DE VÈRTEXS V	SUMA DE LES DEFICIÈNCIES ANGULARS $V(360^\circ - \sum \alpha_i)$
TETRÀEDRE					
OCTÀEDRE	60°	240°	120°	6	720°
ICOSÀEDRE					
HEXÀEDRE					
DODECÀEDRE					

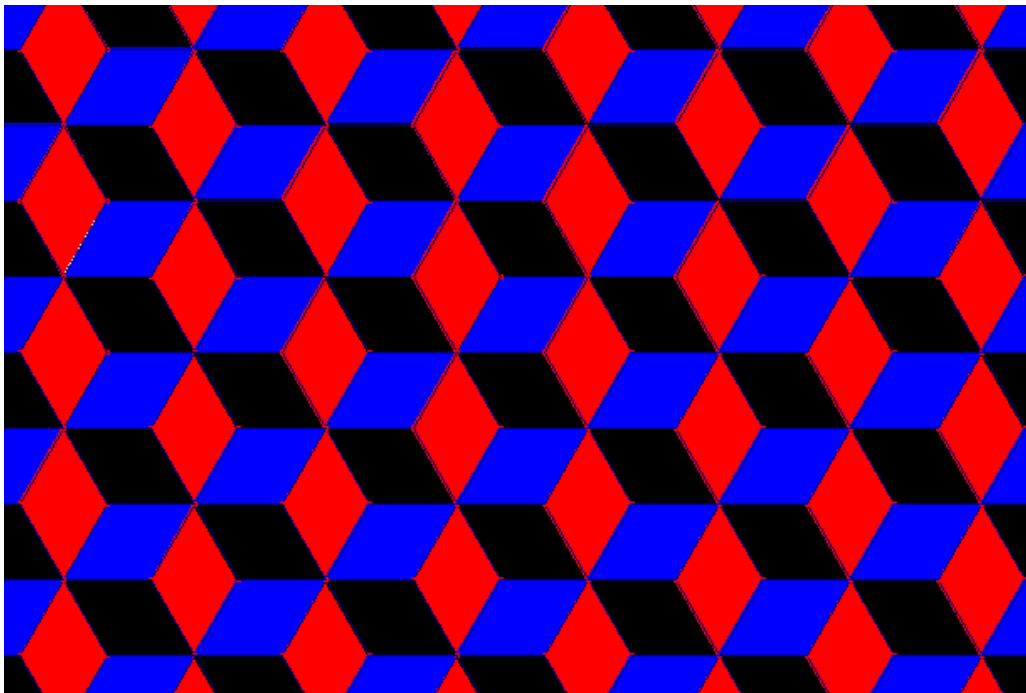
14. Quines conclusions podeu extreure a partir de l'estudi de la taula?

Exemple 2: EFECTES ÒPTICS AMB CABRI

Activitat 1: Una pavimentació del pla o un seguit de cubs?

Estudieu la figura següent i reconstruiu-la amb el programa Cabri-Géomètre. Aquestes preguntes us poden ajudar:

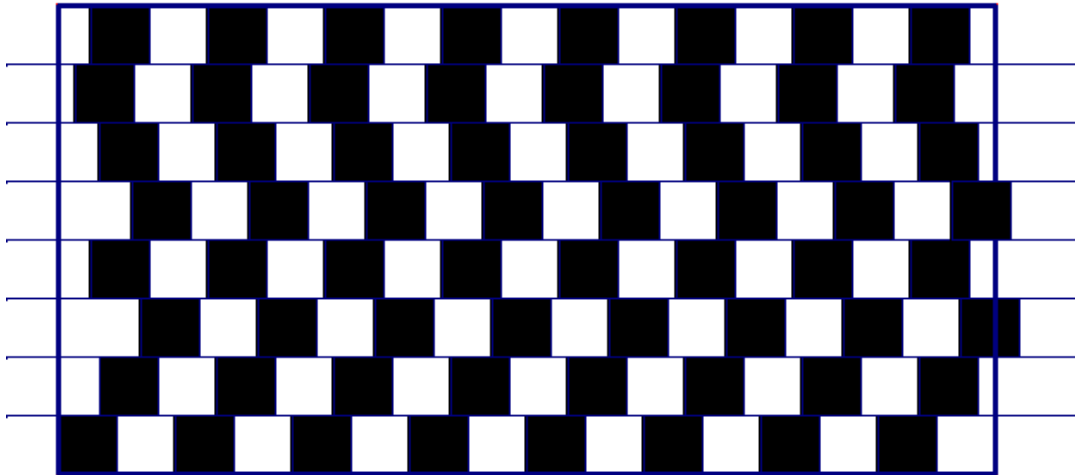
- a) Quins polígons componen el dibuix?
- b) Quines simetries observeu?
- c) Quines d'aquestes simetries podríeu aprofitar per fer la construcció?



Activitat 2: Rectes paral·leles?

Estudieu la figura següent i reconstruiu-la amb el programa Cabri-Géomètre. Aquestes preguntes us poden ajudar:

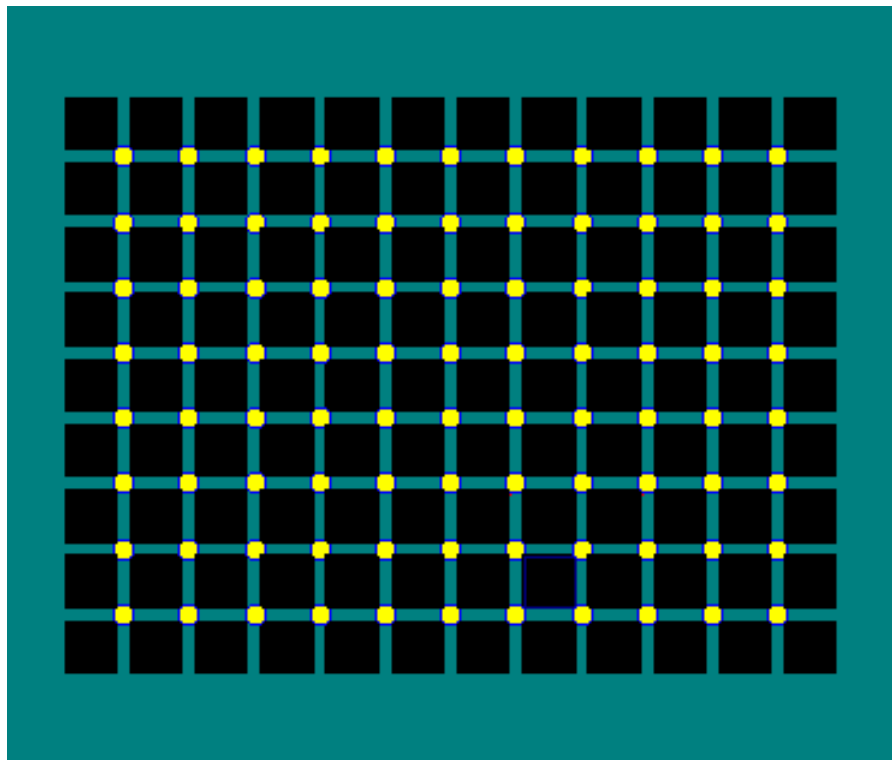
- a) Quins polígons apareixen al dibuix? Quines simetries observeu en cadascuna de les files?
- b) Quins moviments podríeu aprofitar per passar d'una fila a una altra?
- c) Per què apareix l'efecte òptic?



Activitat 3: Punts negres o punts grocs?

Estudieu la figura següent i reconstruiu-la amb el programa Cabri-Géomètre. Aquestes preguntes us poden ajudar:

- a) Quins polígons i quines figures apareixen al dibuix? Quines simetries observeu en cadascuna de les files i de les columnes?
- b) Quins moviments podríeu aprofitar per passar d'una fila a una altra i d'una columna a una altra?
- c) Per què apareix l'efecte òptic?



Activitat 4: Els genets d'Escher, van o vénen?

Estudieu la figura següent i reconstruiu-la amb el programa Cabri-Géomètre. Aquestes preguntes us poden ajudar:

- a) Quines són les característiques dels polígons que configuren un genet groc? I un de verd? Quines simetries observeu?
- b) Quins moviments podríeu aprofitar per passar d'un genet groc-fila a una altre genet groc-fila? I d'un genet groc-columna a un altre genet groc-columna?

