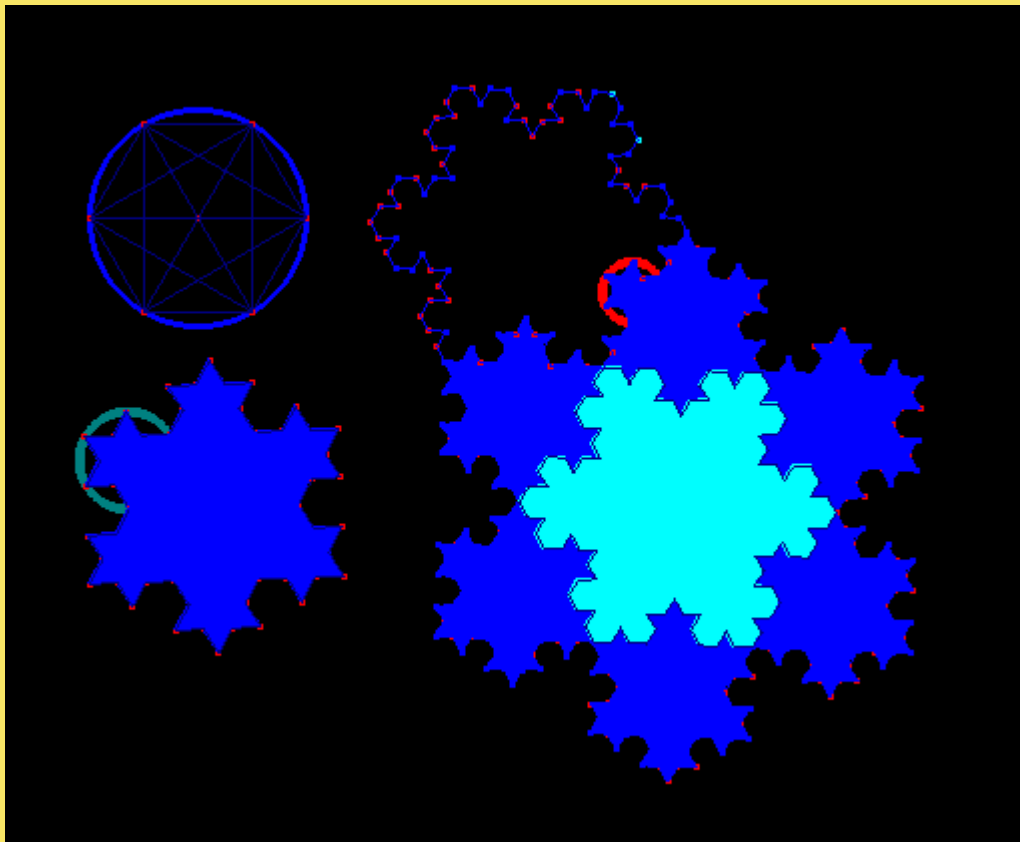


MEMÒRIA DEL TREBALL

LA MOTIVACIÓ: UN FACTOR CLAU PER A L'ENSENYAMENT I L'APRENENTATGE DE LES COMPETÈNCIES MATEMÀTIQUES A SECUNDÀRIA



AUTOR: DAMIÀ SABATÉ GIMÉNEZ

CURS ESCOLAR: 2005-2006

SUPERVISIÓ: DOCTOR CLAUDI ALSINA (UPC)

ÍNDEX

Pàg.

INTRODUCCIÓ	1
1. JUSTIFICACIÓ DEL TEMA TRIAT	1
2. OBJECTIUS DEL TREBALL	4
3. MARC DE REFERÈNCIA I METODOLOGIA	5
4. APLICACIONS DEL PROJECTE	6
5. MATERIALS COMPLEMENTARIS	6
CAPÍTOL 1: PROVES I RESULTATS D'AVALUACIÓ EXTERNA	7
1. INTRODUCCIÓ I REFLEXIONS PRÈVIES	0
2. DADES DE PROVES EXTERNES NO INTERNACIONALS ANTERIORS A L'ANY 2001	8
2.1. PROVA DE LA INSPECCIÓ DEL 1995	8
2.2. PROVES DE L'INCE DEL 1995	13
2.3. PROVES DE L'INCE DEL 2000	18
3. DADES DE PROVES INTERNES ANTERIORS A L'ANY 2000	22
4. DADES DE LES PROVES DE COMPETÈNCIES BÀSIQUES	27
4.1 LES PROVES DE COMPETÈNCIES BÀSIQUES ALS 10 ANYS DE L'ANY 2000 AL 2003	27
4.2. LES PROVES DE COMPETÈNCIES BÀSIQUES ALS 14 ANYS DEL CURS 2001-2002	28
4.3. LES PROVES DE COMPETÈNCIES BÀSIQUES ALS 14 ANYS DEL CURS 2003-2004	32
5. DADES DE PROVES EXTERNES INTERNACIONALS	35
5.1. PROVA TIMSS	35
5.2. PROVES OCDE PISA	40
6. ALGUNES CONCLUSIONS I REFLEXIONS FINALS	48
CAPÍTOL 2: LA IMATGE DE LES MATEMÀTIQUES A LA NOSTRA SOCIETAT. LA IMATGE PRECONCEBUDA QUE ELS ALUMNES TENEN DE LES MATEMÀTIQUES	53
1. INTRODUCCIÓ I REFLEXIONS PRÈVIES	53
2. ANÀLISI D'ALGUNES IMATGES I D'ALGUNES NOTÍCIES	54
2.1. EL PROFESSORAT DE MATEMÀTIQUES FA POR	54
2.2. MATEMÀTIQUES REPRESSIVES?	56
2.3. HABITUALMENT, LES NOTES DE MATEMÀTIQUES SÓN DOLENTES?	58

	Pàg.
2.4. NO HI HA GAIRE PREOCUPACIÓ PELS MALS RESULTATS EN MATEMÀTIQUES.....	59
2.5. ANUMERISME I MATEMÀTIQUES ALGORÍSMIQUES.....	61
2.6. LES MATEMÀTIQUES PODEN SER UN MISTERI.....	61
2.7. LES MATEMÀTIQUES SÓN ÚTILS?.....	62
2.8. LES MATEMÀTIQUES SÓN NOMÉS PER ALS DE CIÈNCIES?.....	63
2.9. EL PROFESSORAT DE MATEMÀTIQUES NO ÉS A PROP DELS ALUMNES?.....	64
2.10. LES MATEMÀTIQUES I L'ARITMÈTICA SÓN EL MATEIX?.....	66
2.11. LES MATEMÀTIQUES SÓN MOLT DIFÍCILS?.....	67
2.12. LES MATEMÀTIQUES I LES FAMÍLIES.....	68
2.13. PENSAR I RAONAR ÉS PERILLÓS?.....	69
2.14. LA COMPETÈNCIA DE LA TELEVISIÓ.....	70
2.15. LA PSEUDOCIÈNCIA IMPERA.....	71
2.16. EXCUSATIO NON PETITA ACUSATIO MANIFESTA.....	73
2.17. NOTÍCIES POSITIVES?.....	74
2.18. LES MATEMÀTIQUES TAMBÉ TENEN DEFENSORS.....	75
3. ALGUNES CONCLUSIONS.....	77
4. TREBALLAR LA IMATGE POSITIVA DE LES MATEMÀTIQUES.....	79
CAPÍTOL 3: POSSIBILITATS I LÍMITS DE LA INNOVACIÓ A LES CLASSES DE MATEMÀTIQUES.....	87
1. ALGUNES CONSIDERACIONS INICIALS.....	87
2. POSSIBILITATS I LÍMITS DE LA INNOVACIÓ A L'AULA DE MATEMÀTIQUES.....	89
2.1. FACTORS QUE NO AFAVOREIXEN LA INNOVACIÓ.....	89
2.2. FACTORS QUE AFAVOREIXEN LA INNOVACIÓ.....	91
3. ALGUNES CONCLUSIONS.....	93
CAPÍTOL 4: ALGUNES OPINIONS EXPERTES.....	95
1. LA MOTIVACIÓ ESCOLAR SEGONS DAVID P. AUSUBEL.....	95
2. TEORIES CLÀSSIQUES DE LA MOTIVACIÓ ADAPTADES A L'ÀMBIT ESCOLAR.....	96
3. ELS AFECTES I LES EMOCIONS EN L'APRENENTATGE DE LES MATEMÀTIQUES.....	97
4. EXEMPLES DE FITXES PER A L'ESTUDI LOCAL I GLOBAL DE LES EMOCIONS EN EL TREBALL MATEMÀTIC.....	100
5. LES PROPOSTES DEL PROFESSOR JOHN H. MASON.....	109
5.1. CONSIDERACIONS INICIALS.....	109
5.2. ALGUNES ESTRATÈGIES ESPECÍFIQUES.....	110
5.3. ESTRATÈGIES DIDÀCTIQUES GENERALS.....	112
6. LES RAONS PER ESTIMAR LES MATEMÀTIQUES DEL PROFESSOR CLAUDI ALSINA.....	112
7. UNA OBSERVACIÓ FINAL.....	116

CAPÍTOL 5: LA UTILITZACIÓ DE LES NOVES TECNOLOGIES A LES CLASSES DE MATEMÀTIQUES COM A ELEMENT DE MOTIVACIÓ.....	117
1. ALGUNES CONSIDERACIONS INICIALS.....	117
2. ÚS DE LES NOVES TECNOLOGIES A L'AULA	118
2.1. ÚS DE PROGRAMES ESPECÍFICS PER TREBALLAR LES MATEMÀTIQUES.....	119
2.2. ÚS D'ACTIVITATS A INTERNET O AMB INTERNET.....	129
2.3. ÚS DE PRESENTACIONS EN POWERPOINT.....	133
2.4. FEINA PER CORREU ELECTRÒNIC I CAMPUS VIRTUALS.....	133
CAPÍTOL 6: INNOVACIONS METODOLÒGIQUES A LES CLASSES DE MATEMÀTIQUES QUE PODEN MILLORAR LA MOTIVACIÓ DE L'ALUMNAT	135
1. LES SORTIDES RELACIONADES AMB LES MATEMÀTIQUES I EL SEU APROFITAMENT DIDÀCTIC COM A RECURS DE MOTIVACIÓ.....	135
2. EL TREBALL EN GRUP I L'ÚS DE PROJECTES COM A ELEMENTS DE MOTIVACIÓ A LES CLASSES DE MATEMÀTIQUES.....	145
2.1. LES MATEMÀTIQUES I EL TREBALL COOPERATIU.....	145
2.2. EL TREBALL A PARTIR DE PROJECTES O DE SITUACIONS-PROBLEMA	147
3. L'ÚS DE MATERIALS RELACIONATS AMB LES MATEMÀTIQUES COM A RECURSOS DE MOTIVACIÓ.....	149
4. EL TREBALL AMB NOTÍCIES DE PREMSA.....	152
5. L'ÚS DE RECURSOS AUDIOVISUALS COM A ELEMENTS DE MOTIVACIÓ.....	155
6. CRÈDITS DE SÍNTESI, ACTIVITATS DE GLOBALITZACIÓ I TREBALLS DE RECERCA.....	157
7. ALTRES RECURSOS, ELS CONTES I ELS ACUDITS GRÀFICS.....	158
CAPÍTOL 7: LA MATEMÀTICA RECREATIVA COM A INSTRUMENT DE MOTIVACIÓ A L'AULA.....	167
1. CONSIDERACIONS GENERALS.....	167
2. UNA CLASSIFICACIÓ DELS RECURSOS DE LA MATEMÀTICA RECREATIVA.....	169
3. ALGUNES ORIENTACIONS FINALS.....	180
CAPÍTOL 8: LA HISTÒRIA DE LES MATEMÀTIQUES I LA DIVULGACIÓ COM A INSTRUMENTS DE MOTIVACIÓ A L'AULA.....	181
1. CONSIDERACIONS GENERALS.....	181
2. ALGUNES PROPOSTES DELS EXPERTS.....	182
3. L'EXPERIÈNCIA DOCENT PERSONAL.....	186
3.1. LECTURES A L'AULA.....	186
3.2. PROBLEMES AMB HISTÒRIA A L'AULA.....	193
4. ALGUNES ORIENTACIONS FINALS.....	197

CAPÍTOL 9: MOTIVACIÓ, MATEMÀTIQUES APLICABLES A LA VIDA QUOTIDIANA I COMPETÈNCIES BÀSIQUES EN MATEMÀTIQUES.....	199
1. ALGUNES CONSIDERACIONS INICIALS.....	199
2. MATEMÀTIQUES APLICABLES A LA VIDA QUOTIDIANA?.....	201
2.1. MATEMÀTIQUES APLICADES A LA VIDA QUOTIDIANA: UN RECORREGUT BIBLIOGRÀFIC.....	201
2.2. COMPETÈNCIES BÀSIQUES EN MATEMÀTIQUES.....	209
2.3. CONSIDERACIONS FINALS.....	209
3. EXEMPLES.....	211
CAPÍTOL 10: LA MOTIVACIÓ I LA RESOLUCIÓ DE PROBLEMES.....	217
1. INTRODUCCIÓ I REFLEXIONS PRÈVIES.....	217
2. LES IDEES DE PÓLYA.....	218
3. EL TREBALL AMB CONJECTURES.....	220
3.1. INTRODUCCIÓ.....	220
3.2. EL TREBALL INDUCTIU DE LES MATEMÀTIQUES.....	221
4. LES PROPOSTES DEL PROFESSOR MIGUEL DE GUZMÁN.....	222
4.1. TIPUS DE BLOQUEIGS.....	222
4.2. ELS INSTRUMENTS PER MILLORAR EL PENSAMENT.....	225
5. ALGUNES CONCLUSIONS.....	227
6. ALGUNS EXEMPLES.....	228
CAPÍTOL 11: LA GEOMETRIA COM A ELEMENT DE MOTIVACIÓ.....	233
1. ALGUNES CONSIDERACIONS INICIALS.....	233
2. ELS MATERIALS PER AL TREBALL DE LA GEOMETRIA COM A INSTRUMENTS DE MOTIVACIÓ.....	235
3. DOS EXEMPLES.....	239
CAPÍTOL 12: LA MOTIVACIÓ I LA DIVERSITAT A LES CLASSES DE MATEMÀTIQUES.....	253
1. INTRODUCCIÓ I REFLEXIONS PRÈVIES.....	253
2. ELS RESULTATS A L'ÀMBIT DE MATEMÀTIQUES A LES PROVES DE COMPETÈNCIES BÀSIQUES EN RELACIÓ ALS FACTORS D'HÀBITAT I DE NIVELL SOCIOECONÒMIC.....	254
3. POSSIBLES ESTRATÈGIES.....	258
CAPÍTOL 13: LA MOTIVACIÓ I L'AVUACIÓ A L'ÀREA DE MATEMÀTIQUES.....	263
1. CONSIDERACIONS GENERALS.....	263
2. ORIENTACIONS PER A UNA AVUACIÓ MOTIVADORA	265

CAPÍTOL 14: CONCLUSIONS I PROPOSTES. NOVES PERSPECTIVES I NOVES ESTRATÈGIES.....	275
1. EL DIAGNÒSTIC.....	275
1.1. INTRODUCCIÓ.....	275
1.2. POSSIBLES CAUSES.....	276
2. ALGUNES PERSPECTIVES GENERALS.....	278
3. ORIENTACIONS PER A LA MILLORA DE LA MOTIVACIÓ DE L'ALUMNAT EN L'ÀMBIT DE LES MATEMÀTIQUES.....	280
3.1. LES CONDICIONS NECESSÀRIES.....	280
3.2. UNA LLISTA D'ORIENTACIONS PER A LA MILLORA DE LA MOTIVACIÓ.....	281
4. PRESENTACIÓ ESQUEMÀTICA DE LES ORIENTACIONS PER A LA MILLORA DE LA MOTIVACIÓ DE L'ALUMNAT EN L'ÀMBIT DE LES MATEMÀTIQUES.....	287
5. LA MOTIVACIÓ I LA FORMACIÓ INICIAL I PERMANENT DEL PROFESSORAT DE MATEMÀTIQUES.....	296
6. MOTIVACIÓ I EXIGÈNCIA.....	297
7. INNOVAR PAS A PAS.....	297
BIBLIOGRAFIA.....	299
LES FONTS DE LES IMATGES.....	303
MATERIALS COMPLEMENTARIS.....	305

INTRODUCCIÓ

1. JUSTIFICACIÓ DEL TEMA TRIAT

El contacte més important de la majoria de persones amb les matemàtiques té lloc a l'escola i això fa que la imatge que moltes persones tenen de les matemàtiques provingui directament d'aquest àmbit. A més, aquesta imatge difícilment podrà canviar al llarg de la vida adulta. És ben trist que persones capacitades intel·lectualment romanguin perdudes des del punt de vista de les matemàtiques per sempre més a causa de la mala imatge que en recullen a les escoles o als instituts. Massa sovint, tots els anys d'escolarització i tota la feina que es fa a l'àmbit de les matemàtiques no permeten que els alumnes i les alumnes les connectin amb la realitat o amb el plaer de pensar i serveixen de ben poc. De vegades, només s'aconsegueix que triomfi la inseguretat i la por. El cert és que no sembla que les matemàtiques tinguin una gran tradició i un gran arrelament a casa nostra i en molts sectors socials, fins i tot amb elevats graus de formació, no se les considera importants ni es considera que siguin cultura. Val la pena recordar dues de les conclusions de les enquestes d'opinió que es van passar a una mostra significativa de persones d'àmbits molt diversos quan es va fer l'estudi referent a la identificació de les competències bàsiques (encarregat pel Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya al Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu¹):

“Als àmbits tecnocientífic i matemàtic se'ls ha assignat menys importància. Probablement perquè no s'és tan conscient de la seva inclusió en la vida diària.”

“En general, l'àmbit matemàtic ha estat el menys valorat, potser perquè la majoria de competències que l'integraven comportaven una certa complexitat pel que fa a la seva adquisició.”

A tot això s'hi afegeixen alguns tòpics que associen les matemàtiques a la coacció (i aquest és un problema internacional) de tal manera que, tot sovint, acaben per provocar angonya. Val la pena recordar algunes reflexions de John Allen Paulos en aquest sentit²:

“Les mateixes persones que poden entendre els matisos emocionals més subtils d'una conversa, les trames més enrevesades en literatura i els aspectes més intricats d'un assumpte legal, semblen incapaces de captar els elements bàsics d'una demostració matemàtica.

No sembla que tinguin cap marc de referència matemàtic ni uns coneixements fonamentals sobre els quals es pugui construir. Tenen por. Una por que els han imbuït mestres autoritaris i a vegades sexistes, i altres persones que probablement pateixen també d'angonya matemàtica.”

“Una altra idea errònia que la gent es forma de la matemàtica és que implica una restricció a la llibertat humana, i que en certa manera s'hi oposa.”

“Em fa mal també el fals romanticisme inherent a la tòpica frase “fredament racional” (com si “càlidament racional” fos alguna espècie de contrasentit).”

L'experiència docent personal no fa més que certificar bona part d'aquests problemes. Sectors importants de l'alumnat tenen por a les matemàtiques, presenten uns nivells molt baixos de motivació per a totes les activitats que s'hi relacionen i dissenyen el seu currículum personal en funció d'aquesta fòbia, defugint tant com poden les matemàtiques.

(1) Extret de: *Identificació de les competències bàsiques en l'ensenyament obligatori*. Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu. Barcelona: Departament d'Ensenyament, CD-rom del 2001.

(2) Extret de: PAULOS, J.A. *El hombre anumérico*. Barcelona: Tusquets Editores, 2000.

Els professionals tenim una gran responsabilitat en aquests aspectes i no ens podem permetre, doncs, d'errar en la nostra feina. No es tracta de queixar-se sense més ni més, sinó d'estudiar les causes que són a l'arrel d'aquests fenòmens i de trobar noves estratègies que trenquin aquests vells maleficcis.

La cita següent, també de John Allen Paulos², ens parla de la concepció de les matemàtiques que sovint impera a l'escola:

“Tot sovint es considera que la matemàtica és un tema reservat per als tècnics, i es confon el talent matemàtic amb la perícia per executar operacions rutinàries, l'habilitat en la programació elemental o la velocitat de càlcul.”

D'altra banda, els resultats de l'alumnat de Catalunya a l'àmbit de les matemàtiques a les proves d'avaluació externes nacionals, estatals i internacionals no són pas encoratjadors i demostren que els problemes de formació matemàtica són profunds i vénen de lluny. A d'altres països on les matemàtiques també tenen mala imatge, els resultats d'avaluació, però, són prou bons.

Sembla clar que un dels factors clau de la problemàtica situació actual és el de la motivació de l'alumnat a l'hora de fer matemàtiques. La motivació i l'aprenentatge són processos que apareixen simultàniament i que interaccionen de forma complexa: d'una banda, no es pot esperar que aparegui la motivació per començar l'aprenentatge i d'altra banda, quan no hi ha aprenentatge, la motivació desapareix. No es tracta, doncs, d'un problema senzill sinó d'una situació amb multiplicitat d'aspectes i d'interaccions.

Es podria pensar que ja s'han dit moltes coses sobre la motivació a l'hora de fer matemàtiques escolars i que ben poques aportacions es poden fer. La realitat, però, és que l'aparició de les noves tecnologies i de nous materials didàctics, el perllongament de l'escolarització obligatòria, l'augment de la diversitat a les aules i els canvis socials dels darrers anys m'han portat a considerar la necessitat de fer un exercici de recapitulació i d'actualització en l'àmbit de la motivació a les classes de matemàtiques a secundària.

S'ha de tenir en compte també, que el professorat de matemàtiques ha tingut i té encara una clara responsabilitat en aquest assumpte. Massa sovint, el prestigi de les matemàtiques s'ha volgut defensar a base de suspendre molta gent. Massa sovint també, a les aules s'han practicat unes matemàtiques centrades en exercicis mecànics sense connexió amb la realitat, sense reflexió i sense imaginació, que no aconsegueixen captar l'interès d'amplis sectors de l'alumnat. La distància entre les matemàtiques escolars i les matemàtiques aplicables a la vida quotidiana o l'activitat lliure i creativa del pensament ha estat massa gran durant molt de temps i es tracta ara d'escurçar-la tant com sigui possible. Aquest procés no hauria de ser tan difícil, ja que, tal i com ens recorda Freudenthal, les matemàtiques provenen de la realitat³:

“Els conceptes, les estructures i les idees matemàtiques s'han creat com a instruments d'organització dels fenòmens que es produeixen a partir de realitats de naturalesa física, social o mental.”

Es tracta de treballar per aconseguir que les matemàtiques escolars siguin vistes des d'una altra perspectiva i de retrobar el gust per la cultura matemàtica tal i com es defineix al projecte PISA³:

“La cultura matemàtica és l'aptitud d'un individu per identificar i comprendre els diversos papers que juguen les matemàtiques en el món i per fer raonaments de base matemàtica, i la capacitat d'emprar les matemàtiques en funció de les exigències de la vida actual i futura com a ciutadà constructiu, compromès i intel·ligent.”

(3) Cites recollides a l'informe: *Mesurer les connaissances et compétences des élèves. Un nouveau cadre d'évaluation*. Programa OCDE/PISA 2000. OCDE, 1999.

Durant la segona meitat dels segle XX vam assistir a grans canvis en el currículum de les matemàtiques escolars. Inicialment els criteris d'una majoria de matemàtics professionals (que, tot s'ha de dir, tenien la bona intenció d'actualitzar els continguts escolars amb les conquestes del pensament matemàtic més recent) van portar la implantació de les anomenades matemàtiques modernes. El fracàs d'aquesta opció va ser colpidor. Van aparèixer generacions d'alumnes incapaços de treballar amb solvència amb un simple percentatge. A més, molts els alumnes recollien una imatge esotèrica de les matemàtiques. Morris Kline va fer la dissecció amb lucidesa tot el procés⁴:

“Alguns professors gaudeixen quan presenten el familiar sistema de numeració en la seva recòndita forma axiomàtica perquè comprenen la senzilla matemàtica que requereix, i tanmateix, poden fingir que estant ensenyant una profunda qüestió matemàtica.”

“Les matemàtiques no s'haurien de desenvolupar deductivament, sinó constructivament.”

“Per ensenyar a pensar hem de deixar els alumnes pensar, deixar els estudiants obtenir els seus propis resultats [...]”

El procés d'adaptació a les matemàtiques axiomàtiques i el posterior reconeixement del seu fracàs van ser un cop dur per a la motivació i la imatge de les matemàtiques. La desorientació que tot plegat va provocar va dur amplis sectors del professorat cap a unes matemàtiques algorísmiques i de receptes, amb una concepció tecnicista que massa sovint encara no s'ha superat. Les novetats dels anys 90, reflectides a casa nostra amb la implantació de la LOGSE i de la seva concepció constructivista de l'aprenentatge, han aportat noves perspectives i s'han fet grans esforços i avenços notables. Mai no hi havia hagut tanta preocupació per la docència i per la didàctica de les matemàtiques. Malgrat tot, hi ha hagut un gran desconcert entre el professorat i l'alumnat i sembla clar que cal una redefinició del paper de les matemàtiques escolars.

Ara mateix tenim una situació contradictòria: d'una banda es parla de la gran importància de les matemàtiques i encara es fan servir les matemàtiques per seleccionar les persones; d'altra banda, tot i la certesa demostrada en proves i avaluacions de tot tipus que hi ha unes mancances considerables de formació matemàtica, molts sectors socials, i fins i tot bona part de les elits i dels governants, no hi paren gran atenció. Aquestes dues cites d'Alan Bishop⁵ i de John Allen Paulos² apunten aquests problemes:

“El problema radica en el fet que les matemàtiques s'han convertit en una cosa tan important a tots els països desenvolupats del món que la societat actual espera, en general, que a tots els alumnes se'ls ensenyi moltes matemàtiques.”

“M'angoixa i m'afligeix una societat, la meua, que depèn tant de les matemàtiques i de la ciència i que, tanmateix, sembla tan indiferent a l'anumerisme i a l'analfabetisme científic de molts dels seus ciutadans.”

Val la pena recollir unes paraules de la gran Emma Castelnuovo⁶ que resumeixen la situació actual:

“S'observa també en molts països que els programes de matemàtiques estan sempre sobrecarregats i tendeixen a un tecnicisme operacional. El resultat és que els alumnes, submergits en les operacions i en les regles que han d'aprendre són passius i es refugien en les receptes.

Davant d'aquest quadre força desolador, què hi podem fer? Com podem interessar els joves? Com podem sacsejar la seva passivitat? Què es pot fer en un ambient escolar que canvia, que se'ns escapa, mentre canvia també l'ambient geogràfic-polític en el qual s'insereix?

(4) Extret de: KLINE, M. *El fracaso de la matemática moderna*. Madrid: Siglo XXI, 1976.

(5) Extret del capítol elaborat per Alan Bishop a: GORGORIÓ, N. [et al.]. *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*. Barcelona: Graó- ICE UAB, 2000.

(6) Extret de: CASTELNUOVO, E. *Ideas de Ematemática Castelnuovo*. Madrid: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, 2004.

La força per lluitar contra aquesta situació no ha de faltar, i avui, en la vigília del 2000, tenim un recolzament molt fort en un document redactat fa un any per un acreditat grup internacional de vuit experts en educació matemàtica: és el projecte PISA, sostingut per l'OCDE. El cap d'aquest grup és l'holandès Jan de Lange de l'Escola de Freudenthal, i les idees sostingudes pel grup són precisament les de Freudenthal, les nostres.”

No es bo que el professorat s'hagi acostumat a conviure amb un elevat grau de desmotivació de l'alumnat i que la societat s'acostumi a tenir un nombre important de ciutadans que han de viure al marge de tot allò que comporti activitat matemàtica. Sabem que és possible motivar alguns alumnes per a l'activitat matemàtica. Ens hem de preguntar, però, com podríem motivar sectors més amplis de l'alumnat. És el moment de preguntar-nos també com podem aconseguir que les matemàtiques escolars siguin vistes des d'una altra perspectiva. És el moment d'estudiar amb profunditat, i des de la perspectiva que dona l'activitat a l'aula, com podem millorar la motivació de l'alumnat i la imatge que es projecta de les matemàtiques amb l'objectiu d'aconseguir una millora del seu aprenentatge.

El treball que s'ha dut a terme té una voluntat clara de ser realista, de partir de la realitat a les aules. Hem de ser conscients que, sovint, la demanda d'una matemàtica algorísmica, de receptes i de fórmules prové dels mateixos alumnes i de la societat, perquè hi ha por a pensar, por a fer el ridícul, mandra a l'hora de fer raonaments i poca confiança en un seguit de capacitats inexplorades. Tal i com assenyalava l'Informe Cockcroft⁷ fa més de vint anys, és clar que la tasca no serà fàcil:

“Els problemes que comporta aprendre a fer ús de les matemàtiques com a mitjà de comunicació no són els mateixos que els d'aprendre l'ús de la llengua materna. La llengua materna proporciona un mitjà de comunicació que es fa servir contínuament i que, per a la majoria de persones, “es produeix naturalment”, tot i que el domini de la llengua necessiti ser desenvolupat i augmentat a classe. A més, els errors de gramàtica o d'ortografia, generalment no fan intel·ligible el missatge que s'està expressant. En canvi, les matemàtiques no s'adquireixen d'aquesta manera natural. No s'empren constantment; s'han d'aprendre i s'han de practicar; els errors tenen conseqüències més importants. Habitualment les matemàtiques també expressen informació d'una manera més precisa i concreta que la paraula escrita o oral. Per aquestes raons, molta gent dedica molt de temps, no tan sols a familiaritzar-se amb les operacions i les idees matemàtiques sinó també a guanyar confiança en el seu ús.”

2. OBJECTIUS DEL TREBALL

Aquest treball ha de permetre trobar respostes a tot un seguit de preguntes que es plantegen a partir de l'activitat quotidiana a les aules:

Per què hi ha un grau tan elevat de desmotivació a les classes de matemàtiques de secundària?

Per què el professorat de matemàtiques troba tantes dificultats per innovar a les seves classes?

Per què trobem moltes persones adultes amb una excel·lent formació que tenen una mala imatge de les matemàtiques?

Per què sovint les matemàtiques no es consideren cultura?

Per què sovint es contraposen les matemàtiques i les humanitats com si les matemàtiques no fossin humanes?

És possible fer unes matemàtiques divertides i engrescadores sense deixar de banda el currículum prescrit?

És possible fer unes matemàtiques divertides i engrescadores que siguin per a tots els alumnes? És possible democratitzar l'ensenyament de les matemàtiques?

(7) Extret de: *Informe Cockcroft. Las matemáticas sí cuentan*. Madrid, MEC, 1985.

És possible fer unes matemàtiques que engresquin de la mateixa manera els nois i les noies?

Quins canvis caldria introduir en la formació inicial i en la formació permanent del professorat de secundària per millorar la seva futura acció docent i els nivells de motivació que transmetran a l'alumnat a les classes de matemàtiques?

Els objectius específics del treball consisteixen a debatre i si és possible, donar resposta a aquestes qüestions, sempre des de la perspectiva que dona la praxi a l'aula. Cal deixar ben clar però, que en última instància, allò que es persegueix amb aquest treball no és la millora de la motivació en si mateixa, sinó l'estudi de les millores en la motivació que permetin la millora dels processos d'ensenyament i aprenentatge de les matemàtiques.

Els objectius generals del treball són els següents:

- 1. Precisar el problema de la motivació a les classes de matemàtiques a la secundària a partir de l'estudi de la imatge de les matemàtiques que emana dels mitjans d'informació, de la revisió d'opinions expertes i de la reflexió sobre l'acció docent personal, de tal manera que es pugui fer un diagnòstic de la situació actual.**
- 2. Determinar les possibilitats i els límits de la innovació educativa a l'àrea de matemàtiques.**
- 3. Dissenyar estratègies per a la millora de la motivació de l'alumnat i per a la millora de la imatge de les matemàtiques que incideixin en la millora dels processos d'ensenyament i d'aprenentatge.**
- 4. Preparar exemples i materials relacionats amb el currículum i amb l'assoliment de les competències en l'àmbit de les matemàtiques que permetin una millora de la motivació a l'aula.**

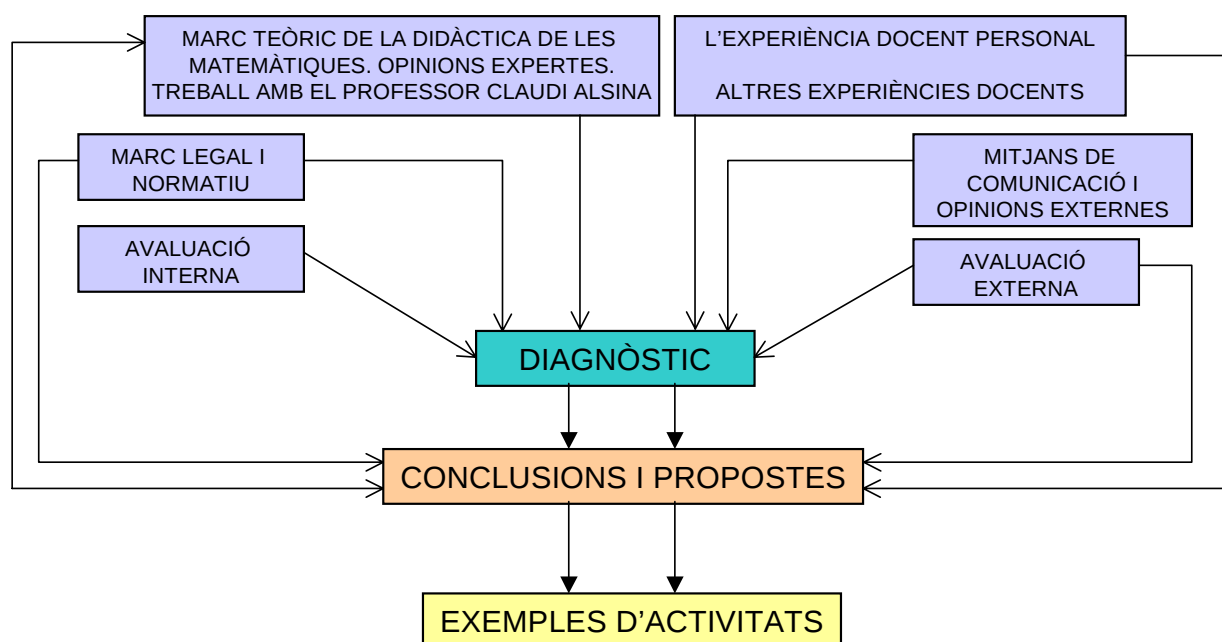
3. MARC DE REFERÈNCIA I METODOLOGIA

El treball s'ha dividit en 14 capítols que revisen aspectes i connexions de la motivació amb l'activitat escolar i les matemàtiques. En una primera fase s'han recollit informacions extretes d'àmbits molt diversos, com ara el normatiu, el de les aportacions publicades d'alguns experts, el de l'experiència docent personal i el d'altres experiències docents conegudes, el de les opinions recollides als mitjans de comunicació, el dels resultats i els informes d'avaluació externa i interna, etc. En segon lloc, s'han fet diagnòstics en cadascun dels àmbits tractats amb la intenció de revelar els aspectes rellevants que hi ha darrera de la motivació de l'alumnat i del professorat a les aules de matemàtiques de secundària.

Finalment s'han fet de propostes concretes encaminades a l'actuació a les aules. Hi ha hagut la voluntat de fer propostes realistes en l'àmbit organitzatiu, propostes metodològiques i de gestió d'aula i propostes de gestió de currículum i d'avaluació. Sempre que ha estat possible, a més, s'han proposat exemples concrets, la majoria dels quals ja s'han experimentats a les aules.

En tot aquest procés s'ha de fer esment especial del compromís d'assessorament, que ha anat molt més enllà de la simple supervisió, del doctor Claudi Alsina, un dels grans experts en didàctica de les matemàtiques i a qui mostro el meu absolut agraïment per la seva dedicació i atenció constants.

Tot plegat es pot resumir en l'esquema de treball següent:



4. APLICACIONS DEL PROJECTE

Aquest treball pot ser d'utilitat per al professorat de matemàtiques en general perquè es podrà aplicar a la docència tant des d'un punt de vista global com des d'un punt de vista local a partir de l'aprofitament d'alguns dels aspectes tractats. També ha de ser especialment útil per al treball de les competències bàsiques en matemàtiques a l'ESO i per al treball amb alumnes amb dificultats d'aprenentatge en aquesta àrea.

D'altra banda, el treball serà d'interès per a les persones que treballen en l'àmbit de la formació permanent i de la formació inicial del professorat de matemàtiques.

5. MATERIALS COMPLEMENTARIS

A més d'aquesta memòria, es presenta un recull dels materials fotocopiables inclosos a l'estudi (per facilitar-ne l'ús a l'aula) i algunes presentacions per facilitar la difusió del treball.

CAPÍTOL 1: PROVES I RESULTATS D'AVALUACIÓ EXTERNA

L'estudi d'algunes proves d'avaluació externa i de les conclusions presentades, tot i la prudència evident amb què s'han de considerar, ha de permetre fer una anàlisi dels punts més febles en l'assoliment de les competències matemàtiques. A més, es tracta d'estudiar l'evolució dels resultats i poder discernir fins a quin punt el marc legal els condiciona o no. Cal afegir, finalment, que l'estudi PISA de 2003 inclou molts aspectes relacionats amb la motivació de l'alumnat a l'hora de fer matemàtiques que val la pena considerar.

1. INTRODUCCIÓ I REFLEXIONS PRÈVIES

El coneixement de les competències assolides per l'alumnat de secundària des d'una perspectiva general és molt important per als professionals de l'ensenyament. Aquest coneixement podrà ajudar a decidir quines actuacions són prioritàries en la formació de l'alumnat.

Les proves de competències bàsiques⁸ als 10 anys dels cursos 2000-2001 i de 2002-2003 i als 14 anys dels cursos 2001-2002 i 2003-2004 posen en evidència que un percentatge significatiu d'alumnes (entre un 30 i un 40%) té importants carències de formació en matemàtiques. Alguns sectors de la societat i del professorat han atribuït aquestes mancances a possibles deficiències del nou sistema educatiu i no han volgut veure que les arrels del problema són molt més profundes. Efectivament disposem dels resultats d'algunes proves d'avaluació externa anteriors a la implantació generalitzada de la LOGSE, com ara la prova de matemàtiques que la Inspecció d'Ensenyament va dur a terme l'any 1995⁹ amb alumnat de 16 anys i les proves de l'INCE (Instituto Nacional de Calidad y Evaluación) de 1995¹⁰ en què va participar Catalunya, i en totes dues es fa evident que un percentatge molt important de l'alumnat presentava carències de formació matemàtica similars a les detectades amb les proves de competències bàsiques. Una bona part del capítol es dedica a revisar aquestes proves i els resultats que es van publicar.

D'altra banda, tot i que els problemes de formació matemàtica afecten molts països desenvolupats, l'estudi dels resultats de les proves d'avaluació externa internacionals -proves TIMSS¹¹ (Third International Mathematics and Science Study) de 1995 i proves OCDE-PISA¹² (Programme for International Student Assessment) de 2000 i de 2003- permeten afirmar que a casa nostra es presenten de manera més acusada.

(8) Els resultats es poden consultar al documents: *Síntesi de resultats de les proves d'avaluació de competències bàsiques al cicle mitjà d'educació primària*. Generalitat de Catalunya. Departament d'Ensenyament, 2002; *Avaluació de competències bàsiques. Alumnes de 10 anys. Síntesi de resultats*. Generalitat de Catalunya. Departament d'Ensenyament, 2004; *Competències bàsiques ESO. Primer cicle. Proves d'avaluació. Síntesi de resultats*. Generalitat de Catalunya. Departament d'Ensenyament, 2003; *Competències bàsiques ESO. Primer cicle. Proves d'avaluació. Síntesi de resultats*. Generalitat de Catalunya. Departament d'Educació, 2004.

(9) Els resultats es poden consultar al document: *Resum de l'informe sobre els coneixements matemàtics dels alumnes de 16 anys*. Àrea de matemàtiques de la Inspecció. Barcelona: Departament d'Ensenyament, 1998.

(10) Un bon resum dels resultats de l'àmbit matemàtic es pot trobar a: LÓPEZ, J.A. "Diagnóstico general del sistema educativo. Resultados en matemáticas". *Suma, revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas*, nº 29 (novembre de 1998): pàgines 17-28.

(11) Un bon resum dels resultats de l'àmbit matemàtic es pot trobar a: LÓPEZ, J.A. i MORENO M. "Tercer estudio internacional de matemáticas y ciencias". *Suma, revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas*, nº 27 (febrer de 1998): pàgines 39-47.

(12) El projecte s'explicita en el document: *Mesurer les connaissances et compétences des élèves. Un nouveau cadre d'évaluation*. Programa OCDE/PISA 2000. OCDE, 1999. Els resultats es poden consultar als documents següents: *Resultats dels estudis Projecte PISA i Educació Secundària Obligatòria*. Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu. Barcelona: Generalitat de Catalunya, Departament d'Ensenyament, 2002; *Quaderns d'avaluació 1. Desembre 2004. Estudi PISA 2003. Avançament de resultats*. Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu. Barcelona: Generalitat de Catalunya, Departament d'Educació, 2004; *Learning for Tomorrow's World. First Results from PISA 2003*. Programa OCDE/PISA 2003. OCDE, 20004.

Certament, cal tenir certa cautela quan es comparen resultats de proves molt diverses i també quan es comparen els resultats d'una mateixa prova a països diferents. En els processos educatius hi intervenen moltes variables i, a més, les proves només mesuren alguns dels aspectes de l'assoliment de l'aprenentatge. També cal tenir en compte que alguns països es dediquen específicament a la preparació d'aquestes proves i treballen habitualment preguntes molt semblants a les proposades.

2. DADES DE PROVES EXTERNES NO INTERNACIONALS ANTERIORS A L'ANY 2001

2.1. PROVA DE LA INSPECCIÓ DEL 1995

Un indicador referent a les competències matemàtiques de l'alumnat de Catalunya el podem trobar en la prova que la Inspecció d'Ensenyament va dur a terme l'any 1995 amb alumnat de 16 anys (hi van participar 1433 alumnes d'ESO, de BUP i d'FP de centres públics i privats). A l'informe de la inspecció que, tot sigui dit, no es va fer públic fins l'any 1998 es feien les observacions inicials següents (entre d'altres) referents a la prova:

1. Els continguts a què fa referència la prova corresponen al currículum de l'educació secundària obligatòria.
2. Versa sobre els coneixements bàsics i instrumentals que són útils en si mateixos i no només per a continuar l'aprenentatge de les matemàtiques [...]
3. Es basa més en habilitats generals matemàtiques que no pas en continguts molt particulars.
4. Conté algunes qüestions obertes que permeten l'explicació dels alumnes.

Es pot pensar, doncs, que la prova es relaciona clarament amb les competències bàsiques matemàtiques de l'alumnat de secundària de 16 anys. Tanmateix, amb la perspectiva actual, sembla clar que la prova anava una mica més enllà de les competències bàsiques tot i els propòsits inicials.

Aquesta era la prova:

A) CÀLCUL

1. Determina els metres cúbics d'aigua consumits per una família en un mes sabent que els quinze primers metres cúbics valen 23'01 ptes. cadascun, que la resta val 40'63 ptes. cadascun i que el cost total de l'aigua consumida és de 4.205 ptes.

2. Un any, el preu d'un cotxe, que és de 1.540.000 ptes., s'apuja un 10%, i l'any següent l'augment del preu és del 5%. Quin és el percentatge d'augment global del preu del cotxe respecte del que tenia al començament?

3. Els polinomis $A(x)$, $B(x)$ i $C(x)$ tenen respectivament les expressions següents:

$$A(x) = 2x^2 + x - 10$$

$$B(x) = x - 2$$

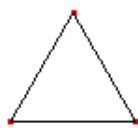
$$C(x) = x + 5$$

a) Determineu l'expressió del polinomi: $D(x) = A(x) - B(x) \cdot C(x)$

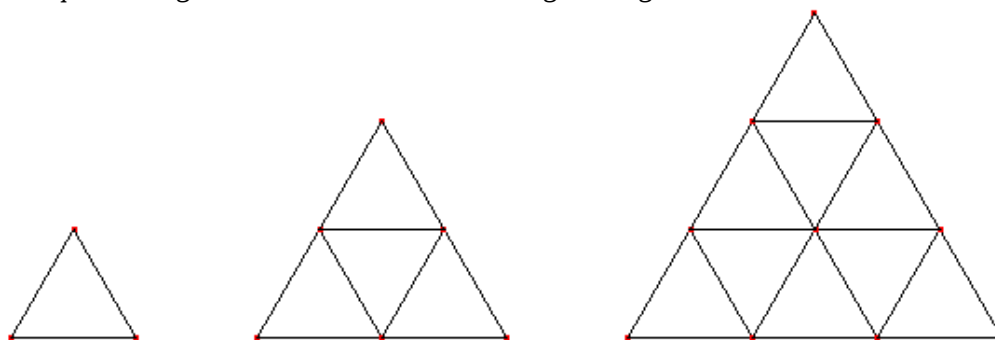
b) Descomponeu el polinomi $D(x)$ en factors.

A) CÀLCUL (continuació)

4. Prenem el triangle T :



A partir d'aquest triangle construïm la successió de figures següent:



Calculeu:

- El nombre de triangles com el T de la quinzena figura
- L'expressió del nombre de triangles com el T de la figura que ocupa la posició n .

B) GEOMETRIA

5. En el plànol d'un solar rectangular observeu que la llargada i l'amplada són de 60 cm i 50 cm, respectivament. No han posat l'escala d'aquest plànol. La superfície real del solar mesura 120 metres quadrats.

- Calculeu la superfície del rectangle en el plànol.
- Calculeu la relació entre la superfície real i la superfície en el plànol.
- Quina és l'escala del plànol?

Indiqueu, sempre que calgui, les unitats emprades.

6. a) Quants cubs C caben a la figura A ? b) Calculeu el volum de C ; c) Calculeu el volum de la figura A .

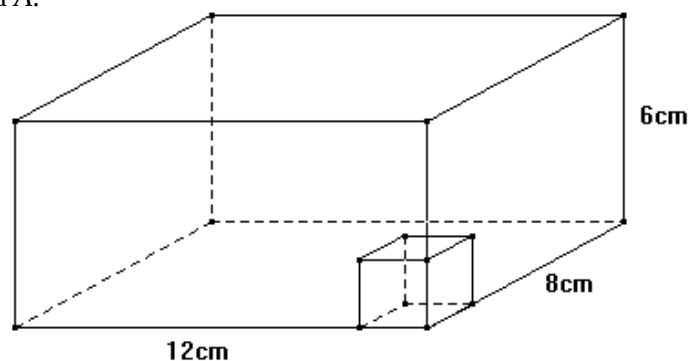
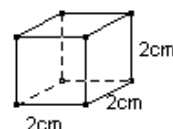


FIGURA A

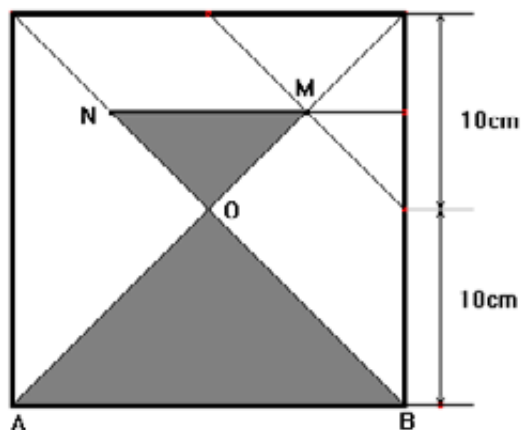


CUB C

B) GEOMETRIA (continuació)

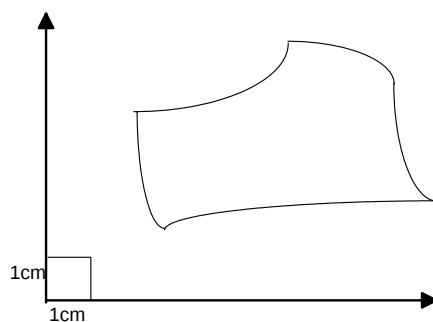
7. a) Calculeu les longituds AO i OM a la figura següent.

b) Si trobéssim l'àrea del triangle petit OMN , per quin nombre l'hauríem de multiplicar per tal de conèixer la de l' OAB ? Raoneu la resposta.



C) MESURA

8. Calculeu, aproximadament, l'àrea de la figura següent si el costat del quadrat de referència mesura 1cm.



9. Feu una estimació de les mesures següents:

- a) La superfície d'una pista de bàsquet.
- b) L'altura d'una casa amb entresol, tres pisos i un àtic.
- c) El diàmetre d'una pilota de futbol.

D) RAONAMENT I RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

DETECCIÓ D'ERRORS EN EL RAONAMENT

10. Les dimensions del terreny de joc del Camp Nou són 110 m de llargada i 75 m d'amplada, i el terreny de joc del camp de la carretera de Sarrià és de 5 m menys d'amplada i 7 m menys de llargada.

Per tal de calcular la diferència de superfície entre els dos camps, fem el raonament següent:

La superfície del camp del Barça és igual a la superfície del camp de l'Espanyol més la superfície de dos rectangles de 110 m x 5 m i de 75 m x 7 m. Per tant, la diferència de superfície és:

$$110 \cdot 5 + 75 \cdot 7 = 1075 \text{ m}^2$$

És correcte el raonament utilitzat? Per què?

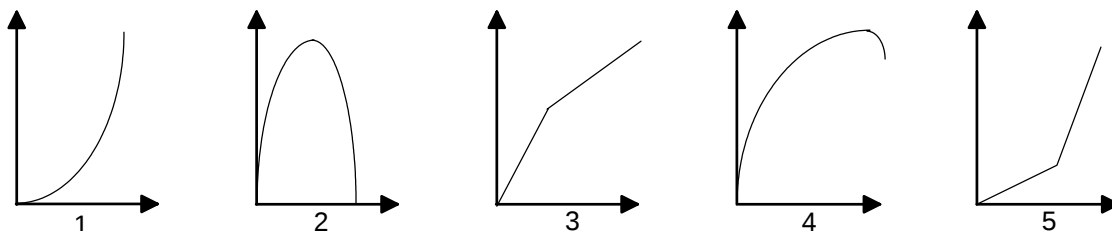
DISSENY D'ESTRATÈGIES EN LA RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

11. Aneu a la vora d'un riu amb dues galledes. A la primera hi caben exactament 3 litres i a la segona exactament 5. Les galledes no estan graduades de cap forma que ens permeti saber el volum d'aigua que contenen si no estan plenes. Com ho faríeu per endur-vos-en exactament 4 litres d'aigua?

12. Els veïns d'una comunitat volen arreglar l'entrada de la seva finca. Suposant que tots els veïns paguessin, els costaria 35.000 ptes. a cadascú. Hi ha, però, vuit veïns que no volen pagar de cap manera. Aleshores, els altres calculen que, per tirar l'obra endavant, cadascun haurà de pagar 1.400 ptes. de més. Quants veïns componen la comunitat i quin és el cost de l'obra?

E) GRÀFICS

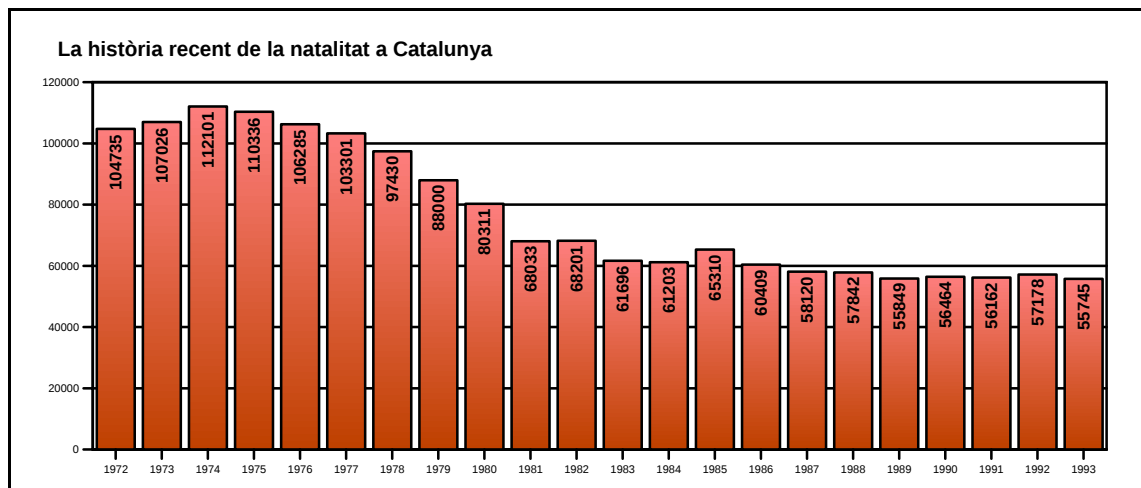
13. La Marta i el seu germà Víctor surten de casa per anar caminant al col·legi. La Marta creu que faran tard i es posa a córrer. Després es cansa i segueix caminant la resta del camí. El Víctor comença a caminar i es posa a córrer quan s'acosta a l'edifici del col·legi. Arriben al mateix temps. Les gràfiques següents mostren la distància recorreguda en funció del temps. Quina gràfica representa millor el moviment de la Marta? I la del Víctor? Expliqueu per què.



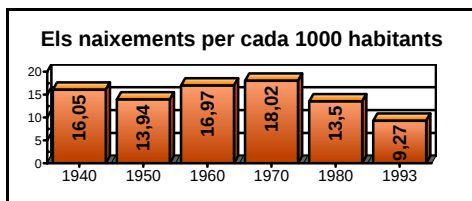
E) GRÀFICS (continuació)

14. A partir de les dues gràfiques següents referents a la història recent de la natalitat a Catalunya i als naixements per cada 1.000 habitants, calculeu:

- La variació de naixements a Catalunya entre l'any 1950 i l'any 1993.
- La població de Catalunya l'any 1993.
- La variació de la població a Catalunya entre l'any 1950 i l'any 1993.



Any	Nombre de naixements
1940	47502
1950	49480
1960	66829
1970	99982
1980	80311
1993	55745



F) PROBABILITAT

15. El Joan compra cada dia durant una setmana el número de l'ONCE 23.579 i la Marta compra dilluns el número 37.259, dimarts el 00325, dimecres el 04.798, dijous el 78.933 i divendres el 23.579. Quin de tots dos té més probabilitats que li toqui la loteria algun dia i per què?

16. Un divendres, en el noticiari del vespre, l'home del temps anuncia que la probabilitat que el dissabte plougui és del 50% i que la probabilitat que plougui el diumenge torna a ser del 50% i afirma que, per tant, la probabilitat que plougui el cap de setmana és del 100%. Si el raonament és correcte expliqueu per què, i si no ho és, expliqueu per què i calculeu la probabilitat que plougui.

Els alumnes tenien dues hores per fer la prova i podien emprar un regle graduat, l'escaire i una calculadora.

Aquests són alguns dels resultats que es recollien a l'informe:

1. Puntuacions globals dels alumnes:

Puntuació sobre 10	Percentatge d'alumnes
0-2	37,9%
2-4	41,6%
4-6	15,3%
6-8	5,1%
8-10	0,1%

Aprovats i suspesos	
Menys de 5	88,8%
5 o més	11,2%

2. Mitjanes per blocs:

Blocs temàtics	Mitjanes sobre 10
Gràfics	3,59
Raonament	3,18
Càlcul	2,85
Mesura	2,61
Geometria	2,42
Probabilitat	1,63

3. Qualificacions mitjanes per exercicis amb distinció de l'alumnat de BUP:

Núm. de l'exercici	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
MITJANES 2n BUP	3,62	2,96	3,13	2,88	1,87	3,61	2,08	3,45	1,99	4,86	1,98	2,86	5,17	1,43	0,96	2,29
MITJANES GLOBALS	3,28	3,33	2,50	2,31	1,83	3,58	1,86	3,10	2,12	4,45	2,40	2,70	5,42	1,77	1,02	2,25

Els resultats van ser tan dolents (el 88,8% de l'alumnat va suspendre la prova i el 37,9% no va arribar a tenir 2 punts sobre 10) que s'han de considerar indicatius de les grans mancances en la formació matemàtica de l'alumnat. S'ha de constatar també que no s'observaven diferències significatives en funció de la procedència de l'alumnat: tant els que procedien de 4t d'ESO, com els de BUP, com els d'FP ho feien igual de malament.

2.2. PROVES DE L'INCE DEL 1995

El curs 1995-1996 l'INCE (Instituto Nacional de Calidad y Evaluación, organisme que depenia del Ministerio de Educación y Ciencia) va dur a terme un estudi general sobre el sistema educatiu no universitari. Hi van participar el MEC i les comunitats autònomes de Catalunya, Galícia, Navarra, País Basc, València i Canàries i incloïa un seguit de proves per avaluar el rendiment educatiu en diverses àrees. Concretament es van passar proves de comprensió lectora, de gramàtica i literatura i de matemàtiques a 20.642 alumnes de 14 anys de 8è d'EGB i de 2n d'ESO i a 25.893 alumnes de 2n de BUP, de 2n d'FP1 i de 4t d'ESO (la implantació de la reforma educativa estava a mig fer i era diversa a l'Estat espanyol).

Les proves de matemàtiques per a alumnes de 14 i de 16 anys constaven de 45 preguntes de tipus test relacionades amb diversos aspectes del currículum de l'àrea. Cadascuna de les preguntes es va classificar des de dues dimensions: continguts i operacions cognitives. Els blocs de continguts considerats i els percentatges de preguntes de cada bloc eren els següents:

Blocs de continguts	Percentatge de preguntes als 14 anys	Percentatge de preguntes als 16 anys
Nombres i operacions	35%	25%
Mesura	20%	15%
Geometria	20%	20%
Estadística i probabilitat	15%	25%
Àlgebra i funcions	10%	15%

Pel que fa a les operacions cognitives es tenia:

Operació cognitiva	Percentatge de preguntes als 14 anys	Percentatge de preguntes als 16 anys
Conèixer	15%	15%
Emprar algorismes i habilitats bàsiques	30%	20%
Emprar procediments complexos	35%	35%
Resolució de problemes	20%	30%

Es va establir una escala per presentar els resultats comuna als 14 i als 16 anys amb uns nivells de referència que estableixen un conjunt de coneixements, d'habilitats i de competències i es van poder observar els nivells de millora entre les dues edats. Els resultats per blocs de continguts van ser els següents:

Blocs de continguts	Percentatge d'encert als 14 anys	Percentatge d'encert als 16 anys
Nombres i operacions	46%	54%
Mesura	40%	39%
Geometria	44%	44%
Estadística i probabilitat	44%	47%
Àlgebra i funcions	40%	60%

Una de les conclusions de l'estudi va ser que el 72% dels alumnes de 14 anys i el 62% dels alumnes de 16 anys no sabien resoldre problemes senzills relacionats amb la proporcionalitat i els percentatges, no coneixien els cossos plans senzills ni les relacions entre els seus elements i no sabien resoldre equacions lineals senzilles.

Aquests són alguns exemples de les preguntes amb els resultats que es van obtenir:

(vegeu la pàgina següent)

Exemple 1: 14 anys

Un angle d'un paral·lelogram mesura 40° . Quant mesuren els altres tres angles?

- a) Tots 40°
- b) Un 40° i els altres dos 150°
- c) Un 40° , un altre 100° i el tercer 220°
- d) Un 40° i cadascun dels altres dos 140°
- e) Un 40° , un altre 120° i el tercer 200°

Només van donar la resposta correcta (d) el 19% dels alumnes. És notable també el fet que la resposta més freqüent va ser la (a), amb un 42% de l'alumnat.

Exemple 2: 14 anys

La publicitat d'un diari té un cost proporcional a l'àrea que ocupa. Si un anunci de 5 cm per 8 cm costa 2000 ptes., quant costarà un altre anunci de 6 cm per 10 cm?

- a) 3.000 ptes.
- b) 2.500 ptes.
- c) 2.400 ptes.
- d) 2.000 ptes.
- e) 4.000 ptes.

Van donar la resposta correcta (a) el 48% dels alumnes.

Exemple 3: 14 anys

Un pot amb tres pilotes de tennis costa 540 ptes. Quants pots comprarem amb 2.000 ptes.?

- a) 5
- b) 7
- c) 12
- d) 9
- e) 3

Van donar la resposta correcta (e) el 77% dels alumnes.

Exemple 4: 14 anys

En Pere té un hort amb tres parcel·les iguals en les quals ha sembrat tomàquets, alls i enciams. Avui només ha regat la meitat de la parcel·la de tomàquets. Quina part de l'hort ha regat?

- a) $1/2$
- b) $1/3$
- c) $1/6$
- d) $2/3$
- e) $2/6$

Van donar la resposta correcta (c) el 37% dels alumnes.

Exemple 5: 14 anys

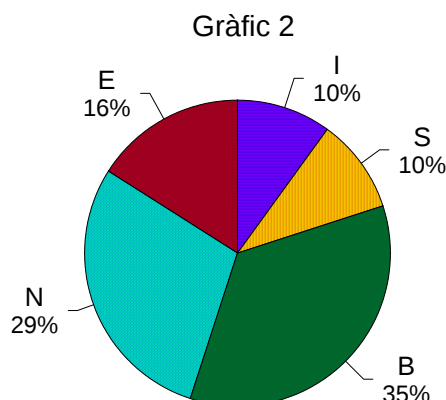
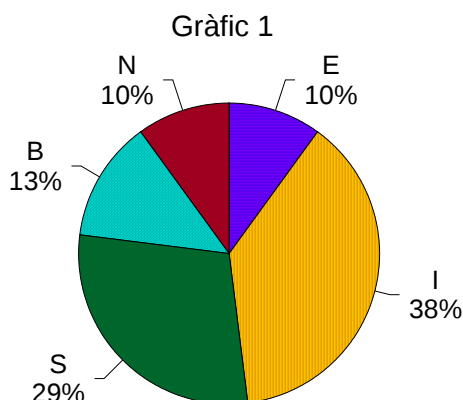
La temperatura en una ciutat, mesurada a les 8 del matí és de 2°C ; de 8 a 10 la temperatura augmenta 3° ; de 10 a 2 de la tarda augmenta 6° ; de 2 a 5 no varia; de 5 a 7 baixa 4° ; de 7 a 9 baixa 3° ; i de 9 a 12, baixa 7° més. Quina és la temperatura a les 12 de la nit?

- a) 5° ; b) 0° ; c) -3° ; d) 3° ; e) -1°

Només van donar la resposta correcta (c) el 50% dels alumnes.

Exemple 6: 14 anys

El 10% dels alumnes d'un grup han obtingut un excel·lent (E) a l'assignatura de matemàtiques. Quin dels gràfics de sectors següents correspon a aquesta afirmació?

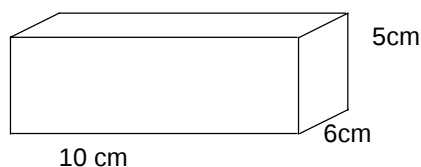


- a) El gràfic 1
b) Tots dos gràfics
c) El gràfic 2
d) Cap dels dos gràfics
e) El gràfic 2 a doble mida

Van donar la resposta correcta (a) el 71% dels alumnes.

Exemple 7: 16 anys

Quants cm^2 de cartró es necessiten per construir una capsa, amb tapa, de dimensions 5 cm, 6 cm i 10 cm?



- a) 140; b) 220; c) 250; d) 280; e) 300

Només van donar la resposta correcta (d) el 21% dels alumnes. És notable també el fet que la resposta més freqüent va ser la (e), amb un 51% de l'alumnat.

Exemple 8: 16 anys

Quant ens costaran uns pantalons l'etiqueta dels quals marca 5.880 ptes. si a causa de les rebaixes ens descomptaran $\frac{1}{12}$ del seu cost?

- a) 705 ptes.
- b) 5.390 ptes.
- c) 490 ptes.
- d) 5.392 ptes.
- e) 6.370 ptes.

Van donar la resposta correcta (b) el 51% dels alumnes. Cal fer notar que les altres opcions van obtenir el percentatges següents: a) 3%; c) 31%; d) 9%; e) 3% i no responen el 3%.

Exemple 9: 16 anys

Al Pep li han posat una multa de 5.000 ptes. per no dur el casc posat. Si la paga a l'acte li fan un descompte del 20%. En cas contrari tindrà un recàrrec del 30%. Com que no porta prou diners, quant haurà de pagar?

- a) 4.000 ptes.
- b) 6.000 ptes.
- c) 6.500 ptes.
- d) 3.500 ptes.
- e) 7.500 ptes.

Van donar la resposta correcta (c) el 72% dels alumnes.

Exemple 10: 16 anys

tenim 75 m de corda i l'enrotllem al voltant d'una llauna cilíndrica de 10 cm de radi. Quantes voltes donarem?

- a) 119; b) 150; c) 110; d) 100; e) 200

Van donar la resposta correcta (a) el 25% dels alumnes. La resposta més freqüent va ser la (b), amb un 28% de l'alumnat.

Exemple 11: 16 anys

Quin nombre és més a prop de 3,45?

- a) 3,456; b) 3,451; c) 3,4501; d) 3,450098; e) 3,44

Van donar la resposta correcta (d) el 57% dels alumnes.

Exemple 12: 16 anys

Una regió de 500.000 habitants té un ingrés anual mitjà per persona de 1.500.000 ptes. Quin és l'ingrés anual total de la regió?

- a) 750.000 milions; b) 180 milions; c) 500.000 milions
d) 140 milions; e) 75.000 milions

Van donar la resposta correcta (a) el 75% dels alumnes.

Els resultats també feien un estudi per sexes i es concloïa que els nois eren lleugerament millors en matemàtiques mentre que les noies eren millors en llengües.

D'altra banda, els resultats es van separar per comunitats autònomes i la premsa va publicar un rànquing per comunitats referent a les àrees i matèries estudiades. Catalunya no va sortir massa ben parada i particularment a matemàtiques va quedar per sota de la mitjana estatal. El cert és que la implantació de la LOGSE era molt diversa a tot l'Estat i que no resultava gaire rigorós fer segons quines comparacions. A més, a Catalunya es va criticar que les proves, en ser de resposta tancada, només mesuraven algunes de les competències de l'alumnat.

En qualsevol cas els resultats de matemàtiques eren clarament dolents -fins i tot colpidors en alguns aspectes- i van servir, fins a cert punt, per justificar la implantació del nou sistema educatiu.

2.3. PROVES DE L'INCE DEL 2000

L'any 2000 l'INCE (Instituto Nacional de Calidad y Evaluación, organisme que depenia del Ministerio de Educación y Ciencia) va dur a terme l'estudi *Evaluación de la educación secundaria obligatoria 2000*¹³. A les proves i qüestionaris hi van participar un total de 328 centres i 7486 alumnes de tot l'Estat. Concretament, Catalunya hi va prendre part amb 57 centres i 1333 alumnes de 4t d'ESO. Les àrees estudiades van ser: ciències naturals, ciències socials, geografia i història, llengua castellana i literatura i matemàtiques.

El conjunt de la prova de matemàtiques constava de 84 preguntes de tipus test, amb 4 o 5 opcions de resposta, relacionades amb diversos aspectes del currículum de l'àrea, i de 4 problemes en què els alumnes havien d'exposar tot el procés de resolució. Amb aquesta bateria de preguntes es van elaborar 4 models de prova amb 15 preguntes comunes i un problema cadascuna. Cada alumne tenia una hora i quinze minuts per fer la prova i respondre algunes preguntes referents a metodologia, a l'ús de materials i als procediments d'avaluació observats a les classes de matemàtiques.

Cadascuna de les preguntes es va classificar des de dues dimensions: continguts i operacions cognitives. Els blocs de continguts considerats i els percentatges de preguntes de cada bloc eren els següents:

Blocs de continguts	Nombre de preguntes	Percentatge
Nombres i operacions	35	42%
Mesura, estimació i càlcul de magnituds	18	21%
Representació i organització de l'espai	9	11%
Interpretació, representació i tractament de la informació i tractament de l'atzar	22	26%

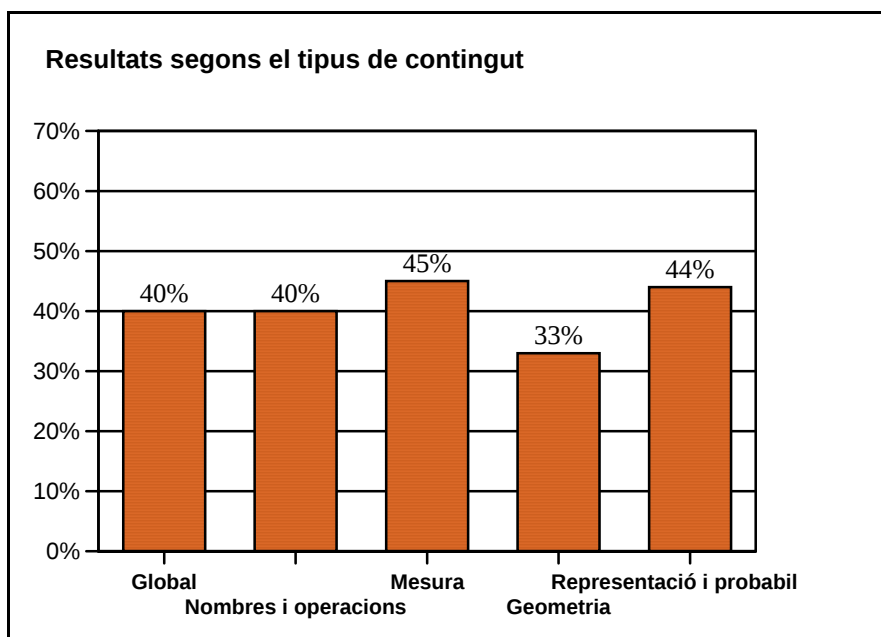
(13) *Evaluación de la educación secundaria obligatoria 2000. Resumen informativo*. Instituto Nacional de Calidad y Evaluación. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia, 2000.

Pel que fa a les operacions cognitives es tenia:

Operació cognitiva	Nombre de preguntes	Percentatge
Coneixement	11	13%
Habilitats bàsiques	28	33%
Procediments complexos	19	23%
Resolució de problemes	26	31%

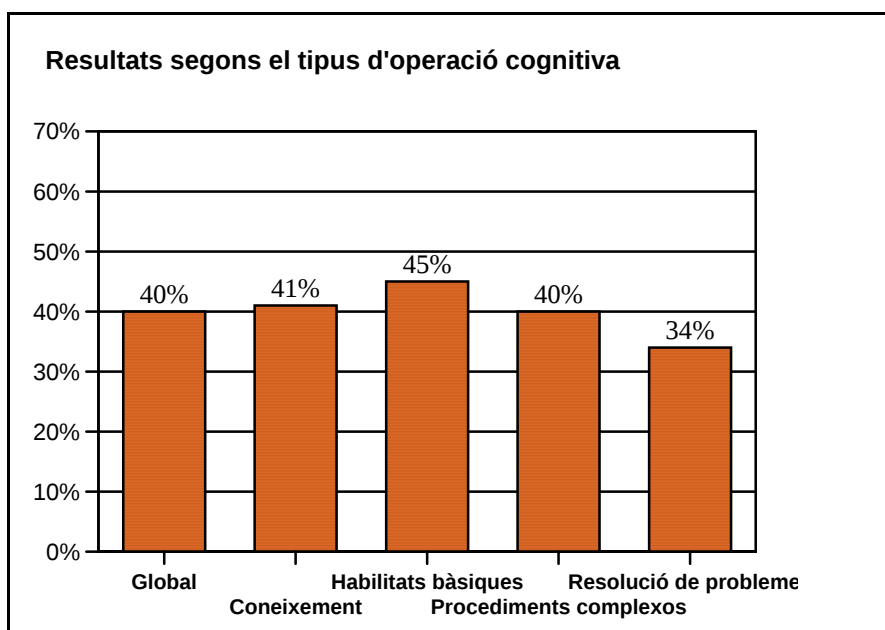
El percentatge mitjà d'encerts a les preguntes de la prova va ser del 40%. Els resultats per blocs de continguts van ser els següents:

Blocs de continguts	Percentatge d'encerts
Mitjana global	40%
Nombres i operacions	40%
Mesura, estimació i càlcul de magnituds	39%
Representació i organització de l'espai	33%
Interpretació, representació i tractament de la informació i tractament de l'atzar	44%



Pel que fa a les operacions cognitives, els resultats van ser els següents:

Operació cognitiva	Percentatge d'encerts
Mitjana global	40%
Coneixement	41%
Habilitats bàsiques	45%
Procediments complexos	40%
Resolució de problemes	34%



L'informe de l'INCE inclou també l'estudi dels resultats segons el sexe dels alumnes i segons la titularitat del centre: l'encert global de les noies és del 38% i el dels nois del 42%; l'encert global de l'alumnat de centres públics és del 38% i el dels centres privats del 44%.

A més de les preguntes de resposta tancada, els alumnes havien de resoldre un problema en quinze minuts. Els problemes proposats i els resultats obtinguts són els següents:

Problema modelo A

Javier y José Luis han comprado cada uno un remo de 3 m. Los ascensores de cada casa tienen las siguientes dimensiones:

En casa de Javier:
 Anchura: 1'5 m
 Profundidad: 2 m
 Altura: 2 m

En casa de José Luis:
 Anchura: 1'5 m
 Profundidad: 1'5 m
 Altura: 2'2 m

¿Tendrá alguno de ellos que utilizar, necesariamente, otros medios distintos del ascensor para subir el remo a su casa?

Explica el proceso seguido para resolver el problema.

Argumentació i càlculs correctes: 9%
 Argumentació incorrecta i càlculs incorrectes: 33%
 Resposta en blanc: 23%

Problema modelo B

Tengo que numerar un taco de 500 folios del 1 al 500. ¿Cuántos dígitos habré escrito al concluir el trabajo?

Escribe el proceso seguido para llegar a la solución.

Argumentació i càlculs correctes: 16%
 Argumentació incorrecta i càlculs incorrectes: 18%
 Resposta en blanc: 15%

Problema modelo C

Sobre una cartulina blanca se dibujan dos circunferencias tangentes, de manera que una pase por el centro de la otra. El círculo menor, que tiene un área de 9 cm^2 , se colorea de rojo.

¿Cuál es el área de la zona del círculo grande que queda en blanco?

Haz un gráfico y explica el proceso seguido para llegar a la solución.

Argumentació i càlculs correctes: 4%

Argumentació incorrecta i càlculs incorrectes: 52%

Resposta en blanc: 17%

Los dos anuncios siguientes han aparecido en un periódico:

Empresa A:

Importante marca de ropa deportiva necesita vendedor.

150.000 pts. de sueldo base más 250 pts. por cada prenda vendida.

Empresa B:

Se necesita vendedor para empresa de ropa de alta calidad.

200.000 pts. de sueldo base y 150 pts. por cada prenda vendida.

Analiza ambas ofertas de trabajo e indica en qué condiciones una es mejor que la otra.

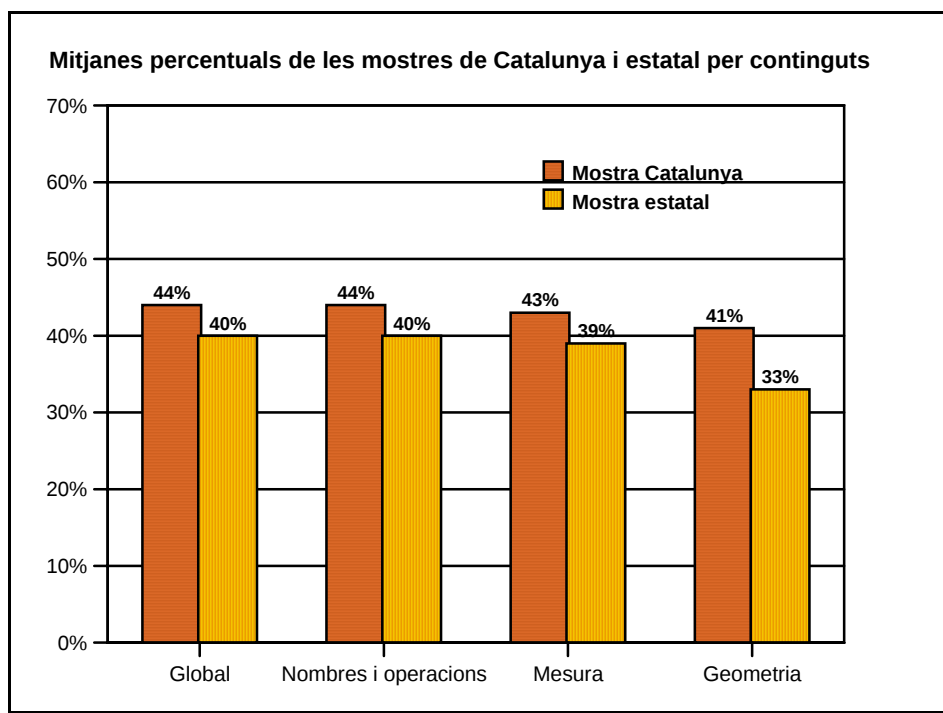
Explica el proceso que te lleva a esa decisión.

Argumentació i càlculs correctes: 7%

Argumentació incorrecta i càlculs incorrectes: 50%

Resposta en blanc: 6%

El Departament d'Ensenyament i el Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu van donar els resultats específics de Catalunya¹⁴ que, a diferència dels del 1995, van ser superiors a la mitjana de l'Estat. Els resultats que es van fer públics són els següents:



(14) Resultats dels estudis Projecte PISA i Educació Secundària Obligatòria. Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu. Barcelona: Generalitat de Catalunya, Departament d'Ensenyament, 2002.

Els resultats a Catalunya referents als altres blocs de continguts i a les operacions cognitives no es van fer públics. El breu informe del Departament tampoc informava sobre la variables sexe ni sobre la titularitat del centre. En canvi es comentaven les “*variables de context predictores dels resultats*”. Concretament a l'àrea de matemàtiques es deia el següent:

“L'alumnat amb resultats més alts en matemàtiques es distingeix per tenir un nombre abundant de llibres a casa (més de 100 llibres), rebre reforç per fer els deures, dedicar-se a activitats socials, fer esport i visitar freqüentment museus i exposicions. A aquest alumnat li agraden les matemàtiques i concedeix molta importància a tenir intel·ligència, temps per divertir-se i a treure bones notes. Atorga poca importància al treball en grup i té expectatives acadèmiques universitàries.

La família es caracteritza perquè el pare està molt satisfet amb el rendiment del fill o de la filla i el pare i la mare tenen expectatives acadèmiques universitàries envers els fills o les filles, ja que ambdós també compten amb estudis universitaris.

El professorat de matemàtiques es distingeix per utilitzar poc el reproductor de so i material manipulatiu. També opta per corregir bastant els deures fets a casa per l'alumnat i no sol mantenir la disciplina a classe amb el recurs de la serietat i fermesa sinó amb el diàleg.”

Les proves no se centren clarament en l'assoliment de les competències bàsiques. Malgrat tot, un cop més, deixen força clar que hi unes grans mancances en la formació matemàtica de l'alumnat. A Catalunya, tot i que els resultats siguin lleugerament millors, també cal concloure que els problemes de formació matemàtica de l'alumnat de 4t d'ESO són molt rellevants. S'ha de constatar també, que a les altres àrees avaluades els resultats no són tan dolents ni de bon tros.

L'estudi per sexes semblava demostrar que encara hi havia un bon camí a fer en qüestions de distribució de rols socials als nois i a les noies.

L'estudi dels resultats en funció de la titularitat dels centres es pot interpretar de manera diversa. Sembla, però, que les diferències s'haurien de relacionar amb la distribució esbiaixada del nivell socioeconòmic de l'alumnat entre uns i altres centres més que amb qualsevol altre factor.

Les conclusions referents a les variables de context sembla que certifiquen també que el nivell socioeconòmic de les famílies és determinant.

3. DADES DE PROVES INTERNES ANTERIORS A L'ANY 2000

Alguns centres de secundària havien fet proves internes per avaluar el nivell de competència matemàtica dels seus alumnes. Fonamentalment aquestes proves tenien un valor per als processos d'avaluació interna de cadascun dels centres. Tanmateix, s'ha pensat que pot tenir interès estudiar algunes d'aquestes proves que aporten una valuosa informació sobre l'evolució de l'aprenentatge de les competències bàsiques en matemàtiques.

Aquí es presenta una prova que es va passar a l'IES de Bruguers de Gavà els cursos 1995-1996 i 1996-1997 als alumnes de 3r de BUP i té l'interès específic d'esbrinar quines competències tenien assolides els alumnes de l'anterior sistema educatiu.

La prova es plantejava amb els objectius següents (es recullen tal i com estaven redactats):

- a) Esbrinar si l'alumnat de tercer de BUP ha assolit o no algunes habilitats de caire matemàtic que permeten resoldre problemes pràctics o situacions properes a la realitat (aquestes habilitats no estan recollides de manera prou explícita en els actuals currículums i no es treballen, ara mateix, de forma intensa a les escoles i als instituts).

b) Detectar problemes i mancances específiques en la formació de matemàtica pràctica del nostre alumnat per tal d'incidir-hi a l'hora d'elaborar i desenvolupar els nous programes educatius de secundària en el nostre centre.

S'especificaven els condicionants següents:

- 1) Hi havia consciència que es tractava d'una prova curta i puntual que només informava parcialment de les competències de l'alumnat.
- 2) L'alumnat sabia que la prova no tindria una incidència directa en la seva avaluació sumativa.
- 3) Només es presentaven algunes situacions en forma d'enunciat i moltes altres, inevitablement, quedaven sense estudiar.
- 4) També hi havia clara consciència que tots els problemes en forma d'enunciat s'allunyen de la realitat de forma inevitable.
- 5) La prova es va passar a alumnes de 3r de BUP de ciències i de lletres que podien tenir les assignatures de matemàtiques de 1r i de 2n de BUP suspeses.
- 6) No hi va haver cap preparació específica de la prova ni cap avís previ sobre la seva realització i els seus continguts.
- 7) En la prova es podia fer ús de la calculadora.

La prova consistia a resoldre 10 petits problemes d'enunciat en una hora de temps. Els enunciats eren els següents:

1. Una piscina té 25 metres de llargada, 7 d'amplada i 3 de fons. Quants litres d'aigua calen per omplir-la totalment?

2. Comprem 10 ampolles de CocaCola d'1,5 litres a 126 ptes. cada una. Després la venem durant una festa en gots de 150 cm^3 de cocaCola a 75 ptes. cada un. Si ho venem tot, quin benefici obtindrem?

3. El nostre cotxe consumeix una mitjana de 7 litres de benzina per cada 100 km recorreguts. Si fem un viatge en cotxe de Barcelona a Madrid (660 km) i tornem, quants litres cal esperar que consumireu?

4. Volem obtenir un benefici del 15% amb la venda d'un producte que ens costa 500 ptes. la unitat. Quin preu de venda hem de fixar?

5. Aquest mes hem cobrat 185.000 ptes. i l'anterior en vam cobrar 175.000. Quin augment, en percentatge, hem tingut?

6. Volem recobrir de parquet una habitació rectangular de 5 metres de llargada i 4,5 metres d'amplada. Si el metre quadrat de parquet ens costa a 5.500 ptes. i hem de pagar un 16% d'IVA, quant ens costarà fer el que volem?

7. Per tal de netejar els vidres d'un edifici un equip de 5 persones inverteix un total de 3 dies de treball a 8 hores per dia. Quantes hores necessitaria un equip de 8 persones per tal d'acabar la mateixa feina?

8. Quines possibilitats hi ha, en tant per cent, que entre 13 persones n'hi hagi dues nascudes el mateix mes?

9. En una empresa de 1200 treballadors, només el 18% dels empleats són dones. La jornada laboral és de 1800 hores/any. Se'n perden, però, per absentisme un 15%. Quants homes treballen a l'empresa?

10. Cada dia comprem un o dos diaris a 110 ptes. Els diumenges comprem un diari a 275 ptes. i un altre a 110 ptes. A més, comprem una revista al mes. Quant gastem en diaris i revistes al llarg d'un any?

Els resultats dels dos cursos van ser els següents:

RESULTATS DEL CURS 1995-1996

a) Resultats globals:

	Nombre	Mitjana	Desviació estàndard	% d'aprovat
Total d'alumnes avaluats	186	4'79	2'62	56%
Alumnes de lletres	68	3'60	1'78	35%
Alumnes de ciències	118	5'47	2'79	68%

b) Resultats per exercicis

	Alumnes de lletres		Alumnes de ciències		Totals	
	El resolen	No el resolen	El resolen	No el resolen	El resolen	No el resolen
Exercici 1	(31) 46%	(37) 54%	(66) 56%	(52) 44%	(97) 52%	(89) 48%
Exercici 2	(36) 53%	(32) 47%	(82) 69%	(36) 31%	(118) 63%	(68) 37%
Exercici 3	(49) 72%	(19) 28%	(98) 83%	(20) 17%	(147) 79%	(39) 21%
Exercici 4	(42) 62%	(26) 38%	(95) 81%	(23) 19%	(137) 74%	(49) 26%
Exercici 5	(07) 10%	(61) 90%	(44) 37%	(74) 63%	(51) 27%	(135) 73%
Exercici 6	(26) 38%	(42) 62%	(71) 60%	(47) 40%	(97) 52%	(89) 48%
Exercici 7	(11) 16%	(57) 84%	(41) 35%	(77) 65%	(52) 28%	(134) 72%

	Alumnes de lletres		Alumnes de ciències		Totals	
	El resolen	No el resolen	El resolen	No el resolen	El resolen	No el resolen
Exercici 8	(04) 6%	(64) 94%	(32) 27%	(86) 73%	(36) 19%	(150) 81%
Exercici 9	(29) 43%	(39) 57%	(54) 46%	(64) 54%	(83) 45%	(103) 55%
Exercici 10	(06) 9%	(62) 91%	(40) 34%	(78) 66%	(46) 25%	(140) 75%

RESULTATS DEL CURS 1996-1997

a) Resultats globals:

	Nombre	Mitjana	Desviació estàndard	% d'aprovat
Total d'alumnes avaluats	199	4'24	2'28	44%
Alumnes de lletres	57	3'18	1'74	30%
Alumnes de ciències	142	4'67	2'33	50%

b) Resultats per exercicis

	Alumnes de lletres		Alumnes de ciències		Totals	
	El resolen	No el resolen	El resolen	No el resolen	El resolen	No el resolen
Exercici 1	(9) 16%	(48) 84%	(68) 48%	(74) 52%	(77) 39%	(122) 61%
Exercici 2	(12) 21%	(45) 79%	(70) 49%	(72) 51%	(82) 41%	(117) 49%
Exercici 3	(49) 86%	(8) 14%	(117) 82%	(25) 18%	(166) 83%	(33) 17%
Exercici 4	(37) 65%	(20) 35%	(99) 70%	(43) 30%	(136) 68%	(63) 32%
Exercici 5	(02) 4%	(55) 96%	(34) 24%	(108) 76%	(36) 18%	(163) 72%
Exercici 6	(23) 40%	(34) 60%	(90) 63%	(52) 37%	(113) 57%	(86) 43%
Exercici 7	(15) 26%	(42) 74%	(35) 25%	(107) 75%	(50) 25%	(149) 75%
Exercici 8	(01) 2%	(56) 98%	(21) 15%	(121) 85%	(22) 11%	(177) 89%
Exercici 9	(23) 40%	(34) 60%	(73) 51%	(69) 49%	(96) 48%	(103) 52%
Exercici 10	(10) 18%	(47) 82%	(55) 39%	(87) 61%	(65) 33%	(134) 67%

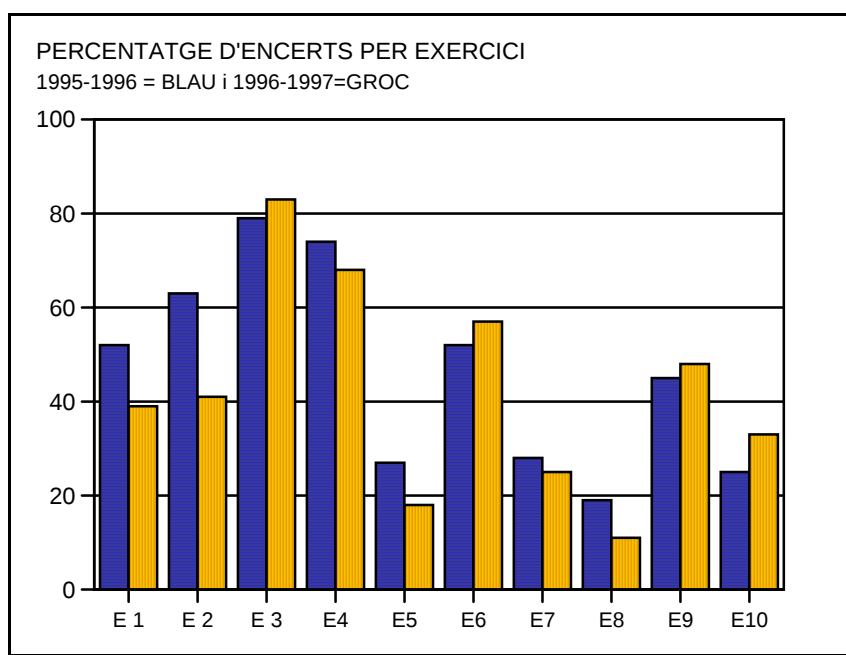
BREU RESUM D'OBSERVACIONS I CONCLUSIONS

1. En el problema núm. 1 la majoria dels fracassos eren a causa del desconeixement de la fórmula que permet el càlcul del volum de la piscina (o de no relacionar la fórmula que dona el volum d'un ortòedre amb la piscina). També hi havia força errors motivats pel fet de no saber a quants litres equival un metre cúbic.

2. El problema núm. 2 va ser proposat a començaments dels anys 80 a 70.000 joves de 13 i 17 anys als Estats Units. Només el van resoldre correctament l'11% dels nois i noies de 13 anys i el 29% dels de 17 anys (això fou després d'uns quants anys d'implantació dels anomenats programes de "matemàtiques modernes" que, per cert, van anar desapareixent com a conseqüència de tan brillants resultats).

3. S'observava una diferència molt forta -especialment en els exercicis 2, 5, 6, 8 i 10- entre l'alumnat de ciències i el de lletres.

4. Els resultats dels dos cursos presenten algunes diferències tot i que, en general, s'han de considerar similars.



5. Van ser especialment colpidors els resultats de l'exercici 5: el simple càlcul d'un percentatge tenia un fracàs del 90%-96% entre l'alumnat de lletres i del 63%-76% entre els de ciències.

6. L'abundància de resultats absurds en l'exercici 7 (concloïen que l'equip de vuit persones hauria d'invertir més hores per fer la mateixa feina que l'equip de cinc persones) és fruit de l'ús automàtic i irreflexiu de les regles de tres (i de la fe cega de l'alumnat en aquests mecanismes de raonament).

7. Les dades supèrflues de l'exercici 9 desconcertaven molts alumnes (52% de fracassos). Cal observar que els resultats per als alumnes de ciències i de lletres eren molt semblants.

8. Les ganes de donar una resposta numèrica, exacta i definitiva en el problema 10 (en el qual falten dades) són molt grans: aproximadament un 40% del total d'alumnes donaven un resultat exacte fent servir només les dades del problema i sense fer cap suposició ni consideració suplementària. Val a dir que s'admetien les resolucions en què els alumnes fixaven les dades que faltaven i també les resolucions en què s'afirmava que faltaven dades per donar un resultat exacte. Certament, l'exercici demostrava que els alumnes estaven (i encara hi estan) molt acostumats a resoldre problemes escolars que tenen solució única i l'enunciat dels quals conté totes les dades necessàries per a la resolució.

9. Els resultats d'aquestes proves demostren clarament que l'alumnat de BUP, fins i tot el que arribava a 3r, tenia greus mancances de formació matemàtica.

4. DADES DE LES PROVES DE COMPETÈNCIES BÀSIQUES

4.1 LES PROVES DE COMPETÈNCIES BÀSIQUES ALS 10 ANYS DE L'ANY 2000 AL 2003

Els primers indicadors específics i externs relatius a les competències bàsiques que pot haver assolit l'alumnat es van fer públics el curs 2001-2002 i es referien a les proves fetes a Catalunya l'any 2000 a l'alumnat de 4t de primària (10 anys). Des de la perspectiva de l'àrea de matemàtiques, els resultats no es podien considerar bons: només un 63'3% de l'alumnat assolía les competències bàsiques en matemàtiques. En alguns aspectes, els resultats eren francament dolents. Aquests són els resultats que es van fer públics el 2002:

Competències avaluades de l'àmbit matemàtic el curs 2000-2001	% d'alumnes que assoleix la competència
Mitjana global	63,3
M1• Aplicar el coneixement del sistema de numeració decimal i de les operacions per comparar, relacionar nombres i operar amb rapidesa, buscant segons la situació un resultat exacte o aproximat: – Càlcul exacte amb temps controlat. – Càlcul exacte amb temps no controlat. – Càlcul aproximat.	41 54 73
M2• Utilitzar les tècniques i convencions de la representació geomètrica bidimensional, en particular compondre i descompondre formes geomètriques complexes a partir de formes simples.	70
M3• Emprar amb criteri les unitats de mesura.	78
M4• Usar amb propietat instruments i tècniques per dibuixar, mesurar i calcular, quan sigui necessari.	59
M5• Planificar i seguir alguna estratègia per resoldre un problema i modificar-la, si no és prou eficaç.	53
M6• Usar i interpretar llenguatge matemàtic com ara xifres, signes i altres representacions gràfiques o dibuixos per descriure fenòmens quotidians: – Dibuix. – Gràfic. – Xifres.	92 73 51
M7• Interpretar la funció que fan els nombres quan apareixen en un context real (expressar quantitat, identificació, temps, mesura, intervals) i usar-los d'acord amb les seves característiques.	75

L'àmbit de matemàtiques és el que obtenia els pitjors resultats entre tots els àmbits avaluats (la mitjana global és d'un 71,7% d'alumnes que assoleixen les competències bàsiques; i sense comptar l'àmbit matemàtic la mitjana és d'un 73,3%). Es pot adduir, certament, que a les proves de l'INCE (Instituto Nacional de Calidad y Evaluación) del 1995-1996, i a proves internacionals l'àrea de matemàtiques, també és la que treia pitjors resultats. Tanmateix, les diferències no són tan marcades com en les proves fetes a casa nostra.

El curs 2002-2003 es van fer noves proves amb “mostra” i amb rigor científic. No és clar, però, fins a quin punt la comparació dels resultats és del tot fiable en haver-se modificat la prova substancialment. Aquests són els resultats publicats:

Competències - Àmbit matemàtic	% d'alumnat que assoleix la competència	
	Curs 2000-2001	Curs 2002-2003
Mitjana global	63	73
• Aplicar el coneixement del sistema de numeració decimal i de les operacions per comparar i relacionar nombres i operar amb rapidesa per aconseguir, segons la situació, un resultat exacte o aproximat. - Càlcul exacte amb temps controlat - Càlcul exacte amb temps no controlat - Càlcul aproximat	41 54 73	63 58 63
• Utilitzar les tècniques i convencions de la representació geomètrica bidimensional, en particular compondre i descompondre formes geomètriques complexes a partir de formes simples.	70	70
• Emprar amb criteri les unitats de mesura.	78	86
• Usar amb propietat instruments i tècniques per dibuixar, mesurar i calcular, quan sigui necessari. - A mà - Ordinador	59 -	95 89
• Planificar i seguir alguna estratègia per resoldre un problema i modificar-la, si no és prou eficaç.	53	70
• Usar i interpretar llenguatge matemàtic com ara xifres, signes i altres representacions gràfiques o dibuixos per descriure fenòmens quotidians. - Dibuix (curs 2000-2001) / Signes i xifres (curs 2002-2003) - Gràfic	92 73	78 76
• Interpretar la funció que fan els nombres quan apareixen en un context real (expressió d'una quantitat, identificació, temps, mesura, intervals) i usar-los d'acord amb les seves característiques.	75	71

Comentaris als resultats de l'àmbit matemàtic

En el càlcul, tot i que s'han homogeneïtzat més els resultats i que en conjunt hi ha hagut millors rendiments que en l'avaluació anterior, és on l'alumnat assoleix la competència de manera menys satisfactòria.

Respecte al curs 2000-2001, hi ha hagut una millora en el domini de gairebé totes les competències i, per tant, la millora global és important. Cal destacar especialment la millora en el domini del càlcul amb el temps controlat, la utilització amb criteri d'unitats de mesura i l'ús d'instruments i tècniques per mesurar, calcular i dibuixar amb l'ajuda de l'ordinador.

En tot cas, l'àmbit matemàtic segueix essent el que obté els pitjors resultats de tots els àmbits avaluats.

4.2. LES PROVES DE COMPETÈNCIES BÀSIQUES ALS 14 ANYS DEL CURS 2001-2002

El curs 2001-2002 es van fer les primeres proves de competències bàsiques per a alumnes de 14 anys a tots els centres de Catalunya. El Consell Superior d'Avaluació va realitzar l'aplicació externa de les proves a una mostra representativa dels centres d'educació secundària de Catalunya. La mostra estava constituïda per 3.329 alumnes de 2n curs d'ESO procedents de 125 centres. Aquests centres es van seleccionar de manera aleatòria i proporcional a la població d'escoles existents per delegació territorial, perquè fos possible estudiar els resultats de la mostra agrupant els centres per hàbitat (nombre d'habitants de les localitats on estan ubicats els centres) i d'acord amb el nivell

socioeconòmic baix, mitjà o alt (en una proporció del 20%, 60% i 20%, respectivament) en els estrats de població corresponents a més de 100.000 habitants i d'entre 10.000 i 100.000 habitants. La distribució va ser la següent:

Poblacions	Delegacions territorials								Total
	BCN 1 (Ciutat)	BCN 2 (Comarques)	Baix Llobregat - Anoia	Vallès Occidental	Girona	Lleida	Tarragona	Terres de l'Ebre	
> 100.000 hab.	30	13	-	8	-	4	3	-	58
10.000 - 100.000 hab.	-	14	13	7	8	-	5	1	48
1.000 - 10.000 hab.	-	8	1	-	3	3	2	2	19
TOTAL	30	35	14	15	11	7	10	3	125

En el document *Síntesi de resultats* (Document per als centre) fet públic pel Departament d'Ensenyament es feia una introducció prèvia a l'anàlisi dels resultats:

“Tot i que en aquest informe els resultats d'assoliment de les competències s'expressen en valors numèrics, l'anàlisi que faci el centre ha de tenir també un vessant qualitatiu que en permeti un estudi en profunditat per enriquir l'avaluació interna. En aquest sentit, les dades que s'obtenen a partir de les proves ajuden el centre a comprendre millor la seva realitat per tal de plantejar les estratègies de millora tant a nivell general com per a cada noi o noia en particular.

És important relacionar l'anàlisi de cadascuna de les dades amb les activitats emprades per a l'avaluació, la valoració, indicada en la Guia d'aplicació i correcció, i el criteri de referència establert, que figura en l'aplicació informàtica.

La comparació dels resultats del centre amb els de la mostra pot servir per confirmar que allò que semblava que anava bé, efectivament hi va, o bé que convé parar més atenció i analitzar determinades actuacions per incrementar les competències de l'alumnat.

Cal recordar que les competències bàsiques són objectius d'aprenentatge que tenen un caràcter fonamental i de preparació per a la vida quotidiana, per tant s'ha d'aconseguir que siguin assolides per tot l'alumnat que hagi pogut seguir l'escolaritat de manera completa i regular i que no tingui una deficiència greu.

El fet d'avaluar les competències bàsiques que s'han de tenir al final de l'educació secundària un cicle abans d'acabar-la ofereix l'avantatge de deixar encara un període d'escolarització de dos anys perquè puguin ser assolides plenament, tot i que presenta l'inconvenient que tampoc es pot suposar que estiguin assolides en un grau suficient per tot l'alumnat.

Com a criteri de domini de cada competència o, dit d'una altra manera, per considerar que un alumne o alumna té una competència assolida, s'ha fixat la superació al voltant del 65% dels ítems que mesuren la competència.

És difícil d'identificar l'assoliment d'una competència amb la superació d'un nombre concret d'ítems relacionats amb aquesta, perquè el nombre de proves prèvies que s'han pogut fer és escàs i no hi ha dades estadístiques anteriors sobre l'aplicació d'aquests ítems que permetin saber-ne la dificultat amb prou aproximació. Per tot això, l'afirmació que “un determinat percentatge d'alumnat ha superat una competència” té una forta dosi de relativitat i una fonamentació, en part, de caràcter teòric.

Així mateix, l'anàlisi dels resultats posa de manifest que hi ha un nombre important d'alumnes que obté puntuacions molt properes a les que s'han fixat en el criteri de superació de la competència. Es veu que l'adopció del criteri de superació del 65% d'ítems equival al que en l'escala usual de 0 a 10 seria el 6,5 i que, per tant, si se supera representa que es posseeix la competència amb un grau notable. Es veu també que hi ha un gran nombre d'alumnes en la franja de superació situada entre el 50% i el 65% dels ítems, o en altres

paraules, entre el 5 i el 6,5, la qual cosa equival en la pràctica d'avaluació usual a admetre que es posseeix la competència en un grau suficient.

L'objectiu en acabar l'ensenyament obligatori és que tot l'alumnat arribi a assolir les competències bàsiques amb un nivell alt de consolidació. L'avaluació, però, d'aquestes competències dos anys abans de finalitzar l'etapa obligatòria porta a esperar uns resultats més baixos en les proves, de manera que s'han considerat dos nivells de superació: el del 65% (A) i el del 50% (B) dels ítems, representatius respectivament d'un assoliment ja consolidat i un assoliment acceptable en funció de l'edat dels alumnes.

Per aquest motiu, els resultats obtinguts en la mostra de centres on s'han aplicat les proves es presenten en dues columnes, corresponents als percentatges d'alumnes que han superat les competències d'acord amb els dos criteris assenyalats.

En aquelles competències que han estat avaluades amb un nombre reduït d'ítems (fins a cinc) i en què, per tant, l'aplicació dels criteris anteriors, fonamentats en un percentatge d'ítems superats, resulta poc descriptiva, s'indica en una taula a part el conjunt dels resultats obtinguts en la mostra (annex 1).

Després de les anàlisis tècniques, s'ha observat que hi ha un conjunt reduït d'ítems que no posseeixen les característiques mètriques adients i, per tal de no contaminar els resultats, s'han eliminat. Aquests ítems són: 5.4 i 7.3 de la prova A, 4.2 i 8.1 de la prova C; en l'annex 2 s'indica el nou criteri de referència establert per a les competències en què intervenien aquests ítems. Per tal que els centres puguin fer les comparacions de resultats amb els nous criteris, s'ha tramès una nova plantilla de càlcul, que permetrà efectuar les anàlisis amb l'exclusió d'aquelles preguntes que no s'han trobat adequades per mesurar l'assoliment de la competència corresponent. Amb això, el centre tindrà una imatge més real de la situació."

Els resultats publicats referents a l'àmbit matemàtic van ser els següents:

COMPETÈNCIES DE L'ÀMBIT MATEMÀTIC	% d'alumnes que assoleixen la competència	
	Criteri A	Criteri B
M1 Aplicar el coneixement del sistema de numeració decimal i de les operacions per comparar, relacionar nombres i operar amb rapidesa, buscant segons la situació un resultat exacte o aproximat.	49	60
M3 Emprar amb precisió i criteri les unitats de mesura.	54	78
M4 Usar amb propietat instruments i tècniques per dibuixar, mesurar i calcular.	60	87
M5 Planificar i seguir estratègies de resolució de problemes i modificar-les si no es mostren prou eficaces.	50	68
M6b Usar i interpretar llenguatge matemàtic (representacions gràfiques) per descriure fenòmens habituals.	69	91
M7 Interpretar la funció que fan els nombres quan apareixen en un context real (expressar quantitat, identificació, temps, mesura, intervals) i usar-los d'acord amb les seves característiques.	50	67
M8 Reconèixer i interpretar gràficament relacions senzilles de dependència funcional existents entre conjunts de dades d'ús quotidià, en particular en casos de proporcionalitat directa.	67	82

El mateix document recull en un annex els resultats referents a les competències avaluades amb un nombre reduït d'ítems (cinc o menys) M2, M6a, M6c i M9 en el cas de matemàtiques:

S'indica per a cada competència el percentatge d'alumnes que respon correctament a cadascun dels ítems.

Competències - Àmbit matemàtic	% respostes correctes				
	1	2	3	4	5
M2 Utilitzar les tècniques i convencions i el llenguatge de la representació geomètrica per compondre i descompondre formes geomètriques complexes a partir de formes simples.	18%	32%	30%	12%	3%
M6a Usar i interpretar llenguatge matemàtic (dibuixos) per descriure fenòmens habituals.	39%	25%	18%	–	–
M6c Usar i interpretar llenguatge matemàtic (signes) per descriure fenòmens habituals.	23%	16%	22%	18%	–
M9 Comparar la factibilitat de fets aleatoris en situacions simples.	29%	8%	32%	–	–

A continuació es presenten els comentaris dels resultats de l'àmbit matemàtic que s'inclouen al document:

- L'alumnat ha mostrat un bon domini en les competències de reconèixer, interpretar i usar gràfics que expressen coneixements matemàtics de quantitat i proporcionalitat directa relacionats amb la vida quotidiana.
- Les competències en les quals han manifestat un domini suficient, però que encara caldria consolidar, fan referència a l'ús d'unitats, instruments de mesura i tècniques per mesurar, dibuixar i calcular.
- L'assoliment ha estat més baix en competències referides al càlcul, exacte i/o aproximat, amb rapidesa i ús del sistema de numeració decimal, la planificació i el seguiment d'estratègies de resolució de problemes i la interpretació de la funció dels nombres i del llenguatge matemàtic en contextos reals.
- Els principals problemes detectats en l'àmbit matemàtic estan associats a les competències M1 i M7, avaluades amb un nombre important d'ítems. Els resultats en una i altra competència estan directament relacionats, atès que la dificultat per interpretar les diverses funcions que poden fer els nombres en contextos reals probablement està lligat al domini del concepte numèric i també a la inseguretat a l'hora d'aplicar destreses de càlcul més enllà de les nocions teòriques bàsiques.
- Es detecta la dificultat d'utilitzar les eines matemàtiques en contextos diversos, més enllà d'un àmbit formal i acadèmic. És per això que cal treballar a fons l'ús de les matemàtiques com a instrument de coneixement aplicat a contextos reals i significatius per a l'alumnat. En situacions realment viscudes per l'alumnat fora de l'àmbit escolar (com la comparació del preu de diversos bitllets de transport) els resultats de les proves milloren. En canvi, l'aplicació a situacions lligades a altres àrees (especialment ciències socials) o a situacions de la vida quotidiana, però potser no treballades específicament (com la comparació de preus de diverses botigues o l'ús d'escals), registra uns resultats inferiors.
- Pel que fa als resultats de les competències avaluades amb un nombre reduït d'ítems, s'hi indica per a cadascuna el percentatge d'alumnes que respon correctament cada ítem. En aquests casos, que han estat avaluats amb poques activitats, cal tenir en compte que els resultats poden estar molt relacionats amb la programació del centre i, per tant, cal donar als resultats una significació molt menor.
- Hi ha hagut diferència de resultats segons l'hàbitat on s'ubiquen els centres. En general, l'alumnat de poblacions de més de 100.000 habitants ha obtingut resultats més alts, tot i que les diferències són poc significatives. Pel que fa a les diferències de resultats segons el nivell socioeconòmic de les zones on s'ubiquen els centres, s'han donat en totes les competències.

- Tenint en compte els resultats obtinguts per l'alumnat de primària de Catalunya (CB 10 anys), s'aprecien unes coincidències en aquests resultats. S'observa un bon domini en competències referides a la representació gràfica de diferents relacions matemàtiques. En canvi, es constata que hi ha dificultats en càlcul amb rapidesa i que cal reforçar competències relacionades amb representacions geomètriques i utilització de diferents instruments i unitats de mesura.
- Els estudis sobre l'ESO i PISA ratifiquen els resultats obtinguts en l'avaluació CB 14 anys. L'alumnat té adquirides destreses bàsiques en matemàtiques. És capaç de reproduir fets i processos matemàtics bàsics i/o aplicar habilitats simples de càlcul, així com de reconèixer informació derivada de gràfics i problemes quotidians, però té dificultats per calcular amb rapidesa, fer representacions geomètriques i utilitzar diferents instruments i unitats de mesura.
- D'acord amb totes les consideracions anteriors, cal potenciar un enfocament de la matemàtica més enllà de la realització d'exercicis d'aplicació mecànica de procediments i una metodologia que impliqui una immersió de l'alumnat en situacions diverses, complexes, coordinades amb altres àrees (i, si cal, treballades des d'altres àrees): l'aprenentatge matemàtic serà més significatiu com més s'acosti als problemes quotidians.
- En aquest sentit cal recordar que, en l'organització curricular de l'ESO, els crèdits de síntesi proporcionen un espai per a la interdisciplinarietat que pot reforçar les indicacions anteriors. Aquesta referència als crèdits de síntesi és vàlida també per a les competències agrupades en els altres àmbits (lingüístic, social i científic).

4.3. LES PROVES DE COMPETÈNCIES BÀSIQUES ALS 14 ANYS DEL CURS 2003-2004

El curs 2003-2004 es van passar noves proves de competències bàsiques per a alumnes de 14 anys. Les característiques de la mostra triada per fer la prova amb avaluadors externs va ser molt similar a les de la primera prova. Els resultats es van publicar el novembre de 2004 en el document: *Competències bàsiques ESO. Primer cicle. Proves d'avaluació. Síntesi de resultats*. Generalitat de Catalunya. Departament d'Educació, 2004.

Els resultats en l'àmbit matemàtic van ser els següents:

COMPETÈNCIES DE L'ÀMBIT MATEMÀTIC		% d'alumnes que assoleixen la competència	
		Criteri A	Criteri B
M1	Aplicar el coneixement del sistema de numeració decimal i de les operacions per comparar, relacionar nombres i operar amb rapidesa, buscant segons la situació un resultat exacte o aproximat.	50	63
M2	Utilitzar les tècniques i convencions i el llenguatge de la representació geomètrica per compondre i descompondre formes geomètriques complexes a partir de formes simples.	51	67
M3	Emprar amb precisió i criteri les unitats de mesura.	61	-
M4	Usar amb propietat instruments i tècniques per dibuixar, mesurar i calcular.	50	59
M5	Planificar i seguir estratègies de resolució de problemes i modificar-les si no es mostren prou eficaces.	33	53
M6	Usar i interpretar llenguatge matemàtic per descriure fenòmens habituals.	M6a Dibuix	44
		M6b Gràfic	67
		M6c Xifres i signes	75

M7 Interpretar la funció que fan els nombres quan apareixen en un context real (expressar quantitat, identificació, temps, mesura, intervals) i usar-los d'acord amb les seves característiques.	49	58
M8 Reconèixer i interpretar gràficament relacions senzilles de dependència funcional existents entre conjunts de dades d'ús quotidià, en particular en casos de proporcionalitat directa.	56	84
M9 Comparar la factibilitat de fets aleatoris en situacions simples.	55	83

Els comentaris que recull el document del Departament són els següents (recull textual de l'informe):

Comentaris dels resultats de l'àmbit matemàtic

- Els resultats més satisfactoris, semblantment a com va passar en les proves anteriors, s'obtenen en les competències referides a:

- L'ús i la interpretació del llenguatge matemàtic relacionat amb els gràfics, les xifres i els signes per descriure fenòmens habituals (M6b, M6c).

- Utilitzar amb precisió i criteri les unitats de mesura (M3).

- Reconèixer i interpretar gràficament relacions senzilles de dependència funcional existents entre conjunts de dades d'ús quotidià, en particular en casos de proporcionalitat directa (M8). Les dificultats han aparegut en el moment de transformar mentalment quantitats en diferents unitats de mesura, dificultat que apareix també en la M1.

- Les competències en les quals els alumnes mostren un nivell d'assoliment intermedi, que s'ha de consolidar durant la resta de l'etapa, són les que fan referència a:

- Aplicar el coneixement dels sistema de numeració decimal i de les operacions per comparar, relacionar nombres i operar amb rapidesa, buscant segons la situació un resultat exacte o aproximat (M1). Les dificultats apareixen quan s'han de fer càlculs i expressar-los amb diferents unitats de mesura, treballar amb proporcions i càlcul mental que impliqui divisions i resultats amb decimals.

- Utilitzar les tècniques i convencions i el llenguatge de la representació geomètrica per compondre i descompondre formes geomètriques complexes a partir de formes simples (M2). Les dificultats apareixen en el moment de comptar i representar cares que no es veuen o a l'hora de dibuixar la figura geomètrica corresponent a un objecte.

- Usar amb propietat instruments i tècniques per dibuixar, mesurar i calcular (M4). Les dificultats apareixen en el moment de dibuixar, mesurar i calcular figures que es transformen.

- Comparar la factibilitat de fets aleatoris en situacions simples (M9).

- Interpretar la funció que fan els nombres quan apareixen en un context real (expressar quantitat, identificació, temps, mesura, intervals) i usar-los d'acord amb les seves característiques (M7).

- Atès que les competències M1 i M7 han estat avaluades amb un gran nombre d'ítems, els resultats obtinguts poden considerar-se ben representatius. Els resultats en una i altra estan directament relacionats, atès que la dificultat per interpretar les diverses funcions que poden fer els nombres en contextos reals està lligada al domini del concepte numèric i també a la inseguretats a l'hora d'aplicar destreses de càlcul més enllà de les nocions teòriques bàsiques.

- L'assoliment ha estat baix en les competències que fan referència a:

- Planificar i seguir estratègies de resolució de problemes i modificar-les si no es mostren prou eficaces (M5).

- Usar i interpretar dibuixos de fenòmens habituals com el plànol d'una habitació, per fer càlculs i resoldre necessitats d'arranjaments i de noves instal·lacions (M6a). Les dificultats han aparegut a l'hora d'utilitzar dibuixos esquemàtics com el plànol d'una habitació i respondre a

diferents requeriments plantejats com càlculs de longituds, superfícies i, sobretot volums, relacionant-los amb mesures de capacitat per instal·lar-hi radiadors.

- Pel que fa a l'hàbitat, els percentatges d'encert de l'alumnat en cada competència són similars en el conjunt d'alumnes de poblacions amb més de 100.000 habitants i de poblacions d'entre 1.000 i 10.000 habitants. No s'observen diferències significatives entre els percentatges d'encert en cada hàbitat en les competències que fan referència a l'ús de tècniques i convencions i del llenguatge de la representació geomètrica (M2), així com a la utilització de les unitats de mesura (M3).

- Pel que fa a les diferències de resultats segons el nivell socioeconòmic de les zones on hi ha situats els centres, constatem que s'han donat d'una manera més significativa entre els tres nivells en la M4 (Usar amb propietat instruments i tècniques per dibuixar, mesurar i calcular) i en la M8 (Reconèixer i interpretar gràficament relacions senzilles de dependència funcional existents entre conjunts de dades d'ús quotidià). En els altres casos hi ha un acostament de resultats entre el nivell socioeconòmic alt i el mitjà.

- Respecte al 2002, són especialment destacables els baixos resultats pel que fa a resolució de problemes. Cal dir, però, que aquesta competència s'ha mesurat en aquesta ocasió amb un nombre significativament inferior d'ítems, per la qual cosa un error o una interpretació dubtosa tindrien una incidència molt més gran en la valoració final.

- Tot i que en la majoria de les competències es manifesta un domini suficient o acceptable, els resultats no són plenament satisfactoris. Cal aspirar a que un nombre més gran d'alumnes (i no sols a l'entorn d'un 50%) assoleixi un ple domini d'aquestes competències.

- L'assoliment insatisfactori de les competències referides al càlcul, a l'ús del sistema de numeració decimal, a la planificació i el seguiment d'estratègies de resolució de problemes i a la interpretació de la funció dels nombres i del llenguatge matemàtic en contextos reals, fa pensar —com ja s'apuntava en la Síntesi de resultats del curs 2001-2002— que cal potenciar un enfocament de la matemàtica més enllà de la realització d'exercicis d'aplicació mecànica de procediments, i una metodologia que impliqui una immersió de l'alumnat en situacions diverses, complexes, coordinades amb altres àrees (i, si cal, treballades des d'altres àrees): l'aprenentatge matemàtic serà més significatiu com més s'acosti a situacions de la vida quotidiana.

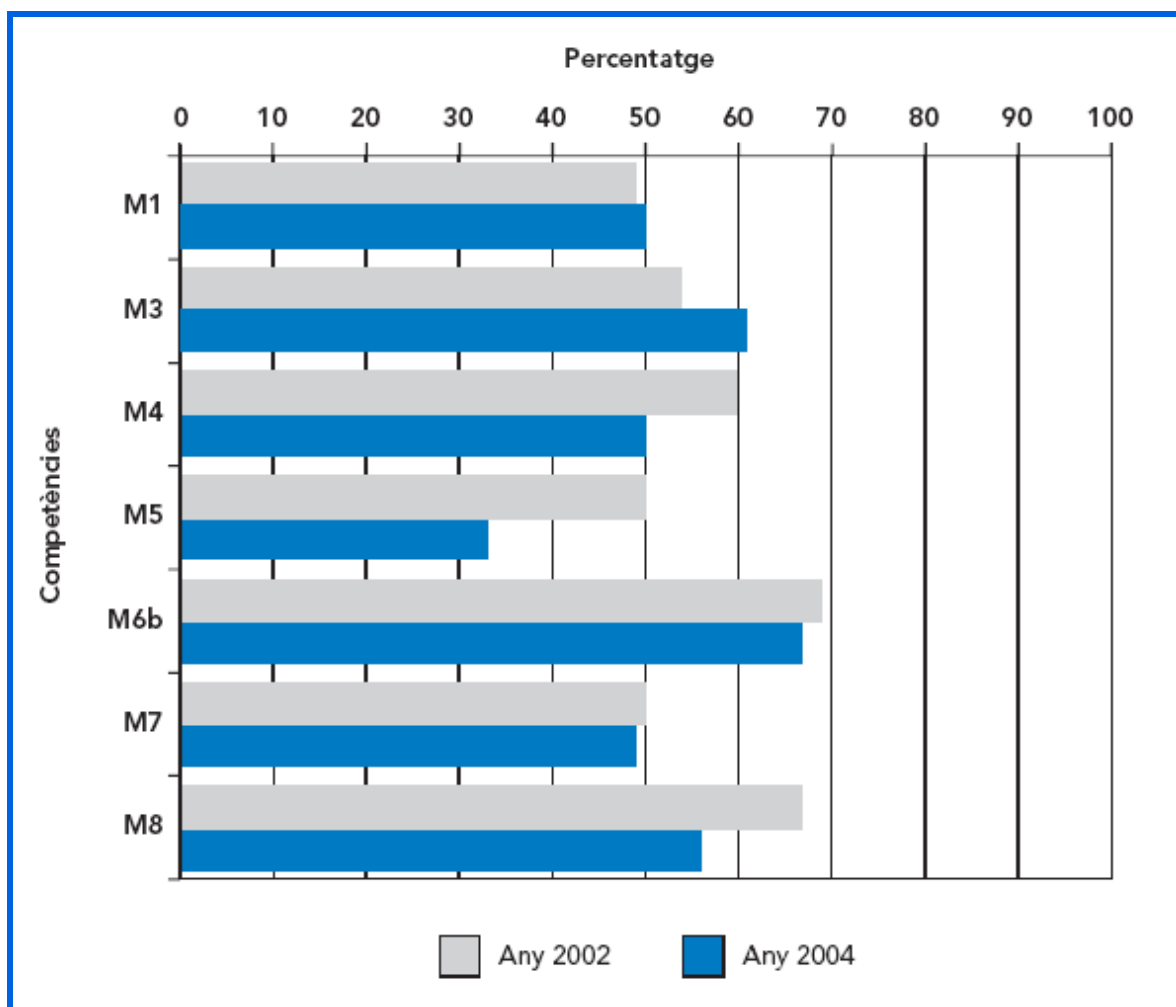
- Un espai ben natural per treballar la interdisciplinarietat és el crèdit de síntesi, però no pot constituir l'únic àmbit en què es produeixi aquest tipus de treball.

Resulta també interessant la comparació de resultats que presenta l'estudi publicat pel Departament d'Educació. És ben cert que les proves van ser força diferents i que, per això mateix, hem de ser molt prudents a l'hora de fer aquesta comparació.

El document del Departament diu, textualment, el següent:

Únicament s'inclouen les dades corresponents al domini consistent en les competències (criteri A) que són comparables en els dos cursos, per la qual cosa no consten les competències avaluades en el curs 2001-2002 i que en el 2003-2004 no s'avaluen, i viceversa.

Evolució del percentatge d'assoliment per competències de l'àmbit matemàtic



El document del Departament d'Educació no inclou cap conclusió referent a la comparació. Tot i la prudència que recomanàvem més amunt, sembla clara una qüestió: els problemes en l'assoliment de les competències bàsiques en matemàtiques segueixen essent importants i el sistema no ha sabut o no ha pogut trobar-hi solucions.

5. DADES DE PROVES EXTERNES INTERNACIONALS

5.1. PROVA TIMSS

L'estudi TIMSS (*Third International Mathematics and Science Study*) es va dur a terme entre els anys 1991 i 1997 amb la participació de 45 països i més de cinc-cents mil estudiants de primària i secundària, i va ser auspiciat per la IEA (International Association for the Evaluation of the Educational Achievement).

Les proves anaven més enllà de les competències bàsiques en matemàtiques i se centraven en el currículum de l'àrea als països participants. L'Estat espanyol va participar en l'estudi amb 7.596 alumnes de 7è i 8è d'EGB en proves que van tenir lloc el primer trimestre del 1995.

Per fer les proves es van dissenyar 151 preguntes de matemàtiques de característiques diferents:

- a) De tipus test amb 4 o 5 respostes possibles, de les quals només una és correcta.
- b) De resposta breu i oberta, en la qual l'alumne ha d'escriure la solució.
- c) De resposta oberta i extensa, en la qual l'alumne ha de fer una explicació detallada de tot el procés de resolució.

Després, es van combinar les preguntes per elaborar 8 models de prova amb 70 preguntes de matemàtiques cadascun.

Com ja s'ha dit, la prova se centrava en els currículums de matemàtiques dels països participants. Més concretament els percentatges de preguntes distribuïts per blocs temàtics va ser el següent:

Blocs temàtics	Percentatge de preguntes
Fraccions i sentit numèric	33
Geometria	15
Àlgebra	18
Representació i anàlisi de dades. Probabilitat	13
Mesura	13
Proporcionalitat	8

Aquests són alguns exemples de preguntes per a l'alumnat de 8è (14 anys):

Exemple 1 (àlgebra)

Trobeu x si $10x - 15 = 5x + 20$

Exemple 2 (fraccions i sentit numèric)

Si arrodonim a la desena de quilogram més propera, el pes d'un dofí resulta ser de 170kg. Escriviu un pes que pugui ser el vertader pes del dofí.

Exemple 3 (fraccions i sentit numèric)

$$\frac{3}{4} + \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{4}\right) =$$

- a) $1/8$;
- b) $5/16$;
- c) $17/48$;
- d) $5/6$;
- e) $11/12$

Exemple 4 (geometria)

En un quadrilàter, dos dels angles mesuren 110° cadascun, la mesura d'un tercer angle és 90° . Quina és la mesura de l'angle que falta?

- a) 50° ;
- b) 90°
- c) 130°
- d) 140°
- e) Cap de les anteriors

Exemple 5 (mesura)

Es posa un pastís al forn a les 7:20. Si el pastís triga tres quarts d'hora per fer-se, a quina hora cal treure'l del forn?

Exemple 6 (àlgebra)

Si 4 vegades un nombre és 48, quan valdrà $1/3$ d'aquest nombre?

- a) 4
- b) 8
- c) 12
- d) 16

Exemple 7 (probabilitat)

Cadascuna de les sis cares d'un cub està pintada de blau o de vermell. En tirar el cub, la probabilitat que quedi una cara vermella a dalt és de $2/3$. Quantes cares són vermelles?

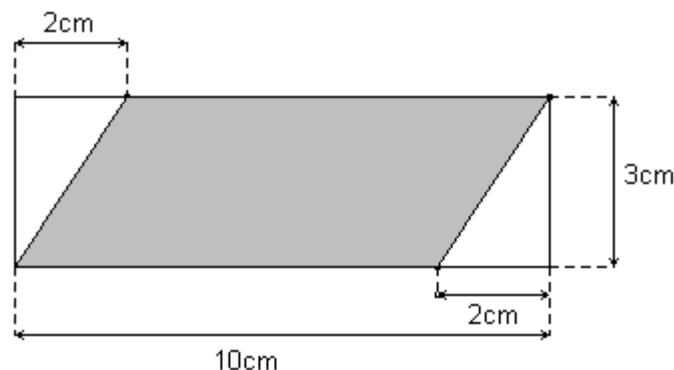
- a) Una
- b) Dues
- c) Tres
- d) Quatre
- e) Cinc

Exemple 8 (proporcionalitat)

Una classe té 28 alumnes. La raó de noies a nois és de 3 a 4. Quantes noies hi ha a la classe?

Exemple 9 (mesura)

La figura mostra un paral·lelogram (en gris) dins d'un rectangle. Quina és l'àrea del paral·lelogram?



En general, els alumnes de l'Estat espanyol van treure millors resultats a les preguntes de càlcul rutinari que a les que demanaven una aplicació pràctica dels conceptes matemàtics. Els resultats per blocs de continguts van ser els següents:

Blocs temàtics	Percentatge d'encerts a 7è (13 anys)		Percentatge d'encerts a 8è (14 anys)	
	Espanya	Internacional	Espanya	Internacional
Fracions i sentit numèric	43	53	52	58
Geometria	43	49	49	56
Àlgebra	41	44	54	52
Representació i anàlisi de dades. Probabilitat	52	57	60	62
Mesura	38	45	44	51
Proporcionalitat	35	40	40	45
Prova completa	42	49	51	55

Pel que fa al rànquing de països, els resultats obtinguts van ser més aviat lamentables per a l'Estat espanyol: va ocupar la 32a posició de 39 països en la prova de 7è i la 31a posició de 41 països en la de 8è. A casa nostra això va tenir un ressò molt limitat. La premsa va publicar alguna notícia breu referida als decebedors resultats en matemàtiques. L'opinió pública, però, no en va fer gaire cas i el govern central i el govern autonòmic tampoc. En canvi, a Gran Bretanya, per exemple, la classificació obtinguda (que per cert és força millor que l'espanyola) es va considerar indigna i va provocar molt de renou a la premsa, a tots els àmbits d'opinió i al Parlament. El govern britànic va emprendre mesures de xoc per millorar els resultats en matemàtiques: es van prohibir les calculadores per a alumnes menors de vuit anys, es van augmentar considerablement les hores de matemàtiques que s'impartien (fins a fer-ne cinc setmanals), es van revisar les metodologies i es van crear equips de professors especialistes per assessorar i formar altres professors, tot plegat amb una considerable inversió econòmica. Els resultats d'avaluacions recents (vegeu l'apartat dedicat a OCDE/PISA) semblen demostrar que les mesures preses han tingut èxit.

Aquest va ser el rànquing per països:

Alumnes de 7è (13 anys)		Alumnes de 8è (14 anys)	
País	%	País	%
Singapur	73	Singapur	79
Japó	67	Japó	73
Corea	67	Corea	72
Hong Kong	65	Hong Kong	70
Bèlgica (Flandes)	65	Bèlgica (Flandes)	66
Rep. Txeca	57	Rep. Txeca	66
Àustria	56	Eslovàquia	62
Bulgària	55	Suïssa	62
Holanda	55	Àustria	62
Bèlgica (Francès)	54	Hongria	62
Eslovàquia	54	França	61
Hongria	54	Eslovènia	61
Irlanda	53	Rússia	60
Suïssa	53	Holanda	60
Rússia	53	Bulgària	60
Eslovènia	53	Canadà	59
Austràlia	52	Irlanda	59
Tailàndia	52	Bèlgica (Francès)	59
Canadà	52	Austràlia	58
França	51	Tailàndia	57
Alemanya	49	Israel	57
Estats Units	48	Suècia	56
Anglaterra	47	Alemanya	54
Suècia	47	Nova Zelanda	54
Nova Zelanda	46	Noruega	54
Escòcia	44	Anglaterra	53
Noruega	44	Estats Units	53
Letònia	44	Dinamarca	52
Dinamarca	44	Escòcia	52
Romania	43	Letònia	51
Islàndia	43	Espanya	51
Espanya	42	Islàndia	50
Xipre	42	Grècia	49
Grècia	40	Romania	49
Lituània	38	Lituània	48
Portugal	37	Xipre	48
Iran	32	Portugal	43
Colòmbia	26	Iran	38
Sud-àfrica	23	Kuwait	30
		Colòmbia	29
		Sud-àfrica	24
Internacional	49	Internacional	55

Totes aquestes informacions semblen indicar clarament que hi havia grans deficiències en la formació matemàtica de l'alumnat a Espanya també abans de la implantació de la LOGSE.

5.2. PROVES OCDE PISA

El projecte PISA és un estudi promogut per l'OCDE (Organització per a la Cooperació i el Desenvolupament Econòmic) per tal d'avaluar els coneixements i les habilitats adquirides per l'alumnat de 15 anys de diversos països en tres àrees o àmbits: comprensió lectora, matemàtiques i ciències. La primera avaluació va tenir lloc l'any 2000 (el 65% de la prova era de comprensió lectora i el 35% restant es repartia entre les matemàtiques i les ciències de la naturalesa). La segona prova es va fer l'any 2003 i es va centrar en l'àmbit de les matemàtiques (en aquest cas el 65% de la prova era de matemàtiques i el 35% restant es repartia entre la comprensió lectora i les ciències de la naturalesa). Hi ha la previsió de fer noves avaluacions cada tres anys.

El programa comprèn un estudi previ de quines són les competències matemàtiques i no posa l'accent en els continguts escolars tradicionals, sinó que pretén fixar-se, més aviat, en l'aplicació funcional dels coneixements i de les aptituds apreses en contextos diversos. Aquestes dues cites, extretes d'aquests estudi, apunten en aquesta direcció:

“Tot i que l'adquisició de coneixements específics és una component essencial de l'aprenentatge escolar, l'aplicació d'aquests coneixements a la vida adulta depèn en gran mesura de l'adquisició per l'individu de nocions i d'aptituds més àmplies.”

“En matemàtiques, ser capaç de raonar en termes quantitius i concebre relacions de dependència o correspondències és més important que saber respondre les preguntes habituals dels tests de coneixement matemàtic, sobretot quan es tracta de mostrar les competències matemàtiques aplicades a la vida quotidiana.”

Cal pensar, doncs, que l'estudi es refereix, com a mínim en part, a les competències bàsiques.

L'estudi OCDE/PISA també aporta algunes conclusions referents a la distribució d'habilitats per sexes. A tots els països estudiats les noies obtenen millors resultats que els nois en comprensió lectora. En canvi, a la meitat dels països analitzats els nois obtenen millors resultats en matemàtiques que les noies.

L'informe assegura que la inversió en educació és un factor necessari, tot i que no és suficient, per treure bons resultats. S'apunta més aviat a una combinació de factors per obtenir un bon rendiment de l'alumnat.

Es consideren bones pràctiques que afavoreixen l'obtenció de bons resultats:

Relacionats amb l'alumnat:

- Realització de deures escolars a casa
- Implicació de l'alumnat en la lectura
- Fer activitats familiars relacionades amb la cultura
- Alta comunicació social i cultural amb els pares

Relacionats amb els centres:

- Existència d'un bon clima escolar en els centres
- Clima de respecte i de disciplina en els centres
- Compromís moral del professorat
- Qualitat de les infraestructures físiques
- Recursos educatius de les escoles
- Utilització de recursos per part de l'alumnat
- Avaluació formal de l'alumnat
- Grau d'autonomia dels centres

Les proves de 2000 es van passar a 265.000 alumnes de 15 anys. Catalunya va participar a l'estudi conjuntament amb l'Estat espanyol. Les dades recollides, però, s'han pogut estudiar per separat i són suficients per donar uns resultats globals de l'alumnat de la nostra comunitat autònoma. Concretament, hi van participar 23 centres, d'ensenyament públic i privat, distribuïts per tot el territori, amb un total aproximat de 800 alumnes (l'estat espanyol hi va participar amb 150 centres).

És interessant comparar els resultats de matemàtiques del 2000 amb els dels altres dos àmbits avaluats:

MITJANES OBTINGUDES EN MATEMÀTIQUES		MITJANES OBTINGUDES EN COMPRENSIÓ LECTORA		MITJANES OBTINGUDES EN CIÈNCIES	
País	Mitjanes	País	Mitjanes	País	Mitjanes
Japó	557	Finlàndia	546	Corea	552
Corea	547	Canadà	534	Japó	550
Nova Zelanda	537	Nova Zelanda	529	Finlàndia	538
Finlàndia	536	Austràlia	528	Regne Unit	532
Austràlia	533	Irlanda	527	Canadà	529
Canadà	533	Corea	525	Nova Zelanda	528
Suïssa	529	Regne Unit	523	Austràlia	528
Regne Unit	529	Japó	522	Àustria	519
Bèlgica	520	Suècia	516	Irlanda	513
França	517	Àustria	507	Suècia	512
Àustria	515	Bèlgica	507	Rep. Txeca	511
Dinamarca	514	Islàndia	507	Catalunya	506
Islàndia	514	Noruega	505	Noruega	500
Liechtenstein	514	França	505	França	500
Suècia	510	Estats Units	504	OCDE	500
Irlanda	503	OCDE	500	Estats Units	499
OCDE	500	Dinamarca	497	Hongria	498
Noruega	499	Catalunya	495	Islàndia	496
Rep. Txeca	496	Suïssa	494	Bèlgica	496
Estats Units	493	Espanya	493	Suïssa	496
Catalunya	491	Rep. Txeca	492	Espanya	491
Alemanya	490	Itàlia	487	Alemanya	487
Hongria	488	Alemanya	484	Polònia	483
Federació Russa	478	Liechtenstein	483	Dinamarca	481
Espanya	476	Hongria	480	Grècia	481
Polònia	470	Polònia	479	Itàlia	478
Letònia	463	Grècia	474	Liechtenstein	478
Itàlia	457	Portugal	470	Federació Russa	460
Portugal	454	Federació Russa	462	Letònia	460
Grècia	447	Letònia	458	Portugal	458
Luxemburg	446	Luxemburg	441	Luxemburg	443
Mèxic	387	Mèxic	422	Mèxic	422
Brasil	334	Brasil	396	Brasil	375

Catalunya obté, doncs, uns resultats inferiors a la mitjana i l'argument que són millors que els d'Espanya i similars als d'Alemanya no hauria de servir de consol. El fet és que s'ocupa la 20a

posició de 32 països. També és cert que, en relació als estudis de l'INCE del 1995, hi ha una millora, ja que en aquelles proves Catalunya tenia resultats inferiors a la mitjana espanyola. Cal remarcar, però, que les proves de l'INCE del 1995 se centraven més en els continguts escolars i no tant en les competències bàsiques. També a les proves de l'INCE del 2000 els resultats de Catalunya estaven lleugerament per sobre de la mitjana espanyola i les conclusions són, doncs, coincidents.

També és interessant fixar-se en els resultats del Regne Unit en matemàtiques: ocupen una excel·lent vuitena posició. Com es recordarà, a les proves TIMSS, els resultats en matemàtiques d'aquest Estat, tot i ser millors que els d'Espanya, es van considerar molt dolents i van tenir un gran ressò als mitjans de comunicació i a l'àmbit polític. Com a conseqüència del debat que es va suscitar, es van emprendre canvis importants referents a l'ensenyament de les matemàtiques (que incloïen, entre d'altres mesures, l'augment de quatre a cinc hores de docència setmanal de l'àrea) i, segons sembla, això els ha permès una notable millora. A casa nostra es van trobar a faltar el debat i les accions que se n'haurien de derivar.

La mostra d'alumnat de Catalunya que va participar en l'avaluació del 2003 (una mostra de 50 centres -27 de públics i 23 de privats- repartits per tot el territori) va ser més àmplia que la mostra del 2000 i aquest factor fa més fiables les dades del 2003, tot i que, segons els estàndards PISA, és la mostra mínima per obtenir el grau de confiança adient.

Els resultats en matemàtiques del 2003 van ser els següents:

Taula 1 ■ Rendiment global en matemàtiques					
	Puntuació mitjana S.E.			Puntuació mitjana S.E.	
• Hong Kong-Xina	550	4,5	• Rep. d'Eslovàquia	498	3,3
• Finlàndia	544	1,9	• Noruega	495	2,4
• Corea	542	3,2	• CATALUNYA	494	4,6
• Holanda	538	3,1	• Luxemburg	493	1,0
• Liechtenstein	536	4,1	• Polònia	490	2,5
• Japó	534	4,0	• Hongria	490	2,8
• Canadà	532	1,8	• ESPANYA	485	2,4
• Bèlgica	529	2,3	• Letònia	483	3,7
• Macao-Xina	527	2,9	• Estats Units	483	2,9
• Suïssa	527	3,4	• Federació Russa	468	4,2
• Austràlia	524	2,1	• Portugal	466	3,4
• Nova Zelanda	523	2,3	• Itàlia	466	3,1
• República Txeca	516	3,5	• Grècia	445	3,9
• Islàndia	515	1,4	• Sèrbia-Montenegro	437	3,8
• Dinamarca	514	2,7	• Turquia	423	6,7
• França	511	2,5	• Uruguai	422	3,3
• Suècia	509	2,6	• Tailàndia	417	3,0
• Regne Unit*	508	2,4	• Mèxic	385	3,6
• Àustria	506	3,3	• Indonèsia	360	3,9
• Alemanya	503	3,3	• Tunísia	359	2,5
• Irlanda	503	2,4	• Brasil	356	4,8

El quadre següent compara els resultats en els tres àmbits corresponents a les dues avaluacions:

	PISA 2000	PISA 2003
Resultats en comprensió lectora	Dissetena posició d'entre 32 països amb 495 punts de mitjana per sobre del conjunt de l'Estat espanyol amb 493 punts.	Vint-i-sisena posició d'entre 42 països amb 483 punts de mitjana per sobre del conjunt de l'Estat espanyol amb 481 punts.
Resultats en ciències	Dotzena posició d'entre 32 països amb 506 punts de mitjana per sobre del conjunt de l'Estat espanyol amb 491 punts.	Dinovenena posició d'entre 42 països amb 502 punts de mitjana per sobre del conjunt de l'Estat espanyol amb 487 punts.
Resultats en matemàtiques	Vintena posició d'entre 32 països amb 491 punts de mitjana per sobre del conjunt de l'Estat espanyol amb 476 punts.	Vint-i-quatrena posició d'entre 42 països amb 494 punts de mitjana per sobre del conjunt de l'Estat espanyol amb 485 punts.

D'una manera general es pot dir que els resultats aconseguits en l'àmbit matemàtic per la mostra d'alumnat de Catalunya en la primera avaluació del PISA de l'any 2000 van ser molt semblants als assolits en l'avaluació del PISA 2003.

La prova de 2003 que, com s'ha dit, se centrava en les competències matemàtiques, avaluava específicament les capacitats de l'alumnat en quatre subàmbits. Els resultats van ser els següents:

Subàmbit avaluat	Puntuació
Espai i forma	L'alumnat de la mostra de Catalunya obté 482 punts, per sota de la mitjana de 500 punts i per sobre dels 476 punts del conjunt de l'Estat espanyol.
Quantitat	L'alumnat de la mostra de Catalunya obté 506 punts, per sobre de la mitjana de 500 punts i per sobre dels 492 punts del conjunt de l'Estat espanyol.
Canvi i relacions	L'alumnat de la mostra de Catalunya obté 488 punts, per sota de la mitjana de 500 punts i per sobre dels 481 punts del conjunt de l'Estat espanyol.
Incertesa.	L'alumnat de la mostra de Catalunya obté 495 punts, per sota de la mitjana de 500 punts i per sobre dels 489 punts del conjunt de l'Estat espanyol.

Aquests resultats semblen definir prou clarament quins són els aspectes que més es treballen a les aules de casa nostra i també quins són els aspectes de l'activitat matemàtica que es consideren més rellevants.

D'altra banda, a l'avaluació del PISA 2003 es va introduir una part de les proves per mesurar les capacitats dels estudiants en l'àmbit de la resolució de problemes, considerada com una activitat interdisciplinària clau. Els resultats en resolució de problemes de la mostra de Catalunya són similars als de l'àmbit estrictament matemàtic: vint-i-quatrena posició d'entre 42 països amb 493 punts de mitjana per sobre del conjunt de l'Estat espanyol amb 482 punts.

Com a novetat de les proves del 2003, s'ha d'esmentar que també hi ha disponibles els resultats del País Basc i de la Comunitat de Castella i Lleó que obtenen 502 i 503 punts a les proves de

matemàtiques, respectivament, per sobre dels 494 de Catalunya. Només en l'àmbit de ciències Catalunya supera o iguala els resultats d'aquestes comunitats autònomes.

Els resultats de les proves de 2003 a Catalunya revelen també que hi ha una diferència considerable entre nois i noies a les proves de matemàtiques (els nois obtenen una mitjana de 504 punts i les noies de 486 punts). Aquestes diferències observades són clarament superiors a les de la mitjana de l'OCDE (els nois tenen una mitjana de 494 punts i les noies de 484 punts) i a la diferència observada a l'Estat espanyol (els nois tenen una mitjana de 490 punts i les noies de 481 punts).

També són de molt interès els resultats de les enquestes d'opinió referents a les matemàtiques escolars que es van dur a terme conjuntament amb les proves. A les proves PISA de 2000, que com s'ha dit se centaven en la comprensió lectora, la majoria dels estudiants afirmaven tenir una imatge positiva de la lectura. En canvi, els participants a les proves de 2003 (de la mateixa manera que a les proves de 2000) expressen molt menys entusiasme per les matemàtiques. A tall d'exemple, l'informe explica que, aproximadament, la meitat dels alumnes declaren tenir interès per allò que aprenen de matemàtiques, tot i que només el 38% està d'acord amb la frase "faig matemàtiques perquè em resulten divertides i engrescadores".

L'estudi recull concretament els resultats de les enquestes d'opinió dels alumnes en tres àmbits relacionats amb la motivació per al treball en les matemàtiques:

1. Interès i satisfacció pel treball en matemàtiques
2. Motivació instrumental envers el treball en matemàtiques
3. Autoestima respecte del coneixement en matemàtiques

A continuació es presenten els resultats en els tres àmbits dels alumnes de la mostra d'Espanya i, per poder fer comparacions, s'acompanyen dels resultats a l'OCDE, a França (set llocs per sobre de Catalunya i deu per sobre d'Espanya en el rànquing per països) i a Finlàndia (l'estat europeu amb millors resultats i segon de rànquing). Les taules recullen els percentatges d'alumnes que estan d'acord o molt d'acord amb les frases recollides. L'informe no recull els resultats específics de la mostra de Catalunya.

1. Interès i satisfacció pel treball en matemàtiques

(% d'alumnes que estan d'acord o molt d'acord amb les frases)				
FRASES PROPOSADES A LES ENQUESTES	Mitjana OCDE	Mitjana Espanya	Mitjana França	Mitjana Finlàndia
Em resulta divertit llegir coses referents a les matemàtiques	31	32	31	18
Espero amb il·lusió les meves classes de matemàtiques	31	20	24	20
Faig matemàtiques perquè m'agraden	38	37	47	25
M'interessen les coses que aprenc en matemàtiques	53	61	67	45

No és senzill interpretar tot aquest conjunt de resultats. Amb tot, podem aventurar que l'interès i la satisfacció pel treball en matemàtiques és escàs arreu, tan als països amb bons resultats, com en els països amb resultats més fluixos. També es pot dir que resulta encoratjadora la dada que més del 60% dels alumnes d'Espanya pensin que allò que aprenen a l'escola en l'àmbit matemàtic té interès. En sentit contrari, és preocupant la poca il·lusió que suscitaven les classes de matemàtiques.

2. Motivació instrumental envers el treball en matemàtiques

(% d'alumnes que estan d'acord o molt d'acord amb les frases)

FRASES PROPOSADES A LES ENQUESTES	Mitjana OCDE	Mitjana Espanya	Mitjana França	Mitjana Finlàndia
Val la pena fer esforços en matemàtiques perquè m'ajudarà en el treball que vull fer més endavant	75	76	73	73
Aprendre matemàtiques és important perquè m'ajudarà en les matèries que vull estudiar en el futur	78	79	74	87
Les matemàtiques són una matèria important per a mi perquè les necessito per allò que vull estudiar més endavant	66	63	65	74
Aprendré moltes coses en matemàtiques que m'ajudaran a trobar una feina	70	68	62	76

En aquest àmbit sembla quedar clar que l'alumnat de Finlàndia detecta la importància que té l'aprenentatge de les matemàtiques de cara al futur acadèmic i professional tot i que els percentatges d'alumnes espanyols que pensen el mateix són també força elevats.

3. Autoestima respecte del coneixement en matemàtiques

(% d'alumnes que estan d'acord o molt d'acord amb les frases)

FRASES PROPOSADES A LES ENQUESTES	Mitjana OCDE	Mitjana Espanya	Mitjana França	Mitjana Finlàndia
No sóc bo en matemàtiques	42	51	39	40
Trec bones notes en matemàtiques	57	47	48	56
Aprenc matemàtiques ràpidament	51	45	47	54
Sempre he cregut que les matemàtiques són una de les meves matèries preferides	35	31	26	33
A les classes de matemàtiques, entenc fins i tot les qüestions més difícils	33	31	28	38

Els nivells d'autoestima per a l'activitat matemàtica són especialment fluixos a l'estat espanyol i resulta dur comprovar que més de la meitat dels alumnes de la mostra pensin que no són bons en matemàtiques cosa que no passa ni a França ni a Finlàndia.

Pot ser d'interès preguntar-se si aquests aspectes relacionats amb la motivació tenen molta incidència en els resultats dels alumnes en l'àmbit matemàtic i el cert és que és d'enorme dificultat esbrinar-ho. Amb tot, la taula següent, que recull els resultats a les proves del 25% d'alumnes que expressen els nivells més baixos en els tres aspectes anteriors relacionats amb la motivació a l'hora de fer matemàtiques, hi pot ajudar:

(puntuacions a la prova de matemàtiques del 25% d'alumnes amb els resultats més baixos en les enquestes de motivació)

Qüestió analitzada	Puntuació OCDE	Puntuació Estat espanyol
Interès i satisfacció pel treball en matemàtiques	483	460
Motivació instrumental envers el treball en matemàtiques	490	461
Autoestima respecte del coneixement en matemàtiques	465	447

Aquests resultats semblen apuntar que, efectivament, els alumnes que manifesten tenir graus força baixos de motivació i d'autoestima treuen resultats molt fluixos. Tanmateix, no tenim cap seguretat que la cosa no vagi a l'inrevés i que, en realitat, siguin els mals resultats habituals els que porten aquests alumnes a la desmotivació. El més lògic, de fet, és que hi hagi interaccions complexes entre les dues qüestions en un procés cíclic de difícil resolució.

Des de una perspectiva més general, l'estudi recull la dada que el 79% dels alumnes de la mostra espanyola (per sobre de la mitjana de la OCDE que és del 72%) estan d'acord que l'escola els serà útil com a preparació per al futur i que els ha permès adquirir confiança en la presa de decisions. A més, l'informe diu també que només un 8% dels alumnes pensa que l'escola és una pèrdua de temps. Certament, aquestes dades resulten reconfortants per al sistema educatiu.

En àmbits propers a la motivació, l'estudi va passar qüestionaris relacionats amb l'ansietat a l'hora de fer matemàtiques. Aquests en són els resultats presentats també conjuntament amb la mitjana OCDE i amb els de França i Finlàndia:

L'ansietat dels estudiants en relació a les matemàtiques

(% d'alumnes que estan d'acord o molt d'acord amb les frases)

FRASES PROPOSADAES A LES ENQUESTES	Mitjana OCDE	Mitjana Espanya	Mitjana França	Mitjana Finlàndia
Sovint em preocupa pensar que les classes de matemàtiques seran molt difícils per a mi	57	66	61	50
Em poso molt tens quan he de fer deures de matemàtiques	29	36	53	7
Em poso molt nerviós quan faig problemes de matemàtiques	29	40	39	15
Em sento inútil quan faig problemes de matemàtiques	29	31	37	26
Em preocupo perquè trauré males notes de matemàtiques	59	77	75	51

Si ens fixem en les dades finlandeses, aquest sí que sembla ser un factor important per explicar els seus bons resultats tot i que al Japó, per exemple, amb nivell d'ansietat molt elevats, els estudiants treuen bons resultats globals. En qualsevol cas, és preocupant que el 77% dels alumnes de la mostra espanyola pensin que trauran males notes en matemàtiques i que el 66% pensin que les classes de matemàtiques són massa difícils.

Val la pena esmentar, finalment, els resultats que recull l'estudi de les enquestes d'opinió dels alumnes en tres àmbits relacionats amb la manera de treballar, d'estudiar i d'aprendre les matemàtiques:

1. Estratègies de control
2. Estratègies de memorització
3. Elaboració d'estratègies

A continuació es presenten de forma anàloga a la dels aspectes relacionats amb la motivació i s'acompanyen amb els resultats a l'OCDE, a França i a Finlàndia per poder fer comparacions. També, com en el cas anterior, les taules recullen els percentatges d'alumnes que estan d'acord o molt d'acord amb les frases recollides.

1. Estratègies de control

(% d'alumnes que estan d'acord o molt d'acord amb les frases)

FRASES PROPOSADAS A LES ENQUESTES	Mitjana OCDE	Mitjana Espanya	Mitjana França	Mitjana Finlàndia
Quan estudio per a un examen de matemàtiques, intento extreure els aspectes més importants que cal aprendre	87	84	91	88
Quan estudio matemàtiques, em poso a prova jo mateix per veure si recordo el treball que ja he fet	73	79	72	46
Quan estudio matemàtiques, intento desxifrar quins conceptes encara no he entès pròpiament	86	84	87	82
Quan no puc entendre alguna cosa en matemàtiques, sempre busco més informació per clarificar el problema	69	66	78	48
Quan estudio matemàtiques, començo per desxifrar exactament què necessito aprendre	75	82	78	59

No sembla pas que aquests aspectes siguin determinants dels resultats més aviat fluïxos de l'alumnat de la mostra espanyola i resulten fins i tot sorprenents els percentatges força baixos de la mostra finlandesa. Des del punt de vista del professorat, semblen més assenyades les respostes de l'alumnat espanyol que no pas les dels finlandesos. Els resultats obtinguts, però, ens deixen ben clar que els finlandesos ho fan molt millor.

2. Estratègies de memorització

(% d'alumnes que estan d'acord o molt d'acord amb les frases)

FRASES PROPOSADAS A LES ENQUESTES	Mitjana OCDE	Mitjana Espanya	Mitjana França	Mitjana Finlàndia
Torno sobre alguns problemes de matemàtiques tantes vegades que em sento com si els pogués resoldre quan dormo	34	31	25	26
Quan estudio matemàtiques, intento aprendre'm les respostes dels problemes de memòria	45	40	37	44
Per tal de recordar el mètode per resoldre un problema de matemàtiques, reviso moltes vegades els exemples	66	76	70	54
Per aprendre matemàtiques, intento recordar cada pas en un procediment	75	85	82	72

Les estratègies de memorització tenen forta presència a Espanya i a França i són menys habituals a Finlàndia. Amb tot, resulta arriscat assegurar que això explica l'èxit finlandès. Tots els professors sabem que aprendre a resoldre problemes de memòria és de poca utilitat quan els alumnes troben un problema nou i que per a l'aprenentatge funcional la memorització pot ser una condició necessària, però no suficient.

3. Elaboració d'estratègies

(% d'alumnes que estan d'acord o molt d'acord amb les frases)

FRASES PROPOSADAES A LES ENQUESTES	Mitjana OCDE	Mitjana Espanya	Mitjana França	Mitjana Finlàndia
Quan estic resolent problemes de matemàtiques, penso sovint en noves maneres de trobar la resposta	49	55	45	43
Penso en la manera en què les matemàtiques que he après poden fer-se servir a la vida quotidiana	53	63	47	61
Intento entendre nous conceptes de matemàtiques tot i relacionant-los amb coses que ja conec	64	63	52	52
Quan estic resolent problemes de matemàtiques, penso sovint com es podria aplicar la resolució a d'altres qüestions interessants	40	44	48	27
Quan estudio matemàtiques, intento relacionar el treball que faig amb allò que he après en d'altres matèries	44	44	44	40

Els resultats de l'alumnat de la mostra espanyola tornen a semblar relativament satisfactoris i millors que els dels finlandesos en aquests àmbits. Sabem, però, que això no es tradueix en puntuacions brillants. Amb tot, cal pensar que a Espanya sembla que hi ha una base acceptable sobre la qual treballar.

6. ALGUNES CONCLUSIONS I REFLEXIONS FINALS

Posar en marxa processos rigorosos d'avaluació externa és complicat, sobretot si l'experiència prèvia és escassa i els objectius inicials són molt ambiciosos. Avaluar l'assoliment de les competències bàsiques en tants àmbits a nivell nacional i de les competències matemàtiques a nivell internacional són reptes de proporcions considerables.

La vertadera funció dels processos d'avaluació externa i d'avaluació dels sistemes educatius és detectar problemes per poder-los estudiar i proposar estratègies i accions per solucionar-los. L'avaluació no és l'objectiu. L'objectiu és la millora i només des del rigor i des de la serietat és possible diagnosticar amb precisió i fer propostes que permetin resoldre els problemes. Si una cosa queda prou clara tant des de l'àmbit nacional, com des de l'estatal, com des de l'internacional, és que els resultats d'avaluació en matemàtiques no són bons i tancar el ulls no condueix enlloc. La primera condició per millorar és el reconeixement que hi ha coses que no funcionen correctament. Només des d'una diagnosi acurada es podrà decidir quins canvis, quines accions cal emprendre per progressar i esmenar vells errors.

Probablement una lectura apocalíptica dels resultats tampoc ens duria enlloc. Tanmateix, una mica d'autocrítica en relació a tot el sistema educatiu s'hauria agraït en certs sectors del professorat de matemàtiques, ja greument perjudicat i desconcertat per l'allau de canvis constants de perspectiva des de fa un bon grapat d'anys. De vegades, quan s'analitzen alguns documents fets públics, fa l'efecte que no s'ha volgut reconèixer clarament que els resultats en l'àmbit matemàtic eren fluixos. El ressò que va tenint la publicació de tots aquests resultats, però, augmenta dia a dia i la societat sembla prendre consciència que el nostre sistema educatiu i les matemàtiques especialment tenen greus problemes.

En qualsevol cas, la implantació de les proves d'avaluació externa referents a l'assoliment de les competències bàsiques i de les competències matemàtiques al llarg de totes les etapes educatives s'ha de considerar com un instrument excel·lent per diagnosticar i incidir en la millora del sistema educatiu.

De tota la informació recollida en els apartats anteriors se'n podem extreure moltes conclusions que, en tot cas, han d'estar impregnades de prudència a causa de la gran complexitat dels problemes didàctics. Aquí se n'aventuren unes quantes:

1. Els resultats de totes les proves presentades són, en general, força fluixos. Els de les proves de la inspecció del 1995 i de l'INCE del mateix any són francament dolents i els de les proves internes del Bruguers a 3r de BUP demostren mancances colpidores entre un grup d'alumnes força seleccionat.
2. Els resultats de les proves del TIMSS, també referits a alumnes del sistema educatiu anterior, demostren que la formació matemàtica a Espanya ja era deficitària i que no es corresponia amb l'estatus del país en altres àmbits.
3. En certs sectors del professorat i de la societat s'ha afirmat que l'alumnat del sistema educatiu anterior sortia de secundària més ben preparat en matemàtiques. Les proves presentades en els primers apartats semblen demostrar que aquesta afirmació és falsa o com a mínim dubtosa: l'alumnat de BUP tenia greus mancances de formació matemàtica.
4. La confusió la provoca, probablement, el fet que alguns alumnes (en realitat era una petita minoria) del sistema anterior assolien uns coneixements matemàtics que anaven més enllà dels prescrits actualment. De fet, es pot aventurar que la hipòtesi que l'alumnat dels sistemes EGB-BUP-FP-COU sabia més matemàtiques prové de la confusió entre continguts curriculars impartits i assoliment de les competències bàsiques en matemàtiques: es fa el raonament fals que, a més continguts prescrits, més saben els alumnes. Cal tenir en compte també, que les proves de competències bàsiques es passen ara a tota la població de 10 i de 14 anys. En canvi, les proves estudiades aquí es referien a alumnes de 16 anys escolaritzats (prova de la inspecció del 1995) o a alumnes de 3r de BUP. S'ha de pensar, doncs, que si s'haguessin fet proves a tota la població de 16 anys, els resultats encara haurien estat pitjors.
5. En el sistema educatiu anterior es disposava de més hores de matemàtiques i la diversitat de l'alumnat no era tan elevada com ara. Els continguts curriculars, però, no s'ajustaven per res a l'assoliment de les competències bàsiques. El nombre d'alumnes per aula era molt elevat i la metodologia del professorat, tot sovint, era molt clàssica i anàloga a la de la universitat, amb classes magistrals i poca o nul·la participació de l'alumnat. El professorat pressuposava que els alumnes que aprenien a multiplicar polinomis i a calcular derivades també sabien, per exemple, resoldre problemes de la vida quotidiana relacionats amb percentatges. Això, però, no és cert i sense un treball específic de les competències bàsiques matemàtiques, només una minoria estricta d'alumnes és capaç d'assolir-les pel seu compte.
6. Si s'haguessin dedicat hores de formació al treball de les competències bàsiques amb els alumnes de BUP, probablement els resultats haurien estat molt millors, ja que es tractava de minories força seleccionades d'alumnes. El fet cert, però, és que els currículums centrats en els continguts estrictament matemàtics tenien conseqüències indesitjables en l'assoliment de les competències bàsiques i en la percepció de la utilitat de les matemàtiques.
7. Els resultats de les proves de l'INCE del 2000 semblen apuntar que la implantació de la reforma educativa no va provocar millores substancials i els resultats de les proves OCDE/PISA de 2000 i de 2003 ens permeten afirmar que els problemes de formació en l'àmbit de les matemàtiques no s'han corregit en absolut.

8. Els resultats de Catalunya a totes aquestes proves no són pas per estar contents. El fet que siguin una mica millors que els de la mitjana de l'Estat a les proves INCE 2000 i OCDE/PISA no ens haurien d'enlluernar.

9. Les proves de competències bàsiques als 10 i als 14 anys demostren que hi ha entre un 30 i un 40% de l'alumnat sense les competències bàsiques de matemàtiques assolides. Aquest percentatge arriba fins al 60% entre els sectors de la població de nivell socioeconòmic baix.

10. En relació a les proves OCDE/PISA, més específicament podem afirmar el següent:

a) Els resultats de comprensió lectora del 2000 s'han de considerar acceptables. En canvi, a la prova de 2003 s'observa un clar retrocés (recordem, però, que la prova que se centrava en aquest àmbit era la del 2000).

b) Els resultats en l'àmbit de ciències s'han de considerar bons, tot i el petit retrocés observat a les proves de 2003.

c) Els resultats de l'àmbit matemàtic a les dues proves, tot i que semblen comparativament millors que els de les proves del TIMSS i que estan per sobre de la mitjana de l'Estat espanyol, estan per sota de la mitjana de l'OCDE i són globalment inferiors als dels altres dos àmbits avaluats.

d) Dins de l'àmbit matemàtic, el subàmbit amb millors resultats és el més clàssic: el dedicat a la *quantitat*. En canvi, en els àmbits relacionats amb la geometria, les relacions funcionals i l'atzar els resultats són inferiors a la mitjana dels països de l'OCDE. Això pot denotar quins són els aspectes prioritaris que es treballen a les aules i quins aspectes de la matemàtica es deixen de banda.

e) En resolució de problemes els resultats són novament decebedors.

f) Les diferències entre nois i noies a Catalunya en l'àmbit matemàtic s'han de considerar excessives.

g) L'apreciació i la motivació per al treball de les matemàtiques escolars és molt baixa arreu del món, i en alguns aspectes, com ara els de la visió instrumental de les matemàtiques, Espanya està molt endarrerida.

11. El panorama general és, doncs, poc engrescador. Els resultats de les proves referents al sistema educatiu anterior són força dolents i els de les proves més recents no conviden a l'optimisme. Es constata que els resultats a l'àmbit de les matemàtiques (quan hi ha més d'un àmbit en joc) són sempre els pitjors. És cert que el problema és internacional i que molts països desenvolupats tenen greus dificultats amb la formació matemàtica dels seus ciutadans. S'ha de reconèixer, però, que a casa nostra ho tenim pitjor, amb l'agreujant, a més, que no es denuncia amb molta contundència la gravetat de la situació.

Tot plegat ens hauria d'invitar a la reflexió i a estudiar quins són els problemes específics en l'ensenyament i l'aprenentatge de les matemàtiques que porten a aquests resultats més aviat decebedors de manera reiterada. Tot sembla indicar que tenim un problema específic amb les matemàtiques. El sector educatiu i la societat, tot i que comencen a adquirir consciència del problema, només han reaccionat, fins ara mateix, de manera més aviat tímida. La part positiva de la situació és que tenim els instruments per fer un bon diagnòstic i que l'administració mostra preocupació per l'assoliment de les competències bàsiques matemàtiques. Hi ha, però, un llarg camí a recórrer.

Tancarem el capítol amb dues cites del professor Mogens Niss, de la universitat de Roskilde i pare del concepte de competències matemàtiques del projecte PISA, recollides a la conferència que va fer al Cosmocaixa el curs 2004-2005:

“La voluntat d’aprendre matemàtiques decau a occident i al Japó i apareix amb força als països d’Àsia oriental, com ara Xina, Corea, Tailàndia, Singapur o Malàisia.”

“El currículum particular de cada país no és el més important. L’important és que els alumnes adquireixin les competències matemàtiques mitjançant aquest currículum.”

CAPÍTOL 2: LA IMATGE DE LES MATEMÀTIQUES A LA NOSTRA SOCIETAT. LA IMATGE PRECONCEBUDA QUE ELS ALUMNES TENEN DE LES MATEMÀTIQUES

La imatge que moltes persones tenen de les matemàtiques prové directament de l'àmbit escolar. Tot sembla indicar que aquesta imatge és més aviat negativa. Cal, però, precisar-ho: realment és tan negativa la imatge de les matemàtiques? Si és així, per què la imatge de les matemàtiques és tan negativa? A què s'associen les matemàtiques? Quins factors podrien contribuir a millorar-ne la imatge? Què hi pot fer el professorat?

1. INTRODUCCIÓ I REFLEXIONS PRÈVIES

Molts alumnes amb dificultats d'aprenentatge de les matemàtiques pateixen un bloqueig que els impedeix entrar en els aspectes positius de la matèria. Tenen una imatge preconcebuda de les matemàtiques (recollida potser a casa o en els mitjans de comunicació o en etapes anteriors) força negativa. Poden sentir una forta inseguretat, i fins i tot por, amb tot allò que s'hi relacioni. És ben cert que recuperar aquests alumnes no és una tasca fàcil, el primer pas, però, consisteix a fer una anàlisi detinguda d'aquesta imatge. En tot cas, un factor clau a tenir en compte quan es parla de motivació és el de la necessitat de millorar la imatge de les matemàtiques.

Més específicament, en aquest capítol intentarem donar resposta a les preguntes següents:

Per què trobem moltes persones adultes amb una excel·lent formació que tenen una mala imatge de les matemàtiques?

Per què sovint les matemàtiques no es consideren cultura?

Per què sovint es contraposen les matemàtiques i les humanitats com si les matemàtiques no fossin humanes?

Per què la imatge de les matemàtiques que es recull a les aules de secundària és sovint força negativa?

Per què el professorat de matemàtiques té tantes dificultats per donar una bona imatge de les matemàtiques a les seves classes?

És possible, tal i com apunta Peter Hilton¹⁵, que el problema sorgeixi ben aviat, durant els primers contactes amb les matemàtiques a l'escola i a casa:

“El problema ve de l'escola elemental on els nens han d'aprendre una aritmètica realment terrible: com més llestos són, més s'avorreixen... Els volem ensenyar a ser màquines de càlcul llestes i precises, quan ja disposem d'aquest tipus de màquines. Les matemàtiques són una altra cosa, consisteixen a aprendre a pensar quantitativament. Per això no m'estranya que els nens tinguin ansietat davant d'aquestes matemàtiques: és una reacció perfectament sana... Em sorprendria que els agradessin!

(15) Extret d'un article de Peter Hilton publicat a El País el 15 de maig de 1989

[...] Les matemàtiques són una activitat molt emotiva, que no es pot mirar amb fredor... Un matemàtic és una persona que cerca models de pensament quantitatiu, relacions ocultes, connexions inesperades, tan aviat lògiques com estètiques, però no té res a veure amb una calculadora.”

La cita següent, de John Allen Paulos¹⁶, ens parla de les matemàtiques que sovint imperen a l'escola i que duen molts alumnes a tenir-ne una mala imatge:

“La matemàtica com a instrument útil, com a manera de pensar o com a font de plaer és completament aliena a la majoria de programes de l'educació elemental.”

La imatge apriorística que els alumnes i les alumnes tenen de les matemàtiques i la imatge que es va forjant amb l'activitat a les aules incideix amb tota seguretat en la seva motivació. Els professors i les professores de matemàtiques no podem tancar els ulls i actuar com si aquest problema no ens afectés. Com ja es comentava a la introducció, de vegades, el prestigi de les matemàtiques s'ha volgut defensar a base de suspendre molt i a més, a les aules s'han practicat unes matemàtiques centrades en exercicis mecànics poc connectats amb la realitat i mancats d'imaginació que són un autèntic martiri per a amplis sectors de l'alumnat.

És el moment de preguntar-nos com podem aconseguir que les matemàtiques escolars siguin vistes des d'una altra perspectiva. És el moment d'estudiar amb profunditat, i des de la perspectiva que dona l'activitat a l'aula, com podem millorar la imatge que es projecta de les matemàtiques amb l'objectiu d'aconseguir una millora del seu aprenentatge.

2. ANÀLISI D'ALGUNES IMATGES I D'ALGUNES NOTÍCIES

2.1. EL PROFESSORAT DE MATEMÀTIQUES FA POR



Si teníem algun dubte sobre la imatge abrupte del professorat de matemàtiques, aquest anunci ens l'aclareix. Es tracta certament d'una simplificació i d'una caricatura, però ens du a constatar que la imatge del professorat de matemàtiques no ha estat massa bona durant molt de temps. Sembla clar que el problema s'ha de relacionar amb l'ús selectiu que s'ha fet i que encara es fa de les matemàtiques i amb la imatge elitista que s'ha donat de la matèria, com si només estigués reservada a algunes minories.

(16) Extret de: PAULOS, J.A. *El hombre anumérico*. Barcelona: Tusquets Editores, 2000.

El professor Claudi Alsina recull el següent acudit al seu llibre *Estimar les matemàtiques*¹⁷:

“L’Institut Nacional de la Salut comunica que a partir d’ara els experiments sota el seu patrocini es duran a terme amb professors de matemàtiques que puntuïn baix i no amb ratolins, ja que això té tres avantatges. El primer és que de professors de matemàtiques que puntuïn baix n’hi ha més. El segon és que no hi ha perill que al públic els facin llàstima. I el tercer és que hi ha coses que una rata no faria mai.”

El cert és que encara avui les qualificacions més baixes a les proves d’accés a la universitat solen ser les de matemàtiques i que aquesta sembla ser una disciplina idònia per seleccionar les persones. La possibilitat de democratitzar l’ensenyament de les matemàtiques, de fer possibles unes matemàtiques escolars per a tots, és un dels reptes més grans que afrontem els professionals de l’ensenyament ara mateix. Si es perpetua la idea que les matemàtiques són una disciplina reservada només per a algunes persones, difícilment podrem canviar la imatge dura que se’n fa la gent. És necessari deixar ben clar que a les aules fem matemàtiques per a tots i hem de trobar estratègies organitzatives, metodològiques i de gestió d’aula que ho permetin. Claudi Alsina¹⁷ reclama que tothom pugui gaudir del bon ús de les matemàtiques:

“Si les matemàtiques es fan obligatòries és pel profund desig de promoure la igualtat d’oportunitats, perquè tothom pugui gaudir dels seus avantatges i ser un potencial beneficiari dels seus bons usos.”

Aquesta és una preocupació internacional que es relaciona amb el paper selectiu atorgat a les matemàtiques durant molt de temps. Ken Clements¹⁸, Núria Gorgorió¹⁹ i Alan Bishop posen l’accent en aquest problema punyent:

“No s’assolirà mai l’equitat en l’educació matemàtica si els educadors i els buròcrates de l’educació no accepten el repte de democratitzar les matemàtiques escolars. No ens podem permetre el luxe de mantenir les matemàtiques escolars com una forma elitista de coneixement, coneixements que esperem que tots els alumnes estudiïn, independentment de si els comprenen o no.”

“Sembla que les matemàtiques siguin un contingut curricular mitjançant el qual es pot justificar la selecció d’elits. És possible que sigui la naturalesa abstracta i el poder generalitzador de les matemàtiques el que permet a alguns alumnes, aquells per als quals els processos del pensament matemàtic resulten fàcils, progressar ràpidament. O potser sigui la manera en què les matemàtiques s’han emprat, i se segueixen emprant, en els processos de selecció per a l’accés a la universitat i, com a conseqüència, per a llocs de més prestigi en la societat, el que les ha convertit en un instrument de selecció. Junt amb aquests factors, la incapacitat que molts adults senten davant de les matemàtiques, a més de la invisibilitat de la seva utilitat en el món laboral i en la participació en la societat, fan que la cultura matemàtica es consideri patrimoni d’una minoria i innecessària per a la majoria. Sigui quin sigui el motiu pel qual la formació matemàtica dels nostres alumnes s’ha convertit en un instrument de selecció, superar la imatge elitista de la cultura matemàtica representa un repte afegit per als professionals que estiguin convençuts de la necessitat d’una educació matemàtica per a tothom.

(17) Extret de: ALSINA, C. *Estimar les matemàtiques*. Barcelona: Columna, 2000.

(18) Extret del capítol elaborat per Ken Clements a: GORGORIÓ, N. [et al.]. *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*. Barcelona: Graó- ICE UAB, 2000.

(19) Extret del capítol elaborat per Núria Gorgorió i Alan Bishop a: GORGORIÓ, N. [et al.]. *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*. Barcelona: Graó- ICE UAB, 2000.

D'altra banda, el futur de la nostra societat depèn de la qualitat de l'educació que proporcionem als nostres alumnes. Segons el nostre parer, un dels reptes més grans de la nostra comunitat professional consisteix a lluitar contra la ignorància i democratitzar el coneixement matemàtic sense el qual una gran part dels nostres joves es troben en franc desavantatge davant d'una societat que canvia constantment.”

2.2. MATEMÀTIQUES REPRESSIVES?



L'acudit anterior sembla dur-nos a la desgraciada imatge de les matemàtiques com a instrument repressiu. Potser tot plegat només té a veure amb allò que s'ha comentat a l'apartat anterior referent a l'ús de les matemàtiques com a instrument selectiu.

A la pàgina següent es presenta un article d'en Quim Monzó que és de fa uns quants anys, quan la ministre d'educació era la Sra. Esperanza Aguirre, l'actual presidenta de la comunitat de Madrid. La ministra va tenir la idea, no massa ben rebuda, d'incorporar la formació militar a les escoles. Tot plegat va quedar en no res. L'articulista, però, va aprofitar l'ocasió per imaginar un institut militaritzat i posats a imaginar una assignatura militaritzada, l'home va triar les matemàtiques. El cert és que l'article és molt divertit i que recull perfectament el to de l'ambient militar que els més granadets hem conegut en fer el servei militar. Des de la perspectiva que ens ocupa, però, ens hem de preguntar si les matemàtiques tenen una imatge marcial. I el fet colpidor és que potser sí que és així i que les matemàtiques, les ciències i la tecnologia s'ajunten en un paquet i s'associen a la guerra. No cal amagar que les matemàtiques es poden aplicar a la guerra de la mateixa manera que es poden aplicar a qualsevol activitat humana. Amb tot, sembla ben agosarat associar-les a la marcialitat o al bel·licisme.

Ardor guerrero

El profesor de primero de ESO alarga la mano hacia la clase.

-A ver, tú -diversos alumnos se miran entre ellos, dudando-. Sí, tú. ¿Con quién crees que estoy hablando?

-A la orden, mi profesor.

-Vamos a ver, mariconazo. Descomposición de un número en factores primos. Lo estudiamos ayer.

-Sí, mi profesor.

-Dijimos que si el número que debemos descomponer es primo no hay duda ni discusión posible, ya que sólo admite dos factores y, por cojones, la descomposición es única. Ejemplo: 31 igual a 1 por 31. ¿Lo recordáis? -todos asienten-. Bien. Pero, ¿y si el número es compuesto? Dime tú qué pasa entonces.

-Si el número es compuesto... Es decir: si es compuesto... Entonces... Mmm... La descomposición será también única pero tendrá más factores...

-¿Que "la" descomposición será única? ¿Cómo quieres que sea única, cabrón? Muy mal. Vas a chupar más imaginarias que tu padre esperando a tu madre. De momento, arrestado quince días. Siéntate. A ver, otro. Tú, hijoputa, sal a la pizarra. ¡Más brío! A ver, escríbeme tres descomposiciones factoriales diferentes del número 72. ¡Ar!

-¿Tres diferentes?

-¡No me repliques porque te meto un puro que te cagas! He dicho que quiero tres descomposiciones factoriales de 72. Y rápido: tiempo uno, tiempo dos, ¡tiempo tres!

-Pues: 72 es igual a 8 por 9... 72 es igual a 6 por 12...

-¡Más deprisa! Pareces un saco de sebo.

-¡Y 72 es igual a...! 72 es igual a...

-¡Fuera de la pizarra, coño! Una semana de preventiva. ¡Te queda más ESO que al palo de la bandera! Y tú, Gómez, ¿qué miras con cara de idiota?

-¡Nada, señor!

-Ya que estás tan aburrido, vamos a distraerte un poco. Ve a la sala de profesores a ver si estoy.

-Pero, profesor, no puede estar usted en la sala de profesores porque está aquí.

-¡Te he dicho que vayas a la sala de profesores a ver si estoy! Ve, comprueba si estoy o no, vuelve y me informas.

-¡Sí, mi profesor!

Gómez saluda, abre la puerta y desaparece. Por la ventana, el profesor contempla cómo la tutora furriel sale del laboratorio. Dos profesores chusqueros conversan junto al aula magna. Al cabo de unos minutos, Gómez regresa y se cuadra ante el profesor.

-¡No está usted en la sala de profesores, mi profesor!

-Bien. Puedes retirarte.

Se oye una corneta. Es el toque de recreo. El profesor contempla orgulloso a sus alumnos. Para ser el segundo día no ha estado mal. Qué equivocados estaban los que al principio se burlaron de la iniciativa ministerial de fomentar el espíritu militar en las escuelas secundarias. Con voz grave da la orden de salir. Los muchachos abandonan el aula en columna de a dos y a paso ligero, cantando a gritos el glorioso himno de primero de ESO.

2.3. HABITUALMENT, LES NOTES DE MATEMÀTIQUES SÓN DOLENTES?

www.lavanguardia.es

LA VANGUARDIA

VIERNES, 4 DE JULIO DE 2003 / N.º 43.704 Fundada en 1881 por don Carlos y don Bartolomé Godó 1 € (con plato, 6,95 € + IVA / con libro, 7 € / solo, 12,95 € + IVA)

La selectividad revela el bajo nivel en ciencias

► La nota media en Matemáticas es del 3,8, la más baja desde 1997

PORCENTAJE DE APROBADOS 85,95%	
Notas medias en ciencias	
MATEMÁTICAS	3,85
MATEMÁTICAS DE SOCIALES	3,60
FÍSICA	4,88
QUÍMICA	4,43

► Aprueban el 88% de estudiantes de la privada y el 84% de la pública • pág. 29

Les notícies de premsa referents a resultats en proves de matemàtiques reforcen sovint la imatge dura i selectiva de la disciplina. És evident, tal i com s'ha dit, que el professorat té certa responsabilitat en la qüestió i que durant molt de temps hi ha hagut certa tendència a puntuar baix i a proposar proves de certa dificultat o allunyades de la realitat a les aules. Tanmateix s'ha de dir també, que aquesta tendència va de baixa i que ara mateix en molts centres educatius la matèria amb més suspesos ja no és la de matemàtiques. Amb tot, la fama de matèria dura trigarà molt a desaparèixer perquè forma part dels tòpics de moltes generacions arreu del món.

La portada recollida en aquest cas, relativa a les proves d'accés a la universitat de 2003, es refereix a un article que posava l'èmfasi en la degradació de l'aprenentatge de les matemàtiques i de les ciències des de la implantació de la reforma educativa. El fet és, però, que si tirem uns anys enrera trobem situacions absolutament similars amb l'alumnat de COU tal i com es pot veure a la notícia de premsa de la pàgina següent. Als alumnes de COU dels anys 1996 i 1997 tampoc els anava molt bé amb la nostra matèria.

És curiós observar (en la imatge de la pàgina següent) que el periodista pren com a títol el pèssim resultat en matemàtiques i no, per exemple, que el 89% de l'alumnat aprova la selectivitat. Aquí, a diferència del que observàvem a l'article anterior, la tesi del periodista ve a ser: "mireu com són de difícils i de selectives les matemàtiques". Cal fer notar que en el títol, la nota de matemàtiques, que en realitat a la taula adjunta és de 3,69 punts, passa a ser de 3,6 punts de tal manera que els matemàtics concloem que el periodista fa una pèssim exercici d'arrodoniment...

El 89% de los estudiantes supera el examen

Los alumnos de selectividad obtienen un promedio de 3,6 en matemáticas

JOSEP GUITART, Barcelona

La nota media de matemáticas obtenida por los alumnos de COU que se han examinado de selectividad es la más baja de los últimos cuatro años: el 3,69. De todas las materias, matemáticas ha sido la que ha sacado la nota más baja. Un estudio de *The Economist* indica que España ocupa el 31º lugar de la clasificación mundial en calificación de las matemáticas, por debajo de Singapur, Corea del Sur y Bulgaria y sólo por encima de otros países, como Portugal, Grecia o Irán. La nota media de la selectividad, conocida ayer, ha quedado este año en 5,75, similar a la del año pasado.

La cifra de aprobados procedentes de COU, 25.759 de un total de 28.833 presentados (el 89,4%) ha sido este año ligeramente inferior a la de junio de 1996 (90,09%). La selectividad de 1997 ha tenido la particularidad de examinar por primera vez a los alumnos de LOGSE, que han conseguido el 85% de aprobados y que también han obtenido una baja nota media en matemáticas: el 3,99.

Si en 1997 los alumnos de LOGSE han representado el 8% de los que se han presentado a la selectividad, para el año que viene se espera que sea el 18%. Una tendencia al alza que se mantendrá hasta el año 2000, cuando desaparecerá el COU y sólo se podrán examinar —salvo los repetidores— los alumnos procedentes de la reforma.

La nota con una media más alta ha sido la de alemán, con el 6,83, de la que sólo se examinaron 61 alumnos. Los dos idiomas clásicos también consiguieron medias altas: griego el 6,66 y latín el 6,04. Curiosamente, los alumnos catalanes han sacado mejor nota media en castellano (6,03) que en catalán (5,41). Una relación similar se produce en los alumnos

de LOGSE: el 5,73 en lengua catalana y el 6,06 en lengua española.

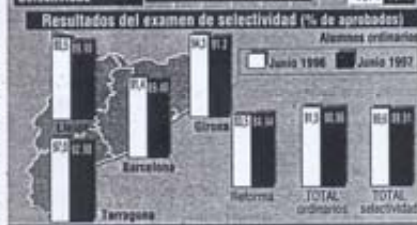
En idioma extranjero, los alumnos de COU han obtenido una nota media de 6,06 en inglés y de 5,83 en francés. Los alumnos de LOGSE han obtenido una media similar en inglés (6,06), pero en francés han llegado al 7,12, que es la media más alta de la selectividad LOGSE junto a dibujo artístico (7,13).

Por provincias, los alumnos de Tarragona, como el año pasado, han sido los que más se han preparado para la selectividad ya que han conseguido el 92,98% de aprobados; seguidos por los de Girona (91,20%), Lleida (89,98) y Barcelona (89,48%).

Este año, el porcentaje de alumnos que han aprobado COU —25.068 de 47.718 matriculados— ha sido ligeramente inferior (52,3%) al de junio de 1996 (53%). Por provincias, los alumnos más aplicados en COU han sido los de Girona (60,70%), seguidos por los de Lleida (57,88%), Tarragona (52,82%) y Barcelona (51,39%).

Los alumnos, que conocerán hoy las notas, tendrán de plazo hasta el día 8 de julio en

Convocatoria de junio	0	1	2	3	4	5	6	1996	1997
Lengua catalana								5,95	5,41
Lengua española								5,91	6,03
Filosofía								5,37	5,57
Inglés								5,90	5,06
Francés								6,33	5,82
Alemán								6,51	6,83
Italiano								7,33	6,47
Matemáticas I								4,62	3,69
Física								5,15	5,11
Química								5,66	6,07
Biología								5,85	6,51
Matemáticas II								5,67	4,82
Hist. contemporánea								4,88	5,34
Literatura catalana								5,35	5,46
Literatura española								5,26	5,14
Geología								5,65	6,18
Dibujo técnico								6,35	5,28
Latín								5,52	6,04
Griego *								6,05	6,66
Historia del arte								5,40	5,28
Comentario de texto								6,16	6,07
MEDIA GLOBAL									
Expediente								6,96	6,99
Selectividad								5,71	5,75



EL PAÍS

las delegaciones territoriales y hasta el 9 en Barcelona para poder cambiar el orden de sus preferencias en la preinscripción.

Manuel Martí Recober, coordinador de la selectividad, anunció ayer que para facilitar la información a los alumnos, el Consejo Interuniversitario ha dis-

puesto en Internet un web donde a partir de hoy se podrá consultar todo lo referente al acceso a cualquier universidad del mundo. También estarán disponibles todas las fechas de preinscripción, las notas de corte y todo lo referente a cambios de centros, becas y ayudas. La dirección es www.gencat.es/cui/accesnet.

2.4. NO HI HA GAIRE PREOCUPACIÓ PELS MALS RESULTATS EN MATEMÀTIQUES

La notícia que es presenta a la pàgina següent fa referència als resultats de les proves TIMSS esmentades al capítol 1. El cert és que el ressò mediàtic dels pobres resultats obtinguts pels alumnes de la mostra espanyola va ser pràcticament nul.

El rebombori dels mals resultats a les proves PISA 2003 ha estat més considerable. Passats uns mesos, però, sembla que s'han oblidat.

En general, la preocupació per la formació matemàtica de l'alumnat és més aviat escassa. De fet, sembla que només preocupen les qualificacions, independentment de si realment denoten deficiències de formació o no.

is, lunes 5 de mayo de 1997

EDUCACIÓN

Un estudio sitúa a los españoles entre los más torpes en matemáticas

SERVIMEDIA, Madrid

Los estudiantes españoles forman parte de los más mediocres en matemáticas, aunque dan la media internacional en ciencias, por delante de Francia y Dinamarca. Hasta un 80% de menores de 13 años han fallado en una simple regla de tres, según un estudio realizado por la Asociación Internacional para la Evaluación del Rendimiento Educativo entre 500.000 escolares de 45 países.

En España se examinó a 7.596 alumnos de octavo curso y 3.741 de séptimo y demostraron tener importantes lagunas. Un 80% dijo que si una lata de guisantes sube de 60 a 75 pesetas, su precio se incrementó un 15%, cuando la respuesta correcta es un 25%. Los resultados no fueron mucho mejores en las grandes potencias occidentales, a pesar de la gran inversión que se hace en esta enseñanza.

Los escolares más aventajados resultaron los de Singapur, seguidos de coreanos y japoneses. También se encuentran entre los 15 primeros los estudiantes de países del Este. Ambos tienen rasgos en común, según el informe: los alumnos aprenden a hacer cálculos mentales antes de trasladarlos al papel y no usan calculadoras. A la cola se sitúan sudafricanos, colombianos e iraníes.

2.5. ANUMERISME I MATEMÀTIQUES ALGORÍSMIQUES



L'acudit recull una realitat punyent: un percentatge significatiu de l'alumnat renuncia a l'activitat matemàtica. És possible que això sigui a causa de la dificultat intrínseca de l'aprenentatge matemàtic. Hem de ser conscients que, sovint, són els mateixos alumnes i la societat els qui demanen una matemàtica algorísmica, de receptes i de fórmules i que hi ha por a pensar, por a fer el ridícul, mandra a l'hora de fer raonaments i poca confiança en un seguit de capacitats inexplorades. També és possible, tal i com apuntava Peter Hilton a la cita recollida en el primer apartat d'aquest capítol, que el problema sorgeixi a primària i que es produeixi una desconexió progressiva de l'alumne envers les matemàtiques, una mena de renúncia a entrar en l'activitat matemàtica que cada cop és més difícil de superar amb la creixent complexitat dels continguts.

2.6. LES MATEMÀTIQUES PODEN SER UN MISTERI



És ben cert que sovint es veuen les matemàtiques, no com a fruit de la raó sinó com a misteri. La dificultat de justificar les coses, d'explicar d'on surten i qui les ha inventades, de fer raonaments de convicció, d'ensenyar els alumnes i les alumnes a pensar i a raonar ha portat bona part del professorat a practicar unes matemàtiques de recepta que duen l'alumnat a tenir una fe cega en les regles. Des d'aquesta perspectiva, el professor es veu com el gestor d'aquests misteris, com el detentor de la litúrgia matemàtica.

Val la pena recordar l'anècdota de l'edat del capità que es recull al llibre *Estudiar matemáticas*²⁰:

Cap als anys 80, un grup d'investigadors francesos en didàctica de les matemàtiques va plantejar el problema següent a grups d'alumnes de 7 a 10 anys:

En un vaixell hi ha 7 cabres i 5 bous. Quina edat té el capità?

La majoria de l'alumnat responien sense dubtar gens ni mica coses com ara:

$7 \times 5 = 35$. El capità té 35 anys.

En alguns casos, no sembla pas que la situació hagi evolucionat gaire. Les matemàtiques escolars porten sovint els alumnes a actuar sense sentit crític, com a autòmats que deleguen tota la responsabilitat de l'aprenentatge en el professorat. Precisament és la fe cega i irreflexiva en els automatismes de les operacions, de les regles, de les fórmules i dels algorismes que, tot sigui dit, de vegades es promou sense ser-ne massa conscient des del professorat, la que du a aquestes matemàtiques sense sentit i sense futur.

2.7. LES MATEMÀTIQUES SÓN ÚTILS?



Sovint és força difícil fer veure la utilitat de les matemàtiques als alumnes. El problema sorgeix perquè les matemàtiques escolars viuen tancades en elles mateixes i no paren prou atenció a les aplicacions que se'n deriven.

(20) Extret de: CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. *Estudiar matemáticas*. Barcelona: Horsoi, 1997.

Es pot afirmar que, en general, la societat no veu molt clarament quina és la utilitat d'aprendre matemàtiques, llevat de les habilitats de càlcul elemental. Per certificar aquestes idees és interessant recordar que el Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu va dur a terme, entre els anys 1998 i 1999, un interessant estudi, que ja s'ha esmentat a la introducció, de títol "*Identificació de les competències bàsiques en l'ensenyament obligatori*"²¹ per encàrrec del Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya. A grans trets, l'estudi consistia a recollir els continguts establerts en el currículum seguit per l'alumnat durant el seu ensenyament obligatori, per distribuir-los entre cinc grans àmbits -matemàtic, social, lingüístic, tecnocientífic i laboral- i entre trenta-quatre subàmbits. A continuació es van concretar i formular els continguts ja com a competències, a partir d'entrevistes realitzades a diversos representants socials. Posteriorment, es van aplicar uns qüestionaris, construïts sobre la base d'aquestes competències, que proporcionaven dades per identificar, com el mateix títol de l'informe anunciava, quines competències bàsiques hauria d'adquirir l'alumnat a l'acabament de la seva escolarització obligatòria. Es van establir rànquings en funció del grau d'importància concedit pels enquestats a cada competència i es van fer anàlisis per determinar quines competències semblaven predir millor l'èxit dels alumnes en la seva vida quotidiana. Finalment, es proposaven conclusions i orientacions.

L'estudi revela que l'àmbit matemàtic és el considerat de menys importància. Les mitjanes de cadascun dels àmbits van ser les següents (la puntuació màxima era de 6 punts): l'àmbit laboral és el més important (5,28) seguit pel social (5,09) i el lingüístic (5). En canvi, el tecnocientífic i el matemàtic són els menys valorats (4,94 i 4,81, respectivament). També són interessants els resultats de l'estudi referents a les primeres vint competències (del total de 245 considerades). Només dues són de matemàtiques: la primera i la vintena, totes dues relacionades amb el càlcul aritmètic.

Aquestes dades denoten la menor consideració que reben les competències matemàtiques i la confusió entre matemàtiques i aritmètica i s'han de relacionar també amb la invisibilitat de les matemàtiques que es poden aplicar a la vida quotidiana.

2.8. LES MATEMÀTIQUES SÓN NOMÉS PER ALS DE CIÈNCIES?

En les darreres dècades, probablement com a fruit de l'especialització de les activitats humanes i científiques, les matemàtiques i les humanitats s'han considerat sovint disciplines antitètiques. De fet, el fenomen és relativament nou, perquè la història ens mostra de manera absolutament clara que les matemàtiques i les humanitats han estat ben juntes durant molts segles.

Només ens cal pensar en Leibniz o en Descartes o, molt més a prop de la nostra època, en Bertrand Rusell, en Alfred Whitehead o en Lewis Carroll perquè ens quedi ben clar que aquesta separació no s'adiu amb la realitat.

(vegeu la imatge de la pàgina següent)

(21) Extret de: *Identificació de les competències bàsiques en l'ensenyament obligatori*. Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu. Barcelona: Departament d'Ensenyament, CD-rom del 2001.



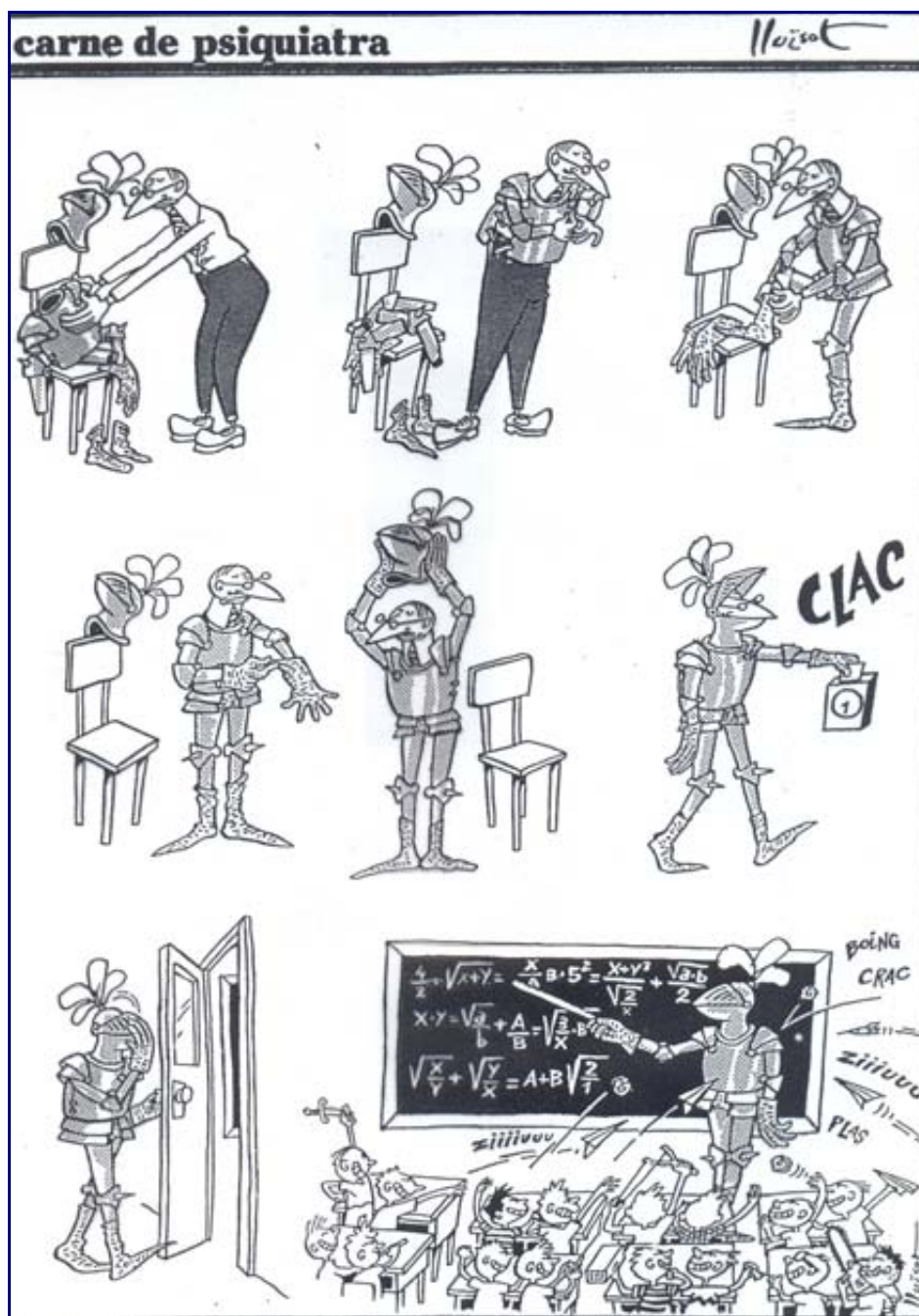
A banda que l'acudit és força enginyós podem extreure'n algunes idees referents a la imatge de les matemàtiques d'enorme vigència:

- Segons sembla, és molt normal (i fins i tot sa?) que “els de lletres” no sàpiguem res de res de matemàtiques.
- Les matemàtiques i els nombres són el mateix.

Potser en el subconscient -o en el conscient- de l'autor i d'alguns dels nostres alumnes i dels seus pares les coses són així de senzilles i les matemàtiques es veuen com l'antítesi de les humanitats i com a sinònim de nombres i d'aritmètica. Sovint trobem alumnes de 12, 13 o 14 anys que ens diuen: “a mi les matemàtiques no m'agraden gens i no se'm donen gens bé perquè sóc de lletres”. Què ha fallat? Què s'ha fet malament? Com és possible que nois i noies tan joves decideixin apartar-se definitivament de l'activitat matemàtica? També trobem força persones adultes cultes i en una posició social important que es vanaglorien de la seva ignorància matemàtica. Ens cal suposar que alguna cosa va fallar en la seva formació matemàtica escolar. Hem de pensar que ningú no els va fer veure la cara humana de les matemàtiques?

2.9. EL PROFESSORAT DE MATEMÀTIQUES NO ÉS A PROP DELS ALUMNES?

Un altre dels tòpics heretats del passat té a veure amb l'allunyament del professorat de matemàtiques de la realitat i dels seus alumnes. Com si el professor anés per un camí i els seus alumnes per un altre. Les coses han canviat molt avui dia, però encara perdura aquesta imatge de distància.



Si ens fixem en l'acudit reproduït, en primer lloc ens hauríem de preguntar si el professorat de matemàtiques és o no carn de psiquiatra. Sigui com sigui, val la pena saber que l'acudit té ja força anys i que és, doncs, anterior a la implantació de la LOGSE.

L'acudit, a banda que sigui bo o dolent i de l'exageració, denota tota una concepció de l'ensenyament i, en particular, de l'ensenyament de les matemàtiques que encara forma part de la imatgeria i dels tòpics de la nostra societat. Val la pena observar-lo amb deteniment:

- El professor és molt lluny dels alumnes i la cuirassa li impedeix tot contacte amb ells. A més, no sembla disposat a contraatacar en cap moment.
- Els alumnes són tots uns salvatges. No n'hi ha ni un que "es porti bé" o que li faci cas. L'ataquen amb tota mena d'instruments, això sí, sense deixar els seus pupitres: hi veiem avions i boles de paper, un dard, un tirador, un tub per llançar grans d'arròs, una totxana ben grossa, una daga i, fins i tot, un que prepara una serra elèctrica!
- L'autor podria haver triat un altre professor per tal de recalcar la seva tesi. Ha triat, però, el de matemàtiques. Potser en guarda un mal record del seu professor de matemàtiques? Potser és la matèria més dura i aspre? Potser les matemàtiques són el paradigma dels mals tràngols a l'escola o a l'institut?
- El professor és un home molt seriós, amb una actitud mecanitzada i burocràtica.
- I perquè l'autor no ha triat una professora? I perquè no hi ha cap nena a l'aula?
- A més, quines matemàtiques explica? Una mena d'àlgebra inversemblant? Ja hi tornem a ser amb la simplificació o el tòpic de matemàtiques igual a aritmètica i àlgebra?

Probablement tots aquests tòpics encara formen part de la mentalitat de l'autor i de la de força alumnes. És ben cert que les coses han canviat en els darrers anys. Amb tot, el tòpic del professor de matemàtiques que es despreocupa del seu alumnat (o que es dedica a sobreviure entre el seu alumnat, com el de l'acudit) i que viu en el seu món no s'ha superat ni de bon tros.

2.10. LES MATEMÀTIQUES I L'ARITMÈTICA SÓN EL MATEIX?



En els apartats anteriors ja s'ha esmentat: hi ha una forta tendència a confondre l'activitat matemàtica amb l'aritmètica. A l'acudit, la pregunta consisteix a sumar nombres i, un cop més, s'equiparen les matemàtiques amb l'aritmètica. D'altra banda, l'única preocupació d'en Calvin és com li semblarà la qüestió a la mestra, no pas el fet de saber-ho fer o no. Com ja s'ha dit, la responsabilitat de l'aprenentatge de les matemàtiques recau inexorablement sobre la mestra. També es pot observar que en Calvin considera que l'activitat matemàtica li és aliena i que no sembla tenir sentit fora de l'àmbit escolar.

L'únic àmbit en el qual l'alumnat de Catalunya obtenia resultats per sobre de la mitjana a les proves PISA de 2003 (vegeu el capítol 1) és el dedicat a mesurar les habilitats relacionades amb la *quantitat*. En canvi, en els àmbits relacionats amb l'*espai*, la *incertesa* i els *canvis i relacions* els

resultats de l'alumnat de la mostra de Catalunya són inferiors a la mitjana del país de l'OCDE. Potser això denota que, en bona part, és el mateix professorat de primària i de secundària el qui contribueix a causar aquesta simplificació que porta a identificar les matemàtiques amb els nombres i amb l'àlgebra i a fer invisibles o poc visibles multitud d'aspectes de la matèria.

2.11. LES MATEMÀTIQUES SÓN MOLT DIFÍCILS?



Bona part de l'alumnat té la tendència a pensar que les matemàtiques són una qüestió molt complicada. I és precisament aquesta tendència la que els du sovint a afrontar els problemes i els exercicis amb por i sense convicció en les seves capacitats.

En aquestes tires de dibuixos, el tigre -que en realitat és un ninot- actua de subconscient del personatge, en Calvin, i el du a complicar-se la vida força més del que cal. L'acudit ens permet extreure les conclusions següents:

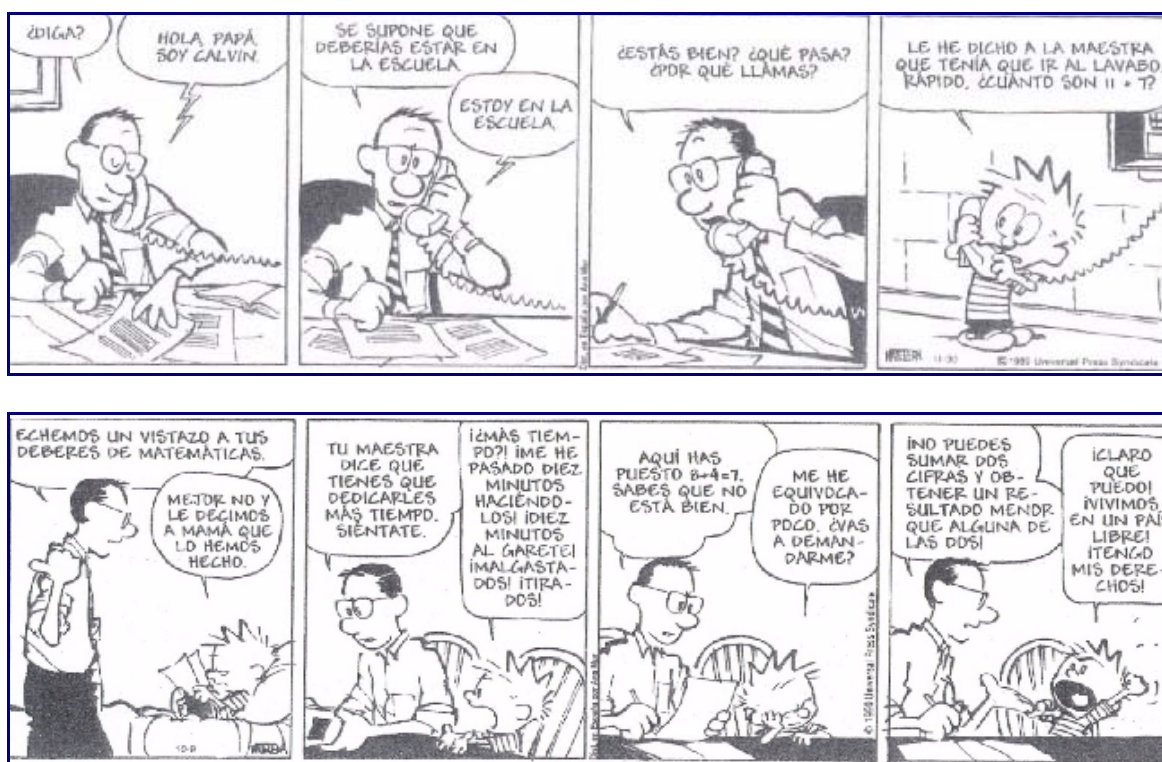
- Per a alguns alumnes les matemàtiques són un assumpte críptic i ben embolicat.
- Força gent pensa que s'hi neix dotat per això de les matemàtiques, és pràcticament instintiu!
- Els nombres imaginaris són terribles. En Calvin fa la mateixa cara que si hagués vist un monstre de l'avert!
- Les matemàtiques tenen truc i els problemes i exercicis que posen els professors estan plens de paranys.

Sembla evident que l'autor no té una imatge molt positiva de les matemàtiques escolars. Ho hauríem de relacionar amb la seva experiència personal com a alumne? Molta gent i molts dels nostres alumnes tenen les mateixes idees al cap.

La dificultat de la simbologia matemàtica i la interpretació diversa dels objectes matemàtics segons el context comporta aquest risc per a l'alumnat. Només amb un treball pacient, reiterat i contextualitzat en el qual l'alumne hagi de prendre la iniciativa serà possible que la majoria de l'alumnat atorgui significat als objectes i als conceptes matemàtics.

De fet, en general, els alumnes i les alumnes són conscients de la importància de les matemàtiques, encara que de vegades el restringeixin només a l'àmbit escolar. També els pares i les mares tenen consciència d'aquesta importància i, moltes vegades, la primera nota en què es fixen és precisament la de matemàtiques. Això confirma la contradicció colpidora amb què ens trobem els professors i les professores de matemàtiques: la matèria es considera important des de la perspectiva acadèmica; el seu aprenentatge, però, no sembla tan rellevant ni tan necessari per a la vida quotidiana.

2.12. LES MATEMÀTIQUES I LES FAMÍLIES



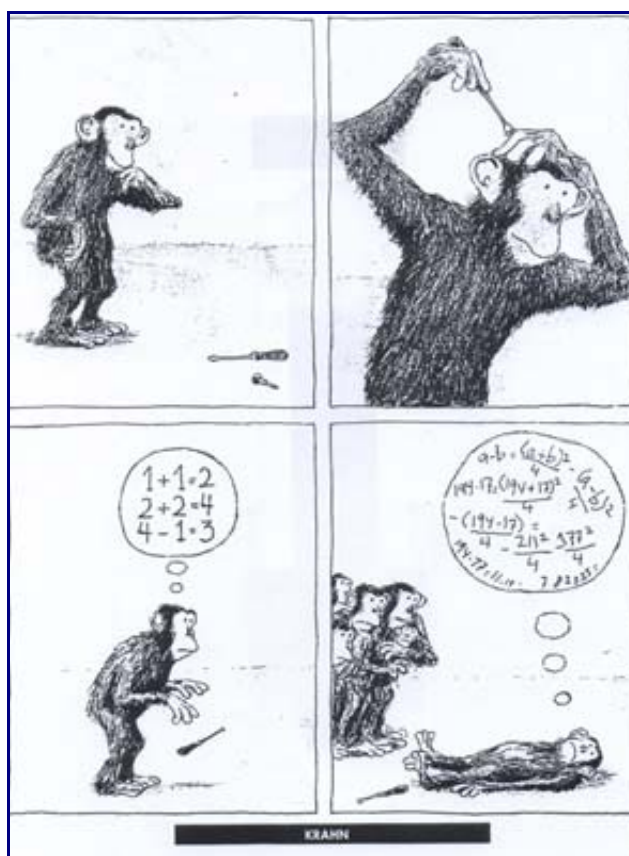
La societat sembla estar prenent consciència que l'ajuda dels pares en el procés d'aprenentatge és essencial. L'acudit, però, torna a portar-nos a la identificació de les matemàtiques amb l'àritmètica, a les preguntes de resposta tancada com a típiques de l'activitat matemàtica i a la por que transmet la matèria.

Des d'aquesta perspectiva, de relació dels alumnes i de les alumnes amb els seus pares en l'àmbit de l'aprenentatge de les matemàtiques, sovint, la imatge que els pares i les mares tenen de la matèria es transmet als fills. És molt possible també que els pares no apreciïn i no entenguin prou clarament les

metodologies innovadores del professorat i que les desqualifiquin en sentir-s'hi insegurs. Evidentment això té un efecte negatiu i crea un problema de difícil solució. No n'hi ha prou, doncs, de convèncer els alumnes amb una nova imatge de les matemàtiques. A més, cal fer tot el possible perquè aquesta imatge arribi també als pares, per la qual cosa s'ha de fer un esforç que permeti explicitar els objectius, les metodologies i les intencions educatives de manera convincent per als pares.

Una reflexió a afegir a partir d'aquestes imatges és que les matemàtiques se solen associar als pares i no a les mares. És un altre tòpic amb arrels ben profundes. Sense anar més lluny, els resultats de matemàtiques a les proves PISA de 2003 són força millors per als nois que per a les noies de la mostra de Catalunya. L'escassa presència de noies a les carreres de l'àmbit tecnològic i a les olimpíades matemàtiques és una altra prova del problema social i cultural que allunya força noies de les matemàtiques.

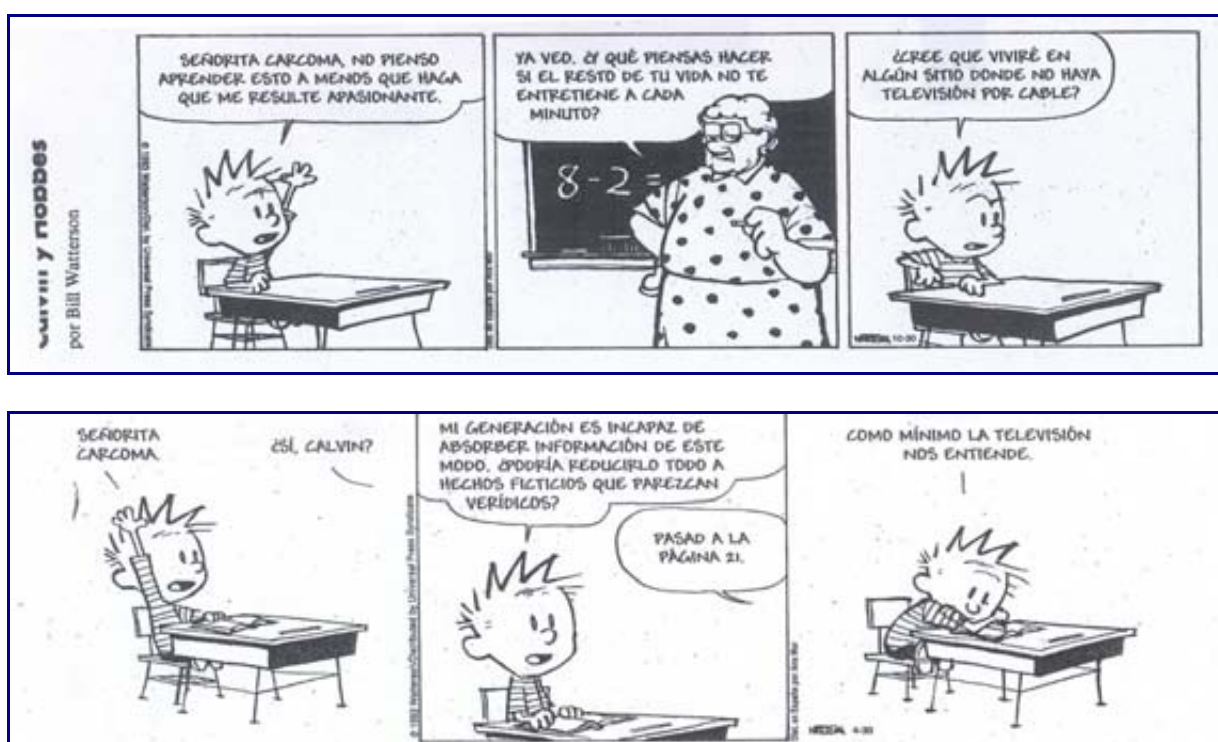
2.13 PENSAR I RAONAR ÉS PERILLÓS?



L'acudit ens du a considerar que l'activitat matemàtica comporta un greu risc per al a la salut mental. Aquest és un vell tòpic que s'afegeix a les més aviat escasses ganes de pensar i de raonar que observem a les aules ara mateix. Sovint, sembla que pensar i raonar no formin part de l'activitat matemàtica que esperen els alumnes a l'aula. A vegades, fa l'efecte que alguns alumnes no saben com n'és de plaent l'exercici del pensament:

“Si tingués la veritat en la meua mà -escrivia Emerson-, la deixaria escapar pel pur plaer de cercar-la. En un experiment clàssic, Sultan, el ximpanzé de Wolfgang Koehler, va descobrir, després de nombrosos esforços inútils per tal d’aconseguir agafar un plàtan col·locat fora de la seva gàbia amb un pal massa curt, que ho podia fer tot i acoblant dos pals buits . El seu descobriment va causar-li “un plaer tan immens” que es va dedicar a repetir el truc i va oblidar de menjar el plàtan. Si això s’esdevé amb una mona, no podem confiar que en nosaltres, l’exercici sa del pensament constitueixi per si mateix una motivació enormement intensa?” ⁽²²⁾

2.14. LA COMPETÈNCIA DE LA TELEVISIÓ



La competència de la televisió s’ha convertit en un problema de conseqüències importants. Els alumnes i les alumnes dediquen moltes hores a veure la televisió (les estadístiques certifiquen que es dediquen més hores a veure televisió que a tenir classe) i això no solament els treu temps d’estudi i de dedicació a l’aprenentatge sinó que els porta, a més, a voler-ho tot fet, a la passivitat, a la recepció pura i simple. La voluntat de treball i l’impuls cognitiu de molts alumnes són ara mateix extremadament baixos i el professorat es veu impotent per superar-ho. Certament, sense l’ajuda efectiva de les famílies hi ha ben poca cosa a fer. De tota manera, un canvi clar de la imatge de les matemàtiques escolars, que permeti acostar-les a la realitat, ha d’ajudar a trencar aquest cercle viciós de desànim i de desmotivació.

(22) Cita d’Arthur Koestler recollida al llibre: DE GUZMÁN, M. *Para pensar mejor*. Barcelona: Labor, 1991.

Les matemàtiques s'han de fer amb temps. Avui sembla que tot es pugui fer i aprendre en cinc minuts i, certament, aquest no és el cas de les matemàtiques. La manca de motivació que mostra en Calvin per al treball a casa és un mal de difícil solució si no es compta amb l'ajuda dels pares.



2.15. LA PSEUDOCIÈNCIA IMPERA

SOCIEDAD
LA VANGUARDIA 37

La maldición del número 53

Un dígito de la lotería de Venecia que se resiste a salir provoca suicidios y alarma social en Italia

MARÍA-PAZ LÓPEZ
Reportera

Esperando en vano el número 53, a algunos italianos se les han ido los ahorros, e incluso la vida. La lotería de Venecia lleva 178 extracciones sin que salga ese número, y su búsqueda desesperada ha llevado a pensionistas, amas de casa, empresarios y profesionales a gastarse casi 4.000 millones de euros. La ruina sobrevinida ya ha provocado suicidios. Si la cosa no cambia a las ocho de esta noche (se realizan extracciones dos veces por semana, el miércoles y el sábado), proseguirá esta fiebre, sobre la que empieza a cundir la alarma.

La lotería funciona en Italia del siguiente modo: el jugador apuesta una cantidad mínima de un euro intentando acertar, según distintas modalidades, al menos uno de cinco números comprendidos entre el 1 y el 90. En realidad, no se trata de una lotería única, sino de diez, bautizadas con los nombres de diez ciudades (Bari, Cagliari, Florencia, Génova, Milán, Nápoles, Palermo, Roma, Turín y Venecia), y todas ellas celebran sus extracciones dos veces por semana.

En los bares y estancos donde se pueden hacer las apuestas, y en páginas de internet de amantes de la numerología, proliferan estadísticas

sobre números aún por salir. Récord aplastante: el número 53 de la lotería de Venecia, que lleva 178 extracciones sin aparecer. Ignorando toda lógica —según la cual en cada extracción todos los números tienen la misma probabilidad de ser extraídos—, los jugadores consideran que el 53 va a salir de modo inminente, y las apuestas suben, y los dramas no cesan.

El pasado 12 de enero, un ama de casa de Massa (región de Toscana) se suicidó arrojándose al mar tras perder todos sus ahorros apostando

Los italianos han apostado ya 4.000 millones al 53, y hay voces pidiendo que sea retirado ☞

al 53 de Venecia. El pasado jueves, un agente de seguros de Florencia, ahogado por las deudas contraídas para jugar al número veneciano, mató a su mujer y a su hijo y luego se suicidó. Otras personas han hipotecado su casa, se han pulido el sueldo a escondidas del cónyuge, o han cometido delitos, como un ama de casa de Livorno, denunciada por firmar cheques falsos de 50.000 euros para compensar sus apuestas.

Visto el delirio, la asociación de

consumidores Codacons ha pedido públicamente que se elimine de la lotería veneciana el número 53 por causar "desorden público", y ha tipificado varios delitos de los que se podría acusar a personas determinadas: "Concurso en instigación al suicidio, violencia privada, instigación a la usura, fraude comercial, concurso en bancarrota familiar, y concurso en abuso de la credulidad popular". Si no puede eliminarse el número, la Codacons pide que, al menos, se limiten las apuestas al 53 a un máximo de mil euros. También ha intervenido el cardenal Ennio Antonelli, arzobispo de Florencia, denunciando que "no es necesario alimentar la pasión del juego".

Según la tradición, la lotería italiana nació en 1550 en Génova —donde se apostó por la elección de cinco ministros de entre 90 candidatos—, pero el primer juego oficial se celebró el 9 de septiembre de 1682 en Nápoles. El modo de extracción conserva un encanto rudimentario: un niño con los ojos vendados mete la mano en un saco con 90 bolas huecas (dentro de cada bola hay un papeletito con un número) y extrae cinco bolas.

La RAI transmite la lotería de Roma, pero, obviamente, hay diez niños que hacen extracciones para cada una de las loterías, y el apostante escoge por qué ciudad apuesta independientemente de su lugar de residencia. ●

Tot sovint trobem als diaris notícies que denoten un profund desconeixement de les matemàtiques. Les lleis de la probabilitat i de l'atzar, per exemple, ben conegudes des de fa anys, s'ignoren completament i es dóna crèdit a qualsevol opinió sense cap mena de rigor. L'astrologia, la

quiromància, el tarot i tota mena de paraciències semblen tenir més crèdit que els matemàtics i els científics a la premsa i a les televisions. Tot plegat no ajuda pas el professorat que ha de remar a contracorrent.



Aquesta altra notícia, recollida al Periódico de Catalunya, es fa ressò de la pretesa demostració de la conjectura de Goldbach per part del Sr. Raluy, pallasso de professió. El greu del cas no és que aquest senyor pretengui haver demostrat un repte matemàtic que té més de dos-cents anys d'antiguitat i al qual han dedicat enormes esforços els més eminents especialistes en teoria de nombres. El que és realment colpidor, és que la periodista o el diari no s'hagin dignat a estudiar la fiabilitat de la qüestió fent una trucada a qualsevol facultat de matemàtiques.

El cert és que la notícia no s'ha de considerar un accident aïllat. Es troben força sovint disbarats de característiques similars. Cal dir també que el món acadèmic sol deixar de banda totes aquestes qüestions i que ni tan sols respon o protesta davant de situacions com aquestes. De tot plegat es dedueix que els matemàtics no tenim molt de crèdit i que no estem massa disposats a intervenir en els mitjans de comunicació.

2.16. EXCUSATIO NON PETITA ACUSATIO MANIFESTA

NI OGRO, NI ABURRIDAS

TEXTO: MALÉN AZNÁREZ

Ni ogro, ni aburridas, rechazan contundentes los expertos el *sambenito* de las matemáticas, la materia que ha sido para generaciones de españoles, y aún lo es para muchos, el *coco* y pesadilla de sus años de estudiante. Una pesadilla irremediable porque los niños aprenden desde bien pequeños que la primera nota por la que se interesan sus padres es por la de matemáticas. Y una rémora de por vida, porque su mal conocimiento de base es causa de muchos talentos perdidos para la ciencia.

Roberto, el niño protagonista de *El diablo de los números*, aborrece las matemáticas y sus problemas, "una forma idiota de matar el tiempo". Roberto es un calco de tantísimos niños que ahora y antes se enfrentaron a los números como una abstracción imposible de entender o una rutina repetitiva de mortal aburrimiento. ¿Pero tiene que ser así? "En absoluto", ríe Miguel de Guzmán, catedrático de Análisis Matemático de la Universidad Complutense de Madrid. "Lo lúdico, si se entiende de una forma amplia, implica curiosidad, y la matemática empezó y subsiste por curiosidad. Es curiosidad y belleza. Hay montones de cosas, como los fractales, el caos, los cuadros mágicos, que son matemática profunda y belleza. Los matemáticos hacen cosas porque les divierten y lo pasan bien, pero la sociedad está infectada por esa especie de aborrecimiento a las matemáticas". "Yo no diría que siguen siendo el *coco* porque cada día hay más chavales que las encuentran divertidas e interesantes. Hay un cambio muy importante en la enseñanza primaria, en secundaria ya es más difícil", mantiene Maquè Edo, profesora de la Facultad de

Ciencias de la Educación de la Universidad Autónoma de Barcelona y que se dedica a la formación de futuros maestros. Para De Guzmán, autor de conocidos libros, como *Aventuras matemáticas*, traducido a numerosos idiomas, entre ellos el chino y el finlandés, "lo que puede

hacer la matemática para formar la personalidad es dar ideas claras con respecto a la realidad. Uno se enfrenta con ella a objetos sencillos, mucho más que la realidad, que es muy compleja. Y ahí es donde podemos aprender a pensar, a adquirir el conocimiento a través de pruebas, y el asenso, no porque te lo impongan, sino porque lo ves. Igual que el sentido de la demostración, cuando una cosa está demostrada y cuando no". De Guzmán, que llegó a las matemáticas "a pesar de los profesores", insiste en que el principal problema de su actual aprendizaje es el aburrimiento que suscitan. "La mayor parte de los estudiantes simplemente las soporta, sabe que sin ellas no va a aprobar la selectividad o elegir la carrera que prefiere". El autor de *Cuentos con cuentas*, libro lleno de juegos y acertijos, añade que existe otra gran barrera, la abstracción, que sigue dominando la enseñanza primaria y secundaria. "La abstracción es totalmente absurda, no sólo porque le cuesta al niño, sino porque es una idiotez. Hay cosas agradables y divertidas para que los niños se acerquen a las matemáticas como la geometría, la visión, la intuición

espacial, que es como empezó. Hay que poner en sus manos calculadoras y quitarles las tareas de pura rutina. Lo importante es que sepan lo que significa la multiplicación o la suma". Maquè Edo insiste en el placer de enseñar matemáticas. ¿Cómo?: "Sin agobiar a los niños, sin machacar, despacito, y sobre todo a través de juegos y retos interesantes. Y en las primeras edades no es muy difícil con juegos de mesa y folclor. Por ejemplo, con los números. En los cuentos, los números que salen más son el 3 y el 7: los tres cerditos, los siete enanitos, las siete cabriollas, y son más complicados de entender para ellos que el 1 y el 2, que los ven en su cuerpo: dos manos, dos ojos, una nariz, o el 5, que está en los dedos. El 3 lo tienen que entender fuera de ellos, como el 7, y para eso tenemos muchos cuentos y canciones". Eugenio Hernández, profesor de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid y traductor del conocido libro *Practical purposes* (*Las matemáticas de la vida cotidiana*), insiste en algo que él practica: "Acercar las matemáticas a la vida cotidiana porque estamos rodeados de ellas". Y pone un ejemplo: "Uno puede enseñar el sistema métrico, pero ¿para qué sirven las unidades de medida?, pues para medir los lugares que habitas, porque si cuando vas a comprar un piso te dicen que tiene 100 m² y sólo tiene 80, pues te están timando un montón de dinero. Cuando se estudia el sistema métrico decimal es razonable pedir a los alumnos que midan su casa. Yo a los míos les pongo en contacto con los códigos numéricos o de barras que aparecen por todas partes, hasta en el supermercado. O les explico cómo un ordenador no comete errores cuando tiene tanta información, porque lleva códigos que la corrigen". □



LOS PUENTES DE KÖNIGSBERG. Es uno de los acertijos clásicos de las matemáticas, enunciado nada menos que por Euler: en la ciudad de Königsberg hay una isla, Kneiphof, rodeada por dos brazos del río Pregel. Hay siete puentes que los cruzan (ver la figura). ¿Puede una persona

realizar un paseo de modo que cruce cada uno de los puentes una sola vez? Euler decía: "Se me ha informado de que mientras unos negaban la posibilidad de hacerlo y otros lo dudaban, nadie creía que fuera posible realmente".

El títol de l'article ens porta a pensar que per a una majoria de persones les matemàtiques deuen ser un ogre i un autèntic avorriment. De fet, tot sovint, els articles que pretenen donar una imatge positiva de les matemàtiques han de començar demanant excuses. Concretament, aquest article va

aparèixer a la revista dominical del País l'any 1998 a les portes de la celebració de l'any mundial de les matemàtiques del 2000 i fent-se ressò de la publicació del llibre del reputat periodista i assagista alemany Hans Magnus Enzensberger, *El dimoni dels nombres*²³. Aquest llibre va tenir cert èxit de vendes a tot al món. Vist amb ulls de matemàtic, però, el missatge que transmet és ambigu. El llibre ja tenia un subtítol demolidor: “Un llibre per a tots els qui tenen por de les Matemàtiques”. A més, a la història del llibre, hi apareix un professor de matemàtiques absolutament terrorífic que transmet una imatge abominable de la matèria i ha de ser un dimoniet el qui faci veure al jove protagonista què són realment les matemàtiques. Finalment també cal destacar el poc rigor i la superficialitat amb què es tracten algunes qüestions. Tot plegat ens porta a concloure que no sembla que llibres com aquest puguin ajudar a canviar la imatge de les matemàtiques.

2.17. NOTÍCIES POSITIVES?

La obsesión por el problema

Desde su infancia Andrew Wiles trabajó para resolver el último Teorema de Fermat

GINA KOLATA (NYT)

El doctor Andrew Wiles, un hombre retraído, apacible y de tímida sonrisa, trabajó en secreto durante siete años para resolver el problema matemático más famoso de los últimos tiempos, el Último Teorema de Fermat. Un reto que desconcertó a los mejores matemáticos del mundo durante más de 300 años.

La semana pasada, Wiles anunció que había comprobado el teorema. Esta hazaña lleva al profesor de 40 años de la Universidad de Princeton a la cima de su carrera y le coloca junto a los más grandes matemáticos de la historia.

[El teorema se refiere a las ecuaciones del tipo $x^n + y^n = z^n$. En el caso de $n=2$ resulta el familiar teorema de Pitágoras sobre la relación entre los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Según Fermat, no existen soluciones a este tipo de ecuaciones cuando n es un número entero superior a 2]. En la primera entrevista que concedió después de anunciar su logro, Wiles declaró que comprobar el teorema fue cuestión de estar en el lugar y en el momento justo, de estar obsesionado por el problema.

Desde los diez años

Cuando tenía 10 años, Wiles descubrió en un libro de una biblioteca de Cambridge, Inglaterra, el

El matemático Andrew Wiles, en Cambridge, tras presentar su demostración del teorema.

matemático profesional, descubrió que para resolverlo no bastaba el trabajo entusiasta de un quinceañero. Muchos matemáticos habían intentado comprobar el teorema y, aunque nunca pudieron, consiguieron algunos avances. Hace unos diez años, Wiles conoció los logros que en la cuestión consiguieron Fermat, Euler, Kummer, Taniyama y Shimura. Desde

No llevó ordenador ni puso teléfono. Necesitaba silencio en el ático para poder trabajar.

“Si Wiles hubiera dicho que estaba resolviendo el Teorema, muchos expertos lo hubieran llamado para trabajar con él, pero él quería resolverlo por sí mismo”, dijo Simon Kochen, director del departamento de matemáticas de la Universidad de Princeton.

la Universidad de Cambridge (Reino Unido) la semana pasada, pero hasta la última conferencia no comunicó a sus colegas la gran noticia. Desde entonces, miles de felicitaciones le llegan a su oficina en la ciudad de Princeton, la misma en la que vivió Albert Einstein.

Wiles regresó a casa el viernes para celebrar una fiesta y pasar

Aquest article, publicat l'any 1995 amb motiu de la demostració del darrer teorema de Fermat per Andrew Wiles, ens pot portar a veure l'activitat d'investigació matemàtica com una mena de bogeria reservada a persones que ja de petites estaven obsessionades per aquestes qüestions.

(23) ENZENSBERGER, H.M.. *El dimoni dels nombres*. Barcelona: Barcanova-Siruela, 1998

El titular és molt revelador. No hi diu pas: “*Demostrat un dels teoremes més cèlebres de les matemàtiques*” o qualsevol cosa equivalent, sinó “*La obsesión por el problema*”. Aprenem després que el Sr. Wiles tenia una dèria per la qüestió des de ben petit, la qual cosa confirma que es tracta d’un personatge ben estrany. La fotografia distribuïda per Associated Press tampoc no és afortunada i ens ofereix una imatge de Wiles que sembla concordar amb la tesi del periodista. El tòpic del matemàtic distret, llunàtic, despistat, desconnectat del món es confirma, doncs, plenament.

2.18. LES MATEMÀTIQUES TAMBÉ TENEN DEFENSORS

LA GRAN EINA

SI EL SISTEMA educatiu deixa que els seus currículums es vegin influenciats pels desitjos i les modes dels alumnes, les matemàtiques arribaran a ser anècdota. «¡Que calculin ells!», diran. I tan tranquils, tu.

Ja tornen a ser a classe. Ja tornem a tenir inquietuds raonables i preocupacions reglades. Els fills, quan xipollegen en el llarg temps de l'oci, exigeixen dels pares una atenció excessiva, ja sigui per evitar que posin els dits a l'endoll o per vigilar que no es posin certes substàncies al cos. Fills petits, problemes petits. Fills grans, problemes grans. Així ho recordava ahir el Fabra, un dels personatges d'El cor de la ciutat que van destil·lant, dins de les seves desgràcies homèriques, una mica de sentit comú.

Doncs ja tenim els fills una altra vegada al davant de les pissarres i, com un ritual que es repeteix cada any, els nens surten per la tele. Juntament amb l'alegria del retrobament amb els companys hem tornat a sentir: «A mi no m'agraden les matemàtiques. Prefereixo l'esport». Deixant de costat aquesta recurrent mania a considerar l'esport com el

vèrtex més gloriós de la formació, el que és curiós és la normalitat amb què s'admet que els nens de totes les edats manifestin el bloqueig mental a les matemàtiques. I no són pocs els pares que ja donen aquesta matèria per perduda, com si les matemàtiques fossin un peatge antic, una assignatura que els evoca la cançoneta de les taules de multiplicar o de dividir. En moltes famílies es considera que les matemàtiques només es poden aprovar o bé amb un cinc pelat o bé per esgotament. Els professors acaben acceptant rebaixar el nivell coaccionats per la pressió paterna. Quin càrrec de consciència privar la societat de brillants advocats o metges per culpa d'unes matemàtiques rigorosament avaluades.

Aquesta numerofòbia es podria interpretar com un esclafidor amor de l'alumnat cap a matèries humanístiques. Però tampoc és així. Aquella famosa frase atribuïda a un jerarca franquista que deia «menys llatí i més esport» ha sobreviscut al seu autor. El llatí ja ni tan sols se sent en la litúrgia catòlica. I en el fons d'aquestes assignatures passades de moda s'hi troba un curiós concepte

àmpliament interioritzat pel cos escolar: és el concepte de la utilitat a curt termini. Ni el llatí serveix per lligar ni l'estudi de les matemàtiques pot compensar la facilitat de la calculadora electrònica. El dia que al món se li acabin les piles serem incapaços de resoldre una arrel quadrada.

Jo també era d'aquests. I l'edat m'ha portat a creure que els números són menys traidors que les paraules. M'altimento d'aquestes, però són ells els que em tranquil·litzen. Les matemàtiques ens permeten la comprensió d'allò que els sentits ni sospiten. Les matemàtiques són el verdader idioma universal que salta continents i que unifica el saber dels segles. No hi ha gaire distància entre un nen que afirma que no li agraden les matemàtiques i l'home que vociferava: «Que mori la intel·ligència». Només la domesticació de les xifres pot equilibrar la fe cega de l'informàtic, el miratge del poeta o l'arrogància del científic. Les matemàtiques són l'eina que ens permet veure el que ni tan sols intuïm. Es mereixen un plus de prestigi. La vergonya i el dolor de l'analfabet van més enllà de la lectura.

L'article de Joan Barril ens parla de numerofòbia i ens presenten les matemàtiques com la gran eina. No són molts els articles que provenen de persones allunyades de l'àmbit matemàtic que ofereixen una imatge positiva de la matèria. Amb tot, cal fer notar també, que el Sr. Barril torna a insistir a identificar les matemàtiques amb els nombres.

Un altre excel·lent article elogiós per a les matemàtiques i no escrit per un matemàtic és el de José Manuel Sánchez-Ron (tot sigui dit, el professor Sánchez-Ron és catedràtic d'història de la ciència del Departamento de Historia de la Ciencia a la Universidad Autónoma de Madrid) aparegut al diari El País el 27 de setembre de 2003 amb el títol, prou explícit, “Vivan las matemáticas!” que es reproduceix a continuació:

“Vivan las matemáticas!”

En julio pasado se hizo pública la noticia de que la mayoría de los alumnos de selectividad suspendió en Matemáticas; y tampoco eran muy satisfactorios los resultados en otras asignaturas científicas, como la Química o la Física. "Nuestro futuro está en peligro. O desarrollamos la capacidad en ciencia y tecnología o nos quedamos atrás",

manifestaron algunos, como el presidente de la Sociedad Española de Física. En un mundo en el que la ciencia y la tecnología afectan a nuestras vidas y economías en formas tan intensas como extendidas, es difícil no solidarizarse con semejantes manifestaciones; no darse cuenta de que nuestras limitaciones científicas de hoy se plasmarán mañana en dependencia tecnológica, lo que es tanto como decir en limitaciones económicas en el comercio internacional y en incapacidad de liderazgo mundial. Pero no es de estas cosas de lo que quiero hablar hoy.

Nos escandalizamos, o al menos algunos se escandalizan, al saber de los malos resultados de nuestros jóvenes en matemáticas, pero ¿no recordamos la mala fama social, la leyenda negra, que desde hace generaciones afecta a esta venerable, varias veces milenaria, materia? ¿Es que alguien no ha oído, cuando no dicho él mismo, alguna vez: "pobre hijo/a mío/a, que debe padecer ese tormento que es estudiar matemáticas"? Es consolador asignar las responsabilidades a otros cuando nos encontramos con un problema, y desde luego en materia de la enseñanza pública de Ciencias existen motivos sobrados para criticar un sistema que está permitiendo que las asignaturas científicas decaigan de una forma tan preocupante como escandalosa, pero en lo que a la imagen social de las matemáticas el problema no es ni nuevo ni institucional.

Malo es para el futuro del país tantos suspensos en Matemáticas, pero peor, mucho peor, es lo que todos esos jóvenes - y los millones de adultos que comparten con ellos no suspensos, pero sí ignorancia- no aprenden ni comprenden de la ciencia de Pitágoras, Euclides, Newton, Leibniz, Euler, Cauchy, Hilbert o Gödel, por citar algunos. No se trata sólo de que las matemáticas están en todas partes, que por alguna razón (que no comprendemos) la Naturaleza obedezca, o parezca obedecer, leyes que se expresan en términos matemáticos. "*¿Cómo puede ser que la matemática -un producto del pensamiento humano independiente de la experiencia- se adecúe tan admirablemente a los objetos de la realidad?*", se preguntaba Albert Einstein en 1921. Miremos por donde miremos nos las encontramos. Ya sea contemplando el alzado del Partenón, que muestra varios ejemplos de lo que los matemáticos denominan "relaciones áureas"; en las leyes que dan cuenta tanto del movimiento expansivo del majestuoso y gigantesco universo como de las oscilaciones de un humilde péndulo; en los fenómenos altamente sensibles a las condiciones iniciales (fenómenos caóticos se denominan) como es el tiempo meteorológico; en los procesos estocásticos que subyacen en las operaciones de corredores de bolsa que ejecutan órdenes y compran y venden títulos continuamente, o en la geometría de infinitud de estructuras naturales y sociales, desde el perfil de las costas hasta la red arbórea del sistema venoso, para cuya descripción son extremadamente útiles los denominados *fractales*.

No dudo, sin embargo, que a pesar de la fuerza de este último argumento, de que se acepte que, efectivamente, las matemáticas permiten comprender mejor el mundo, muchos -acaso la mayoría- pensarán que nadie puede saber todo, y que no por no comprender la electrónica y matemáticas que se hallan detrás del funcionamiento de una, por ejemplo, tarjeta de crédito la utilizamos peor. ¿No vivimos, al fin y al cabo, en un mundo de especialistas? Ahora bien, aun aceptando este mezquino modo de pensar, existe un poderoso argumento a favor de las matemáticas que yo quiero recordar aquí. Pocas disciplinas, técnicas o instrumentos pueden competir con las matemáticas a la hora de tomar consciencia de las habilidades intelectuales, cognitivas, que posee nuestra especie. Sostengo que las matemáticas dan lugar a experiencias inolvidables; experiencias, *al alcance de cualquier inteligencia normal*, como pueden ser: comprender que la raíz cuadrada de 2 no se puede escribir en base a los familiares números enteros (ni siquiera como un cociente de ellos); entender la demostración del teorema de Pitágoras; darse cuenta de que existen diferentes "grados" de infinito; o instruirse en los fundamentos y posibilidades que abre el cálculo diferencial e integral. Nadie es igual después de haber pasado por semejantes experiencias; en cierto sentido le cambian a uno la vida, porque se da cuenta de lo que es capaz de hacer, de que existe un universo mental al que puede acceder, aunque sólo sea asomándose a territorios que indudablemente esconden más tesoros, muchos, la mayoría, inaccesibles sin someterse, ahora ya sí, a un largo y exigente proceso educativo. El primer amor, contemplar un cuadro de Velázquez o de Picasso, leer un texto de Cervantes o de Neruda, escuchar una pieza de Mozart, una canción de los Beatles o de quién sabe que otro grupo o cantante (¿Sabina, por qué no?), puede suscitar en cualquiera emociones o sensaciones inolvidables, pero no del tipo de las que provocan las matemáticas, posiblemente el único, o el mejor, instrumento para darnos cuenta de que aunque no seamos una especie elegida, sí lo somos privilegiada en lo que a posibilidades y variedad de comprensión se refiere. Algo de esto quería decir Jacobi cuando escribió a Legendre en julio de 1830: "*La finalidad primordial de las matemáticas*" *no consiste "en su utilidad pública y en la explicación de los fenómenos naturales... rendir honor al espíritu humano"*.

Una cultura que no comprende, dificulta, o que no fomenta el acceso a tales posibilidades es una cultura miope, torpe, limitada. Unos padres que no se esfuerzan para que sus hijos puedan disfrutar de todo lo que las matemáticas elementales ofrecen, les sirven mal, no importa que se desvivan por poner a su alcance todo tipo de esas "maravillas" que la sociedad actual ha creado. Sumergidos como estamos en la actualidad en nuestro país en un mundo mediático en el que prolifera lo abominable, el chismorreo más odioso, las matemáticas nos permiten-a todos- darnos cuenta de lo poderosos que son nuestros cerebros, al igual de que existen muy diversos y entretenidos universos cognitivos que a nadie están vedados. No se necesita ser Rembrandt, Beethoven o Kafka para comprender lo que son y significan la pintura, la música o la literatura. Tampoco ser Gauss o Poincaré para comprender qué son y qué significan las matemáticas. No está tampoco de más recordar también que, como escribió el matemático británico Godfrey Hardy en su justamente célebre *Apología de un matemático* (1940): "*Las civilizaciones babilónica y asiria han perecido... pero*

sus matemáticas son todavía interesantes y el sistema sexagesimal de numeración se utiliza todavía en astronomía... Las matemáticas griegas 'perduran' más incluso que la literatura griega. Arquímedes será recordado cuando Esquilo haya sido olvidado, porque las lenguas mueren y las ideas matemáticas no". Ojalá Esquilo y la buena literatura nunca sea olvidada, esforcémonos en ello al igual que en conservar lo más sanos posibles nuestros idiomas, pero que nadie dude de que lo que nunca morirá serán, como señalaba Hardy, verdades matemáticas como el teorema de Pitágoras o lo que es y representa el número pi

3. ALGUNES CONCLUSIONS

El diagnòstic que es desprèn de les imatges i de les notícies recollides és més aviat descoratjador i confirma les sospites que la imatge de les matemàtiques no predisposa a la motivació de l'alumnat.

Podem concloure que, en general, les matemàtiques s'identifiquen amb els nombres, amb l'aritmètica i amb les rutines del càlcul i dels algorismes, de manera que els altres aspectes de l'activitat matemàtica passen desapercebuts. A més, sovint, es pensa que, per això dels nombres, s'hi neix, de tal manera que l'aprenentatge perd gran part del seu sentit: si vals per estudiar matemàtiques, bé; en cas contrari, no hi ha res a fer, estàs condemnat a ser analfabet matemàtic. Des d'aquesta perspectiva, l'activitat matemàtica estaria reservada a una minoria de persones sospitoses de patir alguna anomalia impròpia dels éssers humans. Sembla que les matemàtiques no siguin humanes, sembla que siguin una entitat externa, preexistent, dura com una roca i dissenyada per al martiri de bona part de l'alumnat. Des d'aquesta òptica, es conclou també que les humanitats són l'antítesi de les matemàtiques i s'arriba a pensar que ser analfabet matemàtic és encomiable. Sembla que les matemàtiques siguin inhumanes i fredes, com si la raó no fos part intrínseca de la humanitat.

A tot això s'hi afegeix un fort component de rebuig causat per l'ús de les matemàtiques com a instrument de selecció i per la tendència del professorat de matemàtiques a ser primmirat amb les qualificacions. El cert és que tot i que aquesta pràctica va de baixa, molts alumnes defugen les matemàtiques perquè consideren que són molt difícils d'aprovar. Fins i tot les notícies amb voluntat positiva contenen elements adversos i semblen demanar excuses ja d'entrada per parlar d'una qüestió tan abrupta com les matemàtiques.

La part positiva de tot plegat és que, encara que sembli contradictori, hi ha respecte per les matemàtiques i consciència que l'aplicació que se n'ha fet a la ciència ha permès el desenvolupament tecnològic

El resum de tots aquests tòpics i estereotips podria ser el següent:

1. Les matemàtiques s'identifiquen amb l'aritmètica i amb l'àlgebra.

Se sol pensar que els matemàtics treballen amb nombres molt grans i que manipulen llargues expressions algèbriques. A més, gran part de l'activitat matemàtica que finalment s'aplicarà a la vida quotidiana no es considera com a tal i passa desapercebuda. Així, la geometria en general, l'estudi de les lleis de la probabilitat i de l'atzar, la utilització del llenguatge funcional com a mitjà de comunicació i altres aspectes rellevants de l'activitat matemàtica escolar acaben per desaparèixer sota l'espessa capa dels nombres i de l'àlgebra.

2. Les matemàtiques tenen una imatge selectiva i fins i tot repressiva.

La utilització de les matemàtiques per a la selecció de persones ha tingut com a efecte advers aquest imatge dura, selectiva i repressiva de la matèria. A això també

hi han contribuït sectors significatius del professorat amb certa tendència a ser molt primmirats i estrictes a l'hora de puntuar.

3. Les matemàtiques es consideren molt difícils. També es considera que l'habilitat per fer matemàtiques és genètica.

Una bona part de l'alumnat pensa que les matemàtiques són molt difícils i que només algunes persones estan capacitades per treballar-les. Això els du sovint a un bloqueig inicial per al treball de la matèria. A més, aquest bloqueig inicial té conseqüències molt greus per a algunes persones ja que els impedeix entrar en la majoria d'activitats matemàtiques, per senzilles que siguin, en creure que no aconseguiran entendre res de res. Es tracta d'un cercle viciós de difícil solució.

4. Sovint, es considera que les matemàtiques són una disciplina per a bojos.

El tòpic del matemàtic tancat en si mateix, despistat i desconnectat del món, sembla força vigent tot i l'evolució apreciable cap a la normalització que s'ha viscut darrerament.

5. S'actua com si la història de les matemàtiques no existís.

Bona part dels alumnes i de les alumnes semblen actuar com si la història de les matemàtiques no existís. Sembla com si les matemàtiques estiguessin escrites des de sempre i veuen el professorat de l'àrea com els transmissors d'aquest coneixement misteriós. Certament, els professors de matemàtiques també hi tenim responsabilitat en aquesta qüestió per la tendència a amagar la història dels conceptes i dels objectes matemàtics en considerar prioritaris altres aspectes de la matèria.

6. Sovint es considera que les matemàtiques són fredes i inhumanes. També es considera que són l'antítesi de les humanitats.

Tot sovint s'associen les matemàtiques a la fredor de la racionalitat i se les titlla d'inhumanes. No es recorda el vell lligam entre les matemàtiques i la filosofia que recull la història, ni es veuen les aplicacions de les matemàtiques a tota mena d'activitats humanes. Sembla com si les matemàtiques no fossin una construcció humana, sembla que siguin una mena d'imposició externa i s'arriba a la conclusió que les persones amb vocació per les humanitats han d'odiar les matemàtiques.

7. Sovint, es considera que les matemàtiques escolars no serveixen per gran cosa. Amb tot, a les aules cal fer matemàtiques i les matemàtiques tenen prestigi acadèmic

Molt sovint es troben alumnes i pares que no saben veure la utilitat de les matemàtiques escolars i circumscriuen el seu prestigi a l'àmbit acadèmic. Resulta ben curiós que les matemàtiques mantinguin un elevat prestigi acadèmic. Molts alumnes i molts pares les accepten com un mal necessari i consideren que tenir bons resultats acadèmics en matemàtiques és un símptoma inequívoc de competència per a l'estudi i d'intel·ligència. Tot sovint és la primera nota que miren els pares i suspendre les matemàtiques els resulta més preocupant que suspendre segons quines altres matèries.

8. Es considera que les matemàtiques són el llenguatge de la ciència i de la tècnica.

Com ja s'ha dit, sovint es contraposen les matemàtiques i les humanitats. Des d'aquesta òptica les matemàtiques s'identifiquen amb el llenguatge de la ciència i de la tècnica i no es consideren rellevants ni les aplicacions bàsiques de les matemàtiques a la vida quotidiana ni els usos de les matemàtiques en els àmbits de les humanitats.

9. Sovint, de manera inconscient, es considera que les matemàtiques i les carreres científiques i tècniques són més adequades per als homes que per a les dones.

Tot i que aquesta idea va de baixa, encara no hem arribat a un nivell d'igualtat entre homes i dones i entre nois i noies pel que fa a la relació que es manté amb les matemàtiques. Així, per exemple, es considera usual que en els anuncis televisius surti el pare ajudant un noi a fer els deures o a preparar un examen de matemàtiques i ben inusual que aquest paper el faci la mare. A més, les vocacions per a les ciències i, sobretot, per a les carreres tècniques són més escasses entre les noies. El quadre es completa amb la constatació que ja es feia en el primer capítol: els resultats de matemàtiques a les proves PISA de 2003 a casa nostra són pitjors per a les noies.

El primer pas per aconseguir canviar la imatge de les matemàtiques consisteix precisament a prendre consciència d'aquest diagnòstic. Només així serà possible emprendre accions a les aules que portin a considerar les matemàtiques des d'un altra perspectiva. Aquesta llista, doncs, ens ha de servir per determinar quina és la imatge que els nois i les noies puguin tenir de la matèria.

4. TREBALLAR LA IMATGE POSITIVA DE LES MATEMÀTIQUES

El professors i les professores de matemàtiques hem de treballar per projectar una imatge renovada de les matemàtiques. És evident que sobren un bon grapat de tòpics i que falta molta informació. A més d'ensenyar, doncs, es fa del tot necessari que el professorat assumeixi la tasca de mostrar les matemàtiques com una activitat profundament humana, arrelada en la nostra història, com una de les grans conquestes de la humanitat. Tal i com es deia al principi d'aquest capítol, en general, la imatge que les persones tenen de les matemàtiques ve directament de l'àmbit escolar. La feina de transmetre una imatge adequada d'allò que són i de per què serveixen recau clarament en el professorat de primària i de secundària.

El conjunt de missatges que ens cal transmetre a partir de la feina a les aules i fora de les aules és pot resumir en les proposicions següents:

- **Les matemàtiques ens ajuden a pensar.**

Ser competent en matemàtiques no vol dir saber fer càlculs més o menys enrevessats sinó saber aplicar instruments matemàtics a situacions diverses per analitzar-les i resoldre problemes. Les matemàtiques són sobretot una forma de pensar i de raonar. Potser val la pena recordar la definició de cultura matemàtica que proposa el projecte PISA²⁴:

(24) Cita extreta de l'informe: *Mesurer les connaissances et compétences des élèves. Un nouveau cadre d'évaluation*. Programa OCDE/PISA 2000. OCDE, 1999.

“La cultura matemàtica és l’aptitud d’un individu per identificar i comprendre els diversos papers que juguen les matemàtiques en el món i per fer raonaments de base matemàtica, i la capacitat d’emprar les matemàtiques en funció de les exigències de la vida actual i futura com a ciutadà constructiu, compromès i intel·ligent.”

- **Les matemàtiques són útils per als ciutadans.**

Les matemàtiques no són un conjunt d’exercicis i de rutines que es practiquen a l’escola i que després es poden oblidar tranquil·lament. Molts aspectes de les matemàtiques escolars, enfocades, per exemple des de l’àmbit de les competències bàsiques, són útils per a tots els ciutadans: saber interpretar una representació a escala, saber interpretar la gràfica de creixement d’un nen o d’una nena, saber calcular l’índex de massa corporal, saber quina probabilitat tenim de guanyar en un joc d’atzar, saber fer una estimació de la durada d’un viatge, etc., són alguns exemples de la multitud d’habilitats matemàtiques se’ns poden posar a l’abast a l’escola.

- **Un ciutadà competent en matemàtiques és més difícil de manipular.**

L’allau d’informació que els ciutadans tenen al seu abast a les societats actuals requereix habilitats de filtratge i de comprensió. Moltes de les informacions apareixen en llenguatge matemàtic com ara gràfiques, taules, diagrames, percentatges, etc. I només les persones capacitades per entendre aquests instruments de comunicació seran capaces de tenir el suficient sentit crític per descartar allò que no és fiable. La petició que els professors i les professores de matemàtiques contribuïssim a aquesta tasca ja la feia Roger Godement²⁵, un eminent matemàtic i algebrista, fa molts anys:

“Tal i com estan les coses, em fa l’efecte que en les “grans” nacions superdesenvolupades científicament i tècnica en les quals vivim, el primer deure dels matemàtics, i de moltes altres persones, fóra més aviat de proporcionar coses que no els demanen: homes capaços de reflexionar per ells mateixos, de destapar els arguments falsos i les frases ambigües, i als ulls dels quals la difusió de la veritat importi molt més que, per exemple, la televisió planetària en colors i en relleu: homes lliures, i no robots tecnocràtics. És tristament evident que la millor manera de formar aquests homes que ens manquen no passa per ensenyar-los ciències matemàtiques i físiques, que són branques del saber en les quals allò que resulta normal és d’aparentar que s’ignora fins i tot l’existència dels problemes humans, i a les quals les nostres societats altament civilitzades concedeixen, i això hauria de ser sospitos, el primer lloc. Però, fins i tot ensenyant Matemàtiques, podem com a mínim intentar donar als nostres alumnes el gust per la llibertat i per la crítica, i habitar-los a veure’s tractats com a éssers humans dotats de la facultat de comprendre.”

(25) Extret del pròleg del llibre: GODEMENT, R. *Álgebra*. Madrid: Tecnos, 1971.

- **El coneixement matemàtic contribueix a democratitzar la societat.**

Els ciutadans que són competents en matemàtiques, en ser més crítics i menys manipulables, contribuiran a reforçar la democràcia. Aquesta és, precisament, la tesi del professor Mogens Niss de la universitat de Roskilde, que és l'impulsor de la implantació del programa KOM a Dinamarca (aquest programa consisteix a centrar l'educació matemàtica escolar en l'adquisició de les competències bàsiques en matemàtiques) i ideòleg de l'àmbit matemàtic del projecte PISA.

- **Les matemàtiques són útils i es poden aplicar a la majoria d'activitats humanes.**

Es deia abans que les matemàtiques bàsiques són un instrument útil per als ciutadans. A més, cal tenir en compte que les matemàtiques superiors s'apliquen amb un èxit extraordinari a la ciència, a la tecnologia, a les ciències socials i a tota mena d'activitats humanes. El món actual seria impossible sense les matemàtiques ja que pràcticament tots els objectes que ens envolten i tots els models i totes les teories que emmarquen la nostra vida tenen una història matemàtica al darrera. És evident que hi ha un fenomen d'invisibilitat que s'ha de corregir per fer possible la consciència de la gran utilitat que han tingut i que tindran les matemàtiques.

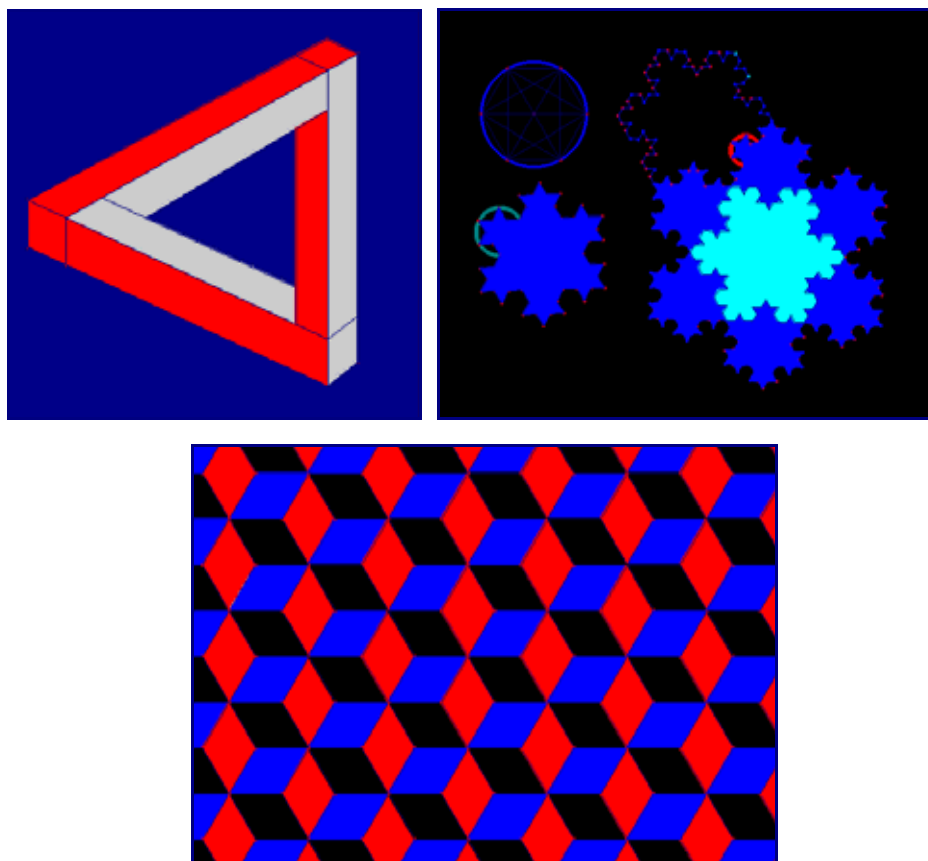
És ben cert que bona part de les matemàtiques dels darrers cent o cent cinquanta anys tenen una gran càrrega d'abstracció i que no persegueixen explícitament les aplicacions. El fet curiós és que més d'un aspecte d'aquestes matemàtiques acaben per aplicar-se a multitud de situacions insospitades.

- **Les matemàtiques ens permeten dissenyar. La geometria és omnipresent.**

El disseny, l'arquitectura i l'enginyeria beuen de la geometria des del principi de la humanitat. Des de les piràmides del faraons de la quarta dinastia al Partenó o als mosaics de l'Alhambra, podem dir que la geometria és a la base de tot plegat i que forma part de la condició humana.



Un mosaic de l'Alhambra



Dissenys fets a classe de matemàtiques de 4t d'ESO a l'IES Bruguers amb el programa Cabri-Géomètre

- **Les matemàtiques tenen bones sortides professionals.**

És ben cert que les matemàtiques tenen un paper molt important pràcticament en tots els àmbits i nivells de docència. Aquesta, però, no és l'única sortida professional de les matemàtiques. Cada cop més empreses, organismes oficials i institucions de tota mena contracten més matemàtics per poder resoldre els seus problemes de tal manera que l'oferta laboral per als matemàtics és força àmplia. De fet, és molt difícil trobar matemàtics a l'atur.

- **Les matemàtiques també tenen molt a veure amb la filosofia.**

Durant molts segles les matemàtiques i la filosofia han fet camí juntes. Figures rellevants com ara Pitàgores, Plató, Descartes, Leibniz o Russell són només alguns dels exemples destacats que han tingut un peu a cada banda. Per això mateix resulta tan sorprenent que persones de l'àmbit de les humanitats manifestin el seu menyspreu per les matemàtiques. Aquest no era el cas d'Aristòtil²⁶ quan deia:

"Les formes que expressen millor la bellesa són l'ordre, la simetria, la precisió. I les ciències matemàtiques són les que se n'ocupen de manera especial."

(26) Cita d'Aristòtil recollida al llibre: GÓMEZ CHACÓN, INÉS M^a. *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*. Madrid: Narcea, 2000.

O de Immanuel Kant²⁷ quan afirmava:

"D'eu fa geometria d'acord amb els Elements d'Euclides"

D'altra banda, ara mateix, podem dir sense por d'equivocar-nos que les relacions entre les matemàtiques i la lògica són indissolubles tal i com ens ho recorda el ja esmentat Bertrand Russell²⁸:

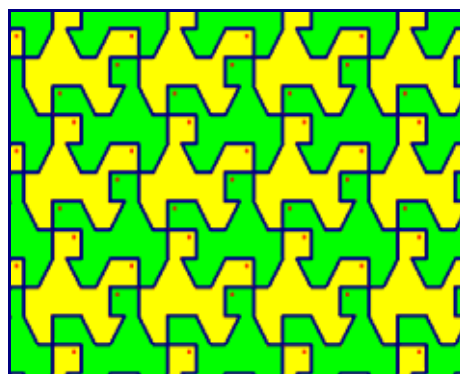
"S'ha fet totalment impossible traçar una línia entre les matemàtiques i la lògica; de fet, les dues formen una unitat"



L'Escola D'Atenes, fresc de Rafael Sanzio que decora la Stanza della Segnatura (Vaticà) on apareixen Plató, Aristòtil, Pitàgores i Euclides entre d'altres

- **Les matemàtiques també tenen molt a veure amb l'art. L'estètica intrínseca de les matemàtiques.**

Les relacions de la geometria amb l'art ja s'han comentat i són d'una evidència fàcil de fer explícita a les aules.



Dos dissenys de Maurits Escher de títol "Genets"

(27) Cita d'Immanuel Kant recollida al llibre: PLA, J. *Las matemáticas*. Barcelona: Montesinos, 1984.

(28) Cita de Bertrand Russell recollida al llibre: DUNHAM, W. *El universo de las matemáticas*. Madrid: Piràmide, 1995.

Leonardo da Vinci²⁹ reivindicava la necessitat del coneixement matemàtic per als pintors:

“El pintor necessita la matemàtica que concerneix el seu art; que s’aparti dels seus companys aquell que no tingui aquests estudis...”

D'altra banda, hi ha el component estètic intrínsec de les matemàtiques tal i com passa amb totes les activitats humanes. El prestigiós investigador en teoria de nombres G. H. Hardy³⁰ ens en parla en aquestes dues cites:

“Un matemàtic, de la mateixa manera que un pintor o un poeta, és un constructor de configuracions.”

“El mètode de *reductio ad absurdum*, que tant complaïa Euclides, és una de les armes més fines que pot emprar un matemàtic. És un gambit molt més formós que qualsevol dels que pot oferir el joc dels escacs. Un jugador d'escacs pot sacrificar un peó o fins i tot una peça, un matemàtic, però, sacrifica *la partida completa*.”

També el professor i especialista en didàctica de les matemàtiques Brian Bolt³¹ fa esment de la bellesa de la geometria:

“Al llarg de la meva educació secundària em van ensenyar la geometria com una matèria separada de l'aritmètica i de l'àlgebra, a càrrec de professors diferents i sense formar part d'una assignatura íntegra anomenada matemàtiques... Llavors, quan jo anava a l'escola, per geometria s'entenia tot allò relatiu als teoremes d'Euclides... Vaig haver d'aprendre al voltant de 70 teoremes amb les seves demostracions, la meva mare, però, explica que a la seva època anaven pels 140 teoremes... La realitat és que la geometria euclidiana, tal i com s'ensenyava, era una matèria molt sofisticada... Es desenvolupava a partir d'un reduït nombre d'axiomes deduint-ne una gran col·lecció de propietats sobre línies, triangles i cercles mitjançant un raonament exacte, era formós.”

També cal afegir, en relació a aquesta darrera cita, que el mateix Bolt reconeix que per al 90% dels alumnes de la seva època els *Elements* d'Euclides -que ell troba tan bells- eren més aviat un martiri.

- **Les matemàtiques permeten jugar.**

Les matemàtiques i el joc mantenen profundes relacions. D'una banda podem fer matemàtiques a partir dels jocs. El joc és una activitat profundament humana i l'aplicació de les estratègies matemàtiques al joc és enriquidora. D'altra banda podem afirmar que, fins a cert punt, les matemàtiques són un joc mental tal i com afirma Miguel de Guzmán³²:

(29) Extret de: DA VINCI LEONARDO. *Tratado de la pintura*, Madrid, Akal S.A., 2004.

(30) Extret de: G. H. Hardy a *Autojustificación de un matemático*, Barcelona, Ariel 1981

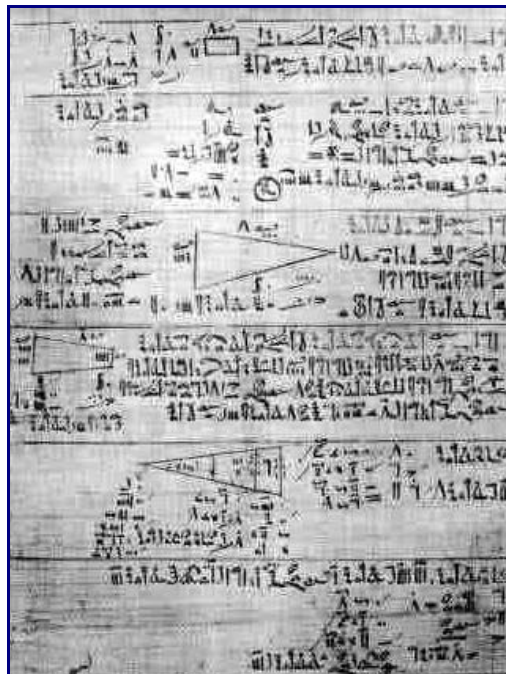
(31) Extret de: BOLT, B. “¿Qué es la geometría?”. *Suma, revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas*, nº 19, (novembre de 1998); pàgines 5-16.

(32) Cita de Miguel de Guzmán recollida al llibre: GÓMEZ CHACÓN, INÉS M^a. *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*. Madrid: Narcea, 2000.

“La matemàtica participa de molts dels aspectes del joc, tot i que no és només joc, sinó també una ciència, un art intel·lectual que crea una bellesa peculiar, un dels eixos fonamentals de la cultura, on ocupa un lloc molt central i on hi té una responsabilitat molt especial en el seu desenvolupament correcte.”

- **Les matemàtiques tenen història i tradició.**

Les matemàtiques neixen amb les primeres passes de la humanitat. La capacitat de comptar o de fer esquemes es remunten a la prehistòria. Les primeres civilitzacions històriques ja feien matemàtiques. Les matemàtiques que fem servir ara mateix procedeixen d'aportacions molt diverses que han viscut una gran eclosió en els darrers quatre-cents anys.



Matemàtiques al papirus Rhind o papirus d'Ahmes del 2000 a C.

- **Les matemàtiques són humanes i estan plenes d'imaginació**

Les matemàtiques són una creació de la humanitat plena d'imaginació. No són pas un dogma extern com de vegades sembla que pensin algunes persones que les titllen de fredes, d'irracionals i d'inhumanes. El professor Alfred North Whitehead³³, coautor de la monumental *Principia Mathematica* junt amb Bertrand Russell, afirma:

“Heus aquí les matemàtiques, la creació més original de l'enginy humà.”

(33) Cita d'Alfred North Whitehead procedent de *Science and the Modern World* i recollida al llibre: TAHAN, M. *El hombre que calculaba*. Barcelona: Verón, 1995.

També Voltaire³⁴ ens parla de la gran imaginació que hi ha a les matemàtiques:

“Hom adverteix, entre els matemàtics, una imaginació admirable [...].
Existia més imaginació en el cap d’Arquimedes que el d’Homer”

- **Les matemàtiques gaudeixen de gran respecte arreu del món.**

El nivell de desenvolupament dels països es relaciona amb el nivell de capacitació matemàtica dels seus ciutadans. Pràcticament a tot el món es dediquen moltes hores a la formació matemàtica i tothom sembla tenir clar que sense les matemàtiques no aniríem enlloc. No ens equivocarem si diem que les matemàtiques s’han convertit en una qüestió de gran importància per a les societats modernes.

Els alumnes i les alumnes finlandesos tot i no demostrar un gran delit en fer matemàtiques tenen molt clar que les matemàtiques tenen molta importància per al seu futur professional. Potser això explica, en part, els bons resultats que obtenen en la matèria.

Totes aquestes idees s’han d’explicitar a les aules. Els mestres de primària i el professorat de secundària han de comunicar aquests missatges i fer-los explícits amb el treball diari a les aules. Si només es posa l’èmfasi en els aspectes rutinaris, algorísmics i calculístics de l’activitat matemàtica el canvi d’imatge no serà possible. En els capítols següents es revisen, s’estudien i es proposen estratègies per traslladar a les aules la majoria d’aspectes recollits en aquestes afirmacions.

(34) Cita de Voltaire recollida al llibre: TAHAN, M. *El hombre que calculaba*. Barcelona: Verón, 1995.

CAPÍTOL 3: POSSIBILITATS I LÍMITS DE LA INNOVACIÓ A LES CLASSES DE MATEMÀTIQUES

La introducció d'innovacions a les classes de matemàtiques no ha estat un èxit manifest tot i la implantació dels nous programes educatius. Molts professionals des del seu lloc de docència, molts professors i professores universitaris especialistes en pedagogia i didàctica de les matemàtiques, moltes associacions de professors de matemàtiques reclamen una i una altra vegada canvis que permetin una millora tangible dels problemes en l'ensenyament i l'aprenentatge de les competències matemàtiques. Malgrat tot, els canvis no s'imposen de manera clara i generalitzada i les innovacions a les aules són escasses. Per què tenim aquest fenomen? Quins motius profunds hi ha darrera les grans dificultats de canvi? Per què és tan difícil innovar a les classes de matemàtiques? Aquest capítol es proposa estudiar quins factors afavoreixen la innovació i quins factors hi juguen en contra, des d'una perspectiva realista i propera al professorat.

1. ALGUNES CONSIDERACIONS INICIALS

Des de fa alguns anys se senten frases del tipus³⁵:

“Tot sovint l'escola ensenya continguts del segle XIX amb professors del segle XX a alumnes del segle XXI.”

“El 90% dels coneixements que seran necessaris per a un alumne del segle XXI encara no existeixen.”

“Si posem un cirurgià del segle XIX en un quiròfan del segle XXI no entendria res. Si posem un professor del segle XIX en una aula del segle XXI estaria com un peix a l'aigua.”

“Aproximadament cada deu anys, el coneixement en totes les seves branques es renova en la seva major part. La formació que vàrem rebre a l'institut i a la universitat caduca irremeiablement.”

“Caldria ensenyar principis d'estratègia, que permetessin afrontar els atzars, l'inesperat i l'incert, i modificar el seu desenvolupament en virtut de les informacions adquirides sobre la marxa. S'ha d'aprendre a navegar en un oceà d'incerteses a través d'arxipèlags de certesa.”

La idea que es vol transmetre amb aquestes afirmacions és que l'escola no s'ha adaptat a la nova realitat i que no té cap sentit ensenyar continguts obsolets. Tanmateix, només alguns aspectes d'aquestes afirmacions són certs.

(35) La primera cita s'ha extret de: MONEREO, C. Y POZO, J. (2001). “¿En qué siglo vive la escuela? El reto de la nueva cultura educativa”. *Cuadernos de pedagogía*, nº 298 (gener de 2001): pàgines 6-9.

La segona i la tercera cites s'han extret de: MONEREO, C. (2001). “Conferència debat sobre competències bàsiques”. *Centre de recursos pedagògics del Baix Llobregat II*, Viladecans (maig de 2001).

La quarta cita s'ha extret de: MONEREO, C. (2001). “Ensenyar a aprendre: una vella aspiració amb noves coordenades”. *Escola Catalana*, nº 376 (gener de 2001): pàgines 6-9.

La cinquena cita s'ha extret de: MORIN, E. (2000). “Els 7 coneixements necessaris per a l'educació del futur”. Centre UNESCO de Catalunya, Barcelona.

La realitat és que si analitzem, per exemple, l'informe Cockcroft³⁶, que té més de vint anys, ens adonem de la vigència gairebé absoluta que tenen encara avui la majoria de les propostes que s'hi feien. És cert que els alumnes han de conèixer les noves tecnologies, que existeixen noves fonts d'informació pràcticament inabastables a la seva disposició i que aprendre a aprendre és fonamental. Això no treu, però, que els alumnes hagin de saber treballar amb percentatges, o que hagin de saber fer estimacions o que hagin de saber emprar les unitats de mesura i que això seguirà essent així d'aquí a deu o quinze anys més.

Pel que fa a la frase que compara el professorat del segle XIX amb el d'ara, sembla que les persones que estan d'acord amb l'afirmació no coneixen prou bé les aules dels centres de secundària actuals. És ben cert que encara hi tenim taules, cadires i pissarra i que les classes magistrals tenen un protagonisme considerable. Les relacions entre el professorat i l'alumnat, però, han canviat molt i sembla altament probable que l'hipotètic professor del XIX transportat a un institut del XXI ho tindria encara més difícil que el cirurgià, si es volgués adaptar a la nova situació.

Ara mateix fa l'efecte que el professorat de secundària s'ha acostumat a viure amb un elevat grau de desmotivació de l'alumnat i mostra sovint un punt de resignació que no li permet emprendre innovacions que canviïn la situació. El paper de la formació permanent hauria de ser aquí clau. La tasca, però, no serà gens senzilla tal i com ens comenta Claudi Alsina³⁷:

“La velocitat del canvi deixa també en clar declivi el negoci editorial dels llibres de text i obre en canvi noves exigències a la formació permanent del professorat. O així hauria de ser, perquè difícilment la docència arrelada en el record formatiu personal té sentit avui. Aquest tema, però, és molt delicat. Si hi ha moltes persones que se senten insegures davant dels canvis, en el professorat hi ha enormes quantitats (en tots els nivells) de professionals aferrats a la recreació de les seves memòries.”

El mateix autor, però, deixar ben clar més endavant, que si es volen aconseguir resultats innovadors, ha de ser amb la complicitat del professorat:

“Només des d'un profund respecte i una atenció constant al professorat podrem intentar una readaptació curricular constant nascuda no de la imposició sinó de la complicitat entre professorat, administració i societat.”

D'altra banda, els anys de dedicació a la formació inicial del professorat de secundària m'han permès comprovar que, massa sovint, sectors importants del professorat accedeixen a secundària amb una concepció molt clàssica d'allò que significa l'ensenyament i l'aprenentatge de les matemàtiques. Hi ha una forta tendència a reproduir els esquemes sota els quals s'ha après i s'imposen, freqüentment, les tesis menys innovadores. El temps de formació contemplat per a l'obtenció del CAP (Certificat d'Aptitud Pedagògica) és clarament insuficient per aconseguir una reflexió prou aprofundida que porti una majoria dels futurs professors a plantejar-se que l'ensenyament i l'aprenentatge de les matemàtiques al segle XXI ha d'emprendre nous camins. Els programes de formació inicial experimental, com ara el CQP (Certificat de Qualificació Pedagògica), amb molta més càrrega de formació teòrica i pràctica, en canvi, sí que permeten un treball molt més aprofundit que obre noves perspectives als futurs professors i professores. Tot i esperant a veure com es concreten els nous esquemes en la formació inicial del professorat, una qüestió clau en aquesta fase d'aprenentatge ha de ser l'estímul de la capacitat d'innovació d'aquests futurs professors a les classes de matemàtiques.

(36) Informe Cockcroft. *Las matemáticas sí cuentan*. Madrid, MEC, 1985.

(37) Extret del capítol elaborat per Claudi Alsina a: GOÑI, J.Ma. [et al.]. *El currículum de matemáticas en los inicios del siglo XXI*. Barcelona: Graó, 2000.

2. POSSIBILITATS I LÍMITS DE LA INNOVACIÓ A L'AULA DE MATEMÀTIQUES

2.1. FACTORS QUE NO AFAVOREIXEN LA INNOVACIÓ

Com ja s'ha dit, la introducció d'innovacions a les classes de matemàtiques no ha estat un èxit manifest tot i la implantació dels nous programes educatius i la insistent reclamació d'innovacions que es fa des de diversos àmbits. El cert és que hi ha un bon grapat de factors que juguen en contra de les possibilitats d'innovació. La identificació i el coneixement d'aquests factors és fonamental, perquè només des d'aquest coneixement serà possible contrarestar-los i emprendre el camí de la innovació.

A continuació es presenta una llista amb alguns dels factors que no afavoreixen les actituds d'innovació a les classes de matemàtiques.

En l'àmbit de l'alumnat:

- 1) **El nombre excessiu d'alumnes per classe:** els mètodes participatius, el treball amb materials i amb programes informàtics, i la majoria d'innovacions són molt difícils de controlar amb un nombre elevat d'alumnes. Només la sensació de desordre i de descontrol ja pot ser motiu suficient per deixar de banda segons quines innovacions.
- 2) **El factor social:** molts pares i molts alumnes tenen una imatge prefixada molt clàssica del professorat de matemàtiques i esperen unes matemàtiques algorísmiques i difícils d'aprovar. El professorat innovador trobarà fortes reticències en aquests sectors.
- 3) **La dificultat de gestionar les classes de forma participativa:** la gestió d'aula de forma tradicional és senzilla i, en canvi, si es vol que els alumnes hi participin activament, tot resulta força més complicat i incòmode per al professorat.

En l'àmbit del professorat:

- 4) **La pressió del contracte didàctic implícit que governa les relacions a les aules:** el professorat, ple d'afany docent, en creure que una majoria d'alumnes no aprèn a pensar i a raonar a les classes de matemàtiques, opta per solucions tradicionals i senzilles, centrades en una concepció algorísmica de la matèria, que li donen seguretat i resultats constatables a curt termini.
- 5) **La inèrcia:** hi ha una forta tendència a reproduir els esquemes sota els quals s'ha après. Hom pot pensar: "aquest sistema a nosaltres ens ha servit i no hi ha motius per pensar que no servirà amb l'alumnat actual". Des d'aquesta perspectiva, la innovació metodològica es pot presentar plena d'incògnites i d'inseguretats. Es pot pensar que innovar porta molta feina per a un resultat incert i també hi pot haver por d'innovar.
- 6) **La manca d'informació:** alguns sectors del professorat no accedeixen a la divulgació de les innovacions; ja sigui perquè no es canalitzen des de l'administració o des d'altres instàncies d'una manera precisa, ja sigui perquè no s'està disposat a fer l'esforç que demana la formació contínua. A més, sovint, s'aprecia poca precisió i poc rigor científic a l'hora de comunicar els resultats de les innovacions, de tal manera que hi ha el perill que, de vegades, les innovacions puguin semblar accions pintoresques i poca cosa més.

7) **L'excés d'informació:** paradoxalment es pot donar el fenomen contrari del descrit a l'apartat anterior. L'allau de propostes innovadores i la incapacitat de destriar les que puguin ser vàlides pot portar a l'immobilisme i a pensar que totes són poc encertades.

En l'àmbit dels centres:

8) **Les dificultats a l'hora de posar d'acord tot un equip de professors:** les innovacions individuals no tenen la mateixa incidència que les innovacions col·lectives i interdisciplinàries. Tanmateix, aconseguir que un equip ampli de professors es posi d'acord en una innovació és força complicat. Cal convèncer i no forçar a innovar.

9) **Les dificultats per analitzar els resultats:** com s'avaluen els resultats d'una innovació? Quins factors es poden controlar? En general no resulta senzill saber quina és la incidència real de les innovacions implementades.

10) **La manca de recursos:** no hi ha laboratoris de matemàtiques, les aules d'informàtica no donen abast i els materials solen ser escassos.

En l'àmbit de l'administració:

11) **La manca d'estímul per al professorat:** la innovació no comporta ni reduccions d'horari, ni complements retributius, ni reconeixements acadèmics explícits i sí que comporta un augment del volum de feina per al professorat.

12) **Les deficiències en la formació didàctica o matemàtica del professorat:** el sistema d'accés a la pràctica docent no ha estat fins fa ben poc massa relacionat amb les capacitats didàctiques del professorat sinó més aviat amb demostracions d'erudició matemàtica. A més, a les universitats encara hi ha, en alguns sectors, cert menyspreu de la feina a secundària i de la didàctica de les matemàtiques.

D'altra banda, alguns professors de matemàtiques accedeixen a la docència de manera provisional o definitiva amb considerables mancances de formació en matemàtiques. No tenen titulacions adequades i la formació rebuda a les universitats no els permet tenir una perspectiva suficient d'allò que són les matemàtiques i la seva història. Això els obliga, de vegades, a seguir cegament les propostes dels llibres de text o a convertir l'activitat matemàtica a l'aula en un conjunt de receptes, de rutines i d'algorismes i els crea fortes dificultats a l'hora d'innovar.

Tampoc es pot afirmar que la formació permanent, ni en un sentit ni en l'altre, sigui un èxit manifest tot i l'evident millora que s'ha observat en els darrers anys.

13) **La sensació de manca de temps:** el professorat es veu afectat pel pes dels programes educatius, molt amplis i ambiciosos, i per les proves d'accés a la universitat, que no pot deixar de veure a l'horitzó (és un fet que les hores dedicades a les matemàtiques a l'ESO i als batxillerats són insuficients). Les exigències de les universitats, que esperen uns alumnes amb uns nivells de formació que corresponen a altres èpoques (amb més hores de formació dedicades a les matemàtiques i una selecció més acusada dels estudiants), també contribueixen a l'agreujament d'aquesta sensació.

14) **La dificultat d'innovar a la força:** la implantació de la LOGSE va suposar un intent de forçar el professorat a fer canvis profunds de tipus conceptual, metodològic i organitzatiu. Això va provocar inseguretat i desconcert en el professorat. Cal pensar que

potser hi va haver un excés de novetats quan, d'altra banda, les propostes de les editorials, en general, seguien essent molt clàssiques i poc innovadores.

Les causes esmentades actuen sobre el professorat i també sobre l'alumnat i els seus pares. Per tot plegat cal pensar que els canvis seran lents i difícils. Malauradament, de vegades, aquestes mancances i problemes -que, cal insistir-hi, són molt importants- es fan servir com a coartada per evitar la incomoditat o l'aparent descontrol de les classes més actives i participatives.

2.2. FACTORS QUE AFAVOREIXEN LA INNOVACIÓ

La llista de l'apartat anterior ens pot fer pensar que les dificultats per a la innovació són insalvables. El cert, però, és que també hi ha un bon nombre de raons i de factors que afavoreixen la innovació a les classes de matemàtiques. Aquests en són uns quants:

En l'àmbit de l'alumnat i de la societat:

- 1) **Noves demandes de formació per part de la societat:** el món laboral reclama que s'imposi l'aprenentatge permanent i l'adaptació a noves situacions, a noves tecnologies i a noves professions.
- 2) **La nova tipologia de l'alumnat i del professorat:** els alumnes han canviat i sembla clar que les velles receptes no tindran molt d'èxit. D'altra banda l'accés als centres de secundària de psicopedagogs i de mestres i la necessitat del treball intens de l'acció tutorial han fet augmentar la sensibilitat sobre la innovació didàctica.
- 3) **L'aprenentatge de les matemàtiques amb la metodologia clàssica no ha estat una empresa amb resultats clarament satisfactoris:** l'ensenyament tradicional basat en una concepció conductista o tecnicista de l'aprenentatge de les matemàtiques ha deixat pel camí gran part de la població. Amplis sectors de la societat es troben en el llinar de l'analfabetisme matemàtic i, a més, tenen i projecten una imatge amarga i aspre de les matemàtiques. El sistema educatiu anterior a la implantació de la LOGSE (el de l'EGB, el BUP i el COU i la FP) tenia un nivell de fracàs escolar insostenible i el sistema actual no sembla haver millorat molt les coses.
- 4) **La necessitat d'aconseguir una millora de la motivació de l'alumnat a l'hora de fer matemàtiques:** els recursos clàssics de treball i de gestió de les aules no aconsegueixen ara mateix bons nivells de motivació de l'alumnat per a l'activitat matemàtica. Cal pensar, doncs, que les innovacions ens han de donar l'oportunitat de millorar aquests nivells de motivació.

En l'àmbit del professorat:

- 5) **Noves idees sobre l'ensenyament i l'aprenentatge:** la implantació de la LOGSE amb la seva concepció constructivista de l'aprenentatge i l'onada de la nova didàctica de les matemàtiques han fet rebrotar la concepció participativa de l'ensenyament i de l'aprenentatge. Es tracta de velles idees (només cal recordar la frase de Confuci -"Si m'ho expliquen, ho oblidó, si ho veig, m'ho crec, i si ho faig ho entenc" o la de Montaigne -"Val més un cap ben fet que un cap ben ple") que comencen a arrelar amb força. Pràcticament tothom veu clar que a les classes cal ensenyar a aprendre i aprendre a aprendre.

6) **L'aparició de nous recursos didàctics i de les noves metodologies:** els recursos informàtics, els recursos audiovisuals, els nous materials didàctics, les noves publicacions didàctiques i les associacions de professorat de matemàtiques han obert moltes portes en la direcció de la innovació.

7) **La necessitat professional del professorat de reflexionar sobre els processos d'ensenyament-aprenentatge:** sembla evident que el professorat ha de mantenir una reflexió constant sobre allò que fa a les aules. Aquesta reflexió no tindrà sentit si no es tradueix en innovacions dictades per l'adaptació a les situacions renovades que es presenten a les aules.

9) **La necessitat de mantenir la il·lusió en el desenvolupament de la feina com a professor o com a professora:** les innovacions són nous reptes que poden estimular la il·lusió professional del professorat. La repetició sistemàtica dels mateixos esquemes es presenta, en canvi, avorrida i poc estimulants.

10) **La necessitat de donar una imatge renovada de les matemàtiques:** com s'ha dit (vegeu el capítol 2), la imatge de les matemàtiques que tenen els ciutadans prové molt sovint de l'àmbit escolar. Per diversos motius, aquesta imatge no sol ser molt positiva i les innovacions poden proporcionar-nos la oportunitat de modificar aquests aspectes negatius.

En l'àmbit dels centres:

11) **Tenir bons i abundosos recursos i pocs alumnes per aula:** en els darrers cursos el nombre d'alumnes per aula ha disminuït sensiblement i la flexibilitat organitzativa ha permès també la millora de l'atenció individual als alumnes. També hi ha hagut un esforç per a la millora de recursos, especialment en material informàtic.

12) **La competitivitat respecte d'altres centres de característiques similars:** la publicació dels resultats de les proves d'avaluació externes fetes a Catalunya i la divulgació de les experiències que es duen a terme als centres que obtenen bons resultats, poden afavorir la implantació d'innovacions. En els darrers anys, l'alumnat i els pares han passat a ser vistos també com a clients als quals s'ha d'oferir un bon servei, i això comporta que els centres ofereixin una imatge dinàmica i de preocupació per posar en marxa innovacions que millorin l'aprenentatge dels alumnes i de les alumnes.

En l'àmbit de l'administració:

13) **La competitivitat respecte d'altres països:** de la mateixa manera, la publicació dels resultats de les proves d'avaluació internacionals i la divulgació de les experiències que es duen a terme als països que obtenen bons resultats són bons exemples que marquen de la direcció que han de prendre les innovacions.

14) **Millora de la formació permanent del professorat:** els cursos de formació com a llocs d'intercanvi d'idees, els grups de treball, els seminaris i els assessoraments han augmentat molt en els darrers anys i contribuiran clarament a la difusió d'innovacions.

15) **Millora de l'estabilitat dels equips de professorat:** en els darrers cursos s'ha observat certa millora pel que fa a l'estabilitat dels equips directius i dels equips docents que han de

permetre la posada en marxa d'innovacions de llarg recorregut i la constatació i l'estudi dels resultats de les innovacions posades a prova.

16) **La millora dels canals d'informació:** la informació sobre innovacions ha augmentat sensiblement en els darrers anys, especialment a través d'internet.

3. ALGUNES CONCLUSIONS

Els obstacles per a la innovació són importants i no tindria sentit no tenir-los en compte. De fet, aquest conjunt d'obstacles expliquen per què hi ha una forta tendència a no dur a terme innovacions a les classes de matemàtiques. Tanmateix, però, s'ha de considerar que són menors si els comparem amb els avantatges que ens ofereix l'aventura de la innovació. Val la pena recordar un article de la revista *Suma* de juny del 1999, *Problemas actuales de nuestra educación matemática*, que recollia recomanacions de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. S'hi apuntava el principi general següent:

“És més interessant que una majoria de ciutadans tingui una actitud positiva envers les matemàtiques que el fet que coneguin, al final dels seus estudis, un seguit de qüestions puntuals o que tinguin sistematitzades un grapat de rutines.”

Només aquesta reflexió ja ens ha de dur a la necessitat de la innovació. Sense innovació no aconseguirem que canviï la imatge negativa i profundament errònia que molts ciutadans i ciutadanes tenen de les matemàtiques. A més, tal i com s'apunta al darrer factor esmentat entre els que afavoreixen la innovació, si no volem resignar-nos a tenir uns nivells baixos de motivació a les aules ens caldrà introduir-hi canvis.

És ben cert que innovar a les aules no és senzill. No convé pensar, però, que les dificultats per innovar són una barrera insuperable. Cal pensar més aviat a innovar pas a pas, amb convicció, amb tranquil·litat i a partir de la reflexió. Resignar-se a fer el que sempre s'ha fet perquè hi ha obstacles per innovar ens conduirà a l'apatia i a l'avorriment. Potser val la pena que recordem un vell proverbi tal i com ens proposa Claudi Alsina³⁸:

“Si sempre fas el que sempre feies, obtindràs sempre el que sempre obtenies.”

Si volem obtenir millors resultats, val la pena, doncs, que tots plegats treballem per renovar les matemàtiques escolars. Això em fa recordar una magnífica frase de John Allen Paulos³⁹ que ens parla de canviar la imatge de les matemàtiques escolars:

“És hora de revelar el secret: la funció principal de les matemàtiques no és organitzar xifres en fórmules i fer càlculs enrevessats. És una forma de pensar i de fer preguntes que sens dubte és estranya per a molts ciutadans, tot i que està oberta pràcticament a tothom.”

(38) Extret del pròleg de Claudi Alsina per al llibre: ANTIBI, A. *La constante macabra, o cómo se ha desmotivado a muchos estudiantes*. Madrid, El Rompecabezas, 2005.

(39) Extret de: PAULOS, J.A. *Un matemático lee el periódico*. Barcelona: Tusquets Editores, 2002.

CAPÍTOL 4: ALGUNES OPINIONS EXPERTES

Les innovacions i les idees per aconseguir nivells més alts de motivació tenen una llarga tradició i avui, més que mai, molts experts tenen excel·lents propostes que poden contribuir a millorar els nivells de motivació de l'alumnat. En aquest apartat es tracta de recollir algunes d'aquestes aportacions i estudiar-ne la vigència i les possibilitats reals d'aplicació a les aules.

1. LA MOTIVACIÓ ESCOLAR SEGONS DAVID P. AUSUBEL

El professor David P. Ausubel⁴⁰, pare de la teoria de l'aprenentatge significatiu, considera que sense una actitud favorable de l'alumnat l'aprenentatge només pot ser memorístic. Aquest tipus d'aprenentatge és superficial i no permet relacionar diversos conceptes ni aplicar allò que s'ha après a la realitat. En canvi, l'aprenentatge significatiu té lloc quan els nous coneixements s'incorporen en l'estructura cognitiva de l'alumne i això només s'aconsegueix a partir de la voluntat i de la implicació afectiva de l'alumnat. La motivació és, doncs, una peça fonamental del procés d'aprenentatge.

Ausubel considera que la motivació escolar té tres components:

- 1) L'impuls cognitiu, és a dir, la necessitat i la voluntat d'adquirir coneixements.
- 2) L'accentuació del jo -cal relacionar aquest component amb el rendiment i la competitivitat-.
- 3) El component d'afiliació -l'alumne cerca, amb el seu rendiment, l'aprovació de la persona o persones amb les quals s'identifica-.

A més, Ausubel considera els següents principis generals per tal d'aconseguir una millora de la motivació escolar:

- La motivació és a la vegada causa i efecte de l'aprenentatge. No cal doncs, esperar a l'aparició de la motivació per tal de comprometre els alumnes i les alumnes en activitats d'aprenentatge. La pretensió de motivar primer per ensenyar després és una simplificació que no ens conduirà enlloc.
- Els objectius de les activitats d'aprenentatge s'han de formular sempre tan clarament i explícitament com sigui possible. No és convenient que els objectius d'aprenentatge només siguin al cap del professorat i romanguin ocults per a l'alumnat tal i com molt sovint ha passat a les aules. Caldrà fer, doncs, un esforç per explicar els objectius d'aprenentatge abans d'iniciar cadascuna de les unitats didàctiques.
- És bo fer servir les motivacions i els interessos existents. No cal, però, limitar-s'hi. En l'àmbit de les matemàtiques aquesta orientació és imprescindible perquè els contextos de treball no sempre poden ser explícitament propers als alumnes en primera instància.

(40): Idees extretes de: Ausubel, D.P.; Novak, J.D.; Hanesian, H. *Psicología Educativa: Un punto de vista cognitivo*, Editorial Trillas: México, 1983.

- Cal maximitzar l'impuls cognitiu fent ús de materials que atreguin l'atenció. De vegades, un material adequat pot convertir-se en un factor d'atracció per a l'alumnat que ens proporcioni la motivació inicial necessària per a l'aprenentatge significatiu que perseguim.
- Cal disposar de tasques apropiades per a cadascun dels nivells d'habilitat d'aprenentatge. L'alumnat construeix el seu coneixement sobre la base d'allò que ha après anteriorment. Només les tasques adequades a aquests coneixements previs poden permetre la motivació necessària.
- És bo que ajudem els alumnes i les alumnes a fixar-se fites realistes i a saber avaluar els progressos cap a aquestes fites.
- Caldrà tenir en compte els canvis evolutius i les diferències individuals a l'hora de fer ús de les pautes de motivació acadèmiques.
- Cal fer un ús prudent de la motivació extrínseca i d'aversió tot i evitant-ne nivells alts. Motivar a base d'un excés de càstigs o d'exàmens no ens conduirà massa lluny.

Tot i els anys transcorreguts des de la seva formulació, aquestes idees són de plena vigència a les nostres aules.

2. TEORIES CLÀSSIQUES DE LA MOTIVACIÓ ADAPTADES A L'ÀMBIT ESCOLAR

Tot i que la motivació extrínseca per agradar als pares o al professorat segueix essent una component important de la motivació general de l'alumnat, a les classes de matemàtiques pot haver desaparegut en més d'un cas. El mateix passa amb la motivació de caire competitiu, que pot quedar al marge de sectors molt importants de l'alumnat. En canvi, altres aspectes de la motivació, com ara els que apareixen en el treball cooperatiu i que es lliguen a l'èxit del grup i no de l'individu, poden tenir més vigència a les aules d'avui dia que no pas a les d'abans. La motivació escolar s'ha de veure, doncs, com una entitat viva i dinàmica que evoluciona al llarg del temps.

A mitjan segle XX, van sorgir diverses teories referents a la motivació per al treball i pot ser d'interès estudiar-ne la vigència que poden tenir a les aules ara mateix. Bona part d'aquest treball el trobem al llibre *"Dia del número, motivació de la matemàtica"* de Salvador Vidal i Raméñol⁴¹.

Una primera teoria que val la pena considerar és la de Frederick Herzberg⁴². Segons Herzberg, la clau és en l'enriquiment del treball i això s'aconsegueix amb un seguit de factors com ara les possibilitats de promoció, l'èxit, el reconeixement i l'afrontament de nous reptes. A més, considera que hi ha factors de manteniment que actuen com a condicions necessàries per a la motivació, com ara la confiança, la relació amb els companys, les instal·lacions, etc.

Amb tot, la teoria més coneguda en l'àmbit de la motivació per al treball és la d'Abraham Maslow⁴³. Segons Maslow les persones es motiven per satisfer un seguit de necessitats jerarquitzades de tal manera que sense satisfer un nivell determinat no es pot passar al següent.

(41) La majoria d'idees que es presenten a continuació s'han extret de: VIDAL, S. *Dia del número, motivació de la matemàtica*. Publicacions de l'Abadia de Montserrat: Barcelona, 2005.

(42) HERZBERG, F. *The motivation to work*. Wiley: New York, 1967.

(43) MASLOW, A. *Motivación y personalidad*. Díaz de Santos: Madrid, 1991.

El camí cap a la motivació partiria del que ell anomena les necessitats primàries, com ara les fisiològiques o les de seguretat i evolucionària cap a les necessitats socials i, en darrera instància, cap a les necessitats d'autoestima i d'autorealització.

En l'àmbit estricte de les classes de matemàtiques aquestes idees es poden adaptar per millorar la motivació de l'alumnat. D'una manera molt sintètica, podríem afirmar que tot allò que proporcioni als alumnes i a les alumnes èxit i participació contribuirà clarament a la millora de l'autoestima i de la motivació. Això sí, hi ha un seguit de condicions necessàries prèvies, com ara un bon nivell de convivència amb els companys i el professorat o unes instal·lacions dignes, que han d'estar garantides. Més específicament, aquest èxit i aquesta participació es poden aconseguir a partir de la innovació i de la creativitat, de la varietat, del reconeixement de la feina que fa l'alumnat, del plantejament de reptes assolibles i de la responsabilització en el procés d'aprenentatge. Els alumnes i les alumnes han d'estar informats, han de ser consultats, s'han de sentir acceptats i han de tenir llibertat a canvi d'aquesta responsabilitat en l'aprenentatge.

3. ELS AFECTES I LES EMOCIONS EN L'APRENTATGE DE LES MATEMÀTIQUES

Durant els darrers anys, nombrosos estudis han posat en evidència la gran importància dels factors emocionals i afectius en l'aprenentatge de les matemàtiques. Un excel·lent compendi de tot allò que es relaciona amb aquests aspectes es pot trobar al llibre de Inés Ma. Gómez Chacón⁴⁴ de títol *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*. Bona part de les idees recollides en aquest apartat provenen d'aquest text.

El professor Miguel de Guzmán, que també ha tractat específicament aspectes relacionats amb l'emotivitat i la resolució de problemes (vegeu el capítol 10), ens parla de les misterioses connexions entre les matemàtiques i l'emotivitat⁴⁵:

“Què és allò que fa que un adult intel·ligent pugui apassionar-se per les matemàtiques fins a un grau d'addicció difícil d'imaginar i que un altre, possiblement tan o més intel·ligent, vagi proclamant constantment la seva repugnància i la seva inutilitat per a la mateixa matèria? [...]

De què depèn el fet que un nen que entra a una escola arribi a trobar fascinant el treball de les matemàtiques i que un altre es converteixi en un profund enemic de la mateixa matèria per a tota la vida?

Existeixen les emocions en la matemàtica? Les actituds esmentades més amunt semblen apuntar que, com mínim, existeix un enorme cabal d'afectivitat al voltant del treball matemàtic i que la presa de posició inicial respecte de les matemàtiques és capaç de generar actituds que perduraran tota la vida.”

Entre els matemàtics, fa alguns anys, no semblava massa clar que l'emotivitat tingués un paper important en la disciplina. Un dels primers matemàtics professionals a veure la incidència de les emocions en la matemàtica va ser Paul R. Halmos⁴⁶:

(44) GÓMEZ CHACÓN, INÉS M^a. *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*. Madrid: Narcea, 2000.

(45) Cita recollida al pròleg del mateix llibre: GÓMEZ CHACÓN, INÉS M^a. *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*. Madrid: Narcea, 2000.

(46) Extret de: HALMOS, Paul R. *¿Qué es un matemático?* Madrid: Epsilon, 1991.

“Les matemàtiques tenen un component emocional? La gent sol dir que no, jo, però, penso que sí. Un matemàtic és una persona i té tendència a sentir emocions fortes sobre quina part de les matemàtiques està disposat a suportar i, naturalment, emocions fortes sobre altres persones i les classes de matemàtiques que li agraden.”

La professora Inés Ma. Gómez Chacón té molt clares les implicacions de l'emotivitat en l'ensenyament i l'aprenentatge de les matemàtiques. Aquestes cites⁴⁷ ens aproximen al problema:

“Actualment creix en la consciència col·lectiva la necessitat de revelar els aspectes emocionals del coneixement, en els quals possiblement cal anar a trobar l'arrel de molts fracassos de la nostra vida intel·lectual i, en particular de la nostra educació.”

“Si es desitja millorar l'ensenyament i l'aprenentatge de les matemàtiques sembla convenient tenir en compte els factors afectius de l'alumnat i del professorat. Les emocions, les actituds i les creences actuen com a forces impulsores de l'activitat matemàtica. En molts casos actuen també com a forces de resistència al canvi.”

“La imatge merament racional i freda de l'aprenentatge matemàtic com a disciplina dura deixa pas a la possibilitat d'un aprenentatge en el qual l'exercici racional s'immergeix en un cúmul d'altres elements: afectes, costums, creences...”

“Els alumnes que tenen creences rígides i negatives sobre les matemàtiques i el seu aprenentatge, normalment són aprenents passius i, a l'hora de l'aprenentatge, posen més èmfasi en la memòria que en la comprensió.”

“El professorat també juga un paper de possible model d'actuació. Són dos els àmbits en què aquest paper té una importància més gran: el de la formació d'actituds i el de la resolució de problemes.”

Gómez Chacón considera que és molt important tenir en compte les creences sobre la disciplina matemàtica i esmenta, per exemple, que hi ha molts estudiants de secundària que creuen que tots els problemes de matemàtiques es poden resoldre mitjançant l'aplicació directa de fets, de regles, de fórmules i de procediments mostrats pel professor o presentats als llibres de text, amb la qual cosa acaben per concloure que el pensament matemàtic consisteix a ser capaç d'aplicar fets, regles, fórmules i algorismes. Aquest alumnes només mostren motivació per memoritzar regles, fórmules i algorismes, però no estan interessats ni en els conceptes ni en les connexions que els relacionen. A més, invertiran més temps a fer i a calcular que a reflexionar sobre els problemes.

La mateixa autora apunta quatre aspectes que mesuren l'actitud davant de les matemàtiques:

- La percepció de l'estudiant davant de la utilitat de les matemàtiques.
- L'autoconcepte de l'estudiant o confiança respecte a les matemàtiques.
- La percepció de les matemàtiques des del punt de vista dels alumnes, dels seus pares i dels professors (no té component emocional).
- L'ansietat (fort component emocional).

A partir d'estudis empírics, esmenta cinc aspectes, que estan relacionats amb l'emotivitat, a tenir en compte a l'hora d'abordar el currículum:

- Factors afectius i creences sobre la naturalesa de les matemàtiques.

(47) Cites extretes del llibre: GÓMEZ CHACÓN, INÉS M^a. *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*. Madrid: Narcea, 2000.

- Matemàtiques i cultura: les matemàtiques com a coneixement cultural.
- La influència de la història personal en les actituds i apreciacions.
- Interacció entre cognició i afecte.
- L'autoconcepte de l'alumne com a aprenent de matemàtiques.

Les creences sobre l'aprenentatge de les matemàtiques són, doncs, un factor important en termes de motivació. Els estudiants arriben a les aules amb un seguit d'expectatives sobre com ha de ser la manera en què els professors de matemàtiques els han d'ensenyar i, si no es corresponen amb allò que es troben, es produeix una forta insatisfacció que incideix negativament en la seva motivació.

Des d'una perspectiva general, es poden distingir dues dimensions afectives en relació a les matemàtiques:

1. La dimensió local, que s'expressa moment a moment, activitat a activitat.
2. La dimensió global, que s'expressa al voltant de totes les activitats relacionades amb les matemàtiques i que depèn fonamentalment de les influències socioculturals.

L'autora proposa que els professors i les professores reflexionin sobre els elements que constitueixen el context de l'aula, elements sense la consideració dels quals difícilment hi haurà aprenentatge. Més concretament, esmenta tres qüestions fonamentals:

1. La cultura i els processos socials formen part de l'activitat matemàtica i és convenient que el professorat investigui la identitat social del seu alumnat. Aquesta identitat porta associada un autoconcepte com a aprenents de matemàtiques.
2. La manera d'establir la comunicació entre professors i alumnes és un factor clau per a l'aprenentatge i depèn en bona part de valors i creences sobre allò que són les matemàtiques i el seu aprenentatge.
3. A l'orientació del currículum cal incorporar-hi l'experiència vital i tenir en compte les emocions i l'afecte com a vehicles del coneixement matemàtic.

L'autora proposa que ens plantegem fites afectives locals per ensenyar a resoldre problemes, per exemple a partir de la generació de problemes en situacions de curiositat i d'aprenentatge heurístic. També proposa que ensenyem a combatre l'ansietat, el temor, la por, la desesperació i que els alumnes aprenguin a reconduir aquestes sensacions cap a canvis de direcció que permetin tornar a sensacions positives. Es tractaria de processos de reconstrucció afectiva.

D'altra banda, s'ha de tenir present que el professorat de matemàtiques, a l'hora de fer classe, de manera conscient o inconscient, adopta unes actituds i pren un seguit de decisions que provenen de la seva concepció d'allò que són les matemàtiques i el seu aprenentatge. Aquestes actituds i decisions es transmeten als alumnes i són un factor clau per al clima a l'aula i per a l'aprenentatge de l'alumnat. De la mateixa manera que el professorat reflexiona sobre els conceptes, sobre els procediments i sobre les tècniques que ensenya també convé que reflexioni sobre les actituds culturals que emmarquen la seva feina a l'aula. Gómez Chacón recomana que el professorat, abans d'avaluar quines són les concepcions culturals dels alumnes al voltant de les matemàtiques i d'esbrinar quines emocions els provoca l'activitat matemàtica, avaluï les seves pròpies concepcions sobre la matèria.

4. EXEMPLES DE FITXES PER A L'ESTUDI LOCAL I GLOBAL DE LES EMOCIONS EN EL TREBALL MATEMÀTIC

L'ús d'aquests instruments en algunes activitats matemàtiques dels alumnes contribueix a:

1. Afavorir en l'alumnat el coneixement propi de les reaccions emocionals.
2. Afavorir en l'alumnat el control i la regulació de l'aprenentatge.
3. Permetre que el professorat tingui informació referent a les reaccions afectives de l'alumnat davant dels processos que es treballen.

(Tots aquests instruments s'han adaptat a partir de les idees recollides al llibre d'Inés Ma. Gómez Chacón)

a) Fitxes per a l'estudi local de les emocions

1. Fitxa que els alumnes emplen en després de treballar un problema

1. Com et trobes després d'acabar el problema?			
Molt satisfet	Satisfet	Insatisfet	Molt insatisfet
2. Explica de manera breu perquè et trobes així.			
.....			
.....			
.....			
3. Representa amb una gràfica els teus sentiments, les teves reaccions en el procés de resolució del problema.			
4. Penses que el que has après amb aquest problema, et pot servir per a la teva vida quotidiana?			
.....			
.....			
.....			

2. Mapa d'humor

Es tracta d'un instrument icònic, anàleg als mapes meteorològics, que permet als alumnes expressar les reaccions emocionals que experimenten en el decurs d'una activitat matemàtica. A continuació es presenta una llista de setze emocions que corresponen a setze símbols. Els

símbols poden constar a l'encapçalament o al final de l'activitat i els alumnes només els han d'emmarcar.

Emocions positives	Símbol	Emocions negatives	Símbol
Sentiment de curiositat		Sentiment de bloqueig	
Sentiment de plaer		Sentiment de desesperació	
Sentiment de diversió		Sentiment d'avorriment	
Sentiment d'il·luminació, de joia i de triomf		Sentiment de desconcert	
Sentiment de repte mental		Sentiment d'indiferència	=
Sentiment d'estar animat		Sentiment de pressa	
Sentiment de confiança		Sentiment de confusió	?
Sentiment de tranquil·litat		Sentiment d'impotència	

b) Fitxes per a l'estudi global de les emocions

1. Frases per a completar

Completeu, de manera breu, les frases següents:

1. Els meus professors i professores de matemàtiques són
2. Les matemàtiques són
3. Les meves capacitats en matemàtiques són
4. Per ser bo en matemàtiques
5. Les matemàtiques que treballem a l'aula
6. En matemàtiques jo trobo difícil
7. Un bon professor de matemàtiques hauria de
8. Podria aprendre més matemàtiques si
9. La meva motivació per fer matemàtiques és
10. A primària a classe de matemàtiques jo
11. Ara, a classe de matemàtiques jo
12. La meva experiència més positiva a classe de matemàtiques
.....
13. La meva experiència més negativa a classe de matemàtiques
.....

14. Quan sento la paraula “matemàtiques” jo
15. Quan sento dir que les matemàtiques són interessants jo
16. Quan apreng matemàtiques, jo em sento

2. Qüestionari i eslògan per a les classes de matemàtiques

1. Què t'agradaria aprendre durant aquest curs a les classes de matemàtiques?

2. Què és el que més t'agrada de les classes de matemàtiques?

3. Com t'agradaria que fossin les classes de matemàtiques?

4. Si reflexiones sobre el teu futur professional, què consideres imprescindible d'aprendre en l'àmbit de les matemàtiques?

5. Indica alguns aspectes de les matemàtiques treballades el curs passat que consideres importants i que no convé oblidar.

6. Inventa un eslògan que expressi allò que voldries per a les classes de matemàtiques d'aquest curs i posa'l en aquest marc:

3. Qüestionari per avaluar la dimensió cultural que s'atorga les matemàtiques i el concepte d'aprenentatge de les matemàtiques que té l'alumnat (1)

Expresseu el vostre grau d'acord o de desacord amb les afirmacions següents:

1. Les matemàtiques són un misteri assequible a poques persones.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

2. Aprendre matemàtiques consisteix a memoritzar un seguit de regles i de fórmules que permeten resoldre tots els problemes.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

3. En matemàtiques els punts de vista i les opinions no tenen cap valor.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

4. Les matemàtiques no tenen gaire cosa a veure amb la realitat.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

5. Les matemàtiques no són útils per a la vida quotidiana.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

6. Les matemàtiques només serveixen per estudiar més matemàtiques.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

7. Els professors i les professores de matemàtiques són persones una mica rares.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

8. Només algunes persones estan capacitades per aprendre matemàtiques.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

(Continua a la pàgina següent)

9. Si no vols seguir estudiant, no cal aprendre matemàtiques.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

10. A la nostra societat es miren les matemàtiques amb gran respecte.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

11. Per a la vida adulta n'hi a prou a conèixer les regles elementals de càlcul aritmètic.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

12. Les matemàtiques són una disciplina aspre en la qual no hi ha cap mena de fantasia.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

13. Les matemàtiques es perceben de forma negativa a la nostra societat.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

14. Si un alumne és bo en matemàtiques, vol dir que és molt intel·ligent.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

15. No cal anar a l'escola per aprendre les matemàtiques que es necessiten a la vida quotidiana.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

16. Les matemàtiques són la clau per entendre la realitat.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

17. Els raonaments matemàtics són perfectes.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

(Continua a la pàgina següent)

18. Les matemàtiques també serveixen per jugar i poden ser molt divertides.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

19. Un bon matemàtic no comet mai errors.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

20. Els raonaments matemàtics poden ser de gran bellesa.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

21. Les matemàtiques es poden aplicar a la majoria d'activitats humanes.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

Aquest qüestionari està pensat per passar-lo en iniciar l'activitat formativa. Algunes de les preguntes estan repetides tot i que es formulen amb lleugeres variacions per tal d'assegurar la veracitat i la intensitat de les respostes (així, les preguntes 4, 5, 6, 9, 11 i 15 es relacionen amb la utilitat i l'aplicabilitat de les matemàtiques escolars; la pregunta 1 i la 8 es relacionen amb la percepció elitista de les matemàtiques i les preguntes 2, 3, 12 i 19 es relacionen amb la visió algorísmica de les matemàtiques).

4. Qüestionari per avaluar la dimensió cultural que s'atorga les matemàtiques i el concepte d'aprenentatge de les matemàtiques que té l'alumnat (2)

Expresseu el vostre grau d'acord o de desacord amb les afirmacions següents:

1. Les matemàtiques són un conjunt de conceptes i de procediments que hem de memoritzar.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

2. Les matemàtiques consisteixen a resoldre problemes.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

3. Fer matemàtiques és investigar noves idees.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

(Continua a la pàgina següent)

4. Les matemàtiques són molt abstractes per a mi.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

5. En general aprenc els nous conceptes de matemàtiques ràpidament

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

6. Les matemàtiques són útils.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

7. Em costa molt entendre les matemàtiques.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

8. M'és fàcil relacionar els nous conceptes de matemàtiques amb coses ja apreses.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

Aquest qüestionari, força més breu que l'anterior, es pot passar a l'alumnat després d'uns mesos de classe per observar si hi ha hagut canvis en la percepció de l'activitat matemàtica.

5. Qüestionari per avaluar la confiança en les capacitats pròpies a l'hora de fer matemàtiques i la concepció d'allò que és fer matemàtiques

Expresseu el vostre grau d'acord o de desacord amb les afirmacions següents:

1. Tinc força confiança en la meua capacitat per resoldre problemes de matemàtiques.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

2. M'agrada molt resoldre problemes de matemàtiques.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

(Continua a la pàgina següent)

3. En matemàtiques, el que importa realment és donar bé el resultat final.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

4. Durant el curs, només intento resoldre problemes de matemàtiques si m'ho demana el professor.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

5. Em diverteixo més fent càlculs i operacions que resolent problemes.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

6. Quan un problema de matemàtiques no em surt amb certa facilitat, el deixo estar.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

7. Quan em demanen que resolgui problemes de matemàtiques, em poso nerviós.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

8. M'agrada parlar de matemàtiques amb els meus companys.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

9. Quan trobo un resultat, acostumo a pensar que no serà el resultat correcte.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

10. M'agrada trobar diverses maneres de resoldre problemes de matemàtiques.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

11. En general, sóc capaç de resoldre problemes de matemàtiques sense ajuda d'altres persones.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

(Continua a la pàgina següent)

12. Quan tinc un examen de matemàtiques, sento por.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

13. Quan em plantegen problemes de matemàtiques, sento molta curiositat per conèixer la resolució.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

14. Ara sento molta més confiança quan treballo els problemes de matemàtiques.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

15. Quan un problema de matemàtiques no em surt, ho intento de nou des d'un altre punt de vista.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

16. Quan resolc un problema de matemàtiques, sento una gran satisfacció.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

17. Comentar els problemes de matemàtiques amb els meus companys m'ajuda a resoldre'ls.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

18. Sempre sé quan he resolt correctament un problema de matemàtiques.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

19. Estudiar i treballar les matemàtiques no em fa cap mena de por.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

20. Quan intento resoldre problemes de matemàtiques estic molt tranquil.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

(Continua a la pàgina següent)

21. Abans sentia molta més confiança quan treballava els problemes de matemàtiques.

☐ Totalment d'acord

☐ D'acord

☐ En desacord

☐ Totalment en desacord

El qüestionari anterior, tot i que se centre en l'àmbit de la resolució de problemes, hauria de permetre al professorat fer un diagnòstic referent a la confiança de l'alumnat a l'hora de fer matemàtiques.

Tots aquests instruments de diagnòstic són especialment importants per a l'alumnat amb dificultats d'aprenentatge de les matemàtiques. Això no treu, però, que el seu ús també sigui d'interès amb els altres alumnes. En qualsevol cas, aquest diagnòstic només és el primer pas per possibilitar la millora.

5. LES PROPOSTES DEL PROFESOR JOHN H. MASON

5.1. CONSIDERACIONS INICIALS

El professor John H. Mason, que és un dels més prestigiosos especialistes en didàctica de les matemàtiques, presenta en un llibre de recent publicació⁴⁸, un excel·lent recull d'idees a partir de la seva experiència docent i de les aportacions d'altres professors que poden resultar útils a l'hora de millorar la motivació. La màxima preocupació del professor Mason és la d'aconseguir la implicació de l'alumnat sense que es vegin superats per la feina:

“La perspectiva (didàctica) que tens no és important, potser la qüestió fonamental per a qualsevol professor és com estimular els estudiants perquè prenguin la iniciativa [...]”

“No hi ha res més avorrit i descoratjador que tenir alguna altra persona que et faci tot el treball. Tanmateix, de la mateixa manera, pot ser depriment estar superat per un excés de treball.”

El professor Mason es declara seguidor de les idees de G. Pólya (vegeu el capítol 10) i admirador de les reflexions del matemàtic i professor Paul R. Halmos de qui en recull força cites d'interès, com ara aquesta que es refereix a la necessitat de no donar les coses fetes als alumnes i a l'aprenentatge de les matemàtiques a partir de la formulació de preguntes:

“La part més dura de l'aprenentatge a partir de la formulació de preguntes a l'alumnat és la de tenir la boca tancada i aguantar. No expliquis, pregunta! No canviïs allò que està malament A per allò que està bé B, pregunta, “d'on ha sortit A?”. Segueix amb la formulació de preguntes, “Això està bé, n'estàs segur?”. No diguis “no”; pregunta “per què?”.”

Mason ens parla de la necessitat que els alumnes adquireixin confiança en les seves possibilitats com a estudiants de matemàtiques. Per això mateix deixa clar que no cal obsessionar-se per la magnitud dels programes educatius:

(48) Extret de: MASON, J. *Mathematics teaching practice*. Chichester: Horwood Publishing Series in Mathematics and Applications, 2002.

“És més important que (com a professor) acabis el programa o que els teus alumnes l’acabin, encara que sigui parcialment, amb un bon nivell de comprensió?”

“La confiança i l’èxit van de la mà i són les millors motivacions.”

5.2. ALGUNES ESTRATÈGIES ESPECÍFIQUES

El professor Mason presenta un ampli recull de microestratègies i d’idees per al treball a l’aula. La majoria de propostes són especialment adequades per a l’alumnat de batxillerat tot i que moltes es poden adaptar clarament als alumnes de secundària obligatòria. A continuació es presenten ordenades en blocs.

Diversificar el pensament

- Oferiu als estudiants diverses maneres de pensar sobre un objecte o una situació. Això contribuirà a flexibilitzar la seva mentalitat.
- És important diversificar la manera d’enfocar els problemes. Així els alumnes seran també més flexibles quan hagin de treballar pel seu compte. Des de la mateixa perspectiva, també és important diversificar les notacions.
- Acostumeu els alumnes a establir connexions entre aspectes diversos de la matemàtica. Mostreu-los les connexions sempre que sigui possible quan trebal·leu amb exemples.

Correccions i errades

- Elaboreu llistats amb les errades més freqüents.
- Feu comentar les correccions, les errades i els encerts en grups de discussió que tinguin un alumne coordinador.
- Quan es fan correccions de proves o d’exercicis, remarqueu també els aspectes positius i no només els negatius.

Sessions expositives

- Eviteu els formalismes i els pressupòsits que no siguin clars per als alumnes.
- Aneu en compte amb les paraules que tenen un sentit en l’àmbit matemàtic i un altre en el llenguatge col·loquial.
- Indiqueu quin és l’origen de la terminologia sempre que sigui possible.
- Aneu en compte quan expliqueu o exposeu exemples “típics”. Pot ser que els alumnes no distingeixin els aspectes de l’exemple que permeten aplicar els conceptes matemàtics tractats dels aspectes que no tenen importància. El professorat ha de ser prudent i s’ha d’esforçar a recalcar quins són els aspectes essencials i quines qüestions són accessòries.

- És molt important dominar les pauses en les sessions expositives i saber emfasitzar els aspectes que són més importants en allò que estem comunicant als alumnes.

Ús de materials i de mitjans multimèdia

- Dueu objectes a l'aula sovint i feu reflexionar els alumnes sobre les matemàtiques que es relacionen amb l'objecte.
- L'ús de transparències, de diapositives i de presentacions de PowerPoint, i de materials multimèdia en general demana un exercici de prudència per part del professorat. D'entrada cal donar temps als estudiants per assimilar allò que es presenta i més val tractar-ho tot plegat com a objecte de reflexió.

La implicació i la participació dels alumnes

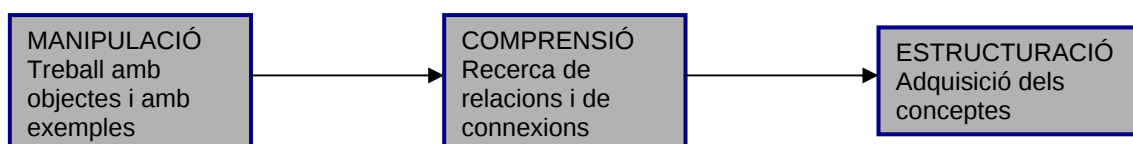
- El professor ha de considerar les expectatives dels seus alumnes.
- És convenient establir conjuntament amb els alumnes plans de treball amb un calendari explícit.
- Una bona estratègia consisteix a fer parlar els alumnes en parelles de manera que s'expliquin els conceptes o les idees que han sortit a classe durant uns minuts.
- És molt útil estimular les discussions i les explicacions entre estudiants. El professor no ha de témer que emprin argumentacions falses que els facin error. De la mateixa manera que quan els alumnes veuen una argumentació impecable del professor o de la professora no hi ha cap garantia que hi hagi un aprenentatge correcte, no hem de pensar que una argumentació errònia comporta absència d'aprenentatge. Encara que les explicacions entre els alumnes siguin incompletes o fins i tot falses, l'esforç d'expressar els seus pensaments és una contribució important per al seu aprenentatge.
- En acabar una classe, és interessant fer escriure als alumnes una frase que reculli o que resumeixi allò que s'ha fet.
- Encarregueu a alguns alumnes la tutorització matemàtica de l'aprenentatge d'altres alumnes.
- Genereu discussions entre els alumnes al voltant de les diverses vies de resolució d'un problema.
- Feu que els alumnes individualment o en grup proposin exemples concrets d'aplicació d'algun concepte i que un altre alumne o un grup d'alumnes facin de controladors de les propostes presentades.
- Feu apuntar les estratègies i les reflexions dels alumnes a les llibretes.
- Demaneu presentacions dels treballs fets a casa individualment o en grup.
- No convé donar les coses fetes als alumnes. Si es volen potenciar les capacitats matemàtiques dels estudiants, els professors els ho han de deixar ben clar i els han de demanar que prenguin la iniciativa, que expressin les seves idees matemàtiques, que es

formin imatges matemàtiques, que formulin conjectures, que ordenin, que classifiquin i que organitzin el seu treball matemàtic.

5.3. ESTRATÈGIES DIDÀCTIQUES GENERALS

El professor Mason també proposa tres possibles marcs o sistemes de treballar les matemàtiques a l'aula compatibles entre ells.

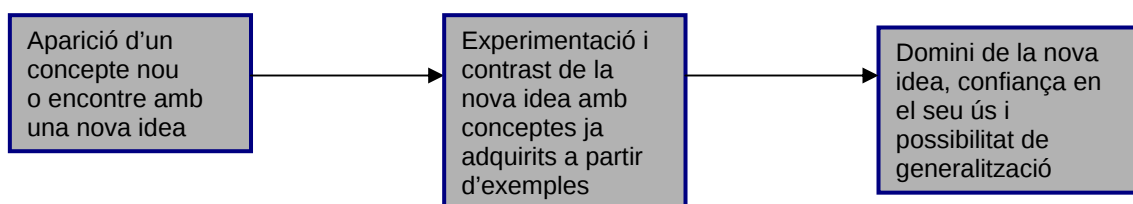
Esquema 1



Aquest primer sistema s'ha de repetir cada cop a nivell més alt, en un procés helicoïdal de complexitat creixent.

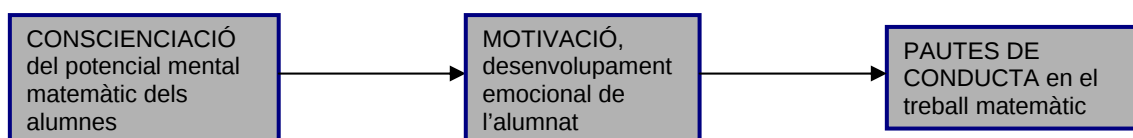
Esquema 2

En un segon esquema, proposa els passos a seguir quan apareixen nous conceptes:



Esquema 3

Finalment, fa una proposta en l'àmbit de la motivació per al treball matemàtic:



6. LES RAONS PER ESTIMAR LES MATEMÀTIQUES DEL PROFESSOR CLAUDI ALSINA

És possible que els nois i les noies aprenguin a estimar i a apreciar les matemàtiques? Potser, d'entrada, es tracta de superar la por i les reticències que provoca aquesta matèria i descobrir-ne els aspectes més encisadors tal i com ens ho deia Sofia Kovalióvskaja (1850-1891)⁴⁹:

“Moltes persones que no han tingut mai l'ocasió de descobrir més coses al voltant de les matemàtiques les confonen amb l'aritmètica i les consideren una ciència seca i àrida. Tanmateix, en realitat, són una ciència que exigeix la màxima imaginació.”

(49) Cita recollida al llibre: *Matemáticas, guía práctica para la vida cotidiana* de José Alberto Álvarez Nebreda i Ginés García Soto.

El professor Claudi Alsina esmenta tres raons per estimar les matemàtiques. També apunta, però, la dificultat de la seva invisibilitat⁵⁰:

“Com veureu, hem optat per dividir l’obra en tres grans apartats, que són tres grans raons per estimar les matemàtiques. Una primera raó és perquè són divertides, perquè ens ofereixen reptes i qüestions per les quals, intel·lectualment, ens podem sentir atrets i distrets. Una segona raó és perquè són curioses i sorprenents, és a dir que poden captar la nostra atenció i sorprendre les nostres expectatives o alterar el nostre sentit d’allò que és esperable i no resulta ser-ho. Una tercera raó és perquè són útils i formatives, atesa la situació privilegiada de les matemàtiques en estar lligades a la nostra vida quotidiana, per la qual cosa tenim la possibilitat de fer-les nostres i veure el món matemàticament quan ens interessi.”

“Curiosament la matemàtica és moltes vegades com un iceberg, no en el sentit del Titànic de fer enfonsar molta gent, sinó en el sentit que hi ha més matemàtiques amagades que visibles. Per tant, és bo adonar-se de les moltes coses que usen matemàtiques o que són possibles, indirectament, gràcies a aquestes.”

Les dificultats d’aproximar-se a les matemàtiques des del plaer no són cap misteri⁵¹:

“Llegir, escriure i comptar són tres reptes escolars fonamentals. Els nens i les nenes adquireixen un coneixement progressiu d’aquestes habilitats al llarg de tots els estudis. En el cas de la *lectura*, sovint s’aconsegueix que nens i nenes acabin descobrint el *plaer de llegir*, i són una majoria els que gaudeixen de la literatura. En el cas de l’*escriptura*, els nens i les nenes acaben descobrint el *plaer de comunicar-se* i escriuen diaris i cartes, s’envien missatges per correu electrònic, etc. En el cas de les *matemàtiques*, els nens i les nenes acaben *comptant* però no acostumen a descobrir *cap plaer per fer-ho*.”

Tal i com ens explica el doctor Alsina fer que els nois i les noies no estimin les matemàtiques és relativament senzill: reduir les matemàtiques a algorismes numèrics, plantejar problemes sense interès, fer abstraccions no apropiades, etc., etc., etc. En canvi, aconseguir que els alumnes les aprenguin i també que les estimin, perquè arribin a descobrir el *plaer de matematitzar* és una feina que demana imaginació i innovació per part del professorat. El professor Alsina ens proposa fins a vuit estratègies per aconseguir-ho:

1. Fer estimar les matemàtiques... formant

Difícilment podem estimar sense conèixer! Conèixer no és suficient però és imprescindible. L’avantatge en aquest cas és que les matemàtiques es poden anar coneixent i dominant progressivament, i això dona una enorme seguretat. Quan avui parlem de formació, no sols ens referim a donar les bases per a l’estudi dels nombres, l’àlgebra, la geometria, la mesura i l’anàlisi de dades i probabilitat. També hem d’incloure aquí la resolució de problemes, el raonament i la demostració, la comunicació matemàtica, l’establiment de connexions i les diferents formes de representació (NCTM 2000)⁵².

(50) Extret de: ALSINA, C. *Estimar les matemàtiques*. Barcelona: Columna, 2000.

(51) Aquesta cita i les idees que vénen a continuació han estat extretes de la conferència pronunciada pel professor Claudi Alsina de títol *FER ESTIMAR LES MATEMÀTIQUES* recollida a la seva pàgina web (<http://www.upc.es/ea-smi/personal/claudi/>) i que formava part del curs CURS PER A L’ACTUALITZACIÓ DE L’ENSENYAMENT/ APRENENTATGE DE LA MATEMÀTICA organitzat per la Direcció General d’Ordenació i Innovació Educativa.

(52) Les referències bibliogràfiques que el professor Alsina inclou en la seva conferència i que s’esmenten aquí són les següents (es preseten per ordre d’aparició):

NCTM, Principles and Standards for School Mathematics. NCTM-USA (2000).

ALSINA, C. *Contar bien para vivir mejor*. Rubes, Barcelona (1998).

GIMÉNEZ, J., GIRONDO, L. *Càlcul a l’escola*. Graó, Barcelona (1990).

ALSINA, C., BURGUÉS, C., FORTUNY, J.M., GIMÉNEZ, J., TORRA, M. *Ensenyar matemàtiques*. Graó, Barcelona (1996).

CANALS, M.A. *Viure les matemàtiques de 3 a 6 anys*. Col. Temes d’Infància, Rosa Sensat, Barcelona (2000).

2. Fer estimar les matemàtiques... relacionant-les

En els primers nivells és especialment útil facilitar que els nens i les nenes relacionin coses, facin connexions, estableixin lligams. I en el cas de les matemàtiques, és aconsellable que aquestes relacions, especialment amb l'àrea de llengua, no deixin la matemàtica aïllada. L'especialització dels ensenyants és per a l'aprenentatge un problema: les branques no deixen veure el bosc. I avui és important transmetre confiança en la ciència i en les matemàtiques, apreciar-ne el valor cultural i induir a informar-se bé sabent llegir dades i prenent decisions raonables en el context de la nostra vida.

3. Fer estimar les matemàtiques... aplicant-les

Aplicar les matemàtiques per resoldre problemes, veure que les matemàtiques són útils i que per això estan presents a la vida quotidiana, descobrir les matemàtiques amagades en la realitat visualitzant-ne la presència (Alsina, 1998)... Tot això pot provocar, com a mínim, una estimació interessada! Però l'aplicabilitat no sols és una bona ajuda "motivadora", sinó que el mateix procés de fer veure com lliga la realitat amb la matemàtica és interessant.

4. Fer estimar les matemàtiques... sorprenent

En ensenyar matemàtiques podem crear sorpreses docents en la forma de presentar conceptes o resultats i també tenim la possibilitat de sorprendre amb els mateixos resultats o amb l'ús o l'aparició inesperada d'aquests. El professor Lluís A. Santaló diu, en aquest sentit: "Que la classe sigui atractiva, que l'alumne tingui ganes d'anar a classe... que s'hi senti bé." Per això parlem de sorpreses, com el trencament de la repetició i de la monotonia.

5. Fer estimar les matemàtiques... engrescant

Les matemàtiques no són mai ni avorrides ni divertides en si mateixes. No són ni pitjors ni millors que les altres matèries. Poden ser divertides i engrescadores si ens ho proposem. En concret, a través de jocs, música, dansa, etc. podem trobar aproximacions lúdiques ben interessants.

6. Fer estimar les matemàtiques... actualitzant-les

És interessant mirar l'actualitat i descobrir com les matemàtiques poden ser la clau de molts temes de gran impacte social (notícies, informacions, diaris, revistes...). Poden ser motors de l'actualització matemàtica de molts processos tecnològics, avenços científics, etc. que faciliten la nostra vida actual. Estimar ara i avui els avantatges que les matemàtiques donen és important. I integrar-hi la tecnologia també ho és (Giménez-Gironde, 1990), (Alsina, 1996). L'ús de la calculadora és imprescindible, però aquest ús ha de ser compatible amb una bona pràctica en el càlcul mental.

7. Fer estimar les matemàtiques... intrigant

Hi ha relacions geomètriques, aparicions numèriques, fets matemàtics que tenen un cert ingredient d'intriga. Aquesta intriga la podem explotar docentment (Canals, 2000).

8. Fer estimar les matemàtiques... emocionant

Però no és que educar bé sigui morir-se de riure. Passar-ho bé és magnífic i cal aconseguir-ho, encara que també altres emocions positives poden ser fantàstiques. A molts nens i nenes les matemàtiques els fan plorar com a emoció negativa associada a les males notes. Us proposo lligar també matemàtiques i emoció.

El professor Alsina considera que el professorat s'ha de preocupar que la seva formació generi també estimació perquè aquesta estimació durà els alumnes a una actitud positiva que resulta del tot imprescindible per continuar aprenent matemàtiques. La feina puntual, el dia a dia, no ha d'impedir el professorat de veure una tasca a més llarg termini consistent a aconseguir que l'alumnat treballi les matemàtiques amb goig i amb satisfacció:

“Però estimar les matemàtiques no és una lliçó d'un dia, no és una matèria psicopedagògica, no és un curs especial. Estimar les matemàtiques és el valor afegit de fer matemàtiques jugant amb els sentiments nobles: combinar el cap i el cor. I fer-ho cada dia. Dit d'una manera més contundent: *és tan important el “que” facin de matemàtiques com el “com” ho facin.*”

“La gent, majoritàriament, no recordarà en el futur la majoria de coses que els hem explicat. Però el que sí que recordaran per sempre més és a tots nosaltres! Vet aquí on sempre trobarem *una forma efectiva de fer estimar les matemàtiques: fent evident i palès que nosaltres les estimem.* És aquesta passió que posaran a classe en explicar o debatre coses, és aquest interès per la gent, és aquest “fer seu” allò que tenen entre mans el que impactarà la seva classe.”

Tot plegat ens pot semblar una mica utòpic. Aquesta és, però, precisament la reivindicació del doctor Alsina. El professorat de matemàtiques no ha de renunciar a la utopia⁵³ del reconeixement social de la feina que fa a les aules, a la utopia del compromís social amb aquesta tasca i a la utopia de l'estímul extern per al treball de les matemàtiques. També reivindica, en l'àmbit del professorat, les utopies de l'autoestima, de la renovació i de la col·laboració:

“Seria primordial que tots, com a grup, creguéssim a fons allò que nosaltres mateixos fem i com n'és d'important que ho fem. [...] Això comporta que ens alliberem globalment de moltes servituds particulars que ens priven de veure el panorama general. Aquesta angoixa col·lectiva per als exàmens, per acabar els programes, per servir coneixements,... hauria de donar pas a una visió més global de les matemàtiques, a una atenció preferent cap a les actituds, a una distinció clara entre allò que és essencial que ensenyem i allò que és simplement un compromís circumstancial.”

“Seria desitjable que tot el col·lectiu de professors de matemàtiques assumís la renovació com a manera de fer i no com a resposta a imposicions externes.”

No cal amagar pas que ara mateix tot plegat és de força complicació per al professorat de matemàtiques. Malgrat tot val la pena tenir en compte una nova recomanació del professor Alsina⁵⁴:

“Tot sovint, en l'ensenyament i l'aprenentatge de les matemàtiques s'expliquen els meravellosos conceptes i resultats de la reina de les ciències; injustament, però, s'oblida incorporar al relat referències humanes, dades i perspectives històriques de tots aquells matemàtics que han viscut, creant o transmetent, allò que se'ns presenta perfectament acabat. Sense pretendre que la història de la matemàtica hagi d'explicar-se amb tota mena de detalls, sí que seria desitjable emfasitzar, encara que només fos de passada, en el caràcter humà, tendre o emocional que hi al darrera de qualsevol creació científica.”

Les anècdotes i l'humor a les classes de matemàtiques són sense cap mena de dubte recursos que atrauen poderosament l'atenció emotiva de l'alumnat i els professors i les professores de matemàtiques ho hem de tenir ben present.

(53) Algunes d'aquestes idees s'han extret de la conferència del doctor Alsina de títol *ENTRE LA REALIDAD Y LA UTOPIA...NOSOTROS, LOS DE MATE* recollida també al seu web (<http://www.upc.es/ea-smi/personal/clauidi/>).

(54) Extret de: ALSINA, C. i De GUZMÁN, M. *Los matemáticos no son gente seria*. Rubes, Barcelona (2003).

7. UNA OBSERVACIÓ FINAL

La majoria d'idees i de propostes recollides als apartats anteriors no són excloents, més aviat tot el contrari, es poden complementar i usar alternativament o simultàniament. En els propers capítols es tractarà de desenvolupar-les i d'exemplificar-les per passar de l'àmbit teòric a l'àmbit real del treball a l'aula.

CAPÍTOL 5: LA UTILITZACIÓ DE LES NOVES TECNOLOGIES A LES CLASSES DE MATEMÀTIQUES COM A ELEMENT DE MOTIVACIÓ

Tot i que pràcticament tothom sembla creure que els mitjans informàtics s'han incorporat a les aules de matemàtiques de secundària, l'ús real que se'n fa a les classes s'ha de considerar més aviat escàs. Aquest capítol es proposa estudiar quin ús didàctic es pot fer d'aquests mitjans com a instruments de motivació.

1. ALGUNES CONSIDERACIONS INICIALS

La professora Fidela Velázquez⁵⁵, de la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas Isaac Newton, apunta el problema que hi ha amb l'escassa utilització de les noves tecnologies a les classes de matemàtiques:

“Tot i els avantatges de l'ús de les tecnologies de la informació i la comunicació que les fan extremadament útils en el camp de l'ensenyament i l'aprenentatge de les matemàtiques, encara existeixen diverses circumstàncies que dificulten no tan sols tenir-hi accés sinó també una difusió més àmplia entre tots els sectors professionals i socials.”

D'altra banda, a secundària s'observa també sovint, una utilització de les TIC anecdòtica, de complement, de joc per aquells dies en què no es vol fer feina de la considerada “seriosa i vertadera”. Això denota la gran dificultat que hi ha per relacionar el currículum amb les noves tecnologies.

Hi ha, de fet, una multiplicitat de causes que expliquen la situació. A les dificultats de disponibilitat, de manteniment i de gestió de les aules informàtiques s'hi afegixen l'absència de canons de projecció, el desconeixement del software i certa inseguretat amb els mitjans informàtics entre alguns sectors del professorat, la gran dificultat d'incorporar les activitats informàtiques al desenvolupament del currículum, els problemes econòmics i idiomàtics i els problemes de dependència d'aquests tecnologies que mostren alguns adolescents, els problemes de seguretat i d'accés a pàgines no desitjades, etc.

El professor Claudi Alsina⁵⁶ reclama que la incorporació de les TIC es faci sense por:

“La tecnologia no és substitució sinó una font de noves possibilitats. S'ha d'emprar sense por.”

Fidela Velázquez⁵⁵ deixa clar que les TIC no són un objectiu per elles mateixes:

“Les tecnologies de la informació són un mitjà, no una finalitat”

Altres autors, com ara Bernardo Gómez Alfonso⁵⁷ o Peter Hilton⁵⁸, reclamen la utilització de les noves tecnologies per alliberar les matemàtiques escolars de l'avorriments dels càlculs rutinaris:

(55) Extret de: VELÁZQUEZ, F. [et al.]. *Matemáticas e internet*. Barcelona: Editorial Graó, 2004.

(56) Extret del capítol elaborat per Claudi Alsina a: GOÑI, J.Ma. [et al.]. *El currículum de matemáticas en los inicios del siglo XXI*. Barcelona: Graó, 2000.

(57) Extret de: GÓMEZ, B. *Numeración y cálculo*. Madrid: Editorial Síntesis (Col·lecció Cultura y aprendizaje núm.3), 1993.

(58) Extret del capítol elaborat per Peter Hilton a: GORGORIÓ, N. [et al.]. *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*. Barcelona: Graó- ICE UAB, 2000.

“Avui dia el càlcul és personal i no va més enllà d’aquell que es pot fer mentalment, la resta és amb calculadora i només s’hi escriuen els resultats. No és raonable pensar que el nen només hauria d’aprendre a fer allò que no poden fer les màquines o que ell pot fer millor que les màquines?”

“La necessitat d’una reforma a l’ensenyament de les matemàtiques a nivell preuniversitari pot basar-se en tres consideracions fonamentals. La primera, i la més important, és que, en el món actual, el pensament matemàtic és de vital importància en el món adult, tant com a ciutadà com des de la perspectiva professional, i totes les dades de què disposem suggereixen que aquesta importància serà fins i tot més gran en el futur [...]. En segon lloc, hem d’admetre que l’ensenyament actual de les matemàtiques no és una empresa amb èxits manifestos. Tot sovint, una dosi substancial d’aquesta pretesa educació matemàtica condueix amb massa freqüència al desgrat per la matèria i a la incompetència matemàtica, de manera que una gran part dels adults, després de 12 anys lluitant amb l’assignatura, només se senten còmodes amb les operacions bàsiques de l’aritmètica elemental amb nombres naturals. A més, aquest desgrat i la incompetència en la matèria afecten freqüentment persones sensibles i intel·ligents. Aquestes persones són propenses a fer pública la seva manca de coneixement matemàtic com si fos una virtut positiva i contribueixen a crear l’absurda llegenda que ser analfabet matemàtic és digne d’encomi [...].

En tercer lloc, la disponibilitat de l’ordinador i de la calculadora, especialment de la calculadora gràfica, hauria de tenir una influència significativa sobre allò que ensenyem i sobre com ho ensenyem. Ara podem eliminar gran part de la monotonia de l’aritmètica elemental i de les manipulacions simbòliques de l’àlgebra i del càlcul infinitesimal, amb la qual cosa hi hauria d’haver una forta tendència a restar importància a aquests temes.”



Les calculadores formen part de l’activitat habitual a les aules tot i que és possible que no estigui prou estudiat l’ús que se n’ha de fer. Molts alumnes tenen una dependència malaltissa de la calculadora i el difícil equilibri entre càlcul escrit, càlcul mental i càlcul amb calculadora sembla decantar-se, massa sovint, a favor del càlcul escrit. Aquest fenomen només té lloc a l’àmbit escolar i torna a allunyar-lo de la realitat i de la vida quotidiana que prioritza clarament el càlcul mental i el càlcul amb calculadora.

2. ÚS DE LES NOVES TECNOLOGIES A L’AULA

La utilització de les noves tecnologies a l’aula pot ser molt diversa. En aquest apartat es presenten quatre opcions o quatre possibilitats d’ús de les TIC. No es pretén, però, fer una classificació exhaustiva i és evident que hi ha moltes més opcions a més de les exposades.

2.1. ÚS DE PROGRAMES ESPECÍFICS PER TREBALLAR LES MATEMÀTIQUES

L'experiència docent personal m'ha permès comprovar que la utilització de programes per al treball de les matemàtiques, com ara el Cabri per fer geometria, el Derive per treballar les funcions o el Geogebra per combinar ambdues coses, dóna molt bons resultats des del punt de vista de la motivació de l'alumnat. A continuació es comenta com es poden usar i es donen exemples d'activitats amb els dos programes.

EXEMPLE 1: EL PROGRAMA CABRI-GÉOMÈTRE

El programa Cabri-Géomètre és un material que proporciona unes possibilitats excel·lents de treball de la geometria a l'aula. Aquest programa és el que s'anomena un *entorn geomètric dinàmic* i el principi bàsic del seu disseny és permetre la construcció de figures geomètriques a partir dels anomenats objectes bàsics (com ara punts, rectes, segments, circumferències, etc.) i d'un seguit de relacions (com ara punt mitjà, paral·lela, perpendicular, simetria, gir, etc.) que l'usuari selecciona des d'un menú. Quan s'ha construït una figura, es poden moure els objectes bàsics i observar a la pantalla les modificacions. Cada element del dibuix es mou de forma contínua i es mantenen les característiques geomètriques de la construcció feta. L'usuari treballa, doncs, amb tota una categoria de dibuixos cadascun dels quals és un cas particular de la construcció feta. Això permet observar experimentalment quines propietats són invariants i quines no ho són.

El programa servirà per a tot el que sigui geometria plana (però també per donar representacions planes de l'espai). De fet, fa essencialment tot allò que es pot fer amb regla i compàs. Té, a més, l'atractiu, la nitidesa i les facilitats que proporciona el suport informàtic i, com s'ha dit, l'avantatge de poder sotmetre a moviments els objectes geomètrics del pla. A més, l'alumnat pot experimentar amb el programa -que compta amb ajudes senzilles- d'una forma autònoma. Això facilita molt la tasca al professorat.

Cal fer esment també de la recent aparició del programa Cabri 3D que permet el treball amb representacions planes de políedres, cilindres, cons i esferes.

A primària, és d'esperar que l'alumnat hagi tingut algun contacte amb els mitjans informàtics. Tanmateix, no hauria de ser un gran conflicte que els primers contactes amb els ordinadors fossin a través del Cabri-Géomètre, al contrari, el programa pot servir com a context excel·lent en aquest sentit.

L'ensenyament i l'aprenentatge de la geometria pot adquirir una nova dimensió, no exempta de dificultats, amb l'ús d'aquest tipus de programes. El professor Nicolas Balacheff⁵⁹, especialista en el tema del CNRS francès, precisa:

“En primer lloc, els entorns informàtics poden facilitar que l'alumnat desenvolupi noves concepcions en relació amb els objectes matemàtics de formes que encara no estem preparats per afrontar.

En segon lloc, plantegen al professorat nous problemes en el diagnòstic de la comprensió i la producció dels estudiants [...]”

Des d'aquesta perspectiva, cal actuar amb prudència. És important que el professorat tingui un bon coneixement del programa. A més, sembla recomanable compatibilitzar l'ús del Cabri amb l'ús dels instruments tradicionals (regla, escaires, compàs, etc.) per fer geometria.

L'experiència docent permet també fer les precisions següents:

- a) És recomanable que l'alumnat aprengui el maneig del programa sobre la marxa, conforme vagin sorgint els problemes o exercicis de construcció.

(59) Extret del capítol de títol, *Entornos informáticos para la enseñanza de las matemáticas: complejidad didáctica y expectativas*, contingut al llibre: GORGORIO, N. [et al.]. *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*. Barcelona: Graó i ICE Universitat de Barcelona, 2000.

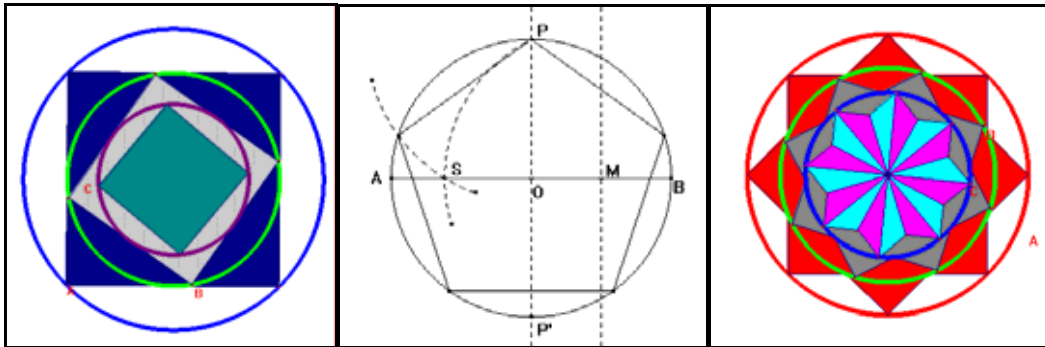
- b) A més, es recomana donar a l'alumnat el màxim d'autonomia possible. L'ús de les ajudes que proporciona el programa -i la seva comprensió- pot ser força instructiu.
- c) És evident que tot això només serà possible si es tenen pocs alumnes per ordinador.
- d) Es recomana fer un ús esporàdic, però abundós, del programa com a complement a cada activitat o grups d'activitats. Així es trencarà la monotonia i, potser, s'aconseguiran motivacions suplementàries. No sembla gens aconsellable que el programa substitueixi totalment l'ús del regle i el compàs.

A continuació s'exposa un exemple per al treball amb Cabri.

Exemple d'activitat amb Cabri: Inscripció de polígons

Activitat a desenvolupar en grups de dos alumnes.

Materials necessaris: llapis i paper, transportador d'angles, ordinador i programa Cabri-Géomètre.



1. Es vol fer un logotip en el qual hi hagi un cercle vermell que té inscrit un hexàgon verd. Feu un croquis del logotip.
2. Es vol fer el dibuix del logotip de forma precisa fent ús del programa Cabri-Géomètre:
 - i) Creeu una circumferència.
 - ii) Com podeu inscriure-hi de manera exacta l'hexàgon inscrit?
3. Us encarreguen també un logotip que consisteix en un triangle equilàter inscrit en una circumferència. Feu-ne el croquis.
4. Feu el dibuix del triangle inscrit en la circumferència de manera precisa amb el programa Cabri-Géomètre. Ajudeu-vos amb el dibuix fet a l'apartat 2.
5. Podríeu fer servir els apartats anteriors per inscriure un polígon regular de dotze costats en una circumferència? Feu el dibuix amb Cabri. Per cert, quin nom li poseu a aquest polígon?
6. En els apartats anteriors heu vist com es poden inscriure triangles equilàters, hexàgons i dodecàgons en una circumferència. Es podrà inscriure qualsevol polígon en una circumferència de manera exacta fent ús del regle i del compàs o del programa Cabri? Què us en sembla?

7. Proveu d'inscriure un quadrat en una circumferència fent ús del programa Cabri. Ajudeu-vos, si cal, amb un croquis.

8. Aproveiteu la feina feta a l'apartat anterior per tal d'aconseguir l'octàgon regular inscrit.

9. Amb el pentàgon les coses s'emboliquen. Es pot provar d'aclarir-ho una mica.

9.1. Feu un croquis amb un pentàgon regular inscrit en una circumferència.

9.2. Feu un dibuix més precís usant el transportador d'angles. Recordeu com podeu esbrinar quins són els angles centrals i interiors del pentàgon regular?

9.3. El dibuix exacte amb regla i compàs o amb Cabri del pentàgon inscrit en una circumferència no és pas senzill. Seguiu aquestes instruccions per fer-lo:

Creeu una circumferència i el seu centre O .

Traceu un diàmetre d'extrems A i B .

Traceu la mediatriu del diàmetre AB . Tallarà la circumferència en els punts P i P' .

Determineu el punt mitjà del radi AO i anomeu-lo M .

Traceu la circumferència de centre M i radi MP o MP' .

Sobre el diàmetre AB la circumferència anterior determina un punt S .

Aleshores el costat del pentàgon inscrit és precisament el segment PS (i el costat del decàgon inscrit és el segment OS).

Ara podeu completar el pentàgon inscrit, i el decàgon també.

10. Traceu les diagonals del pentàgon i l'estrella de cinc puntes.

11. Traceu les circumferències inscrites en els polígons dels apartats anteriors.

12. Ja sabeu inscriure triangles equilàters, hexàgons i dodecàgons; quadrats, octàgons i hexadecàgons; pentàgons i decàgons. Heu reeixit, doncs, amb polígons de 3,6,12,... i 4,8,16,... i 5,10,... costats. Us queda la família que comença amb el 7: què passa amb l'heptàgon? Repetiu les passes de l'apartat 9:

12.1. Feu un croquis amb un heptàgon regular inscrit en una circumferència.

12.2. Feu un dibuix més precís usant el transportador d'angles. Recordeu com podeu esbrinar quins són els angles centrals i interiors de l'heptàgon regular?

12.3. Per més que us hi esforceu amb el transportador no podreu fer un dibuix exacte. El dibuix exacte amb regla i compàs o amb Cabri de l'heptàgon inscrit en una circumferència no és que sigui difícil, és impossible de fer! No ha estat gens fàcil arribar a aquesta conclusió. Vegeu-ho a la lectura de l'apartat 13. Abans, però, vegeu un altre mètode de construcció aproximada que es pot fer amb regla i compàs o amb Cabri:

Creeu una circumferència.

Determineu un punt A sobre la circumferència.

Traceu el diàmetre que passa pel punt A . Anomeu B el seu altre extrem.

Dividiu aquest diàmetre en 7 parts iguals fent ús del teorema de Tales.

Trobeu el punt M que forma un triangle equilàter amb A i B .

Anomeu t la recta que uneix el punt M amb la segona divisió del diàmetre AB .

Si tal·leu t amb la circumferència obtindreu el costat de l'heptàgon inscrit aproximat.

13. LECTURA

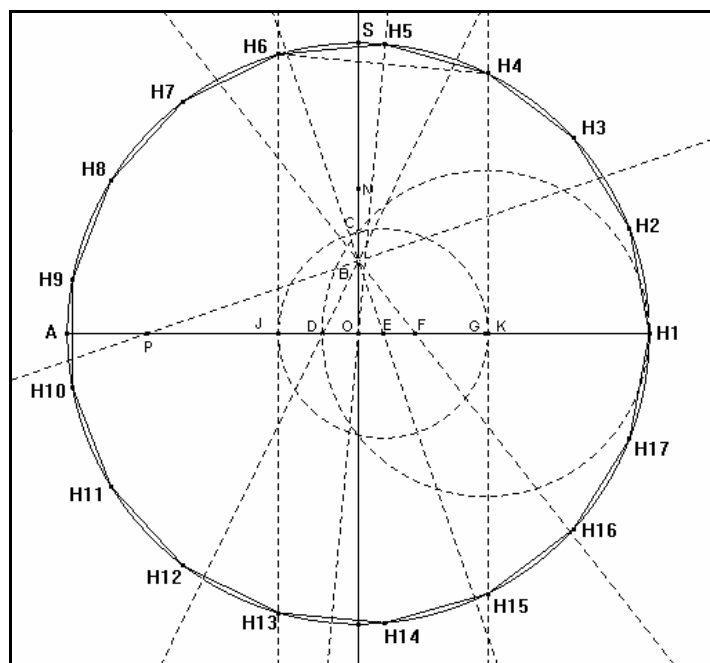
La història de la inscripció dels polígons regulars

Les columnes dels temples grecs tenen un seguit d'estries iguals. Els arquitectes grecs ho aconseguïen dividint la circumferència en parts iguals o, el que és el mateix, inscrivint-hi polígons regulars.

No és estrany, doncs, que es fessin la pregunta de quins polígons regulars es podien inscriure en una circumferència, com sempre amb regla i compàs. Van reeixir amb el triangle equilàter, amb el quadrat, amb el pentàgon, amb l'hexàgon, amb l'octàgon, amb el decàgon i amb els polígons regulars de 12, 15 i 16 costats, però no els va ser possible fer-ho amb l'heptàgon regular, ni amb els polígons de 9, 11, 13 i 17 costats.

Aquests problemes van resistir 2000 anys fins que, al començament del segle XIX, el matemàtic alemany Karl Friedrich Gauss (1777-1855) va trobar-ne la solució. De nen, Gauss, va ser d'una precocitat extraordinària i, més d'una vegada, va deixar bocabadats els seus mestres. De gran se'l coneixia com "princeps mathematicorum" (el príncep de les matemàtiques). Va fer contribucions de la màxima importància en àrees molt diverses de les matemàtiques.

El seu primer gran descobriment, tot just quan tenia 18 anys, va ser un mètode per construir el polígon regular de 17 costats que, tal i com hem dit, havia resistit tots els intents des de l'any 500 a.C. Precisament aquest èxit el va decidir a ser matemàtic i no filòleg, la seva altra gran vocació. Quan va morir, els seus deixebles li van erigir a Göttingen, la seva ciutat natal, una estàtua en el pedestal de la qual hi van posar un polígon regular de 17 costats. Aquesta és la construcció del jove Gauss:



Déu n'hi do el jove Gauss, no?

Amb això, però, encara no en va tenir prou i uns anys més tard, Gauss va demostrar que només es poden inscriure amb regla i compàs els polígons el nombre de costats dels quals es descompon en factors primers que siguin dos o nombres del tipus:

$$p = 2^{2^n} + 1$$

Aquests nombres no són necessàriament primers: per a $n = 5$ surt 4.294.967.297 que és divisible per 641. Fermat va conjecturar que tots podrien ser primers, però Euler va trobar el contraexemple que hem donat.

Així, per exemple, s'obté:

per a $n = 0$, $p = 3$

per a $n = 1$, $p = 5$

per a $n = 2$, $p = 17$

per a $n = 3$, $p = 257$

.....

El 7 no és, doncs, un nombre d'aquesta forma i l'heptàgon no és inscriptible, com tampoc ho són els polígons regulars de 9, 11, 13, 19, 21, 23,... costats. Gauss va donar, fins i tot, la llista dels 38 valors enters per sota de 300 que permeten la inscripció: 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 48, 51, 60, 64, 68, 80, 85, 96, 102, 120, 128, 136, 160, 170, 192, 204, 240, 255, 256, 257 i 272.

MATERIAL DEL PROFESSOR

A continuació, s'exposen els comentaris per al professorat referits a aquesta activitat. Cal entendre-ho tot amb certa dosi de flexibilitat, perquè l'alumnat pot ser molt divers.

Com a observació general, cal dir que el fet de tenir les activitats seqüenciades pas a pas dona molta autonomia al professorat, que pot atendre millor la diversitat de ritmes d'aprenentatge. No s'ha de pretendre que tot l'alumnat arribi sempre al mateix lloc. Alguns alumnes podran fer més apartats que d'altres. A més, és convenient fer posades en comú de tant en tant.

DURADA PREVISTA: 4 o 5 HORES

1. Introducció

Tota l'activitat es pot fer dibuixant amb regle i compàs o emprant el programa Cabri-Géomètre. D'entrada, als alumnes els resulta més atractiva la segona possibilitat. Amb tot, si es disposa de més temps, és molt interessant combinar els dos instruments.

Es parteix del supòsit que l'alumnat ha tingut algun contacte amb el programa informàtic esmentat. Si no fos així tampoc no hi hauria problema, però caldria, òbviament, donar una mica més de temps a l'activitat. No sembla necessari dedicar gaire temps al programa en si, més aviat caldria pensar a anar aclarint els problemes que surtin sobre la marxa; a més, el programa compta amb ajudes senzilles que poden consultar els alumnes i estalviar feina al professorat. El que sí és imprescindible és tenir pocs alumnes per ordinador.

2. Què es treballa amb aquesta activitat?

- Nomenclatura i classificació dels polígons.
- Distinció entre polígon inscrit i polígon circumscrit.
- Mesura d'angles amb transportadors.
- Realització i construcció de dibuixos de forma esquemàtica, aproximada i exacta, i distinció de la utilitat de cadascuna d'aquestes modalitats.
- Inducció empírica de regularitats.
- Construcció de figures amb regle i compàs i amb programes informàtics.
- Ús de la mediatriu d'un segment.
- Història de les matemàtiques.

3. Comentaris als apartats

Apartats 1 a 5

L'elaboració de croquis i de dibuixos ràpids i informals és molt necessària per a l'alumnat i per això es demana en iniciar cada bloc d'apartats. Cal que els alumnes vegin que els croquis han de contenir la informació essencial encara que no siguin precisos.

S'ha optat per començar per l'hexàgon, perquè és el més senzill d'inscriure. Si no troben la solució autònomament caldrà demanar que pensin en els angles i que els posin sobre els seus croquis, per tal que concloguin que els 6 triangles en què es descompon l'hexàgon regular a partir del centre són equilàters, i que el costat del polígon és, en conseqüència, igual al radi de la circumferència circumscrita.

El pas al triangle equilàter (apartat 4) i al dodecàgon (apartat 5) és, aleshores, senzill.

La idea dels logotips pretén contextualitzar els problemes proposats.

Apartat 6

Aquest apartat pretén que l'alumnat faci una reflexió prèvia intuïtiva que després s'haurà de contrastar amb les conclusions posteriors.

Apartats 7 i 8

Les ajudes necessàries si no avancen són:

i) traceu un diàmetre; ii) traceu la mediatriu del diàmetre anterior.

Apartat 9

El croquis del subapartat 9.1 ja no els serà tan senzill, tot i que hauran vist uns quants pentàgons regulars en les activitats anteriors.

El dibuix aproximat amb el transportador d'angles té l'interès de retrobar els angles dels polígons. Pot ser que no acabin de veure clar que aquest dibuix no és exacte i caldrà aclarir-ho.

El dibuix amb Cabri s'ha de fer inevitablement de forma guiada, però no deixa de tenir interès.

Apartat 10

Amb aquest apartat els alumnes obtindran una construcció molt atractiva que es pot fer servir per als treballs d'ampliació que es proposen en acabar l'activitat.

Apartat 11

Amb aquest apartat els alumnes distingiran entre circumferència inscrita i circumferència circumscrita. Si no veuen com han de trobar el radi, caldrà donar la pista següent: "traceu la mediatriu d'un dels costats".

Apartat 12

Aquest apartat té la mateixa estructuració que el 9 amb la diferència que no poden arribar a la construcció exacta. Serà bo que debatin quina de les dues aproximacions -la que hauran fet amb transportador i la que hauran fet amb Cabri- és més bona.

Val la pena que el professor esmenti que el mètode exposat a 12.3 és vàlid per a qualsevol polígon. Fins i tot es pot proposar, com a exercici, que el provin amb l'hendecàgon.

El subapartat 12.3, tot i que és força interessant, es pot ometre sense problemes, si no es té prou temps.

Apartat 13

Amb aquesta lectura es pretén cloure l'activitat des d'una perspectiva històrica i global.

L'heptadecàgon construït es dona com a curiositat i no sembla recomanable explicitar-ne la construcció, que resulta massa complexa.

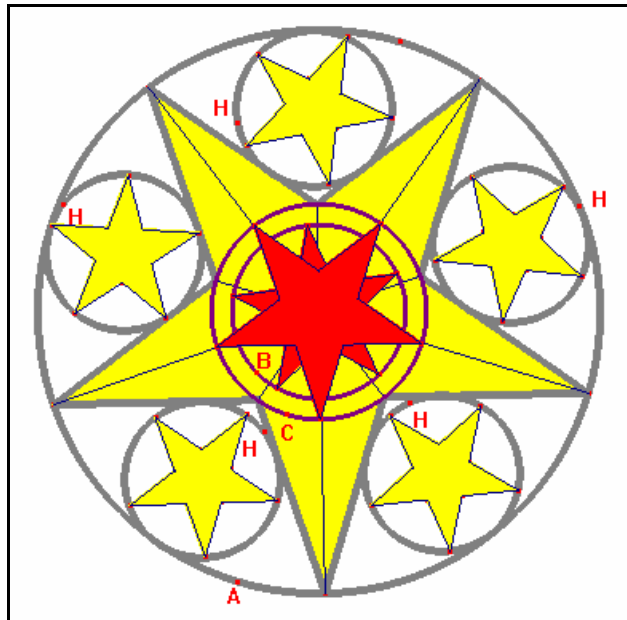
Els nombres de Fermat, que surten al final, poden tractar-se amb una mica més de profunditat, si es té temps.

4. Possibles activitats complementàries o de feina a casa

Com a possibles activitats complementàries, força interessants, cal incloure les següents:

1. Construcció d'estrelles poligonals a partir dels polígons inscrits.
2. Construcció dels polígons regulars conegut el costat.
3. Construcció de rosasses a partir dels polígons inscrits.

Exemple: Construcció d'una rosassa basada en el pentàgon regular inscrit.



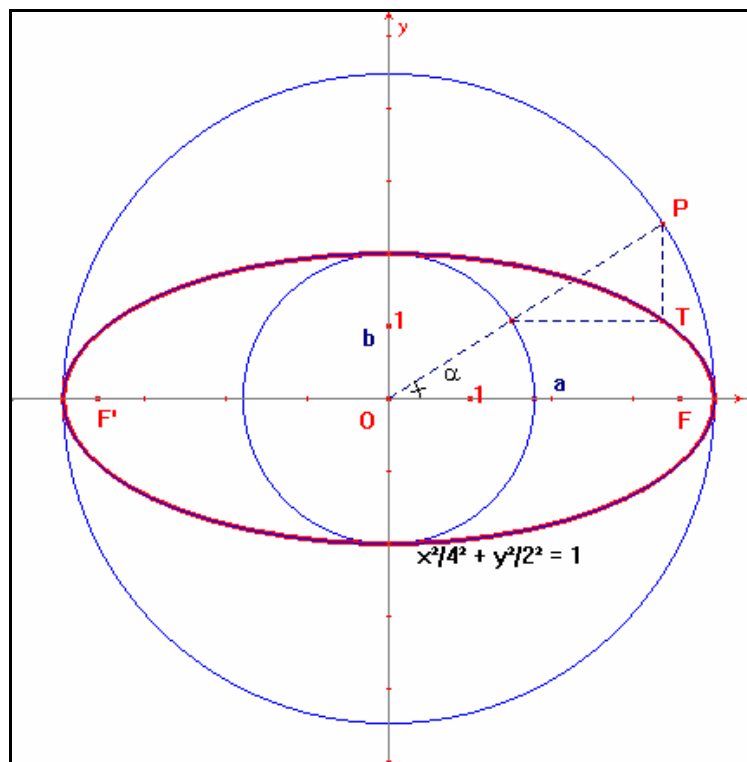
Es poden seguir els passos següents:

a) A partir del pentàgon regular inscrit es pot traçar l'estrella de cinc puntes inscrita. En aquest cas també convé partir d'un punt sobre la circumferència per facilitar les animacions (això s'aconsegueix amb la instrucció *punt sobre un objecte* del menú).

b) Amb la instrucció *polígon* del menú, els alumnes han de redefinir l'estrella de cinc puntes i crear una macroconstrucció que, donada una circumferència i un punt sobre ella, construeixi l'estrella de cinc puntes inscrita. La macro facilitarà la feina posterior.

c) No han de tenir problemes per traçar les circumferències concèntriques amb les seves estrelles corresponents. En canvi, les cinc circumferències tangents interiors (a la circumferència gran inicial i a l'estrella inscrita gran) presenten més dificultats. El seu centre es pot trobar per intersecció del radi que va del centre de la circumferència inicial a un dels vèrtexs còncaus de l'estrella (aquesta conclusió és relativament fàcil de trobar) i la bisectriu interior del parell de rectes format per un dels costats de l'estrella i la recta tangent a la circumferència inicial en el punt d'intersecció del radi esmentat abans (això és força més complicat i, probablement, caldran moltes ajudes del professorat).

A més de la utilització del programa a l'ESO, del qual l'activitat anterior n'és un exemple, el programa es pot emprar al batxillerat per al treball de la geometria plana amb coordenades i per al treball amb còniques.



Exemple d'el·lipse construïda amb Cabri i d'us dels eixos de coordenades

EXEMPLE 2: EL PROGRAMA DERIVE

El programa Derive és un material que proporciona unes possibilitats excel·lents de treball de l'anàlisi matemàtica a l'aula. És especialment indicat per al batxillerat i es pot emprar com a complement del treball tradicional amb llapis, paper i calculadora. El programa permet fer tota mena de càlculs algebraics, de límits, de derivació i d'integració i, a més, permet fer la representacions de funcions i de recintes de manera molt ràpida i precisa. El poder atractiu de l'entorn informàtic serà un factor de motivació per a molts alumnes.

A continuació es presenta un exemple per al treball de les funcions transcendents amb el programa Derive.

Exemple d'activitat amb Derive: funcions transcendentals

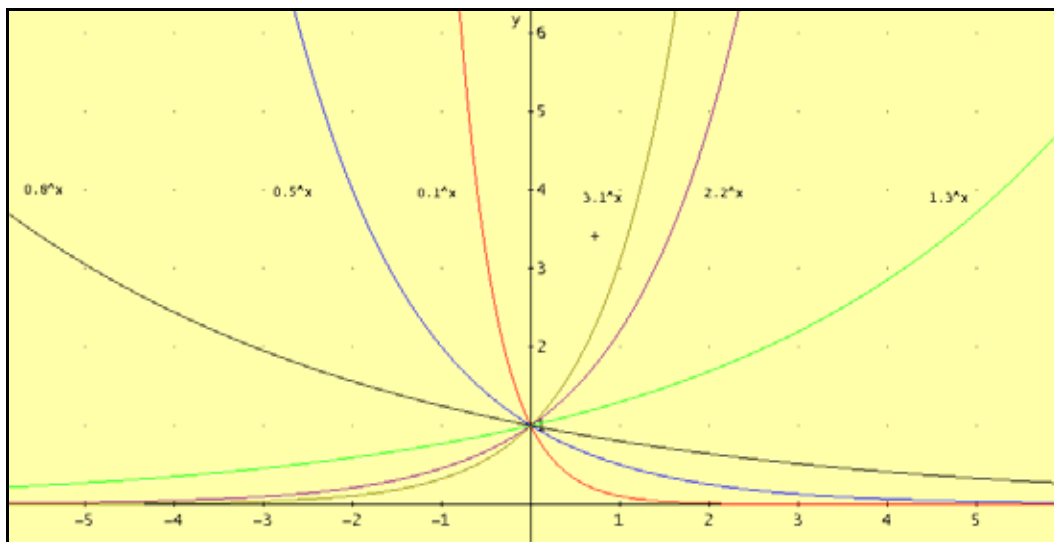
Activitat a desenvolupar en grups de dos alumnes.

Materials necessaris: llapis i paper, ordinador i programa Derive.

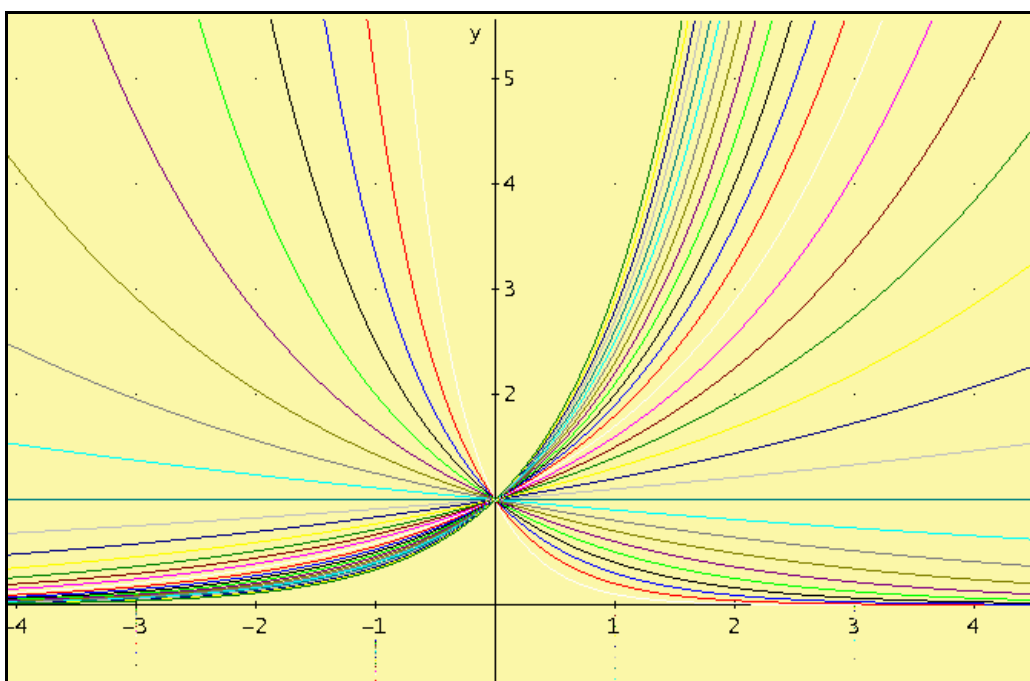
a) Representeu conjuntament les funcions exponencials següents:

$$f_1(x) = 0,1^x ; f_2(x) = 0,5^x ; f_3(x) = 0,8^x ; f_4(x) = 1,3^x ; f_5(x) = 2,2^x ; f_6(x) = 3,1^x$$

Quines característiques comunes tenen? Quines diferències observeu?



b) Empleu la instrucció $\text{vector}(a^x, a, -3, 3, 0.1)$ per representar la família de funcions exponencials $f(x)=a^x$ quan el paràmetre a varia de -3 a 3 de 0,1 en 0,1 (després d'emprar la instrucció $\text{vector}(a^x, a, -3, 3, 0.1)$ cal simplificar i demanar la representació després).



c) Representeu conjuntament les funcions exponencials següents:

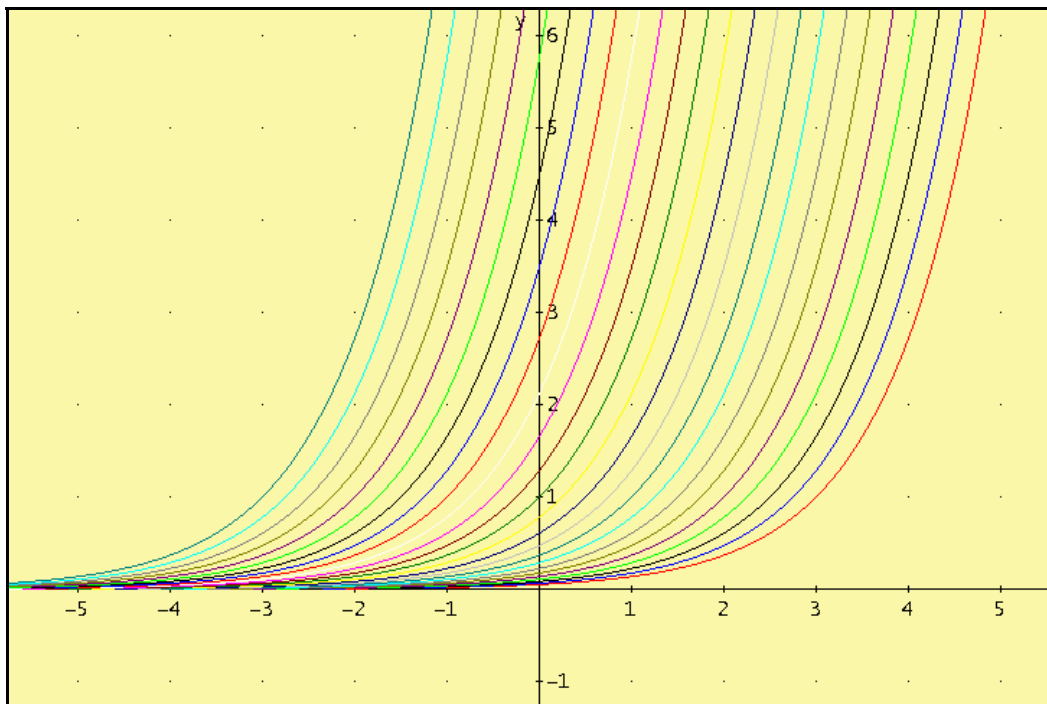
$$f(x) = e^x ; g(x) = e^x + 1 ; h(x) = e^x - 1 ; t(x) = e^{(x-1)} ; z(x) = e^{(x+1)}$$

Quins desplaçaments observeu respecte de la gràfica de $f(x)$? Sense fer noves representacions digueu com seran les gràfiques de les funcions següents:

$$m(x) = e^x + 2 ; n(x) = e^x - 2 ; r(x) = e^{(x-2)} ; t(x) = e^{(x+2)}$$

d) Empreu la instrucció `vector( $e^{ax}$ ,  $a$ , -3, 3, 0.25)` per representar la família de funcions exponencials $f(x) = e^{ax}$ quan el paràmetre a varia de -3 a 3 de 0,25 en 0,25.

e) Empreu la instrucció `vector( $e^x + a$ ,  $a$ , -3, 3, 0.25)` per representar la família de funcions exponencials $f(x) = e^x + a$ quan el paràmetre a varia de -3 a 3 de 0,25 en 0,25.



f) Empreu la instrucció `vector( $e^{(x+a)}$ ,  $a$ , -3, 3, 0.25)` per representar la família de funcions exponencials $f(x) = e^{(x+a)}$ quan el paràmetre a varia de -3 a 3 de 0,25 en 0,25.

g) Representeu conjuntament les funcions trigonomètriques següents:

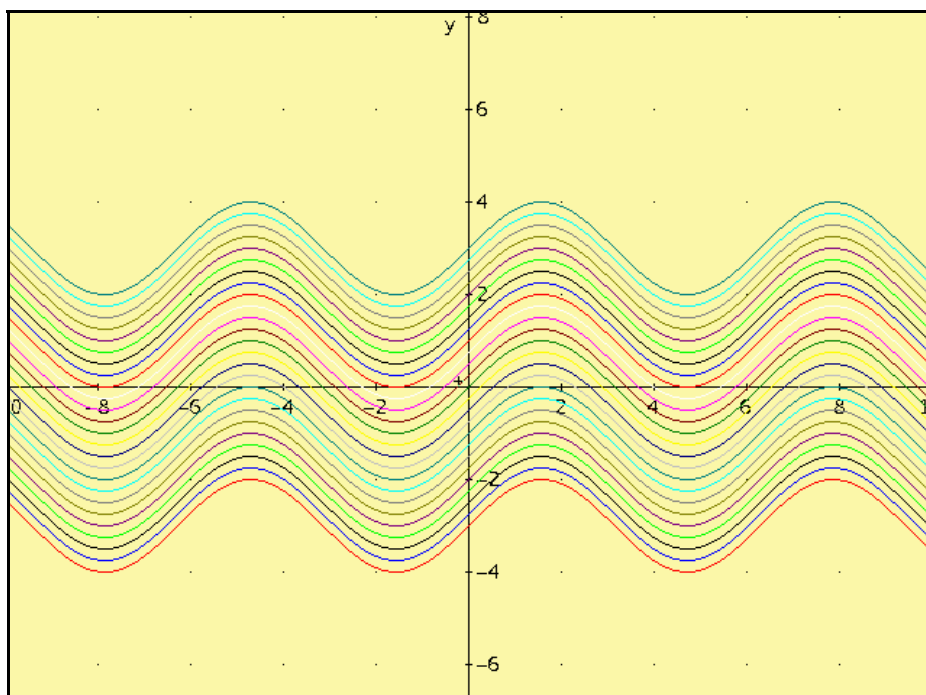
$$f(x) = \sin x ; g(x) = \sin x + 1 ; h(x) = \sin x - 1 ; t(x) = \sin(x-1) ; z(x) = \sin(x+1)$$

Quins desplaçaments observeu respecte de la gràfica de $f(x)$? Sense fer noves representacions digueu com seran les gràfiques de les funcions següents:

$$m(x) = \sin x + 2 ; n(x) = \sin x - 2 ; r(x) = \sin(x-2) ; t(x) = \sin(x+2)$$

h) Empreu la instrucció `vector( $\sin(ax)$ ,  $a$ , -3, 3, 0.25)` per representar la família de funcions trigonomètriques $f(x) = \sin(ax)$ quan el paràmetre a varia de -3 a 3 de 0,25 en 0,25.

i) Empreu la instrucció `vector(sin x+a, a, -3, 3, 0.25)` per representar la família de funcions trigonomètriques $f(x)=e^x+a$ quan el paràmetre a varia de -3 a 3 de 0,25 en 0,25.



j) Empreu la instrucció `vector(sin(x+a), a, -3, 3, 0.25)` per representar la família de funcions trigonomètriques $f(x)=e^{(x+a)}$ quan el paràmetre a varia de -3 a 3 de 0,25 en 0,25.

k) Empreu la instrucció `vector(a · sin x, a, -3, 3, 0.25)` per representar la família de funcions trigonomètriques $f(x)=a \cdot \sin x$ quan el paràmetre a varia de -3 a 3 de 0,25 en 0,25.

2.2. ÚS D'ACTIVITATS A INTERNET O AMB INTERNET

El treball de les matemàtiques fent ús d'internet admet dues possibilitats. D'una banda es pot anar a pàgines que tenen activitats preparades per al treball de les matemàtiques, d'altra banda també és possible fer recerques emprant internet com a instrument. A continuació es proposen exemples en cadascun d'aquests dos sentits.

Exemples d'activitats a internet per a alumnes de primer cicle d'ESO

1. Aneu a la pàgina web següent on trobareu un munt d'activitats per al treball de les matemàtiques. A l'esquerra premeu el botó de "Llista d'activitats" i a continuació "Numeració i càlcul".

Aquí se us proposa de jugar al golf fent càlcul mental. Compte! No podeu emprar les calculadores!

<http://www.xtec.net/~jjareno/index.htm>

Aquesta és la pàgina inicial:



A l'esquerra premeu el botó de "Llista d'activitats" i a continuació "Numeració i càlcul". Ja podeu començar a jugar al "golf":



2. Aneu al web navarrès següent on trobareu una recopilació interessant de recursos, enllaceu amb el curs de geometria i comenceu a fer el capítol d'activitats de l'apartat dedicat als triangles.

<http://www.pnte.cfnavarra.es/%7Eiesozizu/departamentos/matematicas/recursos/infos/index.html>

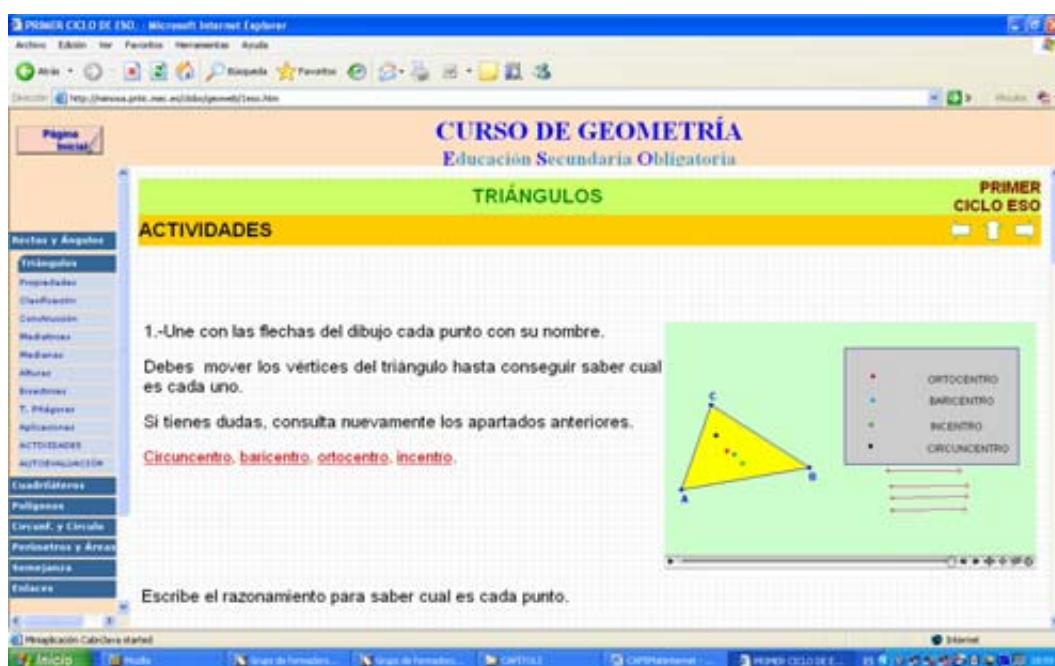
[Curso de Geometría](#)

<http://mimosa.pntic.mec.es/clobo/geoweb/indice.htm>

Aquesta és la pàgina inicial del curs:



Cliqueu primer cicle i després (a la dreta) triangles. A continuació, comenceu a treballar l'apartat d'activitats.

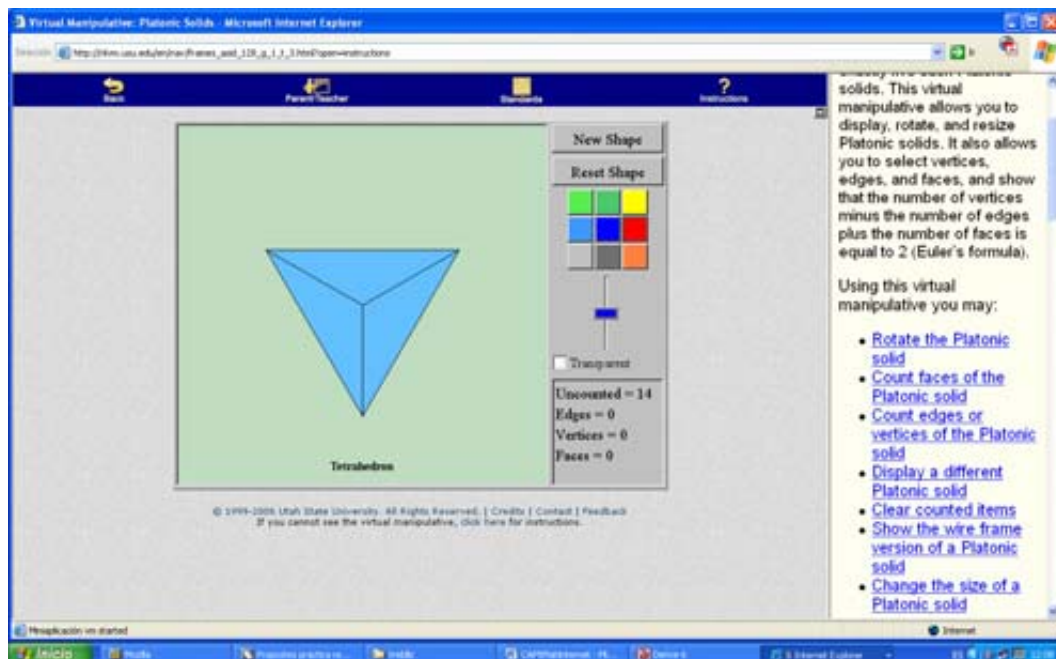


3. Entreu al web de la biblioteca virtual de la [National Library of Virtual Manipulatives for Interactive Mathematics](http://nlvm.uiowa.edu/). Trobareu gran quantitat d'aplicacions interactives. Preneu l'apartat de geometria i comenceu a treballar amb els sòlids platònics. Si ho necessiteu, podeu fer consultes al diccionari.

Aquesta és la pàgina inicial:



Entreu a l'apartat dedicat als sòlids platònics (políedres regulars):



Exemple de recerca amb ús d'internet

La pilota d'or



Quin nom té aquest políedre? Quant pesaria una pilota de futbol si realment fos d'or?

Els alumnes i les alumnes hauran de trobar les dades necessàries (nomenclatura dels políedres, mides d'una pilota de futbol, densitat de l'or) a internet i després hauran de resoldre el problema.

2.3. ÚS DE PRESENTACIONS EN POWERPOINT

El treball amb les noves tecnologies també pot aprofitar, des d'un punt de vista docent, les presentacions amb PowerPoint. Si, tal i com s'anuncia, el professorat acaba disposant de pantalles a les aules, les presentacions amb PowerPoint poden ajudar a atreure l'atenció de l'alumnat i a millorar-ne la motivació quan es fa alguna sessió o una part d'una sessió més expositiva.

D'altra banda, els treballs que els alumnes i les alumnes fan en grup poden presentar-se amb aquest format per reforçar les intervencions orals.

2.4. FEINA PER CORREU ELECTRÒNIC I CAMPUS VIRTUALS

Finalment cal fer esment de la possibilitat d'encarregar i trametre feines per correu electrònic i la de fer servir algun campus virtual per al treball de les matèries. En aquest darrer cas, al campus s'hi poden anar penjant totes les activitats del curs i les feines dels alumnes.

Aquests mitjans de comunicació faciliten, a més, el treball cooperatiu i l'intercanvi d'experiències entres centres.

Amb tot, ara mateix, aquests aspectes són de difícil implementació perquè molts nois i moltes noies no tenen ni ordinadors ni accés a internet a casa.

CAPÍTOL 6: INNOVACIONS METODOLÒGIQUES A LES CLASSES DE MATEMÀTIQUES QUE PODEN MILLORAR LA MOTIVACIÓ DE L'ALUMNAT

A banda de l'ús de les noves tecnologies, en els darrers anys han aparegut nous materials didàctics i noves idees d'organització i de gestió de les activitats a l'aula que mereixen una atenció aprofundida. Sovint, la preponderància de les classes magistrals i expositives és encara excessiva. En aquest capítol es proposen esquemes organitzatius i metodològics per a l'activitat a l'aula que atorguin més protagonisme a l'alumnat i que els resultin més motivadors.

1. LES SORTIDES RELACIONADES AMB LES MATEMÀTIQUES I EL SEU APROFITAMENT DIDÀCTIC COM A RECURS DE MOTIVACIÓ

Les sortides fora del centre o fora de l'aula relacionades amb les matemàtiques no solen ser molt habituals, probablement perquè no resulta senzill anar a fer activitats a l'exterior. El cert, però, és que hi ha un bon grapat d'activitats i de possibles sortides que poden ser un excel·lent complement del treball a l'aula i que tenen un considerable poder de motivació sobre l'alumnat. Alguns sectors del professorat veuen amb preocupació aquest tipus d'activitats en considerar que no s'aprofiten des del punt de vista didàctic. Això es pot evitar amb una planificació rigorosa i amb l'exigència de treball avaluable als alumnes. A continuació es presenten, ordenadament, algunes d'aquestes possibilitats:

1. Activitat matemàtica fora de l'aula, però al centre

- Mesura de distàncies, de superfícies, de volums, etc.

Es poden plantejar activitats en aquest àmbit sense grans problemes perquè no alteren l'horari escolar. El que resulta més interessant és plantejar problemes o activitats que comportin fer mesures en el centre.

Exemple1: pintar el centre

Imagineu que sou un grup d'alumnes que s'ofereix a pintar el centre per finançar part del viatge d'estudis.

Heu de fer un pressupost i heu de calcular un termini d'execució de la feina; més concretament:

- 1) Heu trobat pintura blanca que té un rendiment de 5m^2 per kg i que val a 6,95 euros el pot de 5 kg. Cal donar dues capes de pintura. Què us costarà la pintura?

2) Si com a mitjana una persona pot pintar 10 m^2 per hora (tenint en compte les dificultats que comporten els marcs de portes i finestres que no es poden tacar), quantes hores caldrà esmerçar-hi?

Entre quants i durant quants dies deixareu llesta la feina?

3) Feu el pressupost atorgant un preu a cada hora treballada.

Comentaris sobre l'activitat

És evident que el plantejament d'una activitat com aquesta comporta algunes dificultats que caldrà valorar abans de posar-s'hi:

- a) Disposarem del temps necessari per fer-la bé?
- b) Disposarem dels materials adequats per dur-la a terme?
- c) Podrem controlar la feina dels grups i dels alumnes de manera efectiva?

Si no podem respondre afirmativament a aquestes qüestions l'activitat quedaria coixa i perdria, en gran part, el seu sentit. Preferiblement hauríem d'organitzar els alumnes en grups de treball per a totes les fases de la resolució. La fase de comprensió del problema i la fase que consisteix a fer el plantejament i a trobar estratègies (segons la terminologia de Pólya) s'haurien de fer a l'aula. La fase d'execució és la que comporta treball fora de l'aula. Finalment, la fase de revisió i conclusions s'ha de fer novament a l'aula.

Un cop tenim els alumnes organitzats en grups els hem de donar una estona perquè estudiïn l'enunciat i comencin a recollir a les seves observacions a les llibretes. El fet que una dada imprescindible -la superfície total a pintar- no consti en l'enunciat pot provocar algunes perturbacions (estan massa acostumats que els donem totes les dades). Evidentment han d'arribar a la conclusió que cal obtenir aquesta dada i que han de dissenyar una estratègia fiable per tal d'aconseguir-la. Pot ser molt interessant demanar als grups que facin estimacions mentals raonades tant de la superfície total a pintar, com del pressupost final o del temps d'execució (després, en acabar, caldrà contrastar les estimacions mentals amb les reals). Pel que fa a l'organització pràctica de la mesura de la superfície a pintar serà bo deixar-los plena llibertat de propostes, com a mínim inicialment. Després caldrà arribar a conclusions conjuntes amb tot grup-classe.

S'han de considerar necessàries les conclusions següents:

- a) Llista de materials necessaris: instruments de mesura, escales, etc.
- b) Organització efectiva de la mesura: repartiment dels espais a mesurar entre els grups (pot resultar interessant que cada zona sigui mesurada per dos grups de cara a controlar errors).
- c) Organització de la recollida de dades. Notació a utilitzar. Unitats.

Si cal, es pot fer un assaig inicial amb l'aula abans que els grups comencin la seva actuació.

Una vegada tinguin la dada que els mancava no és de preveure que hi hagi dificultats per calcular els quilograms de pintura necessaris i el preu que tindran. Tampoc els ha de ser difícil de calcular les hores necessàries per a l'execució. De fet, aquí, el problema que tindran és que els caldrà decidir pel seu compte amb quanta gent ho fan i quantes hores treballen diàriament (la redacció final del pressupost també comportarà alguna dificultat).

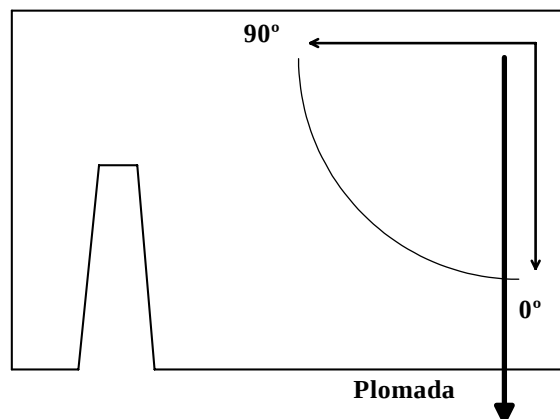
Com ja s'ha comentat, en acabar la feina, és interessant que els alumnes contrastin les seves estimacions inicials amb els resultats finals. També caldrà fer una revisió crítica de tot el procés (sobretot de l'organització) i fer propostes que el puguin millorar.

- Trigonometria al pati.

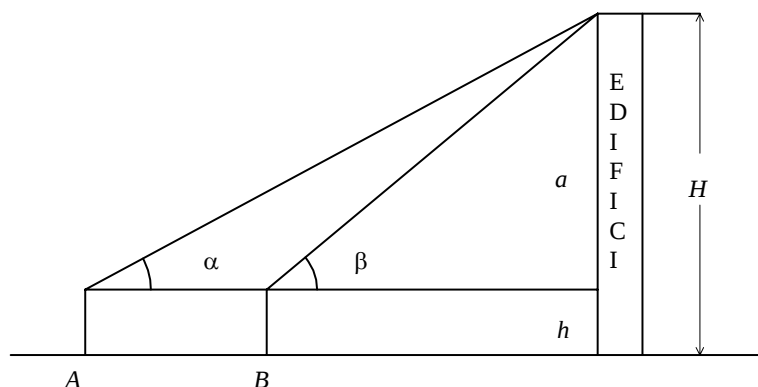
El jardí o el pati de l'escola poden ser bons llocs per fer trigonometria.

Exemple 2: calcular l'alçada de l'edifici

Per fer treball de camp l'ideal és disposar de teodolits (n'hi ha d'ús estrictament didàctic que són prou econòmics). Si això no és possible, l'alumnat pot construir instruments per mesurar angles: només cal un cercle graduat i una plomada. L'instrument, tot i ser rudimentari, permet fer mesures correctes.



Amb una cinta mètrica i el petit quadrant construït pels alumnes, es pot sortir a observar alguna part de l'edifici de la qual es vulgui esbrinar l'altura. Es resolen els triangles rectangles de l'esquema amb les dades obtingudes a l'observació α , β , h i la distància entre A i B:



En primer lloc es calcula a i s'obté, finalment: $H = a + h$.

Pot resultar molt interessant utilitzar eines estadístiques, estudiar els errors comesos per alguns alumnes o grups d'alumnes en les seves mesures i reflectir la importància d'un treball científic, apuntar tot el que es fa per deduir després els possibles errors, ser meticulós amb la feina, presentar els resultats, etc.

Nota: cal anar amb compte amb la distància AB ; convé que sigui prou gran en comparació amb h perquè en cas contrari podem obtenir que, a efectes pràctics, $\alpha = \beta$.

- Càlculs i estudis relacionats amb els consums del centre educatiu.

Un altre excel·lent context real que ens proporciona el mateix centre és el de l'estudi de consums com ara els d'electricitat, d'aigua, de calefacció o de paper. Aquests estudis es poden emmarcar en el si de treballs de recerca o com a projectes que es duen a terme en períodes de temps a convenir. Per dur-los a terme els grups d'alumnes es veuen obligats a sortir de l'aula per obtenir les dades necessàries ja sigui mitjançant qüestionaris o entrevistes, ja sigui mitjançant la observació directa de comptadors o d'alguns consums.

- Treballs estadístics sobre l'alumnat del centre.

Els estudis estadístics poden ser habituals en els centre de secundària. I prendre com a població a la qual es refereix l'estudi l'alumnat del centre és una bona solució que permet guanyar temps en la recollida d'informacions a partir de les mostres. Aquests processos es poden dur a terme perfectament durant les hores de classe de matemàtiques.

- Gimcanes matemàtiques

En els centre educatius de secundària, és relativament freqüent organitzar activitats lúdiques a finals de trimestre o en jornades culturals diverses. Les gimcanes són

activitats que per aquestes ocasions poden funcionar força bé i utilitzar l'àmbit matemàtic pot ser un excel·lent instrument de motivació.

Exemple 3: gimcana matemàtica

Primera prova: sortida des de l'aula X

Es dóna a cadascun dels grups de participants un cordill de 2 metres, una calculadora, un plànol del centre amb l'itinerari i els passos de tota la gimcana, un quadern d'anotacions, un llapis i un bolígraf.

La primera activitat, que han de fer en aquesta mateixa aula, consisteix a calcular quantes taules d'alumne es podrien amuntegar ordenadament en aquesta aula. A la seva disposició tenen grups de tres taules (tants com grups de participants) disposades en columnes.

Segona prova: els participants s'han de traslladar al passadís de la segona planta.

L'activitat consisteix en aquest cas a calcular quant trigaria un alumne a recórrer el passadís 100 vegades a 5 km/h.

Tercera prova: els participants s'han de traslladar a un laboratori del centre on trobaran dos recipients no graduats: un de tres litres de capacitat i l'altre de cinc litres de capacitat.

L'activitat consisteix a obtenir exactament 4 litres d'aigua. Es demana que expliquin el procediment als seus quaderns.

Quarta prova: els participants s'han de traslladar a una aula prou allunyada del laboratori. A l'aula hi troben 28 peces en forma de triangle equilàter de Creator.

L'activitat consisteix a construir els tres políedres regulars les cares dels quals són triangles equilàters.

Cinquena prova: els participants s'han de traslladar a l'aula d'informàtica. Tenen un ordinador connectat a internet a la seva disposició i un full amb les imatges de tres personatges de la matemàtica sense identificar.

L'activitat consisteix a posar el nom als tres personatges.

Darrera prova: els participants s'han de traslladar al jardí o al pati del centre on troben tres estaques o tres pals força allunyats entre ells.

L'activitat consisteix a calcular l'àrea del triangle que determinen les tres estaques.

2. Sortides fora del centre

Moltes d'aquestes sortides poden tenir un caràcter clarament interdisciplinari. Les necessitats de tenir, a més, un nombre suficient d'acompanyants poden facilitar-ho.

- Sortides a llocs que ja tenen preparats materials, com ara museus, universitats, planetaris, observatoris, etc.

El museu de la ciència al Cosmocaixa (i especialment el taller *Viu les matemàtiques* que s'hi organitza) n'és un exemple paradigmàtic. Amb tot, també convé tenir present que cal demanar rigor en les observacions i un treball a l'aula o a casa després de la visita. En cas contrari correm el risc de convertir el museu en un parc temàtic sense cap interès matemàtic.

- Sortides en què cal preparar un guió per aprofitar la situació matemàticament.

Moltes altres sortides poden tenir un aprofitament des del punt de vista de les matemàtiques escolars si es prepara un guió específic amb aquesta intenció. Així, per exemple, si es visita el Parlament, podem muntar activitats al voltant del repartiment proporcional, del repartiment d'escons segons la llei d'Hondt i dels sistemes electorals arreu del món; si visitem el camp de futbol del Barça, podem muntar un guió referent a mesures del camp o a estadístiques de competicions oficials; si es visiten algunes de les obres de Gaudí, es poden anar a trobar les relacions entre geometria i arquitectura que tan presents tenia el mateix Gaudí.

La taula següent⁶⁰, per exemple, és un excel·lent recull d'aquestes relacions:

Gaudí i les matemàtiques		
Recurs	Procés	Exemples
Translació	Repetició d'una forma o motiu tot desplaçant-lo	Arcs del Col·legi de les Teresianes, rosari d'esferes de pedra al parc Güell
Simetrització	Generació d'objectes de simetria especular	Façana de les cases Batlló i Calvet, escalinata d'accés al parc Güell
Modulació	Ús de mòduls prefabricats	Reticulat de la casa Milà

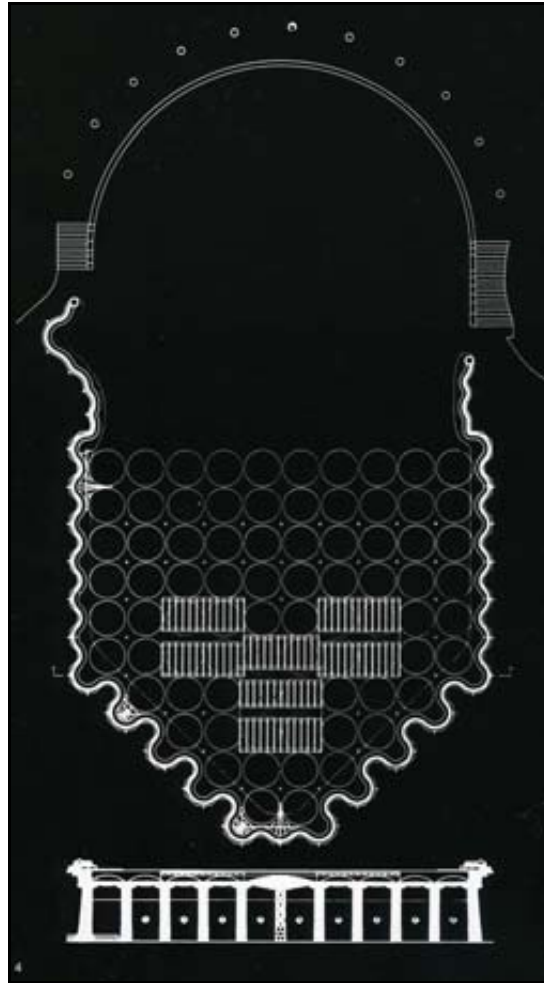
(Continua a la pàgina següent)

(60) Extret de: DURAN, X i PIQUERAS, M. *Passejades per la Barcelona científica*. Barcelona: Ajuntament de Barcelona, 2002.

Recurs	Procés	Exemples
Generació helicoidal	Combinació d'una o dues rotacions entorn d'un eix i una translació en la direcció de l'eix	Diverses columnes o xemeneies
Arrodoniment de formes	Suavització d'angles i punxes amb paràboles, arcs de cercle, etc.	Façana de la casa Milà, entrada al parc Güell, columnes de la Sagrada Família
Maclació	Intersecció o acoblament de diverses figures geomètriques	Pinacles de la Sagrada Família
Buidatge	Obtenció d'un cos per sostracció d'unes parts	Motllura d'algunes portes a la Casa Milà
Dissecció	Dissecció de figures i aprofitament només d'una part	Parts d'hiperboloide d'una fulla i del paraboloide hiperbòlic en sostres i finestrals de la Sagrada Família
Fractalitat	Figures autosemblants, en que cada part és semblant al tot	Columnes de la Sagrada Família com branques d'arbres
Autosemblança	Utilització d'una mateixa forma de mides molt diferents a escales distants	Paraboloides hiperbòlics en voltes de la Sagrada Família i el mateix model, molt més petit, per decorar el carregament de columnes a terra



Bancs al Parc Güell



Planta i alçat de la sala hipòstila i del banc de l'esplanada del Parc Güell

- Sortides a la natura.

Les sortides a la natura també poden donar lloc a activitats profitoses en l'àmbit de les matemàtiques. Com en el cas anterior, també convé una preparació minuciosa prèvia. Els aspectes a tractar poden ser molt diversos: mesura de distàncies, càlcul d'àrees sobre el terreny o sobre mapes, recompte d'espècies o de fulles, representacions a escala, esquemes d'itineraris, càlcul o estimació del temps necessari per fer certs recorreguts, estimació de la biomassa, càlcul de cabdals d'aigua de fonts o de rius, etc.

- Excursions de tota mena.

En qualsevol excursió sempre és possible fer estudis relacionats amb la logística de la sortida: horaris, economia, distribució de les persones, etc.

- Visites a fàbriques.

Una altra modalitat de sortides que es poden aprofitar des de la perspectiva de les matemàtiques són les visites a fàbriques. Les experiències documentades fetes a Dinamarca en aquest sentit són clarament positives.

Es poden estudiar temes com ara: ús de les matemàtiques a la indústria, administració d'estocs, estadística i control de qualitat, etc.

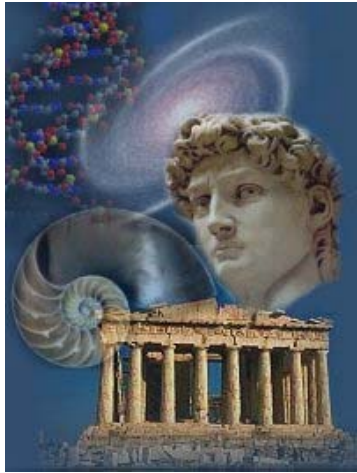
- Concursos fotogràfics de base matemàtica.

Una bona manera de fer veure a l'alumnat que les matemàtiques estan immerses en la realitat és organitzar concursos de fotografia matemàtica.

3. Visites virtuals

Amb l'aparició d'internet i de les aules d'informàtica en els centre de secundària hi ha ara mateix la possibilitat de fer visites virtuals que també poden ser d'interès. Diversos museus de la ciència i moltes pàgines web en l'àmbit de les matemàtiques poden proporcionar "visites" excel·lents. Aquests en són alguns exemples:

Pàgina web	Descripció
http://www.museo.unimo.it/theatrum , http://www.museo.unimo.it/labmat	Museo Universitario di Storia Naturale e della Strumentazione Científica Università degli studi di Modena e Reggio Emilia. Laboratorio di Macchine Matematiche Mostra "Theatrum Machinarum" (strumenti per la geometria)  Màquina de Descartes per traçar hipèrboles
http://nrich.maths.org/public/	 UNIVERSITY OF CAMBRIDGE Pàgina de la universitat de Cambridge dedicada a activitats matemàtiques amb jocs, problemes i articles.

http://www.georgehart.com/	Pàgina de George W. Hart amb models de políedres construïts i escultures polièdriques.  Escultures polièdriques de la col·lecció Hart
http://goldennumber.net/	Pàgina dedicada al nombre d'or.  Imatge que encapçala la pàgina
http://www.mcescher.com/	Pàgina dedicada a Maurits Escher.  Dibuix de Maurits Escher

2. EL TREBALL EN GRUP I L'ÚS DE PROJECTES COM A ELEMENTS DE MOTIVACIÓ A LES CLASSES DE MATEMÀTIQUES

2.1. LES MATEMÀTIQUES I EL TREBALL COOPERATIU

Tradicionalment les matemàtiques s'han treballat individualment a l'aula. En els darrers anys, però, molts professors i professores han començat a emprar també el treball en petits grups per fer matemàtiques. El cert és que l'ús d'aquesta metodologia de treball pot tenir efectes positius per a la motivació de l'alumnat. Aquest recurs de gestió de l'aula no ens ha pas de fer renunciar al treball individual amb el qual s'ha d'alternar en funció de l'aprofitament que se n'obté.

Els detalls referents a la composició dels grups depenen del criteri del professorat que haurà de tenir en compte les característiques dels alumnes que té a l'aula. Amb tot, es poden fer algunes recomanacions:

- En principi convé tenir grups no massa nombrosos (2, 3 o 4 alumnes). Així es faciliten la dinàmica de treball i el control del grup per part del professorat.
- Convé que siguin relativament homogenis: no és bo concentrar els alumnes amb més capacitat en un grup (tot i que excepcionalment això pugui ser d'interès per fer activitats diferents a cada grup, de més complexitat per als alumnes sense dificultats d'aprenentatge i més assequibles per als grups d'alumnes amb problemes d'aprenentatge de les matemàtiques).
- Cada grup ha de nomenar un portaveu. Aquest càrrec ha de ser rotatori de tal manera que tots siguin portaveus en alguna ocasió.
- El professorat ha d'avaluar la dinàmica dels grups i premiar la col·laboració entre els seus components (i això ho han de saber els alumnes i les alumnes).
- Cada alumne ha de fer tot el treball a la seva llibreta. Ningú no pot, doncs, aprofitar l'ocasió per no fer res.

A continuació es presenta un exemple d'activitat en l'àmbit de la resolució de problemes que és interessant fer en grups de treball.

Exemple: els alumnes plantegen enunciats

En aquesta activitat es tracta que els alumnes i les alumnes plantegin problemes. L'objectiu és millorar els processos de comprensió d'enunciats i la motivació a les classes de matemàtiques.

Es distribueixen els alumnes en grups de 3 o 4 components. Cada grup formula un problema a partir d'unes dades o d'una imatge o d'un objecte que dóna el professor. Tots els enunciats es llegeixen públicament. S'intercanvien els enunciats entre els grups, es debat col·lectivament la correcció de les formulacions i es resolen els problemes. Els alumnes voten l'enunciat més interessant i l'enunciat més ben formulat.

1. Fitxa amb dades numèriques.

Dissenyau un problema que inclogui les quantitats següents: 150 cm; 50 cm.

Dissenyau un problema que inclogui les quantitats següents: 10 m; 25 m².

Dissenyau un problema que inclogui les quantitats següents: 10 m; 205 m³.

2. Fitxa amb dades numèriques i amb dades qualitatives.

Dissenyau un problema que inclogui les quantitats següents i les paraules següents: quadrat, diagonal; 110 m.

Dissenyau un problema que inclogui les quantitats següents i les paraules següents: 6 hores, percentatge.

Dissenyau un problema que inclogui les quantitats següents i les paraules següents: circumferència, preu; 110 euros.

3. Fitxa amb dades no numèriques.

Dissenyau un problema que inclogui les paraules següents: triangle equilàter; àrea.

Dissenyau un problema que inclogui les paraules següents: percentatge, increment i disminució.

4. Fitxa amb un objecte.

Dissenyau un problema relacionat amb l'objecte següent: una llauna de refresc.

Dissenyau un problema relacionat amb l'objecte següent: una bicicleta.

5. Fitxa amb un objecte que duen els alumnes.

Cada grup ha de dur un anunci de premsa. L'anunci serveix de base per a la formulació de l'enunciat.

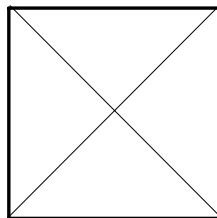
Cada grup ha de dur un envàs comercial. El problema es formula sobre l'envàs.

6. Fitxa amb una imatge

Dissenyeu un problema a partir de les imatges següents:



Dissenyeu un problema a partir de la imatge següent:



7. Fitxa amb una frase.

Dissenyeu un problema a partir de la frase següent: “el nombre de passatgers del tren de rodalies ha augmentat”.

Dissenyeu un problema a partir de la frase següent: “els alumnes de 4t d'ESO volen fer una excursió”.

2.2. EL TREBALL A PARTIR DE PROJECTES O DE SITUACIONS-PROBLEMA

L'ús de petits projectes matemàtics o la formulació de situacions-problema pendents de matematització poden ser també excel·lents instruments de motivació. Aquests tipus d'activitats es poden fer a l'aula o es poden convertir en feines per fer a casa. En general són tasques adequades per al treball en grup que es poden fer en períodes relativament llargs de temps (un per trimestre, per exemple). És del màxim interès que els grups presentin després als seus companys un resum de la feina que han fet i que el professorat tingui en compte el treball a l'avaluació sumativa.

Aquests tipus d'activitats poden oferir una motivació suplementària a l'alumnat en ser més properes a la realitat. A més, els alumnes necessitaran un grau més elevat d'autonomia i d'implicació personal que en les activitats habituals a les classes de matemàtiques. D'aquesta manera, a la llarga, milloraran el nivell de motivació. D'altra banda, aquestes activitats també poden convertir-se en alternatives al treball tradicional a l'aula per a aquelles alumnes o grups d'alumnes que no accepten fàcilment o que no progressen amb la forma tradicional de treball escolar.

A continuació es presenten alguns exemples de situacions obertes pendents de matematització. En alguns casos cal trobar informacions externes no contingudes als enunciats. Aquestes situacions, com s'ha dit, demanen més autonomia als alumnes que hauran de fer un treball previ de planificació i de formulació precisa de preguntes abans de passar a la resolució.

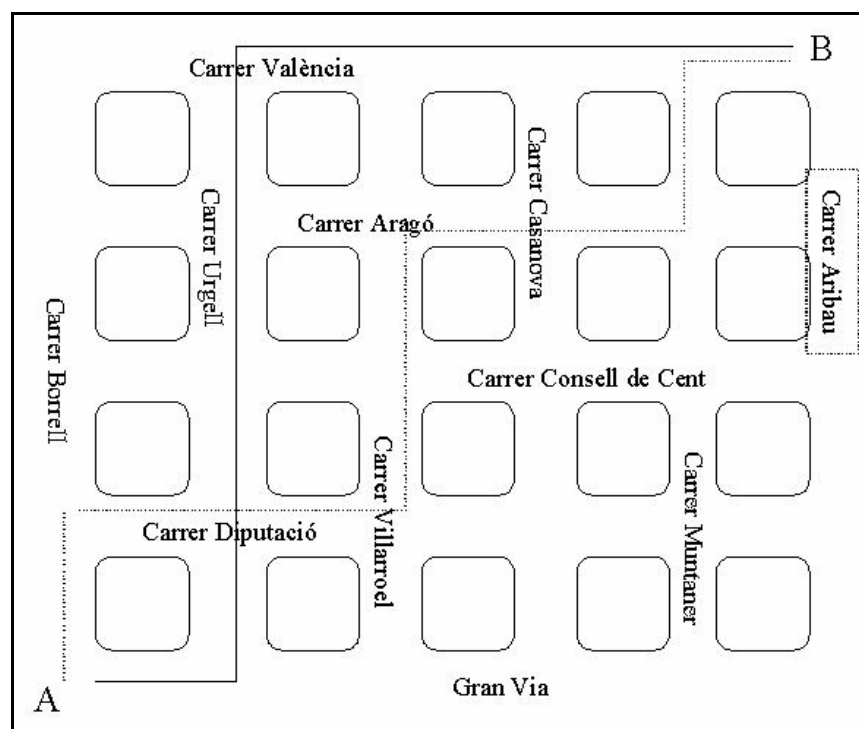
Situació-problema 1

Estudi de les talles de les sabates.

- 1) Què vol dir calçar un 40?
- 2) Com es pot establir una equivalència entre talles i mesures del sistema mètric decimal?
- 3) Aquestes mides són internacionals?
- 4) Quina correspondència hi ha entre les talles de les sabates i les de les altres peces de vestir?

Situació-problema 2

La figura representa una part de l'Eixample barceloní. Una persona vol anar des d'A (Gran Via - Borrell) fins a B (Aribau - València) pel camí més curt possible. De quantes maneres pot fer-ho?



Situació-problema 3

Com podríeu estudiar el consum del vostre cotxe (o del cotxe d'un conegut).

Situació-problema 5

Estudieu els consums d'aigua, gas i electricitat d'una casa o d'un centre.

3. L'ÚS DE MATERIALS RELACIONATS AMB LES MATEMÀTIQUES COM A RECURSOS DE MOTIVACIÓ

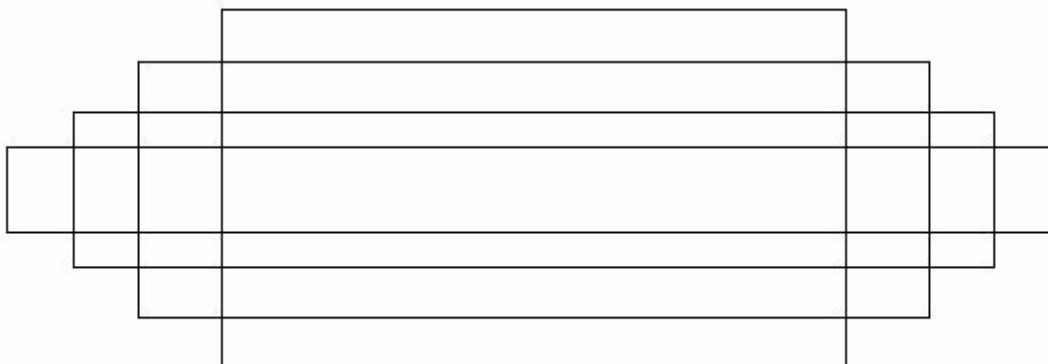
Tot i que el treball amb objectes per fer matemàtiques a l'aula tenia una considerable tradició, el cert és que la tendència des de la segona meitat del segle XX fins fa pocs anys va ser més aviat la contrària. L'abstracció es considerava prioritària i el treball amb objectes innecessari o només adequat per als infants. A partir dels anys noranta del segle passat s'inicia un canvi de tendència perquè es va observar que dur objectes a l'aula trencava la rutina, feia que els alumnes fixessin especialment l'atenció, apropava les matemàtiques a la realitat i en, definitiva, motivava l'alumnat. Els materials els pot dur el professor o el poden dur els alumnes. Certament, des del punt de vista organitzatiu, el treball amb objectes es pot veure com una complicació per al professorat. La veritat, però, és que ens ajudarà a donar una altra imatge de les matemàtiques escolars i que estimularà l'alumnat a fer els passos necessaris per passar de la realitat a l'abstracció.

A continuació es presenten dues activitats en aquest àmbit:

Exemple 1: treball a l'aula amb cordills

EL PROBLEMA ISOPERIMÈTRIC

Ajuntem els alumnes en grups de tres i els donem un cordill, amb els extrems lligats, d'1 m de longitud. Això els permetrà fer, físicament, els diferents rectangles que tenen 1 m de perímetre:



A continuació se'ls demana que omplin la taula següent:

LONGITUD cm	AMPLADA cm	PERÍMETRE cm	ÀREA cm ²
0	50		
5	45		
10	40		
15	35		
20	30		
25	25		
30	20		
35	15		
40	10		
45	5		
50	0		

La segona part de l'activitat consisteix a observar els resultats obtinguts i constatar què canvia i què no canvia.

Posteriorment es demana als alumnes que facin dues gràfiques de punts:

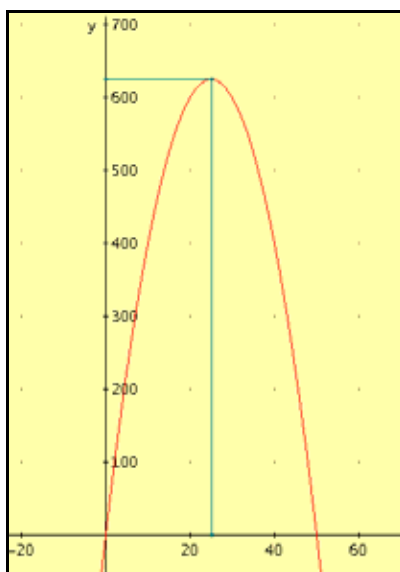
Gràfica 1: han de posar les longituds a l'eix de les X i els perímetres a l'eix de les Y .

Gràfica 2: han de posar les longituds a l'eix de les X i les àrees a l'eix de les Y .

A continuació, cal demanar als alumnes que facin estimacions del perímetre i de l'àrea per a valors intermedis dels costats no considerats en el quadre anterior. Aquestes estimacions s'han de fer sense emprar el model físic i només a partir de l'observació de la gràfica. Després caldrà completar la gràfica fins que tingui un aspecte continu.

Finalment, els demanarem que calculin el valor màxim i que en determinin el significat geomètric i gràfic.

Hi hauria encara la possibilitat d'una darrera part de l'activitat que tingués en compte -i això només serà possible en certs nivells- la fórmula obtinguda: $S(x) = x \cdot (50 - x) = 50x - x^2$

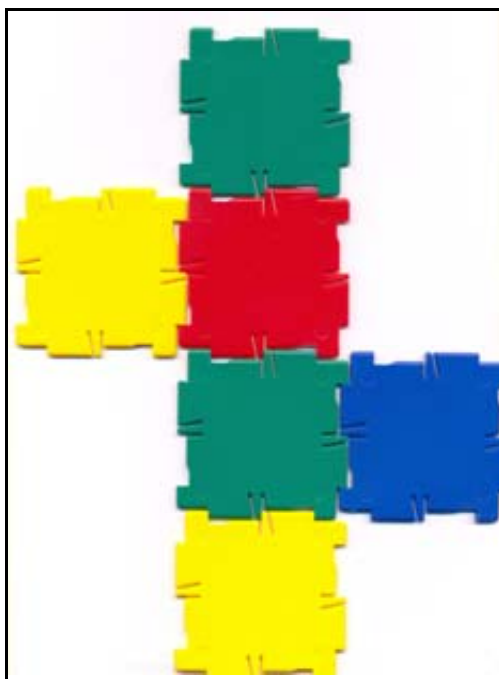


Exemple 2: treball a l'aula amb creator

DESENVOLUPAMENTS PLANS D'ALGUNS POLÍEDRES. CÀLCUL I ESTIMACIÓ DE VOLUMS.

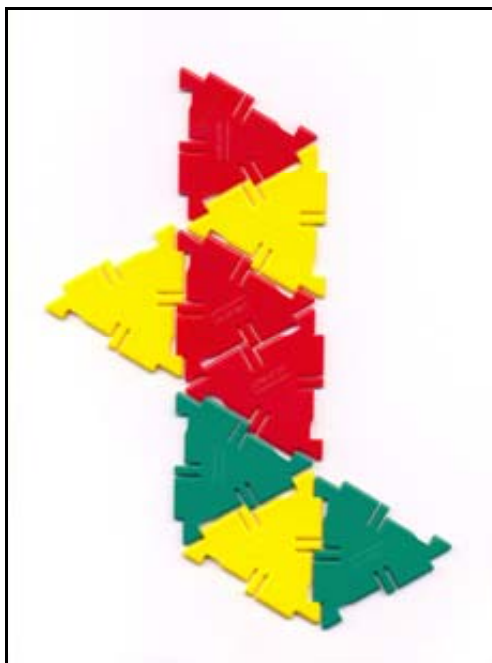
Ajuntem els alumnes en grups de tres i els proposem les activitats següents:

1. Agafeu 4 peces en forma de triangle equilàter de Creator, poseu-les planes sobre la taula i estudieu quines agrupacions permeten construir tetràedres i quines no ho permeten. Dibuixeu-les totes.
2. Agafeu 6 peces en forma de quadrat de Creator, poseu-les planes sobre la taula i estudieu quines agrupacions permeten construir hexàedres i quines no ho permeten. Dibuixeu només les que ho permeten. Al dibuix teniu un exemple d'agrupació de sis quadrats que permet construir un cub.



3. Mesureu el costat del cub en cm i mm i calculeu la seva àrea en cm^2 i en mm^2 . Trobeu també el volum del cub en cm^3 i en litres. Aproximadament, quants cubs com aquests caldrien per omplir tota l'aula? Expliqueu com feu els càlculs.

4. Preneu 8 peces en forma de triangle equilàter de Creator, poseu-les planes sobre la taula i estudieu quines agrupacions permeten construir octàedres i quines no ho permeten. Dibuixeu les que ho permeten. Al dibuix teniu un exemple d'agrupació de vuit triangles que permet construir un octàedre.



5. Mesureu el costat de l'octàedre en cm i mm i empreu el teorema de Pitàgores per calcular les altures de les cares i l'altura del políedre. A continuació, calculeu-ne l'àrea en cm^2 i en mm^2 .

A partir de la fórmula que permet calcular el volum d'una piràmide, trobeu el volum de l'octàedre en cm^3 i en litres. Aproximadament, quants octàedres com aquests caldrien per omplir tota l'aula? Expliqueu com feu els càlculs.

4. EL TREBALL AMB NOTÍCIES DE PREMSA

El treball amb notícies de premsa, a banda que resulti instructiu de cara a la incorporació a la vida adulta, té també elements motivadors perquè es trenca la rutina i s'apropen les matemàtiques a la realitat. L'actualitat de les notícies, dels articles o dels anuncis triats pot ser important i correspon, doncs, a cada professor l'elaboració actualitzada dels materials. En principi, hi ha tres tipus d'activitats possibles:

A) En la primera, es tracta de llegir els articles col·lectivament (els alumnes poden llegir en veu alta per torn) a l'aula. A continuació el professor pot formular algunes preguntes

referents a la comprensió general de la notícia. Finalment els alumnes, individualment o en grup, han de respondre a un seguit de preguntes en forma d'enunciat clàssic.

B) En la segona, es tracta que els alumnes plantegin les seves preguntes a partir de la lectura de les notícies. En aquest cas és preferible treballar en grups per tal que s'intercanviïn les preguntes. Només en última instància convé que el professor assessori els grups.

C) Finalment hi ha també la possibilitat que els alumnes aportin les seves pròpies notícies.

A continuació es presenten dos exemples en aquest àmbit:

Exemple 1

Presos

Observeu atentament la gràfica i les dades recollides. A continuació haureu de respondre les preguntes.



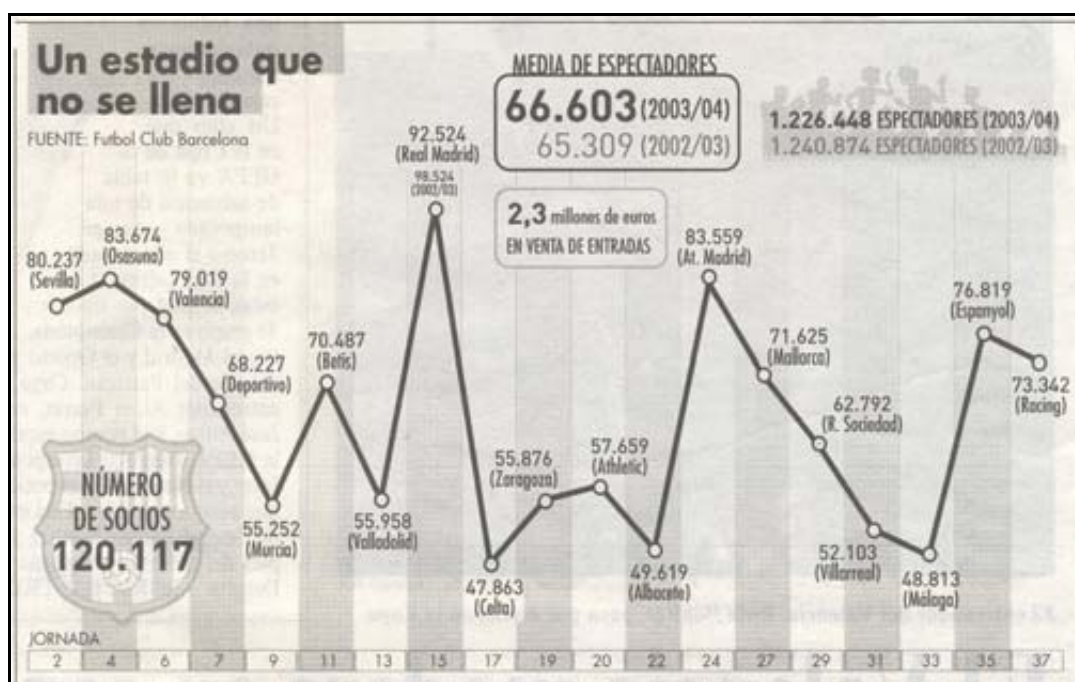
1. Quin era el nombre de presos a Espanya l'any 1998? I el 2003? Calculeu l'augment absolut de presos a Espanya i a Catalunya des de 1995 fins a l'abril de 2004.
2. "L'augment percentual de presos del 1995 al 2004 ha estat més gran a Espanya que a Catalunya". Aquesta afirmació és certa o és falsa. Feu els càlculs necessaris per refutar-la o per certificar-la.
3. Calculeu la mitjana de presos per cada 10000 habitants dels països europeus de la llista, compareu-la amb les mitjanes espanyola, russa i dels Estats Units i feu un comentari.

Exemple 2

Públic al camp del Barça

A continuació teniu una notícia referent al nombre d'espectadors que han assistit al camp del Barça durant la temporada 2003-2004. Observeu-la atentament i responeu les preguntes següents:

1. Quina diferència d'espectadors hi ha hagut entre el partit amb més assistents i el partit amb menys assistents?
2. La notícia conté dues informacions contradictòries. Podríeu detectar-les?
3. Comproveu la mitjana d'espectadors de la temporada 2003-2004 a partir de les dades d'espectadors de cada partit.
4. Calculeu la mitjana d'espectadors dels tres partits amb més públic i dels tres partits amb menys públic de la temporada 2003-2004.
5. Calculeu la desviació típica o estàndard del nombre d'espectadors per partit de la temporada 2003-2004 i interpreteu-la.
6. El camp del Barça té un aforament de 98260 espectadors. Calculeu els percentatges d'ocupació del camp en cada partit i el percentatge mitjà d'ocupació de les localitats.



5. L'ÚS DE RECURSOS AUDIOVISUALS COM A ELEMENTS DE MOTIVACIÓ

A banda dels recursos informàtics, ja tractats al capítol 5, els professors i les professores de matemàtiques disposem també de la possibilitat que ofereixen els vídeos, el cinema i els programes de televisió. El cert és que en un primer moment, cap als anys 70 i 80 del segle passat, va semblar que el recurs a les pel·lícules de vídeo serien un gran recurs de treball a l'aula. Tanmateix, però, amb el temps aquests recursos han perdut força i n'hi ha pocs que tinguin l'actualitat que seria desitjable. Des del punt de vista personal he observat que es tracta d'un recurs que cal emprar amb molta prudència a causa de la passivitat amb què molts alumnes emprenen aquestes activitats. Per tal d'evitar-ho, l'ús del vídeo s'ha d'acompanyar de l'exigència de treball complementari. El millor és demanar la intervenció de l'alumnat –es poden proposar exercicis breus o es poden formular preguntes- després de veure episodis relativament curts de la pel·lícula i un treball una mica més complet quan s'ha passat tota.

En l'àmbit del cinema. Les pel·lícules amb alguna relació explícita amb les matemàtiques es poden trobar, per exemple, en la pàgina del professor xilè Danny José Perich Campana:

<http://www.sectormatematica.cl/cine.htm>

Potser d'entre totes aquestes produccions cal destacar l'excel·lent curtmetratge de dibuixos animats (dura 25 minuts) *Donald en el país de las Matemáticas* de l'any 1959 i en què es parla de Pitàgores, del nombre d'or i de l'infinit entre d'altres qüestions i que tot i els 47 anys transcorreguts és encara molt interessant.

En l'àmbit del vídeos, els centre de recursos pedagògics tenen la col·lecció *Ull matemàtic* produïda per la Yorkshire TV i traduïda al Català, vídeos de l'IRRSAE Piemont (Istituto Regionale di Ricerca Sperimentazione ad Aggiornamieto Educativi) també doblats al català i produccions de grups del país, com ara el de títol *Les "mates" del camp del Barça*, que són força interessants tot i que han quedat clarament antiquats, amb la qual cosa es fa difícil emprar-los a l'aula.

A banda dels centre de recursos, es poden trobar també vídeos de la UOC que poden ser interessants per al treball de l'estadística al batxillerat (n'hi ha, per exemple, de dedicats a estadística bidimensional, a regressió i al coeficient de correlació) i col·leccions de vídeos en llengua anglesa de procedència diversa. La majoria de títols es poden encarregar a la pàgina web següent:

<http://www.learner.org/catalog/catalog.html>

Menció a part mereix la col·lecció de vídeos del "Project MATHEMATICS" obra dels professors Tom M. Apostol i James F. Blinn del California Institute of Technology. Es tracta de peces molt ben pensades i amb un disseny atractiu. Els vídeos es poden trobar al web:

www.projectmathematics.com.

Aquest és un resum de cadascun dels títols:

The Theorem of Pythagoras Several engaging animated proofs of the Pythagorean theorem are presented, with applications to real-life problems and to Pythagorean triples. The theorem is extended to 3-space, but does not hold for spherical triangles. The Story of Pi Although pi is the ratio of circumference to diameter of a circle, it appears in many formulas that have nothing to do with circles. Animated sequences dissect a circular
--

disk of radius r and transform it to a rectangle of base $\pi \cdot r$ and altitude r . Animation shows how Archimedes estimated π using perimeters of approximating polygons.

[Similarity](#) Scaling multiplies lengths by the same factor and produces a similar figure. It preserves angles and ratios of lengths of corresponding line segments. Animation shows what happens to perimeters, areas, and volumes under scaling, with various applications from real life.

[Polynomials](#) Animations show how the Cartesian equation changes if the graph of a polynomial is translated or subjected to a vertical change of scale. Zeros, local extrema, and points of inflection are discussed. Real-life examples include parabolic trajectories and the use of cubic splines in designing sailboats and computer-generated teapots.

[Sines and Cosines, Part 1 \(Periodic functions\)](#) Sines and cosines occur as rectangular coordinates of a point moving on a unit circle, as graphs related to vibrating motion, and as ratios of sides of right triangles. They are related by reflection or translation of their graphs. Animations demonstrate the Gibbs phenomenon of Fourier series.

[Sines and Cosines, Part 2 \(Trigonometry\)](#) This program focuses on trigonometry, with special emphasis on the law of cosines and the law of sines, together with applications to The Great Survey of India by triangulation. The history of surveying instruments is outlined, from Hero's dioptra to modern orbiting satellites.

[Sines and Cosines, Part 3 \(Addition formulas\)](#) Animation relates the sine and cosine of an angle with chord lengths of a circle, as explained in Ptolemy's Almagest. This leads to elegant derivations of addition formulas, with applications to simple harmonic motion.

[The Tunnel of Samos](#) This video describes a remarkable engineering work of ancient times: excavating a one-kilometer tunnel straight through the heart of a mountain, using separate crews that dug from the two ends and met in the middle. How did they determine the direction for excavation? The program gives Hero's explanation (ca. 60 A.D.), using similar triangles, as well as alternate methods proposed in modern times.

[Teachers Workshop](#) This 28-minute tape, accompanied by a 90-page transcript, contains excerpts from a two-day workshop held in 1991 for teachers who have successfully used project materials in their classrooms.

[Project MATHEMATICS! Contest](#) In 1994 Project MATHEMATICS! conducted a contest open to all teachers who had used project materials in their classrooms. Entries were judged on the basis of innovative and effective use of the materials. This videotape, accompanied by a 30-page booklet, shows the classroom implementation of the entries of the first-place winners.

[Early History of Mathematics](#) This 30-minute videotape traces some of the landmarks in the early history of mathematics--from Babylonian clay tablets produced some 5000 years ago, when calendar makers calculated the onset of the seasons--to the development of calculus in the seventeenth century.

L'ABEAM (Associació de Barcelona per a l'Ensenyament i l'Aprenentatge de les Matemàtiques) ofereix també en servei de préstec dues sèries de vídeos força interessants:

Sèrie: Más por menos (13 capítols de 15 minuts cada un en dues cintes de vídeo)

Cinta 1:

Vídeo 1:

- 1- El número áureo.
- 2- Movimientos en el plano.
- 3- La geometría se hace arte.
- 4- El mundo de las espirales.

Vídeo 2:
5- Del baloncesto a los cometas.
6- Fibonacci. Geometría del caos.
7- Las leyes del azar.

Cinta 2:
Vídeo 3:
8- Números naturales, números primos.
9- Fractales. Geometría del caos.
10- Un número llamado e.
Vídeo 4:
11- El lenguaje de las gráficas.
12- Aritmética electoral.
13- Matemática y realidad.

Sèrie: Universo Matemático (10 capítols de 25 minuts cada un en dues cintes de vídeo)

Cinta 3:
Vídeo 1:
1- Pitágoras, mucho más que un teorema.
2- Histórias de pi.
Vídeo 2:
3- Las cifras: un viaje en el tiempo.
4- Fermat: el margen más famoso de la historia
Cinta 4:
Vídeo 3:
5- Gauss: del o real a lo imaginario.
6- Euler: una superestrella.
Vídeo 4:
7- Newton y Leibniz: sobre hombros de gigantes.
8- Las matemáticas en la revolución francesa.
Vídeo 5:
9- Mujeres matemáticas.
10- La búsqueda de un sueño: orden en el caos.

Els programes de televisió amb continguts matemàtics explícits són escassos i quan se'n passa algun és aconsellable gravar-lo per passar-lo després l'aula en comptes de demanar que els alumnes el vegin pel seu compte. Hi ha també experiments interessants amb la ràdio, com ara el promogut per l'associació de professors i de professores de matemàtiques d'Andalusia, la SAEM Thales, amb col·laboració amb Radio Huelva en què es feia difusió de qüestions de matemàtiques i es plantejaven problemes. Potser des de les ràdios i les televisions locals és d'on, ara mateix, sembla més factible promoure activitats en l'àmbit de les matemàtiques escolars.

6. CRÈDITS DE SÍNTESI, ACTIVITATS DE GLOBALITZACIÓ I TREBALLS DE RECERCA

El treball individualitzat de les competències matemàtiques té un interès evident. Tanmateix s'ha de tenir en compte que a la vida quotidiana els problemes no sorgeixen compartimentats temàticament i que el més freqüent serà, doncs, afrontar situacions en què es posin en joc diverses competències d'àmbits també diversos. Per això mateix, les activitats que permeten la col·laboració entre àrees diferents i la visió globalitzada de les situacions s'han de considerar de gran interès i han de ser

factors de motivació importants per a l'alumnat. El crèdits de síntesi a l'ESO, tot i la curta durada que tenen, i els treballs de recerca als batxillerats són, des d'aquesta perspectiva, uns instruments excel·lents de coordinació i de motivació des d'un punt de vista global. D'altra banda, també hi ha la possibilitat que les programacions dels departaments didàctics de matemàtiques dediquin un temps al treball global de les competències matemàtiques sense emmarcar-les en un capítol temàtic. Això es pot fer, per exemple, a final de curs, de tal manera que serà possible globalitzar els aprenentatges i aplicar-los a situacions reals.

7. ALTRES RECURSOS, ELS CONTES I ELS ACUDITS GRÀFICS

Hi ha molts altres recursos que poden contribuir a fer classes una mica allunyades de la tradició del guix i la pissarra. La possibilitat de fer les classes de matemàtiques en anglès o en francès, per exemple, s'ha assajat a alguns centres amb resultats interessants. En aquest cas, certament, la dificultat consisteix a trobar professorat amb la qualificació adequada.

Un altre recurs interessant per a les classes de matemàtiques el trobem en l'ús de contes. Tot i que no hi ha massa materials en aquest àmbit alguns exemples són excel·lents. La lectura i els exercicis següents, per exemple, s'han extret de *L'home que calculava*⁶¹:

“Alguns dies després, un cop acabats els treballs que estàvem realitzant en el palau del visir, vam anar a donar un volt pel *suk* i pels jardins de Bagdad.

La ciutat presentava, aquella tarda, un moviment intens, febril, fora del comú. Això era perquè, al matí havien arribat dues caravanes de Damasc.

En el basar dels sabaters, per exemple, quasi ni s'hi podia entrar; hi havia sacs i caixes, plens de mercaderies, apilonats pels patis de les posades. Forasters damasquins, amb immensos turbants de diferents colors, que mostraven les seves armes penjades a la cintura, caminaven despreocupadament, mirant amb indiferència cap als mercaders. Se sentia una forta olor d'encens, de kif i d'espècies. Els venedors de faves discutien, quasi es barallaven, i deixaven anar uns renecs terribles en siri.

Un jove guitarrista de Modul, assegut sobre grans sacs plens de síndries, cantava una tonada monòtona i trista:

*Què importa la vida de la gent
Si la gent, per mal o per bé
Va vivint, simplement,
La vida que la gent té?*

Els venedors, a les portes de les seves parades, pregonaven les seves mercaderies, exaltant-les amb elogis exagerats i fantasiosos, demostrant fins a quin punt n'és, de fèrtil, la imaginació dels àrabs.

-Aquest ric teixit és digne del nostre emir!

-Amics! Vegeu quin deliciós perfum, que evoca les manyagueries de la vostra esposa!

-Fixis, oh Xeic, quines xinelles i quina túnica brodada! Els *djins* les recomanen als àngels!

(61) Extret de: TAHAN, M. *L'home que calculava*. Barcelona: Editorial Empúries, 2003.

Beremiz es va interessar per un elegant i harmoniós turbant de color blau clar que un siri, mig geperut li oferia per 4 dinars. Hi havia un cartell que, amb lletres ben vistoses, deia així:

Els quatre quates

En veure que Beremiz estava interessat a adquirir el turbant blau, vaig dir-li:

-Em sembla una bogeria comprar aquest luxe. No tenim gaires diners i encara no hem pagat l'hostal.

-No és pas el turbant que m'interessa –va respondre Beremiz- Fixeu-vos que la botiga d'aquest mercader es diu “Els quatre quates”. En això hi ha una sorprenent coincidència digna de ser estudiada!

-Una coincidència? Per què?

-Doncs perquè el que porta escrit aquest cartell fa pensar en una de les meravelles del Càlcul: podem formar un nombre qualsevol només fent servir quatre quates!

I abans que jo li demanés que m'aclarís aquell enigma, Beremiz m'ho va explicar, tot dibuixant en la sorra fina que cobria el terra:

-Vull formar un zero? No hi ha res més simple. Només cal escriure:

$$44- 44$$

Aquests quates formen una expressió que és igual a zero.

Passem al nombre 1. És la forma més còmode:

$$\frac{44}{44}$$

Aquesta fracció representa el quocient de la divisió de 44 per 44. I aquest quocient és 1.

-Vull, ara, fer el nombre 2? Poden utilitzar-se, igualment els quatre quates i escriure:

$$\frac{4}{4} + \frac{4}{4}$$

La suma de totes dues fraccions és exactament igual a 2. El tres és més fàcil. Només cal escriure la següent expressió:

$$\frac{4 + 4 + 4}{4}$$

Fixeu-vos que la suma de 12, dividida per quatre, dóna un quocient de 3. Heus aquí, doncs, el tres format a partir de quatre quates.

-I com fareu el mateix 4? – vaig preguntar.

-No hi ha res més senzill – va explicar Beremiz - . El 4 pot ser format de diverses maneres. Heus aquí una expressió equivalent a 4:

$$4 + \frac{4 - 4}{4}$$

Observeu que la segona part és nul·la, i per tant la suma equival a 4. Aquesta expressió és el mateix que dir $4 + 0$, és a dir, 4.

Vaig notar que el mercader siri escoltava atent, sense perdre's ni una sola paraula, l'explicació de Beremiz, com si l'interessessin aquestes operacions aritmètiques formades per *quatre quatres*.*

Beremiz va prosseguir amb la seva explicació:

- Ara vull formar, per exemple, el nombre 5. No hi ha cap dificultat. Escriurem:

$$\frac{4 \times 4 + 4}{4}$$

Aquesta operació expressa la divisió de 20 entre 4, el quocient de la qual és 5. Tenim d'aquesta manera el 5 escrit amb quatre quatres.

Seguidament passarem al 6 que presenta una forma molt elegant:

$$\frac{4 + 4}{4} + 4$$

Una petita alteració en aquest interessant conjunt proporciona el nombre 7:

$$\frac{44}{4} - 4$$

En canvi, per aconseguir el nombre 8, farem servir una operació molt senzilla:

$$4 + 4 + 4 - 4$$

El nombre 9 no deixa de ser també molt interessant:

$$4 + 4 + \frac{4}{4}$$

Heus aquí una expressió molt interessant, igual a 10, formada també per quatre quatres:

$$\frac{44 - 4}{4}$$

En aquest moment el geperut, amo de la parada, que havia estat escoltant l'explicació del calculista amb un capteniment de respectuós silenci i interès, va dir:

* Tenint en compte la naturalesa i la finalitat d'aquest llibre, usem els signes matemàtics moderns, però és evident que en l'època en què va viure Beremiz la notació matemàtica era ben diferent. (Nota de l'autor)

- Pel que acabo d'escoltar, el senyor excel·leix en els comptes i els càlculs. Li donaria com a present el turbant blau si sabés explicar un cert misteri contingut en una suma, que fa dos anys que em tortura l'esperit.

I el mercader va explicar el següent:

-Vaig deixar, una vegada, una quantitat de 100 dinars, 50 a un xeic de Medina i 50 a un jueu del Caire.

El de Medina va pagar la quantitat en quatre parts, de la següent manera: 20, 15, 10 i 5.

Va pagar 20 i va quedar a deure	30
Va pagar 15 i va quedar a deure	15
Va pagar 10 i va quedar a deure	5
<u>Va pagar 5 i va quedar a deure</u>	<u>0</u>
Suma	50
Suma	50

Observi, amic meu, que tant la suma de les quantitats pagades, com la suma del que em devia, són iguals a 50.

El jueu del Caire va pagar, igualment, els 50 dinars en quatre parts, de la manera següent:

Va pagar 20 i va quedar a deure	30
Va pagar 18 i va quedar a deure	12
Va pagar 3 i va quedar a deure	9
<u>Va pagar 9 i va quedar a deure</u>	<u>0</u>
Suma	50
Suma	51

Cal observar, ara, que la primera suma és de 50 (com en el cas anterior), mentre que l'altra dona un total de 51.

No sé explicar aquesta diferència de 1 que s'observa en la segona forma de pagament. Ja sé prou bé que no en vaig resultar perjudicat, perquè vaig rebre el total de la suma, però ¿com justificar el fet que la segona suma sigui 51 i no pas 50?

- Amic meu – va aclarir Beremiz – això s'explica amb poques paraules....”

Exercicis sobre la lectura

1. A la lectura hem vist que en Beremiz ha estat capaç d'escriure els nombres del 0 al 10 amb quatre quaterns. El podríeu ajudar a arribar fins al 20? Podeu emprar els símbols de les operacions suma, resta, multiplicació, divisió, arrel quadrada i potències - que ja coneixeu - i també l'anomenat factorial: per exemple $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, i, en general:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

Us donem un exemple més que fa servir l'arrel quadrada i el factorial perquè us serveixi de pista:

$$13 = \frac{4!}{\sqrt{4}} + \frac{4}{4}$$

Exercicis sobre la lectura (continuació)

2. Hi ha altres maneres d'escriure els nombres del 0 al 10 amb quatre quates? O les solucions d'en Beremiz són úniques?
3. Com penseu que es resol l'enigma que li planteja el venedor sobre els préstecs?
4. Intenteu arribar fins al 30 amb els quatre quates. No defalliu! S'hi pot arribar!

La utilització de l'humor gràfic a les classes de matemàtiques ha estat estudiat pel professor Pablo Flores⁶², de la universitat de Granada. La tradició associa les matemàtiques a la seriositat i no pas a l'humor:

“Els matemàtics no solen tenir fama de “graciosos”, sinó tot el contrari.”

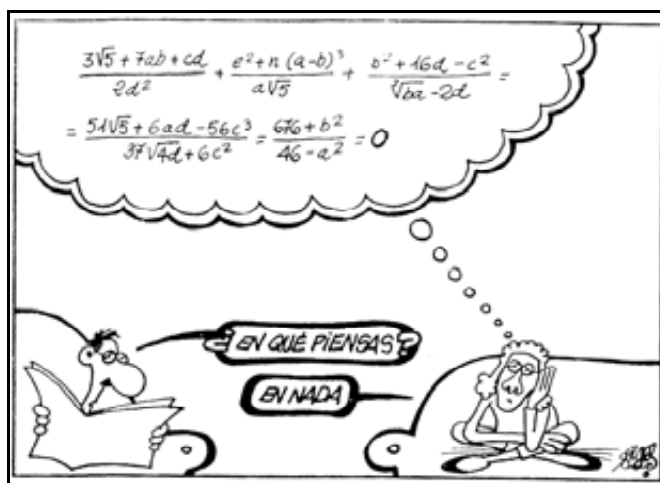
En l'àmbit dels acudits, però, no és gens estrany trobar referències a les matemàtiques. De fet, ens hem de sentir orgullosos que les matemàtiques siguin objecte de broma, ja que això significa que tenen un important paper social.

La funció òbvia dels acudits serà la de la distensió i la de facilitar la comunicació a l'aula. Els acudits poden millorar l'afecte per les matemàtiques, poden alliberar tensions i agressivitats i contribuiran a humanitzar la disciplina.

El professor Flores, però, va més enllà i ens proposa un ús didàctic i pedagògic dels acudits. Cal fer esment dels següents possibles usos de l'humor a les classes de matemàtiques:

1. Com a indicador i com a corrector de la imatge social i de la imatge personal que l'alumnat té de les matemàtiques.

Activitat de debat en grups i posada en comú col·lectiva

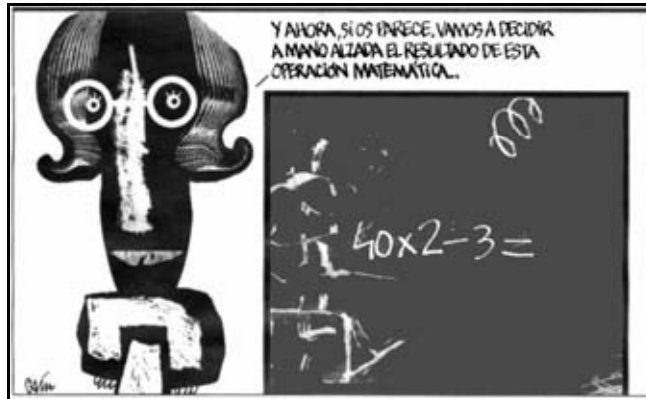


Què són les matemàtiques per a tu?

(62) Les cites i les idees exposades s'han extret de: FLORES, P. *Humor gráfico en el aula de matemáticas*. Arial: Granada, 2003. Els acudits són de la web: <http://ddm.ugr.es/personal/pflores/>

2. Com a instrument de complicitat amb un ànim lúdic i satíric.

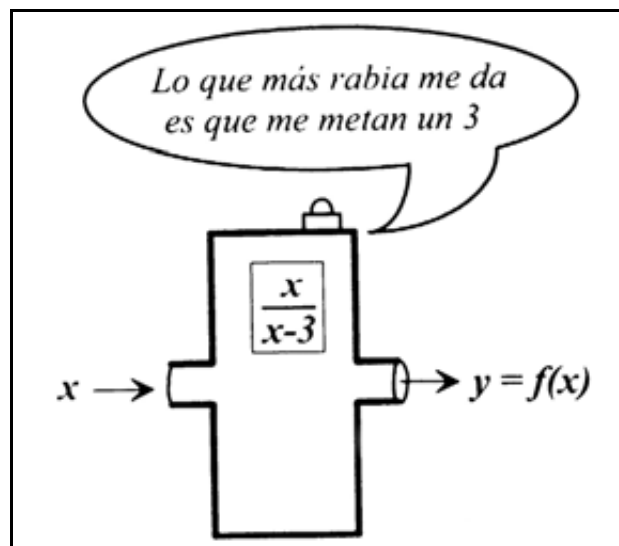
Activitat de debat en grups i posada en comú col·lectiva



En matemàtiques les coses no tenen discussió possible? Hi ha punts de vista en les matemàtiques?

3. Com a forma de representació suggestiva d'alguns conceptes.

Treball del concepte de domini d'una funció



4. Com a instrument per a l'estudi d'errades matemàtiques (que puguin aparèixer als acudits).

Treball dels conceptes estadístics



Per què és incorrecta l'afirmació de l'acudit?

5. Com a instrument per retenir vocabulari matemàtic.

Treball del concepte de mitjana



És possible que tots els alumnes tinguin la nota per sobre de la mitjana? Per què? La frase tindria sentit en algun altre context?

6. Com a mitjà per analitzar recursos i instruments per al treball de les matemàtiques.

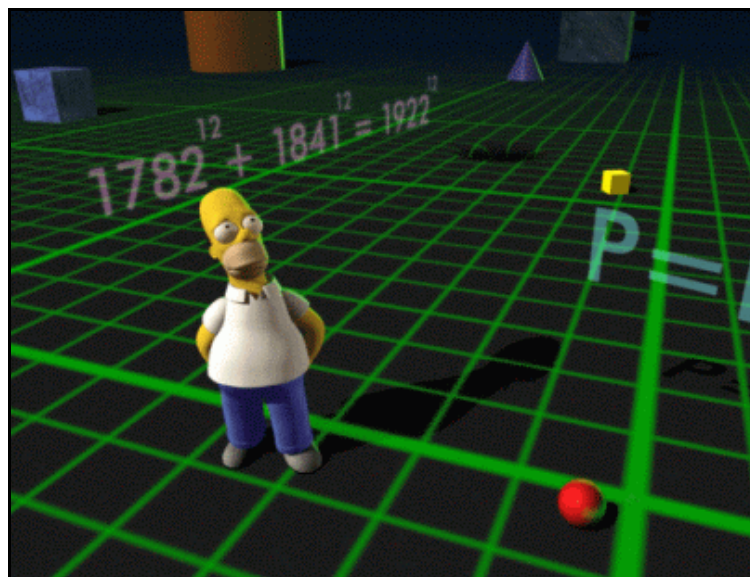
Treball del concepte de mitjana



Com heu de fer servir la calculadora a classe?

7. Com a font per plantejar problemes per al treball de les matemàtiques.

Un problema a partir de la vinyeta



És certa la igualtat que apareix al dibuix?
Quins cossos geomètrics s'observen?
Què podeu descriure de la quadrícula? Com s'aconsegueix l'efecte de profunditat?

Els acudits es poden presentar en suport informàtic, fotocopiats o en forma de pòsters de gran format (que poden decorar l'aula de manera permanent).

De la meua banda he pogut comprovar que els acudits són especialment útils en els cursos de formació inicial i de formació permanent del professorat. Permeten obrir el debat en molts dels temes a tractar i conviden a reflexionar sobre el sentit i l'origen de les matemàtiques i de la seva didàctica.

CAPÍTOL 7: LA MATEMÀTICA RECREATIVA COM A INSTRUMENT DE MOTIVACIÓ A L'AULA

La matemàtica recreativa pot proporcionar recursos excel·lents per millorar la motivació i l'aprenentatge de l'alumnat. Tanmateix, rarament se'n fa un ús sistemàtic i meditat. Molt sovint es considera que comprèn qüestions marginals que no tenen cabuda en els densos programes educatius i se'n sol fer un ús restringit o, fins i tot, decoratiu. En aquest capítol s'estudiaran els possibles usos didàctics d'aquests recursos com a instruments de motivació.

1. CONSIDERACIONS GENERALS

La matemàtica recreativa pot ser un instrument excel·lent per aconseguir una millora de la motivació de l'alumnat. En general, els problemes de la matemàtica lúdica s'han emprat com a recurs "decoratiu" a les classes de matemàtiques. Quan ja no hi ha programa, quan hi ha un dia penjat al final d'un trimestre, sembla que és l'hora dels problemes lúdics. Molts experts en didàctica de les matemàtiques han arribat a la conclusió que això és un error. Els problemes lúdics i la matemàtica recreativa en general s'han d'integrar, com una peça més, com un recurs magnífic, dins de les activitats normals a l'aula. En Martin Gardner⁶³, un dels experts en la matemàtica lúdica amb millor reputació, ens diu:

"Sempre he cregut que el millor camí per fer les matemàtiques interessants als alumnes i als profans és el que consisteix a apropar-s'hi a través del joc. En nivells superiors les matemàtiques poden i han de ser mortalment serioses. En nivells inferiors, però, no és possible motivar cap alumne a aprendre, per exemple, la teoria de grups, tot dient-li que la trobarà meravellosa, estimulante o fins i tot útil si algun dia arriba a ser un físic especialitzat en partícules. El millor mètode per mantenir despert un estudiant consisteix, segurament, a proposar-li un joc matemàtic que l'intrigui, un passatemps, una broma, una paradoxa, un model, un trencaclosques o qualsevol de les mil coses que els professors avorrits solen refusar perquè pensen que són frivolitats."

També el Grup Zero⁶⁴, fa més de 25 anys, apuntava en aquesta direcció:

"Hom ha sentit dir moltes vegades: "No és divertint-se com s'aprèn" i viceversa: "Sols divertint-se es pot aprendre". La veritable solució està sens dubte en una posició intermèdia entre aquests dos extrems; no hi ha dubte, però, que els entreteniments matemàtics proporcionen un incentiu a la imaginació i desafien i serveixen d'estímul al progrés de les matemàtiques."

Quan el prestigiós professor Alan Bishop, de la Monash University (Victòria, Austràlia), intenta determinar quines són les competències bàsiques a partir d'allò que es fa a la societat ens diu⁶⁵:

(63) Extret de: GARDNER, M. *Carnaval matemático*. Barcelona: Alianza Editorial, 1984.

(64) Extret de: GRUP ZERO BARCELONA. *Progressions*. Barcelona: I. C. E. U. A. B., 1978.

(65) Extret del capítol elaborat per A. Bishop a: GORGORIÓ, N. [et al.]. *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*. Barcelona: Graó- ICE UAB, 2000.

"...Allò que la nova conceptualització ens proposa és que pensem més sobre les pràctiques matemàtiques que tenen lloc fora de l'escola, en una gran varietat de contextos socials i econòmics, i que trobem la manera de descompondre aquestes pràctiques. Com a resultat d'aquest procés de descomposició hauríem de ser capaços d'investigar el coneixement matemàtic subjacent en aquestes pràctiques, i després hauríem de reflexionar sobre com es podria transposar didàcticament aquest coneixement dins del currículum i a l'aula".

Des de aquesta perspectiva, el professor Bishop acaba per considerar sis categories bàsiques de pràctiques matemàtiques que constituïrien la base de l'alfabetització matemàtica. Doncs bé, una d'aquestes sis categories és la de "*jugar*". Bishop observa que tothom juga i que tothom es pren el joc seriosament, la qual cosa significa que fins i tot l'educació per a l'alfabetització matemàtica pot ser divertida. Amb tot, precisa que no totes les formes de joc són interessants des del punt de vista de l'alfabetització matemàtica. Tanmateix, els jocs, els trencaclosques, les paradoxes lògiques i la probabilitat formen part de la societat moderna. Tots els jocs tenen regles i aquestes regles potencien el desenvolupament d'estratègies. Les habilitats que es desenvolupen específicament amb aquesta activitat són el pensament estratègic, conjeturar i planificar.

També el nostre admirat Pere Puig Adam⁶⁶, ja en els anys 50 del segle passat, tenia consciència de la necessitat de fer unes altres matemàtiques:

"La matemàtica ha constituït, tradicionalment, la tortura dels escolars del món sencer, i la humanitat ha tolerat aquesta tortura per als seus fills com un sofriment inevitable per adquirir un coneixement necessari; però l'ensenyament no ha de ser una tortura, i no seríem bons professors si no procuréssim, per tots els mitjans, transformar aquest sofriment en fruïció, la qual cosa no significa absència d'esforç, sinó, al contrari, generació d'estímuls i d'esforços desitjats i eficaços."

La controvèrsia sobre l'ús dels recursos recreatius a les aules també ha estat tractada pel gran divulgador, recentment desaparegut, Miguel de Guzmán⁶⁷:

"És clar que, especialment en la feina d'iniciar els més joves en les tasques matemàtiques, la flaire del joc pot impregnar de tal manera el treball que el faci molt més motivat, estimulante, fins i tot agradable i, per a alguns, àdhuc apassionant. De fet [...] hi ha hagut força intents de presentar sistemàticament els principis matemàtics que regeixen molts dels jocs de totes les èpoques, amb la finalitat d'evidenciar les connexions entre joc i matemàtiques. Malauradament per al desenvolupament científic en el nostre país, l'aportació espanyola en aquest camp ha estat pràcticament nul·la. Els nostres científics i els nostres docents s'han pres massa seriosament la seva ciència i la seva docència i han considerat superficial i frívol qualsevol intent de barrejar el plaer amb el deure. Seria desitjable que els nostres professors, amb una visió més oberta i més responsable, aprenguessin a aprofitar els estímuls i les motivacions que aquest esperit de joc pot ser capaç d'infondre en els seus ensenyants."

"El joc i la bellesa són a l'origen d'una gran part de les matemàtiques. Si els matemàtics de totes les èpoques s'ho han passat tan bé amb el joc i amb la contemplació del seu joc i de la seva ciència, per què no hauríem de tractar d'aprendre-la i de comunicar-la a través del joc i de la bellesa?"

(66) Cita recollida al llibre: CORBALÁN, F. *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato*. Madrid: Síntesis, 2002.

(67) Extret de: DE GUZMÁN, M. *Juegos matemáticos en la enseñanza*. Actas de las IV jornadas de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. Santa Cruz de Tenerife, 1984.

Fernando Corbalán⁶⁸ proposa tres condicions generals a l'hora d'introduir els jocs matemàtics a l'aula:

1. No s'han d'esperar resultats màgics. En l'ensenyament de les matemàtiques no hi ha varetes màgiques que produeixin efectes meravellosos. Sí que és previsible, en canvi, que es millorin els resultats, sempre que els recursos siguin adequats i hi hagi interès i dedicació per aplicar-los adequadament per part del professorat.
2. Cal utilitzar-los de manera sistemàtica i planificada. Tot i que no estigui de més la possibilitat d'una utilització esporàdica, si volem obtenir una influència duradora, cal emprar-los dintre de la programació habitual i amb regularitat.
3. La utilització dels jocs s'ha de considerar com un dret de l'alumnat, no com una concessió del professorat.

2. UNA CLASSIFICACIÓ DELS RECURSOS DE LA MATEMÀTICA RECREATIVA

Ara mateix hi ha a la disposició del professorat una gran quantitat de recursos en l'àmbit de la matemàtica recreativa que es poden emprar a les classes. A continuació es presenta una classificació d'aquests recursos (no hi ha pas la pretensió de fer una classificació exhaustiva sinó la de presentar els recursos ordenadament):

1. Passatemps amb contingut matemàtic

- 1.1. **En l'àmbit aritmètic:** quadrats màgics, operacions amb incògnites, presentacions numèriques en les quals cal calcular nombres, etc.

Exemple1

Tenim la següent operació:

$$\begin{array}{r} \text{AABB} \\ -\text{BBAA} \\ \hline \text{CDDC} \end{array}$$

- a) Quin és el nombre CDDC?
- b) Quins són els possibles nombres AABB?

Exemple 2

Esborreu dos nombres i només dos per fila i per columna de tal manera que els nombres restants sempre sumin 15:

3	7	3	1	7	4
3	8	2	2	6	1
4	4	3	4	5	2
8	1	5	7	1	6
7	2	1	5	4	8
1	5	9	4	2	3

(68) Extret de: CORBALÁN, F. *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato*. Madrid: Síntesis, 2002.

- 1.2. **En l'àmbit de la combinatòria i de les sèries:** sudoku, permutacions i combinacions de nombres i d'objectes, sèries numèriques, sèries d'objectes, sèries de dibuixos, etc.

Exemple 4

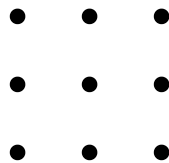
	2		8	5				
4	5		3			2		9
	7				6		3	1
6	4	3		2			1	8
5	1			7		3	9	6
7	8		1				5	
2		9			3		7	4
				9	4		6	

Completeu la taula (subdividida en 9 quadres) de 81 caselles de tal manera que en cada fila, en cada columna i en cadascun dels 9 quadres hi surtin les xifres de l'1 al 9 i que no se'n repeteixi cap.

- 1.3. **En l'àmbit de la geometria i de la topologia:** construccions diverses, paradoxes, nusos, etc.

Exemple 5

Sense aixecar el llapis del paper fer un traç que consti de quatre segments i que passi pels nou punts dibuixats:



Exemple 6

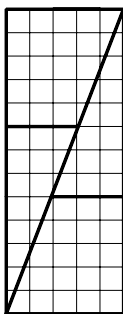
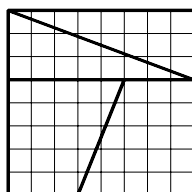
Sabríeu dibuixar dues circumferències concèntriques sense aixecar el llapis del paper i sense traçar cap marca entre les dues circumferències?

Exemple 7

Amb nou escuradents formeu set triangles.

Exemple 8

Observeu les figures següents: a primer cop d'ull les quatre peces en què queden dividits el rectangle i el quadrat són iguals; d'altra banda, el rectangle conté $5 \times 13 = 65$ quadradets i el quadrat en conté $8 \times 8 = 64$. Què és el que passa? Potser això demostra que $64=65$?



2. Problemes curiosos o d'enginy

Exemple 9

Com us ho faríeu per tal de portar d'un riu 6 litres d'aigua si només teniu a la vostra disposició un recipient de 4 litres i un altre de 9 litres.

Exemple 10

Un capità té fills i filles. Té més anys que fills i filles junts, però no arriba als cent anys. Si es multiplica l'eslora del seu vaixell, donada en metres, per la seva edat i pel nombre total de fills i de filles que té, surt 32118. Quina és l'edat del capità? Quants fills i filles té en total? Quina és l'eslora del seu vaixell?

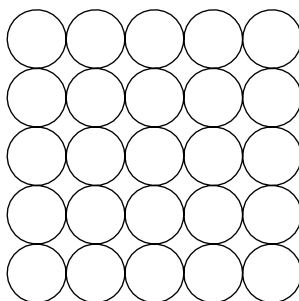
Exemple 11

Expliquen els més vells del poble que fa molts, molts anys, van acusar un home de bruixot, i el tribunal que el jutjava va condemnar-lo a una sentència ben cruel. El condemnat havia de pronunciar una frase de tal manera que si la frase resultava certa, moriria a la forca, i si resultava falsa, moriria a la foguera.

El condemnat, però, es va salvar. Com s'ho va fer ?

Exemple 12

Al damunt d'una taula hi ha col·locades 25 monedes de 2 euros de la forma següent:

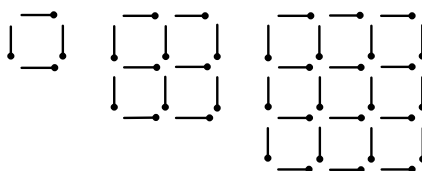


Ve una mosca volant i es posa a sobre d'una de les monedes. Se li acudeix, de sobte (és una mosca amb problemes psicològics...), que li agradaria pitjar totes les monedes caminant, tot i passant d'una moneda a una altra que la toqui i sense repetir-ne cap. Ho podrà fer? Podríeu fer-li l'itinerari?

3. Problemes aritmètics.

Exemple 13

Quants llumins es necessiten per construir 36 quadrats unitaris formant un altre quadrat més gran, com en la successió següent? I si en tenim 144? I si en tenim 10.000?



Exemple 14

El nombre màgic 6174

Agafeu un nombre de quatre xifres no totes iguals, per exemple 9631. Reordeneu-les, si cal, per tal d'obtenir el major i el menor nombre que es pot aconseguir amb aquestes xifres.

A continuació resteu aquests nombres. A l'exemple que es proposa es tindria:

$$\begin{aligned} 9631 - 1369 &= 8262. \text{ Si es reitera el procés:} \\ 8622 - 2268 &= 6354; 6543 - 3456 = 3087; 8730 - 0378 = 8352; \\ 8532 - 2358 &= 6174 \end{aligned}$$

Feu proves amb altres nombres. Veureu que sempre anireu a parar al 6174 amb un màxim de set passos.

Exemple 15

Escriviu un nombre qualsevol de tres xifres i repetiu-lo a la seva dreta. Dividiu el nombre de sis xifres que es forma per 13 i el quocient obtingut per 11 i després per 7. Veureu que torna a sortir el nombre inicial. Podríeu esbrinar què és el que passa? Podríeu donar una justificació general d'aquest fet? Podríeu generalitzar el resultat?

Exemple 16

Observeu les operacions següents:

Agafem un nombre de tres xifres qualsevol, per exemple el 341, el girem i obtenim el 143. Restem el petit del gran:

$$341 - 143 = 198.$$

Repetim el procés amb aquest nombre però ara els sumem:

$$891 + 198 = 1089$$

Investigueu si passa el mateix amb altres nombres de tres xifres.

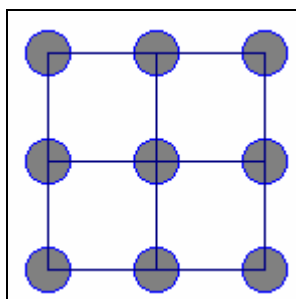
4. Jocs de base matemàtica.

- 4.1. **Jocs comuns:** escacs, jocs de cartes, dòmino, trivial (adaptat a les matemàtiques), daus, “Master Mind”, bingo, etc.

Exemple 17

Feu 10 partides al tres en ratlla amb el vostre company de taula i responeu les preguntes següents:

1. Hi ha alguna estratègia guanyadora? Per què?
2. Hi ha alguna posició que ofereixi algun avantatge? Per què?



Exemple 18

Si es juga al pòquer amb totes les cartes de la baralla, què és més probable:

- 1) Tenir un full servit; 2) Tenir color servit.

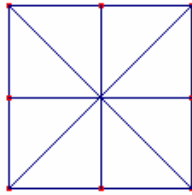
Exemple 19: exemples de cartolines per a un trivial matemàtic:

Completeu la sèrie: 1,1,2,3,5,8,13,21,...

1) 32, 43, 58,... ; 2) 34, 55, 89,... ; 3) 18, 35, 56,... ; 4) 34, 53, 77,...

Si $(x-1) \cdot (x+1) = 8$, quant val x ?

1) $x=0$; 2) $x=5$; 3) $x=3$; 4) No es pot calcular

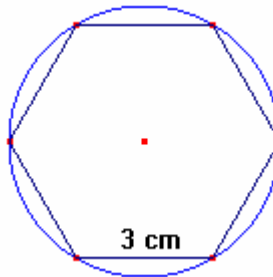


Quants triangles hi ha a la figura?

1) 10 ; 2) 12 ; 3) 8 ; 4) 16

**Una bicicleta de muntanya costa 1000€ el mes de setembre.
El mes d'octubre la rebaixen un 20% i el més de desembre
L'apugen un 20%. Quant costa ara?**

1) 1000€ ; 2) 1200€ ; 3) 960€ ; 4) 1240€



Si el costat de l'hexàgon regular inscrit mesura 3 cm, l'àrea de la circumferència val:

1) $9\pi \text{ cm}^2$; 2) $\pi\sqrt{3} \text{ cm}^2$; 3) $6\pi \text{ cm}^2$; 4) No es pot saber

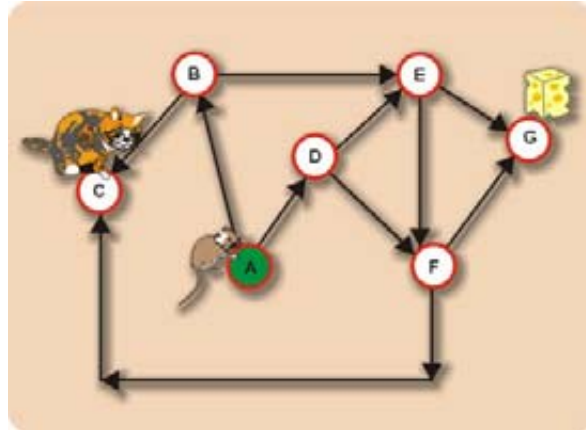
L'home del temps afirma que el dissabte hi ha un 50% de probabilitat que plogui i que el diumenge també hi ha un 50% de probabilitat de tenir pluja. Per tant, la probabilitat que plogui el cap de setmana és del:

1) 100% ; 2) 50% ; 3) 75% ; 4) No es pot saber

4.2. **Jocs de contingut específicament matemàtic:** jocs de probabilitat, d'àlgebra, de tipus geomètric, etc.

Exemple 20

Una rata ha caigut a la sala A d'un laberint com el que teniu dibuixat a continuació:



La rata comença a moure's a l'atzar pels camins que va trobant, però sempre en el sentit de les fletxes.

Al final del seu passeig anirà a parar o bé a la sala C, on li espera un gat per a menjar-se-la, o bé, a la sala G on té un gran tros de formatge per a menjar i anar-se'n lliure.

Què creieu que és més fàcil, que acabi menjant-se-la el gat o que quedi lliure?

Penseu en una manera de poder simular aquesta situació de forma que sigui més fàcil el poder resoldre-la. Realitzeu l'experiment diverses vegades per a poder arribar a una conclusió.

Si posem 8 rates a la sala A, quantes creieu que se salvaran? I si en posem 16?

4.3. **Jocs d'estratègia:** numèrics o geomètrics.

Exemple 21: joc numèric per a dues persones

Cada jugador per torn diu un nombre comprès entre l'1 i el 5. El nombre que es diu se suma a la suma de tots els anteriors. Guanya el primer jugador que arriba al 100.

Hi ha alguna estratègia guanyadora? Quina?

4.4. **Trencaclosques de base matemàtica:** els tàngrams, els pentaminos, el cub de Ernő Rubik, etc.

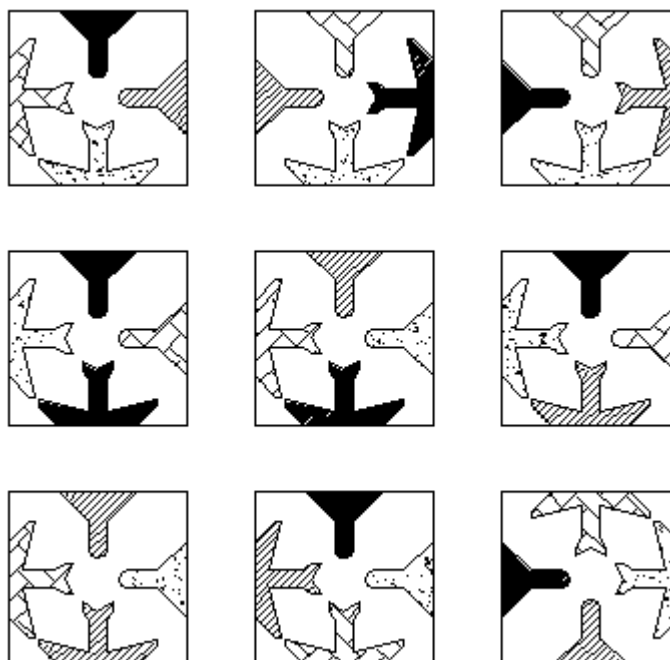
Exemple 22: tàngram

Amb les peces següents componeu un quadrat. Calculeu l'àrea de cadascuna de les peces i comproveu que, sumades, donen l'àrea del quadrat.



Exemple 23: avions

La companyia Swissair regalava aquest trencaclosques que consisteix en 9 fitxes quadrades amb dos caps i dues cues d'avió totes elles. Només es diferencien les fitxes pels 4 colors que es fan servir. El joc consisteix a disposar les 9 fitxes en un tauler 3x3 de manera que els avions quedin ben dibuixats i tinguin el mateix color.



5. Teatralitzacions i classes amb acció.

Exemple 24: representació mímica de conceptes matemàtics

Els alumnes es divideixen en grups de dos. Per torn surten a la pissarra i fan un mim per tal de transmetre conceptes com ara quadrat, equilàter, hexàgon, teorema de Pitàgores, etc. Els altres grups, també per torn, han d'endevinar el concepte escenificat.

Exemple 25

El professor divideix la pissarra en 4 parts i posa el títol “Representació de fraccions sobre la recta”. A continuació, en cadascuna de les parts dibuixa una recta de més de 2 m de longitud i marca un 0 i un 1 a 2 m de distància. Els alumnes es subdivideixen en 4 grups de treball. A cada grup se li dona un cordill de 2 m de longitud. Es demana als grups que representin a la pissarra, cada un en una de les subdivisions de la pissarra i amb l'ajut del seu cordill, les fraccions següents:

$$\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{5}{6}, \frac{2}{7}, \frac{4}{9}$$

A continuació, per torn, els grups expliquen les estratègies que han emprat i col·lectivament es decideix quina estratègia es considera millor.

6. Acudits i retalls de premsa.

Exemple 26

La utilització d'acudits en el decurs d'algunes classes (vegeu l'apartat 7 del capítol 6) pot proporcionar un estímul de la motivació a la vegada que provoca la distensió en l'alumnat. Si s'està en una fase de resolució de problemes, per exemple, aquest acudit serà benvingut de ben segur:



Si hem de parlar d'estadística, aquest altre, per exemple, ens vindrà molt bé:



Exemple 27

D'altra banda, a la premsa hi podem trobar força notícies que podem connectar amb l'activitat matemàtica. La que es presenta a continuació, per exemple, pot anar molt bé quan parlem de probabilitat:

SOCIEDAD

LA VANGUARDIA 37

La maldición del número 53

Un dígito de la lotería de Venecia que se resiste a salir provoca suicidios y alarma social en Italia

MARÍA-PAZ LÓPEZ
Roma, Corresponsal

Esperando en vano el número 53, a algunos italianos se les han ido los ahorros, e incluso la vida. La lotería de Venecia lleva 178 extracciones sin que salga ese número, y su búsqueda desesperada ha llevado a pensionistas, amas de casa, empresarios y profesionales a gastarse casi 4.000 millones de euros. La ruina sobrevenida ya ha provocado suicidios. Si la cosa no cambia a las ocho de esta noche (se realizan extracciones dos veces por semana, el miércoles y el sábado), proseguirá esta fiebre, sobre la que empieza a cundir la alarma.

La lotería funciona en Italia del siguiente modo: el jugador apuesta una cantidad mínima de un euro intentando acertar, según distintas modalidades, al menos uno de cinco números comprendidos entre el 1 y el 90. En realidad, no se trata de una lotería única, sino de diez, bautizadas con los nombres de diez ciudades (Bari, Cagliari, Florencia, Génova, Milán, Nápoles, Palermo, Roma, Turín y Venecia), y todas ellas celebran sus extracciones dos veces por semana.

En los bares y estancos donde se pueden hacer las apuestas, y en páginas de internet de amantes de la numerología, proliferan estadísticas sobre números aún por salir. Récord aplastante: el número 53 de la lotería de Venecia, que lleva 178 extracciones sin aparecer. Ignorando toda lógica –según la cual en cada extracción todos los números tienen la misma probabilidad de ser extraídos–, los jugadores consideran que el 53 va a salir de modo inminente, y las apuestas suben, y los dramas no cesan.

El pasado 12 de enero, un ama de casa de Massa (región de Toscana) se suicidó arrojándose al mar tras perder todos sus ahorros apostando

Los italianos han apostado ya 4.000 millones al 53, y hay voces pidiendo que sea retirado ■■

al 53 de Venecia. El pasado jueves, un agente de seguros de Florencia, abrumado por las deudas contraídas para jugar al número veneciano, mató a su mujer y a su hijo y luego se suicidó. Otras personas han hipotecado su casa, se han pulido el sueldo a escondidas del cónyuge, o han cometido delitos, como un ama de casa de Livorno, denunciada por firmar cheques falsos de 50.000 euros para compensar sus apuestas. Visto el delirio, la asociación de consumidores Codacons ha pedido públicamente que se elimine de la lotería veneciana el número 53 por causar "desorden público", y ha tipificado varios delitos de los que se podría acusar a personas determinadas: "Concurso en instigación al suicidio, violencia privada, instigación a la usura, fraude comercial, concurso en bancarrota familiar, y concurso en abuso de la credulidad popular". Si no puede eliminarse el número, la Codacons pide que, al menos, se limiten las apuestas al 53 a un máximo de mil euros. También ha intervenido el cardenal Ennio Antonelli, arzobispo de Florencia, denunciando que "no es necesario alimentar la pasión del juego".

Según la tradición, la lotería italiana nació en 1550 en Génova –donde se apostó por la elección de cinco ministros de entre 90 candidatos–, pero el primer juego oficial se celebró el 9 de septiembre de 1682 en Nápoles. El modo de extracción conserva un encanto rudimentario: un niño con los ojos vendados mete la mano en un saco con 90 bolas huecas (dentro de cada bola hay un papelito con un número) y extrae cinco bolas.

La RAI transmite la lotería de Roma, pero, obviamente, hay diez niños que hacen extracciones para cada una de las loterías, y el apostante escoge por qué ciudad apuesta independientemente de su lugar de residencia. ●

7. Cançons i poemes.

La utilització de cançons i de poemes és un recurs més per trencar les rutines de les classes i motivar els alumnes.

Alguns webs ofereixen interaccions interessants entre música i matemàtiques: aquests en són dos exemples:

<http://web.tampabay.rr.com/warhawks/FibonacciWaltz.html>
<http://www.geocities.com/Vienna/9349/index.html>

En l'àmbit de la poesia també es poden trobar exemples interessants:

Exemple 28

El professor Claudi Alsina⁶⁸ recull un curiós poema dedicat al nombre pi de l'enginyer català Frederic Masallé i Guarné:

Amb l'ajut d'amena habilitat,
De xifres, sèrie ben santa emplenes,
Recordant formosa quantitat
Que pi fou nomenada quan Atenes
Al cercle feia cas, com convenia
Per la ufanosa Geometria.

El poema conté els primers 30 decimals del nombre a partir de la mida de cada paraula:

3	1	4	1	5	9
2	6	5	3	5	8
9	7	9			
3	2	3	8	4	6
2	6	4	3	3	8
3	2	7	9		

$$\pi = 3,14159265358979323846264338327950288...$$

El senyor Masallé es va aturar poc abans d'haver d'inventar una paraula de zero lletres...

Podem proposar als nostres alumnes exercicis similars amb el mateix nombre pi o amb el nombre e:

Exercici

Trobeu una frase que reculli els primers deu decimals de pi.
Trobeu una frase que reculli els primers deu decimals del nombre e.

(69) Extret de: ALSINA, C. *Estimar les matemàtiques*. Barcelona: Columna, 2000.

Exemple 29

Poema de Rafael Alberti⁷⁰ dedicat al nombre d'or:

A ti, maravillosa disciplina,
media, extrema razón de la hermosura
que claramente acata la clausura
viva en la malla de tu ley divina.

A ti, cárcel feliz de la retina,
áurea sección, celeste cuadratura,
misteriosa fontana de medida
que el universo armónico origina.

A ti, mar de los sueños angulares,
flor de las cinco formas regulares,
dodecaedro azul, arco sonoro.

Luces por alas un compás ardiente.
Tu canto es una esfera transparente.
A ti, divina proporción de oro.

3. ALGUNES ORIENTACIONES FINALS

Tots aquests recursos s'han d'administrar amb prudència. No convé concentrar-los en un període de temps determinat sinó intercalar-los en les activitats de classe per relaxar les situacions i per motivar l'alumnat. Durant els primers anys d'implantació de la LOGSE, va ser d'ús relativament comú oferir crèdits variables de matemàtica recreativa. Això, certament podia tenir el seu interès, tanmateix, però, sembla més efectiu per a la motivació de tot l'alumnat l'ús dels recursos recreatius en els crèdits comuns, com un instrument més de treball i d'activitat a classe. A més, ara mateix el nombre de crèdits variables de matemàtiques ha sofert una gran davallada i encara té menys sentit concentrar la matemàtica recreativa en activitats docents de caire molt restringit.

D'altra banda, aquest tipus d'activitat fomenten la possibilitat del treball en grup i la cooperació entre els alumnes que sovint és més aviat escassa a les classes de matemàtiques.

Cal apuntar, finalment, que no és bo donar les solucions al moment. Resulta molt més eficaç deixar les propostes obertes i premiar les resolucions.

(70) Extret de la documentació preparada pel professor Claudi Alsina per al seminari: *Aprovechando la historia de la matemática para educar hoy*. Impartit a Argentina el novembre de 2001. El poema forma part de *Poemas del destierro* del 1946.

CAPÍTOL 8: LA HISTÒRIA DE LES MATEMÀTIQUES I LA DIVULGACIÓ COM A INSTRUMENTS DE MOTIVACIÓ A L'AULA

La història de les matemàtiques i la divulgació d'alguns aspectes de la matemàtica d'actualitat o del passat de certa complexitat poden ser recursos excel·lents per millorar la motivació i l'aprenentatge de l'alumnat. Tanmateix, com en el cas de la matemàtica recreativa, rarament se'n fa un ús sistemàtic i meditat. Molt sovint es considera que són qüestions sense massa importància o “decoratives”, que no tenen cabuda en els densos programes educatius i que, en el fons, no formen part de les vertaderes matemàtiques. En aquest capítol s'estudiaran els possibles usos didàctics de la història i de la divulgació com a instrument de motivació.

1. CONSIDERACIONS GENERALS

Un altre factor a tenir en compte quan es parla de motivació i de millorar la imatge de les matemàtiques és el de la necessitat de fer un ús adequat de la història de les matemàtiques i de la divulgació. Activitats que tradicionalment han menyspreat la majoria dels matemàtics com a disciplines menors tal i com ens recorda John Allen Paulos⁷¹:

“Un dels arguments que addueixen els matemàtics per no escriure per a un públic més ampli és la naturalesa esotèrica del seu treball [...]. Gairebé sempre és possible fer una presentació atractiva i intel·lectualment honesta de qualsevol camp, amb un mínim d'aparell tècnic. Això es fa rarament, però, perquè la majoria de sacerdots (els matemàtics inclosos) tendeixen a ocultar-se darrere d'un mur de misteri i permeten només la comunicació entre membres.”

A les classes de ciències, per exemple, sembla normal comentar, des d'un punt de vista divulgador i sense pretensió de rigor, les darreres teories genètiques o cosmològiques. En canvi, a les de matemàtiques, no és gens habitual comentar aspectes similars. L'alumnat pot entendre perfectament, des d'un punt de vista intuïtiu, què són, per exemple, les geometries no euclidianes o què diu la conjectura dels nombres primers bessons. El professorat, però, no s'aventura per aquests camins i prefereix la certesa de l'activitat rutinària.

Els matemàtics tenim fama de primmirats i sembla que una majoria de professors estan poc disposats a fer divulgació o a emprar la història a les aules. Potser els fa l'efecte que fer divulgació o parlar d'història sense demostracions i sense arribar al fons de les qüestions és una pèrdua de temps i una frivolitat. Dos divulgadors prestigiosos, en Simon Singh⁷² i l'Ian Stewart⁷³, es fan ressò d'aquest esperit de rigor:

“Els matemàtics són coneguts pel fet de ser primmirats i pel fet d'exigir demostracions absolutament precises abans d'admetre cap afirmació.”

“Un astrònom un físic i un matemàtic (es diu) eren a Escòcia de vacances. Per la finestra del tren van veure una ovella negra que pasturava enmig d'un camp. “Que interessant”, observà l'astrònom, “totes les ovelles escoceses són negres!” A la qual cosa el físic respongué, “No, no! Algunes ovelles escoceses són negres.” El matemàtic mirà al cel amb aire suplicant, i digué: “A Escòcia existeix almenys un camp, que conté almenys una ovella, un dels costats de la qual almenys és negra.”

(71) Extret de: PAULOS, J.A. *El hombre anumérico*. Barcelona: Tusquets Editores, 2000.

(72) Extret de: SINGH, S. *L'enigma de Fermat*. Barcelona: Edicions 62, 1998.

(73) Extret de: STEWART, I. *Conceptos de matemática moderna*. Madrid: Alianza Editorial, 1977.

Tot i tenint presents les consideracions anteriors, el professor Claudi Alsina precisa que no cal negar, però, que la possibilitat de fer divulgació en sentit estricte queda certament restringida per les característiques de bona part de la investigació matemàtica actual, molt allunyada d'allò que es pot entendre i comunicar de manera senzilla. Per superar aquesta dificultat el professor Claudi Alsina proposa fer divulgació a partir d'algunes de les aplicacions que es fan de les novetats matemàtiques o a partir de les notícies que recull la premsa.

D'altra banda, s'ha de tenir en compte també que, en incidir molt poc en la gènesi històrica dels conceptes, es contribueix a donar una visió monolítica i estàtica de les matemàtiques que no s'adiu amb la realitat. És necessari que l'alumnat sigui conscient de l'evolució històrica de la matemàtica, per tal que en tingui una imatge dinàmica que li permeti veure, a més, que no és una matèria tancada.

La història de les matemàtiques ens pot apropar a una aventura magnífica de l'enginy humà. Val la pena recordar les paraules del gran Isaac Newton que recull Jean Paul Collette⁷⁴:

“No sé com puc ser vist pel món, en la meua opinió, però, m'he comportat com un nen que juga a la vora del mar i que es diverteix buscant de tant en tant una pedra més polida i una petxina d'allò més bonica, mentre que el gran oceà de la veritat s'exposava davant meu completament desconegut.”

“Si he vist més lluny que els altres homes és perquè he pujat damunt les espatlles dels gegants.”

Si volem que els nostres alumnes tinguin també el privilegi de pujar damunt les espatlles dels gegants del passat, els professors de matemàtiques haurem de tenir en compte els milers d'anys d'història que hi ha darrera dels continguts que presentem a les aules.

2. ALGUNES PROPOSTES DELS EXPERTS

Uns anys abans del 2000, l'ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) va promoure un estudi referent a l'ús didàctic de la història de les matemàtiques. El document de discussió va ser encarregat a John Fauvel (de la Open University, Regne Unit) i a Jan Van Maanen (de la Universitat de Groningen, Holanda). Les conclusions finals de l'estudi es recullen al *Study Volum*⁷⁵ de títol *History in mathematical education*, publicat l'any 2000.

L'estudi revela la desigual presència de la història de les matemàtiques en els currículums de diversos països (s'estudien els casos de 16 països, l'Estat espanyol, però, no hi figura). Malgrat tot, s'observa una tendència general al reconeixement de les virtuts de fer ús de la història com a instrument didàctic i de motivació a les aules. Es recalca també que aquest procés d'implementació hauria de passar per introduir una formació en història de les matemàtiques per als futurs professors i professores de primària i de secundària.

L'estudi esmenta el conjunt de dificultats i de reticències que pot portar tot plegat. Des d'aquest punt de vista, se citen factors com ara la manca de temps per compaginar les programacions clàssiques amb aquests nous aspectes, la manca de recursos adequats per al treball de la història, la manca de formació del professorat, les dificultats per incorporar la història de les matemàtiques en els processos d'avaluació sumativa i la poca consideració que té la història entre alguns sectors de matemàtics.

(74) Cites extretes del llibre: COLLETE, J.P. *Historia de las matemáticas*. Barcelona: Siglo XXI, 1985. (2 vols)

(75) *History in mathematical education*. Study Volum. International Commission on Mathematical Instruction. 2000

Tanmateix, els avantatges que es poden aconseguir són molt importants. Entre els arguments favorables a la integració i l'ús de la història de les matemàtiques en el procés educatiu, l'estudi esmenta cinc àmbits principals:

a) Avantatges per a l'aprenentatge de les matemàtiques

1. L'ús de la història permet que els alumnes i les alumnes vegin que les matemàtiques deductives que se'ls presenten només s'assoleixen després d'un llarg procés de maduració i de reorganització que, de vegades, amaga les motivacions que van dur als conceptes, als teoremes i a les demostracions que es donen com a resultat final.
2. La història de les matemàtiques com a recurs didàctic proporciona qüestions rellevants i problemes que poden resultar molt motivadors i estimular els interessos de l'alumnat.
3. La història de les matemàtiques pot fer el paper de pont entre les matemàtiques i altres matèries com ara la física, la filosofia, la geografia i la història, etc.
4. Finalment, cal apuntar que l'ús de la història permet fer activitats no gaire habituals a les aules de matemàtiques com ara llegir, documentar-se, buscar fonts alternatives d'informació, discutir, analitzar i parlar de matemàtiques (en comptes de fer-ne).

b) Avantatges a l'hora de captar la naturalesa intrínseca de les matemàtiques

1. A partir de l'ús de la història de les matemàtiques els alumnes poden entendre que els errors, els arguments heurístics, els arguments intuïtius, els dubtes, les controvèrsies i els apropaments des d'òptiques molt diferents als problemes són part essencial de les matemàtiques.
2. La història mostrarà també als alumnes que, a més de l'evolució dels continguts, hi ha evolució de les formes, de les notacions, dels símbols, de la terminologia i dels mètodes d'expressió i de representació.

c) Avantatges en la formació i els recursos didàctics del professorat

1. L'estudi de la història i la reconstrucció d'aspectes de la història de les matemàtiques permet al professorat la identificació de les motivacions que hi havia al darrere de la construcció de nous coneixements, ser conscient de les dificultats que aquest procés creatiu va comportar, adonar-se de com es feien les matemàtiques i reconèixer formes de pensament matemàtic que després es poden transposar a l'aula.
2. La història pot proporcionar al professorat una manera de presentar els conceptes a l'aula. A més, millorarà el seu repertori i els seus recursos didàctics.

d) Avantatges per a la predisposició afectiva cap a les matemàtiques

1. La història permet veure que les matemàtiques no són un producte caigut del cel sinó una construcció humana en constant evolució i en la qual la predisposició a fer-se preguntes i a mantenir una actitud d'investigació no es veu afectada pels errors i els dubtes.

Des d'aquesta òptica, la història contribueix a humanitzar les matemàtiques.

e) Avantatges per a l'apreciació de la dimensió cultural de les matemàtiques

1. A partir de la història, l'alumnat es pot adonar que les matemàtiques no es construeixen solament per motius d'utilitat sinó també per motius estètics, per curiositat intel·lectual i per plaer.
2. La història de les matemàtiques també permetrà veure que els factors culturals i socials n'han condicionat l'evolució i que el producte que s'ofereix a les escoles i als instituts només és l'aproximació feta des de la cultura occidental a partir del recull de creacions molt diverses.

Pel que fa a la forma en què s'ha de dur la història de les matemàtiques a les aules, l'estudi fa un bon grapat de recomanacions que queden ben resumides per les idees següents del mateix John Fauvel⁷⁶ (ja esmentat com a encarregat d'elaborar el document de debat de l'ICMI), un dels especialistes en història i en didàctica de la història de les matemàtiques més prestigiosos (malauradament va morir als 53 anys l'any 2001):

1. Presentar introduccions històriques dels conceptes que són nous per a l'alumnat.
2. Treballar amb pòsters, exposicions o d'altres projectes amb rerefons històric.
3. Estructurar i ordenar els temes dels programes educatius d'acord amb el seu desenvolupament històric.
4. Treballar en la comprensió d'alguns problemes històrics la solució dels quals ha donat lloc a diversos conceptes matemàtics.
5. Mencionar anècdotes històriques.
6. Repassar situacions històriques per tal d'il·lustrar tècniques i mètodes de resolució.
7. Proposar exercicis similars als proposats en textos històrics del passat.
8. Fer projectes al voltant d'activitats històriques del passat.
9. Estudiar errors històrics per ajudar a comprendre i resoldre dificultats relacionades amb l'aprenentatge de les matemàtiques.
10. Estudiar i impartir lliçons sobre història de les matemàtiques.

Altres autors fan propostes més modestes, més limitades tot i que tenen també força interès. Per exemple, Santiago Fernández Fernández⁷⁷, en un interessant article al número monogràfic sobre història de les matemàtiques de la revista *UNO*, ens parla de la vigència i de la oportunitat de motivació que ofereix la història de les matemàtiques:

(76) Resum extret de: FAUVEL, J. *History in the Mathematics Classroom. The IREM Papers*, The Mathematical Association 1990 i de FAUVEL, J. *For the learning of mathematics* 11 Núm. 2 (June 1991; special issue on using history of mathematics in the mathematics classroom)

(77) Extret de: Fernández, S. La historia de las matemáticas en el aula. *Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, núm. 26 monogràfic d'història de les matemàtiques, (2001): pàgines 9-27.

“Actualment ningú no qüestiona que el coneixement de la història de les matemàtiques és clarament un *valor afegit*. Per al professorat constitueix un coneixement altament interessant, ja que l’ajuda a conèixer millor l’evolució dels diversos conceptes i procediments matemàtics. Per a l’alumnat, és una font de coneixement, d’interès i de motivació.”

El mateix autor proposa, més endavant, una llista de personatges rellevants de la història de les matemàtiques que haurien de facilitar la introducció dels temes històrics i servir de referència a professors i alumnes. Concretament, la seva llista és la següent:

Pitàgores, Arquimedes, Euclides, Diofant, Al-Khwarizmi, Newton, Descartes, Fermat, Pascal, Leibniz, Gauss, Euler, Riemann, Weierstrass i Cauchy.

Aquest autor apunta un darrer consell:

“Tanmateix, no cal oblidar que l’estudi i l’ús de la història de les matemàtiques (a nivell no universitari) ha d’estar al servei de l’ensenyament i no ha de ser una finalitat per ell mateix.”

D’altra banda, el professor Alan Bishop⁷⁸, en el mateix monogràfic esmentat abans, apunta la necessitat de tenir una perspectiva cultural de l’ús de la història com a instrument de motivació a les aules. Especialment ara que trobem tants alumnes que procedeixen d’àmbits culturals allunyats de l’enfocament europeu o occidental. Val la pena recollir algunes de les propostes que fa:

“Les matemàtiques són un producte cultural com qualsevol altra forma de coneixement.”

“És important intentar fer un pas cap en fora de la nostra pròpia cultura per observar altres cultures i així poder entendre les matemàtiques com a part de la cultura, i entendre els valors socioculturals associats a la nostra versió occidental de les matemàtiques.”

En aquest repàs bibliogràfic, val la pena esmentar també un monogràfic de la Mathematical Association of America de títol: *Using history to teach mathematics*. La cita següent, del professor Siu Man-Keung⁷⁹, de la universitat de Hong Kong, ens parla d’humanitzar les matemàtiques:

“Fer servir la història de les matemàtiques a les classes no farà necessàriament que els estudiants obtinguin millors resultats en la matèria d’un dia per l’altre, però pot convertir l’aprenentatge de les matemàtiques en una experiència plena de sentit i de vitalitat, de tal manera que el procés serà més senzill i més profund. Tenir en compte els aspectes evolutius de les matemàtiques pot fer que el professorat sigui més pacient, menys dogmàtic, més humà i menys pedant.”

Finalment farem esment de les propostes del doctor Claudi Alsina⁸⁰ en aquest àmbit. El professor Alsina proposa fer ús dels instruments i recursos següents:

1. Muntar tallers de problemes històrics o emprar alguns d’aquests problemes com a recursos a l’aula.

(78) Extret de: BISHOP, A. Lo que una perspectiva cultural nos cuenta sobre la historia de las matemáticas. *Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, núm. 26 monogràfic d’història de les matemàtiques, (2001): pàgines 61-72.

(79) Mathematical Association of America: *Using history to teach mathematics*. Editor: Victor J. Katz. Washington, 2000.

(80) Extret dels materials preparats per el professor Alsina per al seminari “Aprovechando la historia de la matemática para educar hoy” impartit a la República Argentina el novembre de 2001.

2. Fer incursions puntuals d'elements d'història de les matemàtiques que permetin justificar i motivar alguns temes determinats.
3. Promoure conferències, debats, representacions teatrals, etc., sobre història de les matemàtiques.
4. Muntar exposicions o fer un laboratori relacionat amb la història de les matemàtiques.
5. Aprofitar l'entorn històric amb sortides i visites que possibilitin parlar d'història i de matemàtiques conjuntament.
6. Aprofitar el món de l'art a classe per trobar les relacions entre les representacions artístiques i el món de les matemàtiques.
7. Aprofitar els mitjans audiovisuals que ens parlin d'història i de matemàtiques.
8. Aprofitar internet i els nombrosos webs d'història que hi ha.
9. Promoure treballs de recerca en l'àmbit de la història de les matemàtiques.

Tot aquest ampli ventall de recursos contribuirà amb tota seguretat a apropar la història de les matemàtiques a les aules i a millorar la motivació de l'alumnat.

3. L'EXPERIÈNCIA DOCENT PERSONAL

3.1. LECTURES A L'AULA

De la meua banda, des de la perspectiva de l'experiència personal a l'aula, he pogut comprovar com l'ús de lectures preparades pel professorat dona una oportunitat per al treball de la història de les matemàtiques que només demana un nombre força limitat d'hores de classe (una de les grans preocupacions del professorat).

En principi, es tracta de fer les lectures a l'aula col·lectivament. Els alumnes llegeixen per torn i el professor o la professora fa aclariments i comentaris. El moment idoni per fer les lectures el marca el desenvolupament del temari. El professor, si és possible, haurà d'oferir exercicis i exemples que aclareixin o ampliïn alguns dels aspectes tractats. Cal valorar també la possibilitat que algunes qüestions d'aquestes lectures s'incorporin com a material avaluable.

A continuació es presenten dos exemples de lectures que permeten il·lustrar les idees anteriors. El primer exemple està pensat per a alumnat de 4t d'ESO i el segon per a alumnat de 1r de batxillerat.

EXEMPLE 1

LECTURA: NOTES SOBRE LA HISTÒRIA DE LES EQUACIONS

Molts científics, pensadors i matemàtics han col·laborat al llarg de la història a construir les teories sobre resolució d'equacions. Aquí s'ha optat, però, per citar només algunes figures especialment destacades d'èpoques o períodes fonamentals.

La primera gran figura que cal destacar és la de **Diofant**, que va viure i treballar a Alexandria, en el segle II o III (hi ha dubtes sobre quan va viure exactament). D'ell se'n conserven sis llibres de l'anomenada **Aritmètica** i fragments del llibre sobre els nombres poligonals.

En la *Aritmètica*, Diofant estudia les operacions amb nombres racionals i resol equacions lineals. També estudia equacions amb coeficients racionals i solucions racionals i problemes que condueixen a equacions de segon grau de les quals, en general, només en calcula una solució.

Diofant va elaborar un sistema de símbols per a tot això. Així, introdueix símbols per a les incògnites, les potències, la subtracció, els termes independents, etc. El sistema de numeració és alfabètic (encara no s'havia adoptat el sistema de numeració decimal que és d'origen hindú i no arriba a Europa fins el segle XII a través dels àrabs). Per a Diofant, per exemple:

$$\xi\xi\alpha\rho\alpha\mu^0\lambda\iota\sigma\omicron\epsilon\iota\sigma\tau\nu\xi\xi^{\circ\iota\sigma}\iota\alpha\mu\omicron^{\nu}\alpha\sigma\tau\eta\epsilon$$

significa

$$10x + 30 = 11x + 5$$

Ho tenia, certament més difícil que nosaltres; tot i amb això, va fer grans avenços i van passar molts segles abans que la seva matemàtica, i la dels grecs en general, no fos superada.

Un tipus d'equacions de primer grau porten encara avui el seu nom. Són les equacions de la forma $ax + by = c$ amb a , b i c enters i de les quals interessen solucions enteres.

A partir del segle VII l'expansió de l'islam va portar a l'aparició d'una gran zona d'intercanvi cultural, des de l'Índia, a l'est, fins a la península ibèrica a l'oest.

Els àrabs van recollir els coneixements dels grecs i de Diofant en particular (Alexandria formava part del seu domini). Van afegir-hi aportacions que venien de l'Índia i de Xina i, amb molta habilitat, van donar un gran impuls a l'àlgebra.

Una figura de gran importància en el desenvolupament de les matemàtiques en aquesta època fou la de **Mohamed ibn Musa al Khuwarizmi**, que en el segle IX va escriure dues obres que tindrien una enorme transcendència històrica: **Llibre sobre els nombres hindús** i **Llibre de les operacions de restabliment i reducció**.

Ambdues obres arriben a Europa a través de la península ibèrica el segle XII i van tenir molt d'èxit al llarg dels anys. La primera va portar com a conseqüència l'adopció del sistema de numeració que utilitzem avui pràcticament a tot el món (les xifres del qual, recordem-ho, anomenem àrabis).

La segona va donar un extraordinari impuls a l'àlgebra. De fet, aquest terme està extret del títol en àrab d'aquest segon llibre: *Hisab al-jabr wa-al-muqaba*.

També ha romàs el nom de l'autor, Al-khuwarizmi, en la forma llatinitzada d'algorisme (que significa sistema de càlcul).

A Europa les matemàtiques adquireixen un nou impuls a partir del Renaixement. Les obres dels clàssics i dels àrabs es difonen més fàcilment amb l'aparició de la impremta (que inventa l'alemany Johannes Gutenberg el segle XV) i sorgeixen molts estudiosos de les matemàtiques.

Concretament, a la Itàlia renaixentista va sorgir una enorme preocupació per a la resolució d'equacions. Ja es coneixien des de l'antiguitat els mètodes per resoldre equacions de primer i de segon grau. Les equacions de tercer grau, però, havien resistit tots els esforços intel·lectuals de la humanitat fins que **Scipio del Ferro (1465-1526)** va trobar la forma de resoldre-les.

D'acord amb els costums de l'època no va publicar els resultats. Tan sols abans de morir va decidir transmetre el seu secret a un dels seus deixebles. Aquest, orgullós del coneixement de tan important misteri, va reptar un dels grans matemàtics de la seva època, **Niccolo Tartaglia (1500-1557)** a resoldre un grapat d'equacions de tercer grau. Tartaglia va acceptar el repte i vuit dies abans que expirés el termini va trobar el mètode de resolució de les equacions cúbiques i en dues hores va resoldre tots els problemes plantejats pel seu oponent que va quedar bocabadat (això fou exactament el 12 de febrer de 1535).

Assabentat d'aquesta història, un professor de física i matemàtiques de Milà anomenat **Girolamo Cardano (1501-1576)** va començar a suplicar Tartaglia que l'informés del seu descobriment. Aquest va accedir-hi, finalment, amb la condició que Cardano mantingués el seu mètode en secret. Cardano però, el va traïr i va publicar el resultat de Tartaglia en el seu treball *Ars magna* (cal dir en el favor de Cardano que va completar i millorar les propostes de Tartaglia). La fórmula de resolució d'equacions de tercer grau rep el nom, des de llavors, de "fórmula de Cardano".

Poc després va aparèixer una figura important per a la història de les equacions: el francès **François Viète (1540-1603)**.

Viète va estudiar ciències jurídiques. Sempre va mantenir, però, una gran afició a l'astronomia i a les matemàtiques. Va arribar a ser conseller dels reis de França, Enric III i Enric IV. Un dels seus grans mèrits va ser el de crear un nou llenguatge algebraic tot i emprant de manera sistemàtica les lletres per designar nombres. Així, per primera vegada, fou possible l'estudi de les equacions i de les seves propietats mitjançant fórmules generals.

No obstant, la simbologia de Viète era encara prou allunyada de l'actual i lligada a la geometria. Així, per exemple, per posar:

$$x^3 + 3bx = d$$

Viète escrivia:

$$x \text{ cubus} + b \text{ planum in } x_3 \text{ aequatur } d \text{ solido}$$

En tot cas, el pas que va fer Viète va ser molt important i es va difondre àmpliament per tot Europa.

Un dels primers a utilitzar la nova àlgebra creada per Viète fou el també francès **Pierre de Fermat (1601-1665)**.

Fermat procedia d'una família de comerciants que vivia al sud de França. Va estudiar a la Universitat de Tolosa, a la facultat de ciències jurídiques i es va dedicar professionalment al dret. S'ocupava de les matemàtiques en el seu temps lliure. Va fer aportacions importants a la teoria de nombres, a la geometria, al càlcul infinitesimal i a l'òptica. Era un home molt reservat i no li agradava comunicar els seus descobriments que no es van publicar fins després de la seva mort.

Va conèixer i estudiar les obres dels contemporanis i dels clàssics. Les obres de Diofant d'Alexandria, per exemple, es van fer famoses a Europa amb la seva publicació en grec i en llatí el 1621 (editades pel francès Bachet de Méziriac). Així, Fermat les va poder estudiar amb profusió. Curiosament, en el marge d'una d'aquestes edicions va plantejar el famós teorema que porta el seu nom i que, fins fa molt poc, no s'havia pogut demostrar:

"l'equació $x^n + y^n = z^n$ amb n enter més gran que 2 no té solucions enteres"

Fermat afirmava, en el mateix marge, que tenia en un altre lloc la demostració del teorema (deia que allí no hi cabia). Aquesta demostració, però, mai no s'ha trobat i roman com un dels grans misteris de la matemàtica.

Més de tres-cents cinquanta anys després, el 1995, el britànic **Andrew Wiles** demostrava per fi el famós teorema com a conseqüència de complicades elaboracions matemàtiques.

Ara només cal que potser algú d'entre vosaltres segueixi aquest llarg camí.

Exercicis:

1. Cerqueu informació sobre els matemàtics que apareixen a la lectura.
2. Cerqueu informació sobre el símbol de la igualtat. Quan es va fer servir per primera vegada? Quin és el seu origen?
3. Cerqueu informació referent a les equacions diofàntiques.

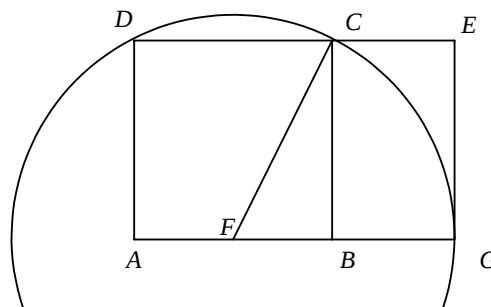
EXEMPLE 2

LECTURA: LA HISTÒRIA DE TRES PROBLEMES SENSE SOLUCIÓ

Per als geòmetres grecs fer geometria volia dir fer construccions amb regle i compàs. Amb aquests instruments van resoldre molts problemes com ara els següents:

- la bisecció del segment i de l'angle;
- la trisecció del segment;
- la duplicació del quadrat;
- la quadratura del rectangle;
- la construcció del rectangle d'or.

Aquí teniu, per exemple, la construcció de l'anomenat rectangle d'or, que segons els grecs de l'antiguitat és el rectangle més harmoniós que existeix: partim del quadrat $ABCD$, a continuació prenem el punt mitjà F del segment AB i tracem la circumferència de centre F i radi FC ; aquesta circumferència talla la recta que passa pel costat AB del quadrat en el punt G i ja tenim el rectangle d'or $AGED$.



En aquest rectangle es compleixen les relacions:

$$AB = AG \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

i, equivalentment:

$$AG = AB \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

De manera natural es van plantejar els problemes següents, que van tenir ocupats els matemàtics durant més de 2000 anys sense que se'n trobés la solució:

1. **La trisecció de l'angle**, és a dir, la divisió d'un angle donat en tres parts iguals.
2. **La duplicació del cub**, és a dir, obtenir un cub de volum doble del d'un cub donat.

La llegenda explica la història següent: a partir de l'any 427 aC una terrible pesta va assolar Grècia fins a causar la mort de la quarta part de la població d'Atenes -entre les víctimes hi havia, segons sembla, Pèricles. Per tal de conjurar la malaltia, els atenesos varen recórrer a l'oracle d'Apol·lo a Delfos. L'oracle els va demanar que dupliquessin l'altar cúbic que hi havia en aquells moments. Els atenesos van duplicar les dimensions de l'altar i, per sorpresa de tots ells, en va resultar un cub vuit vegades més gran que l'inicial. Així va néixer aquest problema clàssic.

3. La quadratura del cercle, és a dir, la construcció d'un quadrat d'àrea igual a la d'un cercle donat.

Els grans matemàtics i geòmetres grecs no van saber veure que tots aquests problemes no tenien solució. De fet, això no va ser possible fins més de dos mil anys més tard. Durant molt de temps, doncs, aquests tres reptes van desafiar les ments més privilegiades. A principi del segle XIX, un jove francès de poc més de vint anys, **Evarist Galois (1811-1832)**, va trobar-ne per fi la solució: aquestes construccions no es poden fer amb regla i compàs per més que ens hi escarrassem. No va ser gens fàcil provar això; cal dir que la genial feina del jove Galois no hauria estat possible sense les aportacions de molts predecessors i coetanis, especialment D'Alembert, Gauss, Lagrange, Ruffini i Abel.

Just abans del duel fatal en què va trobar la mort, Galois va formular i escriure en el decurs d'una nit els seus descobriments més importants i els va trametre, com a testament, al seu amic O. Chevalier perquè els publicqués en cas d'un final tràgic.

La carta va ser publicada tot just després de la mort d'Evarist Galois; les idees que s'hi recollien, però, no van tenir les repercussions i el reconeixement que es mereixien fins que el 1846 **Joseph Liouville (1809-1882)** va desxifrar i publicar tots els treballs de Galois.

La teoria de Galois, aparentment, era ben lluny dels problemes geomètrics que havien plantejat els grecs i es referia a la resolució d'equacions. Els nombres queden classificats en algebraics i transcendents segons siguin o no solució d'equacions a coeficients enters. Només alguns nombres algebraics són construïbles amb regla i compàs: els que són solucions d'equacions amb coeficients racionals de grau 1 o 2^k , amb k natural. Entre aquests no s'hi compten les solucions dels tres problemes clàssics exposats anteriorment.

Vegem-ho amb una mica més de detall:

1. La quadratura del cercle equival a resoldre l'equació:

$$\pi R^2 = x^2 \Leftrightarrow x = R\sqrt{\pi}.$$

El nombre π hauria de ser, doncs, construïble amb regla i compàs per tal que la quadratura fos realitzable, i això és impossible ja que no és ni tan sols algebraic. La transcendència de π no va ser demostrada fins el 1882 per **Ferdinand Lindemann (1852-1939)**.

2. La duplicació del cub, algebraicament, equival a resoldre l'equació $x^3 = 2a^3$, que és equivalent a resoldre $x = a\sqrt[3]{2}$. El nombre $\sqrt[3]{2}$ és algebraic perquè és solució de l'equació $x^3 - 2 = 0$, però no és solució de cap equació de grau 1 o 2^k amb coeficients racionals i no es pot dibuixar amb regla i compàs.

3. La trisecció de l'angle, per exemple de 60° , equival a resoldre l'equació $8x^3 - 6x - 1 = 0$ que no és reductible a equacions de segon grau o de primer grau resolubles.

Efectivament, trisecar l'angle de 60° equival a representar el punt del pla $(\cos 20^\circ, \sin 20^\circ)$ sobre la circumferència unitat. Si posem $y = 20^\circ$, es complirà $\cos 3y = 1/2$ i desenvolupant aquesta expressió:

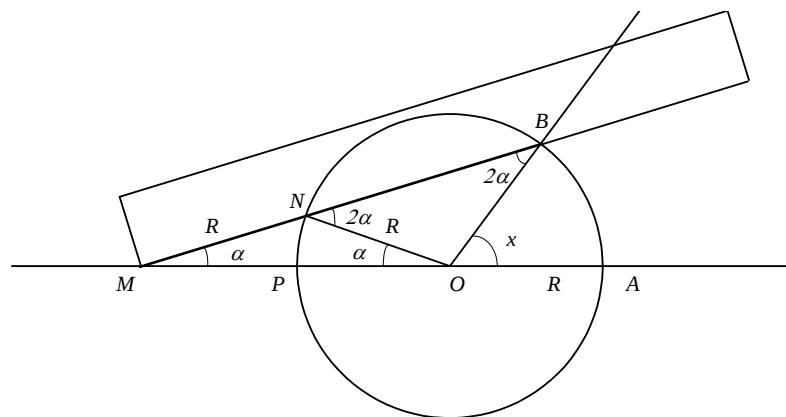
$$\begin{aligned}\cos 3y &= \cos(2y+y) = \cos 2y \cos y - \sin 2y \sin y = (\cos^2 y - \sin^2 y) \cos y - 2 \sin y \cos y \sin y = \\ &= \cos^3 y - \sin^2 y \cos y - 2 \sin^2 y \cos y = \cos^3 y - 3 \sin^2 y \cos y = \cos^3 y - 3(1 - \cos^2 y) \cos y = \\ &= 4 \cos^3 y - 3 \cos y = 0.5\end{aligned}$$

Si fem $\cos y = x$ i multipliquem per dos, obtenim l'equació $8x^3 - 6x - 1 = 0$.

De fet, tot i el mèrit global de Galois, s'ha de dir que la impossibilitat de la trisecció va ser provada específicament el 1837 pel jove francès de 23 anys **Pierre Laurent Wantzel (1814-1848)** en un memorable article de set pàgines aparegut en el *Journal des mathématiques pures et appliquées* que portava el títol *Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas*. Wantzel demostrà que les irracionalitats cúbiques no eren del cos dels racionals ni dels cossos extensió obtinguts per adjunció d'irracionals quadràtics -els únics nombres construïbles amb regla i compàs- i va obtenir, com a corol·lari, la impossibilitat de la trisecció.

Tanmateix, gairebé 2000 anys abans, el genial **Arquimedes de Siracusa** tenia un mètode per trisecar angles “amb regla i compàs” que “funcionava” (i encara “funciona”) a la perfecció:

Si es vol trisecar l'angle AOB , es traça la circumferència de radi R i centre O i es marca, amb el compàs, aquest radi sobre el regle. A continuació, es recolza el regle sobre el punt B i desplaçant-lo fins a aconseguir els punts M (sobre la recta que passa per OA) i N (sobre la circumferència), de tal manera que $MN=R$. Aleshores, l'angle ONP que s'ha obtingut és exactament un terç de l'angle donat.



Efectivament, en el dibuix anterior el triangle OMN és isòsceles per construcció i, així, l'angle en O també és α i l'angle en N és $180^\circ - 2\alpha$. Aleshores, en el triangle ONB , que també és isòsceles, es té: angle en $N = 2\alpha =$ angle en B i angle en $O = 180^\circ - 4\alpha$. Finalment, s'obté l'angle x en funció del construït α :

$$x = 180^\circ - (\alpha + 180^\circ - 4\alpha) = 3\alpha$$

Així és com el geni de Siracusa trisecava angles. El cert és que Arquimedes era perfectament conscient de “l'abús” que feia del regle.

Exercicis:

1. Cerqueu informació sobre els matemàtics que apareixen a la lectura.
2. Estudieu i resoleu els quatre problemes que els geòmetres grecs sí que van resoldre: a) la bisecció del segment i de l'angle; b) la trisecció del segment; c) la duplicació del quadrat; d) la quadratura del rectangle.
3. Estudieu la figura que es proporciona a l'inici de la lectura i demostreu les relacions $AB = AG \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ i $AG = AB \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ tot i fent ús del teorema de Pitàgores.
4. Cerqueu informació sobre els nombres $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ i $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

3.2. PROBLEMES AMB HISTÒRIA A L'AULA

Una altra excel·lent oportunitat de treball matemàtic relacionat amb la història que he pogut experimentar personalment consisteix a plantejar exercicis i problemes extrets de textos històrics o adaptats a partir de textos històrics. A la vegada que resollem problemes o exercicis treballarem en un context històric i això ens oferirà l'oportunitat de parlar de l'àmbit en què es va formular l'exercici o el problema. A continuació es presenten alguns exemples amb aquestes característiques.

1) Un problema sumeri.

Un bastó de 30 unitats de llarg s'apuntala contra la paret d'una casa. Llisca cap avall 6 unitats per la part de dalt. Quantes unitats s'ha separat de la base de la paret el peu del bastó?

Aquest problema apareix en una tauleta sumèria del 2000 aC que inclou també la resolució. Els sumeris coneixien, doncs, el teorema de Pitàgores.

2) Un problema xinès.

Un arbre de 20 tx'ih d'alçada (cal entendre alçada del tronc) té una circumferència de 3 tx'ih. Una parra enfiladissa s'enrosca 7 vegades al tronc i arriba fins a l'enforcadura. Quina és la longitud de la parra?

Aquest problema apareix en el tractat xinès anomenat *Txiu txang suan-xu* que té uns dos mil anys tot i que recull problemes tradicionals l'origen dels quals es remunta al 2000 aC. La resolució que en donen demostra el coneixement que tenien del teorema de Pitàgores.

3) Un problema plantejat per Diofant

"Una persona compra garrafes de vi de dues menes, unes de quinze dracmes i les altres de quatre dracmes; en total paga un nombre quadrat que augmentat en seixanta unitats et donarà un altre quadrat l'arrel del qual és el nombre total de garrafes. Esbrina quantes garrafes de quinze i de quatre dracmes ha comprat."

Cal dir que l'enunciat que es presenta és una versió modificada -per tal que fos més entenedora- del problema original.

Aquest és l'únic problema de Diofant que conté nombres concrets. És el problema 30 del llibre V de la seva Aritmètica.

4) L'epitafi de Metrodor

L'Antologia Grega, compilada per Metrodor, conté el següent epitafi referit a Diofant d'Alexandria:

"Transeünt, aquesta és la tomba que guarda les cendres de Diofant. Ell mateix, amb aquesta sorprenent explicació et dirà els anys que va viure: vaig ser un nen la sisena part de la meua vida; després d'una dotzena part les meves galtes es varen cobrir de barba; encara va transcórrer un setè més de la meua vida abans de casar-me i cinc anys més tard vaig tenir un fill; aquest estimat fill, desgraciadament va morir, quan va assolir la meitat de l'edat que jo he arribat a viure; el vaig plorar al llarg de quatre anys dedicats a l'estudi de la ciència dels nombres, abans de morir i descansar en pau."

Quants anys va viure, doncs, Diofant?

On i quan va viure Diofant? Què en sabem d'ell?

5) Un problema de Robert Recorde

Venc un cavall amb quatre ferradures, i cada ferradura porta 6 claus, a condició que em paguin un "ob" pel primer clau, dos pel segon, quatre pel tercer, i així successivament tot i doblant el preu cada cop. Ara demano, quin és el preu del cavall?

El gal·lès Robert Recorde (1510- 1558) fou metge d'Eduard VI i matemàtic eminent del seu temps. Publicà un llibre en forma de diàlegs -el Grounde of Artes- entre un mestre i un alumne que contenia nombrosos problemes aritmètics.

6) Un problema de Bachet de Méziriac

Quin és el nombre menor de pesos de què cal disposar per pesar amb unes balances qualsevol nombre de quilograms entre 1 i 40?

El francès Claude Gaspar Bachet de Méziriac (1587-1638) fou el traductor i editor de l'Aritmètica de Diofant que després arribaria a mans de Fermat, i en els marges de la qual deixà plantejat el seu famós teorema.

7) Dos problemes de Newton

7.1) Un comerciant té una quantitat determinada de diners. El primer any es va desprendre de 100 lliures i augmentà el capital restant en un terç d'aquest restant. El segon any tornà a desprendre's de 100 lliures i augmentà la suma restant en un terç d'ella mateixa. El tercer any es va desprendre un altre cop de 100 lliures i, després d'afegir un terç del restant, el capital era el doble de la suma inicial. Quin era el capital inicial?

7.2) 75 bous consumeixen en 12 dies l'herba d'un prat de 60 àrees. 81 bous consumeixen en 15 dies l'herba d'un prat de 72 àrees. Quants bous consumeixen en 18 dies l'herba d'un prat de 96 àrees? (Hom suposa que els 3 prats tenen la mateixa altura d'herba en entrar-hi els bous, i que aquesta continua creixent uniformement mentre mengen).

Newton en el seu llibre *Aritmetica Universalis* va dir que "per resoldre un problema referent a nombres o relacions abstractes de quantitats, n'hi ha prou de traduir aquest problema, de l'anglès o una altra llengua al llenguatge de l'àlgebra".

Després de resoldre els problemes doneu una breu referència bibliogràfica sobre Newton i expliqueu quines aportacions va fer a les matemàtiques.

8) Les aproximacions del nombre π al llarg de la història

Aquí teniu una llista de disset aproximacions del nombre π donades al llarg de la història. El nombre π val, aproximadament:

- 1) $\frac{25}{8}$ (Babilònia: 2000 aC);
- 2) $\left(\frac{4}{3}\right)^3$ (Egipte; Papyrus Rhind: 2000 aC);
- 3) 3 (Xina 1200 aC i La Bíblia, Llibre dels Reis I, VII: 500 aC);
- 4) $3 + \frac{10}{71} \leq \pi \leq 3 + \frac{1}{7}$ (Arquimedes: 300 aC);
- 5) $\frac{377}{120}$ (Ptolemeu: 200 dC);
- 6) $\frac{142}{45}$ (Wang Fau: 300 dC);
- 7) $\sqrt{10}$ (Chung Hing: 300 dC);
- 8) 3,1416 (Arigabhata: 500 dC);

- 9) $\frac{355}{113}$ (Metius: 1400 dC);
- 10) $\sqrt{13 + \frac{1}{3}} - 2\sqrt{3}$ (Nicolàs de Cusa: 1400 dC);
- 11) $\frac{13\sqrt{146}}{150}$ (Speeht: 1836 dC);
- 12) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$;
- 13) $\frac{3}{4}(\sqrt{3} + \sqrt{6})$
- 14) $\frac{9 + 3\sqrt{5}}{5}$;
- 15) $2\sqrt{2\sqrt{5} - 2}$;
- 16) $\frac{5}{4} + \frac{\sqrt{229}}{8}$
- 17) $\frac{167}{80} + \frac{\sqrt{10}}{3}$

Es demana que:

- Indiqueu el més petit dels conjunts numèrics ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$) als quals pertanyen aquestes aproximacions.
- Per a les 11 primeres aproximacions busqueu informació sobre les fonts.
- Per a cada aproximació, trobeu una equació polinòmica a coeficients enters de la qual sigui solució (es tracta sempre de nombres algebraics).
- Feu ús de la calculadora per ordenar de més petita a més gran totes les aproximacions proposades.
- Sabent el valor de π que dona la vostra calculadora, ordeneu les aproximacions de més bona a més dolenta.
- Comproveu que l'aproximació número 15 és igual a $\frac{4}{\sqrt{\Phi}}$ i que la número 14 és igual a $\frac{6\Phi^2}{5}$, essent $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ el nombre d'or.

4. ALGUNES ORIENTACIONS FINALS

Com s'ha vist a l'apartat anterior, hi ha moltes i diverses possibilitats d'ús didàctic de la història de les matemàtiques i molts experts apunten que aquest ús contribuirà a millorar la motivació de l'alumnat a l'hora de fer matemàtiques. La cita següent, del doctor Claudi Alsina⁸¹, apunta clarament quin ha de ser l'ús de la història a les classes de matemàtiques:

“[...] No es tracta de desenvolupar cursos d'Història de les Matemàtiques a les classes sinó d'usar elements d'aquesta història per facilitar l'aprenentatge, motivar temes, aclarir conceptes, contribuir a una presentació cultural i social de les matemàtiques i promoure l'interès per la disciplina i l'amenitat en el seu estudi.”

D'altra banda, fer divulgació en l'àmbit de les matemàtiques actuals o del passat és sens dubte una feina complicada. Això no teu, però, que quan sigui possible, des del punt de vista de la temàtica tractada o, per exemple, quan hi hagi una notícia d'actualitat a la premsa o als mitjans de comunicació referent a les matemàtiques, és interessant que el professorat hi dediqui una estona que sens dubte redundarà en benefici de la motivació de l'alumnat.

La dificultat d'administrar un nombre escàs d'hores de classe en la nostra matèria, cosa que tots els professors i professores de matemàtiques tenim ben present, no sembla motiu suficient per sacrificar tots aquests aspectes que apropen les matemàtiques a les persones, que les fan humanes i que les presenten com una construcció extraordinària de la humanitat que es troba en evolució permanent. El cost que té renunciar a l'ús de la història i a la divulgació com a recursos didàctics és massa elevat, i en tot cas, caldria pensar a sacrificar altres aspectes de l'activitat a les aules.

(81) Extret dels materials preparats per el professor Alsina per al seminari “Aprovechando la historia de la matemática para educar hoy”, impartit a la República Argentina el novembre de 2001.

CAPÍTOL 9: MOTIVACIÓ, MATEMÀTIQUES APLICABLES A LA VIDA QUOTIDIANA I COMPETÈNCIES BÀSIQUES EN MATEMÀTIQUES

En aquest capítol es tracta d'estudiar fins a quin punt és possible fer visibles les matemàtiques que s'apliquen a la realitat i a la vida quotidiana i les conseqüències en la motivació que això pot tenir per a l'alumnat a l'hora de treballar a l'aula. Des d'aquesta perspectiva, es revisaran els contextos en què ara mateix és clar que es necessiten coneixements, habilitats i competències matemàtiques.

1. ALGUNES CONSIDERACIONS INICIALS

Un dels problemes que es planteja el professorat de matemàtiques és el de la concreció de contextos i d'activitats que serveixin per al treball concret a l'aula i que motivin l'alumnat. Els llibres de text, massa sovint, s'allunyen d'aquesta possibilitat i se centren en els continguts escolars tradicionals. Per tant, és interessant precisar contextos en què s'hauran de posar en pràctica les competències bàsiques en matemàtiques.

Ens podem fer les preguntes següents:

1. Quines són les matemàtiques necessàries per a la vida quotidiana?
2. Es poden estandarditzar alguns continguts matemàtics, alguns procediments i algunes competències matemàtiques com a bàsiques o essencials per a la vida quotidiana?
3. Aquestes matemàtiques seran les mateixes d'aquí a 10 o 15 anys?
4. O es tracta potser de tenir habilitats i competències més aviat relacionades amb la capacitat d'adaptació i d'aprenentatge, de saber fer i de saber pensar i raonar?

Les respostes no són tan senzilles com es pot pensar i en aquest capítol intentarem trobar-les. Alguns autors i alguns estudis veuen clar que les matemàtiques són, abans de tot, una forma de pensar i que adquireixen sentit quan s'apliquen a la realitat. L'Informe Cockcroft⁸² ja ho manifestava fa vint-i-cinc anys:

“Las matemàtiques són útils únicament quan es poden aplicar a una situació concreta i anomenem resolució de problemes a l'habilitat per aplicar les matemàtiques a una varietat de situacions.”

La necessitat de fer explícites les matemàtiques de la vida quotidiana i la incorporació que se n'ha de fer a les aules és una vella demanda que ara mateix cal renovar. Aquestes dues cites, del Grup Zero de Barcelona⁸³ i de Brian Bolt⁸⁴ apunten en aquesta direcció:

“La idea bàsica que ha motivat aquest projecte consisteix en la necessitat de disposar d'un material que faciliti un ensenyament basat en la resolució de problemes d'interès objectiu, tot i cercant la motivació de l'alumne en l'aplicació dels mètodes matemàtics a situacions reals.”

(82) Informe Cockcroft. *Las matemáticas sí cuentan*. Madrid, MEC, 1985.

(83) Extret de: GRUP ZERO BARCELONA. *La medida y el número*. Barcelona: I. C. E. U. A. B., 1978

(84) Extret de: BOLT, B.; HOBBS, D. *101 proyectos matemáticos*. Barcelona: Labor, 1991.

“En els darrers anys s’ha anat perceben cada cop més clarament la necessitat que l’aprenentatge matemàtic dels escolars els permeti reconèixer la importància del paper que juguen les matemàtiques en el món en què viuen, a més de capacitar-los per comprendre’l i afrontar-lo millor. No poques vegades aquesta disciplina ha consistit en una sèrie de rutines que cal executar cegament per respondre a preguntes estereotipades. La conseqüència d’aquesta classe d’ensenyament i aprenentatge és que els alumnes són incapaços d’aplicar els seus coneixements més enllà dels càlculs que els proposen els llibres de text.”

Durant molt de temps, les matemàtiques escolars tradicionals han constituït un món força tancat i l’aplicació que se’n pot fer a la realitat no resulta visible gaire sovint. Ens en parla Fernando Corbalán⁸⁴:

“[...] La majoria dels aspectes matemàtics que es tracten (l’autor es refereix a l’educació matemàtica a l’àmbit escolar) circumscriuen la seva importància i la seva aplicació a l’univers escolar, i és l’únic aspecte que s’entrena, no ens acostumem a observar la realitat amb ulls matemàtics i acabem per no veure cap d’aquests aspectes, i a suposar, per tant, que no existeixen.”

“[...] A la majoria de persones se’ls fa molt difícil aportar exemples que facin veure la plasmació de les matemàtiques en casos reals no escolars.”

“És cert que hi ha matemàtiques a molts aspectes de la vida, a condició això sí, que se les vulgui veure, que es disposi de les antenes adequades per tal de captar-les [...]”

Per desvetllar quines matemàtiques s’apliquen a la realitat cal superar, tot sovint, una barrera de desconeixement que les fa invisibles. És freqüent confondre les matemàtiques amb l’aritmètica i l’economia⁸⁵:

“Les matemàtiques són presents a molts dels aspectes de la vida quotidiana. El simple fet de llegir un rellotge i estimar el temps que resta per poder anar a una cita és un exemple d’activitat matemàtica que, a més, es realitza de manera gairebé inconscient. Tanmateix, no tots els problemes que es poden presentar en el dia a dia es resolen només fent ús de l’aritmètica més senzilla.”

Apropar les matemàtiques escolars a la realitat no és senzill. D’una banda, perquè es tracta d’una disciplina que tendeix a l’abstracció i d’altra banda, perquè la realitat presenta una gran complexitat i no resulta fàcil simplificar-la i dur-la a l’aula de manera consistent. A més, el currículum a l’ensenyament obligatori no ha estat dissenyat a partir de les matemàtiques que es troben a la vida quotidiana i la feina d’apropar aquest currículum a la realitat depèn, en gran mesura, del professorat.

Seria ingenu pensar que apropar les matemàtiques escolars a la vida quotidiana provocaria immediatament la motivació de l’alumnat. Això només és cert parcialment. Per a una majoria d’alumnes, les activitats matemàtiques descontextualitzades i repetitives, a la llarga, condueixen a la desmotivació i a la construcció d’una imatge de la disciplina errònia. La matemàtica escolar els apareix com una construcció inútil i misteriosa que només serveix per seguir estudiant. A més, quan aquests nois i noies deixin l’escola, projectaran aquesta imatge sobre noves generacions d’alumnes i difícilment acabaran per veure que les matemàtiques els poden ser d’utilitat per a la vida quotidiana. La contextualització de les activitats a l’aula i la insistència en les aplicacions tindran, sobretot, efectes de motivació a llarg termini. Tot això no treu que activitats matemàtiques ben triades en àmbits abstractes, també poden motivar. Es tracta de trobar l’equilibri entre l’aplicabilitat i l’abstracció que forma part de la mateixa essència de les matemàtiques.

(85) Extret de : CORBALÁN, F. *La matemática aplicada a la vida cotidiana*. Barcelona: Graó, 1995.

(86) Extret de: ÁLVAREZ, J.A. i GARCÍA, G. *Matemáticas, guía práctica para la vida cotidiana*. Madrid: Alianza Editorial, 2002.

2. MATEMÀTIQUES APLICABLES A LA VIDA QUOTIDIANA?

2.1. MATEMÀTIQUES APLICADES A LA VIDA QUOTIDIANA: UN RECORREGUT BIBLIOGRÀFIC

En aquest apartat es presenta un recull bibliogràfic, que no té pas la pretensió de ser exhaustiu, d'alguns dels textos que estan dedicats a estudiar les matemàtiques que es poden aplicar a la vida quotidiana.

Algunes conclusions de la comissió Cockcroft⁸⁷

La comissió presidida pel Doctor W. H. Cockcroft va publicar el seu famós informe, *Las matemáticas sí cuentan*, l'any 1982. El govern britànic, a instàncies del Parlament, va crear aquesta comissió amb l'encàrrec de fer un estudi de l'ensenyament i l'aprenentatge de les matemàtiques i de la presència de les matemàtiques a la vida laboral. Els treballs de la comissió van durar tres anys (del 1978 a 1981) i, tot i el que pugui semblar, encara tenen una gran vigència després de vint-i-cinc anys.

L'informe està estructurat en apartats numerats de l'1 al 810 i en les cites que es recullen a continuació s'ha mantingut la numeració original. Aquest primer conjunt de cites es refereix a la importància i a la necessitat de l'ensenyament i de l'aprenentatge de les matemàtiques:

1. Seria molt difícil, potser fins i tot impossible, viure de manera corrent a molts llocs del món en aquest segle sense fer ús, d'alguna manera, de les matemàtiques.
3. Creiem que totes aquestes diferents concepcions de la utilitat de les matemàtiques procedeixen del fet que proporcionen un mitjà de comunicació que és poderós, concís i sense ambigüitats [...].
La raó principal perquè s'ensenyin matemàtiques a tots els joves rau en el fet que les matemàtiques es poden emprar com un poderós mitjà de comunicació.
5. Una segona raó important per ensenyar matemàtiques és la seva importància i utilitat en molts altres camps. És fonamental per a l'estudi de la física i de les diferents enginyeries. Augmenta el seu ús en medicina i en biologia, en geografia i en economia, en els estudis d'empresa i de gestió. És essencial per realitzar operacions a la indústria i el comerç, tant a les oficines com als tallers.
30. Tristament, també estava clar que la poca capacitat matemàtica havia impedit a algunes persones sol·licitar segons quins treballs i segons quins cursos de formació.
31. L'estudi demostra que algunes persones sembla que no fan servir pràcticament mai les matemàtiques perquè han organitzat les seves vides per evitar utilitzar-les o per fer ús dels coneixements matemàtics d'altres persones.
40. La gran quantitat de queixes procedents dels empresaris sobre l'escassa competència matemàtica d'alguns joves que deixen l'escola va ser una de les causes principals perquè es recomanés la constitució de la nostra comissió d'investigació.

L'informe deixa clar que l'aprenentatge de les matemàtiques comporta força dificultats:

(87) Informe Cockcroft. *Las matemáticas sí cuentan*. Madrid, MEC, 1985.

11. Els problemes que comporta aprendre a fer ús de les matemàtiques com a mitjà de comunicació no són els mateixos que els d'aprendre l'ús de la llengua materna. La llengua materna proporciona un mitjà de comunicació que es fa servir contínuament i que, per a la majoria de persones, “es produeix naturalment”, tot i que el domini de la llengua necessiti ser desenvolupat i augmentat a classe. A més, els errors de gramàtica o d'ortografia, generalment no fan intel·ligible el missatge que s'està expressant. En canvi, les matemàtiques no s'adquireixen d'aquesta manera natural. No s'empren constantment; s'han d'aprendre i s'han de practicar; els errors tenen conseqüències més importants. Habitualment les matemàtiques també expressen informació d'una manera més precisa i concreta que la paraula escrita o oral. Per aquestes raons, molta gent dedica molt de temps, no tan sols a familiaritzar-se amb les operacions i les idees matemàtiques sinó també a guanyar confiança en el seu ús.

13. Molts adults a Gran Bretanya tenen gran dificultat fins i tot en qüestions aparentment tan simples com ara sumar diners, comprovar el canvi a una botiga o calcular el cost de cinc galons de benzina. I no és que aquestes persones no tinguin estudis o que siguin poc intel·ligents. Són gent de tot tipus de condició, algunes amb educació superior, són nul·les, però, en aritmètica i voldrien fer alguna cosa per posar-hi remei.

La comissió va decidir fer un seguit d'entrevistes per investigar les necessitats matemàtiques a la vida laboral. Van trobar problemes imprevistos. La gent tenia por de les matemàtiques:

16, 20 i 21. Aquesta idea aparentment estesa entre els adults, de les matemàtiques com una matèria intimidatòria, va impregnar una gran part de la selecció de la mostra; la meitat de les persones considerades apropiades per a la seva inclusió a la mostra es va negar a participar-hi.

La característica més notable de l'estudi va ser, potser, observar fins a quin punt la necessitat d'emprendre tasques matemàtiques aparentment senzilles i simples, podia provocar sentiments d'ansietat, d'impotència, de por i fins i tot de culpabilitat, en alguns dels entrevistats. No es va trobar cap connexió entre la mesura en què els entrevistats empraven les matemàtiques i el nivell dels seus títols acadèmics; hi havia llicenciats en ciències que afirmaven que no feien servir l'aritmètica, i d'altres sense titulació que demostraven un nivell força alt de coneixements aritmètics. Tampoc va aparèixer cap correlació entre la competència matemàtica i els grups ocupacionals.

Els sentiments de culpabilitat a què ens hem referit anteriorment eren especialment destacats entre les persones els títols acadèmics de les quals eren alts i que, en conseqüència, sentien que havien de tenir un domini de les matemàtiques quan en realitat no era pas així.

Pel que fa a la concreció de continguts i d'habilitats matemàtiques necessàries a la vida adulta, es poden destacar els apartats i les consideracions següents de l'informe:

PERCENTATGES

26, 27 i 28. Una altra característica revelada per l'estudi va ser la molt estesa incapacitat per entendre els percentatges. Molts dels entrevistats van dir que no els entenien o que no els feien servir mai.

Una altra pregunta va demostrar que una estadística que normalment s'expressa en termes de percentatge, la de la taxa d'inflació, no s'entén en absolut. Molts pensaven que una caiguda de la taxa d'inflació s'havia d'associar a una caiguda global dels preus

(tot i que consideraven improbable que això passés), i no amb un alentiment de la velocitat de creixement dels preus.

MAPES I TAULES D'HORARIS

La lectura de mapes i de taules d'horaris va ser una altra àrea que va presentar dificultats per a molts dels entrevistats.

32, 33 i 34. Encara que som conscients que algunes persones no les assoliran totes, inclouríem entre les necessitats matemàtiques de la vida adulta la capacitat de llegir nombres i comptar, dir l'hora, pagar per la compra i donar el canvi, pesar i mesurar, comprendre taules horàries senzilles i fer càlculs que hi estinguin relacionats.

SENTIT NUMÈRIC

També creiem que és important tenir un sentit numèric que permeti fer estimacions i aproximacions acceptables.

CÀLCUL

70. La necessitat de saber realitzar càlculs aritmètics de classes diferents apareix entre les exigències matemàtiques de gairebé tots els tipus de feines... Aquests càlculs es fan, de vegades, mentalment, a vegades amb paper i llapis i a vegades amb calculadora. Alguns treballs exigeixen específicament la capacitat de realitzar càlculs mentals de diverses classes.

FRACCIONS

75. Tot i que les fraccions encara s'utilitzen àmpliament a l'enginyeria i a d'altres treballs especialitzats, gairebé sempre es tracta amb fraccions els denominadors de les quals formen part de la sèrie 2, 4, 8, 16, ...

La necessitat de fer operacions com ara $\frac{2}{5} + \frac{3}{7}$ no sol presentar-se i tampoc la manipulació de fraccions del tipus que es practica sovint a les aules. En els pocs casos en què és necessari multiplicar i dividir fraccions, és normal passar-les a decimals abans de fer les operacions amb l'ajut d'una calculadora.

ÀLGEBRA

77. Un dels resultats més sorprenents de l'estudi és el poc ús explícit que es fa de l'àlgebra...

L'informe conclou que només és necessari, eventualment, saber fer ús d'algunes fórmules i de la seva comprensió, especialment en qüestions salarials i de dosis farmacèutiques. No sembla, en canvi, que sigui necessari saber transformar fórmules o resoldre equacions: "Resoldre equacions de 1r grau es presenta molt poc sovint."

ESTIMACIÓ I MESURA

78. La indústria i el comerç depenen en bona part de la capacitat de fer estimacions. Dos aspectes resulten de gran importància: el primer és la capacitat de jutjar si el resultat d'un càlcul o d'una mesura sembla raonable [...]; el segon és la capacitat de fer judicis subjectius sobre mesures diferents [...].

79. Tot i que l'estimació és important, comptar i mesurar encara ho és més. Bona part de les matemàtiques que es fan servir a l'àmbit laboral tenen a veure alguna cosa amb la capacitat de mesurar [...].

SEGURETAT

El més important és la necessitat de tenir la seguretat suficient per fer ús efectiu de qualsevol de les habilitats i dels coneixements que es posseeixi.

Una guia pràctica per a la vida quotidiana⁸⁶

Un text interessant des d'aquesta perspectiva és *Matemáticas, guía práctica para la vida cotidiana* de José Alberto Álvarez Nebreda i Ginés García Soto. La revisió que proposen els autors dels continguts i de les situacions de la vida quotidiana que requereixen matemàtiques és força reveladora. Ens podem fixar, d'una banda, en els exemples i els procediments associats que proposen:

1. El càlcul de percentatges amb calculadora o sense calculadora.
2. El càlcul de la fracció d'una quantitat.
3. L'arrodoniment.
4. La distinció entre proporcionalitat directa i inversa.
5. El càlcul d'increments i de disminucions salarials.
6. Els repartiments directament i inversament proporcionals.
7. La comprensió i la utilització de fórmules bancàries.
8. El recompte de qüestions d'alguna complexitat, com ara el nombre de partits d'un torneig.
9. La utilització d'incògnites en problemes de percentatges.
10. L'estudi de les despeses compartides en una comunitat de veïns o en un grup d'amics.
11. L'estimació de magnituds.
12. Les operacions amb magnituds expressades en forma complexa.
13. El càlcul d'àrees de figures geomètriques senzilles.
14. La comprensió i la utilització de gràfiques senzilles, com ara les que expressen un descompte, les que estudien l'evolució del pes i de l'alçada d'un nen o d'una nena o les que estudien l'evolució demogràfica d'un país o d'una ciutat.
15. La comprensió d'una composició química percentual, com ara la de l'aire.

Certament, tots aquests procediments i els contextos implicats revelen necessitats matemàtiques en situacions de la vida quotidiana. Tot i que hi haurà persones que mai s'enfrontaran amb alguna de les situacions plantejades, sembla desitjable que l'alumnat que acaba els estudis de secundària sigui capaç de sentir-se còmode amb els procediments recollits.

Els autors també estudien un seguit de casos pràctics (en alguns dels exemples s'amplien els apartats que es consideren d'interès, tot i que el text no els recull):

1. Aritmètica comercial: interessos, TAE i préstecs.
2. Travesses i loteria primitiva.

(86) ÀLVAREZ, J.A. i GARCÍA, G. *Matemáticas, guía práctica para la vida cotidiana*. Madrid: Alianza Editorial, 2002.

3. Mesures de la casa: elaboració i interpretació de plànols.
4. Una bona elecció: tria d'un operador telefònic; compra d'un vehicle (estudi i comparació de la potència, del consum, de la velocitat i del preu); optimització d'una inversió; dutxa o bany?
5. La salut: dietes; el pes ideal; dosificació d'un medicament; el tabac i la salut.
6. Eleccions: la llei d'Hondt; interpretació i anàlisi dels resultats.
7. La divulgació científica: origen i edat de l'univers; el sistema solar; història de la terra i dels éssers vius.
8. Viatges: consum d'un cotxe; lloguer d'un vehicle; escales de temperatura; canvis de moneda; itineraris i distàncies; interpretació de mapes; les hores arreu del món.

Alguns d'aquests contextos són relativament fàcils de treballar a les aules i poden motivar els alumnes. D'altres presenten més dificultats tècniques i també de motivació i és, fins i tot, dubtós que s'hagin de considerar en l'àmbit de les competències bàsiques.

Les propostes de Fernando Corbalán⁸⁸

Un altre text relacionat amb l'aplicació de les matemàtiques és *La matemática aplicada a la vida cotidiana* de Fernando Corbalán. Aquest autor, que és professor d'institut, revisa alguns aspectes -sense voluntat de ser exhaustiu- en què hi ha aplicació explícita de les matemàtiques. Són especialment interessants els capítols o apartats següents:

- Sistema de numeració decimal: l'autor considera, en primer lloc, especialment necessari que l'alumnat adquireixi un coneixement precís del sistema de numeració decimal i de les seves extraordinàries característiques. Des d'aquesta perspectiva, convé conèixer-ne l'origen i també l'existència d'altres sistemes.
- Percentatges: Corbalán també dedica un capítol als percentatges i recalca el poc temps que l'escola inverteix en aquest tema mentre que les fraccions reben una atenció exagerada. Just a l'inrevés del que després els alumnes trobaran a la vida real: es fan servir molt sovint els percentatges i rarament les fraccions. Concretament esmenta els contextos següents:
 - marges comercials
 - augments i disminucions de l'IVA
 - concentracions en dissolucions
 - mesura del pendent en pujades o baixades
 - distribució de recursos al planeta
 - organitzar discursos i manipular la informació a partir del percentatges
 - el jugador més valorat a la lliga de bàsquet
- Quantitats enormement grans i quantitats insignificants. Treball amb nombres grans i petits.
- Curiositats numèriques: cap-i-cues, nombres primers, nombres amics, nombres perfectes, etc. Codis secrets.
- Formes, volums i superfícies. Relació amb problemes d'optimització.

(88) CORBALÁN, F. *La matemática aplicada a la vida cotidiana*. Barcelona: Graó, 1995.

- Geometria tridimensional i geometria esfèrica.
- La circulació: bicicletes, cotxes, transport públic, embussaments de trànsit i velocitat.
- Sequeres i inundacions: dipòsits, capacitat d'estalvi d'aigua.

Alguns dels contextos proposats són molt concrets i adequats per a les activitats a l'educació secundària obligatòria. D'altres són potser una mica sofisticats tot i el seu interès.

Les matemàtiques necessàries per als ciutadans: propostes de John A. Paulos⁸⁹

Un altre autor que també s'ocupa de la qüestió, tot i que indirectament, és John Allen Paulos que amb els llibres *El hombre anumérico* (1990), *Un matemático lee el periódico* (1996) i *Érase una vez un número* (1999) estudia la presència de les matemàtiques a la nostra societat.

Aquest autor es mostra molt preocupat per l'anumerisme que afecta amplis sectors socials amb conseqüències més aviat desastroses. Paulos considera que la manca de competència matemàtica fa que les persones siguin extremadament manipulables:

“Una conseqüència de l'anumerisme de la qual rarament es parla és la connexió amb la creença en la pseudociència.”

“Aquesta tendència a la personalització és, com es veurà, una característica de moltes persones que pateixen anumerisme.” (L'autor es refereix, per exemple, a la por que senten molts nord-americans de morir en un atemptat terrorista i al menyspreu de la possibilitat de morir en un accident de trànsit.)

“L'anumerisme i la pseudociència solen anar agafats de la mà a causa, en part, de com n'és de fàcil invocar la certesa matemàtica per obligar l'anumèric a assentir estúpida i davant de qualsevol afirmació.”

Per a Paulos és imprescindible que els alumnes surtin de les escoles amb “sentit numèric”, és a dir amb la capacitat d'entendre relacions numèriques i amb la capacitat de fer estimacions:

“[...] És important poder recollir informació de les dades purament numèriques i poder refutar afirmacions a partir de les dades que les acompanyen.”

“[...] Si la gent estigués més capacitada per fer estimacions i càlculs senzills, es podrien eliminar (o no) moltes conclusions òbvies i no es tindrien en consideració tantes opinions ridícules.”

“La inconsciència de l'additivitat de les petites quantitats és un altre defecte del anumèrics, que segons sembla, no s'acaben de creure que els seus petits aerosols de laca puguin atacar la capa d'ozó o que el seu automòbil particular contribueixi al problema de la pluja àcida.”

Paulos es queixa també de l'aridesa de les matemàtiques escolars i reclama una matemàtica més imaginativa i relacionada amb el pensament i no amb les habilitats de càlcul:

“La matemàtica com a instrument útil, com a manera de pensar o com a font de plaer és completament aliena a la majoria de programes de l'educació elemental.”

(89) Totes les idees s'han extret dels llibres següents: PAULOS, J.A. *El hombre anumérico*. Barcelona: Tusquets Editores, 2000; PAULOS, J.A. *Érase una vez un número*. Barcelona: Tusquets Editores, 2002; PAULOS, J.A. *Un matemático lee el periódico*. Barcelona: Tusquets Editores, 2002.

“Tot sovint es considera que la matemàtica és un tema reservat per als tècnics, i es confon el talent matemàtic amb la perícia per executar operacions rutinàries, l’habilitat en la programació elemental o la velocitat de càlcul.”

L’autor considera també molt important el concepte d’atzar molt present a la realitat i indispensable per complementar el sentit numèric:

“L’anumerisme, o la incapacitat de fer servir còmodament els conceptes fonamentals de nombre i atzar, turmenta massa ciutadans que, d’altra banda, poden ser persones perfectament instruïdes.”

“Una de les principals característiques de les persones anumèriques és la tendència a sobreestimar la freqüència de les coincidències.”

“La tendència a atribuir un significat a fenòmens que es regeixen per l’atzar és senzillament omnipresent.”

“Per als anumèrics, unes quantes prediccions o coincidències viscudes tenen tot sovint més pes que una evidència estadística.”

Paulos reclama, a més, una bona atenció als percentatges que no es treballen adequadament a l’escola:

“Els percentatges són un tema de l’escola elemental que constantment s’aplica malament. Tot i que moltes persones pensin el contrari, el preu d’un article que ha sofert un augment del 50% i després una rebaixa del 50% ha experimentat una rebaixa neta del 25%.”

“Es va dir que un candidat a la presidència de 1980 va preguntar al seu seguici de premsa si algú sabia convertir 2/7 a percentatge tot i dient que era un problema dels deures del seu fill. Tant si l’anècdota és verídica com si no ho és, estic convençut que una minoria important de nord-americans adults no passaria un examen senzill sobre percentatges, decimals, fraccions i les conversions dels uns als altres.”

Les propostes del professor Claudi Alsina⁹⁰

El professor Alsina, en dues excel·lents publicacions, *Contar bien para vivir mejor* i *La matemàtica del consumidor*, ens proposa un magnífic recorregut per tot un seguit d’exemples en què les matemàtiques ens poden ajudar en la nostra vida quotidiana. Val la pena deixar-li la paraula:

“La tecnologia, la planificació, la prospectiva, la política, la publicitat, la medecina, la comunicació... tot allò que avui dia l’afecta d’una o altra manera usa grans dosis de quantificació. Tot, absolutament tot el que la societat actual li ofereix no s’hagués pogut aconseguir només amb les matemàtiques, però tampoc sense elles.”

“Aquest món ja li planta cara amb avaluacions, amb enquestes, amb robatoris, amb desinformació... i fa ús, tant per allò que és bo com per allò que és dolent, dels nombres. Ha arribat el moment de donar respostes. I tot i el risc de pecar d’ingenuïtat, aquest autor creu cegament en la bondat i en els valors formatius dels comptes com a armes vitals i definitives d’una ciutadania ben preparada.”

(90) Les idees i les cites s’han extret de: ALSINA, C. *Contar bien para vivir mejor*. Rubes: Barcelona 2004 i ALSINA, C., FORTUNY, J.M. *La matemática del consumidor*. Inst. Català del consum. Generalitat de Catalunya, 2001.

Des d'un punt de vista pràctic, *La matemàtica del consumidor*, presenta 15 fitxes de treball que són una mostra excel·lent de materials que es poden dur a l'aula per treballar-hi les matemàtiques de la vida quotidiana. Els contextos en què el doctor Alsina ens proposa fer ús de les matemàtiques són molt diversos:

- Interpretació de les proporcions del cos.
- Lectura i comprensió d'una gràfica de creixement.
- Càlcul de l'índex de massa corporal.
- Interpretació dels resultats en anàlisis clíniques.
- Comprensió dels resultats de mesura de la pressió arterial.
- Comprensió de les gràfiques de piràmides de població.
- Repartiment d'escons en funció dels vots obtinguts.
- Superfície i volums de pisos, locals, de mobles, etc.
- Interpretació de plànols.
- Acumulació i tractament de residus.
- Regulació de la temperatura en una casa.
- Descomptes, impostos i ofertes comercials.
- Envasos i embalatges de tota mena.
- Codis i codificacions, codis de barres.
- Consum d'un cotxe.
- Interpretació de bitllets de transport.
- Comunicació, imatge i so.
- Formats de paper.
- Formats fotogràfics i digitalització.
- Telefonia.
- Publicitat.
- Estalvis i impostos, llibretes, targetes de crèdit, hipoteques, plans de pensions.
- Compra o lloguer.
- Loteries, apostes, sorteigs, travesses.
- Raonament, inferències, certes estadístiques.

El professor Alsina clou el seu *Contar bien para vivir mejor* amb un bon consell que els professors de secundària hauríem de ser capaços que els alumnes i les alumnes fessin seu:

“Les matemàtiques es van crear i segueixen vives perquè persones com vostè gaudeixin dels seus resultats, com a plaer intel·lectual o com a mètode per mirar, resoldre, decidir o informar-se... Les matemàtiques no esgoten els recursos intel·lectuals que vostè hi ha de combinar, però els agradaria anar sempre amb vostè.”

2.2. COMPETÈNCIES BÀSIQUES EN MATEMÀTIQUES

Tot i que el currículum escolar de l'ESO a Catalunya no es va dissenyar a partir de les matemàtiques necessàries per a la vida quotidiana, el cert és que, posteriorment, s'ha fet un gran esforç per aproximar-lo a les anomenades competències bàsiques en matemàtiques. Les quinze competències recollides al quadre següent, proposat per la Conferència Nacional d'Educació, responen a aquest intent. Només s'hi troba a faltar, potser, alguna competència relacionada amb la dimensió lúdica de l'activitat matemàtica.

Les competències bàsiques de l'àmbit matemàtic		
Dimensió: nombres i càlcul	Dimensió: resolució de problemes	Dimensió: mesura
1. Usar i interpretar llenguatge matemàtic en la descripció de situacions properes i valorar críticament la informació obtinguda.	5. Planificar i utilitzar estratègies per afrontar situacions problemàtiques mostrant seguretat i confiança en les capacitats pròpies.	9. Mesurar d'una manera directa les magnituds fonamentals, usant els aparells adequats i les unitats adients en cada situació.
2. Aplicar les operacions aritmètiques per tractar aspectes quantitatius de la realitat valorant la necessitat de resultats exactes o aproximats.	6. Presentar, d'una manera clara, ordenada i argumentada el procés seguit i les solucions obtingudes en resoldre un problema.	10. Fer estimacions raonables de les magnituds més usuals i valorar críticament el resultat de les mesures realitzades.
3. Decidir el mètode adequat de càlcul (mental, algorismes, mitjans tecnològics...) davant d'una situació donada i aplicar-lo de manera eficient.	7. Resoldre problemes que impliquin càlculs percentuals, de l'IVA, del tipus d'interès... relacionats amb l'administració de rendes pròpies.	11. Usar els mètodes elementals de càlcul de distàncies, perímetres, superfícies i volums en situacions que ho requereixin.
4. Aplicar la proporcionalitat directa o inversa per tal de resoldre situacions properes que ho requereixin.	8. Integrar els coneixements matemàtics amb els d'altres matèries per comprendre i resoldre situacions.	
Dimensió: geometria	Dimensió: tractament de la informació	Dimensió: atzar
12. Emprar el coneixement de les formes i relacions geomètriques per descriure i resoldre situacions quotidianes que ho requereixen.	14. Interpretar i presentar informació a partir de l'ús de taules, gràfics i paràmetres estadístics, i valorar la seva utilitat en la societat.	15. Reconèixer situacions i fenòmens pròxims en què intervé la probabilitat i ser capaç de fer prediccions raonables.
13. Utilitzar sistemes convencionals de representació espacial (maquetes, plànols, mapes...) per obtenir o comunicar informació relativa a l'espai físic.		

Amb tot, el treball de les competències necessita contextos explícits com els esmentats a l'apartat anterior.

2.3. CONSIDERACIONS FINALS

En els capítols anteriors ja s'ha fet esment i s'han donat exemples de la possibilitat de treballar amb notícies de premsa, de muntar activitats a l'aula amb objectes, de fer sortides, etc. El que es proposa aquí és treballar les matemàtiques en contextos que després es puguin retrobar a la vida quotidiana perquè els alumnes i les alumnes prenguin consciència de la utilitat de les

matemàtiques i per fer visibles i explícites les matemàtiques que els ciutadans i les ciutadanes necessiten habitualment.

Per a alguns estudiants, que veuen l'escola només com un pas imprescindible per trobar un treball i poder guanyar-se la vida, l'aprenentatge de les matemàtiques queda relegat a un segon pla perquè no veuen de què els poden servir per a l'accés al mercat laboral. Aquesta situació no és fàcil de canviar. Amb tota seguretat, però, els professors i les professores podem treballar per demostrar que les matemàtiques poden ser molt útils per a la vida quotidiana de qualsevol persona.

Ara podem respondre les preguntes que ens fèiem en iniciar el capítol. Recordem-les:

1. Quines són les matemàtiques necessàries per a la vida quotidiana?
2. Es poden estandarditzar alguns continguts matemàtics, alguns procediments i algunes competències matemàtiques com a bàsiques o essencials per a la vida quotidiana?
3. Aquestes matemàtiques seran les mateixes d'aquí a 10 o 15 anys?
4. O es tracta potser de tenir habilitats i competències més aviat relacionades amb la capacitat d'adaptació i d'aprenentatge, de saber fer i de saber pensar i raonar?

El llistat de continguts, de contextos i de situacions clarament implicats en l'assoliment de les competències bàsiques en matemàtiques i que seran d'utilitat per a la vida quotidiana podria ser aquest:

- Saber treballar amb percentatges (problemes de retribucions i d'economia, repartiment de recursos, notícies de premsa, etc.).
- Saber fer càlculs mentals senzills, càlculs escrit senzills i càlculs amb calculadora i saber triar el mitjà més adequat segons el cas.
- Saber mesurar magnituds senzilles i saber emprar les unitats més habituals del sistema mètric decimal.
- Saber fer estimacions.
- Tenir sentit numèric i sentit de la mesura: saber descartar un resultat incoherent i distingir les necessitats de precisió.
- Saber treballar amb representacions a escala.
- Saber treballar i interpretar taules i especialment, taules horàries.
- Entendre i ser crític amb escrits de premsa amb informació numèrica.
- Entendre i interpretar representacions gràfiques senzilles com ara les que apareixen a la premsa.
- Apreciar les matemàtiques i les seves estratègies. Emprar les matemàtiques per jugar.

La llista de la Conferència Nacional d'Educació també s'ha de tenir ben present ja que, a més, fa l'esforç de conciliar el currículum prescrit amb l'apropament a la vida quotidiana. Tant aquestes competències com la llista anterior encara tindran molta vigència d'aquí a 15 o 20 anys. Només cal que ens fixem en la vigència actual de les propostes de l'Informe Cockcroft. Certament, això no treu que també calgui ensenyar els nois i les noies a aprendre a aprendre, a pensar i a raonar i a adaptar-se a noves situacions.

Més enllà de la llista anterior, també hi ha moltes aplicacions de les matemàtiques que es poden fer explícites a les aules, tot i que no es tracti de qüestions tan elementals. Així, per exemple, la trigonometria ha de deixar l'àmbit abstracte i aplicar-se a situacions topogràfiques o a mesurar

distàncies, les funcions logarítmiques han de permetre explicar l'escala de Richter per mesurar terratrèmols o el PH, les funcions exponencials es poden aplicar al mètode del carboni 14, etc.

Aquest treball de contextualització i d'aplicació de les matemàtiques tindrà efectes sobre la motivació de l'alumnat. En alguns casos, immediatament, i en d'altres, a llarg termini.

3. EXEMPLES

A les proves PISA de 2000 es va proposar l'exercici següent:

L'ANTÀRTIDA. LA SUPERFÍCIE D'UN CONTINENT

A sota podeu veure un mapa de l'Antàrtida.



Feu servir l'escala del mapa
Feu una estimació de l'àrea de l'Antàrtida
Expliqueu com heu fet el càlcul

Només el van fer bé el 10,9% dels nois i de les noies de la mostra espanyola, la qual cosa s'ha de considerar un resultat francament decebedor. Els professors i les professores podem dissenyar exercicis anàlegs més propers als nostres alumnes i això, probablement, els motivarà molt més que l'Antàrtida. Als meus alumnes de l'IES Bruguers de Gavà, per exemple, els proposo tots els cursos l'exemple següent:

EL TEU MUNICIPI. ITINERARI A L'INSTITUT

Observeu el plànol a escala 1:10.000 del centre urbà de Gavà amb atenció i responeu les preguntes que es fan a continuació.



- Quina és la distància real aproximada des de l'institut fins a l'estació?
- Intenteu localitzar la vostra casa al mapa. Quant camineu cada dia per venir a l'institut? Si no viviu a Gavà, calculeu la distància des de la rotonda de la carretera de la Sentiu -a l'esquerra del mapa- fins a l'institut, pels carrers de Gavà.
- Intenteu localitzar els 2 carrers més llargs de la vila i la seva longitud.
- Calculeu en km^2 i en ha la superfície del centre urbà (intenteu aproximar el contorn amb segments que permetin el càlcul mitjançant l'àrea de diversos triangles i quadrilàters).

La contextualització i el treball de situacions properes a la realitat també és possible als batxillerats. Un dels millors exemples el trobem en els problemes d'optimització. En el fons es tracta d'un exemple tradicional que moltes generacions d'estudiants han tingut l'oportunitat d'afrontar en els seus estudis de secundària i en el qual l'activitat de modelització matemàtica és

explícita i inevitable. Tanmateix, però, en el seu tractament didàctic s'han comès dos errors que es podrien considerar greus: a) no emmarcar els enunciats en la realitat de forma estricta i no donar una oportunitat d'experimentació a l'alumnat; b) no tractar-los, habitualment, com a problemes d'extrems absoluts (sinó com problemes d'extrems relatius) i no fixar-se en l'interval en què tenen sentit les solucions (des d'un punt de vista no solament matemàtic, sinó sobretot, des d'un punt de vista pragmàtic).

Una cop més, la pressa i la rutina poden aparèixer en aquest tipus de problemes, tot i desvirtuant un capítol magnífic de les matemàtiques escolars. Els problemes d'optimització constitueixen una ocasió única per posar a prova tota la formació matemàtica de l'alumnat: efectivament, es tracta de modelitzar una situació real des del coneixement matemàtic per trobar solucions que tinguin sentit real. En pocs àmbits temàtics es tindran oportunitats tan clares de mostrar la potència dels mètodes matemàtics amb la facilitat de poder connectar amb la realitat i motivar directament l'alumnat.

Un dels obstacles per poder treballar els problemes d'optimització correctament és la disponibilitat de temps. Si convé, part del treball es pot deixar per fer-lo fora de l'aula i en grups de treball. D'altra banda, cal remarcar, que l'activitat tradicional que consisteix a solucionar ràpidament uns quants exemples a la pissarra no és inútil; d'aquesta manera, però, la majoria de l'alumnat no percebrà les dificultats reals de la situació i no participarà de la vertadera activitat matemàtica.

A continuació es proposa un exemple comentat.

Enunciat

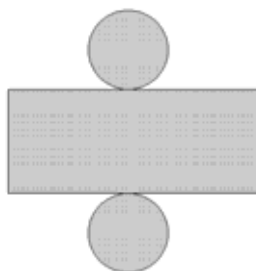
Volem construir pots cilíndrics de 500 cm^3 de capacitat. Quines dimensions ha de tenir el pot perquè la despesa de material sigui mínima?

a) Comprensió del problema

Molts alumnes tendeixen a pensar que si el volum és constant l'àrea també ho serà. Caldrà fer-los comprendre que això no és cert. Pot anar bé fer-los omplir una taula i fer-los dibuixar uns quants cilindres. Per emplenar la taula han de fixar el radi o l'altura del cilindre.

ALTURA	RADI	VOLUM	ÀREA BASE	ÀREA LATERAL	ÀREA TOTAL
		500 cm^3			
		500 cm^3			
		500 cm^3			
		500 cm^3			
		500 cm^3			
		500 cm^3			
		500 cm^3			
		500 cm^3			

La taula també els permetrà comprovar que, si es fixa una variable i el volum es manté constant, ja es poden calcular tots els altres valors.



b) Càlcul de la funció a optimitzar

Un cop han entès el problema, el càlcul de la funció a optimitzar $S(h,R) = 2\pi R^2 + 2\pi Rh$ no ha de comportar dificultats. És convenient recordar el desenvolupament pla d'un cilindre per justificar la fórmula (se suposa que ja l'han emprada a la fase de comprensió; vegeu el dibuix de la pàgina anterior).

c) Reducció a una única variable de la funció a optimitzar

La construcció de la taula de l'apartat a ha de permetre als alumnes veure que la relació entre el radi i l'altura ve donada pel fet de ser el volum constant: $\text{volum} = V = \pi R^2 h$. És convenient que debatin, a continuació, quina de les dues variables és més convenient aïllar de cara a càlculs posteriors. En aquest cas, per exemple, convé triar h en funció de R :

$$h = \frac{500}{\pi R^2}, \text{ amb la qual cosa, substituint es té: } S(R) = 2\pi R^2 + \frac{1000}{R}$$

d) Fixar el conjunt I de variació de la variable triada

Abans de començar a derivar la funció anterior, s'ha de fixar el conjunt on es "mou" la variable amb sentit: a quin conjunt volem que la funció $S(R)$ sigui mínima? Quin és el domini de la funció $S(R)$ en la realitat?

Es tracta, doncs, de distingir entre el domini amb sentit matemàtic ($\mathbb{R} - \{0\}$), el domini amb sentit geomètric ($[0, +\infty[$) i el domini I amb sentit pràctic (sentit físic, econòmic i de disseny), on s'ha de calcular el mínim absolut. Aquest interval haurà de ser fixat pels alumnes segons el seu criteri i a partir de les mesures reals de pots que es puguin trobar a les botigues (poden triar, per exemple, l'interval en centímetres $[2,10]$ o fins i tot intervals més ajustats a la realitat).

e) Càlcul dels extrems absoluts de $S(R)$ sobre I

La fase d'execució consisteix en el càlcul dels extrems absoluts de la funció $S(R)$ sobre l'interval $I=[2,10]$ (o sobre l'interval que s'hagi triat). És el moment d'aplicar els teoremes referents als extrems. Els alumnes hauran de constatar, en primer lloc, que la funció $S(R)$ té extrems absoluts a I perquè és contínua en aquest interval (teorema de Weierstrass). A continuació, hauran de determinar la seva localització (teorema de localització) sobre els valors $R=2$, en $R=10$ o en els punts singulars que S pugui tenir a I :

$$S'(R)=0 \Leftrightarrow 4\pi R - \frac{1000}{R^2} = 0 \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}} \cong 4,30 \text{ cm}$$

Aquest apartat es pot acabar de dues maneres igualment vàlides: classificar el punt singular amb algun dels teoremes que donen condicions suficients d'extrem, comprovar que es tracta de l'únic extrem relatiu de la funció S a l'interval I i deduir que, per tant, es tracta d'un extrem absolut; o bé, segona possibilitat (potser més senzilla), comparar directament els valors de $S(R)$ en els tres punts candidats i concloure que la funció $S(R)$ presenta el seu mínim absolut per a $R = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}$ a l'interval I .

f) Solució completa, comparació amb els models reals i conclusions

No té sentit tancar el problema amb l'apartat anterior. Encara hi ha un parell de coses indispensables perquè tot quedi ben clar. En primer lloc s'han de donar les mesures completes de la solució:

$$R = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}} \cong 4'60 \text{ cm} \quad \text{i} \quad h = \frac{500}{\pi R^2} = \frac{500}{\pi \sqrt[3]{\left(\frac{250}{\pi}\right)^2}} \cong 8'60 \text{ cm}$$

És interessant que els alumnes comprovin que es té exactament $h=2R$ i que raonin quin serà l'aspecte del pot. Es poden fer (la pot fer el professor si cal) també la pregunta següent: per a altres capacitats, serà també $h=2R$ la solució mínima òptima?

D'altra banda convindrà tornar a la realitat: Quines mides hi ha al mercat? Alguna d'aquestes mides s'adapta a las mides del mínim? Quina desviació tenen respecte del mínim calculat? Quin estalvi podria suposar adoptar les mides del mínim calculat?

CAPÍTOL 10: LA MOTIVACIÓ I LA RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

La utilització de la resolució de problemes com a instrument de motivació i d'aprenentatge té una llarga tradició. A més, en els darrers anys, hi ha hagut moltes aportacions en aquest àmbit. Tanmateix, però, per a bona part de l'alumnat, la resolució de problemes apareix com una tasca plena de dificultats. Aquests alumnes no tenen confiança en les seves capacitats per al treball dels problemes i els afronten amb por i ansietat.

En aquest capítol es tracta de conciliar els aspectes teòrics i els aspectes pràctics de la resolució de problemes i estudiar-ne les aplicacions a l'aula que poden revertir en una millora de la motivació de l'alumnat.

1. INTRODUCCIÓ I REFLEXIONS PRÈVIES

Ara mateix, a secundària, la resolució de problemes rep un tractament força heterogeni i que, en general, no respon a un marc pedagògic i teòric definit. Així trobem qui fa servir els problemes només com a complement de la teoria, d'altres que tracten els problemes d'una forma aïllada i compartimentada i d'altres que tan sols aborden exercicis de tipus repetitiu. Es troba a faltar més professorat que concedeixi importància a la fase d'exploració dels problemes i a les tècniques de resolució (moltes vegades per desconeixement de les teories heurístiques) o professorat que empli les situacions-problema com a eines de construcció dels conceptes matemàtics.

La cita següent d'Arthur Koestler, que recollia el recentment desaparegut Miguel de Guzman⁹¹ al seu *Para pensar mejor*, és força reveladora:

“Si tingués la veritat en la meua mà -escrivia Emerson-, la deixaria escapar pel pur plaer de cercar-la. En un experiment clàssic, Sultan, el ximpanzé de Wolfgang Koehler, va descobrir, després de nombrosos esforços inútils per tal d'aconseguir agafar un plàtan col·locat fora de la seva gàbia amb un pal massa curt, que ho podia fer tot i acoblant dos pals buits. El seu descobriment va causar-li “un plaer tan immens” que es va dedicar a repetir el truc i va oblidar de menjar el plàtan. Si això s'esdevé amb una mona, no podíem confiar que en nosaltres, l'exercici sa del pensament constitueixi per si mateix una motivació enormement intensa?”

La utilització de la resolució de problemes com a font de plaer ha augmentat en els darrers anys. Des d'aquesta perspectiva, una de les claus és la plantejar problemes adequats a les possibilitats de l'alumnat: ni massa difícils, cosa que els pot fer abandonar decebut, ni massa fàcils, cosa que no els farà avançar en el seu aprenentatge. Així, doncs, amb la diversitat que tenim a les aules haurem de pensar a plantejar problemes diversos si no volem adreçar-nos només a una minoria d'alumnes.

Malauradament, a les classes de matemàtiques s'observa encara una forta preponderància dels exercicis sobre els problemes. Aprendre a pensar i a raonar i aprendre a resoldre problemes és certament difícil. Tanmateix, tal i com ens deia el fundador de l'heurística moderna, el gran G. Pólya⁹², els alumnes no aprendran a resoldre problemes si només fem exercicis a l'aula:

(91) Extret de: DE GUZMÁN, M. *Para pensar mejor*. Barcelona: Labor, 1991.

(92) Extret de: PÓLYA, G. *¿Cómo plantear y resolver problemas?* México: Trillas, 1981.

“Per a l'aprenentatge del pensar només la pràctica del pensar és veritablement útil.”

L'experiència docent ens mostra, però, com n'és de complicat ensenyar a pensar i a raonar. Per això mateix, moltes vegades de manera inconscient, s'opta per objectius més senzills i assolibles a curt termini, com ara el d'aprendre a resoldre exercicis. Hi ha també, de fet, una tendència molt forta a rutinitzar els problemes, a mecanitzar-ne les resolucions amb receptes i algorismes, de tal manera que s'acaben convertint en exercicis.

2. LES IDEES DE PÓLYA

A mitjan segle XX, tot i partint de les idees de Descartes, el pensador i matemàtic d'origen hongarès Georg Pólya funda (o refunda) l'anomenada heurística moderna, ciència que estudia el comportament humà davant dels problemes (no necessàriament de matemàtiques) i tracta d'esbrinar les operacions mentals útils per resoldre'ls. Les idees de Pólya han marcat profundament totes les aportacions posteriors i cal considerar-lo, doncs, com una figura cabdal de la resolució de problemes.

Pólya afirma que l'habilitat de resoldre problemes és de caire pràctic -com ara nedar, o tocar un instrument- i que s'aprèn amb molta pràctica i un bon professor. Les seves idees van quedar inicialment recollides en el llibre *How to solve it* (1945). Pólya proposa trobar *regles heurístiques*: preguntes i suggeriments que determinen la posada en marxa de les operacions mentals adequades per a la resolució d'un problema. Diu que les *regles heurístiques* han de complir dues propietats:

- 1) Han de ser generals (és a dir, útils per a qualsevol classe de problema, matemàtic o no).
- 2) Han de ser naturals (és a dir, les regles han de poder sorgir dels mateixos alumnes).

Pólya afirma que el professor no s'ha d'imposar mai a l'alumne. Tanmateix, no és bo que el deixi tot sol. Proposa el mètode d'interrogació progressiva: ajudes progressives en forma de preguntes que puguin suggerir un camí de resolució. En cap cas s'han de donar les coses fetes als alumnes.

Distingeix quatre fases en la resolució:

- 1) **fase de comprensió**
- 2) **fase de concepció i elaboració d'un pla**
- 3) **fase d'execució del pla**
- 4) **fase de recapitulació**

Distingeix també dos grans tipus de problemes:

- 1) **Problemes per resoldre**: aquí l'objectiu és produir, construir o trobar un objecte, un nombre, una quantitat, un punt, una funció, etc.
S'hi inclourien els problemes típicament escolars i, en particular, els problemes matemàtics amb incògnites, dades i condicions.
- 2) **Problemes per demostrar**: aquests serien els problemes en els quals, a partir d'una hipòtesi, es vol demostrar una tesi, i es trobarien a l'àmbit universitari.

Val la pena esmentar també el decàleg de Pólya^{xx} per al bon professor de matemàtiques, que encara té una vigència gairebé absoluta:

(93) Extret de: POLYA, G. *La découverte des mathématiques*. París: Dunod, 1967.

1. Interesseeu-vos per allò que expliqueu.
2. Domineu allò que expliqueu.
3. Instruiu-vos sobre les vies del coneixement. La millor manera d'aprendre alguna cosa és la que consisteix a descobrir-la un mateix.
4. Interpreteu les cares i les mirades dels vostres alumnes i intenteu esbrinar quines són les seves dificultats i quins són els seus desigs. Poseu-vos en el seu lloc.
5. No els doneu "saber" i sí "saber fer", actituds intel·lectuals i l'hàbit del treball metòdic.
6. Ensenyeu-los a fer conjectures.
7. Ensenyeu-los a donar proves.
8. En el problema que estigueu treballant, distingiu-hi allò que pot servir per resoldre, més endavant, altres problemes, intentant fer evident el model general que hi ha en el fons de la situació concreta que esteu tractant.
9. No reveleu mai, de forma immediata, la totalitat del vostre secret -deixeu que els vostres estudiants facin suposicions abans de dir-ho tot-; deixeu-los descobrir per ells mateixos tot el que sigui possible.
10. Suggeriu les coses. No les inculqueu a la força.

Pólya va crear escola i va tenir i encara té molts seguidors. Potser el seu deixeble més famós, i el que més influència té en el moment actual, sigui A. H. Schoenfeld⁹⁴. Aquest autor considera que les *regles heurístiques* que proposa Pólya són només d'*execució* i que, tot i que són necessàries, no són suficients. Segons ell, cal, a més, una *heurística de control* (de segon ordre) per tal que l'alumne reflexioni sobre el que està fent. Considera que les heurístiques d'execució (les que proposa Pólya) tendeixen a millorar directament el procés de resolució mentre que les heurístiques de control pretenen millorar el control i la direcció d'aquest procés. D'aquesta manera distingeix entre el procés i la consciència d'aquest procés.

En la mateixa direcció, J. Mason, L. Burton i K. Stacey⁹⁵ proposen que els alumnes es converteixen en els seus propis monitors en el control de la resolució.

Aquestes formes de reflexió sobre els processos de resolució, d'entrada, poden semblar accessoris. El cert, però, és que són indispensables per a l'aprenentatge i que poden ajudar l'alumnat a adquirir confiança en les capacitats pròpies.

De forma molt resumida i fent un esforç de síntesi (sens dubte una mica agosarat), es podria dir que la majoria dels seguidors de Pólya estan d'acord en la utilitat de tenir un esquema per a la resolució de problemes i que aquest esquema tindria les fases següents:

Fase I: Anàlisi / Abordatge

Fase II: Atac / Exploració

Fase III: Revisió / Comprovació

(94) Extret de: SHOENFELD, A.H. *Mathematical Problem Solving*. Orlando Florida: Academic Press, 1985.

(95) Extret de: MASON, J.; BURTON, L.; STACEY, R. *Pensar matemáticamente*. Barcelona: Labor-MEC, 1992.

3. EL TREBALL AMB CONJECTURES

3.1. INTRODUCCIÓ

El 1954 Pólya publica *Mathematics and Plausible Reasoning*⁹⁶, on fa una aportació molt sòlida al que ell anomena "raonament plausible". Afirmar que les matemàtiques i els matemàtics, tot i que pugui semblar el contrari, procedeixen de manera inductiva, com les ciències experimentals, i que la intuïció hi juga un paper fonamental. Les deduccions i la formalització són passos que vénen després, quan ja s'ha inferit alguna regularitat o alguna llei. Segons Pólya⁹⁷ el raonament inductiu s'ha de dur a les aules:

“Ensenyar és donar als estudiants l’oportunitat de descobrir les coses per ells mateixos.”

“Primer conjectureu, després demostreu.”

Tal i com ja es deia a la introducció d’aquest treball, la motivació i l’aprenentatge són processos que apareixen simultàniament i que interaccionen de forma complexa: d’una banda, no es pot esperar que aparegui la motivació per començar l’aprenentatge i d’altra banda, quan no hi ha aprenentatge la motivació desapareix. Segons Chevallard, Bosch i Gascón⁹⁸, el paper passiu de l’alumnat a les aules i la seva desmotivació, no s’hauria de relacionar amb causes externes a l’activitat dins l’aula:

“Molts dels comportaments habituals de l’alumne de matemàtiques (desinterès, manca d’iniciativa pròpia, avorriment, rebuig) que se solen descriure com a “mala actitud” i “falta de motivació” haurien de considerar-se [...] com una conseqüència, més que com a la causa de no haver “entrat” en la disciplina matemàtica.”

“Per tal d’incidir de manera significativa i universal sobre les dificultats matemàtiques dels alumnes és necessari (tot i que, amb absoluta seguretat, no suficient) modificar aquells aspectes de les matemàtiques escolars que “amaguen” als alumnes la vertadera disciplina matemàtica.”

Caldria, doncs, plantejar-se la possibilitat de fer amb els alumnes “vertaderes matemàtiques”. Els mètodes clàssics de treball a l’aula semblen massa rutinaris i són probablement poc engrescadors. Ara bé, què vol dir vertaderes matemàtiques?

D’una manera molt sintètica, es podria dir que el mètode científic consisteix a inferir lleis o regularitats a partir de les dades observades. Ningú no posa en dubte que les ciències experimentals procedeixen essencialment així. En canvi, i pel que fa a les matemàtiques, sobretot en les darreres dècades del segle XX, no sembla haver-hi hagut unanimitat. Fins i tot, es pot dir que la matemàtica deductiva va arribar a gaudir de molt més prestigi, fins a crear la falsa idea que els raonaments inductius no eren propis d’aquesta disciplina.

Ara mateix, a secundària, a l’àrea de matemàtiques no se sol treballar de manera assídua el raonament inductiu. En part com a conseqüència d’aquesta moda, però també per inèrcia i perquè fer-ho és difícil i lent. El marc teòric de la reforma educativa dels anys noranta proposava canviar aquesta tendència i donar prioritat a la inducció sobre la deducció. Tanmateix, no es pot dir que aquestes idees hagin penetrat a les aules de manera clara i les propostes de Pólya referents al raonament plausible no acaben pas d’imposar-se.

(96) PÓLYA, G. *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos, 1996. (Colección Estructura y Función)

(97) Les dues cites s’han extret del vídeo que recull una classe del professor Pólya: Let us teach guessing. A demonstration with George Pólya. Mathematical Association of America, 1965.

(98) Extret de: CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. *Estudiar matemáticas*. Barcelona: Horsoi, 1997.

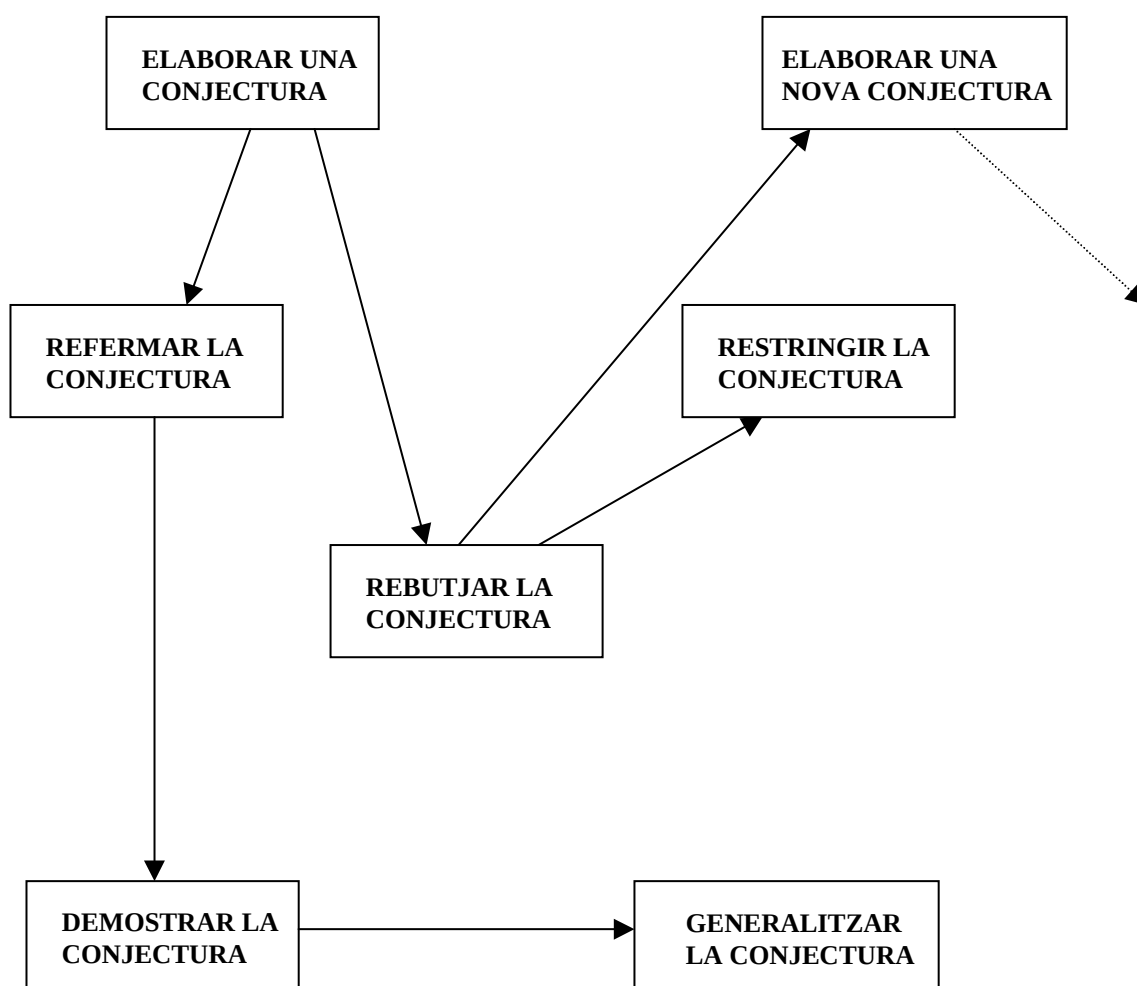
Potser ha arribat el moment de reprendre les idees de Pólya i de concloure que fer vertaderes matemàtiques ha de passar necessàriament pel treball inductiu de les matemàtiques a les aules.

3.2. EL TREBALL INDUCTIU DE LES MATEMÀTIQUES

Ja s'ha dit que la formulació de conjectures a partir de "l'observació mental" és part essencial de les matemàtiques. Podríem pensar que això no és a l'abast de l'alumnat però no és pas així. Cal acostumar-los a formular conjectures i a posar-les a prova. El que potser sí que queda fora del seu abast sigui demostrar-les.

Ara mateix, els estudiants de secundària estan massa acostumats que les matemàtiques siguin un terreny d'una solidesa absoluta. Cal que se'ls faci veure que, en realitat, i en primera instància, les matemàtiques són un món de conjectures del qual emergeix un residu molt sòlid després de força treball.

Les activitats d'investigació matemàtica poden emmarcar-se a l'esquema següent:



Les conjectures es formulen a partir d'indícis que permeten una intuïció. Es rebutgen i es refermen amb exemples i casos particulars abundosos. Es demostren -o creiem que es demostren- amb raonaments de convicció. De vegades, quan es rebutgen amb contraexemples, es pot cercar en quin àmbit encara són vàlides: es restringeixen.

Tots aquests processos són certament difícils de reproduir en un aula. No s'hi hauria de renunciar, però, tan fàcilment i, com a mínim sempre que sigui possible, fóra interessant intentar-ho.

4. LES PROPOSTES DEL PROFESSOR MIGUEL DE GUZMÁN

4.1. TIPUS DE BLOQUEIGS

Miguel de Guzmán⁹⁹, professor de matemàtiques de la Complutense, divulgador i especialista en aspectes didàctics que ens va deixar el 2004, s'ha de considerar també com a continuador o seguidor de les idees de Pólya. De Guzmán posa l'accent en els aspectes emotius que es relacionen amb la resolució de problemes i la seva tesi principal, coincident amb la de Pólya, és que es pot aprendre a pensar millor. Segons el seu parer, les causes més importants del baix rendiment de la nostra ment són els bloqueigs de diverses classes que la dominen. El primer pas essencial per al tractament d'aquests bloqueigs que, en menor o major grau, afecten la personalitat, consisteix a conèixer-los. En el seu *Para pensar mejor* ens en presenta una classificació amb propostes de neutralització i ens invita a preguntar-nos fins a quin punt influeixen en la nostra idiosincràsia i a estar atents a la seva influència.

A continuació es recull aquesta classificació. S'ha de dir que algunes de les propostes semblen més adequades per a l'alumnat universitari que no pas per al de secundària, tanmateix, però, la majoria d'idees poden ajudar-nos a comprendre la mentalitat de l'alumnat i les dificultats que poden tenir a l'hora d'afrontar els problemes.

4.1.1. Bloqueigs de tipus afectiu

Apatia, abúlia, mandra davant el començament.

- Neutralització:

"Pensa una estona en las diferents maneres possibles de començar la teva tasca. Escull-ne una i comença. Has de donar al teu començament una bona oportunitat de demostrar el que val. No t'aturis més del compte a examinar-lo en aquest estadi inicial. Allò que ara et sembla dolent pot no ser-ho tant com et sembla.

Conserva la consciència que el teu inici pot tenir caràcter provisional. Si en jutjar-lo raonablement amb certa perspectiva penses que s'ha de canviar, canvia'l. No et deixis endur, però, per un perfeccionisme que et paralitzi. Recorda : "Allò que és el millor és enemic d'allò que és bo."

Pors: al fracàs, al ridícul, a l'examen.

- Neutralització:

"Les ombres del fracàs i de l'equivocació són molt més llargues que la pròpia realitat. Els errors i les equivocacions ens ensenyen sobre les formes adequades de procedir. El camí per a l'èxit consisteix a duplicar la proporció d'errades.

El qui tracti d'introduir noves maneres de pensar i d'actuar ha d'ensopegar amb resistències que provenen d'ell mateix i del seu ambient. No t'arronsis.

El gran remei per a les pors que un examen pot produir consisteix a tenir la convicció d'anar ben preparat".

(99) Les idees i les cites textuais d'aquest apartat s'han extret de: DE GUZMÁN, M. *Para pensar mejor*. Barcelona: Labor, 1991.

Ansietats.

- Neutralització:

"Fer-se conscient del grau d'influència que aquestes ansietats tenen sobre un mateix.

Tractar de ponderar serenament el valor relatiu del triomf, sobretot si el preu que es paga comporta una disminució important de la qualitat de l'existència.

Minvar conscientment la velocitat i l'hiperactivitat quan ens adonem que són precisament aquests els factors que ens estan empenyent."

Repugnàncies.

- Neutralització:

"Tracta de conèixer i d'estudiar els teus possibles sentiments de repugnància davant les diferents tasques intel·lectuals. Aquest coneixement és el primer pas per poder contrarestar-ne els efectes.

Intenta equilibrar els teus sentiments racionalment, tot i observant-ne els efectes nocius, la seva manca de motivació, els seus possibles orígens injustificats.

Ocasionalment, actua de forma directa contra la tendència que t'arrossega.

De vegades, les teves repugnàncies són indicis de les teves limitacions. En observar-les et coneixeràs millor i podràs insistir a posar-hi remei.

Has de romandre atent a les transferències que fas de l'aversion a una persona determinada al tema en què s'ocupa o a l'obra que realitza. Hi ha persones que poden ser profundament antipàtiques, cregudes, vanitoses i moltes coses més, i a la vegada ser capaces de compondre simfonies meravelloses."

4.1.2. Bloqueigs de tipus cognoscitiu

Dificultats en la percepció del problema.

- Neutralització:

"Ens hem de fer conscients dels nostres obstacles difusos i, a ser possible, els hem de cristal·litzar en descriure'ls amb paraules.

Hem d'examinar de tant en tant les nostres tasques rutinàries i decidir si no seria millor substituir algunes rutines per d'altres accions que puguin ser més eficaces.

Hem d'examinar com altres persones s'enfronten amb activitats anàlogues i comparar els procediments."

Incapacitat per desglossar el problema; la feina sembla que supera totes les nostres habilitats.

- Neutralització:

"No t'has d'arronsar per la magnitud aparent del problema. Tracta de descompondre'l en parts més senzilles.

Mira quines són les més fàcils, les més interessants, les més urgents.

Estableix unes prioritats per tal d'ordenar la teva acció. Una a una, les feines seran de més ben treballar."

Dificultats per atacar el problema.

- Neutralització:

“Convé mesurar curosament l’esforç dedicat a la informació prèvia. Convé començar informat, al mateix temps, però, he de posar fites a la meua ànsia de seguretat i he recolzar-me en allò que d’altres ja han fet i estar atent a la meua possible tendència a retardar la meua pròpia immersió en el problema tot i prenent com a excusa la necessitat d’una informació exhaustiva.”

Visió estereotipada: veiem només el que esperem veure.

- Neutralització:

“És necessari romandre obert a allò que és estrany, a les desviacions aparentment sense motiu d’allò que s’espera veure. En moltes ocasions són les que ens poden dur a visions noves de la realitat.”

Tendència al judici crític.

- Neutralització:

“És necessari que no et deixis endur per l’excés d’esperit crític, especialment a l’etapa inicial d’apropament al problema amb el desig d’obtenir maneres originals de procedir-hi. Ajorna el judici i els teus mecanismes intel·lectuals globals, els subconscients inclosos, estaran més oberts per prestar-te la seva important contribució.”

Rigidesa mental.

- Neutralització:

“En la recerca de vies i de mètodes de tractament d’un problema, el mateix problema ha de ser el que mani, no les maneres de procedir que et semblin més familiars. Concedeix a d’altres maneres de pensar, a d’altres eines menys usuals, a d’altres llenguatges diferents, l’oportunitat de demostrar la seva eficàcia en cada cas.

No et deixis endur per la tendència a utilitzar l’eina intel·lectual que empres millor. És millor que et fixis en el problema i que et preguntis amb quin tipus d’eina cedirà més fàcilment.

Procura fer ús de tots els teus mecanismes cognitius davant d’un problema que se’t resisteix, els conscients, els subconscients, els sensorials,...

Desconfia de les tendències que la teua pròpia especialització et suggereixi”.

4.1.3. Bloqueigs culturals i ambientals

Els ídols del fòrum.

Són les formes de pensar que ens transmetem els uns als altres, les modes, les formes específiques de pensar prevalents.

La saviesa popular.

Representa l’experiència col·lectiva de tota una comunitat humana. Però no és infreqüent que les màximes de la saviesa popular constitueixin una veritable obstrucció en el camí cap a la resolució original de problemes. Per exemple, si es diu: "Busca la resposta correcta." Doncs resulta que, moltes vegades, es pressuposa que la resposta correcta és única. O si es diu: "Això no és lògic." Com si els salts lògics, les paradoxes, la fantasia, la imaginació, les intuïcions no

fossin camins molt més poderosos. O també, quan es diu: "Segueix les normes." És molt possible que les normes i les rutines no ens duguin enlloc.

- Neutralització:

“Davant d’un problema concret no t’accontentis amb la primera resposta, tot i que sigui correcta. Tracta de trobar d’altres respostes correctes.”

“En la fase inicial d’acarament amb un problema, concedeix-te una bona oportunitat de volar lliurement, per sobre dels plantejaments lògics, deixa’t portar per conjectures imaginatives, per la teva fantasia... Com seria de bo que...! Més endavant ja vindrà el moment del rigor i de l’examen lògic dels teus principis de solució.”

“Davant d’una norma, d’una forma rutinària de procedir, pregunta’t i pregunta als altres: En quines circumstàncies es va originar? Què es pretenia? Encara són vàlides les condicions que la van originar? Encara són desitjables els objectius? Ara, en aquest moment, no es pot aconseguir el mateix d’una altra manera?

“Cultiva activament la teva imaginació, la teva capacitat d’elaborar fantasies. Si per resoldre un problema cal una nova idea, per definició aquesta idea no sorgirà en examinar merament les que hi ha, sinó en imaginar les que no hi ha.

Les situacions reals són complexes, profundes, ambigües, admeten molts punts de vista. Cultiva la contemplació de l’ambigüitat i de la profunditat. L’analogia, la metàfora, l’humor són magnífics instruments per aconseguir-ho.

El joc, l’esperit lúdic, no és només per als nens. Tal i com deia Leibniz: “Mai no són els homes tan enginyosos com en la invenció dels seus jocs.” Cultiva fins on sigui possible l’actitud lúdica en la teva activitat professional. Juga amb els problemes.”

Les idees inertes.

La marca inequívoca per reconèixer una idea inerta és la seva incapacitat per posar la ment en acció, es tracta d’una idea rebuda sense ser utilitzada, no contrastada, ni incorporada en combinacions noves.

- Neutralització:

“L’antídoto contra les idees inertes consisteix a reconèixer-les i tractar d’experimentar-ne la ineficàcia i la conveniència de substituir-les. Per això cal fer força contra la tendència espontània a mantenir la seguretat que, falsament, pensem que ens proporcionen.”

4.2. ELS INSTRUMENTS PER MILLORAR EL PENSAMENT

Un cop coneguts aquests bloqueigs, sempre segons Miguel de Guzmán, es poden seguir els tres principis següents per pensar millor:

1) Tenir un model ideal de forma de pensar i intentar ajustar-s’hi.

2) Fer molta pràctica amb la utilització d’aquest model.

3) Tenir una forma d’examinar i avaluar el nostre procés de pensament.

El model ideal es pot adquirir seguint un conjunt d’estratègies globals que poden ajudar en l’activitat mental de tipus general i que, posteriorment, es converteixen en tècniques específiques quan es passa a diferents camps particulars del pensament.

Si es volen millorar els processos de pensament en el tractament de problemes de forma eficaç, és absolutament necessari disposar de tècniques que permetin examinar-los a fons, comparar-los amb els models fixats com a desitjables, per a així poder assenyalar les nostres línies d'acció i detectar els nostres progressos cap a l'objectiu de crear hàbits eficients.

Per assimilar a fons els mecanismes de reacció dels experts és molt útil exercitar-se, no només a resoldre molts problemes, sinó també a examinar els propis processos mentals. Per tal d'examinar-los, Guzmán proposa elaborar el protocol del procés (acta que dóna constància dels fenòmens interessants que ocorren mentre es resol un problema), que es faci després l'anàlisi del protocol (per conèixer les formes de procedir) i, finalment, que es practiqui una avaluació del procés (comparar la realització amb altres possibles formes de procedir).

A banda de l'elaboració de protocols, M. de Guzmán suggereix també la possibilitat -sempre amb la intenció d'arribar a conèixer millor la forma de pensar- que cadascú elabori el seu propi perfil heurístic. En aquest sentit proposa un qüestionari que pot servir com a guia per a aquesta introspecció. Tant una activitat com l'altra -l'elaboració de protocols i la del perfil heurístic- tindrien efectes beneficiosos per a aquells que han de resoldre problemes i també per a aquells que han d'explicar com es resolen problemes.

Cal dir, finalment que, pel que fa a l'esquema per a resoldre problemes, el model concret de Miguel de Guzmán està basat en les idees de Pólya i, en gran mesura, coincideix amb molts altres models més recents, com els de Mason, Burton i Stacey o el de Schoenfeld, abans esmentats.

L'esquema que proposa és el següent:

1. *Familiaritzeu-vos amb el problema*

- Tracteu d'entendre a fons la situació.
- Amb tranquil·litat, al vostre ritme.
- Jogueu amb la situació, emmarqueu, no li tingueu por.

2. *Busqueu estratègies*

- Comenceu pel més fàcil.
- Experimenteu.
- Feu-vos un esquema, una figura, un diagrama.
- Trieu el llenguatge adequat, una notació apropiada.
- Busqueu un problema similar.
- Inducció.
- Supposeu el problema resolt.
- Supposeu que no.

3. *Seguiu la vostra estratègia*

- Seleccioneu les millors idees de la fase anterior.
- Actueu amb flexibilitat. No us capfiqueu amb una sola idea.
- Ha sortit? Segur? Examineu a fons la solució.

4. *Reviseu el procés i traieu-ne conseqüències*

- Examineu a fons el camí que heu seguit
- Tracteu d'entendre per què funciona.
- Mireu si trobeu un camí més simple.

- Mireu fins on arriba el mètode.
- Reflexioneu sobre el propi procés i traieu-ne conseqüències per al futur.

5. ALGUNES CONCLUSIONS

La resolució de problemes és part essencial de l'activitat matemàtica a l'aula. A partir de les idees exposades en els apartats anteriors es formulen a continuació un seguit de propostes que poden contribuir a millorar la motivació de l'alumnat en aquest àmbit.

Orientacions generals:

1. El professorat ha de treballar per fer veure a l'alumnat que pensar i raonar és útil i satisfactori.
2. El professorat ha de parar atenció a possibles situacions de bloqueig que pugui patir l'alumnat. Cal diagnosticar quina mena de bloqueig es pateix i dissenyar estratègies per a la seva neutralització.

Orientacions referents a les característiques dels enunciats:

3. Cal plantejar problemes adequats a les possibilitats de l'alumnat. Això comporta diversificar les propostes plantejades.
4. Cal plantejar situacions properes a la realitat tot i que siguin complexes. És convenient fer esforços de contextualització sempre que sigui possible.
5. És convenient plantejar situacions properes a l'alumnat. Això els facilitarà l'entrada a l'activitat i els animarà a treballar.
6. Cal donar importància a la formulació de problemes i no només a la resolució de problemes.
7. A més dels enunciats escolars clàssics, convé plantejar també situacions obertes pendents de matematització.
8. Convé recordar que es poden emprar els recursos de la matemàtica recreativa en l'àmbit de la resolució de problemes.
9. Convé plantejar situacions en què l'alumnat hagi d'explorar la realitat o algun objecte de la realitat.
10. Cal plantejar situacions en què l'alumnat hagi d'elaborar conjectures.

Orientacions metodològiques:

11. Convé evitar el treball centrat en els exercicis repetitius.
12. S'han de valorar tots els raonaments de l'alumnat.
13. En alguns casos es poden emprar esquemes que ajudin alguns alumnes a afrontar la resolució de problemes.

14. Pot ser convenient elaborar protocols de resolució amb l'alumnat que el faci reflexionar sobre el funcionament de la seva ment davant dels problemes.

15. No és convenient donar receptes en l'àmbit de la resolució de problemes.

16. El treball cooperatiu en l'àmbit de la resolució de problemes pot tenir efectes positius en la motivació d'alguns alumnes.

17. El mètode d'interrogació progressiva, en què es formulen preguntes com a resposta a les preguntes de l'alumnat, pot invitar a la creativitat i contribuirà a obrir la mentalitat de l'alumnat.

6. ALGUNS EXEMPLES

A continuació es presenten alguns exemples de situacions-problema.

a) En l'àmbit de les conjectures numèriques:

Situació-problema 1: productes d'enters consecutius

Observeu que:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 = 5^2 - 1$$

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 = 11^2 - 1$$

$$3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 360 = 19^2 - 1$$

Serà sempre el producte de quatre enters consecutius un quadrat perfecte menys 1? Quina llei es pot conjecturar?

Situació-problema 2: sumes d'imparells

Observeu les següents sumes:

$$1 + 3 = 4 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

Quina conjectura podeu fer? La podeu provar?

Situació-problema 3: diferències de quadrats

Observeu les igualtats següents:

$$2^2 - 1^2 = 3$$

$$3^2 - 1^2 = 8$$

$$3^2 - 2^2 = 5$$

$$4^2 - 1^2 = 15$$

$$4^2 - 2^2 = 12$$

$$4^2 - 3^2 = 7$$

$$5^2 - 1^2 = 24$$

$$5^2 - 2^2 = 21$$

$$5^2 - 3^2 = 16$$

$$5^2 - 4^2 = 9$$

.....

.....

.....

Quins nombres poden expressar-se com a diferència de dos quadrats perfectes?

Situació-problema 4: sumes de quadrats consecutius

Observeu ara les següents sumes:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$$

$$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$$

Quina llei podríem conjecturar en aquest cas?

b) En l'àmbit de les petites investigacions:

Situació-problema 5: quadrats capgirats

Observeu: $13^2 = 169$ i $31^2 = 961$

Investigueu quins nombres de dues xifres hi ha que compleixin relacions anàlogues.

Situació-problema 6: fer girar un full de paper

Feu girar un full de paper de mida DIN A4 al voltant del costat petit i calculeu el volum del cilindre que genera. Feu el mateix tot i fent-lo girar al voltant del costat llarg. Què us sembla, sortirà el mateix volum? Calculeu-lo.

Com dividiríeu el full de paper amb unes tisores per obtenir un nou rectangle (l'enganxem amb celo) que en girar ens proporcionï un cilindre més voluminós?

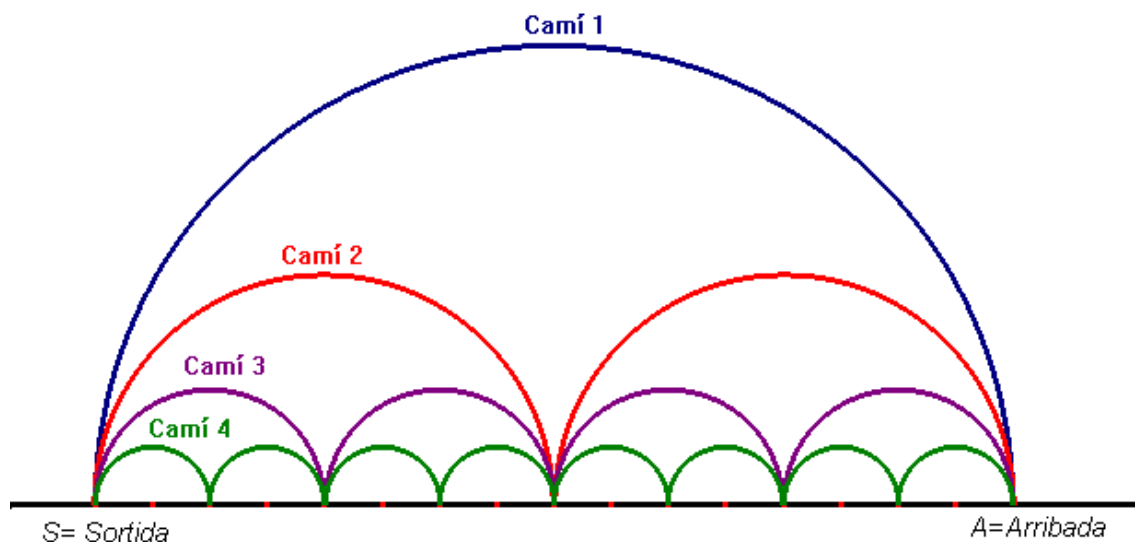
Hi ha algun cilindre de volum màxim que es pugui obtenir repetint aquest procés de retallar i enganxar?

Situació-problema 7: itinerari explicat

Un cargol surt d'un punt A i recorre 128 metres en línia recta en direcció nord. Després gira 90° a la seva dreta en direcció est i recorre 64 metres. Torna a girar 90° a la dreta - ara en direcció sud - i fa 32 metres més. Continua d'aquesta manera, és a dir, girant a la dreta 90° després de recórrer cada cop la meitat de metres, fins que fa 1 metre cap a l'oest i arriba al punt B. Feu un dibuix del seu itinerari i calculeu a quina distància es troben els punts A i B.

A continuació redacteu un enunciat anàleg amb l'itinerari a l'inrevés.

Situació-problema 8: Un problema d'investigació amb Cabri



A la figura adjunta hi ha dibuixats quatre camins per anar del punt S al punt A.

1. Podríeu dibuixar amb l'ajut del programa Cabri dos camins més? Quin dels sis camins que van del punt S al punt A us sembla més curt? Per què?
2. Imagineu que repetim el procés indefinidament fins a tenir infinits camins. Podríem afirmar que el recorregut dels camins s'acosta a la distància en línia recta entre S i A? Justifiqueu la vostra resposta.
3. Calculeu les longituds dels 6 camins que teniu dibuixats si la distància SA és de 2 km i repenseu la resposta que heu donat a l'apartat anterior i extraieu les vostres conclusions.

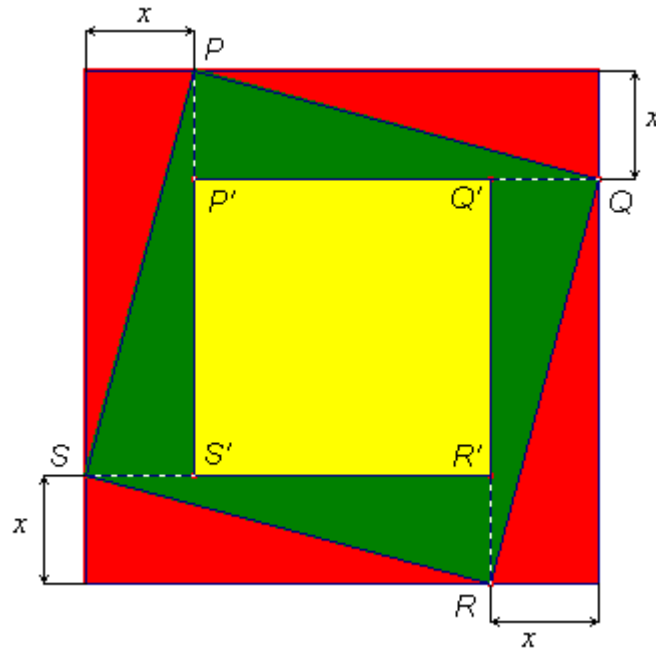
Situació-problema 9: Un problema d'investigació amb Cabri

Prenem un punt P sobre un costat d'un quadrat a distància x d'un dels vèrtexs. A continuació prenem la mateixa distància x sobre els altres tres costats (vegeu el dibuix) i obtenim el quadrilàter $PQRS$. Feu el dibuix amb Cabri i doneu resposta a les qüestions següents:

1. El quadrilàter $PQRS$ és un quadrat? Per què?
2. Trobeu l'àrea del quadrilàter $PQRS$ en funció de la distància x . Podeu suposar que el quadrat gran (el vermell) té 1 m de costat.
3. Quin ha de ser el valor de la distància x per obtenir un quadrilàter $PQRS$ d'àrea mínima? Per què?

4. Tracem perpendiculars als costats pels punts P , Q , R i S i obtenim un nou quadrilàter $P'Q'R'S'$. Determineu-ne l'àrea en funció de la distància x . Quins són els valors màxim i mínim d'aquesta àrea quan varia x ?

5. Dissenyeu i resoleu problemes anàlegs amb un triangle equilàter i amb un pentàgon regular.



CAPÍTOL 11: LA GEOMETRIA COM A ELEMENT DE MOTIVACIÓ

Durant força temps molts aspectes de l'activitat geomètrica i, de manera especial, la geometria experimental, han tingut molt poca presència a secundària. Ara mateix hi ha amplis sectors del professorat que consideren que això ha estat un greu error. En aquest capítol es tracta de revisar les possibilitats d'ús de la geometria com a element de recuperació de la motivació per a tota l'activitat matemàtica.

1. ALGUNES CONSIDERACIONS INICIALS

A partir dels anys seixanta del segle XX, la geometria d'Euclides, en ser considerada com una branca morta i acabada de les matemàtiques, va desaparèixer progressivament dels plans d'estudi. L'aparició de les geometries no euclidianes i el triomf de les matemàtiques deductives van portar molts matemàtics professionals a pensar que era un contrasentit i un anacronisme mantenir els *Elements* d'Euclides a les escoles. Entre els principals impulsors d'aquest corrent hi havia els membres del col·lectiu Bourbaki¹⁰⁰. Com que tenien un gran prestigi i una gran autoritat intel·lectual arreu del món, resulta previsible que les seves tesis s'imposessin a molts països. Va ser el moment de la matemàtica moderna i de la visió de la geometria i de la matemàtica en general com una creació purament abstracta. Als centres de secundària es va començar a parlar d'espais vectorials i d'espais afins, i l'algebrització de la geometria va ser pràcticament completa.

En altres llocs, com ara al Regne Unit, també van deixar de banda Euclides, però van fer un intent d'introduir la geometria a partir de les transformacions seguint, de fet, una idea de Fèlix Klein. Ens en parla Brian Bolt¹⁰¹:

“Després de discutir molt, es va decidir introduir la geometria fent ús de les transformacions: reflexions, rotacions, homotècies, transformacions afins, etc. Ens vam inspirar en una conferència de F. Klein del 1872 en la qual suggeria que la geometria s'havia d'ensenyar com els invariants dels grups de les transformacions a l'espai [...] L'experiència aviat ens va mostrar que aquest nou enfocament, tot i ser fascinant per a l'equip de professors, era tan difícil per als alumnes com el vell. Àdhuc, probablement, era més sofisticat.”

En el fons, era absolutament lògic i lloable que les noves conquestes matemàtiques es volguessin portar a l'escola. Tant les propostes algebritzadores, com les que recorda Bolt, que formava part de la comissió de savis que havia de decidir quina geometria s'havia de fer a secundària al Regne Unit, semblaven, en el seu moment, assenyades i plenes de futur.

(100) L'any 1934 alguns matemàtics francesos van decidir constituir un grup de treball amb l'objectiu d'aconseguir la simplificació, la formalització i la unificació de les matemàtiques. La minuciosa i monumental obra que van començar a elaborar es va titular *Éléments de mathématique*. Aquest conjunt de llibres, centrat en la concepció axiomàtica de les matemàtiques i en la noció d'estructura, va tenir una influència extraordinària que va arribar fins i tot als programes de secundària de molts països (als mitjans de comunicació es va parlar de la implantació de les matemàtiques modernes). El grup estava constituït per uns 10 o 20 matemàtics que van voler romandre a l'anonimat. Amb aquesta intenció es van inventar el pseudònim de Nicolas Bourbaki com a autor de totes les obres. Ara sabem que entre els socis fundadors hi havia un conjunt de matemàtics excepcionals: André Weil (1906-1998), Jean Delsarte (1903-1968), Jean Dieudonné (1906-1992), Claude Chevalley (1909-1984)... Després s'hi van anar afegint molts matemàtics de gran prestigi, com ara Henri Cartan, Samuel Eilenberg, Lauren Schwartz, Alexander Grothendick, Jean Pierre Serre, Roger Godement, René Thom... El primer volum dels *Éléments de mathématique* va aparèixer el 1939 i el darrer el 1998. Per tot plegat s'ha de considerar que aquest grup va marcar les matemàtiques del segle XX.

(101) Extret de: BOLT, B. “¿Qué es la geometria?”. *Suma, revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas*, nº 19, (novembre de 1998): pàgines 5-16.

A l'ensenyament, però, les coses no són mai tan senzilles. Amb el pas del temps, s'ha pogut comprovar que aquestes vies van ser un desastre per a una gran majoria d'alumnes. El fracàs de la implantació de les anomenades matemàtiques modernes va ser sonat: les bellíssimes matemàtiques deductives van portar a l'aparició sorprenent de generacions d'analfabets matemàtics i geomètrics. I això va ser així, probablement, perquè simultàniament es va prescindir de l'anomenada geometria experimental o científica i tot plegat va portar molts alumnes a no tenir imaginació geomètrica a la vegada que el món abstracte de la geometria analítica els va fer perdre motivació per a l'activitat matemàtica. Ara mateix s'hauria d'imposar el retorn al contacte amb la realitat tal i com recomanen Emma Castelnuovo¹⁰², que ens cita Comenius, i Brian Bolt¹⁰³:

“Escoltem un cop més Comenius: “El coneixement ha de començar, necessàriament a través dels sentits [...]. Aleshores, per què s'ha de començar l'ensenyament amb una exposició verbal de les coses i no amb una observació real? Només quan l'observació s'hagi fet, la paraula podrà intervenir per explicar-la amb eficàcia.”

“Un cop vaig decidir que el paper tradicional de la geometria no era sostenible, vaig començar a apreciar que el que es necessitava eren experiències per tal que els meus alumnes incrementessin la seva consciència de l'espai i del món en què vivien.”

Efectivament si hi ha un aspecte de les matemàtiques que ofereix clarament la possibilitat del contacte amb la realitat, l'experimentació i l'aplicabilitat és el de la geometria. A més, en els darrers anys han aparegut materials excel·lents -entre els quals destaquen els entorns geomètrics dinàmics, com ara al Cabri Géomètre- per al treball de la geometria a les aules que permeten la millora de la motivació de l'alumnat. Durant força cursos he pogut experimentar l'ús d'alguns d'aquests materials a l'aula, especialment amb aquells alumnes que mostraven clares dificultats d'aprenentatge i poca motivació i predisposició per al treball matemàtic i, en general, molts d'aquests alumnes recuperen el gust per al treball de la geometria.

El professor Alsina¹⁰⁴ ens parla del pas de la geometria de la natura als models geomètrics:

“En concretar els aspectes geomètrics presents a la natura resulta immediat reconèixer que les formes inertes i vives (i la seva dinàmica) van motivar la creació de models geomètrics (corbes, superfícies, transformacions,...), el resultat final del desenvolupament geomètric aporta, però, elements que van més enllà del repertori natural.”

El processos d'abstracció en geometria han de seguir el passos de la història tal i com ens explica Howard Eves¹⁰⁵ en aquesta magnífica cita:

"Les primeres consideracions geomètriques de l'home deuen ser molt antigues i es deuen haver originat subconscientment a partir de simples observacions nascudes de la capacitat humana per reconèixer la forma física i per comparar models i grandàries[...] D'aquest primer contacte nebulós amb molts conceptes geomètrics pot dir-se'n geometria subconscient.

La segona etapa en geometria va sorgir quan la intel·ligència humana fou capaç d'extraure d'un conjunt de relacions geomètriques concretes una relació general abstracta que contenia les primeres com a casos particulars[...] L'etapa de laboratori en geometria es coneix com a geometria científica (o experimental, o empírica o inductiva).

(102) Extret de: CASTELNUOVO, E. *Didáctica de la matemática moderna*. Barcelona: Trillas, 1993.

(103) Extret de: BOLT, B. “¿Qué es la geometría?”. *Suma, revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas*, nº 19, (novembre de 1998): pàgines 5-16.

(104) Extret de: ALSINA, C. *Geometria cotidiana. Placeres y sorpresas del diseño*. Barcelona: Rubes, 2005.

(105) Extret de: EVES, H. *Mathematical reminiscence*. Mathematical Association of America, 2001.

Una tercera etapa és aquella en què els resultats desitjats s'obtenen per una petita cadena de raonament deductiu, originada en un resultat més fonamental. Aquest tipus de geometria es coneix com a geometria deductiva (o demostrativa o sistemàtica)[...]

Hi ha un principi pedagògic basat en la famosa llei condensadament enunciada pels biòlegs en la forma: "L'ontogènesi recapitula la filogènesi", la qual cosa significa simplement que, en general, "l'individu repeteix el desenvolupament del grup". El principi pedagògic és que, almenys en grans línies, a un estudiant cal ensenyar-li una matèria en l'ordre en el qual la matèria es va desenvolupar a través dels anys. Prenem la geometria, per exemple. Hem vist que històricament la geometria va progressar a través de tres etapes, primer geometria subconscient, llavors geometria científica i finalment geometria demostrativa.

El principi pedagògic reclama, llavors, que la geometria sigui presentada primer als nens petits en la seva forma subconscient, probablement a través de simple treball artístic i simples observacions de la natura. D'aquesta forma, els nens petits estaran assabentats subconscientment d'un gran nombre de conceptes geomètrics, com ara distància, angle, triangle, quadrilàter, vertical, perpendicular, paral·lela, línia recta, cercle, espiral, esfera, cilindre, con, etc. Llavors, una mica més tard, aquesta base subconscient serà aconduïda cap a la geometria científica, on els alumnes induiran un conjunt considerable de fets geomètrics a través de l'experimentació amb regles i compassos, amb tisores i cola, amb models simples, etc. Encara més tard, quan l'estudiant s'ha tornat suficientment sofisticat, la geometria es pot presentar en la seva forma demostrativa, o deductiva, i els avantatges i inconvenients del primer procés poden ser mostrats.

Avui, la part més dèbil d'aquest programa d'estudi geomètric a les nostres escoles sembla estar en la segona etapa de la geometria, la científica. No es dedica prou temps a aquesta etapa. Hi ha moltes coses a dir en la geometria empírica o experimental. El temps dedicat aquí solidifica el domini de l'estudiant de molts conceptes geomètrics. Li mostra la importància i la necessitat essencial de processos inductius preliminars en matemàtiques, i al mateix temps li ensenya les deficiències quan el treball no és seguit per demostracions rigoroses. El que els professors necessiten per fer aquesta fase d'aprenentatge geomètric més extensa i més valuosa és una bona col·lecció d'experiments geomètrics, simples però significatius, que facin servir models barats i fàcilment construïbles."

2. ELS MATERIALS PER AL TREBALL DE LA GEOMETRIA COM A INSTRUMENTS DE MOTIVACIÓ

Ja s'ha comentat la importància de la geometria experimental o científica a secundària. Els materials són, des d'aquesta perspectiva, molt importants. L'ús de materials variats a l'hora de fer geometria ajudarà a rompre la possible monotonia de les classes, obligarà l'alumnat a cercar relacions en situacions diferents i el farà augmentar la motivació. És recomanable fer un ús variat dels materials de cara a obtenir-ne un coneixement funcional. A més, d'aquesta manera, es podrà captar l'atenció de l'alumnat de forma més satisfactòria; potser els que no se sentin atrets per alguns exemples sí que se sentiran atrets per altres objectes o situacions. És evident, també, que el treball experimental a partir de materials farà avançar l'alumnat de manera lenta. Val a dir, però, que s'avançarà profitosament i que, en aquest nivell educatiu, no cal deixar-se portar per la pressa.

Els materials idonis han de tenir certes característiques. Segons afirma Emma Castelnuovo¹⁰⁶, han de ser materials manipulables que permetin fer construccions i que siguin movibles i operatius. Textualment diu:

(106) Extret de: CASTELNUOVO, E. *Didáctica de la matemática moderna*. Barcelona: Trillas, 1993.

“[...] Els materials per a l’ensenyament constructiu de la geometria han de ser artificials i transformables per continuïtat. Aquestes dues característiques suggeriran una àmplia gamma de “models” aptes per facilitar el pas d’allò que és concret a allò que és abstracte.”

C. Alsina, C. Burgués i J. Fortuny¹⁰⁷ assenyalen, molt encertadament, els errors següents, entre d’altres, en l’ús de materials:

1) Sofisticació excessiva del material.

Un material massa complex pot desvirtuar l’objectiu d’aprenentatge.

2) Intocabilitat del material.

Els materials s’han de poder manipular; l’alumnat ha de poder experimentar-hi.

3) Poca quantitat de material.

Si no hi ha materials per a tothom molts alumnes poden desconnectar o mantenir un comportament excessivament passiu.

A continuació es dona una relació comentada dels materials¹⁰⁸ més assequibles:

I) En l’àmbit de la geometria plana

1. Regle i compàs

Es tracta de materials tradicionals, l’ús dels quals s’ha d’incrementar a les classes de matemàtiques, ja que a l’àrea de visual i plàstica es fan servir menys que abans a les assignatures de dibuix. A més, els programes informàtics no n’haurien de desplaçar l’ús.

2. Altres instruments de dibuix: escaire i cartabó, transportador d’angles, bisector d’angles i pantògraf

Els primers que s’esmenten són molt útils per a tota la geometria plana; els dos últims, força més específics, resulten més complicats d’usar. Caldria, en qualsevol cas, col·laborar amb les àrees de tecnologia i de visual i plàstica de cara a usar-los.

3. El programa informàtic Cabri-Géomètre

Aquest programa és el que s’anomena un *entorn geomètric dinàmic* i el principi bàsic del seu disseny és permetre la construcció de figures geomètriques a partir dels anomenats objectes bàsics, com ara punts, rectes, segments, circumferències, etc., i d’un seguit de relacions, com ara punt mitjà, paral·lela, perpendicular, simetria, gir, etc. que l’usuari selecciona des d’un menú. Quan s’ha construït una figura, es poden moure els objectes bàsics i observar a la pantalla les modificacions. Cada element del dibuix es mou de forma contínua i es mantenen les característiques geomètriques de la construcció feta. L’usuari treballa, doncs, amb tota una categoria de dibuixos cadascun dels quals és un cas particular de la construcció que s’ha fet. Això permet observar experimentalment quines propietats són invariants i quines no ho són.

(107) Extret de: ALSINA, C.; BURGUÉS, C. i FORTUNY, J.M. *Materiales para construir la geometria*. Madrid: Síntesis, 1990. (Col·lecció Cultura y aprendizaje núm.11)

(108) Hi ha molts més materials i cada cop amb més freqüència, afortunadament, en surten de nous. El llistat no és, doncs, exhaustiu i es pot consultar la bibliografia per tal d’obtenir més informació. Són especialment interessants: Alsina, C.; Burgués, C. i Fortuny, J. M.: *Materiales para construir la geometria* (Col·lecció Cultura y aprendizaje núm.12). Editorial Síntesis. Madrid, 1990. // Bolt, B. i Hobbs, D.: *101 proyectos matemáticos*. Editorial Labor. Barcelona, 1991. // Castelnuovo, E.: *La Geometria*. Ketres. Barcelona, 1981.

El programa servirà per a tot el que sigui geometria plana, però també per donar representacions planes de l'espai. De fet, fa essencialment tot allò que es pot fer amb regla i compàs. Té, a més, l'atractiu, la nitidesa i les facilitats que proporciona el suport informàtic i, com s'ha dit, l'avantatge de poder sotmetre a moviments els objectes geomètrics del pla.

4. El geoplà

Es tracta d'un material més específic que els anteriors. El geoplà fou ideat pel matemàtic britànic G. Catagno. Consisteix en un quadrat de fusta, de qualsevol mida, sobre el qual es fixen claus a distància constant els uns dels altres per tal d'aconseguir un reticle d' $n \times n$ punts (cada clau és un punt). El més freqüent és el de 25 punts, tot i que els altres són igualment interessants. Ara mateix, es poden trobar també models en plàstic, ja construïts, que no són gaire cars. S'hi poden treballar classificacions de figures planes, nomenclatures, equivalència d'àrees, semblança, angles, etc. És molt interessant per al treball del problema de la relació entre àrees i perímetres.

5. Paper mil·limetrat o quadriculat

El recompte de quadrets per tal d'estimar l'àrea d'una figura plana a escala 1:1 o a qualsevol altra escala resulta fàcilment comprensible per a la majoria d'estudiants, que poden, així, connectar de forma molt directa amb el problema.

6. Tàngrams

Es tracta també de materials força específics relativament econòmics i fàcils de construir si cal. Són molt atractius per a l'alumnat com a trencaclosques.

S'hi poden treballar: figures planes, descomposicions, angles, àrees, moviments, etc. Per exemple, el càlcul de les àrees de les peces que componen un tàngram -amb mesura directa i amb mesura indirecta, fent ús de fórmules- és un exercici interessant.

7. Mecano

És interessant per a la construcció de polígons amb vèrtexs "flexibles" i és útil, sobretot, per al treball amb triangles i quadrilàters i les seves classificacions.

8. Cartolines

S'inclouen aquí tots els materials que es puguin fer retallant cartolines: col·leccions de triangles, de quadrilàters, tires que serveixin com a costats, etc. Es tracta, doncs, d'un material interessant per al treball de polígons en general.

II) En l'àmbit de la geometria de l'espai

9. Models de cossos geomètrics construïts

Es tracta de materials més tradicionals que ofereixen menys possibilitats de participació als alumnes. No deixen, però, de tenir cert interès de cara a visualitzar, mostrar i treballar físicament amb cossos geomètrics.

10. Policubs

Es tracta de conjunts de cubs de diversos colors. Permeten un treball molt més específic i des del punt de vista del desplegament estricte del currículum pot resultar difícil d'utilitzar.

11. Geoespai

El nostre gran Pere Puig Adam va proposar la utilització i la creació d'un geoespai anàleg al geoplà per al treball de la geometria de l'espai. Es tractaria d'un cub gran, obert, amb claus a les parets convenientment disposats. El seu ús pot ser força interessant. Es pot pensar a construir també un cub de filferro que permeti lligar cordes a les arestes.

12. Materials per a la construcció de políedres de Nathan

Aquest material consisteix en un seguit de tiges i nusos de plàstic que permeten construir amb facilitat tot tipus de políedres, i especialment els regulars, els arquimedians i algunes estrelles. És més àgil i consistent, però anàleg, que el de les canyes de refresc i els neteja-pipes, que resulten potser massa efímeres. Té l'inconvenient de ser car i, fins a cert punt, fràgil. Presenta l'avantatge d'aconseguir figures "transparents" que permeten l'accés al seu interior.

13. Desenvolupaments plans

Els desenvolupaments plans fets amb paper o amb Creator pels mateixos alumnes els ajudaran molt en el càlcul d'àrees de figures tridimensionals, a la vegada que els farà millorar la comprensió de "l'estructura" d'aquests cossos.

14. Immersió d'objectes en aigua

L'estimació de volums es fa més difícil que la d'àrees. Una possibilitat interessant, el desenvolupament de la qual caldria pactar amb el departament de ciències experimentals, consisteix a submergir objectes en aigua i calcular els volums desplaçats.

III) En l'àmbit general

15. Creator

Es tracta d'un material amb excel·lents possibilitats, molt suggestiu per a l'alumnat consistent en unes peces de plàstic en forma de triangles equilàters, quadrats, pentàgons i hexàgons que es poden connectar entre elles. N'existeix una versió més precisa i amb més possibilitats, anomenada Polydron, que resulta, però, molt més cara perquè és d'importació.

Potser l'únic que es pot trobar a faltar a l'hora d'usar aquest material és que no presenti altres peces que no siguin triangles equilàters, quadrats, pentàgons i hexàgons.

El material és àgil, resistent i molt bo per al treball amb políedres regulars, políedres arquimedians i políedres irregulars, pavimentacions del pla, polígons regulars, triangulacions, teorema d'Euler al pla, desenvolupaments plans, etc. De fet, és més interessant per a l'espai que per al pla.

16. Representacions a escala

Cal tenir en compte que el treball amb representacions a escala és molt important de cara a la resolució de problemes reals d'àrees i volums. Es poden calcular àrees (i volums, si és necessari i, a més, es tenen dades sobre les altures o si es té l'alçat) de pisos, locals, piscines, aules, edificis, termes municipals, territoris, parcs naturals, països, etc.

17. Instruments de mesura

L'ús d'instruments de mesura és molt recomanable en multitud de problemes. Cal pensar

a fer servir cintes mètriques, regles mil·limetrats, peus de rei, mesuradors d'infrarojos, etc. Tant per al càlcul d'àrees com de volums.

18. Objectes i situacions de la realitat

A la realitat s'hi troben multitud de materials o situacions per al treball de la geometria. A més de les possibles sortides fora de l'aula que poden oferir excel·lents contextos per al treball geomètric (vegeu el capítol 6), també és possible dur objectes a classe per connectar la realitat amb la geometria. Aquests en són alguns exemples:

- L'espai de l'aula, que en general és un ortòedre, pot oferir bones possibilitats si s'hi afegeixen cintes que ens puguin servir de "rectes".
- Els edificis en general, dels quals se'n poden dur a classe fotografies, croquis o plànols, també poden oferir un camp d'exemples d'interès.
- Tot tipus de capsos, tubs i envasos comercials, que solen portar inscrita la capacitat.
- Els minerals i els seus cristalls.
- Les pilotes de tota mena. Les pilotes de futbol, per exemple, s'obtenen cosint pentàgons i hexàgons, amb la qual cosa s'aconsegueix un políedre arquimedià.
- Els materials de construcció.
- Les tendes de campanya, les monedes, els marcs, etc.

Per al càlcul d'àrees i volums, l'ús d'objectes reals és especialment interessant. S'esmenten aquí alguns d'aquests exemples:

- Esferes: pilotes de tennis i de tennis taula, de futbol i d'handbol, la lluna, la terra i el sol.
- Cilindres: tubs de medicines, envasos de pilotes de tennis, llaunes, canonades, monedes, cigarretes, cilindres de motors, etc.
- Cons: llapis, paperines, cucurutxos de gelat, tendes de campanya, etc.
- Políedres i altres cossos: maons, tetrabrics, capsos diverses, objectes i materials de construcció, baguls, femelles, cargols, l'aula, l'institut, edificis, les piràmides d'Egipte, el Partenó, etc.

3. DOS EXEMPLES

A continuació es presenten dos exemples d'activitats de geometria. La primera fa servir el Creator (vegeu també el capítol 6). La segona, el programa Cabri-Géomètre. Totes dues s'han experimentat a segon cicle de l'ESO.

Exemple 1: POLÍEDRES

Aquest exemple consta d'un seguit d'activitats seqüenciades que poden fer-se en unes tres o quatre sessions de classe. Es tracta d'una activitat a desenvolupar en grups de treball. Els materials necessaris són el Creator i el transportador d'angles.

Després de les activitats proposades per als alumnes, hi ha un conjunt d'explicacions per al professorat per facilitar-ne l'aplicació a l'aula.

1. Construïu políedres emprant les peces de Creator. Compteu el nombre de cares, el nombre de vèrtexs i el nombre d'arestes, i empleneu la taula següent:

NOM DEL POLÍEDRE	NOMBRE DE CARES	NOMBRE DE VÈRTEXS	NOMBRE D'ARESTES

2. Expliqueu el procediment que heu seguit per fer els recomptes demanats. Trobeu una estratègia que us permeti comptar amb seguretat els políedres “complicats”.

3. Feu una descripció senzilla i per escrit dels políedres que heu construït.

4. D'entre els políedres anteriors, quins us sembla que mereixen el qualificatiu de regulars i per què?

5. Si no els teniu tots (són cinc) construïu-los ara i feu una taula com l'anterior només amb aquests políedres:

NOM DEL POLÍEDRE	NOMBRE DE CARES	NOMBRE DE VÈRTEXS	NOMBRE D'ARESTES
TETRÀEDRE			
OCTÀEDRE			
ICOSÀEDRE			
HEXÀEDRE			
DODECÀEDRE			

6. Si no la teniu ja, feu una descripció per escrit dels políedres regulars.

7. Busqueu una relació entre el nombre de cares C , el nombre de vèrtexs V i el nombre d'arestes A dels políedres que us han sortit en els apartats anteriors. Aquesta relació s'anomena fórmula d'Euler, ja que fou aquest matemàtic suís del segle XVIII qui la va introduir.

8. Construïu els prismes que pugueu amb les peces de Creator i mireu si compleixen la relació que heu trobat abans.

9. Podríeu demostrar-la per a tots els prismes? Com podríeu comptar les cares, les arestes i els vèrtexs d'un prisma qualsevol?

10. Construïu les piràmides que pugueu amb les peces de Creator i mireu si compleixen la relació d'Euler.

11. Podríeu demostrar-la per a totes les piràmides? Com podríeu comptar les cares, les arestes i els vèrtexs d'una piràmide qualsevol?

12. Tots els políedres compliran la relació d'Euler? Què opineu i per quin motiu?

13. Empleneu la taula següent:

NOM DEL POLÍEDRE	ANGLES DE LES CARES α_i	SUMA DELS ANGLES A CADA VÈRTEX $\sum \alpha_i$	DEFICIÈNCIA ANGULAR EN UN VÈRTEX $360^\circ - \sum \alpha_i$	NOMBRE DE VÈRTEXS V	SUMA DE LES DEFICIÈNCIES ANGULARS $V(360^\circ - \sum \alpha_i)$
TETRÀEDRE					
OCTÀEDRE	60°	240°	120°	6	720°
ICOSÀEDRE					
HEXÀEDRE					
DODECÀEDRE					

14. Quines conclusions podeu extreure a partir de l'estudi de la taula?

A continuació, s'exposen els comentaris per al professorat referits a aquesta activitat. Cal entendre-ho tot amb certa dosi de flexibilitat, perquè l'alumnat pot ser molt divers.

1. Introducció

Es dóna aquí una versió curta de l'activitat i s'esmenten les possibles ampliacions a l'apartat 4 d'aquests comentaris. En principi es pot fer en 3 o 4 sessions.

Aquesta activitat està pensada perquè es faci, en part, en grups de treball i, en part, individualment.

2. Què es treballa amb aquesta activitat?

1. Nomenclatura i classificació dels políedres.
2. Elements dels políedres.
3. Distinció entre políedre còncau i políedre convex.
4. Políedres regulars.
5. Teorema d'Euler a l'espai.
6. Inducció empírica de lleis. Límits de les conjectures.

3. Comentaris als apartats

Apartats 1, 2 i 3

Aquest primer apartat vol deixar molta llibertat a l'alumnat. No cal partir ni tan sols de la definició de políedre ni de la nomenclatura. Es tracta que experimentin, preferiblement en grups, i que construeixin políedres de manera intuïtiva. La necessitat d'una nomenclatura apareixerà així de forma natural.

Pot ser força interessant demanar-los que descriguin per escrit les figures creades i que els altres grups intentin construir-les amb aquestes dades.

El professor, en qualsevol cas, haurà de fer les precisions necessàries. Inicialment serà bo fer-los veure com s'encaixen les peces correctament, cosa que en general capten amb facilitat.

Pel que fa als recomptes, cal dir que es persegueix l'objectiu que trobin alguna forma segura i fiable de comptar (que no consisteixi a fer servir totes les mans del grup...). Se'ls poden fer els suggeriments següents de forma progressiva:

- i) Quantes cares de cada mena heu fet servir per construir el políedre?
- ii) Quants vèrtexs té cada cara? Quantes cares concorren a cada vèrtex del políedre?
- iii) Quantes arestes té cada cara? A quantes cares és comuna cada aresta?

Així, per exemple, per a un icosaèdre tindran:

i) S'han fet servir 20 triangles equilàters: $C = 20$.

ii) Cada cara té 3 vèrtexs. A cada vèrtex del políedre hi concorren 5 triangles. Per tant:

$$V = (20 \times 3) / 5 = 12$$

iii) Cada cara té 3 arestes. Cada aresta és comuna a 2 cares. Per tant:

$$A = (20 \times 3) / 2 = 30$$

Si el políedre no és regular, hauran d'estudiar el mateix per a cada classe de cares i de vèrtexs si cal. Així, per exemple, per a un cuboctàdre tindran:

i) S'han fet servir 6 quadrats i 8 triangles equilàters. Això dóna $6 + 8 = 14$ cares = C .

ii) Es tenen 6 quadrats amb 4 vèrtexs i 8 triangles amb 3 vèrtexs. A cada vèrtex del políedre hi concorren 4 cares. Per tant:

$$V = [(6 \times 4) + (8 \times 3)] / 4 = 12.$$

iii) Anàlogament:

$$A = [(6 \times 4) + (8 \times 3)] / 2 = 24.$$

A l'activitat poden sortir políedres de tota mena. No tots tindran un nom canònic; en aquests casos els poden batejar a base d'atributs. Per exemple, políedre1: còncav/convex de tantes cares de tal mena i tantes de tal altra, etc.

És probable que surti algun políedre còncav i improbable que en surti cap amb algun forat o que no compleixi el teorema d'Euler. Pot ser que el concepte de cara, de vèrtex, d'aresta, i, fins i tot, el de políedre, trontolli en algun d'aquests casos; això, però, serà molt enriquidor.

Apartats 4, 5 i 6

No es tracta que els alumnes arribin a fer una definició estricta del concepte de políedre regular; es tracta, sobretot, que observin amb atenció les diverses figures que han construït i que seleccionin les que considerin regulars. Es poden suscitar algunes situacions interessants. És possible, per exemple, que considerin el deltàedre de sis cares com a políedre regular. Serà convenient, aleshores, demanar-los que comparin aquest políedre amb l'octàedre i que vegin que el nombre de cares a cada vèrtex no és el mateix en el cas del deltàedre.

La taula amb els noms es pot mantenir amagada fins que es consideri necessari.

Convé que cada grup d'alumnes construeixi i descrigui tots els políedres regulars.

Apartat 7

És convenient que el professor hagi detectat possibles errors de recompte abans de proposar aquest apartat de l'activitat. No és fàcil que, sense ajuda, tots els grups o tots els alumnes arribin a fer la conjectura $C + V = A + 2$. L'ajuda que es pot donar en última instància, si no progressen, és: "sumeu el nombre de cares i el nombre de vèrtexs i observeu el que passa".

És molt important que se'ls faci veure que això només és una conjectura i que, per tant, podria resultar falsa.

Apartats 8, 9, 10 i 11

Amb aquests apartats s'intenta donar plausibilitat a la conjectura feta.

Amb Creator només es poden construir alguns prismes i piràmides; valdria la pena recordar les piràmides obliqües.

Les demostracions per a prismes i piràmides són relativament senzilles, si l'alumnat té en compte l'estructura d'aquests políedres. Tanmateix, però, molt pocs alumnes entendran plenament les demostracions i tampoc tindran gaire clara la necessitat de fer-les. La generalització a un prisma o a una piràmide qualsevol amb bases de n costats és un pas que

comporta un grau d'abstracció que no és a l'abast de tothom. Malgrat tot, aquesta és una bona ocasió per fer les primeres passes en la introducció del raonament deductiu. Aquestes són les proves:

a) Un prisma és un políedre format per dues bases iguals i paral·leles; totes les cares laterals són paral·lelograms. Si les bases són polígons de n costats, el prisma tindrà n cares laterals i els valors de C , V i A són els següents:

$$C = 2 + n \text{ (les dues bases i les } n \text{ cares laterals);}$$

$$V = 2n \text{ (els } n \text{ vèrtexs de la base superior més els } n \text{ de la base inferior);}$$

$$A = 2n + \frac{2n}{2} = 3n \text{ (comptem les } n \text{ arestes de cadascuna de les dues bases més les } 2n \text{ arestes dels paral·lelograms compartides sempre per dues cares).}$$

La relació d'Euler es compleix, doncs, per a qualsevol prisma:

$$C + V = 2 + n + 2n = 2 + 3n = A + 2.$$

b) Una piràmide és un políedre format per una base que és un polígon qualsevol de n costats i totes les cares laterals són triangles. Els valors de C , V i A són els següents:

$$C = 1 + n \text{ (la base i les } n \text{ cares laterals);}$$

$$V = 1 + n \text{ (els } n \text{ vèrtexs de la base i el vèrtex o cim de la piràmide);}$$

$$A = n + \frac{2n}{2} = 2n \text{ (comptem les } n \text{ arestes de cadascuna de les dues bases més les } 2n \text{ arestes laterals dels triangles compartides sempre per dues cares).}$$

Novament constatem, doncs, que la relació d'Euler es compleix per a qualsevol piràmide:

$$C + V = 1 + n + 1 + n = 2 + 2n = A + 2.$$

Apartat 12

A l'apartat 1 poden haver sorgit políedres que no compleixen la relació d'Euler, però això és molt improbable. Cal tenir en compte també que, en principi, l'alumnat tindrà la convicció que el teorema és vàlid per a qualsevol políedre.

Es pot aprofitar l'activitat per presentar-los altres políedres que no hagin vist, entre els quals se n'hi poden incloure alguns que no compleixin el teorema d'Euler. Per exemple:

a) L'estrella octangular que es pot construir amb Creator i que els farà dubtar sobre els conceptes de cara, d'aresta i de vèrtex.

b) Marcs variats: un marc de secció triangular i base plana, un d'anàleg però sense base plana (per exemple, simètric), un marc de secció trapezoïdal (aquests tres no es poden construir amb Creator i caldrà portar-los o dibuixar-los) i un marc de secció rectangular que es pot construir amb Creator. Només el darrer dels marcs compleix el teorema (amb recompte intuïtiu).

c) Dos cubs enganxats per una aresta (el políedre resultant no compleix el teorema).

d) Un cub amb un forat en una cara, però no traspassat, i un cub gran amb un cub petit a sobre d'una de les seves cares. Cap dels dos compleix el teorema.

e) Formes estrellades dels políedres.

Vegeu la taula següent*:

NOM DEL POLÍEDRE	NOMBRE DE CARES	NOMBRE DE VÈRTEXS	NOMBRE D'ARESTES
ESTRELLA OCTANGULAR	8	8	12
MARC DE SECCIÓ TRIANGULAR I BASE PLANA	9	12	20
MARC DE SECCIÓ TRIANGULAR I SENSE BASE PLANA	12	12	24
MARC DE SECCIÓ TRAPEZOÏDAL	16	16	24
MARC DE SECCIÓ RECTANGULAR	10	16	24
CUBS ENGANXATS PER UNA ARESTA	10	16	23
CUB AMB CLOT CÚBIC EN UNA CARA	11	16	24
CUB GRAN AMB UN CUB PETIT SOBRE UNA DE LES CARES	11	16	24
PETIT DODECÀEDRE ESTRELLAT	12	12	30
GRAN DODECÀEDRE ESTRELLAT	12	20	30
GRAN DODECÀEDRE	12	12	30
GRAN ICOSÀEDRE	20	12	30

(*) En alguns casos es fa servir el concepte intuïtiu de cara, vèrtex i aresta que poden tenir els alumnes, sense aprofundir en consideracions topològiques ni entrar en el concepte de símplex, que estaria fora de l'abast d'aquestes sessions.

La conclusió de l'apartat passa per veure els límits de la conjectura feta a 7. Per no complicar-ho es pot dir que el teorema d'Euler és vàlid per als políedres convexos.

Apartats 13 i 14

En aquests apartats es recupera el treball amb angles de les activitats de geometria plana.

Els políedres que compleixen el teorema d'Euler sempre donaran una deficiència angular de 720° . Es pot demostrar que aquestes dues condicions són equivalents, però potser això estarà fora de les possibilitats dels nostres alumnes. Se'n dona aquí la demostració per si es considera interessant exposar-la:

Considereu un políedre convex de C cares, V vèrtexs i A arestes.

La deficiència angular D total serà igual a 360° pel nombre de vèrtexs, menys la suma dels angles de totes les cares:

$$D = (V \cdot 360^\circ) - (\text{suma dels angles de totes les cares})$$

Es calcula aquesta darrera suma:

Cara 1: polígon de x_1 costats; suma dels angles de la cara 1 = $(x_1 - 2) \cdot 180^\circ$

Cara 2: polígon de x_2 costats; suma dels angles de la cara 2 = $(x_2 - 2) \cdot 180^\circ$

.....

.....

.....

Cara C : polígon de x_C costats; suma dels angles de la cara C = $(x_C - 2) \cdot 180^\circ$

Si se suma tot, s'obtindrà la suma dels angles de totes les cares:

$$\begin{aligned} S &= (x_1 - 2) \cdot 180^\circ + (x_2 - 2) \cdot 180^\circ + \dots + (x_C - 2) \cdot 180^\circ = \\ &= (x_1 + x_2 + \dots + x_C) \cdot 180^\circ - 2 \cdot 180^\circ \cdot C = 2 \cdot A \cdot 180^\circ - 2 \cdot 180^\circ \cdot C = 360^\circ \cdot (A - C) \end{aligned}$$

(ja que $x_1 + x_2 + \dots + x_C = 2 \cdot A$, en ser cada costat comú a dues cares)

Ara es pot calcular la deficiència angular total:

$$D = 360^\circ \cdot V - [360^\circ (A - C)] = 360^\circ \cdot [C + V - A]$$

Si un políedre compleix el teorema d'Euler $[C + V - A] = 2$ i $D = 720^\circ$ i, reciprocament, si $D = 720^\circ$, per força $[C + V - A] = 2$ i el políedre complirà el teorema d'Euler.

Si es considera convenient fer la demostració, abans caldrà que omplin la taula, preferentment amb políedres convexos que ja hagin sortit en apartats anteriors, tot i que també pot ser interessant incloure'n hi alguns de nous que es puguin construir amb Creator; per exemple, tots els deltàedres, les bipiràmides i alguns políedres arquimedians.

4. Possibles activitats complementàries

Finalment, s'esmenten algunes activitats que es poden fer partint del treball amb Creator, força interessants i que poden servir com a feina a casa o com a base per construir noves activitats o cadenes d'activitats:

- 1) La construcció de tots els deltàedres.
- 2) La construcció de políedres arquimedians i de políedres estrellats.
- 3) Problemes relacionats amb la coloració de les cares dels políedres.
- 4) Estudi de les representacions planes dels políedres.
- 5) Estudi de les seccions del cub.
- 6) Cristal·lografia geomètrica.
- 7) Història dels políedres.

Exemple 2: EFECTES ÒPTICS AMB CABRI

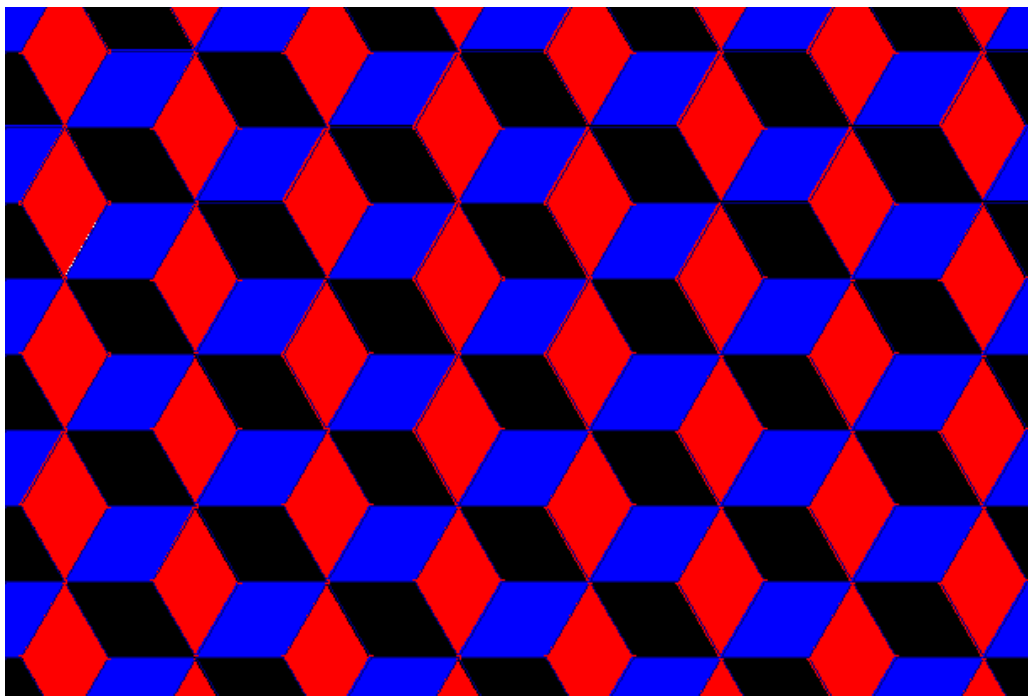
Aquest exemple consta d'un seguit d'activitats de construcció amb el programa Cabri-Géomètre que poden fer-se en unes tres o quatre sessions de classe en funció del domini que tinguin del programa. Es tracta d'una activitat a desenvolupar en grups de dos alumnes a l'aula d'informàtica.

Després de les activitats proposades per als alumnes hi ha un conjunt d'explicacions per al professorat per facilitar-ne l'aplicació a l'aula.

Activitat 1: Una pavimentació del pla o un seguit de cubs?

Estudieu la figura següent i reconstruiu-la amb el programa Cabri-Géomètre. Aquestes preguntes us poden ajudar:

- a) Quins polígons componen el dibuix?
- b) Quines simetries observeu?
- c) Quines d'aquestes simetries podríeu aprofitar per fer la construcció?



Comentaris per a l'activitat 1:

En primer lloc, s'han d'adonar que l'objecte bàsic de la construcció és un rombe construït a partir d'un triangle equilàter per simetria axial.

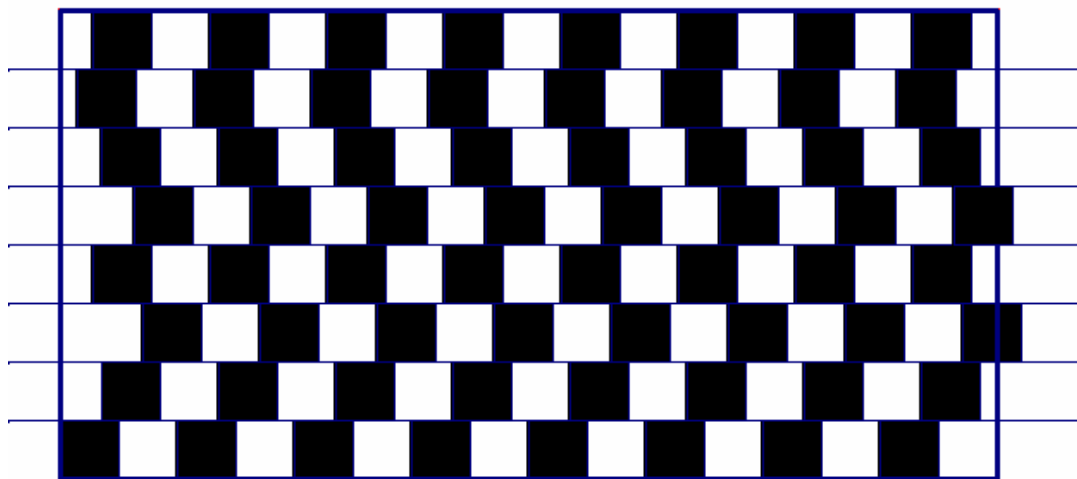
Després poden emprar l'opció simetria (respecte d'un punt) per construir les cadenes de rombes (una per a cada color). Per passar d'una cadena a una altra novament els val l'opció de simetria axial.

Finalment, s'han d'adonar que l'efecte de volum el dona la coloració.

Activitat 2: Rectes paral·leles?

Estudieu la figura següent i reconstruiu-la amb el programa Cabri-Géomètre. Aquestes preguntes us poden ajudar:

- a) Quins polígons apareixen al dibuix? Quines simetries observeu en cadascuna de les files?
- b) Quins moviments podríeu aprofitar per passar d'una fila a una altra?
- c) Per què apareix l'efecte òptic?



Comentaris per a l'activitat 2:

En primer lloc, s'han d'adonar que l'objecte bàsic de la construcció és un quadrat i les rectes que suporten els seus costats inferior i superior.

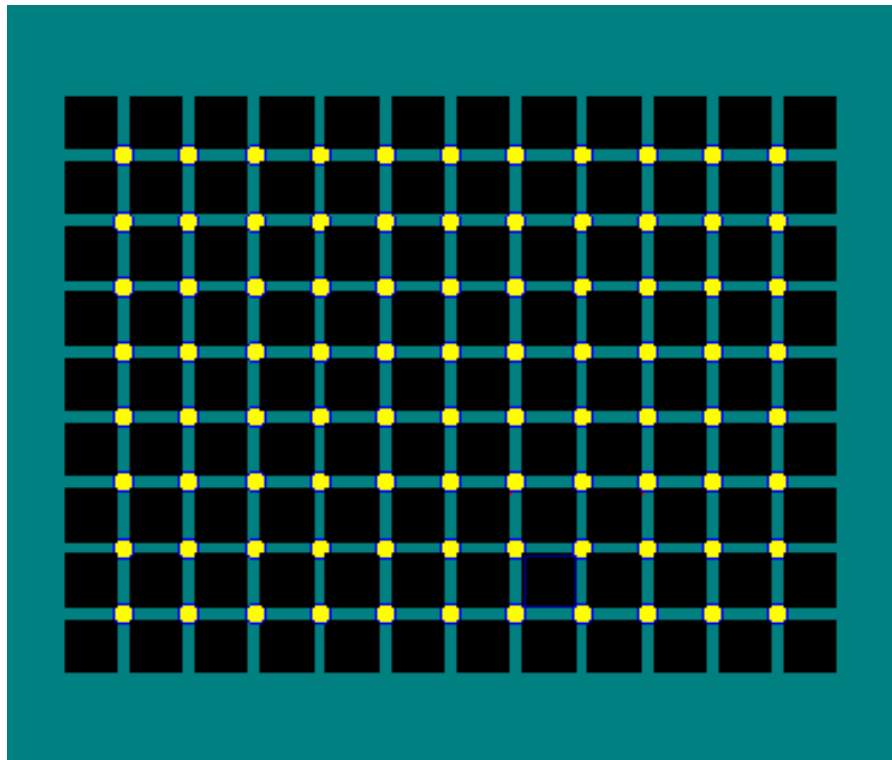
Després poden emprar l'opció simetria axial per construir una de les files de quadrats. La coloració alternativa negre-blanc s'ha de fer després. Per passar d'una fila a una altra poden emprar l'opció translació del menú de moviments amb l'ajut de vectors auxiliars.

Finalment, s'han d'adonar que l'efecte òptic que fa dubtar sobre el paral·lelisme de les rectes el causa la coloració i la disposició esglaonada dels quadrats.

Activitat 3: Punts negres o punts grocs?

Estudieu la figura següent i reconstruiu-la amb el programa Cabri-Géomètre. Aquestes preguntes us poden ajudar:

- a) Quins polígons i quines figures apareixen al dibuix? Quines simetries observeu en cadascuna de les files i de les columnes?
- b) Quins moviments podríeu aprofitar per passar d'una fila a una altra i d'una columna a una altra?
- c) Per què apareix l'efecte òptic?



Comentaris per a l'activitat 3:

En primer lloc, s'han d'adonar que els objectes bàsics de la construcció són un quadrat i un cercle.

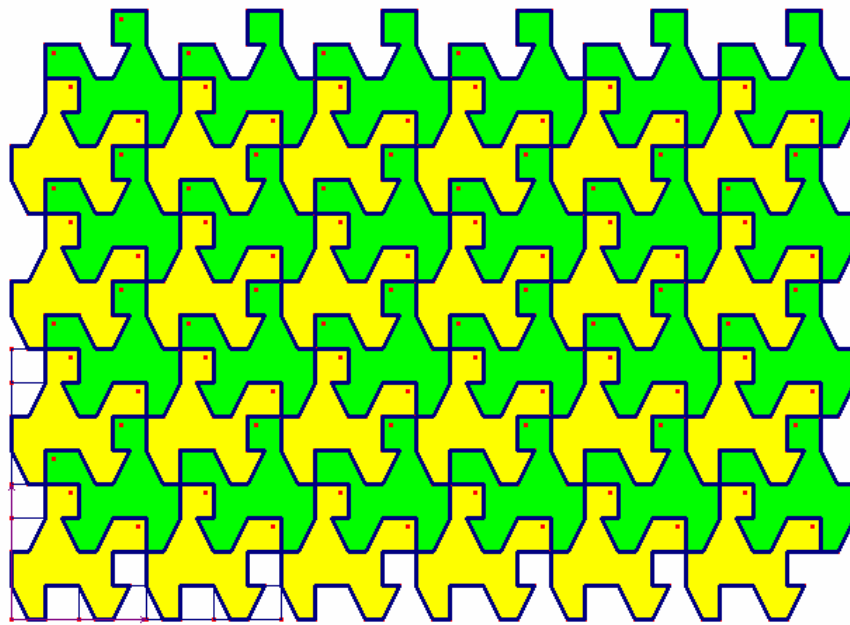
Després poden emprar l'opció simetria respecte d'un punt (el centre del cercle) per construir una de les diagonals de quadrats i de cercles. La coloració del rectangle marc s'ha de fer abans per evitar que ocultí tots els quadrats i tots els cercles. Per completar les files i les columnes poden emprar l'opció translació del menú de moviments amb l'ajut de vectors auxiliars.

Finalment, s'han d'adonar que l'efecte òptic el causa la coloració i la disposició dels cercles i dels quadrats.

Activitat 4: Els genets d'Escher, van o vénen?

Estudieu la figura següent i reconstruiu-la amb el programa Cabri-Géomètre. Aquestes preguntes us poden ajudar:

- Quines són les característiques dels polígons que configuren un genet groc? I un de verd? Quines simetries observeu?
- Quins moviments podríeu aprofitar per passar d'un genet groc-fila a una altre genet groc-fila? I d'un genet groc-columna a un altre genet groc-columna?



Comentaris per a l'activitat 4:

La quadrícula que es presenta a la part inferior esquerra de la figura els ha d'ajudar a construir el polígon que defineix el genet groc. Un cop construït un dels genets, poden observar també els vectors que hi ha a la quadrícula i aplicar translacions per obtenir totes les famílies de genets grocs. Els genets verds apareixen com a figures complementàries. Si els volen colorar, els han de redefinir com a polígons. Els ulls dels genets i dels cavalls s'han de construir amb l'opció punt sobre les diagonals del quadradets que esquematitzen els caps.

CAPÍTOL 12: LA MOTIVACIÓ I LA DIVERSITAT A LES CLASSES DE MATEMÀTIQUES

La possibilitat de democratitzar l'ensenyament de les matemàtiques, de fer possibles unes matemàtiques escolars per a tots, és un dels reptes més grans que afrontem els professionals de l'ensenyament. Si es perpetua la idea que les matemàtiques són una disciplina reservada només per a algunes persones, difícilment podrem motivar percentatges significatius de l'alumnat. Ara mateix, a les aules de secundària tenim una gran diversitat d'alumnes amb interessos i motivacions molt diferenciades i sovint, les estratègies tradicionals no es poden aplicar amb èxit. En aquest capítol s'analitza la situació actual en aquest àmbit i es proposen estratègies de millora.

1. INTRODUCCIÓ I REFLEXIONS PRÈVIES

Les societats modernes i democràtiques han començat a treballar arreu del món per aconseguir que les matemàtiques deixin de ser considerades com una disciplina reservada a unes minories (vegeu també l'apartat 2 del capítol 2). Les matemàtiques s'han fet obligatòries fins arribar a etapes força avançades dels sistemes educatius i en els desplegaments curriculars s'observen esforços per transposar les matemàtiques necessàries per a la vida quotidiana al món escolar. Paradoxalment, però, les matemàtiques escolars encara mantenen un estatus selectiu i, en més d'una ocasió, els programes reals que es treballen a les aules s'assemblen molt als de fa trenta anys.

D'altra banda, cal deixar clar que aquesta feina de democratització no correspon únicament al professorat, és una feina de tota la societat. Això sí, els professionals de l'ensenyament hi tenim una responsabilitat especial i és el moment de preguntar-nos què podem fer des de la nostra aula. Els professors i les professores de matemàtiques sabem que és possible motivar alguns nois i algunes noies per a l'activitat matemàtica. El problema és com podem aconseguir que els motivats no siguin una minoria sinó un sector ampli de l'alumnat. Com ens diu el professor A. Antibí¹⁰⁹, la vertadera missió del professorat de matemàtiques és:

“Aportar la major quantitat possible de coneixements a la major quantitat possible de persones.”

La tasca no serà senzilla. Alguns sectors de l'alumnat no estan motivats per a l'activitat matemàtica perquè pensen que no els seran de cap utilitat de cara a la incorporació al mercat laboral. D'altres han perdut el fil de l'activitat matemàtica en algun curs de primària i no l'han recuperat mai més. Aquests sectors de l'alumnat, que en molts centres poden ser força significatius, no se n'adonen que sense unes mínimes capacitats matemàtiques tindran problemes en moltes situacions de la vida adulta. No se n'adonen que sense unes competències matemàtiques bàsiques, seran més manipulables i menys lliures.

Molts autors consideren que totes les persones poden aprendre unes matemàtiques bàsiques fins i tot de manera plaent. Citem novament Antibí¹¹⁰:

“Estic convençut que tots els alumnes, en el nivell que els correspon, poden tenir el plaer de fer matemàtiques.”

(109 i 110) ANTIBÍ, A. *La constante macabra, o cómo se ha desmotivado a muchos estudiantes*. Madrid, El Rompecabezas, 2005.

Tot plegat és fàcil de dir i difícil de dur a terme, perquè recuperar aquests sectors que han perdut el contacte formatiu amb les matemàtiques és més difícil que començar de zero. Com s'ha comentat al capítol 2, la imatge negativa que es té de les matemàtiques es reforça sovint des de l'àmbit familiar i, per tot plegat, la dificultat que el professorat afronta per motivar segons quins alumnes és molt gran.

2. ELS RESULTATS A L'ÀMBIT DE MATEMÀTIQUES A LES PROVES DE COMPETÈNCIES BÀSIQUES EN RELACIÓ ALS FACTORS D'HÀBITAT I DE NIVELL SOCIOECONÒMIC

Els documents¹¹¹ que recullen els resultats de les proves d'avaluació externa de les competències bàsiques assolides per l'alumnat als 14 anys de 2002 i de 2004 presenten un interessant estudi dels resultats de cada competència amb relació als factors hàbitat i nivell socioeconòmic. A les conclusions del document publicat el 2003 hi ha una breu explicació d'aquests resultats:

“Hi ha hagut diferència de resultats segons l'hàbitat on s'ubiquen els centres. En general, l'alumnat de poblacions de més de 100.000 habitants ha obtingut resultats més alts, tot i que les diferències són poc significatives. Pel que fa a les diferències de resultats segons el nivell socioeconòmic de les zones on s'ubiquen els centres, s'han donat en totes les competències.”

En el document de 2004 hi ha algunes apreciacions més (la primera és general i les altres dues específiques de l'àmbit matemàtic):

“Pel que fa als resultats per sectors de població, cal dir que els centres situats en poblacions d'entre 1.000 i 10.000 habitants han experimentat una millora de resultats en relació amb l'estudi anterior. Quant als resultats per nivell socioeconòmic no hi ha diferències significatives en l'expressió oral en llengua catalana ni en la identificació dels elements més habituals de les TIC.”

“Pel que fa a l'hàbitat, els percentatges d'encert de l'alumnat en cada competència són similars en el conjunt d'alumnes de poblacions amb més de 100.000 habitants i de poblacions d'entre 1.000 i 10.000 habitants. No s'observen diferències significatives entre els percentatges d'encert en cada hàbitat en les competències que fan referència a l'ús de tècniques i convencions i del llenguatge de la representació geomètrica (M2), així com a la utilització de les unitats de mesura (M3).”

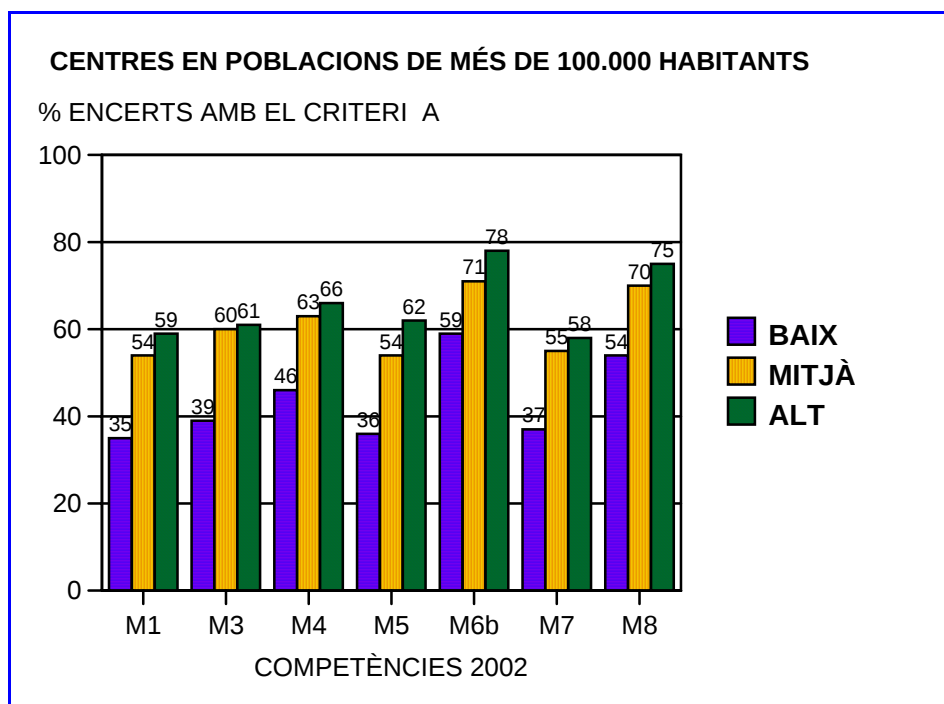
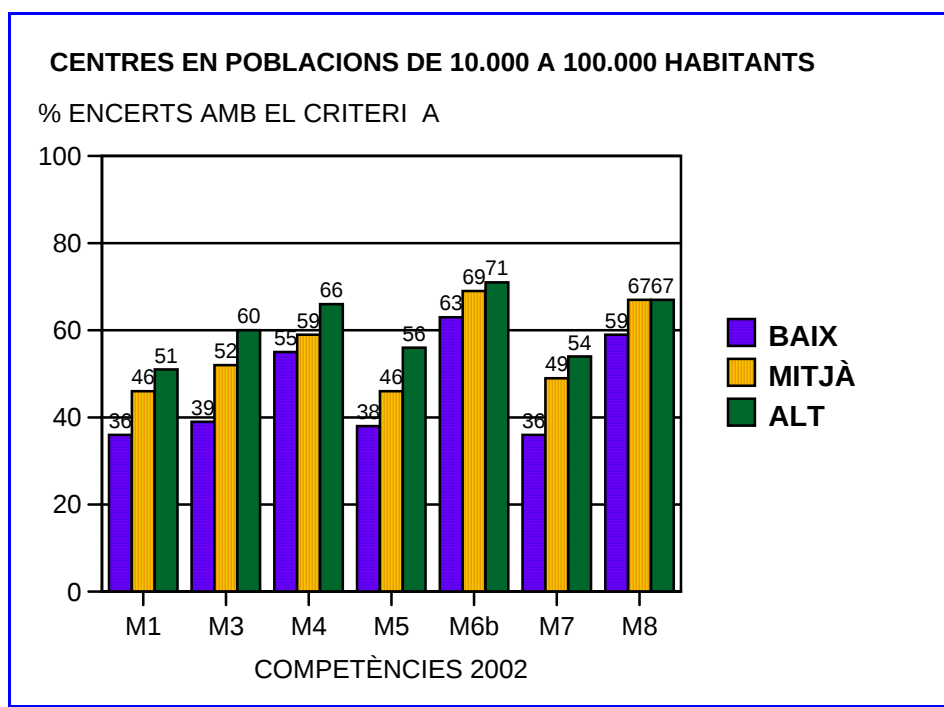
“Pel que fa a les diferències de resultats segons el nivell socioeconòmic de les zones on hi ha situats els centres, constatem que s'han donat d'una manera més significativa entre els tres nivells en la M4 (Usar amb propietat instruments i tècniques per dibuixar, mesurar i calcular) i en la M8 (Reconèixer i interpretar gràficament relacions senzilles de dependència funcional existents entre conjunts de dades d'ús quotidià). En els altres casos hi ha un acostament de resultats entre el nivell socioeconòmic alt i el mitjà.”

Tot i que els comentaris són interessants, s'ha de considerar que són molt breus i que no s'aturen a analitzar amb certa profunditat la situació. Potser val la pena fixar-s'hi amb més deteniment i fer una comparació global de les competències estudiades per veure l'impacte del nivell socioeconòmic sobre els resultats en matemàtiques. Això és el que s'intenta fer a continuació; en primer lloc, a partir de l'informe de 2003 i a continuació, amb el de 2004.

(111) Elaborat a partir dels documents: *Competències bàsiques ESO. Primer cicle. Proves d'avaluació. Síntesi de resultats*. Generalitat de Catalunya. Departament d'Ensenyament, 2003 i *Competències bàsiques ESO. Primer cicle. Proves d'avaluació. Síntesi de resultats*. Generalitat de Catalunya. Departament d'Educació, 2004.

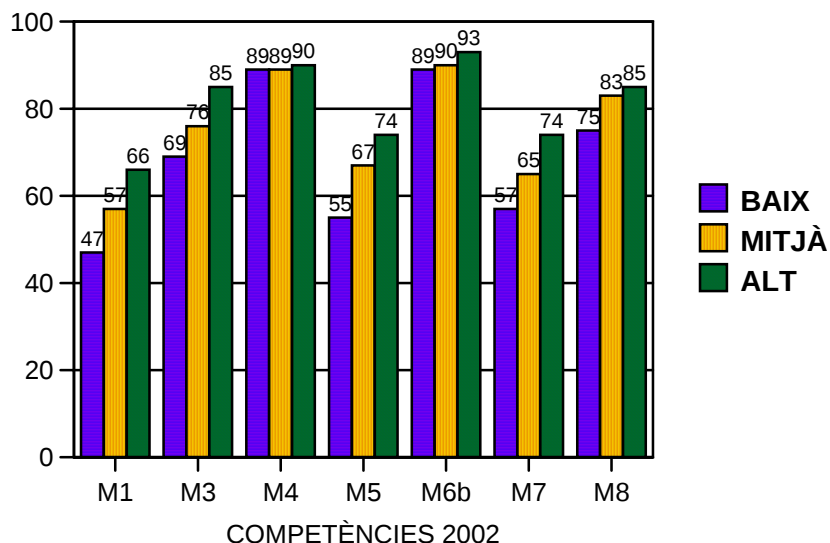
GRÀFIQUES CORRESPONENTS AL 2002

Les quatre gràfiques següents s'han elaborat a partir de les dades de l'informe de 2003 i presenten els percentatges d'encert obtinguts en cadascuna de les set competències estudiades en relació al nivell socioeconòmic (se'n consideren tres: baix, mitjà i alt) i a l'habitat (poblacions entre 10.000 i 100.000 habitants i poblacions amb més de 100.000 habitants). Es distingeix també entre els criteris d'assoliment A i B que fixa l'estudi.



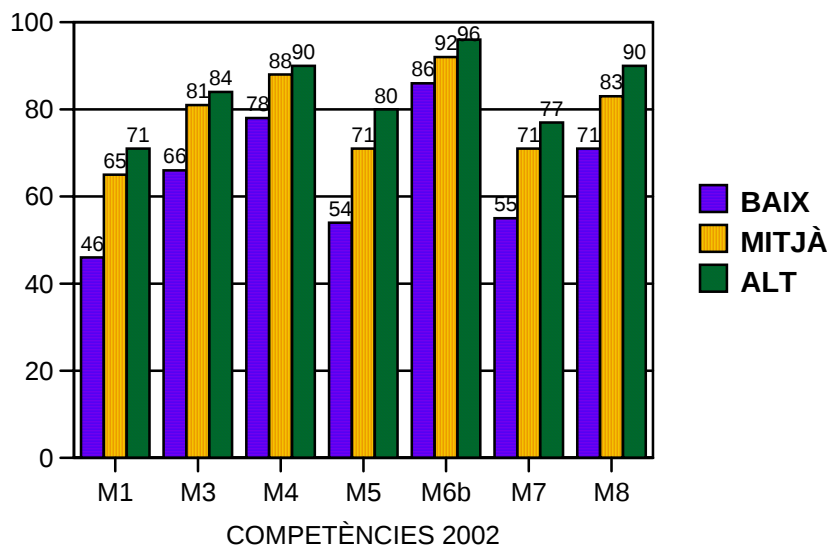
CENTRES EN POBLACIONS DE 10.000 A 100.000 HABITANTS

% ENCERTS AMB EL CRITERI B



CENTRES EN POBLACIONS DE MÉS DE 100.000 HABITANTS

% ENCERTS AMB EL CRITERI B



Notes:

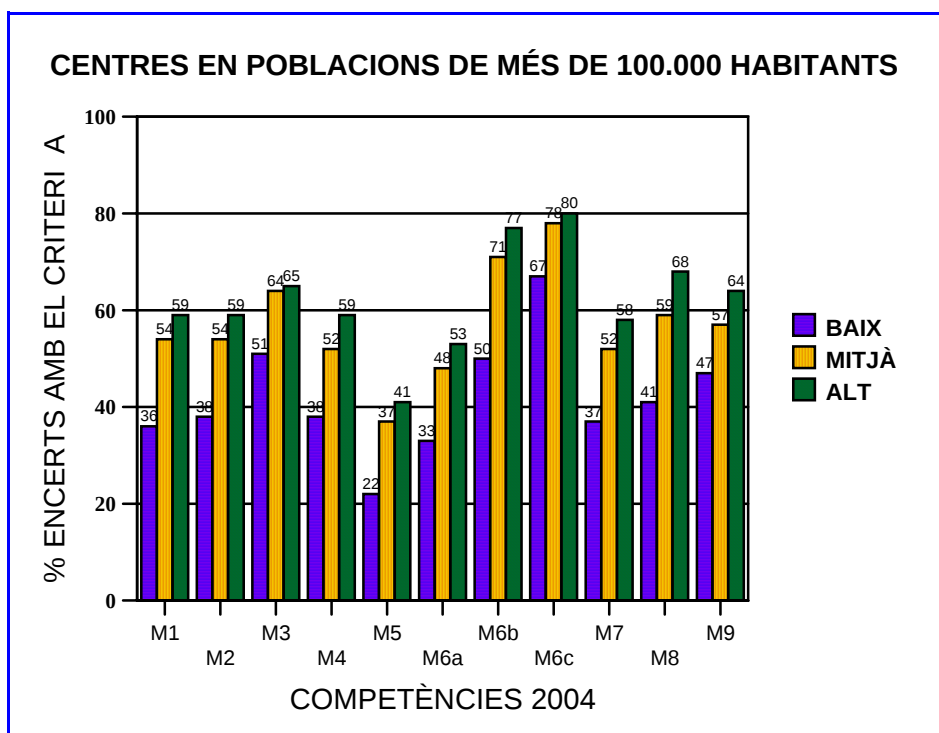
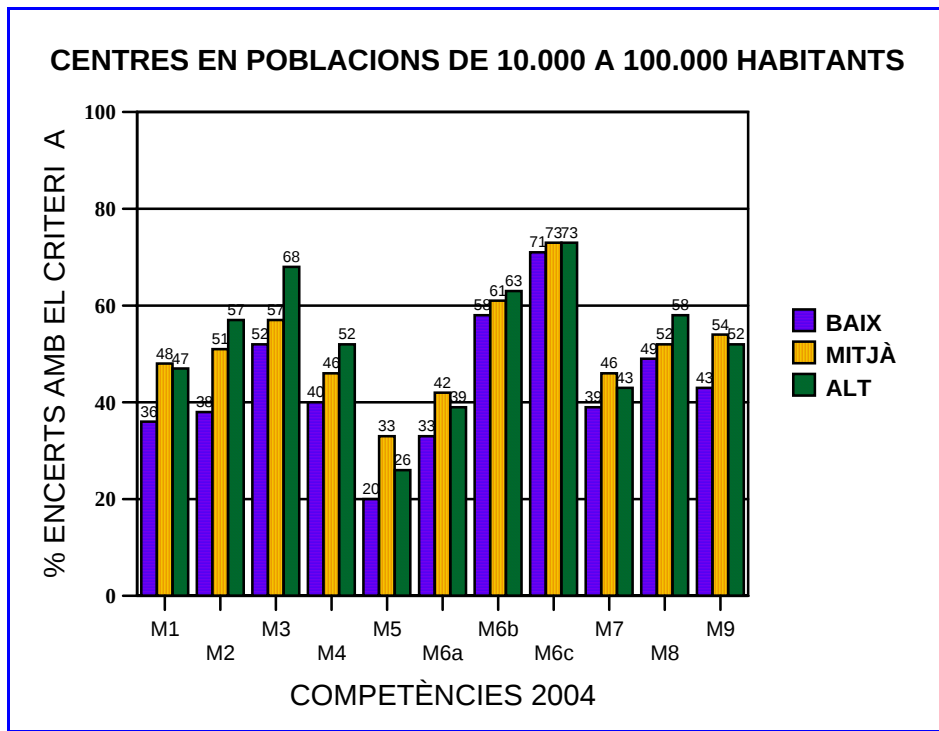
1. Les 4 gràfiques es refereixen a les 7 competències de l'àmbit matemàtic estudiades el 2002. [M1: Aplicar el coneixement del sistema de numeració decimal i de les operacions per comparar, relacionar nombres i operar amb rapidesa, buscant segons la situació un resultat exacte o aproximat; M3: Emprar amb precisió i criteri les unitats de mesura; M4: Usar amb propietat instruments i tècniques per dibuixar, mesurar i calcular; M5: Planificar i seguir estratègies de resolució de problemes i modificar-les si no es mostren prou eficaces; M6b: Usar i interpretar llenguatge matemàtic (representacions gràfiques) per descriure fenòmens habituals; M7: Interpretar la funció que fan els nombres quan apareixen en un context real (expressar quantitat, identificació, temps, mesura, intervals) i usar-los d'acord amb les seves característiques; M8: Reconèixer i interpretar gràficament relacions senzilles de dependència funcional existents entre conjunts de dades d'ús quotidià, en particular en casos de proporcionalitat directa.]

2. Es consideren tres nivells socioeconòmics: baix, mitjà i alt.

3. Les dues primeres gràfiques s'han elaborat amb el criteri A de superació de les competències (superació del 65% dels ítems considerats). Les altres dues gràfiques es refereixen al criteri B (superació del 50% dels ítems considerats).

GRÀFIQUES CORRESPONENTS AL 2004

Les dues gràfiques següents s'han elaborat a partir de les dades de l'informe de 2004 i presenten els percentatges d'encert obtinguts en cadascuna de les nou competències estudiades en relació al nivell socioeconòmic (se'n consideren tres: baix, mitjà i alt) i a l'habitat (poblacions entre 10.000 i 100.000 habitants i poblacions amb més de 100.000 habitants). Només es distingeix el criteri d'assoliment A.



Notes referents a les gràfiques:

1. Les 2 gràfiques es refereixen a les 9 competències de l'àmbit matemàtic estudiades el 2004. En relació al 2002 s'hi han afegit les competències: M8 = Reconèixer i interpretar gràficament relacions senzilles de dependència funcional existents entre conjunts de dades d'ús quotidià, en particular en casos de proporcionalitat directa i M9= Comparar la factibilitat de fets aleatoris en situacions simples.
2. Com en el 2002, es consideren tres nivells socioeconòmics: baix, mitjà i alt.
3. Les dues gràfiques s'han elaborat amb el criteri A de superació de les competències (superació del 65% dels ítems considerats).

L'observació de les gràfiques anteriors permet extreure algunes conclusions:

1. Les diferències entre el nivell socioeconòmic alt i el mitjà no són gaire significatives. En canvi, hi ha un salt important quan es passa al nivell socioeconòmic baix.
2. El factor hàbitat (la dimensió de la població) no té gran transcendència en els resultats.
3. Es pot afirmar que el nivell socioeconòmic baix és determinant per al no-assoliment de les competències bàsiques en matemàtiques
4. El problema de l'alumnat de nivell socioeconòmic baix, que ja s'observa a l'informe referent a les proves de 2002, torna a aparèixer el 2004. Cal pensar, doncs, que les estratègies per atendre els alumnes amb dificultats d'aprenentatge o de conducta no van tenir l'efecte desitjat.

Els problemes de formació matemàtica bàsica, doncs, afecten de forma especialment colpidora els sectors més desafavorits de la societat. Caldria, per tant, concentrar els esforços en aquest sector de la població. Ens hem de preguntar quins instruments de motivació i quines estratègies metodològiques i organitzatives poden permetre la disminució d'aquestes diferències.

3. POSSIBLES ESTRATÈGIES

Per a l'alumnat que no té dificultats d'aprenentatge de les matemàtiques o que ja que ja hi té certa predisposició positiva, disposem d'excel·lents recursos externs per poder millorar la seva motivació. Així, les proves Cangur, les del Fem Matemàtiques, les proves de Problemes a l'esprint, les Olimpíades Matemàtiques, les jornades que organitzen diverses institucions, els concursos de fotografia matemàtica, els concursos de cartells, etc. són poderosos instruments per estimular aquest sector de l'alumnat. També és relativament senzill captar aquests alumnes amb activitats de centre: concursos interns, projectes i treballs de recerca, gimcanes matemàtiques, etc. Amb tot, serà des de la nostra aula i amb el treball que hi fem dia a dia com els podrem presentar unes matemàtiques atractives amb més nitidesa.

La majoria dels recursos que s'han esmentat als capítols anteriors -com ara l'ús de la història de les matemàtiques, el treball amb materials, l'ús de recursos informàtics, etc.- són d'aplicació a aquests alumnes i també als alumnes que tinguin dificultats específiques amb les matemàtiques. Amb els sectors de l'alumnat amb greus dificultats per a l'aprenentatge de les matemàtiques, però, aquests recursos, tot i ser interessants, poden no ser suficients. Aquí la clau pot trobar-se en el factor d'èxit i en el factor d'utilitat professional: d'una banda hem de pensar que el fracàs reiterat en la matèria porta a la desmotivació i fins i tot a l'aversion; d'altra banda, si es tracta de sectors de l'alumnat que pretenen accedir al mercat laboral amb la màxima rapidesa, no mostraran cap interès per aspectes dels programes educatius que estiguin pensats essencialment per a l'accés a cursos de nivell superior. Aquesta situació específica pot afectar grups molt importants d'alumnes i es concentren en el sectors de població amb menys recursos.

Tenint en compte que l'èxit és un dels factors clau de motivació de l'alumnat cal proposar tasques adequades a les capacitats de cada alumne. En molts casos, això pot comportar un allunyament

considerable del currículum establert en cada curs i resulta difícil d'entendre des de la perspectiva tradicional de l'ensenyament. Tancar el ulls i seguir amb els programes habituals sense atendre aquests sectors de l'alumnat, però, no ens conduirà gaire lluny. De fet, és previsible que aquests nois i noies, desmotivats i desvinculats de l'activitat a l'aula, provoquin tota mena de problemes i que dificultin o que impedeixin el treball dels altres.

Aquesta adequació de les activitats a l'aula a les capacitats reals dels nois i de les noies (i no a les previstes a la llei en funció de l'edat de l'alumnat) comporta també diversificar i flexibilitzar els criteris d'avaluació (vegeu el capítol 13). Només si tenen possibilitats d'èxit en l'avaluació sumativa serà possible una motivació real.

Hi ha diversos instruments i estructures organitzatives que ens poden ajudar a aconseguir atendre aquesta diversitat de ritmes en l'aprenentatge de les matemàtiques: desdoblaments dels grups i reducció del nombre d'alumnes, establiment de grups flexibles, presència de dos professors o professores a la mateixa aula, distribució de feines per nivells, establiment d'adaptacions del currículum, etc.

Personalment he pogut experimentar l'establiment de grups flexibles (tots els alumnes fan classe de matemàtiques a la mateixa hora i es distribueixen per nivells d'aprenentatge amb flexibilitat, és a dir, amb la possibilitat de passar d'un grup a un altre en funció dels resultats d'aprenentatge) amb resultats positius. Convé, però, fer algunes precisions:

1. Ha de ser realment possible passar d'un grup a un altre. Això demana un treball coordinat de tot el professorat i una bona acció tutorial que tingui ben presents les opinions dels alumnes i dels pares.
2. A primer i a segon d'ESO, convé basar el treball en tots els grups en el currículum prescrit -tractat, però, amb diversos graus de dificultat- per facilitar precisament el pas d'un grup a un altre i permetre a aquells nois i noies que volen seguir estudis després de la secundària obligatòria retornar al currículum prescrit després d'estades eventuais en grups d'alumnat amb dificultats d'aprenentatge.
3. A tercer i quart d'ESO, els sectors de l'alumnat que tinguin molt clara la seva futura trajectòria laboral poden accedir als grups flexibles més adequats als seus objectius. Amb els sectors d'alumnes amb importants dificultats d'aprenentatge de les matemàtiques sembla recomanable treballar fonamentalment les competències bàsiques (vegeu el capítol 9) des d'una perspectiva d'inserció en el món laboral.

Tot i l'establiment de grups flexibles, a classe encara trobarem una gran diversitat d'alumnes amb una gran diversitat d'interessos i de motivacions. Per tant, ens calen, a més, estratègies específiques per a l'aula que permetin millorar la motivació de l'alumnat. Aquestes en són algunes:

1. Atenció individual

És imprescindible que el professorat conegui el cas de cada alumne i que l'alumne se senti atès individualment. Amb molts alumnes a classe això és, certament, molt difícil i les estratègies organitzatives que permetin reduir en nombre d'alumnes són essencials des d'aquesta perspectiva. En qualsevol cas, el professorat ha de procurar fer preguntes individualitzades, ha d'encarregar exercicis i treballs específics i ha de dedicar estones a atendre els alumnes individualment. Aquesta és, probablement, la més important de les accions que ha d'emprendre el professorat en aquest àmbit i es pot dur a terme en els moments en què es plantegen exercicis, problemes o activitats. És el moment idoni per passejar per l'aula i veure com treballa cada alumne individualment, és el moment de fer-los preguntes, d'esbrinar quines dificultats tenen, de saber què pensen de l'activitat matemàtica i d'estudiar què es pot fer per millorar el seu nivell de motivació. Les sortides a la pissarra

també són bones ocasions per al treball individual, tot i que en tenir menys intimitat, correm el risc que no surti tota la realitat de l'alumne.

2. Treball cooperatiu

El treball en grup pot ajudar a motivar alguns alumnes que habitualment quedin fora de l'activitat matemàtica. El professorat ha de promoure activitats en petits grups o en parelles i valorar i premiar la capacitat de col·laboració de l'alumnat.

3. Diversificació dels instruments d'actuació a classe

És possible que alguns sectors de l'alumnat se sentin atrets per unes formes de comunicació i d'interacció i que d'altres les rebutgin. Per això mateix, la diversificació dels instruments d'actuació i de comunicació a classe ha de permetre que els estímuls positius arribin a la majoria dels nois i de les noies. La utilització d'instruments per valorar les emocions (vegeu el capítol 4) ha de servir perquè el professor o la professora tinguin coneixement de les situacions més motivadores per a l'alumnat.

4. Diversificació dels materials de treball

De manera similar, alguns materials poden ser instruments atractius i motivadors per a alguns alumnes i no per a d'altres. Cal doncs, alternar-los per atreure tants alumnes com sigui possible a les activitats de la classe.

5. Diversificació del currículum

La tendència dels llibres de text i del professorat a fer blocs temàtics llargs pot resultar negativa per a la motivació d'alguns alumnes que tinguin dificultats específiques amb algun dels aspectes del temari. Correm el risc que aquests alumnes perdin definitivament el fil i que després no hi hagi manera de recuperar-los per a l'activitat matemàtica. És millor, doncs, no fer blocs temàtics massa llargs o alternar els diversos aspectes del currículum. Així, per exemple, de les tres classes setmanals, en podem dedicar una al treball amb ordinador a l'aula d'informàtica, una a l'àmbit numèric i al treball de rutines i l'altra a la resolució de problemes.

6. Treballar amb petits projectes

El treball amb projectes (vegeu l'apartat 2 del capítol 6) pot ser un bon instrument de motivació per a alumnes amb dificultats d'aprenentatge de les matemàtiques. Manel Sol i Joaquim Giménez¹¹² han estudiat les possibilitats que ofereixen:

“La relació entre motivació i aprenentatge té un paper crucial en el treball de projectes.”

“L'objectiu dels projectes no és mai conceptual, sempre és procedimental; no és tampoc únicament aplicatiu, sinó que es tracta de complir el cicle de la *modelització* que parteix d'allò que és real i retorna a allò que és real. Això fa que l'alumnat vinculi la matemàtica amb el funcionament i el desenvolupament de la societat i que es prepari per a un desenvolupament professional.”

Aquests autors observen que els projectes contribueixen a desenvolupar l'autonomia de l'alumnat perquè són ells mateixos els qui han de planificar les estratègies, s'han d'organitzar, han de gestionar el temps, etc.

(112) Extret de: SOL, M. i GIMÉNEZ, J. Proyectos matemáticos realistas i resolució de problemas. A GIMÉNEZ, J. [et al.]. *La actividad matemática en el aula*. Graó, Barcelona 2004.

La motivació en l'àmbit de les matemàtiques de nois i de noies tan diversos és sens dubte un repte de gran dificultat. La dificultat, però, no ens ha de fer renunciar. Deixar de banda els alumnes desmotivats és una alternativa desencisadora. Com s'ha vist en aquest capítol, hi ha possibilitats d'organització i estratègies de gestió de les classes que poden permetre recuperar sectors importants de l'alumnat per a l'activitat matemàtica.

CAPÍTOL 13: LA MOTIVACIÓ I L'AVALUACIÓ A L'ÀREA DE MATEMÀTIQUES

El concepte d'avaluació ha canviat profundament en els darrers anys i ja no es veu únicament com un procés en el qual el professorat examina i atorga notes a l'alumnat sinó també com un instrument que permet regular els processos d'ensenyament i d'aprenentatge. En aquest capítol es revisaran les connexions complexes i rellevants que hi ha entre els processos, els instruments i les fases de l'avaluació i la motivació de l'alumnat i del professorat.

1. CONSIDERACIONS GENERALS

En el capítol 2, dedicat a estudiar la imatge de les matemàtiques escolars, hem vist que molts alumnes i moltes alumnes, i també bona part de la societat, associen les matemàtiques a dificultat i selecció. Ja s'ha comentat que aquest lligam té efectes perniciosos en l'aprenentatge perquè produeix bloqueigs que impossibiliten entrar en l'activitat matemàtica. En el centre del problema hi trobem els exàmens de matemàtiques, recurs d'avaluació omnipresent i de vegades l'únic amb què es certifica si hi ha hagut o no aprenentatge. Albert Einstein¹¹³ ens parla de la desmotivació que poden arribar a produir els exàmens:

“Per als exàmens calia embotir-se tot aquell material en el cap, tant si ho volies com si no. Aquesta coacció tenia efectes tan esgarriuosos, que després d'aprovar l'examen final, se'm varen acabar les ganes de pensar en problemes científics durant un any sencer. Cal dir, però, que a Suïssa patíem menys que en molts d'altres llocs sota aquesta coerció que asfixia el vertader impuls científic.
[...] En realitat és gairebé un miracle que els moderns mètodes d'ensenyament no hagin ofegat definitivament la sagrada curiositat de la investigació, ja que, a part d'estímul, aquesta planta delicada necessita sobretot de llibertat, sense la qual es marceix indefectiblement. És un greu error creure que la il·lusió de mirar i cercar es pot fomentar a cop de coacció i sentit del deure. Penso que fins i tot a un animal de presa se'l podria privar de la voracitat si, a punta de fuet, se l'obligués a menjar quan no tingués gana, i sobretot si li triéssim de forma convenient els aliments.”

La cita següent¹¹⁴, va en la mateixa direcció:

“Si les matemàtiques són per a un gran nombre d'alumnes principalment una àrea d'estudi on l'obsessió per als exàmens pesa més que el plaer de comprendre, haurem fracassat en la nostra missió i continuarem provocant somriures quan afirmem que qui es vanagloria de no comprendre res de matemàtiques és un inculte i un vanitos.”

El professor i investigador en ciències de l'educació André Antibí ens parla, en un llibre de recent aparició¹¹⁵, de la tendència, inevitable a l'hora de qualificar, que tots els professors i professores de matemàtiques (i també de moltes altres matèries) tenen per obtenir una perfecta campana de Gauss com a distribució de les notes. Sigui quin sigui el nivell dels alumnes, afirma Antibí, sempre hi ha un nombre constant de suspesos. És el que ell anomena la “constant macabra”.

(113) Cita recollida al llibre: DE GUZMÁN, M. *Para pensar mejor*. Barcelona: Labor, 1991.

(114) Cita d'Hubert Curien (professor honorari de la Universitat Pierre i Marie Curie i exministre d'Investigació a França) extreta del pròleg del llibre: ANTIBÍ, A. *La constante macabra, o cómo se ha desmotivado a muchos estudiantes*. Madrid, El Rompecabezas, 2005.

(115) ANTIBÍ, A. *La constante macabra, o cómo se ha desmotivado a muchos estudiantes*. Madrid, El Rompecabezas, 2005.

Aquest fenomen és molt sovint inconscient en el professorat. Amb l'objectiu d'assolir aquestes distribucions pretesament normals s'observen pràctiques d'avaluació sumativa que el professor Antibí considera desafortunades: posar exàmens molt difícils, o que continguin alguna pregunta molt difícil (així ningú no tindrà un 10), posar exàmens molt llargs que pretenen preguntar absolutament tot allò que s'ha fet a classe, puntuar filant molt prim, descomptar punts per errades (fins arribar a posar notes negatives), pensar els exàmens només per als alumnes més brillants, anar a la recerca del problema "bonic" quan s'està dissenyant un examen, etc. En general, sembla que hi hagi vergonya a aprovar tothom i vergonya a plantejar exàmens fàcils. En canvi, això pot passar a d'altres matèries considerades fàcils sense que ningú no sembli preocupar-se.

D'altra banda, cal tenir en compte que aquest és un paper que la societat demana a l'escola i a les matemàtiques. Si un professor de matemàtiques aprovés tots els seus alumnes, més d'un col·lega i més d'una família el miraria desconfiadament. El professor Antibí explica, que en una tesi de didàctica, es va plantejar a alumnat de l'equivalent al nostre 4t d'ESO i als seus pares la pregunta següent:

"Què pensàrieu d'una classe de matemàtiques en què tots els alumnes treuen una nota superior a 6 (sobre 10)?"

Les respostes van ser colpidores: els alumnes, en general, deien que tal cosa no era possible, que el professor se les arreglaria d'una o d'una altra manera perquè això no passés. Els pares, en canvi, afirmaven que aquest no podia ser un bon professor, que no seria un professional seriós i que denotava que era un demagog.

Hem de concloure, doncs, que bona part dels alumnes i dels pares també juguen a favor del paper selectiu i elitista reservat a les matemàtiques.

De la meua banda, recordo que, a la llicenciatura de matemàtiques, el prestigi d'algunes assignatures es mesurava, fins i tot entre l'alumnat, per la gran dificultat d'aprovar-les i per l'escandalós percentatge de suspesos que tenien. En canvi, les assignatures que pràcticament tothom aprovava no tenien el mateix prestigi i els professors que les impartien no tenien la mateixa consideració que aquells que eren capaços de suspendre el 90% dels seus estudiants. Segons sembla, aquesta paradoxa encara té certa vigència a les nostres universitats. A més, tots els llicenciats i totes les llicenciades que han passat per experiències similars poden tenir la inèrcia de repetir aquest esquema quan es converteixen en professors o en professores de secundària i voler mantenir el prestigi de les matemàtiques a base de suspendre molts alumnes.

L'argument fonamental per mantenir un sistema d'avaluació centrat gairebé exclusivament en els exàmens difícils és que estimulen els alumnes a treballar i a estudiar més i més i que els prepara per als exàmens que no deixaran de tenir més endavant. En canvi, es diu, una matèria fàcil d'aprovar, amb exàmens fàcils, condueix inevitablement els alumnes a no treballar, a relaxar-se.

No deixa de ser curiós que quan les matemàtiques es converteixen en una assignatura optativa les característiques de dificultat, d'omnipresència dels exàmens i d'abundor de suspesos, en general, desapareixen. Es pot conjecturar que això té lloc, en bona part, perquè els alumnes passen a ser vistos com a clients i perquè el programa ja no es considera imprescindible. Potser la cara amable de les matemàtiques només es pot mostrar en les optatives?

Tots els docents sabem per experiència pròpia, però, que la tendència a considerar que una mala nota farà treballar més un alumne no és sempre certa. L'efecte pot ser tot el contrari. Es pot desmotivar l'alumne per sempre.

La feina de desvincular les matemàtiques de la seva aurèola d'assignatura selectiva no correspon únicament al professorat de matemàtiques. És una feina de tota la societat. Evidentment, el primer pas l'hem de fer els professors i les professores de matemàtiques i, de

fet, ja l'estem fent molts professionals. Abans de tot, però, cal prendre consciència del paper selectiu que la societat ha atorgat a les matemàtiques.

2. ORIENTACIONS PER A UNA AVALUACIÓ MOTIVADORA

És possible fer un ús de l'avaluació que contribueixi a motivar i no a desincentivar l'alumnat sense perdre el nivell d'aprenentatge? El repte no és senzill, el camí a seguir, però, sembla prou clar i ens el recorda Claudi Alsina¹¹⁶:

“El gran repte de l'avaluació és, o hauria de ser avui, el d'estimular l'estudiant a saber més, a evitar errors i a formar-se millor”.

D'entrada ens caldrà evitar confondre l'avaluació amb examen i amb l'acte de posar notes i l'avaluació contínua amb els exàmens continuats i recordar que l'objectiu és la millora de l'aprenentatge i la millora de la motivació, no la selecció d'alumnes. És, doncs, imprescindible esforçar-se per crear un clima de confiança i de complicitat amb els aprenents.

L'avaluació inicial, per exemple, a més d'informar el professorat del punt de partida de l'alumnat, pot ser un excel·lent instrument de motivació. La cita següent de Jaume Jorba¹¹⁷ i Ester Casellas ens en parla:

“Nombrosos estudis han palesat que els alumnes que aprenen d'una manera més significativa són aquells que reconeixen què els pretén ensenyar el professorat i de quina manera ho pensa fer [...]. L'apropiació per part dels alumnes dels objectius explicitats per l'ensenyament constitueix una etapa decisiva en cadascun dels petits cicles d'ensenyament-aprenentatge en què s'estructuren les unitats didàctiques en el dispositiu pedagògic.”

Una primera orientació, doncs, és aquesta:

Orientació 1: l'avaluació inicial com a instrument de motivació

Abans d'iniciar una unitat didàctica, i en el marc de l'avaluació inicial, formuleu tan clarament com sigui possible, els objectius d'aprenentatge que perseguim tots plegats (no solament el professor) i mostreu en què consisteix i per a què serveix allò que anem a aprendre.

En l'àmbit de l'avaluació formativa, convé pensar les que les activitats d'avaluació s'han d'integrar en el procés d'aprenentatge i han de permetre que tant el professor com els alumnes siguin capaços de reconèixer els seus encerts, els seus errors i les seves dificultats. Novament citem en Jaume Jorba¹¹⁷ i l'Ester Casellas:

“L'avaluació *formativa*, terme introduït per M.Scriven l'any 1967, es refereix als procediments utilitzats pel professor amb la finalitat d'adaptar el seu procés didàctic als progressos i problemes d'aprenentatge observats en els seus alumnes. Aquest tipus d'avaluació té, doncs, com a finalitat fonamental una funció reguladora del procés d'ensenyament-aprenentatge per tal de possibilitar que els mitjans de formació responguin a les característiques dels estudiants. Tendeix més a identificar quines són les febleses de l'aprenentatge que no pas els resultats assolits amb aquest aprenentatge.”

(116) Cita de Claudi Alsina extreta del pròleg del llibre: ANTIBI, A. *La constante macabra, o cómo se ha desmotivado a muchos estudiantes*. Madrid, El Rompecabezas, 2005.

(117) Extret de: JORBA, J. i CASELLAS, E.: *La regulació i l'autoregulació dels aprenentatges*. I.C.E. de la U.A.B., Barcelona 1996.

“Des de la perspectiva de la seva funció pedagògica, l’avaluació és una peça clau de la regulació del procés d’ensenyament-aprenentatge. Si es vol atendre la diversitat de nivells, d’estils i ritmes d’aprenentatge dels alumnes, el professorat ha de reconèixer a cada moment del procés com progressa l’alumne, quins són els seus èxits i quines són les seves dificultats.”

Aquestes reflexions permeten proposar una segona orientació:

Orientació 2: l’avaluació formativa com a instrument didàctic

En el marc de l’avaluació formativa, cal tenir present que avaluar consisteix a esbrinar les estratègies que fan servir els alumnes per poder-hi incidir, si cal.

D’altra banda, la possibilitat de fer ús de processos d’autoregulació de l’aprenentatge contribuirà a la millora de la responsabilitat i de la motivació de l’alumnat. Una nova cita de Jaume Jorba i d’Ester Caselles¹¹⁷ apunta en aquesta direcció:

“Així, si en l’avaluació formativa la funció reguladora del procés d’aprenentatge és responsabilitat del professor, en l’autoregulació es pretén que els alumnes siguin cada vegada més autònoms, formant-los a la regulació dels seus propis processos de pensament i d’aprenentatge, és a dir, ensenyant-los a aprendre a aprendre.”

Es tracta, doncs, de fer que els alumnes siguin capaços de reconèixer els seus encerts, els seus errors i les seves dificultats.

Orientació 3: l’autoregulació de l’aprenentatge

Els professors i les professores hem de deixar clar que, en última instància, els responsables principals dels processos de control de l’aprenentatge són els mateixos alumnes. Per tal de promoure aquesta presa de consciència es poden proposar activitats que els obliguin a reflexionar sobre els seus aprenentatges, com ara:

- a) Qüestionaris individuals.
- b) Converses en petits grup.
- c) Converses col·lectives.
- d) Intercanvi de llibretes o de fulls de treball per a la detecció d’errors.
- e) Elaboració individual de llistes d’encerts i de llistes d’errades.
- f) Formulació d’objectius d’aprenentatge concrets per part de cada alumne en funció de les dificultats observades.

En l’àmbit de l’avaluació sumativa, la preponderància absoluta dels exàmens com a instruments de qualificació és una altra de les característiques de les matèries de matemàtiques que convindria revisar des de l’òptica de la motivació. Massa sovint es fia tot als exàmens, quan tots sabem que aquests instruments no permeten avaluar tot allò que s’aprèn i que, a més, és inevitable cert grau d’imprecisió a l’hora de redactar les preguntes. Els exàmens porten més a classificar els alumnes que no pas a avaluar-ne l’aprenentatge i per a algunes persones (per exemple, els alumnes o les alumnes que es posen més nerviosos del compte) poden ser els responsables del seu fracàs aparent.

Des d’aquesta perspectiva es proposa una quarta orientació:

Orientació 4: diversificació dels instruments d'avaluació sumativa

Diversificar els instruments d'avaluació sumativa i no centrar-se només en l'ús dels exàmens. Hi ha molts altres instruments que permeten esbrinar si un alumne ha assolit els objectius d'aprenentatge. Aquests en són alguns:

1. Observació de la llibreta de treball o del dossier de treball a classe.

Comentaris:

Si es tria aquest instrument, convé establir pautes per a la seva elaboració. Aquestes pautes han de ser constants al llarg del curs, pactades entre tots els professors, conegudes pels alumnes i s'han de treballar dia a dia.

El més efectiu és elaborar una normativa que precisi com ha de ser la llibreta de treball. Se'n dona un exemple després d'aquest quadre.

Pel que fa al volum de feina i a la incomoditat que aquest instrument pot comportar per al professorat, es pot pensar, per exemple, a observar algunes llibretes a la mateixa aula, mentre els alumnes fan un examen o una activitat que no demani la intervenció immediata del professor, i a puntuar-les només un cop per trimestre.

2. Recollida i correcció d'exercicis

Comentaris:

Els exercicis i els problemes que els alumnes fan a casa poden proporcionar-nos també informació sobre el seu aprenentatge. Per evitar el dubte de si els han fet ells o els han copiat, convé fer-los alguna pregunta oral que ens ho aclareixi. És evident que no podrem saber fins a quin punt els han ajudat, però sí sabrem si hi ha hagut aprenentatge.

El volum de feina que comporta l'ús d'aquest instrument també és important. Amb tot, la recollida a l'atzar d'alguns exercicis els dies que n'hi ha, o fer una ullada i unes preguntes, per exemple en començar la sessió, sobre la feina d'alguns alumnes, o fer sortir a la pissarra a alguns alumnes perquè exposin allò que han fet, és relativament fàcil d'assumir. La recollida sistemàtica amb qualificacions i comentaris és molt més complicada.

La feina que s'encarrega per fer a casa, a més, permet la distribució per nivells de dificultat, amb exercicis de reforç o exercicis d'ampliació.

3. Proves curtes

Comentaris:

Les proves curtes, d'una durada d'uns 15 minuts, es poden emprar per avaluar l'aprenentatge sobre qüestions tècniques o algorísmiques (fer unes operacions, resoldre unes equacions, calcular unes derivades formals, etc.) o també per a la repetició d'un exercici o d'un problema senzill fet a classe o anàleg a un model conegut. Aquestes proves són ideals per fer-ne l'autocorrecció o per fer correccions creuades (cada alumne corregeix la prova d'un company). Aquestes tècniques, com ja s'ha dit, contribueixen a la presa de consciència dels alumnes sobre el seu procés d'aprenentatge.

4. Proves orals

Comentaris:

Hi ha la tendència a fer molt poc treball oral i a no avaluar-lo. El cert és que el treball oral de les matemàtiques és fonamental i que hi ha diverses possibilitats d'avaluar-lo; per exemple, quan un alumne surt a la pissarra, o quan fa una exposició, o quan dona una explicació, o quan intervé en el decurs de sessions col·lectives amb preguntes o amb respostes, o quan es fa càlcul mental. El professor o la professora han de tenir, això sí, un full de registre o algun instrument per poder anotar o recopilar aquestes qualificacions.

5. Observació a l'aula

Comentaris:

Hi ha certes reticències a posar notes en aquest àmbit perquè es considera que és una qualificació molt subjectiva. El cert, és que el criteri professional del professor o de la professora, després d'un bon nombre de classes, sol ser molt encertat i que els exàmens com a instruments objectius per a la determinació de l'aprenentatge tenen també molts punts fluixos. Si volem donar un caràcter més objectiu a l'observació a l'aula, podem prefixar els ítems a observar. Per exemple, en l'àmbit dels procediments i conceptes, ens fixem només ens els objectius didàctics del crèdit o de la unitat didàctica i no en altres objectius que implícitament o explícitament apareguin en les activitats a l'aula; i en l'àmbit dels valors, les actituds i les normes, triem objectius concrets a observar a més dels recollits com a objectius específics del crèdit (així podem observar i puntuar la puntualitat, el bon comportament, les ganes de treballar, la voluntat de col·laborar amb els companys i companyes, el grau d'atenció a les explicacions del professor o dels col·legues, la tenacitat en el treball, etc.).

Els quadrants d'observació, els qüestionaris i la possibilitat de repartir etiquetes segellades i signades pel professor com a bonificacions per una bona intervenció (etiquetes que els alumnes lliuren al professor periòdicament i que aquest recull al seu full de registre de notes) poden ajudar a sistematitzar l'observació a l'aula.

6. Treballs fets a casa

Comentaris:

A més dels tradicionals exercicis o problemes que es proposen com a feines a casa d'un dia per a un altre, també podem proposar als alumnes altres feines a més llarg termini, com ara lectures (amb un resum posterior d'allò que s'ha llegit), petites recerques, encàrrec de materials per dur-los a classe, consultes, problemes o llistes de problemes de reforç o d'ampliació, elaboració i formulació de preguntes, projectes, etc. Aquestes activitats es poden fer i puntuar individualment o en grup. En aquests casos, hi ha certa reticència per part del professorat a posar nota perquè pot ser que algun alumne no faci gran cosa mentre que d'altres treballin molt més. També es considera que en els treballs fets a casa els alumnes poden rebre ajuda externa i això desvirtua l'objectivitat en la qualificació d'aquestes tasques. Tant una cosa com l'altra es poden millorar si es practica l'autoavaluació (que ha de ser confidencial: cada membre del grup es puntua ell mateix i puntua també els altres; aquestes notes, però, només les coneix el professor o la professora), si els fem preguntes sobre allò que han fet, si els demanem actes de seguiment de tot allò que han fet i si han de fer breus exposicions orals de la seva feina. En qualsevol cas, per als treballs és molt útil que els alumnes tinguin una còpia de la graella d'avaluació que es farà servir.

No convé que aquests altres instruments tinguin només un paper decoratiu, per maquillar la nota (per dir, per exemple: "Aquest alumne té un 4,5 a l'examen i com que ha fet un bon treball i a classe ha tingut una participació activa li posaré un 5.") sinó un paper real, amb un pes significatiu.

Tampoc convé que aquests instruments adquireixin un paper de condició necessària sense contribuir, però, a construir la qualificació de l'alumnat (per exemple: "Per tal d'aprovar l'assignatura cal haver lliurat tal treball, la nota però, és la de l'examen.").

A continuació, tal i com es comentava a la llista d'instruments d'avaluació sumativa, es presenta un exemple de criteris per a l'elaboració i l'avaluació de la llibreta, el dossier o els apunts de matemàtiques. Aquesta llista amb 12 orientacions es reparteix a l'alumnat en iniciar el curs i

serveix de referència per a alumnes i per al professor. És convenient treballar aquestes orientacions a l'aula.

LA LLIBRETA DE TREBALL A CLASSE I ELS APUNTS EN LES ASSIGNATURES O ELS CRÈDITS DE MATEMÀTIQUES

1. La llibreta de treball a classe i els apunts que conté han de ser instruments útils per al teu aprenentatge.
2. "Passar els apunts a net" no és necessari i pot ser una pèrdua de temps. Això no vol dir que, excepcionalment, si un o més apartats t'han quedat molt desordenats o confusos, no valgui la pena refer-los a continuació.
3. Els apunts (i la llibreta en general) han de ser espaiats i ordenats, amb marges amplis, amb subratllats i amb la data del dia en què es prenen o s'elaboren.
4. A casa els has de repassar tot i emmarcant, recalcant o destacant les parts teòriques i, especialment, aquelles que convé recordar i les parts de caire pràctic. També val la pena marcar o senyalar els punts conflictius per a tu amb algun símbol per tal de parar-hi especial atenció. Pots usar, per exemple, un o més asteriscs o una Z de corba perillosa.
5. S'aprèn molt dels errors. No els esborris. Això sí, marca'ls i posa-hi l'explicació corresponent i la correcció a continuació.
6. En la llibreta hi ha de ser tot: objectius, activitats de treball a classe (fotocopiades, elaborades per tu mateix o dictades), apunts de classe teòrics i pràctics, exercicis i problemes fets per tu, correccions, exàmens i proves, observacions i comentaris, criteris d'avaluació, etc.
7. Si un dia no pots assistir a classe, has de demanar els apunts corresponents i passar-los a la teva llibreta amb les explicacions que calgui (no es tracta tan sols de copiar-los; cal fer un esforç per tal d'entendre'ls i consultar allò que no quedi clar).
8. Quan repassis els apunts a casa o elaboris part de les activitats proposades convé que hi facis comentaris, que hi apuntis idees i suggeriments, i les preguntes que caldrà fer al professor/a sobre les parts que no veus clares.
9. En els problemes, exercicis i activitats en general has de deixar ben clar si la resolució o el desenvolupament és teu o si es tracta d'una correcció o d'un exemple fet a classe pel professor/a. Si hi ha algun error en una de les teves resolucions, no l'esborris, senyala'l, corregeix-lo i comenta-te'l per tal que, quan després estudiïs o repassis, el detectis fàcilment i no el tornis a cometre.
10. En acabar un capítol o apartat temàtic, pot ser convenient que et facis un petit resum d'allò que conté i del que consideres més important, tot i fent referència, si cal, a on és cada cosa (pots numerar les pàgines, si et sembla necessari).
11. Quan estiguis elaborant els apunts i treballis amb la llibreta a classe i quan la repassis i ordenis a casa para atenció a l'ortografia i a l'expressió. Procura fer frases curtes i senceres, i posar títol si cal, abans de cada càlcul, esquema o dibuix de tal manera que et quedi ben clar què estàs fent. Ves amb compte a l'hora d'utilitzar els símbols matemàtics; han d'ajudar-te a entendre el que escrius i has d'evitar les possibles confusions.
12. Si elabores els apunts i treballes la llibreta amb ganes i atenció i la repasses i ordenes a casa milloraràs el teu aprenentatge i guanyaràs molt de temps.

Aquesta possible diversitat d'instruments (se n'han suggerit sis a més dels tradicionals exàmens), la diversitat de criteris (el que per a un professor és fonamental per a un altre pot no ser-ho o que aprovar amb segons quin professor o professora pugui ser més fàcil que amb un altre) i la diversitat de codis que fa servir el professorat (notes numèriques, lletres, colors,

fletxes i altres símbols i combinacions de símbols omplen les llibretes de qualificació del professorat) em du a proposar una nova orientació:

Orientació 5: transparència

L'avaluació sumativa, precisa de criteris clars i pactats. Els professors d'un mateix departament didàctic han d'arribar a acords sobre els instruments que empraran, sobre la ponderació que els atorgaran i sobre les qualificacions que faran públiques. També és molt interessant que hi hagi proves dissenyades en comú per nivells. A més, i això és fonamental, els alumnes i els seus pares o tutors han de saber com els avaluarem.

Els exàmens, tan presents en tot el sistema educatiu i en molts aspectes de la vida adulta, són l'instrument estrella per a l'avaluació sumativa i mereixen un bloc sencer d'orientacions:

Orientació 6: proves i exàmens en l'avaluació sumativa

1. La dificultat i les característiques de les qüestions plantejades

Sembla convenient distingir entre les situacions d'aprenentatge, en què es poden formular reptes que comportin dificultats per als alumnes – i de fet això és imprescindible perquè avanci l'aprenentatge de l'alumnat –, i les situacions d'avaluació sumativa o d'examen, en què només es tracta d'esbrinar si hi ha hagut aprenentatge i no de plantejar grans reptes o situacions noves. D'altra banda, una qüestió important a tenir en compte és si es fan preguntes de teoria o no. La tendència actual és de no proposar preguntes de teoria, com ara definir conceptes amb precisió o enunciar i demostrar teoremes. A les proves d'accés a la universitat, per exemple, només es demana (i ben poc sovint) d'explicar algun concepte i donar-ne exemples sense grans exigències de rigor. En aquest àmbit, sembla convenient considerar la possibilitat d'incloure algunes preguntes de resposta tancada que permetin esbrinar si alguns conceptes estan prou clars. Aquestes preguntes tenen l'avantatge que són fàcils de corregir i ràpides de respondre.

S'ha de considerar també la possibilitat d'incloure algunes preguntes més obertes que ofereixin un marge més ampli de resposta i d'autonomia per als alumnes.

En qualsevol cas, és molt important que el professor s'adapti a les característiques del seu alumnat.

2. Plantejar l'examen en funció dels objectius didàctics

Hem de ser conscients dels objectius d'aprenentatge que avaluem amb cada pregunta, exercici o problema. Ens hem de preguntar si els exercicis, els problemes i les qüestions que proposem responen exactament als objectius d'aprenentatge que volem avaluar.

A més, l'examen ha de ser equilibrat: un mateix objectiu no ha de sortir reiteradament i cal tenir en compte la importància i el temps dedicat a cada objectiu durant el període d'aprenentatge.

Cal tenir en compte també, que no es pot preguntar tot sempre. És possible que alguns objectius d'aprenentatge no s'avaluin amb l'examen.

Finalment, val la pena remarcar que un alumne pot aprovar un examen sense assolir tots els objectius d'aprenentatge o assolint-los només parcialment. Aquestes dues observacions posen en evidència que el valor atorgat tradicionalment als exàmens com a instruments infal·libles per certificar el nivell d'aprenentatge dels alumnes és, com a mínim, dubtós.

En qualsevol cas, un examen mal dissenyat o poc equilibrat pot desmotivar més d'un alumne.

En definitiva, és molt important que els alumnes vegin que hi ha coherència entre els objectius inicials, el treball fet a classe i allò que es pregunta a l'examen.

3. Tipus de qualificacions i nombre d'exàmens

Quin tipus de nota posem als exàmens? Qualitativa? Quantitativa? Quants en posem cada trimestre? En principi sembla convenient observar un codi intel·ligible i d'ús comú. Les notes numèriques de 0 a 10, per exemple, poden funcionar perfectament. No semblen aconsellables, en canvi, codis més particulars que poden conduir a interpretacions errònies. Pel que fa al nombre d'exàmens, només una recomanació: no convé ni abusar-ne ni limitar-se a fer-ne un per trimestre o per crèdit.

En qualsevol cas, sí que és molt important tenir en compte la importància de cada pregunta i especificar-ne la puntuació.

En la correcció de l'examen, cal tenir en compte l'expressió, l'ortografia i la presentació i la distribució de l'espai. Això es podria considerar relativament conflictiu, però, si hi estan acostumats, perquè en el treball de cada dia hi insistim, els semblarà absolutament normal que aquests aspectes dels exàmens també es valorin.

Pot ser molt convenient elaborar una normativa per als exàmens i treballar-la a classe .

4. Preguntes encadenades

Cal anar amb molt de compte amb les preguntes encadenades, ja que la primera pot invalidar l'accés a la resta.

5. Rigor exigit

La qüestió del rigor a exigir en els exàmens és un altre tema a considerar. No sembla convenient exigir ni raonaments ni notacions rigoroses a l'ESO. En qualsevol cas, cal reflexionar-hi.

6. Sorpreses

Per evitar sorpreses convé resoldre els exàmens prèviament. També convé fer una prova que ens indiqui el temps necessari per resoldre'l correctament. És evident que els alumnes necessitaran molt més temps que nosaltres.

7. Lliurar les notes tan aviat com sigui possible

És convenient donar les notes immediatament per aprofitar l'atenció que comporta l'examen i donar exemple a l'alumnat. L'examen també és una activitat d'aprenentatge. Com a tal, es pot aprofitar de maneres diverses. Per exemple, podem repartir els exàmens qualificats i els demanem que en facin una versió corregida amb comentaris de les errades comeses. Aquesta activitat també es puntua (com a feina a casa o de forma específica). També és possible corregir-lo i comentar-lo a la pissarra i elaborar, conjuntament amb els alumnes, una llista de les errades més importants.

8. Responsabilització dels alumnes

Com en el cas de les proves curtes, s'han de contemplar les possibilitats de l'autocorrecció i de les correccions encreuades que els faran reflexionar sobre el seu procés d'aprenentatge. A més, es poden passar qüestionaris d'emocions com els que s'han presentat al capítol 4.

9. Sentiment de justícia

Els alumnes i les alumnes han de poder reclamar i han d'estar convençuts que han tingut un tracte just. S'ha de tenir en compte, per exemple, que un mateix error no descompti puntuació reiteradament.

De la mateixa manera que en les proves i exàmens es recomana la possibilitat de fer, ni que sigui eventualment, activitats d'autoavaluació, en el procés global, abans de donar notes, pot ser molt interessant que els alumnes i les alumnes facin una autoavaluació i que recapitulin sobre tot allò que han fet. Això ens du a una nova orientació:

Orientació 7: autoavaluació sumativa

Per tal de fomentar la responsabilització de l'alumnat en el seu procés d'aprenentatge és interessant fer servir una fitxa d'autoavaluació en acabar un crèdit o una matèria que inclogui tots els instruments que s'han emprat. En aquesta fitxa els alumnes i les alumnes s'han de posar una nota en cadascun dels instruments emprats i una nota global final. La fitxa també pot incloure un apartat en què expressin allò que han après i un altre en què incloguin propostes de millora. Aquestes dades es poden contrastar amb les del professor o professora que serà, evidentment, qui tindrà la darrera paraula.

A continuació es presenta un exemple de fitxa d'autoavaluació sumativa

FITXA D'AUTOAVALUACIÓ

Nom i cognoms:

Poseu-vos una nota de 0 a 10 referida als aspectes especificats i una nota global qualitativa (IN., SUF., BÉ, NOT. o EXCEL.) del trimestre.

CONCEPTE	NOTA	NOTA GLOBAL QUALITATIVA
Nota de treball a classe		
Nota de treball a casa		
Nota d'informàtica-Cabri		
Nota d'intervencions orals		
Nota de proves curtes		
Nota d'exàmens		
Nota de llibreta		
Nota global final		

Responen també les preguntes següents:

1. Què has après aquest trimestre?

2. Com penses que podries millorar el teu aprenentatge el trimestre vinent?

3. Observacions

Els mals records i les experiències negatives amb l'avaluació (sumativa) en l'àmbit de les matemàtiques poden perdurar tota la vida i duen algunes persones a odiar les matemàtiques i fins i tot a sentir-se satisfets de no saber-ne res de res. Per això mateix, confessar que ets professor de matemàtiques en segons quins ambients pot provocar reaccions relativament adverses en més d'un cas.

El cert, és que, en l'àmbit de l'avaluació sumativa, cal anar amb molt de compte amb allò que diem als alumnes. No els hem de desmoralitzar amb ironies o desqualificacions aparentment inofensives (i de les quals, de vegades, no en tenim ni tan sols consciència) que poden ensorrar-los moralment per al treball de les matemàtiques. Hem de ser conscients que es tracta d'una qüestió sensible i que hi ha molta fragilitat. El tacte i la prudència ens han d'acompanyar, doncs, en tot moment i això, certament, no és senzill.

Una bona recepta des d'aquesta perspectiva consisteix a posar-se en el lloc de l'alumnat i dels pares. Potser aleshores ens convencerem que tots els alumnes poden realitzar aprenentatges significatius mínims.

Orientació 8: empatia

Procureu posar-vos en el lloc dels alumnes i dels pares.

Valoreu l'esforç i la progressió de l'alumnat, sigueu flexibles i procureu tenir una visió global dels alumnes.

Procureu atendre les reclamacions dels alumnes i mostreu certa generositat.

Cal fer esment, finalment, dels processos d'avaluació interna de centres que comencen a implantar-se rigorosament a secundària i que poden contribuir a millorar de manera notable la motivació del professorat, ja que permeten adquirir consciència de l'efecte de les accions que s'emprenen.

Orientació 9: l'avaluació interna com a instrument de motivació del professorat

Els processos d'avaluació interna ens ajuden a reflexionar sobre allò que fem a les aules i ens permeten valorar científicament els processos d'ensenyament i d'aprenentatge.

El professorat adquireix consciència d'allò que fa, s'adona que treballa en equip i millora la seva motivació en prendre consciència que les seves actuacions poden determinar el funcionament de les classes.

CAPÍTOL 14: CONCLUSIONS I PROPOSTES. NOVES PERSPECTIVES I NOVES ESTRATÈGIES

En aquest capítol es recullen les conclusions del treball des d'una perspectiva essencialment pràctica. En primer lloc es fa un resum del diagnòstic. A continuació es resumeixen també algunes perspectives generals i es fan propostes organitzatives, metodològiques, de gestió d'aula, de gestió de currículum, d'avaluació, etc. Finalment es fan algunes propostes per a la formació del professorat relacionades amb els temes estudiats.

1. EL DIAGNÒSTIC

1.1. INTRODUCCIÓ

En el primer capítol d'aquest treball s'han revisat les proves i els resultats d'avaluació externa en l'àmbit de les matemàtiques i s'ha posat en evidència que hi ha greus problemes de formació matemàtica a la nostra societat. S'ha vist, a més, que els problemes vénen de lluny i que no es poden atribuir exclusivament a la implantació de la reforma educativa que propugnava la LOGSE. També es fa evident que, malgrat totes les reformes i canvis del sistema educatiu, afrontem el segle XXI amb la constatació que grups molt importants de l'alumnat i de la societat són pràcticament analfabets matemàtics. És cert que el problema és internacional i que molts països desenvolupats tenen greus dificultats amb la formació matemàtica dels seus ciutadans. S'ha de reconèixer, però, que a casa nostra el problema es presenta de manera acusada.

En el segon capítol s'ha estudiat quina imatge tenen els alumnes i les alumnes de les matemàtiques escolars. S'ha dit, a més, que aquesta imatge es perpetua pràcticament per a tota la vida i que, per això mateix, el professorat contrau una gran responsabilitat que va més enllà de l'aprenentatge puntual d'algunes habilitats matemàtiques. Aquesta imatge es presenta tot sovint plena de por i d'inseguretats i no predisposa a la motivació de l'alumnat.

Els mals resultats a les proves i la mala imatge que es projecta de les matemàtiques inviten clarament a la innovació. Tanmateix però, tal i com s'ha vist al capítol 3, hi ha poderosos motius que impedeixen que tot el professorat s'impliqui clarament en una nova manera de fer matemàtiques a les aules.

El diagnòstic inicial podria ser, doncs, el següent:

1. Els problemes d'anumerisme i les deficiències en la formació matemàtica són comuns a molts països. És evident també, però, que a l'Estat espanyol i a Catalunya aquests problemes i aquestes deficiències són especialment acusades.
2. Sectors molt importants de la població adulta, tot i tenir una formació considerable i una posició social sense problemes, tenen greus mancances de formació matemàtica bàsica.
3. Moltes persones (la majoria) no identifiquen les matemàtiques com un aspecte més de la cultura.

4. No s'identifiquen les matemàtiques com una forma de pensar i de raonar i com un aspecte rellevant de la cultura humana sinó que es confonen amb un conjunt de tècniques abruptes relacionades amb els nombres i les equacions.
5. El professorat hi té una responsabilitat i el sistema educatiu també
6. L'activitat matemàtica passa desapercebuda, és invisible, es menysprea i no es considera rellevant.
7. L'alumnat d'EGB, BUP, FP i COU presentava greus problemes de formació matemàtica. La implantació de l'ensenyament obligatori fins als 16 anys no sembla haver millorat la situació. En general, es pot afirmar que s'ha millorat la metodologia de treball a les classes i que s'han racionalitzat els continguts. D'altra banda, però, han augmentat els problemes relacionats amb la diversitat i amb la voluntat d'estudi i han disminuït el nombre d'hores de docència de matemàtiques.
8. La manca de formació matemàtica condueix a la pseudociència.
9. La difusió dels resultats de les proves externes nacionals, estatals i internacionals ha de permetre que el professorat prengui consciència de la situació.
10. Els matemàtics no han fet gran cosa per millorar la situació.
11. Hi ha molts factors que impedeixen que la innovació s'imposi clarament a les aules.

1.2. POSSIBLES CAUSES

Per què tenim uns resultats fluixos en matemàtiques? Per què els resultats a l'àrea de matemàtiques són comparativament pitjors que els d'altres àrees? Es tracta de preguntes que no tenen una resposta trivial. És estrictament necessari, però, que ens les fem si volem trobar solucions.

Els països amb millors resultats a les proves internacionals no destaquen pas per fer unes matemàtiques escolars massa diferents des del punt de vista dels continguts i de la metodologia. Val la pena, però, fixar-se en algunes diferències rellevants:

- El càlcul mental es practica amb intensitat, especialment a primària.
- L'ús de la calculadora és força restringit (molts països fan servir l'àbac).
- La percepció social de la importància de les matemàtiques és força elevada.
- Es dediquen més hores a la formació matemàtica.
- Hi ha una tradició de rigor i de treball a l'escola.
- Es considera que, per al progrés social, les matemàtiques poden ser de gran ajuda.

Des d'una perspectiva més propera, es poden apuntar alguns factors que no han contribuït a millorar l'ensenyament i de l'aprenentatge de les matemàtiques a casa nostra:

- a) Les poques hores de formació matemàtica que té l'alumnat.

Des d'alguns sectors de l'administració es diu que aquest factor no és determinant. Es diu també que es tracta més aviat de fixar-se en la metodologia i que cal treballar les competències matemàtiques des de les altres àrees. El cert,

però, és que, amb els programes actuals, el professorat es veu obligat a fer matemàtiques amb pressa, i això no és gens recomanable.

b) La mala imatge de les matemàtiques a la nostra societat.

Com ja s'ha comentat, molts nois i moltes noies, i molts dels seus pares i mares no tenen una bona imatge de les matemàtiques. Hi ha, sovint, una actitud de prevenció que denota por i que provoca un bloqueig per al treball.

c) Les deficiències en la formació del professorat.

En els cas de primària, les mancances de formació matemàtica d'alguns professionals són colpidores. En el cas de secundària, la incorporació de professorat que no està especialitzat clarament en la matèria i les mancances generalitzades de formació pedagògica són també molt grans. Ens hauríem de preguntar quina perspectiva poden tenir aquestes persones de la matèria i si s'ha de fiar tot a la formació permanent voluntària.

d) És molt probable també, que el currículum i la metodologia emprada no siguin els adequats.

Ara mateix el professorat de secundària té la gran dificultat d'administrar un nombre d'hores de matemàtiques escàs que, aparentment, el condueix a un problema sense solució: si s'opta per centrar-se en els continguts escolars, no es treballen prou les competències bàsiques ni es fan matemàtiques creatives; i si s'opta per treballar amb profunditat les competències bàsiques i es treballa per fer matemàtiques creatives i innovadores, es presenten mancances en relació als continguts prescrits per la legislació. No sembla lògic que hagin de ser els centres i els professors els qui resolguin aquesta contradicció estructural que, com s'està demostrant, condueix a una formació matemàtica deficient.

És ben cert que s'han fet esforços per conciliar els diversos aspectes de la formació matemàtica escolar. Tot plegat, però, és molt teòric i no es parla de com es poden solucionar les mancances de formació -per exemple en àlgebra- que tindran els alumnes de batxillerat si es posa l'accent a l'assoliment de les competències bàsiques.

Pel que fa a la metodologia, sectors significatius del professorat segueixen arrelats a mètodes clàssics i la majoria de llibres de text no se n'allunyen gaire. Aquest és, probablement, un dels aspectes més conflictius i més difícils de canviar.

e) Els canvis constants en el sistema educatiu.

En els darrers anys hi ha hagut canvis constants de programacions, de currículum, de distribució d'hores i de perspectives generals. L'educació vol certa estabilitat i la desfilada permanent de canvis només condueix al desconcert i al cansament. Molts professionals ja no saben ben bé on paren.

f) Manca d'exigència i de motivació per a l'estudi.

La societat en què vivim ha portat a considerar que tot ha de ser molt fàcil i molt lúdic. La cultura de l'esforç va de baixa. Hi ha una urgent necessitat de recuperar l'estudi i el treball com a condicions inherents a l'educació primària i secundària. L'alumnat, les famílies i la societat en general semblen haver oblidat que, sense esforç i sense estudi, difícilment hi haurà aprenentatge.

2. ALGUNES PERSPECTIVES GENERALS

La revista *Suma* de juny del 1999, en un interessant article¹¹⁸ de títol *Problemas actuales de nuestra educación matemática*, recollia un seguit de recomanacions de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales que potser val la pena revisar set anys després. D'entrada, l'article recollia una anècdota molt reveladora en què s'explica que l'esmentada Real Academia havia convocat una reunió els dies 5 i 6 de febrer de 1999 amb el tema monogràfic "problemes de l'educació matemàtica a primària i a secundària a l'Estat espanyol". A la reunió es va arribar a la conclusió que molts dels objectius que es plantegen i s'assoleixen (en major o menor mesura) a l'àmbit escolar no surten mai d'aquest àmbit i no arriben a formar part dels coneixements pràctics que fa servir una persona adulta a la vida quotidiana. Com a exemple paradigmàtic d'aquesta situació s'explica que, en el decurs de la reunió, es va plantejar si persones de gran formació, l'exercici professional de les quals estigués relativament lluny de l'àmbit matemàtic, conservarien o no la capacitat d'operar amb fraccions senzilles. Sobre la marxa, a la mateixa reunió, es va dur a terme un petit experiment: es va plantejar de fer la suma $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ a quatre catedràtics d'universitat (un de dret, un d'història, un de bioquímica i un d'anatomia) amb el resultat que només el bioquímic va ser capaç de fer correctament l'operació.

Més endavant, l'article recollia com a principis generals dues idees:

- Per a la vida quotidiana, potser és més important saber entendre que saber fer.
- És més interessant que una majoria de ciutadans tingui una actitud positiva envers les matemàtiques que el fet que coneguïn, al final dels seus estudis, un seguit de qüestions puntuals o que tinguin sistematitzades un grapat de rutines

Finalment, es feien propostes per als centres i per al professorat:

a) En relació a l'organització

1. Els centres haurien de tenir una àmplia autonomia organitzativa.
2. S'apunta que la diversitat a l'aula és difícil de gestionar i que l'establiment de grups flexibles es considera una solució interessant.
3. Es demanen més hores de formació matemàtica: haurien de ser quatre o cinc per setmana.
4. Caldria dotar els centres amb laboratoris de matemàtiques que permetessin i afavorissin metodologies diferents de la clàssica.

b) En relació a la formació del professorat:

1. Es considera que hi ha greus carències de formació del professorat de primària i de secundària.
2. No pot ser que el professorat de primària tingui una formació testimonial de matemàtiques (només entre un 2 i un 7% del total de crèdits són de matemàtiques).
3. Es reclama un suport d'especialistes als centres de primària.

(118) *Problemas actuales de nuestra educación matemática primaria y secundaria*. Suma, revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, n° 31 (juny de 1999): pàgines 15-18.

4. La formació didàctica del professorat de secundària es considera també molt deficient. No pot ser que a les facultats de matemàtiques es formin les persones com si totes anessin a fer investigació i que es deixi de banda la didàctica, la història de les matemàtiques i la psicologia de l'aprenentatge.

5. La formació permanent hauria de produir canvis reals a l'activitat docent. Es reclama també una reducció de les hores de docència a canvi de l'exigència de formació permanent del professorat.

6. Es reclama un canvi de metodologia en la pràctica del professorat.

c) En relació a altres qüestions:

1. Es reclama la utilització i la incorporació de les noves tecnologies a l'aula de matemàtiques (com a exemple, es parlava del Cabri).

2. Es constata com a negativa la tendència del professorat de matemàtiques a compartimentar l'assignatura i a ocultar les aplicacions a altres ciències. També es constata que des de les altres àrees no hi ha una col·laboració suficient en sentit contrari.

3. S'apunta la necessitat de constituir un fòrum estatal amb presència de diverses organitzacions professionals que s'ocupi dels problemes de l'educació matemàtica i de la coordinació amb altres països.

La majoria d'aquestes recomanacions tenen ara mateix, tot i els set anys transcorreguts, pràcticament la mateixa vigència.

Tampoc han perdut la seva vigència les conclusions del Congrés d'Educació Matemàtica de 2000 (CEM 2000) celebrat a Barcelona, que recordem a continuació¹¹⁹:

1. Cal vetllar per ensenyar matemàtiques que facilitin el progrés de tots els alumnes.

2. Les matemàtiques són cultura: no poden ser una eina de filtratge social.

3. El contingut matemàtic essencial: una manera de pensar que sigui útil a tothom.

4. L'aprenentatge matemàtic no és un ensinistrament, sinó la comprensió del món amb una base matemàtica: això requereix un treball sense presses, amb hores i amb recursos.

5. Cal generar creativitat en lloc d'angoixes.

6. Davant dels diversos conflictes a les aules, hem d'acceptar que la nostra incidència és limitada, però cal actuar en la línia de no agreujar els problemes sinó d'obrir noves possibilitats.

Es fa, finalment, esment de les propostes del doctor Claudi Alsina¹²⁰, que ens resumeix quines haurien de ser les noves tendències a les aules.

(119) Conclusions del Congrés d'Educació Matemàtica (CEM 2000) recollides pel seu president Xavier Vilella en el butlletí número 14 de desembre de 2000 de la Societat Catalana de Matemàtiques.

(120) Extret de: ALSINA, C. (2000). Mañana será otro día: un reto matemático llamado futuro. A GOÑI, J.Ma. [et al.]. *El currículum de matemáticas en los inicios del siglo XXI*. Graó, Barcelona.

Resum de noves tendències

FER MENYS	FER MÉS
Treball magistral	Guia, motivació
Treball individual	Treball en grup
Treball sense context	Treball contextualitzat, aplicacions a la vida quotidiana
Treball abstracte	Modelització de situacions, treball amb materials
Temes tradicionals del passat	Temes d'actualitat, divulgació
Presentació directa dels temes	Presentació històrica dels temes
Memorització instantània	Comprensió duradora
Informació acabada	Descobriment i recerca
Activitats tancades	Activitats obertes
Exercicis rutinaris	Problemes que exigeixen reflexió
Simbolisme matemàtic	Ús de diversos llenguatges
Tractament formal	Visualització
Ritme uniforme	Ritme personalitzat
Avaluació d'algorismes	Avaluació de raonaments
Avaluació quantitativa	Avaluació qualitativa
Avaluació d'ignoràncies	Avaluació formativa

Totes aquestes propostes tenen una càrrega important d'innovació i estan fortament relacionades amb la motivació de l'alumnat per fer matemàtiques.

3. ORIENTACIONS PER A LA MILLORA DE LA MOTIVACIÓ DE L'ALUMNAT EN L'ÀMBIT DE LES MATEMÀTIQUES

Les orientacions que es presenten en aquest apartat vénen a ser una conclusió o un resum de tot allò que s'ha proposat al llarg dels capítols anteriors d'aquest estudi. Moltes propostes són coincidents amb el recull d'orientacions generals que s'han presentat a l'apartat anterior, probablement perquè la direcció que cal emprendre per a la millora de la motivació del treball de les matemàtiques comença a ser clara.

3.1. LES CONDICIONS NECESSÀRIES

Tal i com es comentava a l'apartat 2 del 4t capítol (Teories clàssiques de la motivació adaptades a l'àmbit escolar), hi ha un seguit de condicions necessàries perquè pugui existir una bona motivació per al treball de les matemàtiques que no convé oblidar. Ens calen unes instal·lacions dignes i ens cal un bon ambient de convivència. De vegades, per desgràcia, aquestes condicions no es donen plenament i aleshores, abans de tot, cal treballar per aconseguir-les. Per això mateix, pot ser molt convenient establir una normativa per a les classes de matemàtiques que deixi ben clar què s'hi va fer a classe i què no s'hi ha de fer. Aquest tipus de normativa s'ha de treballar i pactar amb l'alumnat des d'un bon principi i, tot i que potser no ho arreglarà tot, com a mínim permetrà prendre les decisions adequades quan els problemes de comportament a classe impedeixin l'aprenentatge.

3.2. UNA LLISTA D'ORIENTACIONS PER A LA MILLORA DE LA MOTIVACIÓ

3.2.1. Orientacions i estratègies generals

A continuació es proposen nou orientacions o estratègies d'actuació generals. Cal precisar que no tenen intersecció buida i que es relacionen i es connecten activament les unes amb les altres.

1. Els professors i les professores de matemàtiques hem de reinterpretar els arguments clàssics per a la motivació escolar.
2. Els professors i les professores de matemàtiques hem de treballar per donar una imatge renovada de les matemàtiques.
3. Els professors i les professores de matemàtiques hem de treballar per donar més protagonisme a l'alumnat. Els alumnes i les alumnes han participar més activament ens els processos d'aprenentatge, han de ser més responsables d'aquests processos i s'hi han d'implicar i comprometre.
4. Els professors i les professores de matemàtiques hem de treballar els aspectes emotius i afectius associats a les matemàtiques i al seu aprenentatge.
5. Els professors i les professores de matemàtiques ens hem d'esforçar per individualitzar la nostra interacció amb l'alumnat i hem de treballar per mostrar l'aspecte humà de les matemàtiques.
6. Els professors i les professores de matemàtiques hem de treballar per fer explícita la vinculació de les matemàtiques amb la realitat i per mostrar la utilitat i l'aplicabilitat de bona part d'allò que fem a classe.
7. Els professors i les professores de matemàtiques hem de treballar per mostrar els aspectes estètics, recreatius, imaginatius i sorprenents de les matemàtiques i per maximitzar l'impuls cognitiu.
8. Els professors i les professores de matemàtiques hem de treballar per estimular la creativitat.
9. Els professors i les professores de matemàtiques hem de treballar perquè una majoria de l'alumnat vagi a les classes de matemàtiques sense por, sense ansietat i sense reticències. Hem de treballar per democratitzar l'ensenyament de les matemàtiques.

3.2.2. Orientacions i estratègies específiques o locals

A continuació es proposen orientacions o estratègies d'actuació específica emmarcades dins de cadascuna de les orientacions generals. Algunes de les propostes són vàlides per a més d'una de les estratègies generals i n'hi ha moltes que es relacionen i es connecten activament les unes amb les altres.

1. Reinterpretar els arguments clàssics per a la motivació escolar

Fer un ús prudents de les qualificacions com a elements de motivació.

Fer un ús prudent dels exàmens com a elements de motivació. Un excés d'exàmens o un excés de dificultat pot no donar bons resultats.

Fer un ús prudent de la motivació extrínseca i d'aversió tot i evitant-ne nivells alts. Les esbrincades, els càstigs o els advertiments que es pot suspendre, per exemple, han de ser recursos d'última hora.

Estimular amb prudència la competitivitat entre alumnes o entre grups d'alumnes per treure bones notes.

Donar exemple amb el treball rigorós i donar exemple de motivació.

Apreciar i elogiar el treball i l'esforç de l'alumnat.

Tenir en compte tots els treballs que fa l'alumnat en fer l'avaluació sumativa.

2. Treballar per donar una imatge renovada de les matemàtiques

Transmetre que les matemàtiques són, sobretot, una forma de pensar i de raonar i que, precisament, ens ajuden a pensar i a raonar. Posar en evidència que les matemàtiques no són només nombre i càlculs, són pensament, estratègies, comunicació, imaginació i reptes mentals.

Transmetre que un ciutadà competent en matemàtiques és més difícil de manipular i que, per això mateix, el coneixement matemàtic contribueix a democratitzar la societat.

Fer veure que les matemàtiques són útils, que funcionen i que es poden aplicar amb èxit a la majoria d'activitats humanes. No solament a la ciència i a la tecnologia, sinó també a les ciències socials, a tota mena d'activitats humanes quotidianes, als jocs, al lleure, etc.

Mostrar que les matemàtiques ens permeten dissenyar i que també tenen molt a veure amb l'art i amb la filosofia.

Posar en evidència que les matemàtiques ajuden a tenir bones sortides professionals.

Mostrar que les matemàtiques ofereixen reptes i sorpreses i que poden ser divertides.

Fer divulgació a partir d'algunes de les aplicacions que es fan de les novetats matemàtiques, a partir de les notícies que recull la premsa o a partir de lectures.

Emprar la història de les matemàtiques com a recurs (amb explicacions, amb lectures, amb presentacions i imatges, etc.) i mostrar l'origen històric dels conceptes i dels símbols matemàtics de tal manera que es faci explícit que les matemàtiques són una disciplina humana en evolució permanent i no un producte acabat i tancat.

Diversificar els instruments d'avaluació sumativa i no centrar-se només en l'ús dels exàmens. Anar en compte amb la imatge selectiva i de dificultat que s'associa a les matemàtiques.

3. Treballar per donar més protagonisme a l'alumnat. Els alumnes i les alumnes han participar més activament en els processos d'aprenentatge, han de ser més responsables d'aquests processos i s'hi ha d'implicar i comprometre.

Fer un esforç per explicar, tan clarament i explícitament com sigui possible, els objectius d'aprenentatge abans d'iniciar cadascuna de les unitats didàctiques.

Fixar conjuntament amb els alumnes i les alumnes fites realistes de treball i d'aprenentatge i avaluar els progressos que es fan de cara a l'assoliment de les fites.

Elaborar llistes d'encerts i d'errades conjuntament amb els alumnes.

Estimular els estudiants perquè prenguin la iniciativa i tenir-ho en compte quan es fa l'avaluació sumativa.

Estimular les discussions i les explicacions entre estudiants

Fer-los dur materials per al treball de les matemàtiques

No donar les coses totalment fetes i acabades als alumnes.

Emprar el mètode d'interrogació progressiva, en què es formulen preguntes com a resposta a les preguntes de l'alumnat, pot invitar a la creativitat i contribuirà a obrir la mentalitat de l'alumnat.

Emprar instruments que ajudin a l'autoregulació per tal de fomentar la responsabilització i la reflexió de l'alumnat sobre el procés d'aprenentatge, com ara fitxes d'autoavaluació, correccions encreuades, qüestionaris i converses referents a l'assoliment dels objectius, elaboració individual de llistes d'encerts i d'errades i de llistes d'objectius d'aprenentatge assolits i d'objectius pendents, etc.

4. Treballar els aspectes emotius i afectius associats a les matemàtiques i al seu aprenentatge. Ens hem d'esforçar per individualitzar la nostra interacció amb l'alumnat i hem de treballar per mostrar l'aspecte humà de les matemàtiques.

Analitzar les nostres pròpies emocions i creences sobre allò que són les matemàtiques i el seu aprenentatge.

Analitzar les emocions i creences globals de l'alumnat sobre allò que són les matemàtiques i el seu aprenentatge a partir de qüestionaris, d'entrevistes i de converses.

Analitzar les emocions locals de l'alumnat en algunes activitats d'aprenentatge amb l'ús de fitxes (qüestionaris o petites activitats que permetin expressar les emocions) i de mapes d'humor (expressar les reaccions emocionals a partir d'icones o símbols).

Parlar amb els alumnes individualment i col·lectivament. Respectar i tenir en compte les intervencions i les opinions de l'alumnat. Donar confiança a l'alumnat. No menystenir ni desqualificar els seus raonaments encara que siguin erronis.

Promoure la solidaritat en el treball i l'aprenentatge de les matemàtiques amb l'ús del treball cooperatiu i amb el nomenament de tutors d'aprenentatge entre els alumnes.

Fer veure a l'alumnat que pensar i raonar pot ser útil, satisfactori i plaent.

Parar atenció a possibles situacions de bloqueig que pugui patir l'alumnat. Cal diagnosticar quina mena de bloqueig es pateix i dissenyar estratègies per a la seva neutralització.

A l'hora de fer l'avaluació sumativa, reconèixer els encerts a més dels errors, explicar clarament com s'avaluarà, valorar l'esforç i la progressió de l'alumnat, procurar tenir una visió global dels alumnes, atendre les reclamacions i tenir cert grau de flexibilitat i d'empatia.

5. Individualitzar la nostra interacció amb l'alumnat i treballar per mostrar l'aspecte humà de les matemàtiques.

Tenir en compte els canvis evolutius i les diferències individuals a l'hora de fer ús dels diversos instruments de motivació. Tenir en compte les expectatives de cadascun dels alumnes.

Diagnosticar el punt de partida de cada alumne i proposar-los tasques adequades a les seves capacitats. Això comporta diversificar les propostes plantejades.

Potenciar i afavorir estructures organitzatives que permetin millorar l'atenció individualitzada de l'alumnat, com ara l'establiment de grups flexibles, de desdoblaments dels grups i reducció del nombre d'alumnes, presència de dos professors o professores a la mateixa aula, distribució de feines per nivells, ús i disseny d'adaptacions del currículum, etc.

Diversificar els instruments d'actuació i de comunicació a classe, diversificar els materials de treball i no fer blocs temàtics massa llargs o alternar els diversos aspectes del currículum per tal de permetre que els estímuls positius arribin a la majoria dels nois i de les noies.

Valorar la possibilitat d'emprar el treball amb projectes com a instrument de motivació per a alumnes amb dificultats d'aprenentatge de les matemàtiques

Oferir als estudiants diverses maneres de pensar sobre un objecte o una situació i diversificar la manera d'enfocar els problemes per contribuir a flexibilitzar la seva mentalitat.

Incorporar al relat referències humanes, dades i perspectives històriques de tots aquells matemàtics que han viscut, creant o transmetent, allò que presentem a les classes. Emprar la història per fer activitats no gaire habituals a les aules de matemàtiques com ara llegir, documentar-se, buscar fonts alternatives d'informació, discutir, analitzar i parlar de matemàtiques (en comptes de fer-ne).

Emprar els acudits, les anècdotes, l'humor i els contes a les classes de matemàtiques.

Promoure el treball cooperatiu de les matemàtiques.

6. Treballar per fer explícita la vinculació de les matemàtiques amb la realitat i per mostrar la utilitat i l'aplicabilitat de bona part d'allò que fem a classe.

La història de les matemàtiques pot fer el paper de pont entre les matemàtiques i altres matèries com ara la física, la filosofia, la geografia i la història, etc.

Explicar les aplicacions dels conceptes que es presenten encara que sigui des d'un punt de vista divulgatiu.

Donar rellevància a les competències bàsiques en matemàtiques, i explicitar i fer visibles les matemàtiques de la vida quotidiana.

Parar més atenció al càlcul mental i a l'habilitat per fer estimacions.

Treballar amb objectes de la realitat i amb notícies de premsa.

Contextualitzar els conceptes i els problemes sempre que sigui possible.

Algunes vegades, convé plantejar situacions properes a la realitat tot i que siguin complexes.

7. Treballar per mostrar els aspectes estètics, recreatius, imaginatius i sorprenents de les matemàtiques, per maximitzar l'impuls cognitiu i per estimular la creativitat.

Utilitzar programes per al treball de les matemàtiques, com ara el Cabri per fer geometria, el Derive per treballar les funcions o el Geogebra per combinar ambdues coses, de manera sistemàtica.

Treballar les matemàtiques fent ús d'internet. Anar a pàgines que tenen activitats preparades, fer recerques emprant internet com a instrument i fer visites virtuals a espais d'interès matemàtic.

Emprar també les noves tecnologies com a complements de comunicació: amb presentacions fetes amb PowerPoint, amb l'ús del correu electrònic per trametre deures o per fer consultes, amb l'ús de plataformes virtuals, etc.

Fer activitats de matemàtiques fora de les aules, en el mateix centre o fora del centre.

Promoure sortides relacionades amb les matemàtiques i explicitar els aspectes matematitzables d'altres sortides.

Treballar les matemàtiques amb materials didàctics i amb materials de la realitat.

Utilitzar recursos audiovisuals com ara vídeos i pel·lícules per treballar alguns aspectes de les matemàtiques.

Intrigar l'alumnat amb reptes, amb problemes imaginatius, amb paradoxes, etc. que estiguin al seu abast.

Utilitzar la matemàtica recreativa de manera sistemàtica i planificada com a context per al treball dels continguts del programa.

Emprar problemes i exercicis extrets o adaptats a partir de textos històrics que hagin captat l'atenció de la humanitat.

Donar un paper rellevant a la geometria com a aspecte de les matemàtiques que ofereix clarament la possibilitat del contacte amb la realitat, l'experimentació i l'aplicabilitat.

8. Treballar per estimular la creativitat.

Proposar tasques no rutinàries

Acostumar els alumnes a establir connexions entre aspectes diversos de la matemàtica.

Estimular la discussió i la possibilitat de trobar solucions i raonaments alternatius.

A més dels enunciats escolars clàssics, convé plantejar també situacions obertes o situacions-problema pendents de matematització.

Donar importància a la formulació de problemes i de preguntes i no només a la resolució de problemes i a les respostes.

Proposar activitats per al treball global, no compartimentat i temàtic de la matèria.

Plantejar situacions en què l'alumnat hagi d'elaborar conjetures i emprar el raonament plausible o inductiu.

Evitar el treball centrat en els exercicis repetitius i no donar receptes en l'àmbit de la resolució de problemes.

9. Treballar perquè una majoria de l'alumnat vagi a les classes de matemàtiques sense por, sense ansietat i sense reticències. Treballar per democratitzar l'ensenyament de les matemàtiques.

Ser flexible amb la interpretació del currículum i no obsessionar-se per la magnitud dels programes educatius. (És més important que acabi el programa el professor o que l'acabin els seus alumnes, encara que sigui parcialment, amb un bon nivell de comprensió?)

Apropar el currículum escolar a la realitat, contextualitzar-lo.

Evitar els formalismes excessius.

Evitar l'excés d'exercicis repetitius, de receptes i de mecanismes automàtics per a l'aprenentatge.

Fer veure als alumnes i a les alumnes que tothom pot fer aprenentatges matemàtics bàsics.

Donar possibilitats d'èxit a la gran majoria de l'alumnat. El que més motiva és l'èxit.

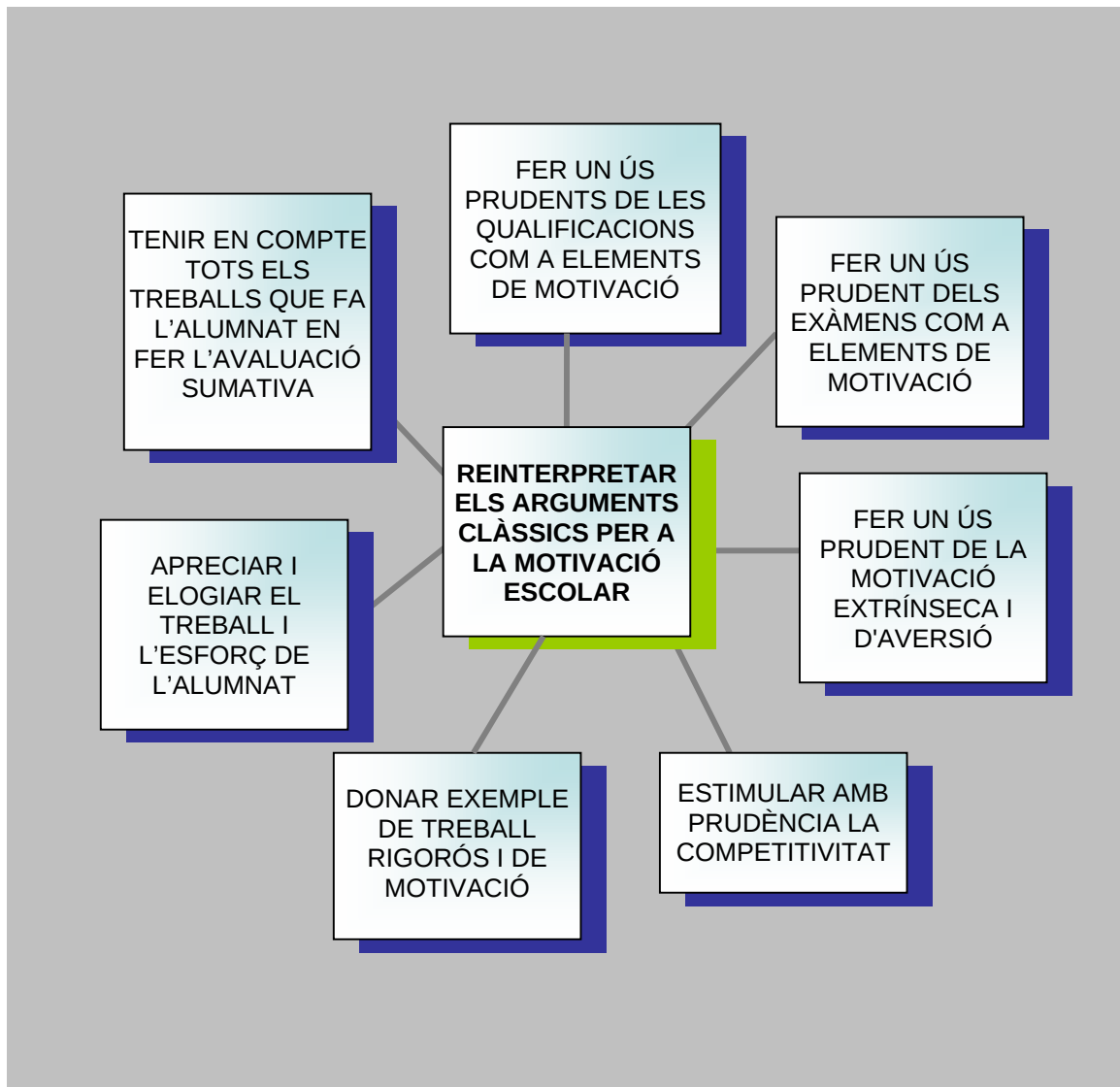
Diversificar la metodologia a l'aula i procurar tenir alts nivells de comunicació i d'intercanvi amb l'alumnat.

Estar pendent dels temes d'actualitat i llegir la premsa amb ulls matemàtics i amb la intenció d'extreure materials per al treball a l'aula.

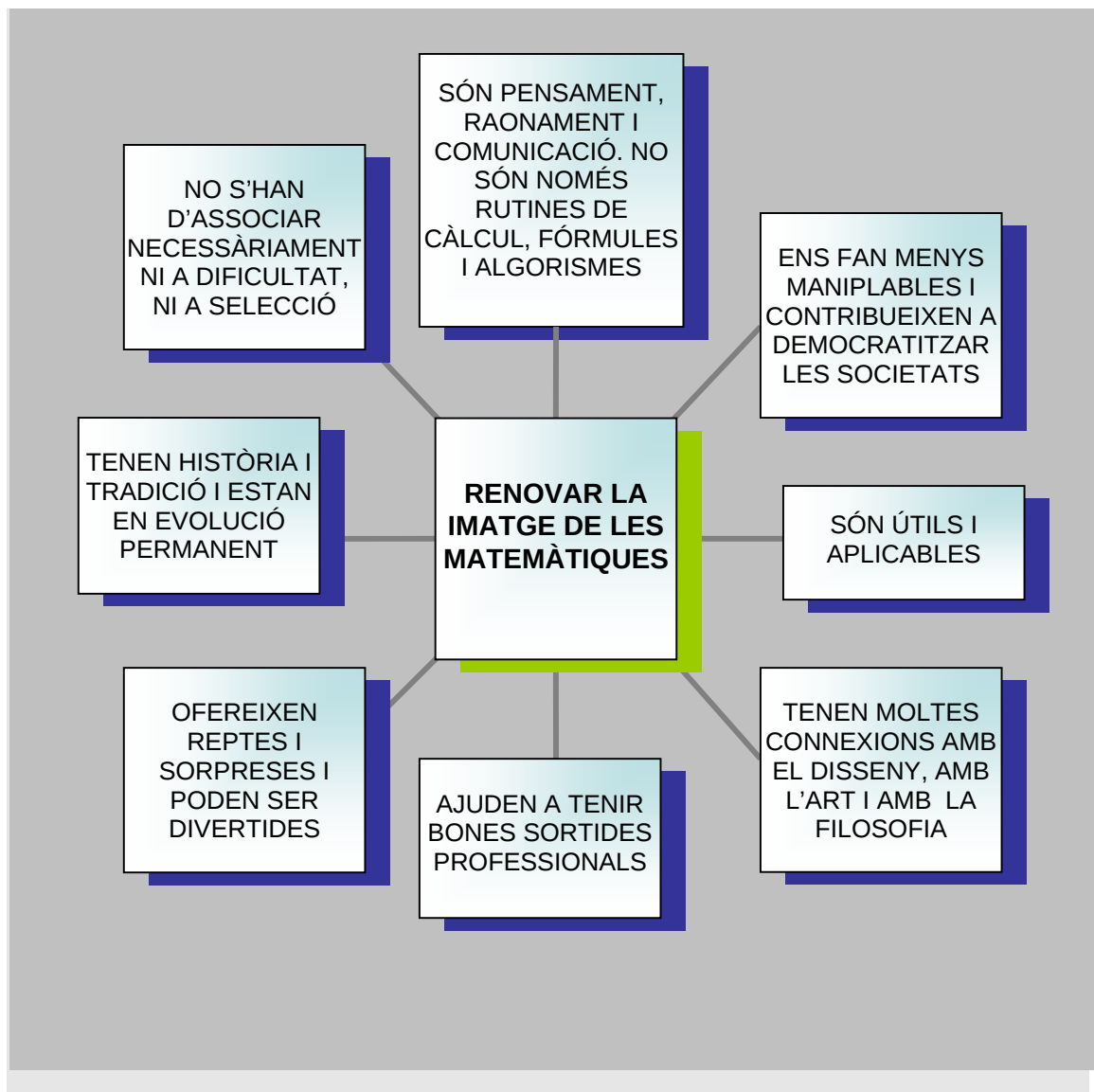
Fer esforços de coordinació entre les àrees i promoure el treball dels aspectes matemàtics de les competències bàsiques des d'altres àrees. De la mateixa manera, des de l'àrea de matemàtiques s'han de treballar la lectura, la comprensió, l'expressió, l'ortografia, i força continguts de les àrees de ciències, de socials, de tecnologia i de dibuix.

4. PRESENTACIÓ ESQUEMÀTICA DE LES ORIENTACIONS PER A LA MILLORA DE LA MOTIVACIÓ DE L'ALUMNAT EN L'ÀMBIT DE LES MATEMÀTIQUES

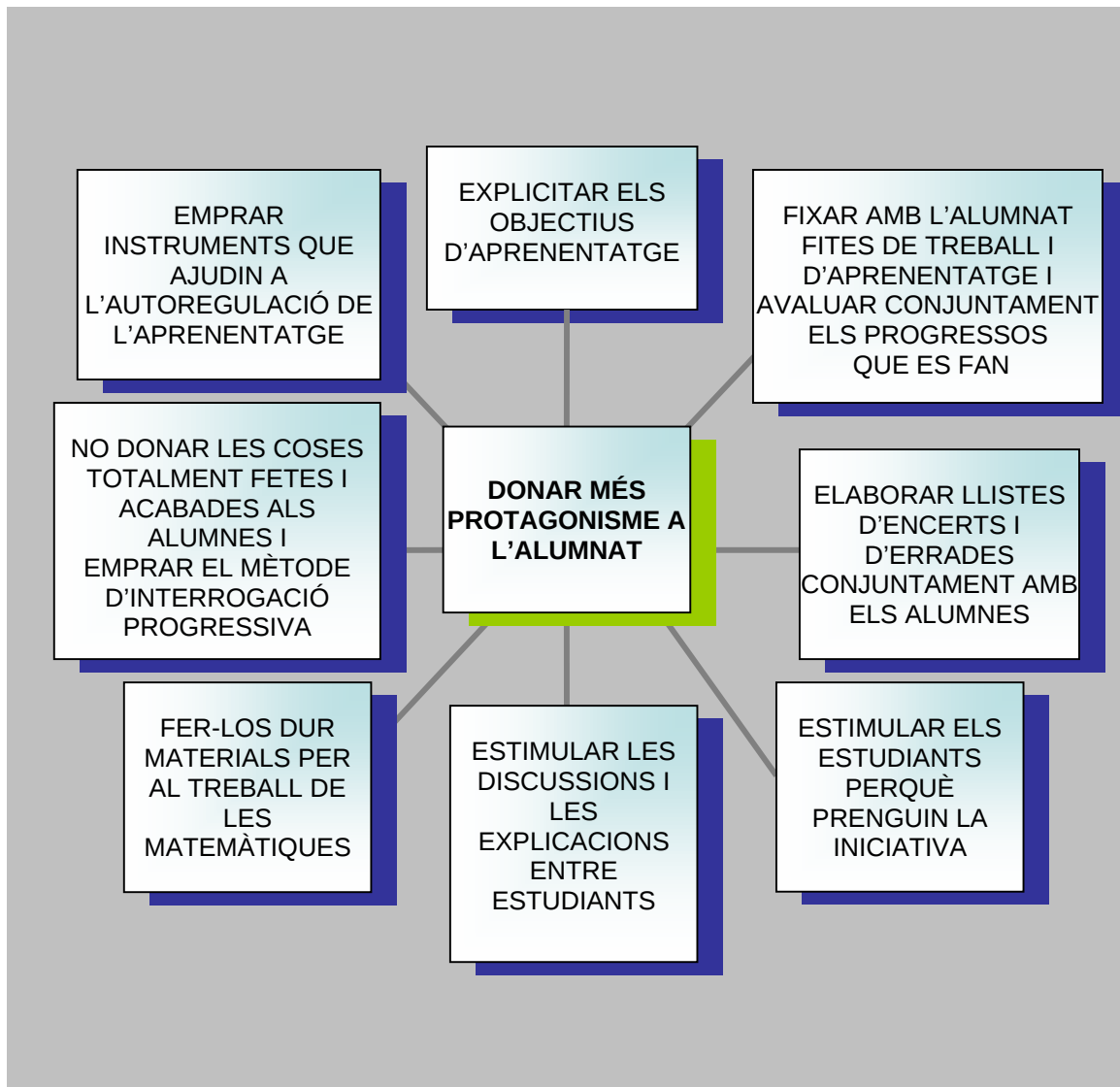
4.1. Els professors i les professores de matemàtiques hem de reinterpretar els arguments clàssics per a la motivació escolar.



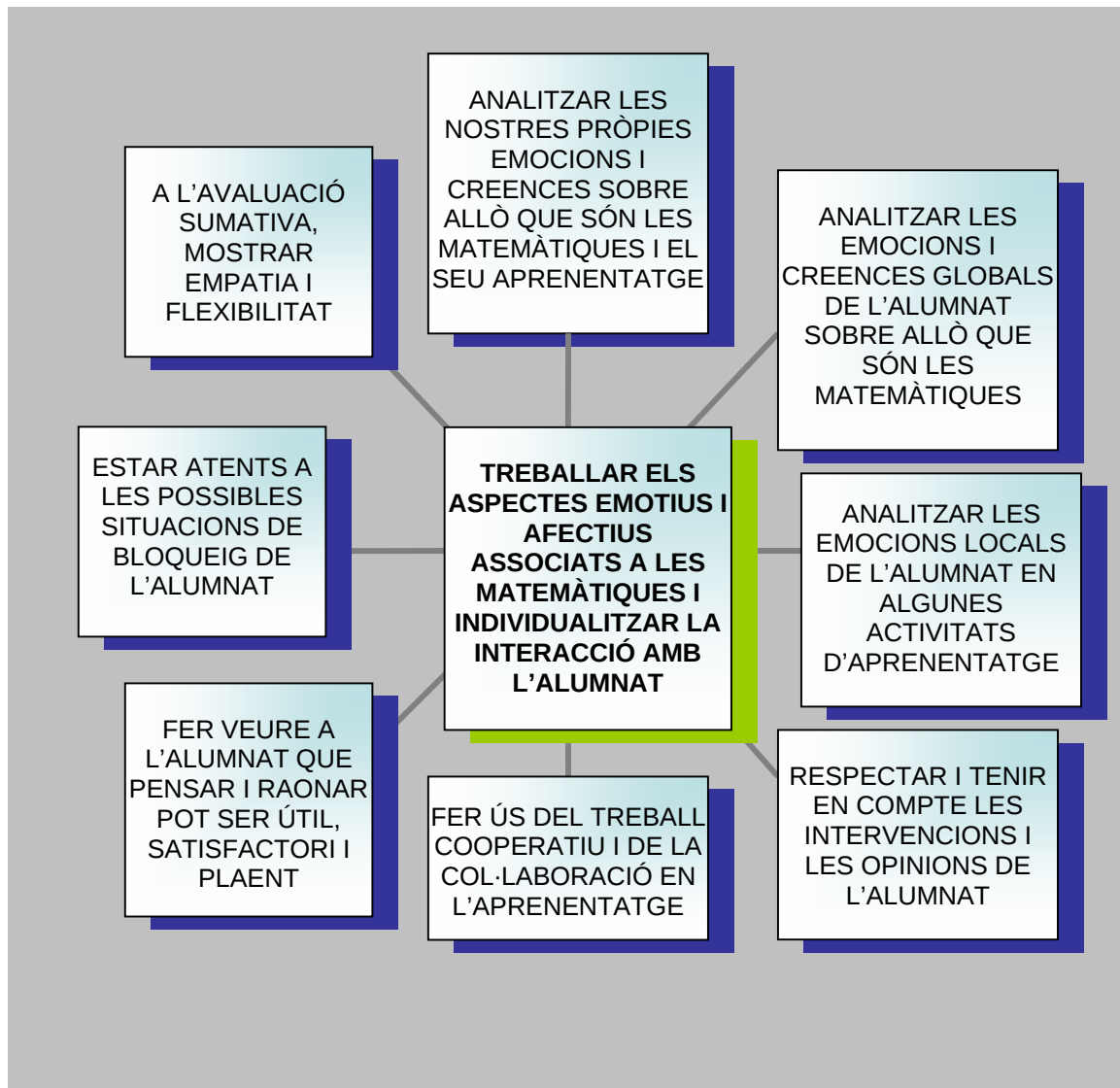
4.2. Els professors i les professores de matemàtiques hem de treballar per donar una imatge renovada de les matemàtiques.



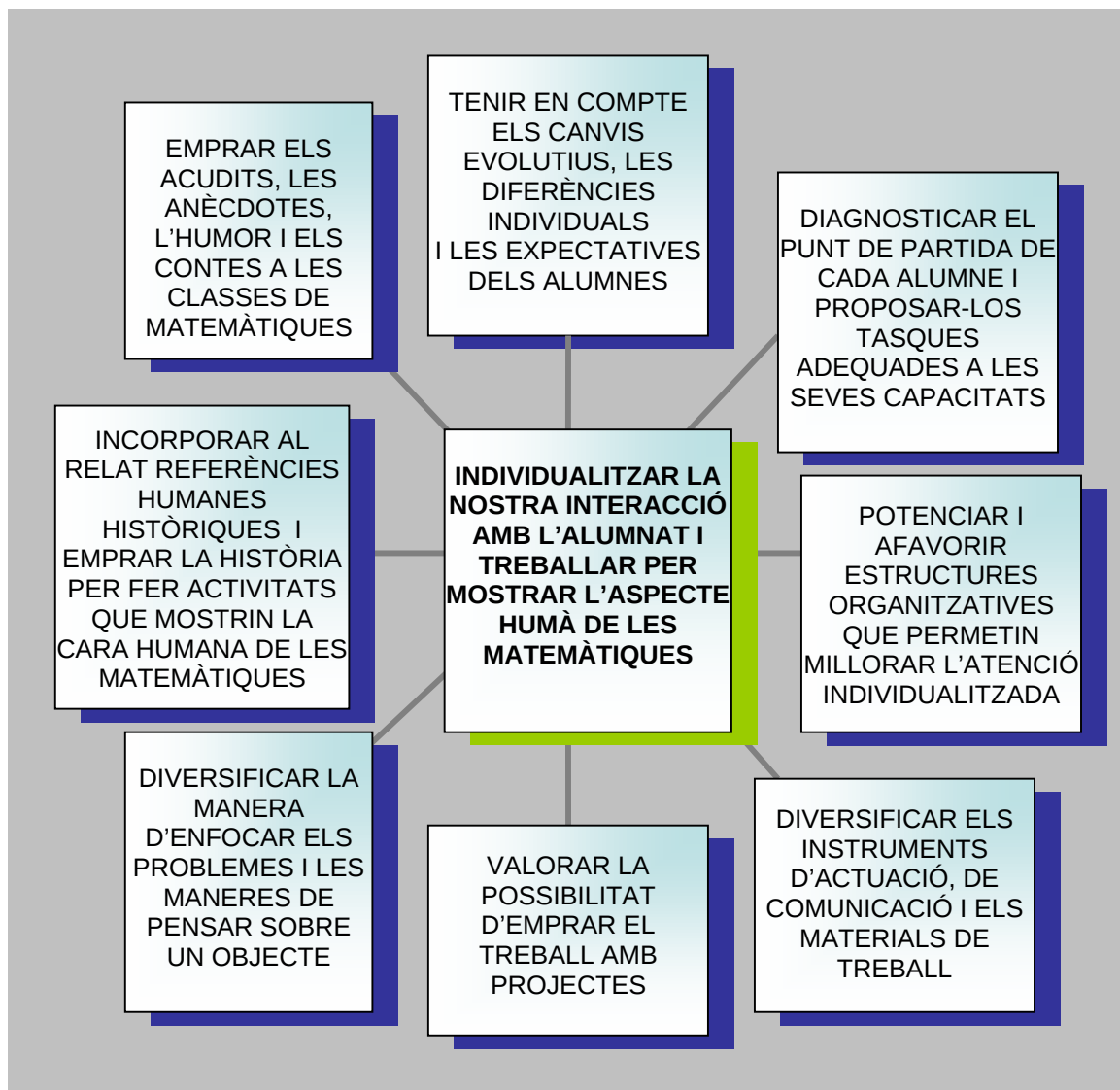
4.3. Els professors i les professores de matemàtiques hem de treballar per donar més protagonisme a l'alumnat. Els alumnes i les alumnes han participar més activament ens els processos d'aprenentatge, han de ser més responsables d'aquests processos i s'hi han d'implicar i comprometre.



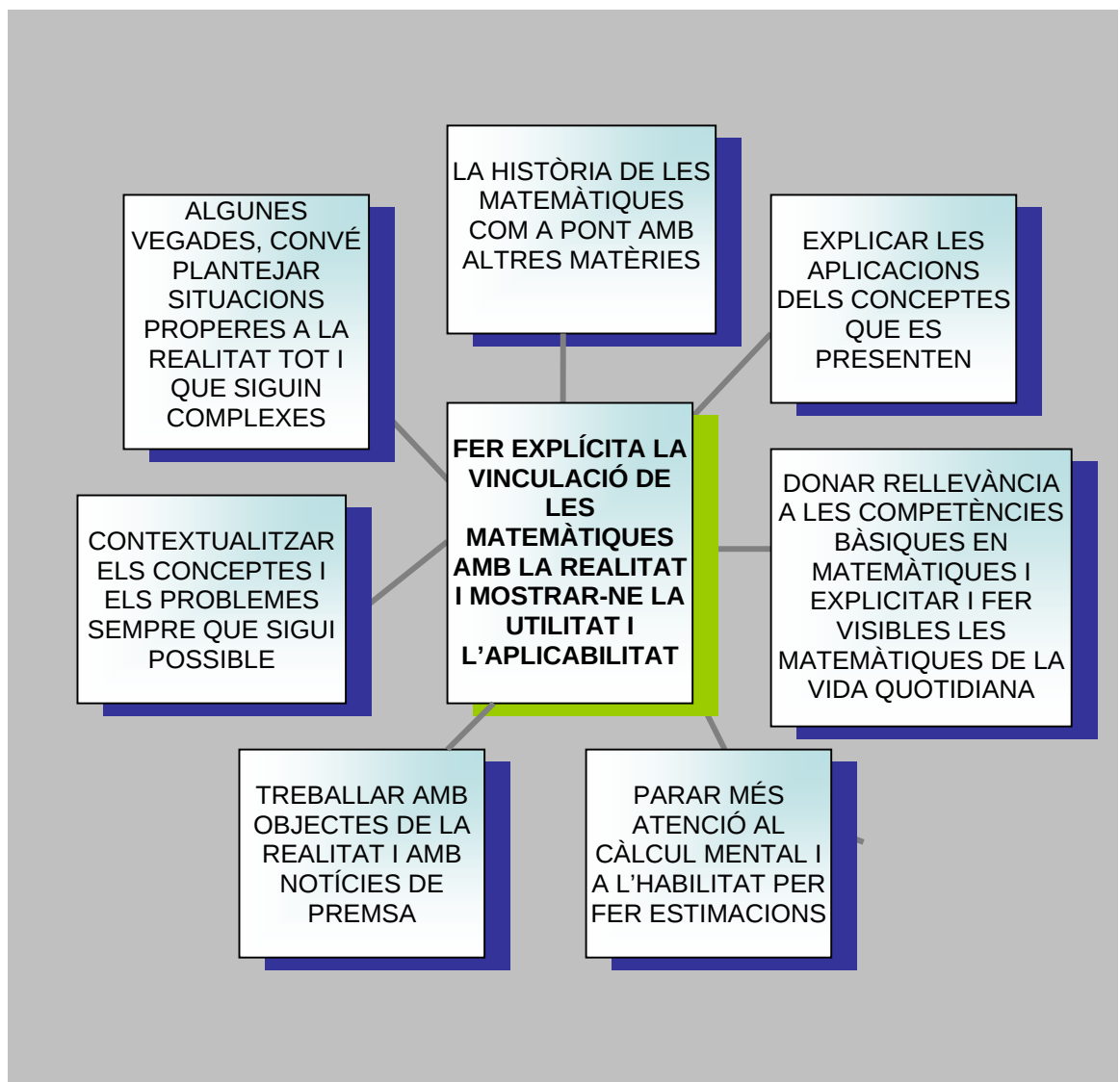
4.4. Treballar els aspectes emotius i afectius associats a les matemàtiques i al seu aprenentatge. Ens hem d'esforçar per individualitzar la nostra interacció amb l'alumnat i hem de treballar per mostrar l'aspecte humà de les matemàtiques.



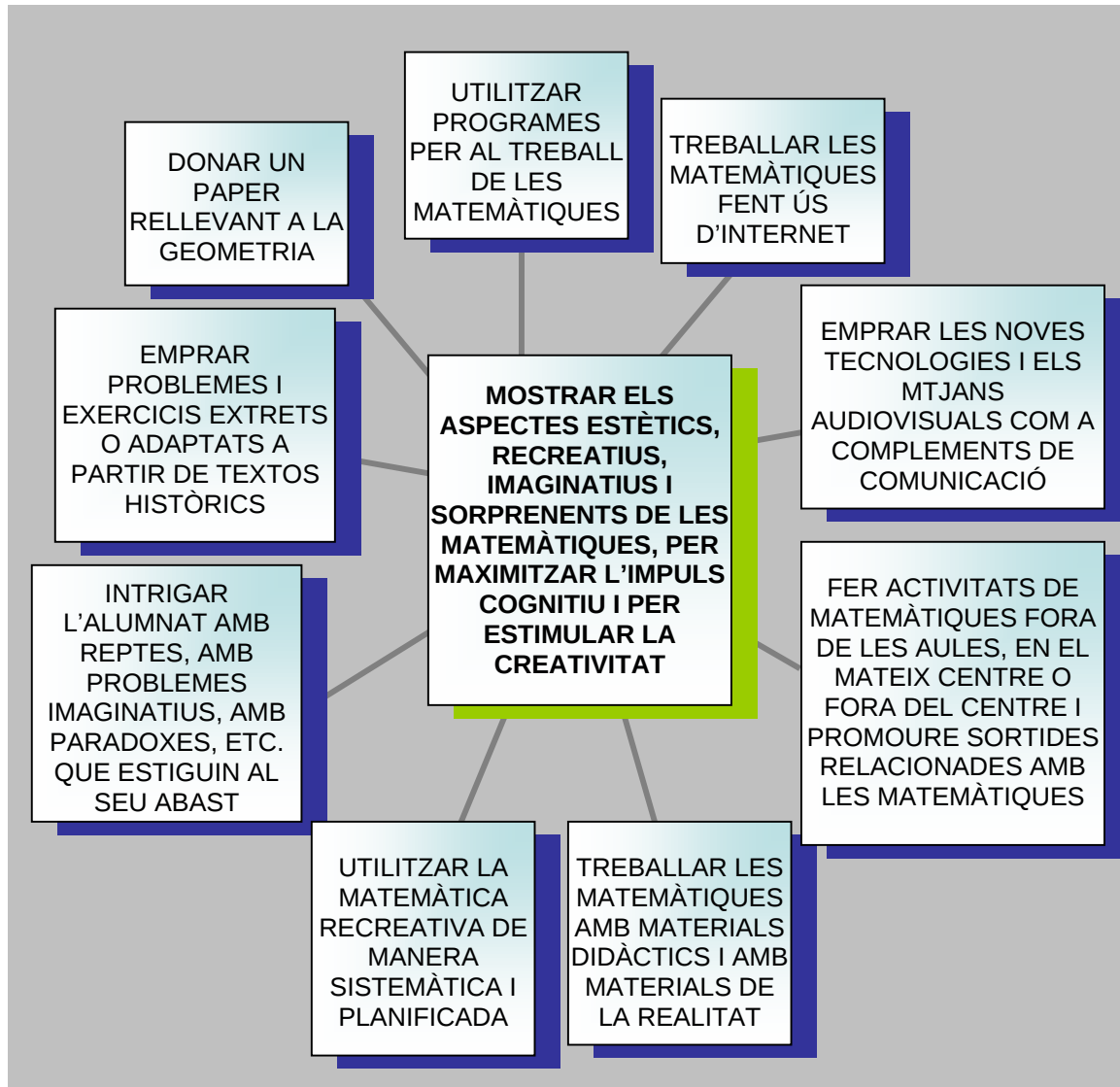
4.5. Individualitzar la nostra interacció amb l'alumnat i treballar per mostrar l'aspecte humà de les matemàtiques.



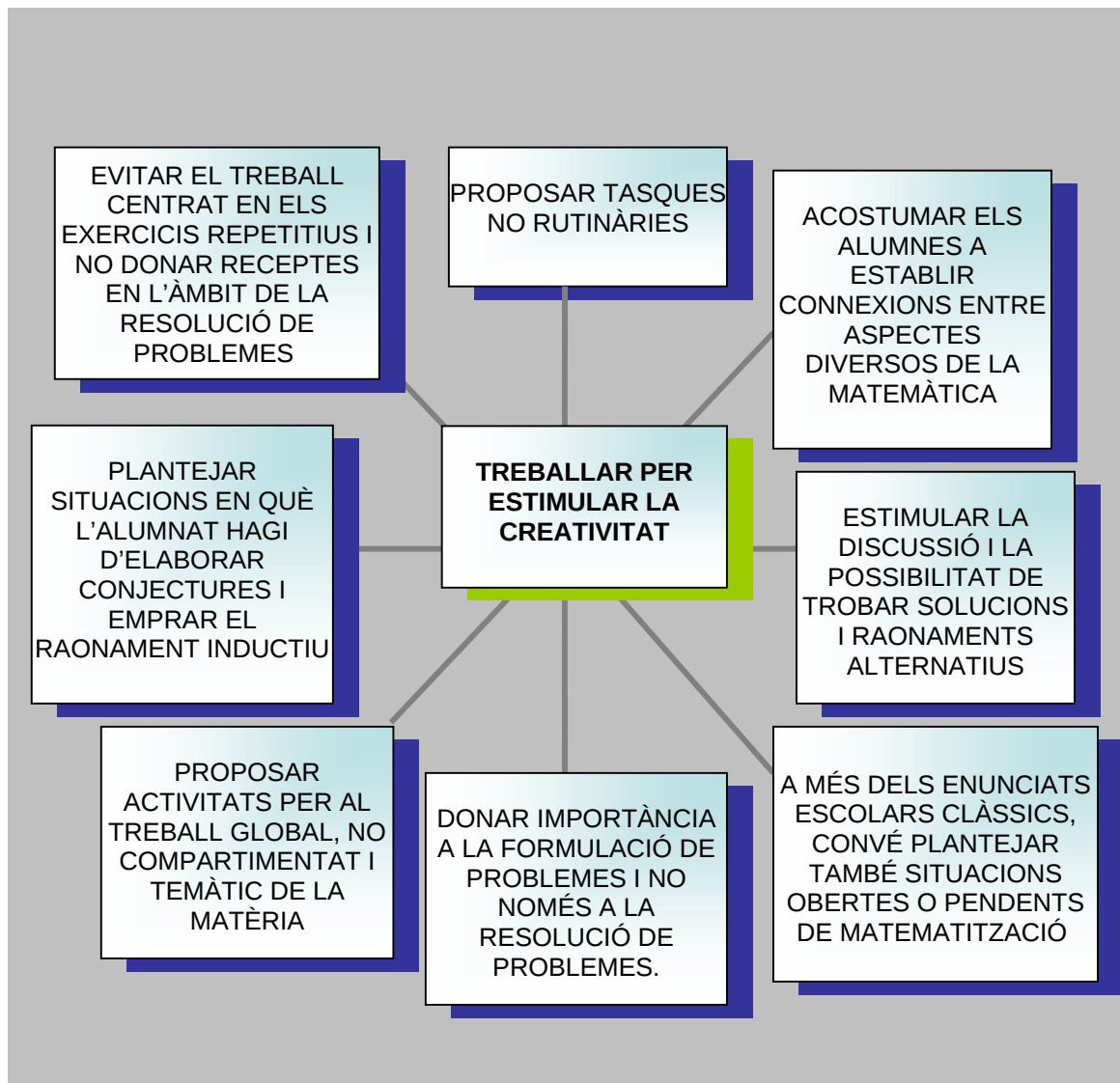
4.6. Treballar per fer explícita la vinculació de les matemàtiques amb la realitat i per mostrar la utilitat i l'aplicabilitat de bona part d'allò que fem a classe.



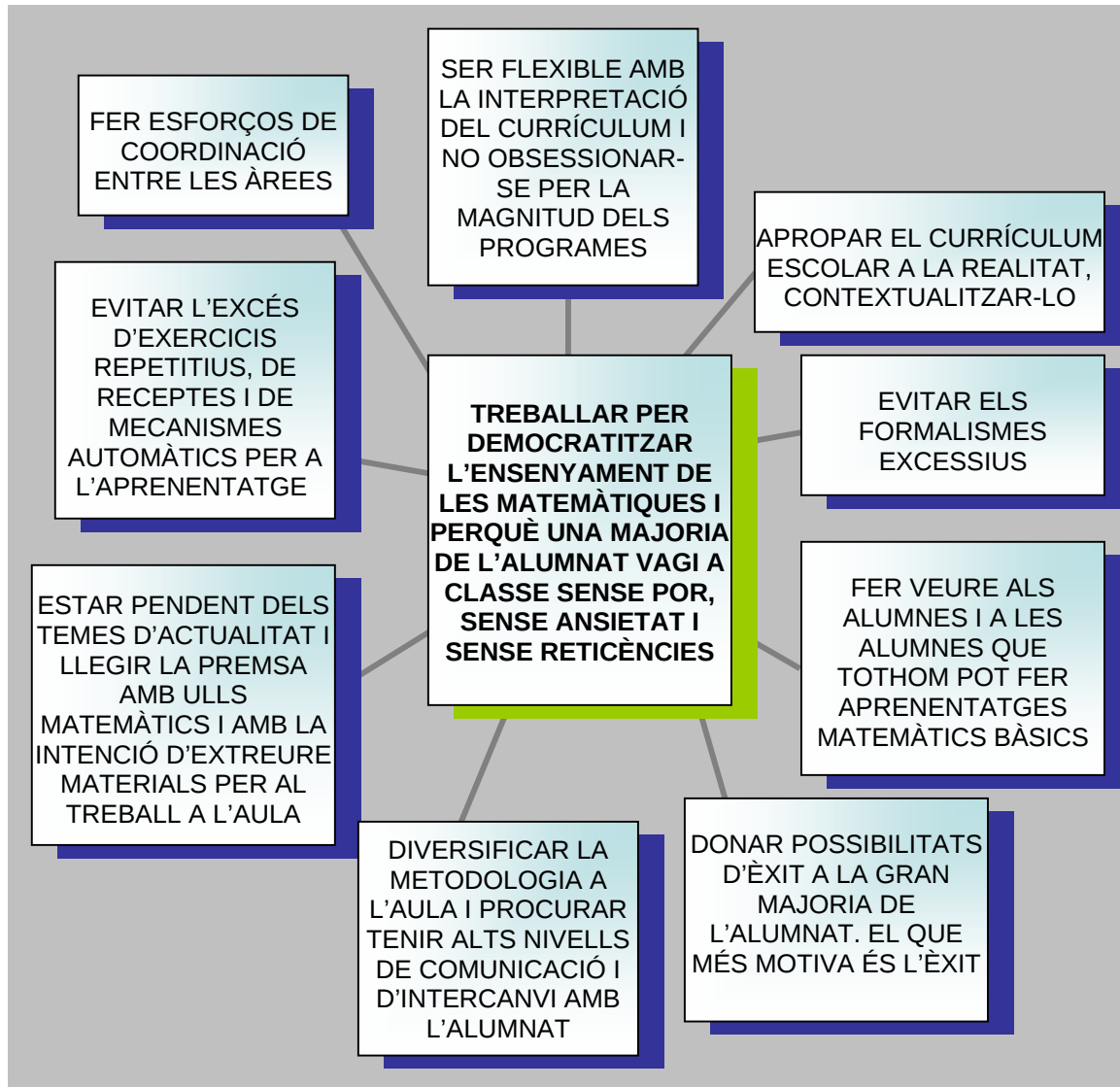
4.7. Treballar per mostrar els aspectes estètics, recreatius, imaginatius i sorprenents de les matemàtiques, per maximitzar l'impuls cognitiu i per estimular la creativitat.



4.8. Treballar per estimular la creativitat.



4.9. Treballar perquè una majoria de l'alumnat vagi a les classes de matemàtiques sense por, sense ansietat i sense reticències. Treballar per democratitzar l'ensenyament de les matemàtiques.



5. LA MOTIVACIÓ I LA FORMACIÓ INICIAL I PERMANENT DEL PROFESSORAT DE MATEMÀTIQUES

Per a la posada en marxa de les idees que s'han exposat en aquests treball, el professorat és la clau. La cita següent¹²¹ ens ho recorda:

“I com ha assenyalat la UNESCO diverses vegades, *els professors no són el problema, sinó la solució*. Efectivament, els professors són el factor clau de la qualitat de l'educació. A Europa, mai no ha tingut èxit una reforma educativa que s'hagi volgut dur a terme sense disposar de la col·laboració i l'acceptació del professorat.”

En la motivació del professorat des del punt de vista laboral o professional hi influeixen factors com ara les retribucions, les possibilitats de promoció i de reconeixement, les instal·lacions dels centres, el nombre d'hores de docència i el nombre d'hores complementàries, etc. Hi ha també, però, factors molt importants que també actuen com a condicions necessàries i que no sempre són presents: bona relació amb els companys i companyes, gestió eficaç i recolzament dels equips directius, recolzament i eficiència de l'administració, eficàcia en la presa de decisions, grau de conflictivitat de l'alumnat i dels seus pares, relació amb les famílies, proximitat al lloc de treball, coherència dels horaris laborals, etc.

Una de les claus en els processos d'innovació pot ser la de responsabilitzar el professorat, donar-li autonomia, promoció i reconeixement de la feina feta. Amb tot, cal dir que el punt de partida no és sempre el desitjable perquè la formació inicial del professorat no és l'adequada. Els anys de dedicació a la formació inicial del professorat de secundària m'han permès comprovar que, massa sovint, sectors importants del professorat accedeixen a secundària amb una concepció molt clàssica d'allò que significa l'ensenyament i l'aprenentatge de les matemàtiques. Hi ha una forta tendència a reproduir els esquemes sota els quals s'ha après i s'imposen, freqüentment, les tesis menys innovadores. El temps de formació contemplat al CAP és clarament insuficient per aconseguir una reflexió prou aprofundida que porti una majoria dels futurs professors a plantejar-se que l'ensenyament i l'aprenentatge de les matemàtiques al segle XXI ha d'emprendre nous camins. Els programes de formació experimental, com ara el CQP (Certificat de Qualificació Pedagògica), amb molta més càrrega de formació teòrica i pràctica, en canvi, sí que permeten un treball molt més aprofundit que obre noves perspectives als futurs professors i professores. Tot i esperant a veure com es concreten els nous esquemes en la formació inicial del professorat, una qüestió clau en aquesta fase d'aprenentatge ha de ser l'estudi de la motivació a les classes de matemàtiques.

D'altra banda, tal i com ja s'ha dit, el professorat s'ha acostumat a viure amb un elevat grau de desmotivació de l'alumnat i mostra sovint un punt de resignació que no li permet emprendre innovacions que canviïn la situació. El paper de la formació permanent hauria de ser aquí clau. La tasca, però, no serà gens senzilla tal i com ens comenta el professor Claudi Alsina¹²²:

“La velocitat del canvi deixa també en clar declivi el negoci editorial dels llibres de text i obre en canvi noves exigències a la formació permanent del professorat. O així hauria de ser, perquè difícilment la docència arrelada en el record formatiu personal té sentit avui. Aquest tema, però, és molt delicat. Si hi ha moltes persones que se senten insegures davant dels canvis, en el professorat hi ha enormes quantitats (en tots els nivells) de professionals aferrats a la recreació de les seves memòries.”

El mateix autor, però, deixar ben clar més endavant que si es volen aconseguir resultats innovadors, ha de ser amb la complicitat del professorat:

(121) Extret de: PRATS, J. RAVENTÓS, F. (Directors). *Els sistemes educatius europeus ¿Crisi o transformació?* Col·lecció Estudis Socials Núm.18 Edició electrònica disponible a Internet: www.fundacio.lacaixa.es

(122) Extret del capítol elaborat per Claudi Alsina a: GOÑI, J.Ma. [et al.]. *El currículum de matemàtiques en los inicios del siglo XXI*. Barcelona: Graó, 2000.

“Només des d’un profund respecte i una atenció constant al professorat podrem intentar una readaptació curricular constant nascuda no de la imposició sinó de la complicitat entre professorat, administració i societat.”

6. MOTIVACIÓ I EXIGÈNCIA

La millora de la motivació per al treball de les matemàtiques no és incompatible amb el manteniment o l’augment de l’exigència sinó tot el contrari. A un alumnat motivat li podrem exigir treball i progrés en el seu aprenentatge. A un alumnat desmotivats difícilment el farem entrar en el procés. L’esforç i el treball s’assumeixen, sobretot, quan la feina té sentit.

No convé pensar que treballar per tenir alumnes més motivats vol dir rebaixar tota exigència de treball amb serietat. Sense treball i sense esforç no hi ha aprenentatge. Ara bé, perquè aquest treball es pugui exigir i tingui sentit, ens calen unes matemàtiques que motivin l’alumnat. Ja s’ha vist que l’alumnat de BUP i de COU del sistema educatiu anterior, tot i estar sotmès a uns majors nivells d’exigència, sovint no aconseguia ser competent en matemàtiques i, a més, moltes vegades recollia a les aules una imatge ben distorsionada d’allò que són les matemàtiques.

Com ja s’ha dit, ara mateix no sembla que la cultura de l’esforç i del treball rigorós tingui un gran predicament. L’escola, però, s’hi ha de resistir i els professors i les professores hem d’exigir esforç i treball tot i donant exemple de dedicació i de compromís.

7. INNOVAR PAS A PAS

Millorar la motivació de l’alumnat i canviar la imatge de les matemàtiques escolars és amb tota seguretat un repte de gran dificultat. Com s’ha vist, la motivació és un fenomen complex en què intervenen molts factors difícils de controlar. A més, la motivació és variable amb funció del temps i de les persones. Els professors no hauríem confondre la nostra motivació amb la dels alumnes. Tot i que no ens hi hem de limitar, hem d’estar atents als seus gustos i tenir en compte que poden ser molt diferents dels nostres. Ens ho recorda el professor Antibí¹²³:

“El simple fet de tenir consciència que pot existir un fort desfasament de motivació entre els alumnes i els professors em sembla molt útil per millorar el nostre ensenyament. Això potser ens permetria evitar que docents competents i dedicats passin hores donant-se el plaer de fer matemàtiques davant de la mirada d’alumnes que s’avorreixen.”

La dificultat de l’empresa, però, no ens ha de fer desistir. Tot i que ens sembli que anem a contracorrent, hem de mantenir, ni que sigui per dignitat professional, la il·lusió per transmetre la nostra estima per les matemàtiques.

El primer pas per aconseguir canviar la imatge de les matemàtiques i millorar la motivació de l’alumnat per al seu treball consisteix a prendre consciència del diagnòstic que s’ha resumit al l’apartat 1 d’aquest capítol. Després serà possible emprendre accions a les aules que portin a considerar les matemàtiques des d’un altra perspectiva.

(123) Extret de: ANTIBÍ, A. *La constante macabra, o cómo se ha desmotivado a muchos estudiantes*. El Rompecabezas, Madrid.

Com s'ha vist, hi ha moltes i diverses possibilitats d'actuació. No cal pretendre posar-les totes en marxa. Al contrari, cal innovar pas a pas, amb la introducció progressiva d'alguns dels recursos i de les estratègies descrites, sense pressa i sense angoixa. És molt important sentir-se segur amb allò que farà a l'aula i s'ha de tenir tot estudiat i preparat.

El professorat ha de tenir clar que, com a mínim en part, la motivació depèn de la presentació que fa de les coses, de les seves estratègies i de les seves iniciatives. Fins i tot un alumne amb dificultats d'aprenentatge de les matemàtiques pot acabar per apreciar-les. Només cal que alguna persona trobi el punt de motivació d'aquest alumne. Em ve al cap un teorema del professor Alsina¹²⁴:

“La matemàtica rigorosa es fa amb la ment... La matemàtica formosa s'ensenya amb el cor. El professorat aconseguirà que els seus estudiants estimin les matemàtiques sí, i només sí, aconsegueix compartir coneixements, descobriments, assajos, experiments, diversions, emocions, sorpreses, aplicacions i activitats.”

(124) Aquesta cita s'ha extret de la conferència pronunciada pel professor Claudi Alsina de títol *La matemàtica hermosa se enseña con el corazón*, recollida a la seva pàgina web (<http://www.upc.es/ea-smi/personal/claui/>).

BIBLIOGRAFIA

- AGNEW, J. *Exploration in number theory*. Monterey: Wadsworth, 1972.
- Avaluació de competències bàsiques. Alumnes de 10 anys. Síntesi de resultats. Generalitat de Catalunya. Departament d'Ensenyament, 2004.
- ALSINA, C. *Contar bien para vivir mejor*. Rubes, Barcelona, 2004.
- ALSINA, C. *Del número 0 al 99. Fem comptes amb els contes*. Graó, Barcelona, 1993.
- ALSINA, C. *Geometria cotidiana. Placeres y sorpresas del diseño*. Barcelona: Rubes, 2005.
- ALSINA, C. *Estimar les matemàtiques*, Columna, Barcelona (2000).
- ALSINA, C., BURGUÉS, C., FORTUNY, J.M. *El joc de les eurocartes*. Inst. Català del Consum. Generalitat de Catalunya: Barcelona, 2001.
- ALSINA, C.; BURGUÉS, C.; FORTUNY, J.M. *Invitación a la didáctica de la geometria*. Madrid: Síntesis, 1990. (Col·lecció Cultura y aprendizaje núm.12)
- ALSINA, C.; BURGUÉS, C. i FORTUNY, J.M. *Materiales para construir la geometria*. Madrid: Síntesis, 1990. (Col·lecció Cultura y aprendizaje núm.11)
- ALSINA, C.; GARCIA, J.LL.; JACAS, J. *Temes clau de Geometria*. Barcelona: Edicions de la UPC, 1992.
- ALSINA, C.; PÉREZ, R. i RUÍZ, C. *Simetria dinàmica*. Madrid: Síntesis, 1991. (Col·lecció Cultura y aprendizaje núm.13)
- ALSINA, C., BURGUÉS, C., FORTUNY, J.M., GIMÉNEZ, J., TORRA, M. *Ensenyar matemàtiques*. Graó, Barcelona (1996).
- ALSINA, C., FORTUNY, J.M. *La matemática del consumidor*. Inst. Català del consum. Generalitat de Catalunya (2001).
- ALSINA, C. i De GUZMÁN, M. *Los matemáticos no son gente seria*. Rubes, Barcelona (2003).
- ÀLVAREZ, J.A. i GARCÍA, G. *Matemáticas, guía práctica para la vida cotidiana*. Madrid: Alianza Editorial, 2002.
- ANTIBI, A. *La constante macabra, o cómo se ha desmotivado a muchos estudiantes*. El Rompecabezas, Madrid.
- ARGÜELLES, J. *Historia de la matemática*. Madrid: Akal, 1989.
- AUSUBEL, D.P. [et al.]. *Psicología Educativa: Un punto de vista cognitivo*, Editorial Trillas: México, 1983.
- BISHOP, A. Lo que una perspectiva cultural nos cuenta sobre la historia de las matemáticas. *Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, núm. 26 monogràfic d'història de les matemàtiques, (2001): pàgines 61-72.
- BOLT, B.; HOBBS, D. *101 proyectos matemáticos*. Barcelona: Labor, 1991.
- BOLT, B. “¿Qué es la geometría?”. *Suma, revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas*, nº 19, (novembre de 1998): pàgines 5-16.
- Cadre d'évaluation de PISA 2003. Connaissances et compétences en mathématiques, lecture, science et résolution de problèmes*. Programa OCDE/PISA 2003. OCDE, 2003.
- CANALS, M.A. *Viure les matemàtiques de 3 a 6 anys*. Col. Temes d'Infància, Rosa Sensat: Barcelona, 2000.
- CASTELNUOVO, E. *Didáctica de la matemática moderna*. Barcelona: Trillas, 1993.
- CASTELNUOVO, E. *Ideas de Emmatemática Castelnuovo*. Madrid: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, 2004.
- CASTELNUOVO, E. *La Geometria*. Barcelona: Ketres, 1981.
- CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. *Estudiar matemáticas*. Barcelona: Horsoi, 1997.

- COLLETE, J.P. *Historia de las matemáticas*. Barcelona: Siglo XXI, 1985. (2 vols)
- Competències bàsiques ESO. Primer cicle. Proves d'avaluació. Síntesi de resultats. Resum de premsa*. Generalitat de Catalunya. Departament d'Ensenyament, 2003.
- Competències bàsiques ESO. Primer cicle. Proves d'avaluació. Síntesi de resultats*. Generalitat de Catalunya. Departament d'Ensenyament, 2003.
- Competències bàsiques ESO. Primer cicle. Proves d'avaluació. Síntesi de resultats*. Generalitat de Catalunya. Departament d'Educació, 2004.
- Congrés de competències bàsiques (Barcelona 26 i 27 de juny de 2003)*. Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu. Barcelona: Departament d'Ensenyament, CD-rom del 2003.
- CORBALÁN, F. *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato*. Madrid: Síntesis, 2002.
- CORBALÁN, F. *La matemática aplicada a la vida cotidiana*. Barcelona: Graó, 1995.
- COSSU, M. *Juegos de la mente*. Madrid: Pirámide, 1990.
- Currículum. Educació Secundària Obligatoria. Àrea de matemàtiques*. Barcelona: Generalitat de Catalunya. Departament d'Ensenyament, 1993.
- DA VINCI LEONARDO. *Tratado de la pintura*, Madrid, Akal S.A., 2004.
- DE GUZMÁN, M. *Aventuras matemáticas*. Barcelona: Labor, 1988.
- DE GUZMÁN, M. *Juegos matemáticos en la enseñanza*. Actas de las IV jornadas de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. Santa Cruz de Tenerife, 1984.
- DE GUZMÁN, M. *Para pensar mejor*. Barcelona: Labor, 1991.
- Debat sobre el sistema educatiu català. Conclusions i propostes*. Conferència nacional d'educació. Barcelona: Generalitat de Catalunya. Departament d'Ensenyament, 2002.
- DELORS, J. *Educació: Hi ha un tresor amagat a dins*. UNESCO: Barcelona, 1996.
- Diccionari de matemàtiques i estadística*. Barcelona: Enciclopèdia Catalana i Universitat Politècnica de Catalunya, 2002.
- DUNHAM, W. *El universo de las matemáticas*. Madrid: Pirámide, 1995.
- DURAN, X. i PIQUERAS, M. *Passejades per la Barcelona científica*. Barcelona: Ajuntament de Barcelona, 2002.
- Enciclopedia de las matemáticas*. 9 vol. Moscú-Madrid: MIR-Rubiños, 1993.
- Evaluación de la educación secundaria obligatoria 2000. Resumen informativo*. Instituto Nacional de Calidad y Evaluación. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia, 2000.
- ENZENSBERGER, H.M.. *El dimoni dels nombres*. Barcelona: Barcanova-Siruela, 1998
- EVES, H. *Mathematical reminiscence*. Mathematical Association of America, 2001.
- FAUVEL, J. *History in the Mathematics Classroom. The IREM Papers*, The Mathematical Association, 1990.
- FAUVEL, J. *For the learning of mathematics* 11 Núm. 2 (June 1991; special issue on using history of mathematics in the mathematics classroom)
- FAUVEL, J. i VAN MAANEN, J. (Editors): *History in mathematical education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.
- FERNÁNDEZ, S. La historia de las matemáticas en el aula. *Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, núm. 26 monogràfic d'història de les matemàtiques, (2001): pàgines 9-27.
- FISHER, R.; VINCE, A. *Investigando las matemáticas*. Madrid: Akal, 1990.
- FLORES, P. *Humor gráfico en el aula de matemáticas*. Arial: Granada, 2003.
- GARDNER, M. *Carnaval matemático*. Barcelona: Alianza Editorial, 1984.
- GARDNER, M. *Los mágicos números del doctor matrix*. Barcelona: Gedisa, 1994.
- GAUSS, C.F. *Disquisitiones Arithmeticae*. Barcelona: edicions de la Societat Catalana de Matemàtiques, 1996. (Traducció de l'original de 1801 de Griselda Pascual)
- GHYKA, M.C. *El número de oro*. Barcelona: Poseidón, 1992.
- GIMÉNEZ, J. [et al.]. *La actividad matemática en el aula*. Graó: Barcelona, 2004.
- GIMÉNEZ, J., GIRONDO, L. *Càlcul a l'escola*. Graó, Barcelona (1990).
- GODEMENT, R. *Álgebra*. Madrid: Tecnos, 1971.
- GÓMEZ, B. *Numeración y cálculo*. Madrid: Editorial Síntesis (Col·lecció Cultura y aprendizaje núm.3), 1993.
- GÓMEZ CHACÓN, INÉS M^a. *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*. Madrid: Narcea, 2000.

- GOÑI, J.Ma. [et al.]. *El currículum de matemáticas en los inicios del siglo XXI*. Barcelona: Graó, 2000.
- GORGORIÓ, N. [et al.]. *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*. Barcelona: Graó- ICE UAB, 2000.
- GRUP ZERO BARCELONA. *La medida y el número*. Barcelona: I. C. E. U. A. B., 1978.
- GRUP ZERO BARCELONA. *Progressions*. Barcelona: I. C. E. U. A. B., 1978.
- GUILLÉN, G. *Poliedros*. Madrid: Síntesis, 1990. (Col·lecció Cultura y aprendizaje núm.15)
- HALMOS, Paul R. *¿Qué es un matemático?* Madrid: Epsilon, 1991.
- HALMOS, P. *Teoría intuitiva de los conjuntos*. Barcelona: CECSA 1973.
- HARDY, G.H. *Autojustificación de un matemático*. Barcelona: Ariel, 1981.
- HERZBERG, F. *The motivation to work*. Wiley: New York, 1967.
- History in mathematical education*. Study Volum. International Commission on Mathematical Instruccion, 2000
- HONSBERGER, R. *El ingenio en las matemáticas*. Madrid: Col·lecció La Tortuga de Aquiles, 1994.
- Identificació de les competències bàsiques en l'ensenyament obligatori*. Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu. Barcelona: Departament d'Ensenyament, CD-rom del 2001.
- Informe Cockroft. Las matemáticas sí cuentan*. Madrid, MEC, 1985.
- JORBA, J. i CASELLAS, E. *La regulació i l'autoregulació dels aprenentatges*. I.C.E. de la U.A.B., Barcelona 1996.
- KLINE, M. *El fracaso de la matemática moderna*. Madrid: Siglo XXI, 1976.
- Learning for Tomorrow's World. First Results from PISA 2003*. Programa OCDE/PISA 2003. OCDE, 2004.
- LÓPEZ, J.A. "Diagnóstico general del sistema educativo. Resultados en matemáticas". *Suma, revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas*, nº 29 (novembre de 1998): pàgines 17-28.
- LÓPEZ, J.A. i MORENO M. "Tercer estudio internacional de matemáticas y ciencias". *Suma, revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas*, nº 27 (febrer de 1998): pàgines 39-47.
- MC. LEOD, D.B.; ADAMS, V.M. *Affect and Mathematical Problem Solving*. Springer Verlag 1989.
- MARTINON, A. *Las matemáticas del siglo XXI. Una mirada en 101 artículos*. Madrid: Nívola Ediciones, 2000.
- MASLOW, A. *Motivación y personalidad*. Díaz de Santos: Madrid, 1991.
- MASON, J.; BURTON, L.; STACEY, R. *Pensar matemáticamente*. Barcelona: Labor-MEC, 1992.
- MASON, J. *Mathematics teaching practice*. Chichester: Horwood Publishing Series in Mathematics and Applications, 2002.
- MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA: *Using history to teach mathematics*. Editor: Victor J. Katz. Washington, 2000.
- Mesurer les connaissances et compétences des élèves. Un nouveau cadre d'évaluation*. Programa OCDE/PISA 2000. OCDE, 1999.
- MIALARET, G. *Las matemáticas: cómo se aprenden, cómo se enseñan*. Madrid: Editorial Visor, 1986.
- MONEREO, C. "Conferència debat sobre competències bàsiques". *Centre de recursos pedagògics del Baix Llobregat II*, Viladecans (maig de 2001).
- MONEREO, C. "Ensenyar a aprendre: una vella aspiració amb noves coordenades". *Escola Catalana*, nº 376 (gener de 2001): pàgines 6-9.
- MONEREO, C. i POZO, J. "¿En qué siglo vive la escuela? El reto de la nueva cultura educativa". *Cuadernos de pedagogía*, nº 298 (gener de 2001): pàgines 6-9.
- MORIN, E. *Els 7 coneixements necessaris per a l'educació del futur*. Centre UNESCO de Catalunya: Barcelona, 2000.
- NCTM, *Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM-USA, 2000.
- NEWMAN, J.R. *SIGMA. El mundo de las matemáticas*. Barcelona: Grijalbo, 1985. (7 volums)

- PAULOS, J.A. *El hombre anumérico*. Barcelona: Tusquets Editores, 2000.
- PAULOS, J.A. *Érase una vez un número*. Barcelona: Tusquets Editores, 2002.
- PAULOS, J.A. *Un matemático lee el periódico*. Barcelona: Tusquets Editores, 2002.
- PLA, J. *Damunt les espatlles dels gegants*. Barcelona: Edicions de la Magrana, 1998.
- PLA, J. *Las matemáticas*. Barcelona: Montesinos, 1984.
- POLYA, G. *¿Cómo plantear y resolver problemas?* México: Trillas 1981.
- POLYA, G. *La découverte des mathématiques*. París: Dunod, 1967.
- POLYA, G. *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos, 1996. (Colección Estructura y Función)
- POLYA, G. *Métodos matemáticos de la ciencia*. Madrid: Col·lecció La Tortuga de Aquiles, 1994.
- PRATS, J. RAVENTÓS, F. (Directors). *Els sistemes educatius europeus ¿Crisi o transformació?* Col·lecció Estudis Socials Núm.18 Edició electrònica disponible a Internet: www.fundacio.lacaixa.es
- Problemas actuales de nuestra educación matemática primaria y secundaria*. Suma, revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, nº 31 (juny de 1999): pàgines 15-18.
- Quaderns d'avaluació 1. Desembre 2004. Estudi PISA 2003. Avançament de resultats*. Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu. Barcelona: Generalitat de Catalunya, Departament d'Educació, 2004.
- Resultats dels estudis Projecte PISA i Educació Secundària Obligatòria*. Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu. Barcelona: Generalitat de Catalunya, Departament d'Ensenyament, 2002.
- Resum de l'informe sobre els coneixements matemàtics dels alumnes de 16 anys*. Àrea de matemàtiques de la Inspecció. Barcelona: Departament d'Ensenyament, 1998.
- RÍBNIKOV, K. *Historia de las matemáticas*. Moscú: Mir, 1974. (Traducció espanyola 1987)
- Síntesi de resultats de les proves d'avaluació de competències bàsiques al cicle mitjà d'educació primària*. Generalitat de Catalunya. Departament d'Ensenyament, 2002.
- SABATÉ, D. *La geometría a secundària*. Barcelona: ICE-UNIFF-UPC, 2003.
- SABATÉ, D. [et al.]. *Resolver problemas*. Madrid: Editorial Alhambra Longman, 1990.
- SHELL CENTER FOR MATHEMATICAL EDUCATION. *El lenguaje de las funciones y gráficas*. Madrid: Publicaciones del MEC, 1990.
- SHOENFELD, A.H. *Mathematical Problem Solving*. Orlando Florida: Academic Press, 1985.
- SINGH, S. *L'enigma de Fermat*. Barcelona: Edicions 62, 1998.
- STEEN, L.A. (editor) *Mathematics and Democracy. The Case for Quantitative Literacy*. NCED, USA, 2001.
- STEWART, I. *Conceptos de matemática moderna*. Madrid: Alianza Editorial, 1977.
- TAHAN, M. *El hombre que calculaba*. Barcelona: Editorial Verón, 1995.
- TAHAN, M. *L'home que calculava*. Barcelona: Editorial Empúries, 2003.
- VELÁZQUEZ, F. [et al.]. *Matemáticas e internet*. Barcelona: Editorial Graó, 2004.
- VIDAL, S. *Dia del número, motivació de la matemàtica*. Publicacions de l'Abadia de Montserrat: Barcelona, 2005.

LES FONTS DE LES IMATGES

Imatges del capítol 2

Les imatges que apareixen als apartats 2.1. (pàg. 53) , 2.15. (pàg. 71) i 2.18. (pàg. 74) són de “El Periódico”.

Les imatges que apareixen als apartats 2.2. (pàg. 56) , 2.3. (pàg. 57), 2.12. (pàg. 67), 2.15. (pàg. 70) són de “La Vanguardia”.

Les imatges que apareixen als apartats 2.3. (pàg. 58), 2.4. (pàg. 59) , 2.15. (pàg. 71), 2.16. (pàg. 72) i 2.17. (pàg. 73) són de “El País”.

Les imatges que apareixen als apartats 2.2., 2.5., 2.6., 2.7., 2.9., 2.10., 2.11., 2.13., i 2.14. són de la pàgina web del professor Pablo Flores de la Universitat de Granada que ha tingut la gentilesa de permetre'm l'ús dels seus materials
(<http://ddm.ugr.es/personal/pflores/>.)

Les imatges que apareixen a l'apartat 4 són de les pàgines web següents:

<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Escher.html>

<http://centros5.pntic.mec.es/ies.victoria.kent/Rincon-C/Cie-Hist/Atenas/As-School.jpg>

Imatges del capítol 5

La imatge que apareix a l'apartat 1. (pàg. 118) és de “La Vanguardia”.

La imatge que apareix a l'apartat 2.2. (pàg. 133) és de “France Football”.

Imatges del capítol 6

Les imatges que apareixen a l'apartat 2. (pàg. 141 i pàg.142) són de la pàgina web següent:

<http://www.bcn.es/gaudi2002/>

Les imatges que apareixen a l'apartat 3. són de les pàgines web que es comenten al mateix apartat.

Les imatges que apareixen a l'apartat 4. (pàg. 153 i pàg.154) són de “La Vanguardia”.

Les imatges que apareixen a l'apartat 7. tornen a ser del professor Pablo Flores.

Imatges del capítol 7

Les imatges que apareixen a l'apartat 2. (pàg. 177 i pàg. 178) són de “La Vanguardia”.

Imatges del capítol 9

La imatge que apareix a l'apartat 5. (pàg. 211) és dels ítems alliberats de les proves PISA de 2000.

MATERIALS COMPLEMENTARIS

A més de la memòria del treball es presenten els documents següents:

1. Recull dels materials fotocopiabls inclosos a l'estudi (per facilitar-ne l'ús a l'aula).
2. Presentació en PowerPoint que resumeix el treball per facilitar-ne la difusió entre el professorat.
3. Presentació en PowerPoint, referent a la imatge de les matemàtiques escolars, que resumeix el capítol 2 del treball. També va dirigida al professorat.
4. Presentació en PowerPoint, referent a les matemàtiques escolars i a la seva imatge, dirigida a l'alumnat de secundària (aquesta presentació es va passar a l'IES Gal·la Plàcidia amb motiu de les jornades culturals de Sant Jordi del curs 2005-2006).