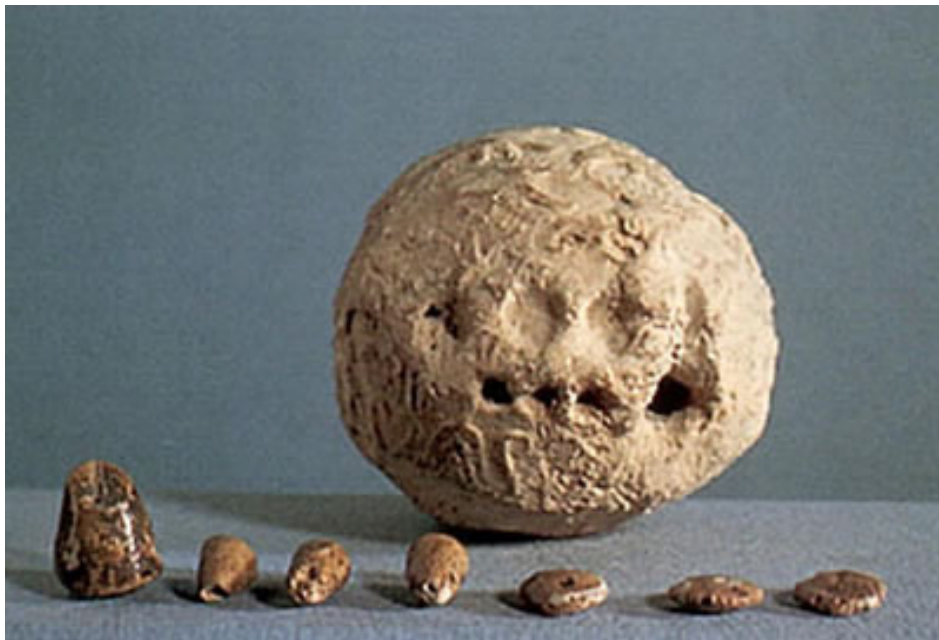


Càlculus

La història dels nombres com a eina de millora en la comprensió numèrica de l'alumnat de 10 a 14 anys



Joan Jareño Ruiz

Curs 2006/07

Supervisió: David Barba i Uriach (Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals – Universitat Autònoma de Barcelona)

Índex

1. Introducció	
1.1. El projecte inicial	3
1.2. Evolució i modificació del projecte	3
1.3. Acotació del projecte: els nombres naturals	4
2. Estructura del treball	
2.1. L'estudi teòric.....	4
2.2. El web "Càlculus"	5
3. Metodologia	
3.1. Sobre els apartats d'història i aprenentatge.....	8
3.2. Sobre el web i el disseny d'activitats	8
4. Resums i índexs dels apèndixs	
4.1. Quadrar: història	9
4.2. Quadrar: aprenentatge	10
4.3. Quadrar: propostes	10
4.4. Comptar: història.....	10
4.5. Comptar: aprenentatge	12
4.6. Comptar: propostes	13
4.7. Escriure: història	13
4.8. Escriure: aprenentatge	17
4.9. Escriure: propostes	19
5. Algunes conclusions	
5.1. Evolució històrica i processos d'aprenentatge	19
5.2. La història dels nombres per l'alumnat de 10 a 14 anys	21
6. Bibliografia	
6.1. Llibres bàsics.....	23
6.2. Altres llibres consultats.....	25
6.3. Articles, tesis, memòries.....	26
6.4. Altres articles, tesis, memòries	28
6.5. Algunes dels webs consultats	28

1. Introducció

1.1. El projecte inicial

El projecte **Càlculus** es va plantejar amb uns objectius inicials que giraven al voltant de tres eixos:

- a) **Fer un recull històric:** Dels sistemes de numeració, dels algorismes de càlcul aritmètic i dels instruments i sistemes (mecànics o no) que s'han creat per facilitar-lo, analitzant les seves característiques.
- b) **Fer una investigació didàctica:** Sobre les relacions entre les dificultats en l'evolució històrica dels sistemes de numeració i les que sorgeixen en el seu procés d'aprenentatge, aportant aspectes innovadors a les anàlisis que s'han fet fins ara del problema. Investigar també aquells algorismes en desús i aquells instruments antics de càlcul que permetin millorar la comprensió de les operacions bàsiques, de les seves propietats i mètodes i que potenciïn l'adquisició d'estratègies de càlcul pròpies. És a dir, que afavoreixin una millora en les competències instrumentals en el càlcul.
- c) **Proposar recursos:** Que aprofitin les possibilitats que l'ús de les TIC ens ofereixen en quant a interacció, creació de simulacions i autoregulació de l'aprenentatge.
 - reconstruint didàcticament l'evolució històrica i incorporant, amb una perspectiva integradora, aquest coneixement a la cultura matemàtica i humanística del nostre alumnat.
 - concretant amb un caràcter formatiu l'anàlisi didàctic anterior, potenciant la construcció personal dels aprenentatges.

1.2. Evolució i modificació del projecte

L'abast inicial previst, l'amplitud i contrastació de fonts documentals a consultar i el grau de dificultat tècnica en el disseny i implementació interactiva dels recursos proposats, han fet que el temps previst d'un curs escolar es mostrés massa curt per desenvolupar-lo d'una forma prou completa i profunda. Així, la concreció final del projecte només recull la part relativa a la història i evolució dels nombres. Queda oberta, doncs, una possible via de continuació que afecta a l'evolució dels algorismes de càlcul escrits i al desenvolupament de les eines de d'ajuda al càlcul anteriors a la calculadora electrònica.

Un altre modificació del projecte té relació amb el tipus d'activitats que es proposen per realitzar a l'aula, donat que, tal com es mostrarà, la relació entre les dificultats aparegudes en l'evolució històrica de les formes de comptatge i numeració i les que troba l'alumnat en les seves primeres passes d'aprenentatge, tot i tenir paral·lelismes en molts aspectes, no han estat tan freqüents com s'esperaven inicialment i es refereixen a qüestions que l'alumnat del Cicle Superior de Primària i el del Primer Cicle de Secundària Obligatòria tenen, majoritàriament, prou superades.

1.3. Acotació del projecte: els nombres naturals

Ja des del primers moments de disseny de la proposta del projecte es va veure clar que l'estudi a realitzar es limitaria al camp dels *nombres naturals*. Les raons d'aquesta acotació són diverses:

- no ampliar en excés els camps d'estudi dels conceptes plurals de nombre, ni de les seves formes de representació, ni dels algorismes a utilitzar.
- centrar-se, en conseqüència, en els nombres que serveixen de base a tots els altres (enters, racionals...) ja que "a sota" dels càlculs amb cada tipus de nombres hi ha el càlcul amb naturals¹.
- són els primers nombres que aprenem i són, en certa manera, en els que menys hi tornem a pensar, justament perquè són els que més coneixem i més utilitzem. Provocar un canvi en el coneixement del nombre natural i en el de les seves formes de representació (gràfica, oral i escrita) veurem que ha esdevingut un dels objectius finals de la proposta que presentem.

2. Estructura del treball

El projecte **Càlculus** té dues part clarament diferenciades i, a la vegada, estretament lligades.

- Un **estudi teòric** ampli que afecta als preconceptes de nombre natural, a les formes de comptatge oral i als diferents tipus d'escriptures numèriques; aquest estudi conté, per a cada apartat, un seguit de propostes per activitats d'aula.
- Un **web** on poder trobar presentada de forma breu i divulgativa les informacions històriques recollides i les relatives als processos d'aprenentatge relacionats. Al web es troben desenvolupades, de forma interactiva, la gran majoria de les activitats proposades a l'apartat teòric. Aquestes activitats estan dissenyades per poder-les realitzar directament amb alumnat.

2.1. L'estudi teòric

La investigació sobre l'evolució del concepte de nombre natural, del comptatge, de l'estructura de formació dels numerals orals i de la seva representació escrita s'ha dividit en tres apartats bàsics:

- **Quadrar**²: s'estudia els orígens del concepte de nombre en els seus passos previs, com poden ser la percepció visual de quantitats o l'establiment de correspondències biunívokes entre parells de conjunts.

¹ Per exemple: quan es calcula amb fraccions fem tot un seguit de passos que, mirats un per un, no deixen de ser càlculs amb naturals (multiplicacions i divisions per igualar denominadors), sumes i restes de numeradors quan toca, divisions per simplificar... Amb el càlcul amb enters passa el mateix: un cop decidim "què hem de fer" mirant els signes, es treballa operant amb el valor absolut dels nombres (que són nombres naturals). El desenvolupament de les destreses bàsiques del càlcul amb naturals agafa, des d'aquest punt de vista, una importància especial. D'alguna manera "suavitza" les dificultats afegides de les operacions amb els altres tipus de nombres (fraccions, decimals, enters...) i no restarà "temps" a la millor comprensió dels conceptes relacionats.

- **Comptar:** s'analitzen les accions relacionades amb el comptatge i els "sabers" relacionats. Entre aquests *sabers* s'estudia abastament el procés de formació dels numerals orals
- **Escriure:** s'investiguen les diferents formes de representació escrita dels nombres, les seves característiques i els avantatges o limitacions que presenten.

Cadascun d'aquests apartats ha estat subdividit en altres tres que es repeteixen a cadascun:

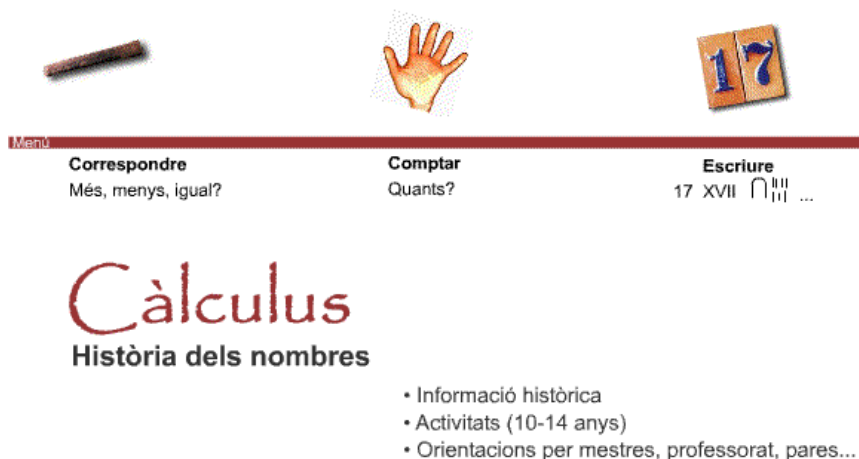
- **Història:** es recull l'evolució històrica de l'apartat corresponent, contemplant les dificultats aparegudes al llarg d'aquesta evolució i presentant exemples abundants provinents de l'arqueologia, de mostres històriques o del camp de l'antropologia.
- **Aprentatge:** s'estudia el procés d'aprenentatge de cada apartat parant especial atenció a les dificultats més usuales que hi apareixen, intentant-les relacionar, en alguns casos, amb les històriques. També es recullen alguns suggeriments didàctics generals.
- **Propostes:** després d'un petit anàlisi de la situació d'aprenentatge en la que es troba l'alumnat de 10 a 14 anys sobre cadascun dels apartats, es fa una sèrie de propostes d'activitats concretes per portar a terme a l'aula.

D'aquesta forma la concreció teòrica del projecte queda recollida en nou capítols que es presenten en forma d'annexos i dels quals es mostra a la part final d'aquesta memòria el resum i l'índex de cadascun d'ells.

2.2. El web "Càlculus"

El web creat a partir del treball teòric anterior té una estructura similar a la de l'apartat teòric, canviant un dels noms (*Correspondències*, en comptes de *Quadrar*, *Comptar* i *Escriure*). Hi tornem a trobar els tres apartats anteriors amb els mateixos subapartats però amb ordre i títols lleugerament modificats (*Història - Activitats - Mestres*). A nivell de disseny cadascun s'ha identificat amb un color diferent. Hi ha una diferència important en quant a intencionalitat i presentació de cada subapartat.

² *quadrar* és una expressió que proposa Gheverghese (1996), per anomenar qualsevol mètode que no impliqui pròpiament l'acció de comptar i serveixi per establir una correspondència biunívoca entre dues col·leccions d'objectes, resolent la qüestió de saber si hi ha "més", "menys" o "igual" sense necessitar de mesurar la quantitat o la diferència entre quantitats



- **Història:** l'objectiu és bàsicament divulgatiu la qual cosa afecta a la seva forma d'exposició. Es divideix en petits capítols i cada capítol en unes poques pantalles expositives. Hi ha una mínima interactivitat de caràcter expositiu. Està pensat perquè pugui ser consultat per alumnat o visitants generals del web. (*Correspondre*, 3 capítols; *Comptar*, 3 capítols; *Escriure*, 11 capítols)
- **Mestres:** també és expositiva i resumeix alguns dels aspectes més importants recollits als apartats teòrics sobre aprenentatge. També es divideix en petits capítols, cadascun en una pantalla i, excepte en el cas de l'escriptura numèrica on totes les activitats estan reunides en una sola pantalla, hi apareixen l'objectiu i el resum de cadascuna de les activitats relacionades. Està pensat per ser utilitzat per pares i mares o professorat, en especial pel professorat de secundària que acostuma a tenir, per formació i experiència professional, un coneixement més difús dels problemes de les primeres passes de l'aprenentatge numèric. (*Correspondre*, 3 apartats; *Comptar*, 4 apartats; *Escriure*, 6 apartats).
- **Activitats:** és la part més important del web. Intenta treballar els aspectes històrics relacionats amb el concepte i evolució dels nombres naturals proposant tot un conjunt d'activitats. Cada activitat està subdividida en diferents pantalles, agrupades sota un mateix submenú i sempre hi ha interactivitat, ja sigui en forma d'animacions expositives, o en forma de preguntes o d'exercicis. Molts d'aquests fan propostes de casos particulars que s'autogeneren aleatòriament. Molts, també, tenen alguna forma d'autocorrecció immediata. Aquest tipus de disseny interactiu permet, a més, respectar el ritme individual de cada alumne/a. S'han elaborat un total de 29 activitats diferents (5 sobre *Correspondències*, 11 sobre *Comptar* i 13 sobre *Escriure*)



- Càlculus
- Correspondre
- Comptar
- Escriure
- Crèdits

Comptar
Activitats

Possiblement ni te'n recordes de quan vas aprendre a comptar. També, segurament, no has conegut cap persona, tret dels nens i nenes molt molt petits, que poc o molt, no sàpiga fer-ho.

Comptar és una de les accions matemàtiques que realitzem més sovint.

Història
Activitats
Mestres

Selecciona cada activitat per veure un resum



Durada	
Curta (al voltant de 5 minuts)	<input type="radio"/>
Mitjana (al voltant de 15 minuts)	<input type="radio"/>
Larga (més de 15 minuts)	<input type="radio"/>

- Com comptem
- Les feines dels nombres
- Comptem de l'1 al 10
- Construïm numerals
- Comptar amb el cos
- Comptar cantant
- Comptar un milió
- Una mà de comptes
- Quan no podem comptar
- Ordenar no és fàcil
- La màgia de comptar



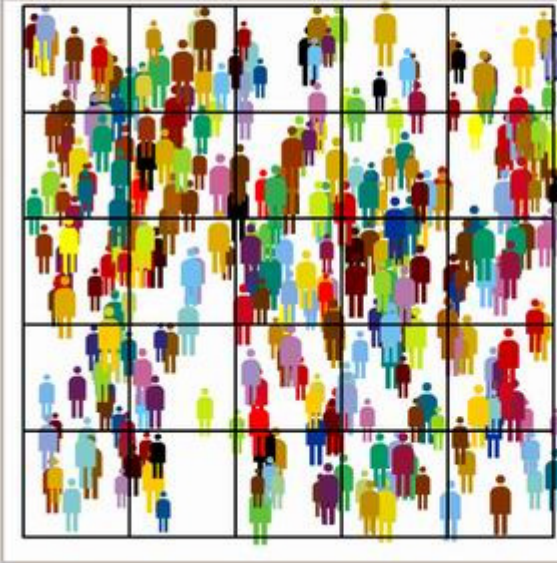
Aspecte de la pantalla d'activitats sobre comptatge

Quan no podem comptar - Windows Internet Explorer

Peixos a l'estany
La manifestació
Sondeig electoral

Quanta gent ha anat a la manifestació?

A les notícies estem acostumats a veure que pels convocants d'una manifestació sempre hi ha anat molta gent, però pels contraris a la convocatòria han anat poquíssims. La premsa, darrerament, acostuma a explicar com fa els càlculs. Nosaltres, ara, podem comptar, quanta gent hi ha aproximadament en aquesta concentració comptant un petit requadre i calculant aproximadament el total.



Quanta gent tenim

En comptes de comptar totes les persones sobreposa una quadrícula, tria un quadre que consideris representatiu i compta la gent que hi veus

Quadrícula

Quantes hi ha a un dels quadres?

Finestra amb una subpantalla d'activitat

S'han vigilat força els aspectes de navegabilitat del web. El format general és accedir, en primera instància a presentacions de dos o tres línies dels cada capítol històric o de cada activitat.



Exemple de pantalla de presentació d'activitat

A partir d'aquesta presentació es pot obrir una finestra emergent on es desenvolupa tot el capítol o activitat. En el cas de les activitats, amb el botó *Mestres*, es pot accedir a una breu descripció de l'activitat de l'apartat d'*orientacions*. S'ha procurat no forçar excessivament els vincles entre pàgines del propi web donada la presentació lineal de la majoria de subapartats. Tot i així existeixen alguns enllaços des de l'apartat històric a algunes pantalles molt concretes d'activitats. També s'ha creat un breu *glossari* (accessible amb enllaços) que recull alguns dels termes menys familiars que es fan servir al text del web.

3. Metodologia

3.1. Sobre els apartats d'història i aprenentatge

Els apartats teòrics sobre història i aprenentatge s'han treballat fonamentalment de forma bibliogràfica, tant directament de llibres o articles com a través d'internet sempre que les fonts fossin prou fiables. Són moltes les experiències fetes i la literatura escrita al respecte i la tasca feta ha estat bàsicament de consulta, contrastació, tria, reorganització i recerca de relacions. El material base ha servit també per l'elaboració de les parts documentals del web.

Només algunes de les experiències s'han intentat reproduir amb petits grups d'alumnes. Es mostren els resultats d'un parell d'elles però sense tenir cap intenció demostrativa ja que la mostra és intencionalment petita i no ha existit, en cap moment, ànim de fer cap estudi exhaustiu.

3.2. Sobre el web i el disseny d'activitats

El disseny del web i de les activitats, aspecte que ha consumit una part important del temps del projecte, és, majoritàriament, de creació o adaptació personal. Algunes de les activitats tenen el seu origen en la reelaboració d'activitats provades anteriorment a classe i altres són absolutament de nova elaboració.

El programari bàsic utilitzat ha estat:

- **Codi Html**
 - Microsoft Office Frontpage 2003
 - Top Style 3
 - CSS Tab Designer 3
 - Hot Potatoes 6
 - Quandary 2
- **Aplicatius SWF**
 - Flash 5
 - SWISH 2.0
- **Java**
 - Ardora 2.0
- **Tractament d'imatges**
 - FotoCanvas v1.1
 - Gimp 2
 - Adobe Photoshop 5
- **Dibuix vectorial**
 - Corel Draw 12
 - Flash 5
- **Color**
 - Absolute Color Picker

4. Resums i índexs dels apèndixs

4.1. Quadrar: història (11 pàgines)

Resum

Abans de realitzar accions de més depuració matemàtica, com pot ser la de comptar pròpiament o la realització de càlculs, la humanitat va realitzar-ne algunes de més simples com la comparació per l'establiment de diferències i, posteriorment, de semblances. Un dels tipus de comparacions devia ser el relatiu a les quantitats a un nivell de "més-menys-igual". En quantitats molt petites (entre 1 i 5) sembla haver-hi una mena de percepció natural també present en algunes espècies animals. Per establir aquestes comparacions amb quantitats més grans, el mètode més usual devia ser la comparació biunívoca "membre a membre". Restes arqueològiques d'ossos i fustes tallades amb grups d'osques organitzats de diferents maneres, fan pensar que es tractaven d'instruments per realitzar aquestes comparacions.

Taula

- Els orígens; comparar abans que comptar
- Quadrar: la primera acció
- Altres activitats matemàtiques
- Què entenem per cultura?
- Els animals també compten
- Tècniques per comparar o quadrar
- Restes prehistòriques
- L'os de Brassempouy
- L'os d'Ishango

4.2. Quadrar: aprenentatge (7 pàgines)

Resum

Quan els nens i les nenes arriben a l'escoles ja tenen un cert bagatge numèric per impregnació social o intervenció familiar. Aquest és un dels factors que afecta a la investigació sobre la seva percepció de quantitats petites a més de ser difícil d'esbrinar quan es compta i quan es reconeix. Tot i així s'ha vist que el reconeixement millora si s'ha practicat molt el recompte. En tots el casos al voltant dels cinc o sis anys la canalla no té dificultats per reconèixer agrupacions de quatre elements.

Per comparar quantitats més grans, que no es puguin reconèixer a cop d'ull, la capacitat de fer correspondències terme-a-terme sembla que no s'adquireix totalment

fins als sis anys. En aquests moment la majoria de nens i nenes deixen de tenir en compte aspectes com distribució espacial dels dos conjunts a comparar.

Per altra banda la canalla fa servir mètodes de correspondència informal (equivalents a les osques prehistòriques) quan fa recomptes amb marques de palets o quan es recullen peces d'un joc a una capsa amb espais específics per a cada peça: si sobra un espai, falta una peça.

Taula

- Immersió en els nombres
- Percepcions de quantitats en els nens i les nenes en els primers anys d'aprenentatge
- Correspondències biunívokes
- Palets en comptes d'osques

4.3. Quadrar: propostes (5 pàgines)

Taula

- Introducció
- Activitat 1: Comptar a cop d'ull
- Activitat 2: Tenim més? Menys? Igual?
- Activitat 3: Interpretació de restes
- Activitat 4: Fem marques

4.4. Comptar: història (28 pàgines)

Resum

Arriba un moment en que la humanitat no té prou amb la comparació de quantitats (més-menys-igual) sinó que li cal contestar d'un manera precisa a la pregunta "quants". També, paral·lelament, observa cicles a la natura i comença a celebrar determinats rituals que imposen el concepte d'ordre. A partir d'aquestes dues idees neix el nombre natural en un doble vessant: com a *cardinal* i com a *ordinal*. No hi ha massa acord sobre quina de les dues visions del nombre va ser anterior.

Quant tenim **nombre** l'hem d'anomenar; necessitem el llenguatge. L'enumeració nominal dels nombres, a més, ens ajuda a realitzar l'acció del recompte. Es pot comptar, tanmateix, sense necessitat d'un vocabulari complet que acompanyi al comptatge. En una primera fase es podia comptar ajudant-se del cos. Aquesta seria una forma *indicativa*. Hi ha vestigis d'això en els models de recompte corporal dels aborígens de Papua-Nova Guinea. Un altre vestigi és la quantitat de llengües que fan referència als dits de la mà o a gestualitzacions en els noms dels seus numerals. Però la substitució del gest pel mot indica un grau d'abstracció superior. Per tant, podem considerar que s'ha entrat en una segona fase: la *iconicitat*. Hi ha altres numerals que inclouen paraule-imatge, com el maorí o a la llengua del abípons d'Amèrica del Nord.

Aquestes dues fases (indicativitat-iconicitat) no poden portar molt lluny en la numeració. Per tant, cal avançar a un altre sistema més complet que permeti dir tots els nombres d'una manera precisa i abundant (de màximes grandàries). Per construir aquest sistema, que alguns autors anomenen fase predicativa, es fan servir tres eines:

- determinació d'una base per fer agrupaments de quantitats.
- una llista de morfemes mínims.
- ús de les operacions aritmètiques (amb aquesta seqüència ordenada: suma, multiplicació, potència i, més estranyament, resta i divisió).

Hi ha una gran diversitat de formes de dir els numerals fent servir les eines anteriors. Així trobem bases com la 2, la 5, la 10, la 20... però, fins i tot, la 4 o la 6. També trobem un esquema bàsic d'ús de les operacions molt semblants però amb moltes irregularitats locals. La nostra llengua, que té una sistemàtica general força senzilla (dintre de la complexitat), funciona bàsicament amb base 10, té, fins al milió, 19 morfemes (quatre per potències de 10), un sufix i un conjunt de prefixos utilitzats pel bilió, trilió... Les operacions que utilitza són la suma, el producte i, en certa manera, la potència. Té una anomalia sostractiva en la forma de dir les hores. A altres llengües, com el cantonès o l'esperanto, hi ha mètodes de construcció dels numerals que poden reduir encara una mica més la quantitat de morfemes eliminant petites irregularitats com els nombres de l'onze al setze o la de la forma d'anomenar les desenes, utilitzant una construcció multiplicativa (dient, per exemple, "tres-deu" en comptes de "trenta").

Taula

- Els orígens: de la marca al nombre
- Ordenar elements o quantificar-los?
- L'abstracció del nombre
- Molts "un, dos, tres...molts"
- Abans de les paraules-nombre: el gest
- Després del gest: la paraula-gest
- Nom dels nombres: les icones
- Més paraules per comptar més i millor
- La base
- Noms additius
- La multiplicació entra en joc
- Fem més curts els noms llargs: les potències
- La resta també vol jugar
- La divisió
- Algunes rareses
- En català, si us plau
- L'origen dels nostres numerals
- Inventem una manera de formar els numerals

4.5. Comptar: aprenentatge (22 pàgines)

Resum

El concepte de nombre és una abstracció feta a partir de l'observació de conjunts amb la mateixa cardinalitat. Però la mesura d'aquesta cardinalitat es fa amb l'acció de comptar, que consisteix en assignar biunívoca i ordenadament un nom, segons una sèrie establerta i acordada, a cadascun dels elements del conjunt. L'últim nom dit es correspon amb la cardinalitat del conjunt, el quantifica. Per dominar la tècnica del comptatge s'han de anar superant diferents estadis que, en diferents moments, impliquen:

- saber separar els elements comptats dels no comptats sense repetir ni deixar-se cap
- dominar la sèrie numèrica perfectament (*comptatge acústic*)
- saber que el darrer numeral dit es correspon amb la cardinalitat del conjunt (un dels punts claus del *comptatge resultatiu*, per donar un resultat)
- saber aplicar aquesta tècnica a qualsevol tipologia d'objectes
- saber que no importa l'ordre en que es van comptant els elements

Pel que sembla els nens i les nenes superen aquests estadis d'una manera natural però ho fan més ràpida i eficientment amb l'ajut d'activitats ben dissenyades i basades en situacions properes i vivencials. També si el comptatge és una activitat habitual. Un dels moments en que sabem que la tècnica del comptatge és domina és quan es sap fer el recompte progressiu, a partir d'una quantitat donada. Aquesta capacitat es pot observar amb la realització d'experiències "d'objectes tapats":

- es mostren uns objectes i es fan comptar
- es tapen i al costat se n'afegeixen alguns més
- es demana el total
- s'observa si es continua comptant a partir de la quantitat recordada o s'aplica algun altre mètode, com comptar una altra vegada des d'u imaginant-se els objectes tapats.

Un problema típic que permet saber si es domina el comptatge en general pot ser un que proposi l'establiment de correspondències biunívocues però sense permetre l'acció d'aparellament, per exemple amb un esquema similar a aquest:

- es presenten separades una col·lecció de recipients i una altra d'objectes.
- es demana posar un sol objecte a cada recipient.
- s'han d'observar els recipients i anar a buscar tots els objectes a col·locar en un sol viatge.
- no podran sobrar ni faltar objectes.

Així com el comptatge progressiu està directament relacionat amb les operacions additives (i indirectament amb les sostractives) és important dominar el comptatge regressiu per preparar un terreny més fèrtil a la introducció de la resta.

Paral·lelament, a mesura que s'aprèn a comptar, es va formant el concepte de nombre natural, en el seus dos aspectes: cardinal i ordinal. El *nombre* es va abstraient i independitzant progressivament dels *objectes* que són comptats. Aquesta familiarització progressiva amb el nombre, omnipresent en el nostre entorn adult però també en l'infantil, li va conferint, a la vegada, d'una certa caracterització objectual que, sense arribar a convertir-lo en un objecte concret i tangible, sí que el convertirà en un concepte amb el que es "poden fer coses", "treballar": operar, en definitiva.

Taula

- Què és comptar?
- El nombre natural
- Comptar i nombre natural: dos conceptes molt relacionats
- El llenguatge: un codi de signes
- El comptatge: la llengua i alguna cosa més
- Cardinalitat-ordinalitat
- L'ordre, la transitivitat i els cicles
- Comptar sense nombres
- L'aprenentatge del nombre
- Els nombres a l'entorn
- I el nombre es va fer verb
- L'ús de les operacions
- Prosseguir el comptatge
- Alguns apunts didàctics
- Un interrogant didàctic
- I el nombre es va fer carn

4.6. Comptar: propostes (11 pàgines)

Taula

- Introducció
- Activitat 1: Com comptem?
- Activitat 2: Fixos, marcables i mòbils
- Activitat 3: Comptar un milió
- Activitat 4: Les feines dels nombres
- Activitat 5: Nombres de memòria
- Activitat 6: Diari sense nombres
- Activitat 7: Comptar amb el cos
- Activitat 8: Cançons per triar
- Activitat 9: Comptar de l'1 al 10
- Activitat 10: Entrar en "sistema"
- Activitat 11: Construir numerals
- Activitat 12: Una mà de comptes
- Activitat 13: Estimacions totals
- Activitat 14: Loteria del pot
- Activitat 15: La màgia del comptar
- Activitat 16: Algorismes d'ordenació

4.7. Escriure: història (102 pàgines)

Resum

En el moment en que apareixen els estats i les necessitats d'organització i administració augmenten, apareixen les primeres formes d'escriptura. En alguns casos, com a Mesopotàmia, l'escriptura dels nombres és anterior a la de la llengua. Les numeracions escrites van aparèixer, doncs, per la necessitat de portar un registre de quantitats cada vegada més grans. Un sistema de numeració escrita s'estructura de la següent manera.

- **Una base.** El sistema de marques "un a un" com les trobades a les talles prehistòriques és clarament insuficient per representar quantitats grans. El principi de base serveix per superar aquest problema. Una base és un nombre triat per fer agrupaments de quantitats. En la nostra numeració moderna el nombre "base" és 10 i conformem un sistema esglaonat:
 - unitats
 - desenes (10 unitats)
 - centenes (10 desenes)
 - milers (10 centenes)
- **Uns signes.** Ha d'existir un sistema acordat que faci relacionar un signe i un valor. Un exemple de sistema acordat pot ser el sumeri on tenim sis signes: per la unitat, per la desena, per la seixantena, per deu seixantenes, per seixanta seixantenes i per deu vegades seixanta seixantenes.
- **Un principi operatiu.** S'ha d'estructura un codi que ens faci interpretar quines operacions s'han de fer amb aquests signes: sumes, productes i sumes, sumes i restes...

Amb una base, uns signes i un sistema operacional es poden construir els sistemes de numeració escrita.

- **Sobre la base.** A la història de la humanitat, i observant sobre tot com es compta oralment, s'han fet servir moltes bases (2, 4, 5, 6., 10, 12...). La més universal és la base deu, que es pot justificar pensant que els deus dits de les mans probablement són el primer instrument de comptatge. Altres bases freqüents, i relacionades també amb els dits, són la base 5 (una sola mà) i la 20 (mans i peus). Una altre base d'interès especial és la base que es feia servir a l'antiga Mesopotàmia, la base 60, perquè ha perdurat en les nostres mesures horàries i angulars. Les bases grans com la 20 (maia) o la 60 (babilònica), sovint s'ajudaven d'altres bases auxiliars per reduir la repetició exagerada de símbols. Per exemple els maies van fer servir la 5 i a Babilònia la 10. Les numeracions purament additives (basades només en la suma) també de vegades les utilitzaven. Només cal observar les numeracions grega-acrofònica i la romana, de base principal 10, i que feien servir la 5 com auxiliar.
- **Sobre els signes.** Deixant de banda les numeracions orals, podem diferenciar entre numeracions **escrites** (bidimensionals) i **figurades** (tridimensionals). Entre les segones tres sistemes interessants han estat els *càlculi* sumeris (petites peces d'argila), les numeracions digitals (representades amb els dits de les mans) i els *kipus* andins (cordes amb nusos). En quant els signes emprats a les numeracions escrites han estat molt diversos i el seu disseny ha depès, principalment, dels material utilitzats per l'escriptura i del caràcter més o menys simbòlic que se li hagi volgut assignar. El signe per l'u és una excepció: es pot observar que gairebé sempre recorda una osca d'una talla. Un signe especial, que només apareix en determinades numeracions que el necessiten, és el del zero que, unes vegades indica un espai buit i altre una quantitat nul·la.
- **Sobre les operacions.** Els sistemes de numeració estudiats al món es poden classificar en tres grans grups:
 - **additus.** Fan servir la suma com a única operació per construir el nombre. Es sumen els valors de cada signe representat i obtenim el valor del nombre. Un signe, una xifra, no canvia de valor si canvia de lloc. A mesura que els nombres creixen i augmentem el nivell d'ordre

de la base (passem d'unitats a desenes, de desenes a centenes) hem d'anar incorporant nous signes que les representin. A aquest sistema pertanyen numeracions com la sumèria, l'egípcia, la grega acrofònica, l'asteca... Hi ha casos en els que s'assigna un signe a cada unitat (1, 2, 3...) a cada desena (10, 20, 30...), a cada centena (100, 200, 300...) utilitzant, sovint, lletres de l'alfabet. Per exemple a la numeració grega jònica o a l'hebrea.

- **híbrids.** Combinen aspectes additius i multiplicatius. La col·locació d'un signe davant o darrera d'un altre ens indica si hem de multiplicar o sumar els seus valors. Per exemple representa un "tres" davant d'un "deu" s'interpreta com "tres deus", és a dir "trenta"; hem multiplicat. Un "tres" darrera d'un "deu" s'interpreta com a "deu i tres", és a dir "tretze"; hem sumat. Aquest sistema evita la iteració excessiva de xifres. Per representar "setanta" no cal repetir set vegades el signe "deu" sinó que reduïm la seva representació a dos únics signes: "set" i "deu". Les xifres no canvien tampoc de valor quan canviem de lloc, un "sis" serà sempre un "sis" allà on estigui; només varia la interpretació de l'operació que hem de fer amb el signe següent o anterior. Aquests numeracions acostumen a necessitar un signe especial per a cada potència de la base a mida que els nombres es van fent més grans. Un exemple d'aquesta numeració és la xinesa tradicional.
- **posicionals.** El valor d'una xifra depèn del lloc on està escrita. Cada lloc representa un valor d'una potència de la base. Així, per exemple, a la nostra numeració moderna, quan representem el nombre 373 trobem un signe repetit, el 3. El primer 3, al lloc de les centenes, l'interpretem com multiplicat per 100 (i diem "tres-cents"). L'altre 3, el tenim al lloc de les unitats i el seu valor "natural": tres. Per no donar llocs a confusió els espais on no hi ha xifres s'han d'indicar. Per exemple si volem representar "cinc-cents cinc" i ens limitem a separar les xifres (5 5) podem confondre fàcilment la quantitat a llegir amb un valor menor: "cinquanta-cinc" (55). Cal utilitzar un signe que assenyali els llocs buits. En el nostre cas aquest signe és el 0, que anomenem zero. El "cinc-cents cinc" es representarà sense ambigüitats (505, diferent de 55, de 550, de 5005, de 5050...). Amb aquest sistema no cal inventar-se signes nous cada vegada que augmentem un nivell d'ordre en la base perquè només cal afegir un lloc més. Les numeracions maia, assírio-babilònica, xinesa de varetes i hindú han estat les úniques quatre numeracions posicionals conegudes.

La numeració posicional hindú, amb deu únics signes (1,2,3,4,5,6,7,8,9 i 0) s'ha imposat com el millor sistema existent i és el que fem servir encara, tot i que amb la grafia dels signes lleugerament modificades. La maia i la babilònica tenien la limitació de fer servir tres únics signes (1, 5, 0 per la maia i 1, 10, 0 per la mesopotàmica) el que feia iterar-los molt dificultant la lectura. La xinesa era bàsicament una numeració operatòria.

El sistema posicional hindú permet:

- representar nombres de la grandària que vulguem sense incorporar nous signes a cada augment de nivell d'ordre en la base.
- utilitzar una quantitat raonable de signes: ni pocs, evitant iteracions en la representació, ni massa, estalviant esforç a la memòria i a la velocitat de "traducció" signe-valor.

- establir un longitud del nombre que permet la seva lecto-escriptura ràpida i que es correspon amb la grandària de la quantitat representada: cent-mil (100000) és més llarg que mil (1000).

Tot i així, la millor virtut del sistema numèric hindú, especialment gràcies a la utilització numèrica del zero, com a valor nul, calcula amb els propis signes, cosa que la majoria de numeracions existents no facilitava. Per calcular, abans de la numeració hindú, es feien servir, principalment, àbacs (on, curiosament, una columna buida venia a representar aquest zero numèric). Els àrabs van conèixer a l'Edat Mitjana la numeració hindú i van ser els principals responsables d'estendre el seu coneixement a Europa. D'aquí que al nostres nombres els hi diguem indo-aràbics.

L'acceptació a Europa de la numeració indoaràbiga va ser lenta però la seva capacitat de portar els llibres de comptes i operar a la vegada amb les mateixes xifres va fer que acabessin imposant-se sobre les numeracions romanes i alfabètiques que, en diferents àmbits, es feien servir encara.

Taula

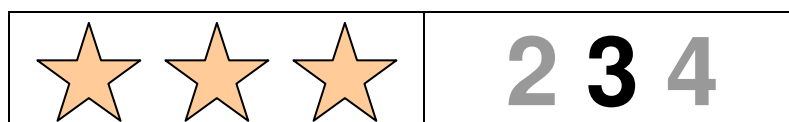
- La complexitat social
- Els primers estats
- Què ens ha portat ha escriure?
- Càlcul i bullae
- Del càlcul al càlcul
- La numeració sumèria
- La base és la base
- Un exemple: la numeració jeroglífica egípcia
- Base principal i base auxiliar
- Reduïm la quantitat de signes
- Un "producte" ben fet
- Nombres cada vegada més grans: maies i hindús
- Una clau per escriure nombres grans: eliminar alguns signes
- Un problema nou
- El primer zero: el babilònic
- El zero com a nombre o com a indicador
- Limitacions de les numeracions maia i babilònica
- La solució final: les numeracions posicionals
- La numeració índia
- Tot resolt i encara més
- El zero invisible
- Un altre zero invisible: el xinès
- De la Índia a Occident: el paper de l'Islam
- L'evolució de l'escriptura de les xifres
- La base deu no és el déu de les bases
- Classifiquem les numeracions escrites
- Numeracions figurades
- El llenguatge de les mans
- Nusos: els khipus
- Apèndix A: Esquemes sobre sistemes de numeració
- Apèndix B: Bases de numeració informàtiques
 - Els precedents del sistema binari
 - El sistema binari com a sistema numèric
 - Bits, bytes, ASCII, ISO, UNICODE
 - Els sistemes octal i hexadecimal
 - Tot digital, tot binari

4.8. Escriure: aprenentatge (34 pàgines)

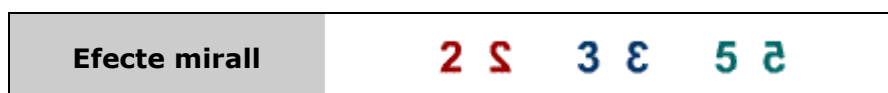
Resum

L'escriptura numèrica és, inicialment, una forma de representació externa estable de l'ordre i la quantitat. Per tant, en quant un nombre queda representat per un grups de signes, aquesta representació queda afectada pels aspectes semiòtics de qualsevol altre tipus de llenguatge escrit. El model representat pel nostre sistema posicional de numeració és **arbitrari** (la seva aparença formal, de caràcter compilador, no representa quantitats figurativament), **convencional**, (ha estat acordat descartant altres models d'escriptura numèrica), i **sistèmic**, (el seu ús ve determinat per un conjunt força estricte de regles). Aquestes característiques fan que el sistema escrit de numeració hagi de ser objecte, en els seus trets bàsics, de transmissió: el seu aprenentatge està profundament marcat per aspectes no reconstruïbles.

Els primers aprenentatges de l'escriptura numèrica s'orienten cap al reconeixement i ús de les xifres (de l'1 al 9 més el 0). Aquestes xifres s'aprenen com a formes de representació de la cardinalitat de conjunts i com a sèrie gràfica, establint una equivalència entre el comptatge resultatiu i acústic. Aquesta equivalència va més enllà de la simple comparació ja que el signe 3 pot ser el signe que està entre 2 i 4, en determinades activitats, o la representació d'una quantitat, en altres. Poc a poc aquestes visions cardinal i ordinal aniran confluint.



En els primers aprenentatges de les xifres, i per tant dels primers nombres, trobem problemes de dos tipus. Uns de menors relatius a la grafia, i altres amb un caràcter més conceptual, com per exemple la manca de visió del nombre escrit com una forma de registre de quantitats.



Aquesta resistència a l'ús funcional del nombre com a registre queda confirmat per repetides experiències fetes amb nens i nenes petites en la que se'ls posa en situació d'anotar el contingut d'unes caixes i s'opta majoritàriament per anotar aspectes qualitatius (què?) en comptes de quantitativus (quants?); quan es considera també la quantitat, sovint s'adopten formes de representació més figurades i iteratives que convencionals, encara que es coneixin. Hi ha característiques situacionals que ajuden a utilitzar la numeració convencional:

- Que el destinatari del registre sigui una altra persona
- Que la quantitat a representar sigui relativament gran
- Que la situació demani de forma clara un cert grau d'exactitud en el registre
- Que la funció del nombre en el context de la situació sigui més quantitativa que identificativa.

El pas següent, el canvi a la desena, centena... comporta l'aparició de nous problemes. També alguns es refereixen a la grafia, com la inversió de nombres, escrivint 32 per 23. Altres estan més relacionats amb els aspectes estructurals de la numeració, com el de l'agrupament. Aquest és un dels principis bàsics de

qualsevol sistema de construcció de numerals orals o escrits. En el cas de les numeracions escrites l'agrupament, més regular que en les orals, es constitueix en base del sistema de numeració. En els sistemes additius el model d'agrupació és més visible i evident, i les regles de construcció dels nombres més clares; en molts casos s'acosten més al tipus de notacions iteratives que acostumen a fer els nens i nenes de forma natural. Existeixen propostes didàctiques que fan especial èmfasi en realitzar diferents experiències d'agrupament com a pas previ per la comprensió del concepte posició relativa. S'ha observat, per altra banda, que l'alumnat no és gaire conscient ni del problema de l'agrupament ni del principi de posició.

S'han realitzat moltes experiències sobre les dificultats que presenta l'aprenentatge del sistema posicional. Les principals es troben, fins i tot a l'educació secundària, en la lecto-escriptura de nombres grans, sobre tot quan hi ha zeros en posicions intermèdies. No sembla haver-hi tants en les qüestions relatives a l'ordenació. Altres problemes estan lligats als canvis de grau d'unitat, com el pas de 199 a 200 o a la inversa. També trobem que la descomposició en desenes, centenes... quan es fa de forma agrupada presenta dificultats de comprensió. Per exemple, costa identificar 3570 com 35 centenes i 7 desenes.

Hi ha propostes que s'estimen més no substituir, en el procés didàctic, un sistema de numeració més estricte i hermètic (el posicional) per altres que ho són menys (com els additius, l'ús d'àbacs, l'empaquetament en bosses...) ja que el primer és el que s'ha d'aprendre. Aquestes propostes assumeixen el caràcter "no-transparent" de l'agrupament a la nostra numeració i tracten de treballar a partir del coneixement i els preconceptes del sistema gràfic que l'alumnat ja té, basant l'aprenentatge en l'observació de les regularitats en situacions d'ordenació i de càlcul. Entre aquests preconceptes hi ha la idea de que "un nombre que té més xifres és més gran" o que "la xifra de l'esquerra és la que mana". També hi ha, per part dels nens i nenes, la idea de que el comptatge oral, del que tenen millor domini i en el qual saben arribar a nombres més grans, té una correspondència exacta amb l'escrit. L'aprenentatge s'estructuraria al voltant de la discussió provocada per les diferents resolucions de les situacions plantejades a l'alumnat, la recerca de pautes, de contradiccions...

Exemple de conflicte entre numeració oral i escrita		Possible discussió
Vint-i-set	207	Si 35 és més gran que "vint-i-set" perquè té menys xifres?

Taula

- Representacions internes i externes
- Sistemes simbòlics i signes
- L'escriptura
- L'escriptura matemàtica
- Tipologia dels símbols matemàtics
- Aprenem els signes
- El "dibuix" dels nombres
- L'ordre dels signes
- Fins a on sabem els signes
- La funció de registre
- L'agrupament
- Sumar abans que posicionar?
- El sistema posicional i els seus problemes
- El zero compta

- Algunes propostes didàctiques
- Una altra via: regularitats ordinals de la sèrie numèrica escrita
- Les primeres passes mínimes: alguns exemples

4.9. Escriure: propostes (32 pàgines)

Taula

- Domini de la lecto-escriptura del sistema posicional
- El principi de l'ESO als llibres de text
- Història de les matemàtiques a l'aula
- Multiculturalitat i interculturalitat matemàtica
- Treballar les numeracions històriques
- Construcció d'un metaconeixement numèric
- Activitat 1: Un món sense nombres
- Activitat 2: Descobrir les numeracions
- Activitat 3: Analitzar i explicar les numeracions
- Activitat 3: Classificar les numeracions
- Activitat 4: Les falçs de Frankleben
- Activitat 5: La base
- Activitat 6: El valor del zero
- Activitat 7: Càlculs amb numeracions antigues
- Activitat 8: La forma de les xifres
- Activitat 8: Targetes perforades
- Activitat 9: Targetes per endevinar nombres
- Activitat 9: Cavallers i escuders
- Activitat 10: La base dels dibuixos
- Activitat 11: La base dels colors
- Apèndix: Prova de lecto-escriptura del sistema posicional

5. Algunes conclusions

5.1. Evolució històrica i processos d'aprenentatge

El procés d'evolució històrica del concepte de nombre i el del seu aprenentatge tenen molts elements comuns. La percepció visual per diferenciar quantitats petites, la capacitat de fer aparellaments un a un amb els elements de dos conjunts per saber si a un d'ells hi ha més que a l'altre o tenim quantitats semblants, són passes prèvies i necessàries per la formació del concepte de nombre cardinal en qualsevol nen o nena, de la mateixa forma que ho van ser pels primers humans. També la capacitat de percebre i reconstruir un ordre seqüencial és necessària per la formació del concepte de nombre ordinal.

Un altre exemple de paral·lelisme entre l'evolució històrica i els processos d'aprenentatge és la dificultat que té l'alumnat petit en separar la propietat *quantitat* d'altres característiques qualitatives del conjunt, de forma que costa veure la quantitat com una propietat interessant o costa, també, separar la quantitat de l'objecte³.

³ En el temps final de redacció d'aquesta memòria he trobat un exemple amb nois i noies més grans, de 1r d'ESO en el que davant d'un problema (dels que es proposen al web) en que es demana com dos pastors del neolític que no saben comptar poden dirimir quin dels dos té més ovelles, i havent resolt abans que un sol pastor podia saber si sortia i tornava amb les mateixes ovelles posant pedretes en una bossa (una ovella – una pedra), totes les propostes de la classe anaven encaminades a oposar una a una les ovelles, en canvi cap a oposar una a una les pedres que les representaven. Encara les quantitats van lligades a l'objecte real, no sembla suficient treballar amb les seves representacions.

També, quan passem a parlar de les formes de representació de quantitats, les formes iteratives, de la mateixa forma que va passar amb els primers humans, es veuen per la canalla com formes més naturals i clares que les nostres formes arbitràries.

Tenir aquests esculls presents en l'elaboració d'activitats d'aprenentatge, en les primeres edats, pot ser de força interès. Però l'estudi històric⁴ també ens il·lustra sobre altres qüestions com poden ser:

- Que l'observació de que "els pobles compten fins aquells nombres que necessiten", anima a pensar que amb la canalla podríem treballar, amb les anotacions que siguin, amb quantitats no determinades per l'edat i el curs sinó per les situacions sorgides o provocades a l'aula.
- Que si un dels passos previs per la construcció dels numerals orals, i no diguem per les escrites, és el d'agrupament, aquest és un treball que necessitarà un treball específic.
- Que si l'evolució de les numeracions escrites passa de les formes additives a les posicionals i aquestes han estat, en formes d'ús prou pràctiques, d'aparició tardana i de difusió costosa, és perquè són formes de representació prou sofisticada i complexa com perquè l'alumnat no hagi de seguir un llarg procés en la seva adquisició completa⁵.

El coneixement històric ens ajuda, doncs, a observar algunes de les possibles passes a seguir o, com a mínim, a tenir-lo en consideració en el disseny d'activitats d'aula. També ens ajuda a millorar la comprensió que puguem tenir sobre les dificultats que pot trobar l'alumnat. La pregunta ara és: ¿cal resseguir el procés històric en el disseny global d'activitats amb els nens i les nenes més petites? La resposta seria que, globalment, no.

Els contextos en els que van aparèixer els primers nombres, les primeres formes de comptatge i, molt especialment, de representació numèrica escrita, no són reproduïbles actualment perquè la situació de partida del nostre alumnat és ben diferent. Els nostres nens i nenes creixen en un món d'una riquesa simbòlica, com a mínim quantitativament, superior a qualsevol època anterior. I entre aquests símbols els numèrics els hi acompanyen d'una forma absolutament aclaparadora, atés que vivim en un entorn on els nombres ja han deixat de ser formes no només quantificadores o ordenadores sinó que, cada vegada més, fan tasques purament identificatives. La importància social que, a més, se li dona als nombres, fa que els primers comptatges es facin moltes vegades ja des de la pròpia educació familiar. La realitat imposa saltar-se, si més no parcialment, la història.

Un exemple de contradicció història-entorn-aprenentatge el podem trobar en el caràcter registral de l'escriptura numèrica. Els nombres escrits van néixer com a suport de la memòria i com a forma de registre permanent. Als nostres dies l'omnipresència de nombres i altres signes de tots tipus, dilueix aquesta visió. I si un nen o nena petit necessita efectuar un registre d'aquest tipus inicialment evitarà la forma numèrica habitual, tot i que la conegui, per no identificar-la com a prou representativa, i optarà per formes iteratives (del tipus IIIII...), menys elaborades però més clares. Només creant situacions que provoquin la necessitat de registre i contemplant un procés que seguiria la seqüència

Formes lliures \Rightarrow Formes iteratives \Rightarrow Formes additives \Rightarrow Model posicional

⁴ Quan diem *històric* també podríem dir moltes vegades *etnomatemàtic*.

⁵ Cas afegit especial és l'assimilació de la necessitat, usos i significats del zero.

tindria sentit reproduir el procés històric. La relativa pressa per introduir les operacions i els seus algorismes escrits tradicionals fan que la funció registral quedi diluïda i que es passi directament a treballar amb el complex sistema posicional. Tot i així, malgrat la seva complexitat també el sistema posicional presenta prou regularitats i gaudeix d'una riquesa pròpia que, ben aprofitada, permet treballar amb ell sense haver de considerar en la seva totalitat el procés històric seguit per les formes de representació numèrica.

Per tant, podem resumir dient que, si bé és útil conèixer l'evolució històrica de les numeracions i es bo tenir-la en consideració, no ha de ser necessàriament obligatori reproduir-lo en el disseny didàctic dels primers anys d'aprenentatge.

Però...i després?

5.2. La “història dels nombres” per l'alumnat de 10 a 14 anys

Si la majoria d'alumnes d'entre 10 i 14 anys tenen un domini suficient del comptatge i de la lectoescriptura numèrica, ¿què pot justificar treballar el recorregut històric de l'evolució dels nombres i les seves representacions? Com moltes altres vegades hi ha aspectes que afecten més al **com** es treballen els continguts que a **quins** en concret s'incorporen al currículum. Una metodologia que plantegi el treball de la història dels nombres, no d'una forma expositiva, sinó des de la resolució de problemes, o la recerca de pautes o diferències, ja justifica de ple l'ús de la història de les matemàtiques, en general, i dels nombres, en particular, com un recurs més a utilitzar a l'aula. Les activitats proposades des d'aquest projecte apunten en aquesta línia. Però la *història* no és “un recurs més” ja que introduir-la explícitament a l'aula té altres repercussions, prou enriquidores per l'alumnat com per justificar i potenciar la seva presència.

Hi ha diferents raons, provinents de diferents perspectives, que poden aconsellar fer un treball sobre les formes antigues d'escriure els nombres.

- **La perspectiva històrica.** Cal combatre la percepció que es té de la matemàtica com a una ciència estàtica i deslligada del seu entorn real. Les matemàtiques han evolucionat al compàs dels problemes i esdeveniments socials de cada moment històric, per tant lligades a un context concret. Per altra banda les matemàtiques també s'han preocupat de proporcionar eines per ajudar al desenvolupament social i les eines són, sovint susceptibles de millora. Un cas evident és el de l'evolució dels sistemes de notació numèrica (i dels llenguatges matemàtics en general). Estudiar la història dels nombres és estudiar la nostra pròpia història.
- **La perspectiva intercultural.** Tota cultura amb un mínim de desenvolupament tecnològic fa matemàtiques. Entre les activitats matemàtiques l'acció de comptar (i sovint registrar els recomptes) és una de les més evidents i universals. Els nombres i les lletres són un d'aquells camps en els que assistim a un procés llarg i complicat de creació, de caràcter col·lectiu i anònim, que arreu ha sorgit per resoldre problemes semblants i pel qual també s'han trobat formes de solució globalment similars, encara que matisadament diferents. Estudiar les formes diverses de fer-ho és enriquir la nostra visió del món en el que té (ha tingut o tindrà) de diferent i en el que té (ha tingut o tindrà) de comú.

També podem argumentar en pro de l'ús de la història del comptatge i l'escriptura numèrica a l'aula aspectes relacionats amb la formació de conceptes i en la millora competencial.

- **La perspectiva conceptual.** El nostre coneixement del nombre natural és, bàsicament, un coneixement funcional, instrumental. Hem après a comptar i a escriure i llegir nombres tan aviat que poc recordarem de com ho varem fer; és com si els coneguéssim "des de sempre". Per tant no hi pensem gaire més en ells. Treballar la història dels nombres ens farà reflexionar sobre el *què sabem* i sobre *com ho sabem*: formarem una mena de *metacognició* al voltant del nombre. Aquesta reflexió també ens farà aprofundir en conceptes generals com l'ordre, la quantitat, la notació,... o particulars com el de base numèrica, valor de posició, sentits del zero...
- **La perspectiva instrumental.** El treball amb nombres ens familiaritzarà amb el seu ús. Intentar descobrir el funcionament d'una numeració entra de ple en el terreny del desenvolupament d'estratègies de resolució de problemes (observació de pautes, atendre casos petits abans que grans, comprovació d'hipòtesis...). Analitzar l'estructura de les numeracions additives ens pot ajudar a visualitzar els nombres d'una forma a la vegada global (la suma dels símbols) i descomposta (la visualització del signes de cada ordre d'unitat) . Aquesta doble visió del nombre, més diàfana que en el nostre sistema posicional, reunit i separat en parts a la vegada, pot ajudar a donar eines per la descomposició i recomposició de nombres per l'elaboració d'estratègies personals de càlcul. Estudiar les numeracions híbrides, considerades com a pas intermedi cap al sistema posicional, pot ajudar a comprendre millor el grau de simplificació simbòlica que representa i a evidenciar el significat del valor de posició. Investigar altres numeracions posicionals diferents a la nostra pot provocar un efecte d'estranyament que pot ajudar a millorar la comprensió de l'estructura del sistema posicional i de la funció indicadora del zero. També pot servir per revisar aspectes conceptuals del zero com a nombre. Si la numeració és en una base diferent, aquest estranyament serà, a més, encara més gran i ens ajudarà a aïllar les característiques diferenciadores dels sistemes posicionals.

Per poder comprendre la raó de l'adopció del nostre sistema de numeració actual, el consens final aconseguit al seu voltant, cal fer treballs comparatius entre numeracions i observar com la numeració moderna possibilita escriure nombres il·limitadament grans, amb pocs signes diferents, de forma relativament breu i que, a més, facilita el càlcul amb els propis signes.

6. Bibliografia

6.1. Llibres bàsics

- ALCALÁ, MANUEL (2002): *La construcción del lenguaje matemático*. Graó. Barcelona.

Els primers capítols d'aquesta obra parlen dels aspectes simbòlics de la cultura, de la influència de transmissió cultural i dels aspectes lingüístics de la matemàtica. S'han utilitzat especialment en l'apartat sobre escriptura matemàtica.

- ALVARADO, MÓNICA; BRIZUELA, BÁRBARA (compiladores) (2005): *Haciendo números*. Paidós Educador. México DF

Un dels títols que més influència han tingut en aquest projecte ja que en els diferents articles va relacionant a història dels nombres i del comptatge amb experiències fetes amb alumnat dels primers anys d'escolaritat.

- BISHOP, ALAN J. (1999): *Enculturación matemática*. Paidós. Barcelona

Títol que fa una proposta didàctica basada en una culturalització matemàtica al voltant dels principals eixos matemàtics que són comuns a la majoria de cultures. També fa propostes al voltant del que es coneix com a *etnomatemàtica*.

- BOYER, CARL (1992): *Historia de la matemática*. Alianza. Madrid.

Obra clàssica de consulta en la majoria de treballs sobre història de la matemàtica. S'han utilitzat, bàsicament, aspectes del primer capítol i d'algunes qüestions sobre les primeres escoles de comptabilitat.

- CARBÓ, LILIANA i GRÀCIA, VICENT (2002): *Mirant el món a través dels números*. Pagès. Lleida.

Interessant títol que presenta múltiples activitats i reflexions sobre activitats de comptatge i aprenentatge dels nombres, basant-se en els aspectes culturals de la matemàtica i en les pròpies experiències i interessos de l'alumnat.

- CAMPIGLIO, A., EUGENI V. (1992): *De los dedos a la calculadora*. Paidós. Barcelona.

Llibre, en molts aspectes divulgatiu, que fa un recorregut des de les primeres accions matemàtiques humanes fins als temps moderns. Hi ha interessants reflexions, en els capítols inicials, sobre els processos que van portar als primers comptatges.

- CRUMP, THOMAS (1993): *La antropología de los números*. Alianza. Madrid.

Un llibre que intenta fer un pont entre els aspectes numèrics comuns a diferents cultures i l'origen de les accions de comptatge i mesura. S'han recollit aportacions seves a tots els apartats del projecte.

- DDAA (2003): *Quipu. Contar anudando en el imperio inca*. Museo Chileno de Arte Precolombino - Univeridad de Harvard. Santiago de Chile.

D'ell s'ha extret la majoria de la informació relativa als khipus.

- DICKSON, L., BROWN, M. i GIBSON, O. (1991): *El aprendizaje de la matemáticas*. Labor-MEC. Barcelona.

Un dels títols més consultats al llarg del projecte i del que s'han recollit més aportacions en tots tres apartats (Quadrar, comptar i escriure) en els subapartats relatiu als processos d'aprenentatge i les dificultats més freqüents. Aquests aportacions són toquen, també, tots els aspectes: experiències, propostes didàctiques, activitats...

- GÓMEZ ALONSO, BERNARDO (1989): *Numeración y cálculo*. Síntesis. Madrid.

Llibre que, en els seus primers capítols, presenta una seqüenciació de la història dels nombres força sintètica i clara.

- GUEDJ, DENIS. (1998): *El imperio de las cifras y los números*. Ediciones B (Barcelona).

Breu títol divulgatiu que, tot i així, condensa interessants idees sobre els inicis del concepte de nombre.

- GHEVERGHESE, GEORGE (1996): *La cresta del pavo real*. Piràmide. Madrid.

Obra històrica de referència sobre les matemàtiques descobertes o desenvolupades fora d'Europa o de la influència europea. Especialment són molt interessants els capítols dedicats a les matemàtiques asiàtiques (mesopotàmica, xines i índia).

- IFRAH, GEORGES, (1987): *Las cifras. Historia de una gran invención*. Alianza. Madrid
- IFRAH, GEORGES, (1997): *Historia universal de las cifras*. Espasa. Madrid.

Successives versions, increïblement ampliada i corregida la segona, de la història de la numeració. Segurament l'obra més completa editada en llengua castellana i títol de referència a nivell mundial. Treball molt exhaustiu amb gran profusió de dades i referències. Ha guiat pràcticament tot el projecte (tot i l'inútil intent d'evitar-ho) en el seu apartat històric.

- PIAGET, JEAN i BETH, E.W. (1980): *Epistemología matemática y psicología*. Grijalbo. Barcelona.

La seva consulta ha recolzat els capítols relatius a l'aprenentatge, especialment en els apartats de *Quadrar* i *Comptar*.

- PIMM, DAVID (1999): *El lenguaje matemático en el aula*. MEC-Morata. Madrid.

S'ha utilitzat, fonamentalment, en el capítol dedicat a l'escriptura numèrica en el subapartat relatiu a l'aprenentatge.

- SANTCLIMENT, FRANCESC (edició a cura d'Antoni Malet) (1998): *Summa de l'art aritmètica*. Eumo. Barcelona.

Reedició moderna de l'edició antiga de Santcliment. S'han utilitzat imatges facsímils sobre les formes dels nombres.

- TATON, RENÉ (DIR.) (1988): *Historia general de las ciencias*. Orbis. Barcelona.

Completa història de la ciència en general de la que s'han recollit moltes referències als apartats històrics. Han estat especialment útils els relatius a les cultures mesopotàmiques, egípcia, xinesa, hindú i àrab.

- VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, MARJA (2001): *Children learn Mathematics*. Freudenthal Institute, Utrecht University. Utrecht.

Llibre de consulta bàsic en els aspectes relatius al comptatge acústic i resultatíu.

6.2. Altres llibres consultats

A més dels citats en notes a peu de pàgina en moltes de les pàgines de l'estudi, altres títols d'utilitat han estat els següents:

- ALEKSANDROV A.D.; KOLMOGOROV A.N.; LAURENTIEV M.A. I ALTRES (1980): *La matemàtica: su contenido, métodos y significado*. Alianza Universidad. Madrid.

Compendi clàssic de contingut matemàtic. Només s'han consultat els apartats dedicats a l'origen dels nombres.

- BACH, FERRAN i BERKEL, ROB (1998): *Els rastres de l'alfabet*. Fundació La Caixa. Barcelona.

Títol de consulta sobre els orígens i l'evolució de l'escriptura.

- BETHEL, LESLIE (ed.) (1990): *Historia de América Latina*. Crítica. Barcelona.

S'han recollit d'aquest llibre referències sobre la història dels imperis maia, asteca i inka.

- CLAPHAM, CRISTOPHER (1992): *Diccionario Oxford de Matemáticas*. Celeste Ediciones. Madrid.
- CÓRDOBA BARBA, A. (2006): *La saga de los números*. Crítica. Barcelona.

Llibres de consulta sobre conceptes i definicions matemàtiques.

- GARDNER, MARTIN (1959, edició de 1980): *Nuevos pasatiempos matemáticos*. Alianza. Madrid.
- GARDNER, MARTIN. (1965, edició de 1984): *Festival mágico-matemático*. Alianza. Madrid
- GARDNER, MARTIN. (1987): *Rosquillas anudadas*. Labor. Barcelona

D'aquests llibres divulgatius s'han recollit alguns aspectes parcials d'història de la numeració, però, sobre tot, han inspirat algunes de les activitats proposades i posteriorment desenvolupades al web.

- GUIRADO, JUAN (2007): *Infinitum. Citas matemáticas*. Eneida (Madrid).

Ha servit per proporcionar cites per a la pàgina inicial del web.

- JEAN, GEORGES, (1988): *La escritura, memoria de la humanidad*. Ediciones B. Barcelona.

Títol divulgatiu sobre la història de l'escriptura que ha ajudat a completar alguns aspectes del subapartat històric *Escriure*.

- PAENZA, ADRIAN (2005): *Matemàtica... ¿estás ahí?*. Universidad Nacional de Quilmes-Siglo XXI Argentina. Buenos Aires.

Amè llibre divulgatiu de la que s'ha extret una part de l'activitat de comptatge en situacions en que no es pot comptar materialment.

- PALACIOS A., ÁLVAREZ A. i ARGERAMI O. (1995): *Biografía de las palabras (Pesquisas en el lenguaje matemático)*. Magisterio del Río de la Plata (Buenos Aires).

Petit diccionari etimològic d'alguns termes matemàtics.

- SEIFE, CHARLES. (2006): *Cero. La biografía de una idea peligrosa*. Ellago Ediciones. Castellón.

Llibre dedicat al nombre zero molt especialment en aspectes relatius a la física. S'han observat algunes de les idees dels primers capítols per subcapítol del projecte dedicat al zero.

- WELLS, DAVID (2000): *El curioso mundo de las matemáticas*. Gedisa (Barcelona).

El seu ús bàsic ha estat en la recollida de cites de la pàgina inicial del web.

- WRIGHT, ROBERT (2005): *Nadie pierde (La teoría de juegos y la lógica del destino humano)*. Tusquets. Barcelona.

Títol que tracta de fer un anàlisi de l'evolució històrica des de la teoria econòmico-matemàtica de jocs. Ha donat llum sobre alguns aspectes del que s'entén per evolució de la complexitat social i alguns dels aspectes de desenvolupament tecnològic relacionats.

6.3. Articles, tesis, memòries

- ALBERTÍ, MIQUEL (2002): *Les Matemàtiques des d'una perspectiva etnocultural: Etnomatemàtiques*. Biaix nº 20. 26 a 34

Articles que tracta d'introduir a la proposta didàctica basada en les etnomatemàtiques: les matemàtiques "dels pobles i de les gents".

- BARBA, CARME (2005): *De les estratègies informals a les eficients pel càlcul*. Memòria llicència d'estudis.

<http://phobos.xtec.es/sgfprp/resum.php?codi=908>

Recull de la recerca feta per l'autora sobre els aspectes fonamentals de l'aprenentatge dels nombres amb interessantíssimes propostes d'activitats. Ha aportat moltes idees a tots els apartats d'aquest estudi. Són especialment interessants els vídeos que il·lustren les experiències (tot i que no tot es troben al servidor web del Departament d'Educació).

- BISHOP, ALAN J, (2001): *Lo que una perspectiva cultural nos cuenta sobre la historia de las matemáticas*. UNO nº 26. 61 a 72.

Article que tracta d'orientar alguns aspectes de la història de les matemàtiques des d'una perspectiva cultural més general i lluny de l'eurocentrista tradicional.

- BROUSSEAU, GUY (2000): *Education et Didactique des mathématiques*.
http://math.unipa.it/~grim/brousseau_didact_03.pdf

S'han recollit les seves idees sobre els problemes fonamentals per mostrar que realment el nen o la nena han assolit el concepte i mètode de comptatge resultatiu.

- FERNÁNDEZ FERNÁNDEZ, SANTIAGO (2001): *La historia de las matemáticas en el aula*. UNO nº 26. 9 a 27.

Article sobre la importància i ús de la història de la matemàtica com a recurs didàctic.

- GONZÁLEZ, GABRIELA i MARTÍNEZ, PATRÍCIA (2004): *Los conejos hambrientos: una actividad interactiva para trabajar conteo con niños preescolares*
<http://www.somece.org.mx/simposio2004/memorias/grupos/archivos/037.doc>

D'aquest article s'han extret els principis de Gelman i Gallistel que denoten els avenços en l'aprenentatge del comptatge. També hi podem trobar propostes d'activitats.

- GONZÁLEZ URBANEJA, PEDROMIGUEL (2004): *La Història de la Matemàtica com a recurs didàctic i instrument d'integració cultural de la Matemàtica*.
Memòria llicència d'estudis
<http://www.xtec.es/sgfp/200001/resums/rnolla.htm>

Treball que ofereix recursos de documentació històrica i dels vincles entre les matemàtiques amb altres activitats de la cultura i el pensament.

- LERNER, D. i SADOVSKY, P (1994): *El sistema de numeración: un problema didáctico* (dividit en 5 parts)
http://musicaba.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/cepa/public_y_mat_mat.php

Interessant conjunt d'articles que aborda molts aspectes de les dificultats de l'aprenentatge de l'escriptura numèrica i proposa alternatives didàctiques força fonamentades.

- LUPIAÑEZ GÓMEZ, JOSÉ LUIS (2002): *Reflexiones didácticas sobre la Historia de la Matemática*. Suma nº 40. 59 a 63
- MASSA ESTEVE, M^a ROSA (2003): *Aportacions de la història de la matemàtica a l'ensenyament de la matemàtica*. Biaix nº 21. 4 a 9

Articles sobre la importància i ús de la història de la matemàtica com a recurs didàctic.

- NOLLA, RAMON (2001): *Estudis i activitats sobre problemes clau de la Història de la Matemàtica. Per a una aproximació genètica al tractament de les idees matemàtiques*. Memòria llicència d'estudis
<http://www.xtec.es/sgfp/200001/resums/rnolla.htm>

L'objectiu d'aquest treball, segons el propi autor és "l'estudi dels tractaments inicials d'una col·lecció de problemes i qüestions implicades en les idees i conceptes matemàtics que són tractats a les aules de Secundària Obligatòria i Batxillerat, i del camp més extens que ha de conèixer el professorat per tenir-ne una perspectiva prou àmplia".

- SAADA, EL HADI (2003): *Lectures-écriture des nombres chez les élèves de 1P*: <http://www.geneve.ch/sred/publications/docsred/2003/Lecture-EcritureNB.pdf>

Recull d'un complet estudi realitzat a França sobre els problemes d'aprenentatge de la numeració escrita sobre prop de 800 alumnes de 1r de Primària.

6.4. Altres articles, tesis, memòries

A més dels citats en notes a peu de pàgina en moltes de les pàgines de l'estudi, altres articles utilitats dels que s'han recollit aspectes parcials han estat:

- BOVER, MONTSERRAT (2004): Gerbert d'Orlhac, mestre i savi. Biaix 22: <http://www.xtec.es/entitats/biaix/biaix22/BIAIX22-ames3.pdf>
- FREDIANI, EUGENIO i TENORIO, ÀNGEL (2004). *Los sistemas de numeración maya, azteca e inca*: <http://www.scm.org.co/Articulos/756.pdf>
- O'CONNOR J. J. i ROBERTSON E. F. (2001): *The Arabic numeral system*: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Arabic_numerals.html
- PEKONEN, OSMO : *Gerberto d'Aurillac: Matemático y Papa*; <http://www.divulgamat.net/weborriak/Historia/Gaceta/Historia42.pdf>
- RAUFF, JAMES (2003): *Counting on Your Body in Papua New Guinea*: <http://www.aug.edu/dvskel/Rauff2003.htm>
- SOUTIFF, MICHEL (2001): *La diffusion de la numérations décimale de position*. <http://www.reunion.iufm.fr/dep/mathematiques/Seminaires/Resources/Soutif32.pdf>

6.5. Alguns dels webs consultats

- ...JMC (José Miguel Corbí): <http://users.servicios.retecal.es/jomicoe/>
- ALFABETOS DE AYER Y HOY (Promotora española de lingüística): <http://www.proel.org/alfabetos.html>
- ARQUEOESTUDIO: <http://www.arqueostudio.com/seminario.html#7>
- CANÇONER PER ALS INFANTS (Maite Tarragó): <http://www.iesronda.org/professor/mtarrago/canconer/canconer.htm>
- DEVOCIONARIO CATÓLICO: <http://www.devocionario.com/>
- DICCIONARIOS EN LÍNEA AULEX: <http://aulex.ohui.net/>

- DIVULGAMAT: <http://www.divulgamat.net>
- EPSILONES: <http://www.epsilones.com/>
- FAMSI (Fundación para el avance de los estudios mesoamericanos):
<http://www.famsi.org/spanish/>
- MATHEMATICAL QUOTATIONS SERVER:
<http://math.furman.edu/~mwoodard/mqs/mquot.shtml>
- PROYECTO DE BASE DE DATOS KHIPU:
http://kipukamayuk.fas.harvard.edu/espanol/index_sp.html
- SANSKRIT, TAMIL AND PAHLAVI DICTIONARIES:
<http://webapps.uni-koeln.de/tamil/>
- THE MCTUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE:
<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/>
- THE NUMBER SYSTEM OF THE WORLD:
<http://www.sf.airnet.ne.jp/ts/language/number.html>
- THE SHOYEN COLLECTION:
<http://www.nb.no/baser/schoyen/5/5.11/index.html>
- VIQUIPEDIA (català, i altres idiomes): <http://ca.wikipedia.org>