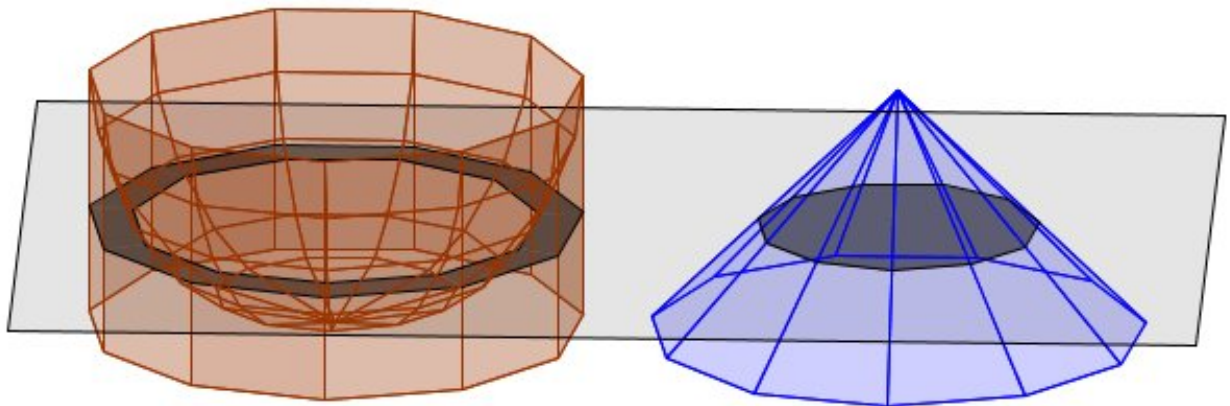


Matemàtiques visuals



Memòria de la llicència retribuïda concedida pel Departament d'Educació
(DOGC núm: 4968 del 14-09-2007)

Autor: Enric Brasó i Campderrós
professor de l'IES Arnau Cadell de Sant Cugat del Vallès
mail: ebraso@xtec.cat
web: "MATEMÀTIQUES VISUALS" www.xtec.cat/~ebraso

Curs: 2007-2008

Supervisió: Josep Masalles Román de l'ICE de la Universitat Autònoma de Barcelona

Índex

1,- Introducció.....	3
2,- Marc teòric.....	4
2.1,- El llenguatge visual.....	4
2.2,- La contraposició formalisme-intuïció a la història de les matemàtiques.	9
2.3,- Les recerques sobre visualització en l'àmbit de l'educació matemàtica.	12
2.4,- Problemes i resistències a utilitzar les visualitzacions.....	15
2.5,- Les neurociències.	18
2.6,- L'aprenentatge multimèdia. Els principis de Mayer.....	20
2.7,- Les TIC i la visualització.....	22
2.8,- La catalogació dels recursos.....	24
3,- Recursos visuals.....	25
3.1,- Recerca, selecció, avaluació i creació de recursos.....	25
3.2,- La web “Matemàtiques visuals”.....	27
3.3,- Recursos inclosos a la web a data 1 d'octubre de 2008	28
4,- Conclusions.....	30
5,- Bibliografia.....	31

1.- Introducció

Les imatges, i lligades a elles el pensament visual i espacial, tenen una importància cabdal en l'activitat matemàtica i en particular en el seu ensenyament. Les eines TIC permeten que les imatges tradicionalment estàtiques es converteixin en dinàmiques i, sobretot, en interactives.

El convenciment que els ensenyants podem millorar la nostra tasca docent si coneixem les avantatges i característiques del pensament visual a la vegada que disposem de materials, eines i exemples d'utilització, ha estat el fil conductor d'aquesta llicència.

Així, aquest treball té dues parts. Per un costat, la lectura i assimilació de les investigacions que en aquest terreny s'han realitzat, tant en l'àmbit de la didàctica de la matemàtica com en de les neurociències i la psicologia de l'aprenentatge. L'apartat "Marc teòric" d'aquesta memòria conté els aspectes més significatius d'aquestes lectures.

Per altra banda he creat la web "MATEMÀTIQUES VISUALS" www.xtec.cat/~ebraso que inclou inicialment una seixantena de recursos visuals (vídeos, applets, animacions) pensats principalment pels nivells de secundària.

La majoria d'aquests recursos són produccions pròpies, creades a partir d'idees i necessitats sorgides en anys de pràctica docent. Altres recursos seleccionats pel seu interès de la xarxa han estat inclosos a la web a través d'una pàgina intermèdia que inclou indicacions i materials per a la seva utilització.

Tots ells són accessibles a través de la xarxa i estan pensats per ser utilitzats a classe amb un projector, a l'aula d'informàtica o de forma individual.

Els materials de la web estan sota la llicència Creative Commons que permet copiar, distribuir i fer-ne obres derivades amb les condicions de reconeixement de l'autor, no utilització comercial i mantenir la llicència en obres derivades. És possible així, la integració d'aquests recursos dins una estructura de curs amb suport TIC.

Molts dels recursos propis han estat creats amb el GeoGebra, la potència i facilitat d'ús d'aquest programa així com la seva llicència lliure i la dinàmica col·laborativa formada al seu voltant han facilitat aquest treball.

Els recursos continguts a la web els he organitzats en temes amb els indicatius de durada, idioma, nivell i tipologia. També he creat una pàgina amb la situació de cada un d'ells al currículum de la ESO i el batxillerat.

Paral·lelament he catalogat de forma individual, cadascun de la majoria dels recursos continguts a la web, dins el projecte MeRLÍ del Departament d'Educació el qual pretén reunir i facilitar l'accés a tots els recursos dels seus portals. A través de la possibilitat que ofereix el seu disseny, els usuaris podran incorporar a la fitxa de cada recurs la seva valoració i comentaris. D'aquesta manera penso seguir adaptant, modificant i ampliant els recursos de la web "MATEMÀTIQUES VISUALS" a partir de l'experiència pràctica col·lectiva.

2,- Marc teòric.

2.1,- El llenguatge visual.

La vista, és a dir, la capacitat de percebre estímuls lluminosos que ens permeten conèixer les formes, grandàries i els colors del nostre entorn, és el més important dels nostres sentits.

Anatòmicament, és el sentit més desenvolupat i perfeccionat, a través d'ell rebem la major part de la informació del món que ens envolta. Una gran part del nostre cervell està involucrat en la visió i el processament dels seus estímuls. El nervi òptic conté 1'2 milions de fibres [Jonas et al., 1992], 40 vegades més que el nervi auditiu que en conté 30.000 [Spoendlin & Schrott, 1989].

Les imatges visuals són fonamentals per a la comprensió dels fenòmens externs a l'organisme. Culturalment, la transmissió de coneixements ha tingut sempre un fort component visual.

Des dels inicis de l'espècie humana, la representació pictòrica ha estat un element present a totes les cultures. L'aparició de l'escriptura no va fer disminuir pas la importància dels documents gràfics. Pels historiadors actuals, poder disposar de mapes, dibuixos, pintures, i gravats a més a més de les fonts textuales, els ajuda a comprendre millor el passat.



Calc de les pintures rupestres de Cogul (Lleida)
Font: Museu d'Art de Catalunya



Taverner romà
Font: MNAR Museo Nacional de Arte Romano (Merida)

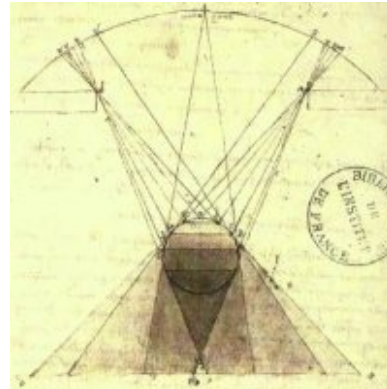


Miniatura persa
Anys 1450-60
Font: Viquipèdia

Tot i el fet que durant segles el coneixement de la paraula escrita ha estat un privilegi de les classes altes i que el relat a través de representacions gràfiques ha estat menystingut, la realitat de la potència d'aquest llenguatge és tossuda i el reconeixement de l'obra de científics com **Leonardo da Vinci** ho demostra.



Leonardo da Vinci:
Estudi del braç
Font:Viquipèdia



Leonardo da Vinci:
Estudi de la graduació de les ombres sobre les esferes
Font:Viquipèdia

Actualment, vivim una contradicció: tot i que reconeixem la importància de la comunicació audiovisual, ignorem els seus codis i mecanismes. Així com els codis que permeten analitzar les comunicacions lingüístiques són coneguts i formen part de l'ensenyament reglat també desconeixem sovint, malgrat la seva importància, els del llenguatge visual.

Paraules i imatges són dos sistemes de representació del coneixement qualitativament diferents. Per una part el llenguatge és una de les eines cognitives més importants creades per l'ésser humà. Al utilitzar paraules descrivim coses de forma abstracta, utilitzant una estructura formada per unitats discretes presentades de forma lineal. Darrera del llenguatge hi ha doncs un treball mental.

D'altra banda al utilitzar imatges podem descriure coses d'una manera més intuïtiva i més propera a la nostra experiència visual. Les imatges permeten la representació simultània i no lineal de la informació. Encara que moltes coses poden ser descrites alhora amb paraules i amb imatges, els resultants no són equivalents des del punt de vista de la informació. Les representacions verbals i icòniques es poden complementar però no substituir-se entre si.

Rudolf Arnheim, en el seu llibre "Arte y percepción visual" [Arnheim 1987] ho expressa amb aquestes paraules:

Succeeix amb freqüència que veiem i sentim determinades qualitats en una obra d'art però no som capaços d'expressar-les en paraules. La raó del nostre fracàs no radica en el fet d'utilitzar el llenguatge, sinó que encara no hem aconseguit plasmar aquestes qualitats en categories adequades. El llenguatge no pot fer-ho directament perquè no és una avinguda directa de contacte sensorial amb la realitat; sols serveix per donar nom al que hem vist, escoltat o pensat. ... Les experiències han de ser codificades en primer lloc per l'anàlisi



Captura de la web:
<http://www.visiblebody.com>
 que permet una magnífica exploració interactiva del cos humà



Algunes captures de l'animació de la web del diari "El País" sobre l'enfonsament del petroler "Prestige" el 2002

Un altre aspecte del llenguatge visual, la seva capacitat d'increment de comprensió, s'il·lustra amb el següent problema del que parla **Seymour Papert** en el seu llibre "Desafío a la mente" [Papert 1980]:

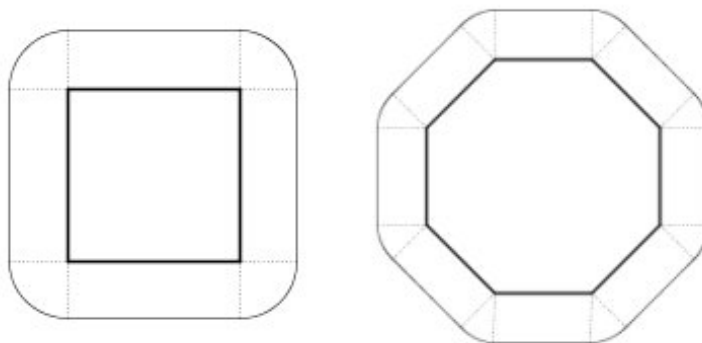
"Imaginem que la Terra és una esfera perfecta absolutament llisa de 6.000 km de radi sense cap irregularitat i que tenim un cordill donant la volta completa a la Terra passant pel punt on ens trobem i els dos Pols. Ara imaginem que volem aixecar aquest cordill una alçada de 2 metres a tot el seu recorregut; naturalment haurem d'allargar el cordill, però quant?"

Si és el primer cop que ens plantegen el problema, és més il·lustratiu que ens aturem abans de fer cap càlcul i estimem el resultat: serà uns metres, uns quilòmetres, uns milers de quilòmetres?

Els coneixements matemàtics ens donen la resposta: $2\pi(R+2) - 2\pi R = 4\pi \approx 12,6$ metres, però ens deixen tant perplexos que ens fan revisar els càlculs; com pot ser que sols 12,6 m aconseguixin aixecar 2 m a tot arreu una circumferència tant enorme?

Veiem el següent raonament visual: Imaginem la Terra quadrada, llavors al aixecar el cordill 2 metres sols hi hem d'afegir els 4 arcs, ja que els altres quatre segments són iguals

de llargs que els del quadrat original. Aquests quatre arcs junts formen un cercle de radi 2 m i la figura és independent de la mida del quadrat original! La Terra, naturalment, no és quadrada però aquest raonament es pot fer amb un octògon regular, reunint els 8 arcs extrems tenim també un cercle de radi 2 m. I de la mateixa manera es podria fer amb polígons regulars de 100, 1000 o un milió de costats, pràcticament indistingibles de la circumferència.



Una Terra quadrada o una Terra octogonal envoltada d'un cordill arran de Terra i a dos metres d'altura. Es veu com la diferència està sols en els arcs de les cantonades que conjuntament formen una circumferència de radi 2 m.

Podria ser que la nostra perplexitat es mantingués, però indubtablement la comprensió del problema ha augmentat.

El llenguatge visual, doncs, té una potència que va més enllà de la frase "*Una imatge val més que mil paraules*" i que s'acosta més a l'exclamació "*Ara ho veig!*" com a sinònim de "*Ara, sí, ho entenc del tot!*".

2.2.- La contraposició formalisme-intuïció a la història de les matemàtiques.

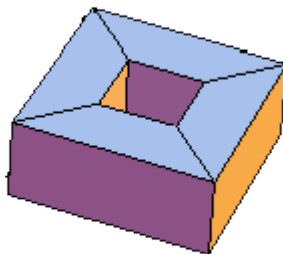
La intuïció visual ha estat un tema controvertit ja des dels inicis de la història de les matemàtiques. Plató al segle I aC en la coneguda al·legoria de la caverna ja contraposa el món de les percepcions dels sentits, en particular de les imatges, que considera imperfecte, amb el món de les idees, de les relacions lògiques, perfectes i universals.

Tot el debat de la història de la filosofia entre racionalistes i empiristes té aquest rerefons.

Euclides amb els seus "Elements" va constituir durant segles el paradigma del formalisme i de la construcció lògica matemàtica. Mentre, però, els avenços i la creació de nova matemàtica no es preocupaven en excés de la justificació rigorosa, si un concepte resultava útil es feia servir malgrat la seva definició fos inconcreta. Així, per exemple, la majoria dels treballs d'**Isaac Newton** serien inacceptables amb els paràmetres actuals.

Però, al principi del segle XIX, els matemàtics estaven escarmentats i la idea que les representacions gràfiques provocaven errors era estesa.

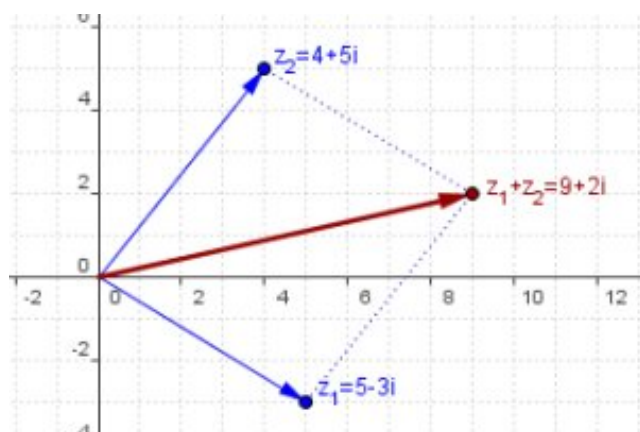
Així, per exemple, va succeir amb la fórmula, que **Leonhard Euler** havia avançat, referent a la relació entre vèrtexs(V), arestes(A) i cares(C) d'un poliedre: $V-A+C=2$. El mateix **Cauchy** en un dels seus primers treballs en va elaborar una "demostració", però poc després en descobrir-se que el cub amb un forat central no complia la fórmula es va posar de manifest que la demostració de Cauchy tenia un pas on utilitzava inadvertidament les propietats d'una figura concreta.



Poliedre amb 16 cares, 32 arestes, i 16 vèrtexs. I pel qual, doncs el valor de l'expressió $V-A+C$ coneguda com a Característica d'Euler χ del poliedre és 0.

Després de la demostració fallida de Cauchy, i els treballs posteriors, ha quedat demostrat que la Característica d'Euler χ val 2 sols pels poliedres topològicament equivalents a una esfera.

Com a resultat, els gràfics van ser exclosos de tots els treballs matemàtics. **Gauss** per exemple en la seva tesi doctoral sobre els nombres imaginaris va eliminar tota representació dels mateixos. Varen haver de passar 40 anys per tal que es decidís a explicar l'origen gràfic de la seva intuïció dels imaginaris. Vet aquí doncs un fenomen del que encara avui l'ensenyament i la comunicació de les idees matemàtiques se'n ressenten: la presentació estrictament axiomàtica i formal amaga o elimina les explicacions de les intuïcions, sovint gràfiques, que han generat les idees bàsiques privant-nos d'aquesta manera d'una eina de comprensió important.



La representació clàssica del pla complex on s'indica la part imaginària dels mateixos a l'eix d'ordenades

Donat que multiplicar un enter per -1 comporta un gir de 180° fins el seu oposat, amb aquesta representació multiplicar per i comporta un gir de 90° i tornar a multiplicar-lo per i un segon gir de 90° , la qual cosa és coherent amb $i \cdot i = -1$

La dicotomia formalisme-intuïció va persistir al llarg dels anys. En paraules de l'influent matemàtic **David Hilbert**:

En matemàtiques... trobem presents dues tendències. Per una banda, la tendència a l'abstracció que procura cristal·litzar les relacions lògiques inherents al laberint de materials estudiats, així com relacionar-lo d'una manera sistemàtica i ordenada. I d'altra banda, la tendència a comprensió intuïtiva que fomenta la captació immediata dels objectes que s'estudien, les seves relacions mútues i el significat d'aquestes.

Hilbert, malgrat el seu important paper en la matemàtica formalista, no va menysprear mai la intuïció:

La intuïció visual és de gran valor no solament per l'investigador, sinó també per a qualsevol que desitgi estudiar i apreciar els resultats de la geometria. L'aproximació a través d'intuïció visual, hauria de col·laborar a una apreciació més justa de les matemàtiques per un ventall més ampli de gent que els especialistes.

Amb l'ajut de la imaginació il·luminem els múltiples fets i els problemes geomètrics. En nombrosos casos veiem el camí a seguir més enllà per trobar un fet i demostrar-lo, sense necessitat de passar pels detalls de les definicions estrictes dels conceptes i dels càlculs efectius.

Donat que la geometria presenta tants variats aspectes i està lligada a tantes altres branques de la matemàtica, amb l'ajut de la intuïció ens és possible descobrir una forma de veure a vista d'ocell i en el seu conjunt, tota la matemàtica, amb tota la varietat dels seus problemes i la seva riquesa d'idees. Per això penso que una presentació a grans trets de la geometria basada en la intuïció visual deuria contribuir a una apreciació més correcte de la matemàtica per a un públic més ampli que els dels especialistes. [Hilbert 1952]

Malgrat aquestes paraules, la matemàtica va desplaçar-se cap l'extrem del formalisme. La segona meitat del segle XX va estar dominada pel bourbakisme i el seu formalisme extrem també en el camp de l'ensenyament. Escriure un llibre sense ni un sol gràfic era considerat

un mèrit.

Malgrat aquesta tendència general, personalitats importants van seguir insistint en el valor de la intuïció visual:

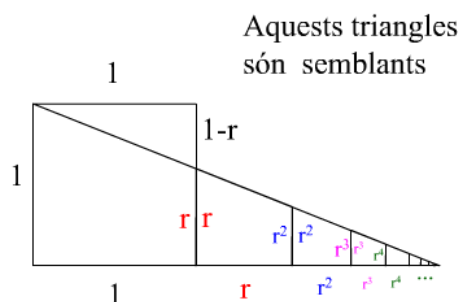
El recolzament visual pot ajudar a comprendre la "magnitud" d'un nombre, potser pot constituir la representació d'un nombre, però pot també fixar la memòria mostrant les relacions quantitatives entre més nombres i ajudant a tenir presents, simultàniament, més hipòtesis, i pot també, avançar-se fins a il·lustrar les situacions, els raonaments i les operacions més abstractes. [Emma Castellnuovo 1963]

"La "intuïció visual" és una necessitat per la geometria i una valuosa ajuda en les altres branques de la matemàtica" [Lluís Santaló 1985]

"La nostra percepció és molt primordialment visual i així no és d'estranyar en absolut que el recolzament continu en el visual estigui tant present en les tasques de matematització, [...] I encara en aquelles activitats matemàtiques en que l'abstracció sembla portar-nos molt més enllà del perceptible per la vista, els matemàtics molt sovint es valen de processos simbòlics, diagrames visuals [...] que els acompanyen en el seu treball [...] La visualització apareix així com alguna cosa profundament natural [...] en la transmissió i comunicació pròpies del quefer matemàtic" [Miguel de Guzman 1993]

Afortunadament, avui en dia sembla que el pèndol formalisme-intuïció ha retornat a la posició central i la intuïció és reconeguda el seu paper divulgatiu, pedagògic i creatiu.

Així per exemple, des de l'any 1993, la revista Mathematics Magazine de la MAA inclou de forma regular, amb gran acceptació, les anomenades "Demostracions sense paraules"



Això ens dona la suma de la progressió geomètrica decreixent de raó r i primer terme 1

$$\frac{1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \dots}{1} = \frac{1}{1-r}$$

Demostració de la fórmula de la suma d'una progressió geomètrica.
 Font: Proofs Without Words, R. B. Nelsen MAA 1993

2.3.- Les recerques sobre visualització en l'àmbit de l'educació matemàtica.

La definició del que s'entén com a visualització varia segons l'enfoc dels diferents autors, aquí, seguint **Abraham Arcavi** [Arcavi 2006], que fusiona varies definicions, considerem que la paraula “visualitzar” com a **verb** significa l'acció mental, l'habilitat, el procés de creació, de interpretació i d'us d'imatges amb el propòsit de descriure i transmetre informació i avançar en la comprensió d'idees desconegudes. I per altra banda “visualització” com a **nom** significa també la pròpia imatge ja sigui **externa**, sobre paper o en mitjans tecnològics, o **interna** és a dir les estructures cognitives que cada persona forma a la seva ment.

Des de la dècada de 1980, els treballs sobre visualització han estat presents tant en els ICME (International Congress on Mathematical Education), com en els treballs del PME (International Group for the Psychology of Mathematics Education).

Els treballs d'**Alan Bishop** varen ser dels primers en posar l'accent en la importància de la visualització a l'ensenyament, remarcant la influència de les diferències personals, socials i culturals:

A les classes de matemàtica es poden fer moltes coses per ajudar la visualització. (...) Hi ha proves del fet que val la pena emfatitzar les representacions visuals en tots els aspectes de l'ensenyament de la matemàtica. Al mateix temps, cal que els ensenyants de matemàtiques tinguin present el caràcter altament individual i personal de la naturalesa del procés de visualització.
[Bishop 1996]

Norma Presmeg en la seva tesi doctoral del 1985, a través d'entrevistes amb 54 estudiants de secundària, va identificar els cinc tipus diferents de representacions internes següents:

	característiques	exemples
imatges concretes	estàtiques i detallades	- triangles especials - quadrants trigonomètrics
imatges patró	relacions o pautes entre elements	- mòdul i direcció d'un vector - relacions entre angles de diferents quadrants
imatges de fórmules	record mnemotècnic de fórmules	- solucions de l'equació de segon grau - el mòdul d'un vector
imatges cines-tèsiques	involucren moviment del propi cos	- dibuix d'una paràbola amb els dit - caminar amb els dits sobre una

		recta per saber el signe del seu pendent.
imatges dinàmiques	imatges transformables mentalment	- conversió d'un paral·lelogram no rectangle en un rectangle de superfície equivalent movent un fragment triangular.

Presmeg va constatar que així com la majoria d'alumnes utilitzaven les imatges concretes, les imatges dinàmiques eren poc utilitzades. També va constatar que la utilització d'un o altre tipus d'imatge no és exclouent, així, els alumnes, depenent de les diferents situacions, feien servir una o altra d'aquestes imatges.

En el mateix estudi també estudia en profunditat 13 professors en aspectes com la presentació o no dels temes en forma visual, el foment de les visualitzacions per part dels estudiants, la gestualitat, l'ús del color, l'estímul a la intuïció, l'endarreriment del simbolisme o la creació deliberada de conflicte cognitiu per estimular la reflexió i l'interès dels estudiants. Una de les conclusions més significatives és que si els professors haguessin estat més conscients de les avantatges i dificultats de les visualitzacions, haguessin pogut ajudar millor als seus alumnes.

El 2006 Norma Presmeg va proposar tretze preguntes per a la recerca en el camp de la visualització a l'ensenyament de les matemàtiques

1. Quins aspectes pedagògics són significatius per promoure i vèncer les dificultats d'ús de la visualització en ensenyament de les matemàtiques?
2. Quines metodologies d'aula promouen l'ús actiu i eficaç de la forma visual de pensar matemàtiques?
3. Quina són les formes eficaces en els diferents nivells de promoure la visualització en la solució de problemes matemàtiques?
4. Quin és el paper dels gestos en la visualització matemàtica?
5. Quins són els mecanismes implicats en el moviment flexible entre els diferents registres matemàtics, incloent-hi els de natura visual? Com podem combatre el fenomen del compartiment?
6. Quin paper tenen les metàfores en la connexió dels diferents registres matemàtics, incloent-hi aquells d'una natura visual?
7. Com poden els professors ajudar als alumnes a fer connexions entre les representacions visuals i simbòliques?
8. Com poden els professors ajudar als alumnes a fer connexions entre les representacions (visuales i simbòliques) personals i convencionals?
9. Com l'ús d'imatges pot facilitar o obstaculitzar la cognició de processos com objectes matemàtics?
10. Com es pot aprofitar la visualització per promoure l'abstracció matemàtica i la

generalització?

11. Com l'estímul generat per les imatges pròpies pot ser aprofitat pels professors per incrementar el goig d'aprendre i fer matemàtiques?

12. Com els aspectes visuals de la tecnologia informàtica canvien la dinàmica de l'aprenentatge de les matemàtiques?

13. Quina és l'estructura i quins són els components d'una teoria general de la visualització a l'ensenyament de les matemàtiques?

Clements i Del Campo (1989) conclouen “els nens incorporen no sols les imatges mentals i les proposicions verbals a les seves estructures mentals, també memoritzen els episodis de manipulació activa d'objectes físics i la discussió en grup”

Els treballs de **Raymon Duval** (1993, 1995) s'emmarquen en una perspectiva teòrica i psicològica. Duval posa l'èmfasi en la importància de realització i coordinació de diferents representacions d'un mateix concepte. Per Duval, la representació mental de les quantitats, les relacions, els objectes i l'espai geomètric permet la seva interacció amb les activitats mentals lingüístiques, simbòliques i analítiques de manera que el pas mental d'una categoria a l'altra les enriqueix mútuament.

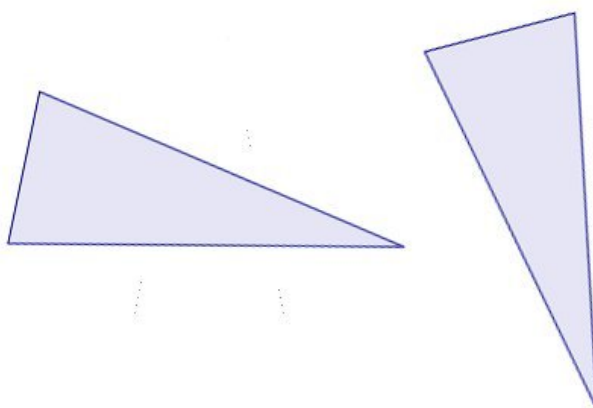
Zimmermann i Cunningham en el seu llibre de 1991 “Visualization in teaching and learning and mathematic” afirmen que:

“La visualització no és “la Matemàtica percebuda a través dels dibuixos”. La intuïció que la visualització matemàtica pretén no és una forma vaga d'intuïció, una substitució superficial del coneixement, sinó la classe d'intuïció que penetra en el nucli de la idea. Dona profunditat i significat al coneixement, serveix com a guia segura per a resoldre problemes i inspira coneixements creatius, la visualització no pot ser aïllada de la resta de les Matemàtiques. El pensament visual i les representacions gràfiques cal que estiguin units a altres formes de pensament matemàtic i a altres formes de representació. Hem d'aprendre com les idees poden ser representades simbòlicament, numèricament i gràficament, i saber moure'ns endavant i endarrere a través d'aquests modes” [Zimmermann & Cunningham 1991]

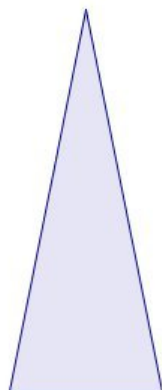
2.4,- Problemes i resistències a utilitzar les visualitzacions.

Un primer obstacle en la utilització de les visualitzacions a l'ensenyament de les matemàtiques és la qüestió ja comentada de la tradició formalista, abstracte i separada de la realitat que la comunitat matemàtica va transmetent d'una generació a la següent. Fins i tot en el cas que a l'ensenyament s'utilitzin visualitzacions, múltiples autors han comprovat com els alumnes detecten, encara que sigui de manera imperceptible, les preferències i les valoracions que els professors fan d'una o altra forma de presentació. L'educació matemàtica formalista dels professors ens porta a posar per davant una demostració simbòlica a una demostració visual. Sovint s'opta per una presentació axiomàtica, on els elements visuals juguen un paper il·lustratiu accessori, aquesta visió és detectada i reproduïda per una part de l'alumnat i contribueix a augmentar la fòbia matemàtica a l'altra part de l'alumnat.

No els falta, però, raó als qui consideren que l'abstracció i la generalització és un dels principals potencials de la matemàtica. No treballar la generalització pot comportar errors. Per exemple, tots els professors hem viscut l'experiència que un alumne no reconegui les figures



com a triangles isòsceles ja que en la seva concepció, aquests triangles són sols els situats amb el costat diferent horitzontalment.



Aquí, doncs, el fet de associar el concepte a una determinada i estàtica figura ha comportat aquesta concepció errònia. Òbviament, no es tracta de no dibuixar mai un triangle isòsceles ni d'utilitzar sols la seva definició verbal, cal aconseguir amb tots els recursos didàctics al nostre abast siguin materials manipulables o tecnològics que s'arribi a la generalització.

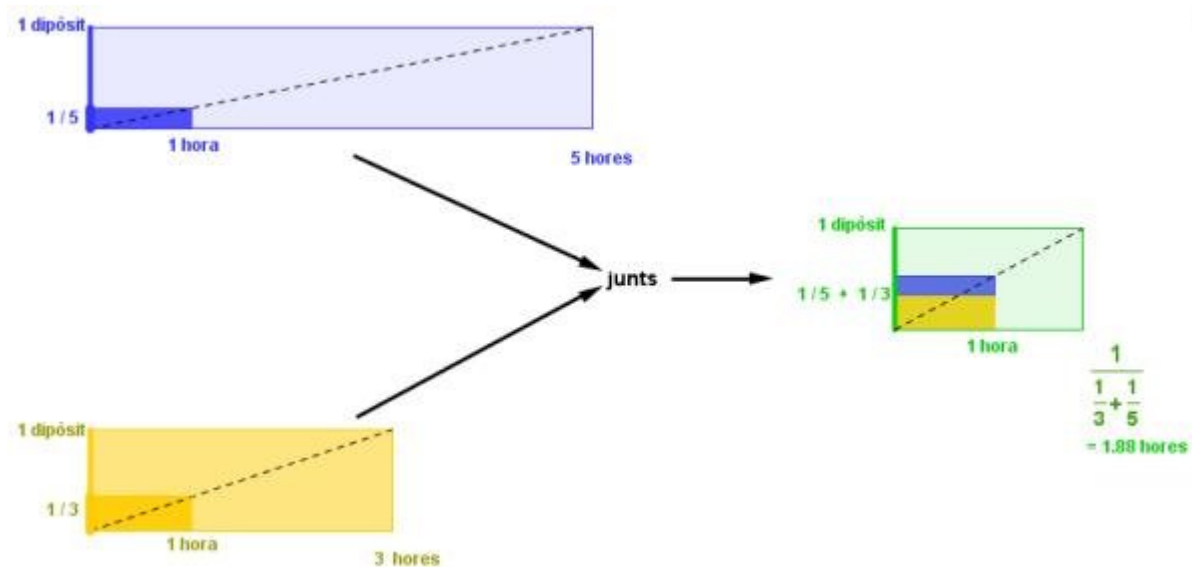
Aquest exemple no és un cas aïllat. Històricament, ha estat precisament la imatge dels nombres lligats exclusivament a la seva interpretació geomètrica el fet que va paraitzar el desenvolupament del càlcul a la Grècia clàssica i molts segles posteriors. Per exemple en la dificultat d'acceptació dels números negatius.

Un altre motiu de resistència a utilitzar les visualitzacions té a veure amb qüestions pròpiament intrínseques del procés d'aprenentatge, el que s'anomenen “raons cognitives”.

Sigui per exemple un clàssic problema “aixetes”: Una aixeta omple un dipòsit en 5 hores, una altra l'omple en 3 hores. Quant tardaran a omplir el dipòsit les dues aixetes juntes?

La resolució clàssica consisteix en reduir a la unitat: La primera aixeta omple en una hora, $1/5$ del dipòsit. La segona omple en una hora, $1/3$ del dipòsit. Les dues juntes en una hora ompliran $1/5 + 1/3 = 3/15 + 5/15 = 8/15$ parts del dipòsit. El dipòsit sencer s'omplirà en $15/8 = 1,88 = 1$ hora 52 minuts.

Mostrem aquí una possible resolució gràfica del procés, en aquest cas, però no necessàriament, s'ha utilitzat el GeoGebra



Aquesta representació de la resolució lliga el pas de la reducció a la unitat a la semblança de rectangles. Això, per una part ajuda a l'assimilació dels passos realitzats i els consolida al lligar-los amb altres coneixements geomètrics, però per altre part complica l'explicació al demanar el seu coneixement previ. L'alumnat que sense entendre la solució intenta la memorització dels passos ho té molt més difícil fer-ho amb la representació gràfica.

Els professors ens trobem sovint amb aquesta situació. Els arguments analítics són mecànics, sovint repetitius i relativament fàcils de memoritzar i reproduir. Els arguments visuals, en canvi, requereixen la construcció d'un dibuix diferent en cada cas, no hi ha regles fixades, cal conèixer uns prerequisits o convencions visuals i a més, cal tenir un mínim d'habilitat gràfica.

Per acabar els investigadors parlen dels obstacles “sociològics”. Els professors no som conscients completament de les potencialitats i beneficis que significa treballar les visualitzacions, cal formació, materials, habilitats personals, recursos tecnològics i disposar de temps.

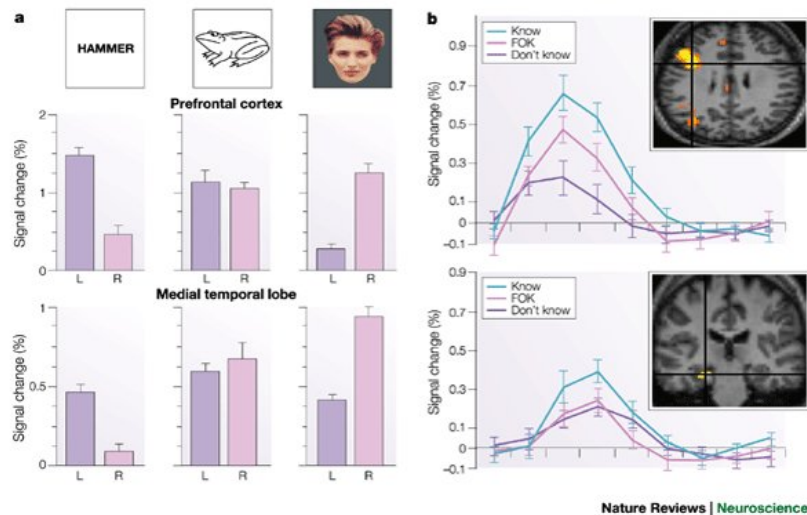
Si l'increment cognitiu que significa la realització de múltiples representacions, simbòlica, visual, verbal i el lligam entre elles no es té molt clar per part del professorat, el més normal és que el treball simbòlic i formal domini.

En paraules de **Eisenberg i Dreyfus**:

Encara que es reconeixen els beneficis de la visualització de conceptes matemàtics, sovint hi ha reticències per acceptar-los; es prefereix el raonament algorítmic per sobre del visual. Pensar visualment demana fets cognitius de major nivell que pensar algorítmicament i per això és natural pels estudiants gravitar lluny del pensament visual. [Eisenberg & Dreyfus 1991]

2.5,- Les neurociències.

L'aparició els anys 80 de les primeres tècniques d'obtenció d'imatges cerebrals com la tomografia per emissió de positrons (PET), va impulsar la recerca en obrir la possibilitat de localitzar les àrees actives del cervell en realitzar diferents activitats. Aquestes investigacions sols s'havien pogut realitzar fins aleshores estudiant pacients amb lesions cerebrals localitzades.



Il·lustració d'un article de neurociències aparegut a la revista Nature
http://www.nature.com/nrn/journal/v4/n8/fig_tab/nrn1178_F5.html

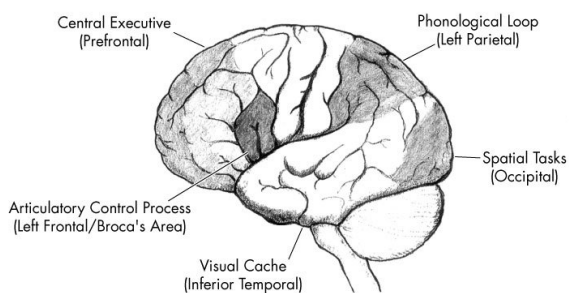
A grans trets, el sistema visual està format a més a més de les estructures de l'ull, per les regions corticals anomenades còrtex visual primari i còrtex associatiu localitzades a la regió occipital així com per altres regions del cervell mig.

El processament visual conscient i reflexiu té lloc al còrtex visual primari, però les respostes immediates i inconscients tenen lloc al fol·licle superior del cervell mig. El còrtex associatiu treballant conjuntament amb els lòbuls parietal i frontal així com amb parts del lòbul temporal està implicat en el processament de la informació visual i l'establiment de la memòria visual.

La complexitat de les xarxes neuronals és enorme. A més d'existir múltiples regions implicades simultàniament en diferents processos (visuals, auditius, memorístics) l'estudi de les diferències personals i de pacients amb lesions o incapacitats ha posat de manifest l'enorme plasticitat del nostre cervell per realitzar les mateixes funcions utilitzant circuits neuronals alternatius.

Malgrat aquesta complexitat i les polèmiques associades a les diferents interpretacions dels resultats experimentals, actualment existeix consens en varies qüestions:

- No existeix cap estructura neuronal que dirigeixi el cervell ni tampoc en particular cap estructura que regeixi les funcions visuals.
- El cervell no forma ni manté les imatges com fotografies estàtiques sinó com un conjunt estructurat de relacions espacials entre alguns elements identificats selectivament que permeten la seva manipulació i transformació.
- Existeixen dos tipus de memòria: la memòria de treball (working memory WM) d'una capacitat limitada al voltant de 7 elements [Miller, 1956] i una durada de pocs segons, [Peterson i Peterson, 1959] i la memòria a llarg termini (long-term memory LTM).



Àrees del cervell involucrades en la memòria de treball
 Font: "An Introduction to Cognitive Psychology Processes and Disorders" de David Groomer
www.psypress.com/groomer/figures.asp

Segons el model de Baddeley (1992), la memòria de treball conté dos subsistemes: el canal visual/espacial i el canal auditiu/verbal.

- El canal visual de la memòria de treball funciona seleccionant, aïllant, retenint i focalitzant de 4 a 6 elements de les imatges. El procés mental subseqüent permet el seguiment d'aquests elements de forma ràpida i independent del conjunt de la imatge [Luck & Zhang, 2008], [Pylyshyn, 1991].
- La memòria a llarg termini té una capacitat pràcticament il·limitada, però la recuperació de records és molt més lenta que la memòria de treball. Segons Lucy i Zhang (1992), el funcionament de la memòria de treball i la memòria a llarg termini és comparable al funcionament de la memòria RAM i al disc dur dels ordinadors.
- L'aprenentatge permet construir mecanismes automàtics de transferència entre la memòria de treball i la memòria a llarg termini. Alliberant d'aquesta manera la memòria de treball. Exemples d'aquest mecanisme d'automatització son la lectura o la conducció de bicicletes i altres vehicles.
- La formació de la memòria a llarg termini és el punt crucial de la comprensió de la cognició.

Actualment, la recerca en el camp de la percepció visual és molt activa ja que els seus resultats s'apliquen en el camp de la visió artificial.

2.6,- L'aprenentatge multimèdia. Els principis de Mayer.

No es necessari interpretar el concepte multimèdia com associat exclusivament al món de les pantalles. Tot el que succeeix en una aula amb la seva combinació d'imatges, llenguatge verbal i textual és també un aprenentatge multimèdia.

Però centrat en les produccions audiovisuals (vídeos, presentacions, programes) que combinen diferents elements visuals amb text, sons o narracions, s'han fet els darrers anys una sèrie d'investigacions que ofereixen ja una sèrie de resultats interessants amb aspectes que cal conèixer. Ja que són d'utilitat directa tant per elaborar o seleccionar materials com per presentar-lo a l'alumnat.

Aquestes investigacions realitzades pel professor de psicologia de la Universitat de Califòrnia Santa Bàrbara **Richard Mayer** conjuntament amb el seu equip, donen una base científica a criteris fins ara intuïtius. I ens orienten sobre la forma més adient de combinar imatges, animacions, narració i text.

Segons Mayer la seva teoria es fonamenta en tres hipòtesis:

- Primera: La cognició humana inclou dos canals separats: el visual-pictòric i el auditiu-verbal. [Paivio 1986] [Baddeley 1986, 1999]
- Segona: La capacitat de processament simultani de cada canal és limitada. [Baddeley 1986, 1999]
- Tercera: L'aprenentatge actiu comporta la selecció i organització de la informació en representacions mentals coherents que s'integren en els coneixements previs. [Mayer 2001]

Els resultats experimentals son coherents amb aquestes hipòtesis i li permeten enunciar els seus principis:

Principi multimèdia	Aprenem i recordem millor les coses que hem après utilitzant imatges conjuntament amb llenguatge verbal.
Principi de contigüitat espacial.	És millor situar el text integrat dins la imatge prop de l'element.
Principi de contigüitat temporal	És millor que la narració es presenti simultàniament amb la imatge.
Principi de coherència o d'eliminació de males herbes	Aprenem millor si no hi ha elements que ens distreuen. Cal eliminar, sense pietat, músiques, fons i tots els elements que no aportin res, per més atractius que siguin, ja que consumeixen recursos cognitius.

Principi de modalitat	És millor per l'aprenentatge, acompanyar la imatge amb narració sonora que amb text escrit. El text escrit ocupa el canal visual i interfereix per tant la recepció d'imatges. En canvi la narració parlada ocupa un canal diferent, l'auditiu, complementant així el canal visual.
Principi de redundància	Acompanyar la imatge a la vegada amb narració sonora i text escrit és pitjor que fer-ho sols amb una de les dues coses. També hi ha interferències, és millor eliminar el text escrit.
Principi de personalització	Hi ha millors resultats si s'utilitza un llenguatge planer i proper a les experiències dels alumnes més que un llenguatge impersonal i culte.
Principi de d'interactivitat	Si és necessària la interactivitat encara que sigui molt simple, l'aprenentatge millora.
Principi de la segmentació	Si la informació a transmetre és complexa cal fragmentar-la
Principi de la senyalització	Si la informació és complexa es poden senyalitzar els elements importants i indicar la situació de l'ítem actual dins el conjunt.

També s'han cercat les diferències en l'aprenentatge en funció de les capacitats individuals i l'ús d'aquests principis. Els resultats indiquen que els alumnes més ben dotats intel·lectualment suporten millor les interferències entre els diferents canals. Així no hi ha grans diferències d'aprenentatge quan aquests alumnes treballen amb elements multimèdia mal dissenyats. En canvi amb alumnes menys dotats les diferències són significatives.

Totes aquestes idees posades sobre la taula per la inflació de "powerpoints" no son pas noves des de la retòrica i oratòria de la Grècia clàssica tots els pedagogs se n'han ocupat.

2.7.- Les TIC i la visualització.

Gran part de les fites de la història de la humanitat han consistit en la invenció de “mitjans per representar”. Així cal considerar l'escriptura, els sistemes de numeració, la impremta, els sistemes automàtics de càlcul, i les actuals tecnologies de la informació i la comunicació.

L'aparició d'una nova tècnica va acompanyada normalment d'unes transformacions encadenades no sols del mateix coneixement, el qual dona un salt endavant, sinó també de la forma com aquest coneixement arriba a la gent i com aquests coneixements transformen la societat

La difusió de les calculadores, ordinadors i tots els nous aparells TIC a creat amb pocs anys un escenari tan absolutament nou que el sistema educatiu li costa d'assimilar. La limitació de l'ús de calculadores als exàmens de les PAAU n'és una mostra. Imaginem, i no és molt imaginar, que demà apareix al mercat una calculadora de 10€ amb capacitat simbòlica equivalent als programes professionals tipus Mathematica, quan trigariem en replantejar-nos tot el temps que s'esmerça actualment en els exercicis repetitius de manipulació algebraica?

Impacte educatiu d'una determinada tecnologia o un determinat programa ve determinat tant per les seves pròpies virtuts com per la situació del sistema educatiu i la societat. Així per exemple, les incompatibilitats d'horari, la impossibilitat de dividir el grup o els problemes tècnics, dificulten en el nostre sistema la utilització de les aules d'informàtica per als grups- classe habituals. En canvi els projectors, les pissarres digitals, el treball autònom però col·laboratiu a través de la xarxa són sistemes que s'estan estenent amb èxit i fan efectiva la integració dels recursos TIC en el nostre sistema educatiu.

En el camp de les matemàtiques, el llenguatge LOGO, basat en la geometria de la tortuga, va ser el primer programa pensat com a eina per a l'ensenyament. Als anys 1980, els llibres de **Seymour Paper**, van ser molt ben rebuts com a continuació de l'obra de Piaget. Tot i que el llenguatge LOGO ha seguit modernitzant-se i evolucionant (dos dels recursos d'aquesta llicència estan fets en aquest llenguatge), el seu impacte real va ser quasi nul i avui és pràcticament desconegut per a les noves promocions de professorat.

Múltiples programes han estat desenvolupats pensant en l'ensenyament i aprenentatge de les matemàtiques. La ràpida evolució dels ordinadors els converteix en pocs anys en obsolets tal com els hi ha succeït en els continguts en el CD-ROM Sinera. Actualment la tendència és la de programes interactius i dinàmics que permeten enllaçar múltiples representacions d'un mateix concepte. La simplificació de la interacció, permet, per exemple, la manipulació directa d'objectes matemàtics.

Un magnífic exemple d'aquests nous programes és el GeoGebra, la seva doble finestra geomètrica i algebraica, el seu ràpid aprenentatge, la seva llicència de codi lliure, la activa comunitat que s'ha format internacionalment al seu voltant i les contínues innovacions del seu codi el fan un programa fantàstic.

Com tota eina, l'èxit dels programes educatius depèn, a més a més de la seva idoneïtat, de

l'ús que el professorat en faci. La intervenció del professor és essencial per fer possible la construcció de la correspondència entre el coneixement matemàtic i el coneixement construït a través de les interaccions amb l'entorn tecnològic. Els programes no es poden analitzar pensant sols en la interacció solitària màquina – alumne. El paper del professor és essencial en els diferents moments de l'aprenentatge per tal que l'activitat no quedi bloquejada. El grau de adequació d'un mateix recurs depèn de l'ús que el professor en faci. El recurs visual, el mateix que un recurs manipulatiu, històric o lúdic pot ajudar a crear un context ric per recolzar el diàleg del professor amb els alumnes.

En paraules de Colette Laborde, C.Kynigos, K. Hollebrands i R. Strässer:

“Durant els primers anys d'aplicació de la tecnologia a l'escola, l'aprenentatge es considerava principalment com sorgit només de les interaccions entre l'estudiant i la màquina, o més exactament de les tasques adequades que aquests fessin a l'ordinador. Actualment, el focus es considera que està en l'entorn, i en particular en el paper del professor i les interaccions socials que pot generar a l'aula així com en les normes socials que en el seu context es desenvolupen” [C. Laborde, C.Kynigos, K. Hollebrands i R. Strässer 2006]

2.8.- La catalogació dels recursos.

Les iniciatives en aquest terreny s'han anat concretant en els darrers anys en els anomenats "Learning objects" (LO) i els seus estàndards.

D.A. Wiley, defineix els Learning objects com "*Qualsevol recurs digital que pot ser usat o reutilitzat per a donar suport a l'aprenentatge*" [Wiley 2000]

La principal idea és adequar els continguts per tal que puguin ser usats i reutilitzats en diversos entorns d'aprenentatge.

Els "learning objects" inclouen simulacions, animacions, tutorials, llocs web, applets, programari, calculadores, bibliografies, arxius àudio i vídeo, fotografies, il·lustracions, diagrames, grafs, mapes i tot tipus de material educatiu susceptible de ser digitalitzat.

Un "Learning object" pot ser des d'una petita pàgina web a una sèrie combinada de recursos amb els continguts de tot un curs o tota una matèria.

El punt clau que ha de permetre el funcionament d'aquesta idea és estandaritzar els descriptors dels "Learning Object". L'IEEE (Institute of Electrical and Electronics Engineers) [IEEE 2002] i el IMS (Instructional Management System Project) han creat el conegut LOM (Learning object metadata) que és el model adoptat majoritàriament als organismes educatius.

El Departament d'Educació ha engegat ja fa temps un ambiciós projecte en aquesta línia anomenat **MeRLÍ** (Metadades de Recursos en Línia).

La finalitat del sistema MeRLÍ és permetre a l'alumnat, pares i professorat localitzar els recursos, de forma ràpida i eficaç. La catalogació dels recursos a MeRLÍ està dissenyada de manera que s'asseguri que tots els continguts són d'una qualitat educativa mínima. Utilitza la concreció europea del LOM, un thesaurus (vocabulari tancat) amb equivalències a altres llengües i un esquema detallat del currículum educatiu.

Inicialment MeRLÍ contindrà els recursos dels portals xtec.cat, edu365.cat i edu3.cat però l'adopció de la concreció europea del LOM permetrà interaccionar amb els bases de dades de recursos espanyols i europeus.

Un dels aspectes més interessants del MeRLÍ més enllà de les dades bàsiques de cada recurs (autor, durada, tipologia, nivell, ...) és la interacció amb els usuaris. Aquesta es concreta en la possibilitat que aquests escriguin comentaris i puntuïn els recursos. La cerca de recursos ofereix llavors com a criteri de cerca i ordenació aquestes valoracions.

Són aquestes valoracions i comentaris, a partir de la utilització real dels recursos per la comunitat les que enriquiran i marcaran la diferència amb el servei que ofereixen actualment els buscadors genèrics de la xarxa.

3.- Recursos visuals.

3.1.- Recerca, selecció, avaluació i creació de recursos.

Un dels objectius inicials de la llicència ha estat la recerca de recursos visuals de petit format és a dir recursos de curta durada i susceptibles de ser utilitzats pel professorat de forma flexible dins de la dinàmica de cada classe o bé agregats formant part d'una estructura d'aprenentatge basada en les eines TIC.

Si per un costat la recerca a la bibliografia, als programes de televisió de ciències i matemàtiques i sobretot a la xarxa, m'ha aportat moltes idees, per altre costat, aquestes idees són sovint difícilment aplicables directament. En alguns casos els recursos són de pagament i no estan disponibles de forma oberta, en altres casos, prèviament, cal descarregar i instal·lar un programa que sovint és enorme i inclou multitud d'opcions que representen un obstacle a la seva utilització. Altres cops l'idioma i en general la forma poc intuïtiva d'interactuar amb l'usuari també m'han fet desestimar el recurs.

També m'he trobat en la situació de no trobar enlloc cap plasmació tecnològica d'idees existents en la bibliografia o sorgides en la meua experiència diària. És el cas per exemple de la demostració de la fórmula del volum de l'esfera fent servir el principi de Cavalieri i l'escudella de Galileu, de l'activitat de trobar els punts notables del triangle plegant paper o bé de l'explicació del MCD i MCM a través de dibuixos.

Tot i el temps esmerçat en el frustrat aprenentatge del llenguatge java, afortunadament, les possibilitats tecnològiques d'altres programes al meu abast m'han permès plasmar moltes d'aquestes idees de manera que ara les puc oferir a la comunitat educativa.

L'eina més versàtil, flexible, intuïtiva i amb la que he treballat per a concretar projectes en la majoria de casos és el GeoGebra. La seva llicència Creative Commons Reconeixement - No comercial – Compartit m'ha permès recollir, reutilitzar, traduir i adaptar recursos a les meves necessitats. Estic convençut que el Geogebra és una molt bona eina per l'ensenyament i val la pena difondre-la i és per això que he participat en la constitució de la Associació Catalana de GeoGebra i participo activament en ella com a responsable de materials i recursos.

Per la creació d'applets directament utilitzables via web, també he fet servir el llenguatge de programació Netlogo (una versió actualitzada, de codi obert i amb tortugues múltiples del LOGO popularitzat per Seymour Papper els anys 80) que m'ha permès d'una manera relativament fàcil la programació d'altres recursos.

Pel que fa als recursos en vídeo, també m'he decidit a filmar i produir jo mateix algunes idees per tal de poder-les oferir lliurement a la comunitat. Altres vídeos curts els quals he utilitzat per la creació de recursos circulen de forma oberta per la xarxa. És cert que la autorització dels propietaris o autors d'aquest vídeos no hi consta de forma explícita, però la tasca de localitzar i aconseguir la seva autorització és pràcticament impossible i, de tota manera, la dinàmica de la xarxa està trencant les barreres restrictives a la difusió de continguts. Actualment televisions com TV3 ofereix en baixa resolució les produccions

pròpies de forma oberta.

Els recursos recollits, adaptats i realitzats estan principalment adaptats al treball a secundària fruit de la meua experiència docent a la ESO i al batxillerat, de tota manera els assenyalats com a corresponents a 1r i 2n d'ESO poden ser útils al cycle superior de primària. Les característiques visuals i amb el mínim de text de les activitats les fan útils especialment a les aules d'acollida i en les adaptacions curriculars.

He desestimat els primers intents de creació de fitxes exhaustives de disseny propi per a cada recurs. La catalogació s'ha realitzat per una banda d'una forma simple i clara a través de les icones de nivell, durada, idioma i tipologia de recurs i per un altre costat a través del catàleg MeRLÍ.

Així, dins el sistema MeRLÍ s'han incorporat individualment tots els recursos possibles. El benefici més directe d'estar inclòs dins d'aquest catàleg és la localització de cada recurs a través de la seva pròpia eina de cerca. Crec però, que més enllà de la localització, possible ja ara amb els buscadors generals de la xarxa, l'aportació més valuosa del sistema MeRLÍ serà la interacció amb els usuaris amb els mecanismes de valoració i escriptura de comentaris sobre cada recurs. Aquest mecanisme conjuntament amb la comunicació directa via correu electrònic em permetrà seguir treballant sobre aquests materials adaptant-los i enriquint-los a partir de la seva pràctica.

En cas recursos externs als 3 portals propis de MeRLÍ (xtec.cat, edu3.cat i edu365.com) la seva catalogació directa no és possible, sols en el cas que la pàgina intermedia on hi faig referència tingui la suficient entitat en quant a propostes didàctiques, experiències i materials, és possible la catalogació d'aquesta pàgina al sistema MeRLÍ.

Malgrat el bon disseny i l'èxit que crec que el sistema MeRLÍ assolirà, sobretot quan s'integri amb altres catàlegs estatals i internacionals, vull assenyalar la excessiva, al meu parer, limitació del seu thesaurus. Crec que un vocabulari ampli que inclogués els items de cada matèria amb el mateix nivell d'especialització a que arriba el desenvolupament del currículum, facilitaria la catalogació i la localització

3.2,- La web “Matemàtiques visuals”

La web titulada “Matemàtiques visuals” [<http://www.xtec.es/~ebraso>] que he iniciat amb aquesta llicència té la voluntat de recollir totes les idees i els recursos elaborats, ja sigui per mi mateix o externs, que puguin ser d'utilitat per a introduir el canal visual a l'educació matemàtica.

La web conté en un primer moment 66 recursos agrupats en 7 apartats temàtics. Existeix la voluntat de seguir ampliant la web amb nous recursos i ampliant o modificant els ja existents en funció de l'experiència pràctica pròpia i dels usuaris que vulguin aportar la seva valoració a través del mail o del MeRLÍ.

La referència a cada recurs està acompanyada d'una breu descripció i una imatge de la pàgina web corresponent. A través d'icones de les que es despleguen textos informatius al passar-hi el ratolí per sobre s'informa de la durada de cada recurs, el nivell educatiu a que correspon, l'idioma i la seva tipologia. L'apartat “Situació dels materials dins el currículum de la ESO i el Batxillerat” possibilita un sistema alternatiu de localització dels recursos.

El codi Html incorpora l'etiqueta `<meta name='Keywords' content=' ' >` on s'han inclòs totes les paraules que podrien ser objecte de cerca de cara a facilitar la indexació pels robots i la seva localització.

També s'ha incorporat a totes les pàgines els botons de traducció automàtica que ofereix la Generalitat de Catalunya

3.3.- Recursos inclosos a la web a data 1 d'octubre de 2008

Càlcul i proporcionalitat

Estimació

Fraccions a la recta numèrica.

Conjunt d'applets de RealMath

Denominador comú

Conjunt d'applets d'Interactivate

Col·locació visual de les fraccions equivalents

El problema de les aixetes, una interpretació gràfica.

El garbell d'Eratòstenes.

Dibuixos seguint els primers.

El "Mínim Dibuix Global" i el "Major Tros Comú". Una interpretació del MCD i el MCD amb imatges.

Percentatges

El llenguatge algèbric

Balança de formes

Balança d'expressions

Resolució d'equacions amb balança

Les igualtats notables

Les rajoles algèbriques

Les rajoles algèbriques²

Els determinants 2x2 i la superfície del paral·lelogram

Suma dels termes d'una progressió geomètrica decreixent

El llenguatge funcional

La representació de les funcions amb dues rectes paral·leles

El pendent i l'ordenada a l'origen de les rectes

La funció polinòmica de segon grau

Les transformacions de les paràboles

Gràfiques temps-espai d'un moviment

El domini i rang d'una funció radical

La funció logarítmica transforma un producte en suma

La derivada d'una funció a un punt com a límit de la TMV.

La funció derivada

Punts d'inflexió

El rectangle de perímetre donat amb superfície màxima.

La integral definida

La funció àrea

Geometria plana

Classificació dels triangles

Els punts notables del triangle plegant paper

Classificació dels quadrilàters

El recíproc del teorema de Thales

Demostracions visuals del Teorema de Pitàgores.
Un simple aparell per a una demostració del Teorema de Pitàgores
Recíproc del Teorema de Pitàgores
El Teorema de l'altura
L'àrea del cercle
Mesura d'altures amb un mirall i el Teorema de Thales
El "Principi de Cavalieri" al pla.

Geometria a l'espai.

El volum de l'esfera. L'escudella de Galileu.
El desenvolupament de poliedres
De 2D a 3D blocs cúbics
El principi de Cavalieri

Trigonometria

Les raons trigonomètriques dels angles aguts.
Angles amb raons trigonomètriques relacionades
El teorema del cosinus
El teorema del sinus
El sinus de la suma d'angles
El conjunt d'applets de la web japonesa IES
Les funcions trigonomètriques
El domini i el rang de les funcions trigonomètriques
inverses
El so de la funció sinus.

Estadística i atzar

Manipulació de qüestionaris.
Mitjana i mediana
El diagrama de caixa (box plot)
L'amplada de les classes als histogrames
Estimació de la mitjana
Estimació de la desviació típica
La màquina de Galton
La recta de regressió
La corba normal

4,- Conclusions.

Les recerques en didàctica de les matemàtiques, psicologia de l'educació i neurociències són valuoses però es difonen de manera insuficient. Sovint es queden en l'àmbit dels especialistes universitaris i no incideixen en el treball quotidià del professorat. Aquesta llicència m'ha permès conèixer-les i contribuirà sens dubte a millorar la meua tasca docent.

En especial, valoro com a important, el coneixement de les característiques i potència de la percepció visual, de la seva naturalesa personal, el fet de que de les habilitats espacials es poden aprendre i millorar i de la importància de relacionar representacions per a consolidar els coneixements.

La constatació a recerques consultades, del paper crucial del professor tant en els aspectes més obvis com l'establiment de la dinàmica de treball o la metodologia i continguts impartits com amb aspectes més amagats com la seva gestualitat o la valoració implícita de les visualitzacions, m'han aportat elements nous que ajudaran la reflexió de la meua pràctica docent.

El coneixement dels principis de creació multimèdia sobre la forma més adient de combinar imatges, animacions i text així com l'experiència pràctica que significa la realització dels recursos (pàgines web, gràfics estàtics i animats, vídeos, applets i aplicacions flash) és un actiu personal que la llicència m'ha aportat.

Els recursos que formen part de la web crec que seran unes eines valuoses pel professorat de matemàtiques. La seva estructura permet incorporar-los amb relativa facilitat a les explicacions i al treball de l'alumnat, ja sigui a través de la projecció sobre una pantalla ja sigui a través del treball directe i individual amb l'ordinador.

He tingut especial cura de facilitar la localització dels materials. L'estructura de la web els agrupa d'entrada en 7 àmbits temàtics, però també és possible la seva localització a través de la seva situació sobre el currículum.

He inclòs al codi Html paraules claus en català, espanyol i anglès per facilitar la localització dels recursos a través de les eines de cerca de la xarxa. De fet, una setmana després de penjar la web, aquesta ja surt en primer lloc en les cerques al Google.

Per últim he catalogat la majoria de recursos de la web en el sistema MeRLí del departament d'ensenyament, possibilitant així, no sols la localització del recurs, sinó també la seva valoració i l'escriptura de comentaris.

A partir d'aquest retorn i de l'experiència pròpia i del meu entorn seguiré ampliant i millorant aquesta web que la llicència m'ha permès iniciar.

5,- Bibliografia

- Alsina, Claudi & Nelsen, Roger B. (2006) "Math made visual" The Mathematical Association of America. Washington
- Arcavi, Abraham "The role of visual representations in the learning of mathematics" (2003) Educational studies in mathematics 52. Kluwer Academic Publishers
- Arnheim, Rudolf (1987) "Arte y percepción visual", 10^a ed. Editorial Universitaria de Buenos Aires. Buenos Aires
- Baddeley, A. (1992) Working memory. Science 255, 556-559
- Baddeley, A. (1999) Human memory. Boston Allyn & Bacon
- Bishop, A. J. (1983) Space and geometry. A R. Lesh i M. Landau (eds.). "Acquisition of Mathematics concepts and processes", p. 176-203. Academic Press. New York
- Bishop, A. J. (1989) "Review of Research on visualization in mathematics education" *Focus on learning problems in mathematics* vol 11 num 1
- Bishop, A. J. (1996) Implicacions didàctiques de les recerques sobre visualització Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques Vol 11 Num 2. Barcelona
- Brain, (2008) Microsoft Encarta Online Encyclopedia. [en línia] <http://encarta.msn.com>
- Castelnuovo, Emma (1963) "Geometría intuitiva", Ed. Labor. Barcelona.
- Cockcroft W.H. i altres (1985) Las matemáticas sí cuentan. Informe Cockcroft. Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid.
- Clements, M.A.; Del Campo, G. (1989) "Linking Verbal Knowledge, visual Images, and Episodes for Mathematical Learning. Focus on Learning Problems in Mathematics vol 11 num 1 pag 25
- Duval Raymond (1995) "Sémiosis et pensée humaine: Registres semiotiques et apprentissages intellectuels". Recherches en sciences de l'education. Paperback.
- Duval Raymond (1999) "Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning."
- Eisenberg, T. & Dreyfus T. (1991). "On the Reluctance to Visualize in Mathematics". Dins de "Visualization in Teaching and Learning Mathematics."
- Godino J.D., Recio A.M., Roa R., Ruiz F. i Pareja J. (2005) "Criterios de diseño i evaluación de situaciones didácticas basadas en el uso de medios informáticos para el estudio de las matemáticas" comunicació al IX Simposio de la SEIEM Cordova.
- Guzman, Miguel De. (1997) " El Rincon De La Pizarra. Ensayos de visualización en análisis matemático: elementos básicos del análisis" Ed. Piramide. Madrid.
- Hilbert, David (1932) "Geometry and the Imagination" edició de American Mathematical Society 1999 ISBN 0-8218-1998-4.1999
- Fletcher T.J. Caleg Gattegno, Emma Castelnuovo, JL Nicolet Lucien Motard , Luigi Campedelli, A. Biguenet , J P Peskett, Pedro Puig Adam.(1967). "El material para la enseñanza de las matemáticas" Ed. Aguilar. Madrid.
- Jonas JB, Schneider U, Naumann GOH (1992) "Count and density of human retinal photoreceptors". *Graefe's Arch Clin Exp Ophthalmol* 230:505-510.
- Mayer.R.E. (2001) Multimedia learning. Cambridge: Cambridge University Press..
- Nelsen R. B. (1993) "Proofs Without Words", MAA
- Miller, G.A. (1956). "The magical number seven, plus or minus two: Some limits on our capacity for processing information". *Psychological Review*, 63, 81-97
- Paivio, A. (1986) "Mental representations: A dual coding approach". Oxford University

- Press. New York.
- Peterson, L., & Peperson, M. (1959) "Short-term retention of individual verbal items".
Journal of experimental Psychology, 58, 193-198
- Plasencia Cruz, Inés del Carmen (2000) "Análisis del papel de las imágenes en la actividad matemática: un estudio de casos" Tesis doctoral Universidad de La Laguna [en línia] <ftp://tesis.bbtck.ull.es/ccppytec/cp130.pdf> consultat el 2-2-2008
- Presmeg, Norma C. (1999) "Possibilitats i paranys del pensament en imatges en la resolució de problemes" Biaix 14
- Presmeg, Norma C. (2006) "Research on visualization in learning and teaching mathematics" dins de *Handbook of research on psychology of mathematics education: past, present and future*. Sense Publishers.
- Laborde C., Kynigos C., Hollebrands K. I Strässer R. (2006) "Teaching and learning geometry with technology" dins de *Handbook of research on psychology of mathematics education: past, present and future*. Sense Publishers.
- Lakatos, Imre (1978) "Pruebas i refutaciones" Alianza Editorial. Madrid
- Learning Technology Standards Committee (2002), "Draft Standard for Learning Object Metadata". IEEE Standard 1484.12.1, Institute of Electrical and Electronics Engineers. New York [en línia] <http://ltsc.ieee.org/wg12/files/LOM_1484_12_1_v1_Final_Draft.pdf>. Consultat el 29-4-2008 .
- Roberts, Siobhan. (2007) "King of Infinite Space: Donald Coxeter, the Man Who Saved Geometry". Profile books. London
- Santaló Lluís (1985) "La enseñanza de la geometría en el ciclo secundario", dins de *La enseñanza de la matemática a debate*. Ministerio de educación y ciencia, Madrid 1985
- Spoendlin H, Schrott A (1989). "Analysis of the human auditory nerve". *Hear Res* 43 (1): 25-38.
- Tufte, Edward R. (2001) "The Visual Display of Quantitative Information" Graphics Press
- Villiers, Michael de (2007) "Some pitfalls of dynamic geometry software", *Teaching & Learning Mathematics* num. 4
- Wiley, David A. (2000) "Connecting Learning Objects to Instructional Design Theory: A Definition, A Metaphor, and A Taxonomy" [en línia] <http://reusability.org/read/chapters/wiley.doc>. Consultat el 29-4-2008 .
- Zenon W. Pylyshyn, (2003) "Seeing and Visualizing". MIT Press/BradfordBooks. Cambridge.
- Zimmermann, W. & Cunningham S. (1991). "What is Mathematical Visualization?" dins de *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*.