ELS NOMBRES NEGATIUS I EL ZERO

Xina, Grècia, Índia, Món àrab, Europa (250- 1567)

ÍNDEX

1. Introducció

Aquest mòdul o element està dissenyat per a viatjar per la història dels nombres negatius a través de narracions i activitats. Esperem que l'estudi actiu del significat i l'ús dels nombres negatius en els diferents temps i cultures durà l'alumnat a comprendre millor aquests nombres i a utilitzar-los amb més soltesa. El mòdul està constituït per dues parts: la història dels nombres negatius i algunes activitats relacionades amb la història

Creiem que aquest mòdul pot ser d'utilitat per a diferents cursos de l'ESO i en la descripció de cada activitat s'indica els cursos més adients. Tot i que la versió original en anglès conté més contextos històrics i més activitats en aquest element només s'han inclòs els fragments que poden ser assequibles a l'alumnat de l'ESO.[1]

La història dels nombres negatius està dividida en diferents parts que ha de llegir el professor/a i ha de decidir quina informació compartirà amb el seu alumnat. La secció de les activitats inclou, per a cada activitat, notes per al professorat i fulls per a l'alumnat. Les notes per al professorat conten els objectius, els materials que calen per a dur a terme l'activitat, suggeriments sobre com i quan utilitzar l'activitat i les solucions als problemes proposats. Les activitats es poden utilitzar aïlladament o amb conjunció amb altres dels mateix mòdul. A l'inici de l'apartat de les activitats s'adjunta una llista general de totes, on es diu per a quins nivells o etapes semblen més convenients i els prerequisits que calen per a cadascuna. Aquesta informació es repeteix més àmpliament a les notes per al professorat.

[1] Per veure totes les activitats consulteu el mòdul "Negative numbers" en *Historical Modules for teaching and Learning of Mathematics*. (Katz, Víctor J; Michalowicz, Kareen Dee, 2004)

2. Justificació de la tria

Molts estudiants tenen problemes per entendre i manipular els nombres negatius. La història dels nombres negatius donarà al professorat informació addicional per a compartir amb l'alumnat com s'han presentat els mateixos problemes en el passat i com els han resolt els matemàtics més famosos. Per aquesta raó expliquem la història dels nombres negatius a través del temps i mostrem com els matemàtics de diferents cultures els tractaven. Estem convençuts que quan s'inclou la història augmenta la comprensió de les matemàtiques.

3. Panoràmica de la història dels nombres negatius

Malgrat que avui en dia són acceptats per a tothom, han estat nombres controvertits i objectes de molts debats al llarg de la història. Matemàtics xinesos i grecs del s III i Indis al s VII va donar regles per a treballar amb nombres negatius. Malgrat tot, molts matemàtics europeus notables que van viure uns quants centenes d'anys després argumentaven que els nombres negatius representaven quantitats que *eren menys que res* i que per tant no podien existir. Acceptaven que els nombres negatius es podien utilitzar per representar deutes o per expressar distàncies recorregudes en sentit contrari en una direcció donada, però no acceptaven que poguessin ser solucions d'una equació o una part dels sistema representat pels nombres senceres. Alguns matemàtics només van acceptar els nombres negatius quan en van veure la seva utilitat i van acceptar que eren imprescindibles per a resoldre determinats tipus d' equacions. D'altres no els van acceptar fins que al s XIX es van definir com a objectes en un sistema purament simbòlic algebraic. La història del nombre negatius explica com matemàtics de diferents cultures han pensat sobre la justificació i l'ús dels nombres negatius al llarg dels temps.

Breu cronologia dels nombres negatius:[2]

Lloc	**dates**	**Autors**
Xina	c. 250	Liu Hui
Alexandria	c. 250	Diophant
India	c. 625	Brahmagupta
	1114-1185	Bhaskara II
El món Arab	c. 780 – 850	Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi
	c. 1125-1174	Al-Samaw'al
El simbolisme a Europa	1170-1250	Fibonacci (Leonardo de Pisa)
	1445-1500	Nicolas Chuquet
	nascut 1460	Johann Widman
	1487-1567	Michael Stifel

[2]Aquesta cronologia que només conté els contextos que s'han inclòs en aquest element perquè fan referència a les activitats proposades. S'han obviat contextos posteriors perquè les activitats per a l'aula relacionades amb ells s'ha considerat que eren de nivell de Batxillerat. .

3.1. Nombres negatius a la Xina
Liu Hui aprox. 250

La Nostra Història dels Nombres negatius comença amb el matemàtic xinès antic més conegut Liu Hui, que va ser un oficial al regne de Wei després de l'esfondrament de la dinastia Han. Durant l'any 263, Liu Hui va revisar el Jiuzhang Suanshu (*Nou Capítols sobre els procediments matemàtics*[3]*)*, que es remuntava al 200 aC i contenia molta de les matemàtiques conegudes a la Xina en aquell temps, l'actualitzava i afegia comentaris. Liu Hui es compara a vegades amb Euclides, el matemàtic grec que va compilar el llibre que recollia el saber de la geometria grega de l'època, *Els Elements*, aproximadament el 300 aC. Eren matemàtics amb talentosos que van organitzar les idees centrals de les matemàtiques conegudes en el seu temps en uns llibres que es van utilitzar durant molts segles després.

La llista següent dels temes dels capítols de l'edició de Liu Hui dels Nou Capítols dóna una idea de la classe de matemàtiques que es consideraven importants en la Xina del s III

Capítol 1: Camp rectangular
Capítol 2: Cereals (proporcions)
Capítol 3: Distribució per proporcions
Capítol 4: Quan mesura l'amplada? (àrea i volum)
Capítol 5: Discutir les obres (càlculs de construccions)
Capítol 6: Taxes justes
Capítol 7: Excedent i dèficit (equacions lineals)
Capítol 8: Files rectangulars (sistemes d'equacions)
Capítol 9: Base i altura, "*Gougu*" (Teorema pitagòric)

Els Nou Capítols sobre els procediments matemàtics és el text de matemàtiques xinès més antic en el es donen les regles per afegir i restar nombres positius i negatius (Mikami, 9). Abans de comentar aquestes regles cal parlar de que manifestem aquestes regles, parlarem de comptes amb canyes o barres i comptes amb taulers.

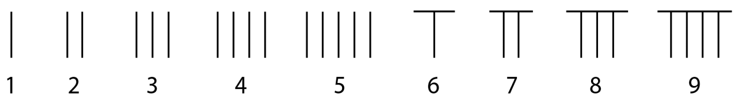
S'han trobat ossos que es remunten a la dinastia Shang (aprox. s XVI-XI aC) amb inscripcions que contenien símbols de números. Aquests "ossos oracles" contenien inscripcions de símbols numerals perquè enregistraven nombres de dies, presos, o enemics matats durant una guerra com es mostra en aquesta traducció: "El vuitè dia,

[3] També traduït per alguns autors com *Nou capítols sobre l'art matemàtic*

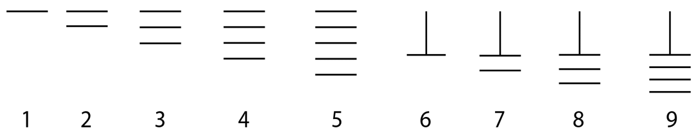
és a dir Xinhai, es van matar dos mil sis-cents cinquanta sis homes mentre es creuaven les llances" (Li i Du, 4). Els numerals Shang que apareixien als “ossos oracle” es van representar més tard amb barres o canyes[4] en un tauler de comptes perquè, com veurem, els numerals es feien fàcilment amb una combinació de marques verticals i horitzontals.

El tauler de comptes s'organitzava en quadrats. Cada fila de quadrats podia representar un nombre. Era uns sistema posicional de base 10, l'última posició a la dreta d'una fila representava aquest dígit d'unitats, la posició següent a l’esquerra el dígit de les desenes, el següent les centenes, següent milers, deu milers, etc. Un quadrat buit representava el zero. Els numerals Shang venien en dues formes: una forma vertical i una forma horitzontal. La forma vertical s'utilitzava per a les unitats, centenes, deu milers, etc., mentre que la forma horitzontal s'utilitzava per a les desenes, milers, etc. Per exemple, || = | | en representa 22,101 i | | = | en representa 10,121. (Veure l'activitat de **Numerals Shang xinesos** i l'activitat del **Tauló de comptes xinesos**.)

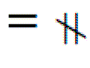
Forma vertical dels Numerals Shang:



Forma horitzontal dels Numerals Shang:



Encara que la primera evidència escrita de que els nombres negatius s'utilitzaven a la Xina es remunta a la versió del segle III, de Liu Hui, *dels Nou Capítols sobre els procediments matemàtics*, els nombres negatius s'utilitzaven de manera habitual amb anterioritat en els taulers de comptes (Temple, 141). Les barres de comptar vermelles s'utilitzaven per a nombres positius i les negres pels nombres negatius. Si les barres pintades diferents no estaven disponibles, posant una canya diagonal a l'altre costat de l'últim dígit del numeral podria representar un nombre negatiu. Per exemple, - 22 se n'escriuria com



[4] Alguns autors parlen de barres d’altres de canyes perquè les barretes eren petites canyes de bambú.

Sembla que el xinesos no tenien cap objecció per utilitzar el concepte de nombre negatiu en els càlculs. Pensaven en el nombre negatiu com a nombre per ser restat d'una altra quantitat o com a quantitat encara per ser pagada, en termes d'impostos. Al Capítol 8 (Files rectangulars) dels Nou Capítols, trobem:
"El mètode dels positius i negatius: per la resta, del mateix signe traieu, de diferent signe ajunteu, del no res treure positiu fa negatiu, del no res treure negatiu fa positiu. Per la suma, signes diferents traieu, del mateix signe afegiu, positiu i res és positiu, negatiu i res és negatiu (Li and Du, 49). En alguns problemes, la quantitat de diners rebuts d'una venda es representen amb positius perquè el venedor està posant diners a la seva butxaca mentre la quantitat de diners gastats es representen com a negatius perquè el comprador està traient diners fora de la seva butxaca.

Els mètodes per multiplicar i dividir nombres positius i negatius no es troben en forma escrita fins al 1303 en *Introducció al Estudis Matemàtics* (*Suanxue Qimeng*) de Zhu Shijie, a l'època de la dinastia Yuan (Li and Du, 49-50). (Vegeu l'activitat **Problemes xinesos**).

3.2. Nombres negatius a Alexandria

Diofant aprox. 250

El matemàtic grec Diofant, que va viure a Alexandria, Egipte, és famós pel seu llibre *Aritmètica*, on demostra com resoldre una gran varietat d'equacions amb dues i de vegades tres incògnites. Malgrat que normalment utilitzem el terme "Equacions diofàntiques" per a referir-nos a equacions que tenen per solució nombres enters, Diofant admetia solucions amb nombres racionals. Per exemple, Diofant donava com a solucions de l'equació $x^2 + y^2 = 16$ $x = 16/5$ $y = 12/5$ (Bashmakova and Smirnova, 40).

Es coneix poc sobre la vida de Diofant, però per la seva obra està clar que era un erudit. Una epigrama en *l'Antologia grega* (C. 500) ens diu més de la seva vida que qualsevol altra font:

> Aquesta tomba pertany a Diofant i explica científicament la mesura de la seva vida. Déu li va concedir ser un noi durant la sisena part de la seva vida, havia transcorregut una dotzena part més quan Ell li va cobrir les galtes amb un lleuger un lleuger borrissol; El va il·luminar amb la llum del matrimoni després d'una setena part següent, i cinc anys després Li va concedir un fill. Però, ai! infeliç nen nascut tardanament; després de viure la meitat dels anys que viuria el seu pare, el destí se'l va endur. Després de consolar-se de la pèrdua amb la ciència dels nombres durant quatre anys, finalment va morir.

L'epigrama descriu l'equació $\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x$ on x és el nombre d'anys que va viure Diofant. La solució és que Diofant va viure 84 anys.

Diofant va ser un dels primers matemàtics en utilitzar símbols en els seus càlculs. Utilitzava símbols per a la quantitat desconeguda i per a potències de la quantitat desconeguda fins al sisè ordre, així com un signe per al menys. Aquest sistema de símbols barrejat amb paraules abreujades es coneix com "àlgebra sincopada" (Veieu l'activitat **Àlgebra sincopada de Diofant**)

A l'*Aritmètica*, Diofant descrivia mètodes per resoldre equacions polinòmiques amb coeficients tant positius com negatius:

> Estaria bé que quan un comencés aquest estudi hagués adquirit una certa

> pràctica en l'addició, sostracció i multiplicació de les diverses espècies [tipus de termes]. Hauria de saber com afegir termes positius i negatius amb coeficients diferents a altres termes, positius o negatius o en part positius i en part negatius, i com restar des d'una combinació de termes positius i negatius uns altres termes algun positiu o de la mateixa manera en part positiu i en part negatiu.
>
> Si un problema porta a una equació en la qual certs termes són iguals a termes de la mateixa espècie però amb coeficients diferents, serà necessari restar en els dos costats, fins que un terme es trobi igual a un altre terme. Si per un casual en qualsevol costat o en els dos costats hi ha termes negatius, serà necessari afegir quantitats als termes negatius dels dos costats fins que els termes en els dos costats siguin positius, i llavors una altra vegada restar fins que només quedi un terme en cada costat. (Katz, 175)

Encara que Diofant utilitzava nombres negatius en els seus càlculs no reconeixia un nombre negatiu com a solució vàlida a una equació. En la seva *Aritmètica*, fins i tot manifesta que la solució, x = - 4, a l'equació 4x + 20 = 4 és "absurda." Les seves regles per multiplicar amb nombres positius i negatius es manifesten com el "producte de proper [positiu] i esperat [negativa] igual a l’esperat [negatiu], i el producte de dos esperats [negatius] igual a pròxim [positiu]" (Swetz, 14).

3.3. Els nombres negatius a l'Índia

A l'Índia antiga, l'interès per la matemàtica estava associat principalment amb l'astronomia i astrologia i secundàriament per ajudar en els tractes comercials. En el comerç, els nombres negatius representaven deutes i els nombres positius representaven béns. Al manuscrit Bakhshali, un papir d'escorça bedoll trobada al poble de Bakhshali el 1881 i que fins avui es creu datat de l'any 500 aC, un autor desconegut escrivia matemàtiques utilitzant un sistema plenament desenvolupat posicional en base 10, molt similar al sistema de nombres indoàrabics que utilitzem avui. L'autor del manuscrit Bakhshali utilitzava un punt per a zero i una creu (+) per representar un signe menys (Datta and Singh, 14).

Brahmagupta aprox. 625

Era astrònom i matemàtic a Bhillamala, l'Índia, confessava en un dels seus llibres que s'escrivia alguns dels seus problemes "simplement per al plaer" (Struik, 66). L'obra més coneguda de Brahmagupta és el Brahma Sphuta Siddhanta, escrita quan tenia 30 anys i en la que donava regles per treballar amb fraccions que són molt similars a les nostres regles d'avui (Katz, 218). Sobre àlgebra, deia "que, ja que les qüestions difícilment es poden saber [resoldre] sense àlgebra, per això, parlaré d'àlgebra amb exemples. Coneixent el polvoritzador, el zero, quantitats negatives i positives, incògnites, l'eliminació de termes intermedis, les equacions amb una incògnita, les potències i l'arrel quadrada, un es pot convertir en el millor aprenent entre tots els aprenents (Datta and Singh, 130). El "polvoritzador" era un mètode per a resoldre equacions.

Brahmagupta va ser un dels primers matemàtics indis que va donar regles per a treballar amb nombres negatius. Es referia a quantitats negatives i afirmatives (positiu) i donava les regles per treballar amb aquestes quantitats.

> La suma de dos nombres positius és positiva,
> la de nombres de negatives és negativa;
> D'un positiu i un nombre negatiu és la seva diferència.
> En la sostracció, el menys ha de prendre del més gran.
> [El resultat final és] positiu, si s'ha tret del positiu,
> I negatiu, si s'ha fet del negatiu.
> Si, tanmateix, el més gran es resta des del menys,

Aquella diferència s'inverteix [en signe],

El negatiu es torna positiu i el positiu es converteix en negatiu.

Quan el positiu és ser restat del negatiu o negatiu del positiu,

Llavors s'han d'afegir junts. (Datta and Singh, 20)

Les regles de Brahmagupta per la multiplicació i divisió de nombres amb signe eren de la manera següent:

El producte d'un positiu i un negatiu [nombre] és negatiu;

De dos negatius és afirmatiu;

El positiu multiplicat per positiu és afirmatiu.

El positiu dividit per positiu o negativa per negativa és afirmatiu.

Positiu dividit per negatiu, és negatiu. (Boyer, 242)

També va establir regles per a treballar amb el zero I deia que zero dividit per zero era zero:

Un positiu o negatiu, dividit per zero, és una fracció amb això al denominador. ... aquesta fracció, de la qual el denominador és zero, es qualifica com a quantitat infinita. En aquesta quantitat que consta d'això que té zero per al seu divisor, no té cap alteració, quan se li afegeix o treu una quantitat; com cap canvi no té lloc en Déu infinit i immutable, en el període de la destrucció o creació dels móns, encara que ordres nombroses alteren o canvien els altres éssers. (Katz, 226)

Avui, considerem que zero dividit per zero és indeterminat i qualsevol altre nombre dividit per zero com a infinit. Brahmagupta també donava una regla per funcionar amb els quadrats dels nombres amb signe, declarant, "L’arrel quadrada d'un positiu o d’un negatiu és positiva" (Datta and Singh, 23-24)

Mahavira, un matemàtic indi de segle IX, que va estudiar i comentar l’obra de Brahmagupta, defensava la utilitat i la importància de matemàtiques en la introducció al seu llibre, *Ganita Sara Samgraha*:

En totes aquelles transaccions que es refereixen al canvi ... o ... afers religiosos, el càlcul és útil. En la ciència d'estimar, en la ciència de la riquesa, en la música i en el, en l'art de cuina, i similarment en medicina i en coses com el coneixement d'arquitectura; en la prosa, en poètica i poesia, en la lògica i gramàtica i en tantes altres coses la ciència del càlcul es té en molta estima. En relació amb moviments del Sol i dels altres astres celestials, en connexió amb els eclipsis i la conjunció dels planetes...també s’utilitza. El nombre, el diàmetre i el perímetre d'illes, oceans i muntanyes, les dimensions dels d'habitatges i de les sales on viuen les persones que pertanyen als habitants del món... tots ells s'entenen per mitjà del càlcul. (Katz, 229)

Bhaskara II 1114 – 1185

Un matemàtic indi posterior, Bhaskara, també anomenava Bhaskara II perquè hi hagué un altre matemàtic també anomenat així al s VII, era un astrònom a Sahyadri a l'Índia sud-oest (Plofker, 2001). El Bhaskara d'aquesta part de la Història de Nombres Negatius va viure al s. XII. Una pràctica comuna abans dels textos en llengua escrita era posar el coneixement en forma de vers per facilitar la memorització en la transmissió oral. La forma en vers va continuar a moltes cultures fins i tot després que les llengua escrita fos habitual. A Bhaskara li agradava combinar les seves matemàtiques amb el vers, com es veu en el problema següent:

L'arrel quadrada de la meitat del nombre d'abelles d'un eixam
Ha volat fora a un arbust de gessamí;
Vuit novens de l'eixam ha romàs darrere;
Una abella femella fa volar sobre una mascle que està d'una flor de lotus;
A la nit, atret per l'olor dolça de la flor, hi va volar-hi
Ara hi! està atrapat
Digui'm a mi, senyora encantadora, el nombre d'abelles. (Anglin, 115)

En la formulació algebraica actual Bhaskara està demanant la solució a l'equació

$$\sqrt{\frac{x}{2}}+\frac{8}{9}x+2=x$$

on x els nombres d'abelles. Podeu comprovar que x = 72 és una solució d'aquesta equació.

Quan Bhaskara escrivia les seves matemàtiques, l'addició era indicada per la juxtaposició, sostracció per un punt sobre el nombre per ser restat (subtrahend), divisió posant el divisor sota el dividend, i multiplicació i agafant d'arrels per abreviatura de paraules apropiades (Boyer, 244). Bhaskara donava regles per treballar amb nombres positius i negatius. Establia:

La suma de dos negatius o dos positius te per resultat la seva suma.
La suma d'un positiu i un negatiu és la seva diferència.
Un positiu [nombre] mentre es resta es torna negatiu,
I un negatiu es torna positiva; després es fa l'addició com s'ha explicat abans.

> El producte de dos positiu o dos negativa [nombres] és positiu;
> El producte de positiu i negativa és negatiu.
> En termes de divisió també, tal són les regles [el mateix pel que fa a multiplicació].
> El quadrat d'un positiu i d'un nombre negatiu és positiu;
> L'arrel quadrada d'un nombre positiu és positiva així com negativa.
> No hi ha cap arrel quadrada d'un nombre negatiu, perquè és no quadrat. (Datta and Singh, 20-24)

Bhaskara també trobava solucions a equacions quadràtiques, incloent-hi solucions negatives. Encara que treballava còmodament amb solucions que eren de nombres negatius, els anomenava inadequats. suficients. Quan arriba a les solucions, $x = 50$ i $x = -5$ per a l'equació quadràtica $x^2 - 45x - 250 = 0$, conclou: "El segon valor és en aquest cas no es pren, perquè és inadequat; la gent no aprova solucions negatives".(Kline, 185).

Amb aquesta afirmació es veu que les solucions negatives eren inacceptables durant el temps de Bhaskara, tot i que admetia la seva existència. Això és perquè el Bhaskara i els seus contemporanis gairebé sempre tractaven amb problemes que descrivien objectes físics, com en el problema sobre abelles, de manera que una solució negativa sovint no tenia sentit. (Vegeu els **Problemes de l'Activitat de l'Índia**.)

3.4. Els Nombres negatius en el Món àrab

Durant el s VII, els musulmans àrabs van conquerir Mesopotàmia (avui en dia Iraq) i la majoria dels habitants es van convertir a la religió de l'Islam. Durant 200 anys l'Imperi Àrab es va estendre des d'Espanya i Marroc a l'oest a l'Afganistan a l'est. Del 750 al 1258, Bagdad era la capital d'un Imperi islàmic vast i era una gran ciutat del comerç i del saber. Allà es va establir a finals del s VIII una biblioteca important on es van recollir molts manuscrits, incloent-hi molts texts grecs clàssics. A l'inici del s IX, la Casa de Saviesa fundada a Bagdad, va atraure dur molts erudits notables de l'època i es van traduir textos grecs i indis a la llengua àrab i van continuar fent promovent la investigació en matemàtiques i ciència. Així, van anar creixent les matemàtiques àrabs amb arrels de les matemàtiques d'altres cultures.

Mohamed Ben-Musa al-Khwârizmî aprox. 780 – 850

Al-Khwârizmî, un dels matemàtics més famosos des de la Casa de la Saviesa, escrivia texts sobre aritmètica i àlgebra. La seva paraula al-jabr és la font de la nostra paraula àlgebra i el seu nom Al-Khwârizmî és la font de la nostra paraula algorisme. Poc se'n sap sobre la seva vida, però les traduccions dels seus llibres ens expliquen les seves matemàtiques. Utilitzava els numerals indoàrabs (també anomenats numerals hindús i àrabs), va influir tant en els matemàtics posteriors que, durant segles a Europa, la paraula *algorisme* significava calcular amb numerals indoàrabs (Burton, 174). Donava les mateixes regles per operar amb els nombres positius i negatius com ja havien fet abans altres matemàtics, especialment els de l'Índia. Al-Khwârizmî justificava les regles de multiplicació utilitzant un exemple numèric similar al següent. Primer escrivia el producte 8 × 17 = 136. Després rescrivia el producte com 8 × 17 = (10 - 2) × (20 - 3), i aplicava el seu algorisme de la multiplicació de binomis per obtenir 200 - 40 - 30 + 6 = 136. Es fixava en el fet que la igualtat era certa si es complia la condició que (-2) (20) = - 40, i no pas + 40; (10)(-3) = -30, i no +30; i (-2) (-3) = +6, i no -6. (Vegeu l'activitat **Nombres negatius en al-Khwârizmî**)

Al-Khwârizmî havia estudiat matemàtiques gregues i índies abans d'escriure el seu propi text, la seva obra *Hisâb al-jabr wal-muqqabala* (813) va ser traduïda al llatí per Roberto de Chester amb el títol *Liber algebrae et almucabala* (Segòvia, 1145), d'on prové el nom actual d'àlgebra. *Al-jabr* significa restauració *al-muqabala* significa reducció. En l'equació $6x^2 - 4x + 1 = 5x^2 + 3$, *al-jabr* s'aplicaria per afegir 4x als dos costats per formar l'equació $6x^2 + 1 = 5x^2 + 4x + 3$. Ara tots els coeficients són positius després de la restauració de tots els termes negatius. *Al-muqabala* s'utilitzaria llavors per restar als dos costats $5x^2$ per obtenir l'equació $x^2 = 4x + 2$. Aquesta reducció dona lloc a una equació d'un formulari per al que es té l'algorisme de càlcul corresponent per a resoldre l'equació. Les equacions se simplificaven a formularis que evitaven l'ús de nombres negatius tant com fos possible. Les seves matemàtiques estaven fortament influïdes per la geometria grega, en aquest sentit tots els procediments es justificaven també amb mètodes geomètrics. Per això, les solucions negatives no podien existir perquè no hi havia cap justificació geomètrica lògica per a "llargades negatives."

Al-Khwârizmî va fer grans esforços per evitar els nombres negatius i així arriba a establir sis tipus d'equacions amb coeficients positius que donarien solucions positives. (Katz, 245)

1. Quadrats = arrels ($ax^2 = bx$)
2. Quadrats = nombres ($ax^2 = c$)
3. Arrels = nombres ($bx = c$)
4. Quadrats i arrels = nombres ($ax^2 + bx = c$)
5. Quadrats i nombres = arrels ($ax^2 + c = bx$)
6. Arrels i nombres = quadrats ($bx + c = ax^2$)

Per a cada tipus, donava un algorisme. Per exemple, l'algorisme per al tipus 4 s'il·lustra a l'exemple següent:

> Quin ha de ser el valor tal que el seu quadrat, augmentat de deu de les seves pròpies arrels, equival a trenta-nou? La solució és això: Redueixi a la meitat el nombre d'arrels, que en l'exemple present dóna cinc. Després multipliqui'l per ell mateix; el producte és vint-i-cinc. Afegeixi això a trenta-nou; la suma són seixanta-quatre. Ara prengui l'arrel d'això que són vuit, i resti'n la meitat del nombre de les arrels, que són cinc; la resta són tres. Aquesta és l'arrel del quadrat que cercava.

Cal notar que al-Khwârizmî troba només una arrel a aquesta equació, $x^2 + 10x = 39$. Nosaltres trobaríem una segona arrel, és a dir -13. Similarment, en els seus algorismes per als altres tipus, només troba l'arrel positiva. Així, la fórmula estàndard d'equació quadràtica, és a dir $ax^2 + bx + c = 0$, no apareix en la seva llista, perquè tal equació amb coeficients positius no pot tenir arrels positives.

En cadascun dels seus tipus 4, 5, i 6, al-Khwârizmî començava dividint per dos el coeficient del terme lineal, és a dir, el "nombre d'arrels." No feia això en els tipus 1, 2, i 3. Ho resumeix a la seva obra de la manera següent:

> Aquests són els sis tipus, que esmentava al començament del meu llibre. He acabat l'explicació i he manifestat que hi ha tres tipus, les arrels dels quals no es divideixen en la meitat. He mostrat les regles a favor d'aquests i la seva necessitat. Pel que fa a les tres classes restants, les arrels de les quals s'han de dividir en dos, els he explicat amb raons correctes, i he inventat per a cada un una figura (prova geomètrica) per la qual la raó es tradueix en divisió. (Rashed, 13)

Al-Khwârizmî donava regles bàsiques o "algorismes" pels quals qualsevol podria resoldre aquests sis tipus d'equacions. Tota la seva matemàtica s'escrivia en paraules. No utilitzava símbols per a quantitats desconegudes, sinó que en canvi utilitzava la paraula "cosa" o "arrel" per representar desconeguts. Les úniques solucions acceptables eren nombres positius.

És important en la Història de Nombres negatius veure com Al-Khwârizmî evitava les arrels complexes i els nombres negatius. En particular, en el seu cinquè tipus, que podem representar simbòlicament com $x^2 + q = px$, donava la solució verbal que podríem representar com:

$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ si $\left(\frac{p}{2}\right)^2 > q$ però si $\left(\frac{p}{2}\right)^2 = q$, "aleshores l'arrel del quadrat és igual a la meitat de l'arrel exactament, sense excedent ni dèficit". I si $\left(\frac{p}{2}\right)^2 < q$ "aleshores el problema és impossible". (Rashed, 13).

Al-Samaw'al aprox. 1125-1174

Al-Samaw'al ben Yahya ben Yehuda al-Maghribi creixia en una família jueva a Bagdad, però es convertia a l'Islam quan tenia aproximadament 40 anys. Era metge de professió i escrivia llibres tant de matemàtiques com de medicina, així com una autobiografia en la que explicaven les seves raons per convertir-se en Islam. La Casa de Saviesa ja no existia a Bagdad en el seu temps, però estudiava en unes altres indrets de l'Orient Mitjà per augmentar el seu coneixement de matemàtiques i medicina. (Katz, 253).

Al-Samaw'al donava les regles per treballar amb nombres negatius al seu llibre Al-Bahir fi'l-hisab (*El Llibre Que Brilla de Càlcul*), que va escriure quan tenia 19 anys. Amb ell ampliava el treball realitzat per altres matemàtics àrabs, classificant l’àlgebra com a "part de l'art d'anàlisi, mentre que en la geometria podem determinar la quantitat desconeguda sense anàlisi." Promovia “l’aritmetització de l'àlgebra" definint àlgebra com "operar quantitats desconegudes que utilitzen instruments aritmètics mentre que l'aritmètic opera quantitats conegudes." Les seves regles per operar amb nombres amb signes eren de la manera següent:

> El producte d'un nombre negatiu per un nombre positiu és negatiu, i per un nombre negatiu és positiu. Si restem un nombre negatiu d'un nombre negatiu més alt, la resta és la seva diferència negativa. La diferència roman positiva si restem un nombre negatiu d'un nombre negatiu més baix. Si restem un nombre negatiu d'un nombre positiu, la resta és la seva suma positiva. Si restem un nombre positiu de [zero], la resta és igual negativa, i si restem un nombre negatiu de [zero], la resta és el mateix nombre positiu. (Rashed, 37)

(Vegeu l’activitat **Nombres negatius en Al-Samaw'al**)

3.5. El simbolisme a Europa

Fibonacci (Leonardo de Pisa) 1170-1250

La Història de nombres negatius continua amb una mirada a la vida i l'obra de Leonardo de Pisa, Itàlia, que és més conegut com Fibonacci (fill de Bonaccio). Fibonacci es considera un dels matemàtics més grans de l'edat mitjana per als seus avenços en el simbolisme algebraic. És important fixar-se que, fins llavors, la major part de les matemàtiques estaven escrites en paraules i no pas amb símbols. Mentre que l'alumnat podria creure que això és una manera més fàcil de fer matemàtiques, és molt més confusa i feixuga. Un dels problemes era que la gent utilitzava paraules diferents per representar les mateixes operacions matemàtiques o idees.

El pare de Fibonacci, era un comerciant, que va viatjar per tota l'Àfrica del Nord i l'Orient Mitjà i duia Leonardo amb ell en aquests viatges. Així vas ser com Fibonacci va conèixer durant anys moltes cultures diferents i en elles va aprendre sobre els nombres indoàrabs. El 1202 Fibonacci va escriure a *Liber Abbaci* (Llibre de Càlcul) en el que descrivia els nou numerals indoàrabs i el signe 0 per a zero. La paraula Àrab per a 0 és *sifr*, que es traduïa a llatí com *zephirum*. És la font de la nostra paraula zero. Fibonacci esmentava nombres negatius ocasionalment; en un dels seus problemes, interpretava un nombre negatiu com a *debitum* (pèrdua).

A l'Europa dels s XI i XII, els càlculs aritmètics es feien en una tauló de compte o àbac i els resultats llavors s'enregistraven utilitzant xifres romanes. A Fibonacci se li atribueix transmetre el sistema de numeració indoàrab a Europa, però van haver de passar molts anys fins que el nous nombres fossin acceptats àmpliament. Va ser durant el s XVI que es va anar imposant aquest numerals i els seus algorismes de càlcul corresponents per damunt de les xifres romanes i l'àbac, com ho il·lustra un famós retaule de Gregor Reisch del 1512 titulat *Margarita Philosophica*. En el retaule, Boeci (a l'esquerra) està computant amb els nombres indoàrabs nous contra Pitàgores amb el seu àbac (Hogben, 27; Burton, 224).

http://www.apprendre-en-ligne.net/blog/images/MargaritaPhilosophica.jpg
(24-08-09)

Els grans canvis que van tenir lloc al començament de l'economia europea del s XIV, incloent-hi el gran augment en comerç, van crear la necessitat de més matemàtiques. Els comerciants europeus necessitaven aritmètica i algunes tècniques algebraiques per tractar amb cartes de crèdit, lletres de canvi, pagarés, i interès.

Per satisfer aquesta necessitat, una classe nova de matemàtics professionals, els *maestri d'abbaco* (mestres de càlcul), sorgia a l'inici del s XIV a Itàlia i més tard a resta d'Europa. Aquests homes escrivien texts i ensenyaven matemàtiques pràctiques als comerciants i als seus fills utilitzant els numerals indoàrabs. Hi havia resistència al sistema nou al principi i alguns encara es mantenien amb les xifres romanes, però finalment els numerals indoàrabics més fàcils d'utilitzar es van anar imposant. (Katz, 343-344) (Vegeu l'activitat **Els abacistes italians)**

Nicolas Chuquet 1445-1500

El 1450, Johann Gutenberg d'Alemanya inventava la impremta amb lletres tipus mòbils. Aquest desenvolupament va fer augmentar de manera clara la difusió de la d'informació escrita, incloent-hi les matemàtiques. Desafortunadament, el primer llibre d'àlgebra francès, *Triparty en la science des nombres,* escrit en 1484, es va perdre i no s'imprimia fins al 1880. L'autor, Nicolas Chuquet, físic, va néixer a París el 1445. Encara que de manera molt incipient, Chuquet utilitzava nombres negatius com coeficients, exponents, i solucions. Les seves sobre les operacions aritmètiques n'incloïen el zero i els nombres negatius, encara que mai acceptava el zero com a solució d'una equació i a vegades rebutjava les solucions negatives.

Com Fibonacci, Chuquet explicava l'ús dels nombres indoàrabs. Per representar les quatre operacions bàsiques, Chuquet no utilitzava símbols però sí algunes paraules claus *plus* (més), *moins* (menys), *multiplier par*r (multiplicar per), i *partyr par* (dividir per). També utilitzava els termes següents: *premier* per a la incògnita desconegut, *champs* per la segona potència de la incògnita, i *cubiez* per la tercera. Presentava doncs dues Innovacions en el camí de la notació actual, l'ús dels exponents i un coeficient per a representar la incògnita. Aquests exponents n'incloïen el zero i els nombres negatius. Per exemple, Chuquet escrivia "$.8^3.$" per al que avui escrivim com $8x^3$ Per representar coeficients negatius i exponents, utilitzava lletra *m* per a *moins* així "$m.9.^{2.m}$" per a $-9x^{-2}$ on l'exponent "2.m" representa *seconds moins* (menys dos).

A la darrera part del *Triparty*, Chuquet parlava de solucions d'equacions. Per la Història dels nombres negatius la principal aportació de Chuquet va ser l'ús de nombres negatius aïllats en la resolució d'equacions. Aquesta era la primera vegada que en matemàtiques europees publicades es podia veure una equació com "$.4.^1$egaulx a $m.2.^0$" en la notació actual 4x = -2. Observi's lús de la paraula *egaulx* per l'igual. El nostre signe igual (=) no es va utilitzar fins al s. XVI.

Encara que l'obra de Chuquet no es va publicar fins al 1880, va tenir una certa influència en els matemàtics del s XVI, perquè el seu deixeble, Etienne de la Roche, va incloure grans parts del *Triparty* en el seu propi llibre d'àlgebra que va tenir molta difusió i que es va publicar el 1520 (D.E. Smith, v. 2, 519).

Johann Widman nascut aprox. 1460

Nascut a Alemanya Johann Widman publicava la seva *Mercantil Arithmetic* l'any 1489. Era un llibre sobre els usos comercials de l'aritmètica en que els nostres símbols actuals per a addició (+) i sostracció (-) van aparèixer impresos per primera vegada. Junt amb aquests símbols hi havia una explicació del seu ús: Els comerciants alemanys estan habituats a utilitzar el signe "+" per denotar un superàvit en una mesura i el signe "-" per denotar un dèficit. Aquests símbols prenien força ràpidament. Tanmateix, mentre la idea d'una quantitat negativa s'estava tornant més acceptable, molts matemàtics encara no sabien com tractar les solucions negatives de les equacions.

Michael Stifel 1487 - 1567

Un altre matemàtic també alemany va contribuir al desenvolupament dels nombres negatius. Michael Stifel, a la seva *Arithmetica Integra* (1544), va ser capaç de reduir els molts casos de l'equació quadràtica (recordi's que al-Khwârizmî utilitzava sis fórmules) a una única del tipus, $x^2 = bx + c$ fent ús de coeficients positius i negatius. Abans de la simplificació de Stifel, la majoria dels texts utilitzaven la classificació d'al-Khwârizmî amb procediments separats per a cada cas.

Tot i que Stifel acceptava nombres negatius com coeficients, no acceptava nombres negatius com solucions a equacions. Manifestava que acceptar-les significava pensar en "menys que res" i per tant en *numeri absurdi*, és a dir en nombres absurds. Van caldre alguns segles perquè els matemàtics aprenguessin a pensar en solucions negatives com alguna cosa diferent de "menys que res" (Cajori, 233).

Stifel va popularitzar els símbols actuals per a addició (+) i sostracció (-) com es pot veure més avall en una mostra des del seu llibre, *Deutsche Arithmetica*.

Der Ander theyl

Von disen zweyen zeichen/ + vnd —. VII.

WO ich von zeychen reden werde/ soltu mich verstehn von disen zeichen + vnd —/ Deñ solliche verzeichnis/ Sum: oder Sum: A. oder fk. ꝛc. Werde ich nicht zeychen nennen/ sondern/ namen/ oder benennung der zalen. Wa ich nu rede von gleichen zeichē/ soltu es verstehn von + vnd + / oder von — vnd —. Also auch/ wa ich von vngleichen zeichen rede / so verstehe es/ von + vnd —.

So haben nu dise zwey zeichen + vnd — / ein sonderlichen Algorithmum/ welchē ich hie stellen will auff 4 Regeln. Denn er gehöret zum Algorithmo der vngerechneten zalen wie du woll sehen wirst/ vnd alles was vorhin gesagt ist von disen namen sum: sum: A. ꝛc. das gehöret alles hie her / als vnter ein einigen Algorithmum.

Die erst Regel von dem Addiren vnd Subtrahiren. VIII.

ZWey gleiche zeichen / machen eben das selbig zeichen/ im Addiren vñ Subtrahiren/ ohn allein so du im subtrahiren die zal / die du soltest subtrahirē/ nicht kanst subtrahirē.

Exempla vom Addiren.

8 Sum:	+	7.	8 Sum:	—	18.
12 Sum:	+	11.	3 Sum:	—	6.
20 Sum:	+	18.	11 Sum:	—	24.

Hie sihest nu vor augen/ wie + vnd + mache im ersten exemplo

HISTORICAL EXHIBIT 6.3

The Evolution of Algebraic Symbolism

Since the time of the ancient Egyptians and Babylonians, mathematical problems, even situational problems, were completely written out in words as were their solution procedures. This phase of algebraic thinking is usually called the "rhetorical stage." Due to printing and the repeated use of certain terms and words, mathematicians began to use abbreviations to form mathematical relationships. At first, each mathematician or local group of mathematicians had their own system of symbolization but gradually the symbols as well as the procedures became standardized. Below are various examples of how different mathematicians employed symbols to express the modern equation $4x^2 + 3x = 10$.

Nicolas Chuquet	(1484)	$4^2\,p\,3^1$ égault 10^0
Vander Hoecke	(1514)	4 *Se* + 3 Pri dit is ghelijc 10
F. Ghaligai	(1521)	4 □ *e* 3c° – 10 numeri
Rudolff	(1525)	Sit 4 ȝ + 3 ℞ aequatus 10
Jean Buteo	(1559)	4 ◊ *p* 3 *ρ* [10
R. Bombelli	(1572)	$\overset{\underset{\smile}{2}}{4}$ *p* $\overset{\underset{\smile}{1}}{3}$ equals á 10
Simon Stevin	(1585)	4② + 3 ① egales 10
Ramus and Schoner	(1586)	4 *q* —+— 3 *l* aequatus sit 10
François Viète	(c1590)	4*Q* + 3*N* aequatur 10
Thomas Harriot	(1631)	4*aa* + 3*a* ═ 10
René Descartes	(1637)	4*ZZ* + 3*Z* ∝ 10
John Wallis	(1693)	4*XX* + 3*X* = 10

De *Five Fingers to Infinity*, Frank Swetz (ed.), p. 386

4. Les activitats proposades i els nivells

Títol	**nivell**[5]
Els numerals xinesos Shang	1r d'ESO
El tauler de comptes xinesos	1r d'ESO
Problemes xinesos	3r d'ESO
L'àlgebra sincopada de Diofant	4t d'ESO
Problemes Hindús	3r d'ESO
Els nombres negatius en Al-Samaw'al	2n d'ESO
Els nombres negatius en Al-Khwârizmî	3r d'ESO
Els Abacistes Italians	2n d'ESO

[5] S'escriu el curs a partir del que es poden utilitzar amb el benentès que poden pujar o baixar un curs i que si l'alumnat no les ha fet mai poden fer-se en curs més alts les que s'indiquen pels cursos més baixos.

4.1. Els numerals xinesos Shang

Notes per al professorat

Nivell: Activitat dissenyada per a l'alumnat dels darrers curso de primària i primers cursos de l'ESO

Objectius: L'alumnat experimentar un mètode antic d'escriure nombres i veurà el desenvolupament d'altres maneres d'escriure els nombres amb una perspectiva cultural diferent. al mateix temps aquesta activitat reforçarà la comprensió de l'alumnat respecte al valor posicional del nostre sistema d enumeració i ajudarà a apreciar la importància del zero en aquest tipus de sistemes.

Quan utilitzar-la: Aquesta activitat es pot utilitzar en qualsevol moment i nivell en que s'estiguin estudiant es nombres enters.

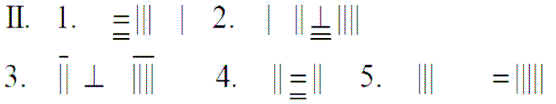
Com utilitzar-la: Llegir la informació general de la primera part: Nombres negatius a la Xina. Es recomana comentar la informació amb l'alumnat un cop aquest l'hagi llegit. De cara a preparar l'alumnat per a l'activitat necessiteu familiaritzar-los amb l'escriptura vertical i horitzontal Shang a través d'alguns exemples. Després de completar l'activitat, l'alumnat podrà representar per ell mateix altres nombres utilitzant els numerals Shang i podran fer el procés per a sumar-los. Seguiu amb l'activitat **El tauler de comptes xinesos**.

Context històric: Els numerals Shang daten com a mínim del s IV aC segons les restes arqueològiques trobades, però els historiadors estan convençuts que ja s'utilitzaven durant la dinastia Shang (s. XVI - XI aC). Els numerals Sang utilitzen la base 10 i el valor posicional. Els nombres majors que 9 es representen alternant de manera vertical i horitzontal les formes dels numerals de l'1 al 9. Les formes verticals s'utilitzen per a les unitats, centenes, desenes de milers, etc., i les formes horitzontals per les desenes, milers, centenes de milers, etc. Els bastons o canyes de comptar es van utilitzar durant centenars d'anys per representar aquest nombres.

Altres idees: Feu que l'alumnat usi escuradents, palets o tires de paper per construir els numerals xinesos. Si utilitzeu tires vermelles i negres de paper per a simular els bastons de comptar, l'alumnat representarà nombres positiu (vermell) i negatius (negre). Feu que l'alumnat construeixi un rellotge amb números Shang amb les tires de paper. Continueu amb l'activitat **El tauler de comptes xinesos**.

Solucions:

I. 1.D, 2.A, 3.E, 4.C, 5.B

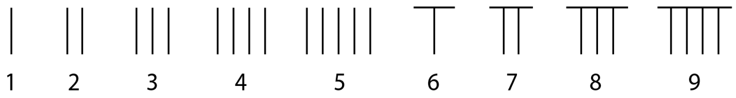


Referències: Cooke, 223-225; Katz, 7; Li and Du, 6-11

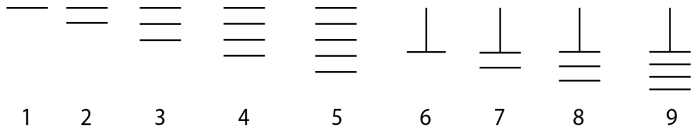
Els numerals xinesos Shang

Fulls per a l’alumnat

Forma vertical dels Numerals Shang:



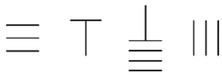
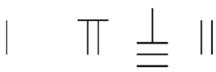
Forma horitzontal dels Numerals Shang:



Exemple 1: Escriu el nombre 3201 en numerals xinesos Shang

Exemple 2: Quin nombre representa aquest nombre xinès Shang?

I. Relaciona cada nombre Shang amb el corresponent indo-aràbic:

1.		A.	5040
2.		B.	10,782
3.		C.	245,003
4.		D.	87
5.		E.	3693

Atenció a la nota 6![6]

[6] Cal recordar que en la nomenclatura anglosaxona d’on prové l’exemple, el punt (“.”) s’utilitza per als decimals i la “,” per a separar els milers, per tant els dos nombres corresponents a B. 10,782 i C. 245,003 corresponen en la nostra notació a B. 10.782 i C. 245.003

II. Escriu en nombres xinesos Shang, cadascun dels indo-aràbics següents:

1. 4301	1. ______________________________
2. 10.284	2. ______________________________
3. 769	3. ______________________________
4. 242	4. ______________________________
5. 30.025	5. ______________________________

4.2. El tauler de comptes xinesos

Notes per al professorat

Nivell: Activitat dissenyada per a l'alumnat dels darrers cursos de primària i primers cursos de l'ESO

Materials: Còpies per a l'alumnat dels seus fulls i també del Tauler de comptes xinesos. Talleu 40 tires paper de 2,5 cm x 0,5 cm de paper o cartolina vermella i negra.

Objectius: L'alumnat aprendrà un mètode cultural antic de representar nombres i de realitzar sumes i restes amb aquests nombres i aprofunditzaran en la comprensió del valor posicional en les operacions amb enters, incloent-hi positius i negatius.

Quan utilitzar-la: Quan s'està aprenent els càlculs amb nombres enters; especialment quan s'analitza el valor posicional dels dígits.

Com utilitzar-la: Llegir la informació general de la primera part: Nombres negatius a la Xina. Es recomana comentar la informació amb l'alumnat un cop aquest l'hagi llegit. També es recomana haver fet abans l'activitat dels **Numerals xinesos Shang**. En qualsevol cas caldrà recordar com es representen ombres grans utilitzant les dues formes dels numerals xinesos Shang i comentant amb l'alumnat els dos exemples inclosos en els seus fulls de treball. Cal assegurar-se de que tots els detalls queden entesos.

L'alumnat pot treballar en grup, parelles o individualment, depenent del temps que es disposi per fer les tires de paper per a tothom. Les barres vermelles representen nombres positius i les negres negatius. Recordeu a l'alumnat que vermell per positiu i negre per negatiu és el mateix que està establert pels cables dels cotxes però que en canvi és al contrari en l'esquema actual d'havers i deutes. Animeu a l'alumnat a practicar amb els numerals xinesos Shang en lloc de buscar les solucions amb les tècniques modernes que ja coneixen.

Context històric: Els numerals Shang provenen del s XIV aC de la dinastia Shang. Aquest numerals estan formats ordenant bastonets o canyes dins d'un tauler de càlcul. Els numerals Shang funcionen en base 10 i tenen valor posicional. En el tauler de càlcul cada quadrat començant per la dreta és el lloc de les unitats; el següent cap a l'esquerra les desenes, el següent les centenes, etc., fins acabar els quadrats. No hi havia necessitat de comptar més enllà de 999.999 a la Xina antiga. Així la majoria de taulers de càlcul tenen 6 quadres x 6 quadres. Per raons d’espai, el tauler de càlcul de la nostra activitat només és de 4 x 4. Es deia que un mestre del tauler de comptes era el que realitzava càlculs en un frenesí de braços que s'agitaven de pressa treia i reemplaçava barres de comptar. Era com una dansa de nombres.

Altres idees: Feu investigar a l’alumnat com es pot fer la multiplicació, la divisió o la resolució d’equacions amb el tauler de comptes. Feu que cerquin informació sobre altres tipus d’eines per a calcular, com per exemple l’àbac, els ossos de Neper i altres calculadores antigues.

Referències: Cooke, 223-225; Katz, 7; Li and Du, 6-11

El tauler de comptes xinesos

			Milers
			Centenes
			Desenes
			Unitats

Utilitzeu barres vermelles pels nombres positius i negres pels negatius.

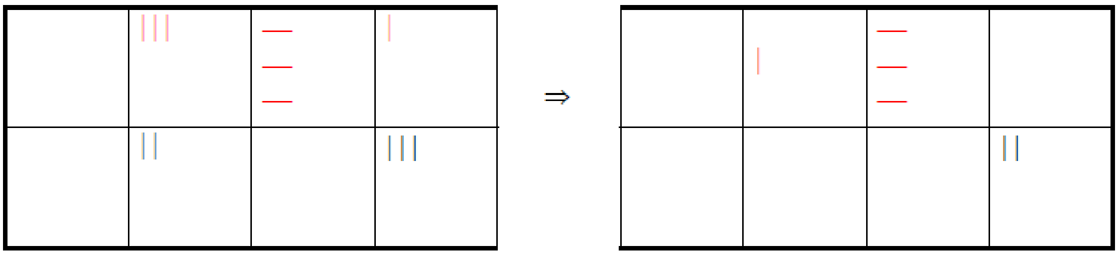
El tauler de comptes xinesos

Fulls per a l'alumnat

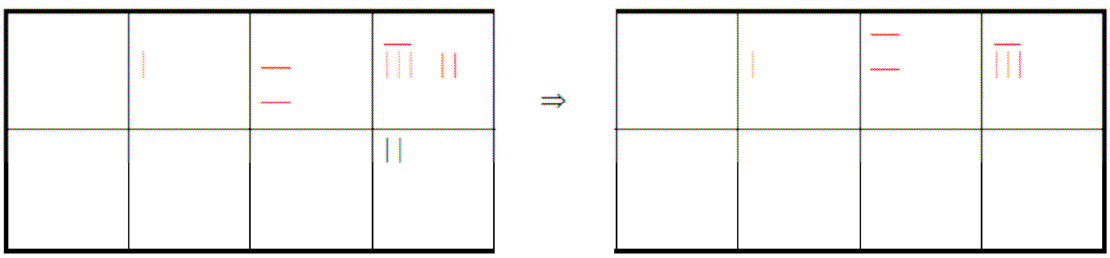
Utilitzeu barres de comptar xineses vermelles i negres per a realitzar els càlculs següents. Gireu el tauler de comptes xinesos de manera que la casella dels milers us quedi a l'esquerra.

Exemple 1: 331 – 203 (El diagrama mostra els dos primes passos del càlcul)

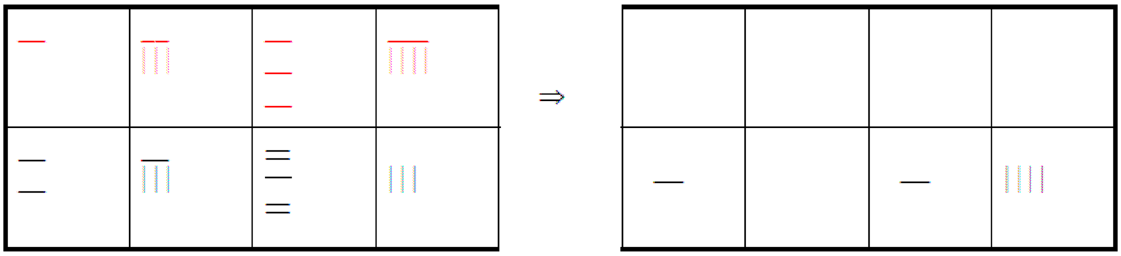
Poseu el tauler com es mostra en el diagrama de l'esquerra, amb les barres vermelles representant + 331 a la primera fila i els bastons negres representant - 203 a la segona. Comenceu amb els bastons de les centenes, dos bastons vermells i dos de negres s'han de treure del tauler. A continuació no s'ha tret cap bastó de les desenes perquè no n'hi ha de negres. A continuació en les unitats cal treure un bastó negre i un de vermell.



Com que la resposta final ha d'estar en una única fila vol dir que cal agafar un bastó vermell de les desenes i dur-lo en forma de 10 a les unitats. Si representem el 10 com la suma dels numerals 8 més 2 en forma de bastons, podrem després treure dos bastons negre si dos vermells de la columna de les unitats. El resultat final serà una fila de vermells que representaran el 128 positiu.



Exemple 2: 1.839 – 2.853



si seguiu els passos descrits a l'exemple 1, el resultat sortirà amb bastons negres, representa el nombre - 1014

Ara, utilitzeu el mètode il·lustrat a l'exemple per a calcular les següents sumes i diferències amb el tauler de comptes xinès.

1. 514 + 1040 (Quan els dos nombres són positius, tots els bastons s'han de posar a la mateixa fila.
2. 3752 – 963
3. 561 – 89
4. 2.777 – 5.050
5. 341 + 586 – 623

Resposta pas a pas de les activitats del tauler de comptes xinesos

4.3. Problemes xinesos

Notes per al professorat

Nivell: Aquest activitat està dissenyada per a l'alumnat de secundària familiaritzat amb les equacions.

Materials: Còpies dels fulls de treball de l'alumnat. Mapa gran de paret per a situar la Xina i les ciutats (aprox) on va viure Liu Hui.

Objectius: Experimentació amb problemes de la Xina antiga. Aquest problemes es poden resoldre utilitzant sistemes de dues equacions amb dues incògnites. L'alumnat podrà veure com Liu Hui, un dels matemàtics xinesos antics més conegut, resolia aquests problemes, i en particular, com s'ho feia per a treballar amb els nombres negatius.

Com utilitzar-ho: Llegiu la informació sobre els Nombres negatius a la Xina. Feu buscar a l'alumnat els indrets on va viure Liu Hui i situeu-los en un mapa de la Xina. Es recomana comentar la informació amb l'alumnat un cop aquest l'hagi llegit. L'alumnat podria treballar en grups de 2 o 4 per a resoldre els problemes. Podeu deixar que l'alumnat s'endinsi en el primer problema i compari el mètode nou amb el modern que ja coneix. els dos s'inclouen en les solucions del final. Podeu posar-ne uns resolent-ho per un mètode i uns altres per l'altre i finalment fer una posada en comú.

Context històric: Els problemes d'aquest activitat provenen de la traducció de l'edició de Liu Hui dels *Nous capítols sobre els procediments matemàtics (Jiuzhang Suanshu)*, compilat l'any 263. Per més informació vegeu **Els nombres negatius a la Xina** a la primera part d'aquest mòdul.

Altres idees: Feu investiga a l'alumnat com i perquè funciona el mètode xinès. Noteu que Liu Hui evita execucions i subtraccions que donin nombres o coeficients negatius utilitzant mètodes diversos per als que nosaltres només usem un mètode. Comparar aquests problemes amb els de l'activitat **Problemes de l'Índia.**

Solucions dels *Nou capítols dels procediments matemàtics*:

1. Afegiu l'excedent i el dèficit (3 + 4 = 7) això serà el *shi* [numerador]. Resteu el petit del gran (8 –7 =1) això serà el *fa* [denominador]. Dividiu el *shi* per el *fa* (7:1) per obtenir el nombre de persones. Multipliqueu aquest pel valor proposat [nombre de monedes] i ara resteu el corresponent excedent (7x8 – 3 = 53) o afegiu el dèficit corresponent (7x7 + 4 =53) per obtenir el cost de les mercaderies. Per tant, 7 són les persones i el preu de les mercaderies comprades és 53.

2. Utilitzeu el mateix mètode que al problema 1: (11 + 16 = 27) és el *shi*, mentre (9 –6 =3) és el *fa.* Així (27 : 3 = 9) és el nombre d persones, i (9 x 9 –11 = 70) o bé (6 x 9 + 16 = 70) és el cost de les gallines.

3. La solució és similar al problema 1, exceptuant que utilitzarem ara l'excedent (100, en el cas) o el dèficit com a *shi.* Restem el valor petit del gran (100 – 90 =10) per obtenir el *fa*. Dividim el *shi* pel *fa* (100:10 = 10) per obtenir el nombre de persones. Multipliquem el valor que dóna el cost exacte pel nombre de persones (90x10 = 900) per obtenir el cost total. així eren 10 persones i el cost total era 900 monedes.

4. La solució és similar al problema 1, exceptuant que calcularem la diferència dels dos excedents, o en el nostre cas dels dos dèficits (45 – 3 = 42) per obtenir el *shi*. Prenem la diferència dels dos valors (7 – 5 =2) per obtenir *fa.* Dividim *shi* per *fa* (42 : 2 =21) per obtenir el nombre de persones. Multipliquem aquest nombre per el valor proposat i afegim el corresponent dèficit (21 x 5 + 45 = 150) o bé (21 x 7 + 3 =150) o resteu l'excedent corresponent per obtenir el cost de la mercaderia. Així, eren 21 persones i els cost total era de 150 monedes.

5. Utilitzeu el mateix mètode que al problema 1: (330 + 30 = 360) és el *shi* i ((210/7) – 190/7) = 207) és el *fa.* Aleshores (360 : (20/7) = 126) és el nombre de famílies i (126 x (190/7) + 330 = 3750) o bé (126 x (210/7) – 30 = 3750) és el cost de les vaques.

Solucions pels mètodes actuals:

1. Sigui x = nombre de persones i y = preu total de les mercaderies. Es munten les equacions: 8x = y +3 i 7x = y – 4. Es resol el sistema: x = 7 i y = 53. Així hi havia 7 persones i el preu total de la mercaderia era 53 monedes.

2. Sigui x = nombre de persones i y = cost total de les gallines. Les equacions: $9x = y + 11$ i $6x = y - 16$. Es resol el sistema: $x = 9$ i $y = 70$. Així hi havia 9 persones i el preu total de les gallines era de 70 monedes.

3. Sigui x = nombre de persones i y = cost total dels porcs. Les equacions:
$100x = y + 100$ i $90x = y$. Es resol el sistema: $x = 10$ i $y = 900$. Hi havia 10 persones i el cost total dels porcs era de 900 monedes.

4. Sigui x = nombre de persones i y = cost total de les cabres. Les equacions:
$5x = y - 45$ i $7x = y - 3$. Es resol el sistema: $x = 21$ i $y = 150$. Hi havia 21 persones i el cost total de les cabres era de 150 monedes.

5. Sigui x = nombre de famílies i y = cost total de les vaques. Les equacions:
$(190/7)x = y - 330$ i $(210/7)x = y + 30$. Es resol el sistema: $x = 126$ i $y = 3750$. Hi havia 126 famílies i el cost total de les vaques era de 3750 monedes.

Referències: Lam, 30 -32

Problemes xinesos

Fulls per a l'alumnat

Resoleu aquest problemes "d'excedent i dèficit" del capítol 7 del text antic dels *Nou Capítols sobre les procediments matemàtics:*

1. En comprar coses en grup, si cada un dóna 8 peces [de diners], el superàvit és 3; si cada un en dóna 7, la carència és 4. S'exigeix que sàpiga el nombre de persones i preu de les coses comprades.

2. En comprar gallines en grup, si cada un dóna 9 peces [de diners], llavors 11 el superàvit és d'11; i si cada un en dóna 6, llavors 16 la carència. Trobi el nombre de persones i el preu de gallines.

3. Ara hi ha un nombre [de persones] que compra porcs. Si cada persona paga 100 [monedes], hi ha un superàvit de 100; si cada persona en paga 90 el cost és exacte. Trobi el nombre de persones i el cost dels porcs.

4. Ara hi ha un nombre [de persones] que compra cabres. Si cada persona en paga 5 [monedes], hi ha un dèficit de 45; si en paga 7, hi ha un dèficit de 3. Trobi el nombre de persones i el cost de les cabres.

5. Ara hi ha un nombre [de famílies] que compra vaques. Si cada grup de 7 famílies en paguen 190 [monedes], hi ha un dèficit de 330; si cada grup de 7 famílies en paguen 210, hi ha un superàvit de 30. Trobi el nombre de famílies i el cost de les vaques.

4.4. L'àlgebra sincopada de Diofant

Notes pel professorat

Nivell: Aquest activitat està pensada especialment per a l'alumnat de 4t d'ESO

Materials: Còpies dels fulls de l'alumnat. Mapa gran de paret per a situar Egipte i Alexandria.

Objectius: Acostar l'alumnat a un mètode antic d'escriure expressions algebraiques. Hauran d'utilitzar l'alfabet grec i els símbols dissenyats per Diofant, incloent símbol per als termes negatius.

Quan utilitzar-la: Utilitzar-la quan l'alumnat s'hagi familiaritza amb la simbologia de l'àlgebra. Com que encara s'utilitza l'alfabet grec en algunes àrees de ciències i de matemàtiques, aquesta activitat pot interessar un alumnat divers.

Com utilitzar-la: Llegir la informació sobre **Els nombres negatius a Alexandria**. Situar Alexandria en un mapa. Es recomana comentar la informació amb l'alumnat un cop aquest l'hagi llegit. De tota manera per a preparar l'alumnat per a l'activitat l'únic que és imprescindible és familiaritzar-los amb els nombres i els símbols grecs, a través del primer exemple.

Context històric: Els grecs usaven 24 lletres en el seu alfabet i tres símbols més per als nombres. Diofant (aprox. 250) va ser el primer que va utilitzar algun tipus de símbol per escriure matemàtiques. Abans i durant molt temps després, els matemàtics ho escrivien tot amb paraules. Els simbolisme algebraic no es va desenvolupar fins a François Viète que va introduir el seu sistema de símbols al s. XVI. A més d'utilitzar les lletres gregues, Diofant utilitzava abreujament de les paraules gregues en la seva obra matemàtica, i el seu tipus de simbolisme amb el temps ha passat a anomenar-se àlgebra sincopada.

Altres idees: Continueu aquesta activitat amb un debat sobre la utilització de l'alfabet grec avui en dia. Feu resoldre a l'alumnat el problema en vers sobre la vida de Diofant, dins de l'apartat corresponent a la Història dels nombres negatius.

Respostes de l'activitat: 1) D, 2) E, 3) B, 4) A, 5) C

Referències: Burton, 14-18; Katz, 174

L’àlgebra sincopada de Diofant
Fulls per a l’alumnat

Diofant era un matemàtic grec que va viure a Alexandria, Egipte, aprox. 250. Situa aquest ciutat en un mapa. Va escriure un llibre sobre àlgebra que ha esdevingut molt famós, la *Aritmètica*, en grec, llengua que tenia un alfabet de 24 caràcters. Les lletres també s’utilitzaven per a designar nombres, com es mostra a continuació. Diofant va utilitzar un sistema d’abreujaments i símbols anomenat àlgebra sincopada per escriure les seves matemàtiques.

Alfabet grec, amb lletres minúscules i majúscules, respectivament:

lletres minúscules: α β γ δ ε ζ η θ ι κ λ μ ν ξ ο π ρ σ τ υ φ χ ψ ω
lletres majúscules: Α Β Γ Δ Ε Ζ Η Θ Ι Κ Λ Μ Ν Ξ Ο Π Ρ Σ Τ Υ Φ Χ Ψ Ω

Nombres grecs:	α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	θ
indo-aràbics:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ϙ
	10	20	30	40	50	60	70	80	90
	ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ
	100	200	300	400	500	600	700	800	900

El símbol ς s’utilitzava per a designar una quantitat desconeguda, com avui dia nosaltres utilitzem la *x*.
Els símbols de Diofant per a les potències de les incògnites eren:

Δ^{Y} (quadrat o x^2) K^{Y} (cub o x^3) $\Delta^{Y}\Delta$ (quadrat de quadrat o x^4)
ΔK^{Y} (quadrat-cub o x^5) $K^{Y}K$ (cub-cub o x^6)

Diofant no utilitzava potències més altes que sis a la seva obra. Per a termes negatius utilitzava el símbol Λ, tal qual o invertit V. Primer escrivia els termes positius i després els negatius a continuació del signe negatiu. El símbol M precedia a una constat que calia sumar o restar. Per exemple:
$K^{Y}\alpha\ \varsigma\ \eta\ \Lambda\ \Delta^{Y}\varepsilon\ M\ \kappa\ \gamma$ seria avui en dia $x^3 - 5x^2 + 8x - 23$.

Relaciona les següents expressions Diofàntiques amb la seva escriptura algebraica actual:

1. K^{Y} ο α ς ψ ι η Μ τ ξ ε	A. $3x^{4} + x^{3} + 4x^{2} + 2x + 5$
2. Δ^{Y} μ γ ς δ Μ κ α	B. $89x^{5} + 500x^{4} - 2x^{2} - 30$
3. ΔK^{Y} π θ Δ^{Y} Δφ ΛΔ^{Y} β Μ λ	C. $10x^{2} - 783x - 842$
4. Δ^{Y} Δ γ K^{Y} α Δ^{Y} δ ς β Μ ε	D. $71x^{3} + 718x + 365$
5. Δ^{Y} ι Λ ς ψ π γ Μ ω μ β	E. $43x^{2} + 4x + 21$

4.5. Problemes de l'Índia

Notes per al professorat

Nivell: 2n cicle ESO, alumnes familiaritzats amb equacions lineals I quadràtiques

Materials: Còpies dels fulls de l'alumnat. Mapa gran de paret per a situar l'Índia.

Objectius: L'alumnat s'haurà d'afrontar a problemes i fórmules de l'Índia medieval i veurà com els matemàtics indis ho resolien. En particular, veuran com treballava amb els nombres negatius el matemàtic indi Bhaskara II.

Quan utilitzar-la: Quan s'estigui treballant problemes amb equacions lineals i quadràtiques.

Com utilitzar-la: Llegir la informació sobre **Els nombres negatius a l'Índia**. Situar l'índia en un mapa de paret i la ciutat on va viure el personatge estudiat. Es recomana comentar la informació amb l'alumnat un cop aquest l'hagi llegit. El problema en vers sobre les abelles que conté la introducció històrica és especialment atractiu. L'alumnat pot treballar en grups de 2 o de 4. També poden haver-hi alumnes resolent els problemes pel mètode indi, pel mètode actual o tots dos i després compartir i comentar-los en una posada en comú. En els problemes 1, 3 i 4 l'alumnat que els hagi de resoldre pels mètodes actuals arribarà a les equacions lineals. En el problemes 5 i 6 es trobaran amb equacions quadràtiques.

Context històric: Brahmagupta (aprox 625) i Bhaskara (1114-1185) eren matemàtics indis. Utilitzaven nombres negatius en el procés de resolució de problemes i també trobaven les solucions negatives. Normalment rebutjaven les solucions negatives (i de vegades algunes positives, com es veurà) perquè nombres negatius per objectes físics, com micos o abelles, no tenia sentit en el problema que estaven resolent.

Altres idees: Feu que l'alumnat tracti d'imaginar com i perquè funcionava el mètode Indi. Compareu aquest problemes amb els de l'activitat dels Problemes xinesos

Solucions antigues i solucions modernes per als problemes d'aquesta activitat:

1. La solució que es troba al manuscrit de Bakhshali és:

Poseu una quantitat qualsevol a la plaça vacant, construïu la sèrie $\left|\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix}2 & 3\\1 & 1\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix}6 & 4\\1 & 1\end{matrix}\right|$

multiplicada es transforma en $|1|2|6|24|$; sumada dóna 33. Dividiu la quantitat visible [el total donat] $\left|\begin{matrix}132\\33\end{matrix}\right|$; per reducció es transforma en $\left|\begin{matrix}4\\1\end{matrix}\right|$, la quantitat donada al primer.

En termes moderns, sigui *x* la quantitat donada al primer, es forma l'equació

$x + 2x + 3(2x) + 4(3(2x)) = 132$ que simplificada dóna $33x = 132$. Per tant x = 4 i el primer rep 4.

2. Quan d = 0, el quadrilàter és un triangle i llavors la fórmula de Brahmagupta es redueix a la fórmula d'Heron.

3. D'acord amb Bhaskara II**,**

> Aquí l'equació que s'estableix per la igualtat de valors és $6x + 300 = 10x - 100$. Aleshores per la regla de restar el desconegut en els dos costat. El desconegut del primer costat es treu del dos costats i el que queda en el segon costat és *4x.* Ara el terme absolut del segon costat es contraresta amb el terme absolut del primer costat, el residu és 400. El termes residual 400 del nombre es divideix pel coeficient del residu del desconegut 4x, en el quocient es reconeixerà el valor de x, és a dir 100.

Observeu que Bhaskara evita fer restes que donin resultats negatius en els coeficients, però en cavi resta – 100 de 300 obtenint així 400.

4. L'equació $\frac{1}{5}x+\frac{1}{3}x+3\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{5}x\right)+1=x$ o bé $\frac{1}{5}x+\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}x+1=x$ que descriu el nombre x d'abelles té per a solució x = 15 abelles. Bhaskara identifica els coeficients $\frac{1}{5},\frac{1}{3},\frac{2}{5}$ i el "donat" 1. Resta $\frac{1}{5},\frac{1}{3}$i $\frac{2}{5}$ d' 1, obté $\frac{1}{15}$, i després divideix 1 entre $\frac{1}{15}$ per obtenir 15 com a nombre resultant del rusc d'abelles. el que Bhaskara està fent és

assumir que només hi ha una abella (x = 1), i aleshores aplicant les condicions dels problema arriba a que hauria d'haver només $\frac{1}{15}$ d'abella en lloc de l'1 donat, atrapada dins de la flor de gessamí. Per obtenir el nombre correcte d'abelles, ha de dividir le nombre conegut (1) per $\frac{1}{15}$, per obtenir x = 15. Fa com una proporció, o el que és equivalent a resoldre l'equació $\frac{1}{15}x = 1$. El mètode de Bhaskara s'anomena "mètode de la falsa posició" i va servir per a resoldre equacions lineals des de temps molt antics en moltes cultures.

5. (a) L'equació és $\left(\frac{1}{8}x\right)^2 + 12 = x$

(b) L'alumnat pot comprovar les solucions donades mitjançant la substitució, o també pot resoldre l'equació que es rescriuria com $x^2 - 64x + 768 = 0$, factoritzant, completant quadrats o utilitzant la fórmula de l'equació de 2n grau. Bhaskara la resol completant quadrats. Després d'afegir $(32)^2$ a les dues bandes de l'equació obté $x^2 - 64x + 1024 = 256$, és a dir $(x-32)^2 = 256$, pren l'arrel positiva de cada costat per arribar a x – 32 = 16 , el que és igual a x = 48. Retornant a l'equació $(x-32)^2 = 256$, comprova que amb l'arrel negativa obté una solució positiva, ja que en l'equació x – 32 = -16 , s'obté x = -16 + 32 que és 16.

6. (a) L'equació és $\left(\frac{1}{5}x - 3\right)^2 + 1 = x$

(b) L'alumnat pot comprovar les solucions donades mitjançant la substitució, o també pot resoldre l'equació que es rescriuria com $x^2 - 55x + 250 = 0$, factoritzant, completant quadrats o utilitzant la fórmula de l'equació de 2n grau. Bhaskara la resol completant quadrats.

(c) Bhaskara rebutja la solució x = 5 perquè un cinquè de 5 micos, menys 3 micos dóna – 2 micos el que és impossible. No pensa que el nombre de micos enla cova podria ser $(-2)^2 = 4$ micos. Bhaskara diu que a solució x = 5 és " incongruent. La gent no admet un nombre negatiu com a valor absolut".

Referències: Anglin, 115; Burton, 204, 234-239; Katz, 218-230; Plofker 2000, 10

Problemes de l'Índia

Fulls per l'alumnat

1. Resoleu el problema del manuscrit de Bakhshali (aprox 500): El que es dóna al primer és desconegut. El segon rep el doble del primer; el tercer rep el triple del segon; i el quart quatre vegades el que rep el tercer. El total de monedes distribuïdes és 132. quan rep el primer?

2. Demostreu que la fórmula d'Heron per a calcular l'àrea d'un triangle a partir de les longituds dels seus costats *a, b i c* és un cas particular de la de Brahmagupta per a l'àrea d'un quadrilàter de costats *a, b, c i d* inscrit en un cercle. En els dos casos la quantitat *s* s'anomena semiperímetre de la figura. Heron era un matemàtic grec que va viure a Alexandria, Egipte, al s. I. Brahmagupta era un matemàtic indi del s. VII

Fórmula d'Heron: $A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ on $s=\dfrac{a+b+c}{2}$

Fórmula de Brahmagupta: $A=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ on $s=\dfrac{a+b+c+d}{2}$

els problemes següents van ser plantejats pel matemàtic indi Bhaskara II (1114-1185)

3. Una persona té 300 monedes i 6 cavalls. Una altra té 10 cavalls de valor similar i un deute de 100 monedes. Però les dues tenen el mateix en valor total. Quin és el preu d'un cavall?

4. D'un eixam d'abelles en surten totes, un cinquè del total van cap a una flor de *kadamba,* un terç a un planter de flors i tres vegades la diferència d'aquestes dues a una flor de *kutaja*. L'abella restant, dubta volant entre la olor d'un gessamí i d'un *pandanus.* Digui'm el nombre d'abelles de l'eixam.

5. La vuitena part d'un grup de micos, elevat al quadrat, saltava pels arbres d'un bosc i estava encantada amb el seu esport. Als dotze micos restants se'ls va veure per un puig empaitant-se entre ells. Quants n'hi havia en total?

(a) Escriviu una equació que descrigui la situació del nombre de micos del grup.
(b) Demostreu que x = 16 i x = 48 són solucions de l'equació que heu plantejat.

6. La cinquena part d'en grup de micos menys tres i elevat al quadrat, s'han ficat en una cova; un mico sol s'ha vist gronxant-se en un arbre. Quants n'hi ha en total?

(a) Escriviu una equació que descrigui la situació del nombre de micos del grup.
(b) Demostreu que $x = 5$ i $x = 50$ són solucions de l'equació que heu plantejat.
(c) Bhaskara II rebutjava la solució $x = 5$. Expliqueu què el problema original el va fer rebutjar aquesta solució.

4.6. Nombres negatius en Al-Samaw'al

Notes per al professorat

Nivell: Qualsevol curs de l'ESO, potser millor a partir de 2n.

Materials: Còpies dels fulls de l'alumnat. Mapa gran de paret per a situar l'extensió del món Àrab de l'època.

Objectius: Aconseguir que l'alumnat reafirmi les regles per a operar amb nombres positius i negatius i les escrigui amb les seves pròpies paraules. L'alumnat també veurà com els van establir aquestes regles els matemàtics de Bagdad del s XII

Quan utilitzar-la: Quan es vulguin repassar les regles de les operacions amb nombres negatius

Com utilitzar-la: Llegir la informació sobre la història els nombres negatius al món Àrab i comentar-la a l'aula. Es recomana posar l'alumnat a treballar en parelles o en grups perquè discuteixin quina és la manera més eficient d'establir les regles i s'ajudin entre ells per a trobar els exemples més pertinents.

Context històric: Al-Samaw'al va viure a Bagdad durant el s XII i va estudiar l'obra d'al-Khwarizmi, sovint anomenat el Pare de l'àlgebra. El nostre terme àlgebra prové de la paraula utilitzada per Al-Khwarizmi, *al-jabr*, que apareix al títol de la seva obra. Al-Samaw'al era jueu de religió, però es va convertir a l'islam quan tenia 40 anys. A més de matemàtic era metge i va escriure també llibre sobre medicina.

Altres idees: Compareu les regles d' Al-Samaw'al per la suma, resta, multiplicació i divisió de nombres negatius amb les que van establir els matemàtics Indus Brahmagupta i Bhaskara II. Compareu també amb les regles d'Al-Khwarizmi a l'hora d'introduir o revisar les regles dels signes a les operacions.

Respostes: Poden ser diverses, per exemple:

1. Si dos nombres amb signes oposats es multipliquen, el producte és negatiu

Exemple: (- 2)(3) = -6

Si dos nombres amb signes iguals es multipliquen, el producte és positiu

Exemple: (- 2)(- 3) = 6

2. Restar un nombre és el mateix que sumar-li el seu oposat. Restar un negatiu és el mateix que sumar un positiu. En aquest cas el positiu s'afegeix a un nombre negatiu més gran en valor absolut, així el resultat ha de ser negatiu:

Exemple: (- 5) – (- 3) = (- 5) + (+3) = -2

3. Restar un nombre negatiu és el mateix que sumar un positiu. en aquest cas, el positiu se suma a un negatiu que te un valor absolut més petit, en aquest cas el resultat és positiu.

Exemple: (- 3) – (- 5) = (- 3) + (+5) = +2

4. Restar un nombre negatiu és el mateix que sumar un positiu. En aquest cas, el nombre positiu s'ha de sumar a un positiu i el resultat és positiu.

Exemple: (3) – (-2) = (3) + (+2) = 5   o bé   (2) – (- 5) = (2) + (+5) = +7

5. Si un nombre positiu s'ha de restar de zero, aleshores és el mateix que sumar un nombre negatiu al zero, i el resultat és negatiu.

Exemple: 0 – (+2) = 0 + (- 2) = - 2

Si un nombre negatiu es resta de zero, llavors és el mateix que sumar un positiu I zero, i el resultat és positiu.

Exemple: 0 – (-2) = 0 + (+2) = + 2

Referències: Rashed, 37

Nombres negatius en Al-Samaw'al

Fulls per a l'alumnat

Llegiu les regles d'Al-Samaw'al per operar amb nombres positius i negatius. Substituïu-les per un redactat amb les vostres propis paraules i escriviu un exemple per a cadascun.

1. "El producte de d'un nombre negatiu per un nombre positiu és negatiu i per un negatiu és positiu." (Hi ha dues regles en aquesta frase. Separeu les dues regles i escriviu un exemple per a cadascuna)

2. "Si es resta un nombre negatiu d'un nombre negatiu més gran, el que queda és la seva diferència en negatiu."

3. "La diferència queda positiva si es resta un nombre negatiu d'un nombre negatiu més petit."

4. "Si es resta un nombre negatiu d'un nombre positiu, el resultat és la seva suma en positiu".

5. "Si es resta un nombre positiu de zero, el resultat és el mateix nombre en negatiu, i si es resta un nombre negatiu de zero, el resultat és el mateix nombre en positiu." (Hi ha dues regles en aquesta frase. Separeu les dues regles i escriviu un exemple per a cadascuna).

4.7. Els nombres negatius en Al-Khwârizmî

Notes per al professorat

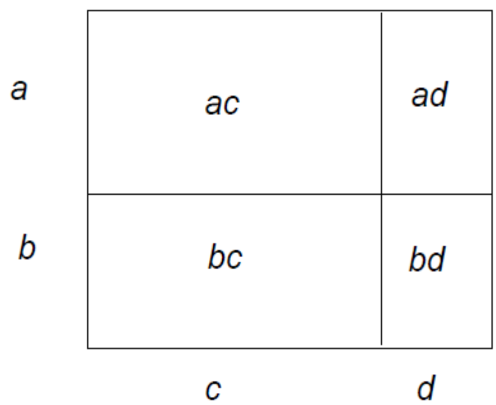
Nivell: Aquesta activitat és utilitzable per a tots els cursos de l'ESO però com que en algun moment es treballa amb incògnites (*x*) potser és millor realitzar-la quan l'alumnat estigui familiaritzat en l'ús d'incògnites, a partir de 3r d'ESO.

Materials: Còpies dels fulls de l'alumnat i un mapamundi per a penjar a l'aula i situar l'extensió del Món àrab de l'època.

Objectius: L'alumnat haurà d'utilitzar la propietat distributiva per a justificar les regles dels signes amb nombres positius i negatius.

Quan utilitzar-ho: Utilitzeu aquesta activitat quan estudieu les regles dels signes en la multiplicació de nombres positius i negatius i en particular quan treballeu amb: $(a+b)(c+d)=ac + ad + bc + bd$

Com utilitzar-ho: Llegiu la informació general sobre historia **Els nombres negatius al Món àrab.** Recomanem fer llegir la informació a l'alumnat i comentar-la a l'aula. L'alumnat pot realitzar l'activitat individualment, en parelles o en grups de quatre. Els podeu empènyer a justificar la propietat distributiva per nombres positius *a, b, c* i *d* utilitzant arguments geomètrics com els següents. Feu observar que l'àrea del rectangle és $(a + b)(c + d)$ però que també és $ac + ad + bc + bd$, per tant $(a + b)(c + d) = ac + ad\ bc + bd$.



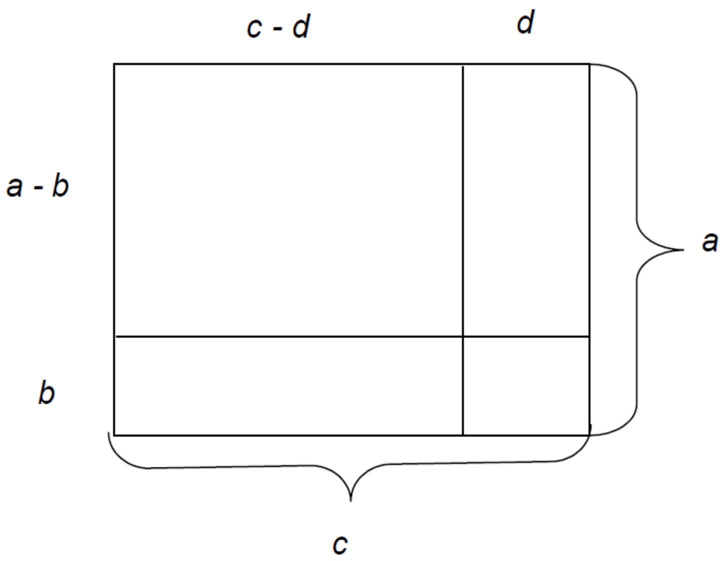
Context històric: Mohamed Ben-Musa al-Khwârizmî matemàtic, astrònom i membre de la Casa de la Saviesa de Bagdad (aprox.780 – 850) és considera que va ser el creador de les regles de l'àlgebra. La seva obra *Hisâb al-jabr wal-muqqabala* (813) va ser traduïda al llatí per Roberto de Chester amb el títol *Liber algebrae et almucabala*

(Segòvia, 1145), d'on prové el nom actual d'àlgebra. Del seu nom al-Khwârizmî , prové el terme algorisme.

Malgrat que al-Khwârizmî no acceptava els nombres negatius com a solucions d'equacions i evitava tot el que podia aquests nombres en els seu càlculs, no es va poder escapar del tot d'ells. Justificava les regles del producte de positius i negatius a través de la propietat distributiva.

Altres idees: l'alumnat podria practicar amb exemples del tipus (a – b)(a – b) on a > b > 0. En les activitats dels **Abacistes italians**, l'alumnat pot veure com a finals del s XIV l'autor utilitza un exemple de la forma (a – b)(a – b) per concloure que (-)(-) = (+)

La identitat (a – b)(c – d) = ac – ad – bc + bd, on a > b > 0 i c > d > 0 també es pot justificar amb la figura següent o utilitzant propietats algebraiques.



Solucions de l'activitat:

1. 42 +12 + 21 + 6 si (+)(-) = (+), (-)(+) = (+) i (-)(-) = (+)
però 42 +12 + 21 - 6 si (+)(-) = (+), (-)(+) = (+) i (-)(-) = (-)
però 42 - 12 - 21 + 6 si (+)(-) = (-), (-)(+) = (-) i (-)(-) = (-)
però 42 - 12 - 21 + 6 si (+)(-) = (-), (-)(+) = (-) i (-)(-) = (+)

2. Noteu que 42 + 12 + 21 + 6 = 81, 42 + 12 + 21 – 6 = 69,
42 – 12 – 12 – 6 = 3 i que 42 – 12 – 21 + 6 = 5. La darrera suma és la correcta. Per tant es segueix que (+6)(- 2) = - 12, (- 3)(+ 7) = 21 i que (- 3)(- 2) = + 6 suggerint que les regles correctes són $(+)(-)=(-)$, $(-)(+)=(-)$ i que $(-)(-)=(+)$

Els nombres negatius en Al-Khwârizmî

Fulls per a l'alumnat

Mohamed Ben-Musa al-Khwârizmî matemàtic, astrònom i membre de la Casa de la Saviesa de Bagdad (aprox.780 – 850) és considera que va ser el creador de les regles de l'àlgebra. La seva obra *Hisâb al-jabr wal-muqqabala* (813) va ser traduïda al llatí per Roberto de Chester amb el títol *Liber algebrae et almucabala* (Segòvia, 1145), d'on prové el nom actual d'àlgebra. Del seu nom al-Khwarizmi, prové el terme algorisme.

Malgrat que al-Khwârizmî no acceptava els nombres negatius com a solucions d'equacions i evitava tot el que podia aquests nombres en els seu càlculs, no es va poder escapar del tot d'ells. Al-Khwârizmî es plantejava dues qüestions sobre els nombres negatius:

Qüestió 1: El producte de d'un nombre positiu per un negatiu és un nombre positiu o negatiu?
En símbols, (+)(-) = (+) o bé (+)(-) = (-)?
De la mateixa manera, el producte d'un nombre negatiu per un positiu és un nombre positiu o negatiu?
En símbols, (-)(+) = (+) o bé (-)(+) = (-)?

Qüestió 2: el producte de dos nombres negatius és un nombre positiu o negatiu?
En símbols, (-)(-) = (+) o bé (-)(-) = (-)?

Al-Khwârizmî va respondre aquestes qüestions sobre productes de nombres positius i negatius utilitzant la propietat distributiva. En concret ho va fer amb productes del tipus:

$$(2x+3)(x+7) = 2x^2 + 14x + 3x + 21 = 2x^2 + 17x + 21$$

Al-Khwârizmî sabia que si a, b, c i d eren nombre positius aleshores

$$(a+b)(c+d)=ac + ad + bc+ bd$$

Per exemple, si que és cert que (6+3)(7+2) és (9)(9) = 81

Si ara considerem el producte (6-3)(7-2), la manera més senzilla de calcular-ho és
(6-3)(7-2) = (3)(5) = 15

Amb la propietat distributiva, aplicada a tots els nombres, positius i negatius podem fer els càlculs com

$$(6-3)(7-2) = (6)(7) + (6)(-2) + (-3)(7) + (-3)(-2)$$

Segons la resposta a les dues preguntes d' Al-Khwârizmî, la suma

$$(6)(7) + (6)(-2) + (-3)(7) + (-3)(-2)$$

pot tenir diferents respostes (omple els espais corresponents)

42 + 12 + 21 + 6 si (+)(-) = (+), (-)(+) = (+) i (-)(-) = (+)

42 + 12 + 21 - 6 si _________,________ i ________

____________ si (+)(-) = (-), (-)(+) = (-) i (-)(-) = (-)

42 - 12 -21 + 6 si _________,________ i ________

2. Calcula les quatre sumes del problema 1. Utilitza el resultat (6 –3)(7 – 2) = (3)(5) = 15 per a decidir quina és correcta.

Quines eren doncs les respostes d' Al-Khwârizmî a les dues preguntes que ell es formulava?

3. Escriu el teu propi producte (a – b)(c – d), amb a > b > 0 i c > d > 0, per il·lustrar les regles del producte de nombres amb positius i negatius. Utilitza el mateix raonament que en els problemes 1 i 2 però amb nombre diferents.

4.8. Els Abacistes italians

Notes per al professorat

Nivell: Aquesta activitat és utilitzable per a tots els cursos de l'ESO, potser millor a partir de 2n d'ESO.

Materials: Còpies dels fulls de l'alumnat i un mapamundi per a penjar a l'aula i situar Itàlia.

Objectius: L'alumnat treballarà amb el passatge d'un text del s XIV del Abacistes italians per intentar entendre la justificació de que el producte d'un nombre negatiu per un altre de negatiu dóna un nombre positiu. La justificació utilitza la propietat distributiva.

Quan utilitzar-ho: Utilitzeu aquest activitat quan s'estiguin treballant les regles dels signes en el producte. Els prerequisits són conèixer la propietat distributiva i entendre perquè un nombre positiu de vegades un nombre negatiu és un nombre negatiu.

Com utilitzar-ho: Llegiu la informació general sobre historia **El simbolisme a Europa**. Recomanem fer llegir la informació a l'alumnat i comentar-la a l'aula. L'alumnat pot realitzar l'activitat individualment, en parelles o en grups de quatre. Podeu utilitzar la propietat distributiva a través de regles algebraiques o bé utilitzant la geometria com es suggereix a **Nombres negatius en al-Khwârizmî**.

Context històric: Els grans canvis que van tenir lloc al començament de l'economia europea del s XIV, incloent-hi el gran augment en comerç, van crear la necessitat de desenvolupar més matemàtiques. Els comerciants europeus necessitaven aritmètica i algunes tècniques algebraiques per tractar amb cartes de crèdit, lletres de canvi, pagarés, i interès. Per satisfer aquesta demanda, una classe nova de matemàtics professionals, els *maestri d'abbaco* (mestres de càlcul), sorgia a l'inici del s XIV a Itàlia i més tard a resta d'Europa. Aquests homes escrivien texts i ensenyaven matemàtiques pràctiques als comerciants i als seus fills utilitzant els numerals indoàrabs. El passatge d'aquesta activitat prové d'un text escrit per un abacista anònim dels voltants del 1390 (Katz, 343 – 346)

Solucions:

1. Observeu que 3 + ¾ = 15/4 = 4 – ¼. Per tant (3 + ¾) (3 + ¾) = (4 – ¼)(4 – ¼)

2. Observeu que (3 + ¾) (3 + ¾) = (15/4)(15/4) = 225/16 = 14 + 1/16

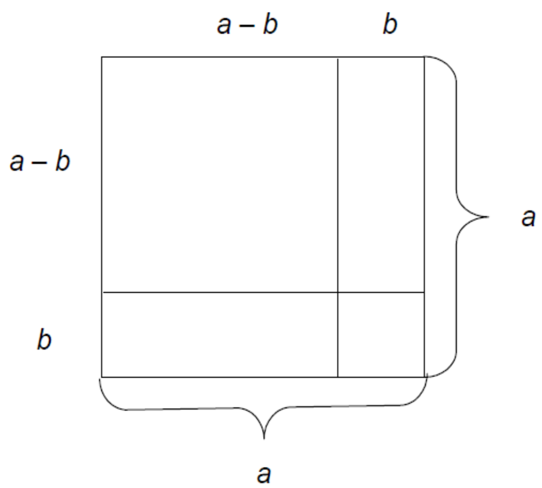
3. L'autor ha calculat els tres primers productes aplicant la propietat distributiva en el desenvolupament de (4 – ¼)(4 – ¼). Després calcula (4)(-1/4) = -4/4 = -1. Fa els càlculs per duplicat; és a dir (-1/4)(4) = (4)(-1/4). Després calcula 16 –2 = 14 que es diferencia de la resposta 14 1/16 en 1/16.

4. Com que (4 – ¼)(4 – ¼) = 14 + 1/16, aleshores (4 – ¼)(4 – ¼) = 14 + (-1/4) (-1/4) ha de ser igual a 14 + 1/16. Per tant (-1/4) (-1/4) ha de ser igual a +1/16, el que il·lustra el fet que (-)(-) = (+).

5. Com que (8 – 2)(8 – 2)= (6)(6) = 36, aleshores (8 – 2)(8 – 2)= 64 –16 –16 + (-2)(-2) = 32 + (-2)(-2) ha de ser igual a 36. D'aquí se segueix que (-2)(-2) ha de ser igual a +4, il·lustrant el fet que (-)(-) = (+).

Altres idees: Feu escriu a l'alumnat més exemples de la forma (a - b)(a - b), on $a > b > 0$. També els podeu fer utilitzar expressions de la forma (a – b)(c – d), on a > b > 0 i c > d > 0 per obtenir la mateixa justificació. Per exemple si feu que multipliquin
(6 – 3)(7 – 2), la resposta serà 15. Per tant 6 cops 7 és 42, 6 cops – 2 és – 12, i – 3 cops 7 és – 21 i això junt fa que 42 – 12 – 21 = 9. Se segueix que - 3 cops – 2 ha de ser + 6 i llavors 9 + 6 du a la resposta correcta que és 15. En l'activitat **Els nombres negatius en al-Khwârizmî**, l'alumnat pot veure com al-Khwârizmî utilitzava aquest exemple no solament per concloure que (-)(-) = (+) sinó també per (+)(-) = (-) i
(-)(+) = (-)

La identitat $(a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$, amb a > b > 0, també es pot justificar utilitzant la il·lustració següent o les regles de l'àlgebra.



Els Abacistes italians

Fulls per a l'alumnat

Aquí teniu un passatge d'un manuscrit italià escrit aproximadament l'any 1390, abans de la invenció de la impremta. El tema del manuscrit és aritmètic , i en aquest text l'autor explica que el producte de dos nombres negatius é un nombre positiu. El passatge apareix entre cometes, frase per frase, amb algunes preguntes que ho acompanyen.

"Multiplicar vegades negatives per negatius dóna positiu. Si ho volueu provar feu el següent: Sabeu que multiplicar 3 més ¾ per ell mateix ha de donar el mateix que multiplicar 4 menys ¼ per ell mateix"

1. Per què 3 i ¾ és igual a 4 menys ¼? Per què el producte de 3 i ¾ per ell mateix és igual que el producte de 4 menys ¼ per ell mateix?

"Això és, multiplicant 3 i ¾ per 3 i ¾ dóna 14 i 1/16; dóna el mateix que si multipliquem 4 menys ¼ per 4 menys ¼ vegades."

2. Comproveu que el producte de 3 ¾ i 3 ¾ és igual al 14 1/16

L'autor multiplica 4 menys ¼ per ell mateix. Calcula (4 - ¼)(4 - ¼) utilitzant la propietat distributiva.

" Per multiplicar 4 menys ¼ 4 menys ¼ de vegades...., multipliqueu per caselles [utilitzant la propietat distributiva], sabent que 4 vegades 4 dóna 16. Ara multipliqueu en creu i veieu que 4 vegades menys un quart dona menys 4 quarts, que això és menys un enter, i que 4 vegades menys un quart dóna menys un, per tant teniu menys 2. Traieu això [el 2] de 16 i obtindreu el 14."

3. Quins factors s'han multiplicat així? Per què 4 vegades menys un quart dóna menys un enter? Per què fa aquesta multiplicació dues vegades? Quina suma fa després d'haver multiplicat 4 per 4, 4 per –1/4, i 4 per –1/4 la segona vegada? En quant difereix això de la resposta 14 1/16 que sabem que hem d'obtenir?

"Ara menys ¼ menys ¼ vegades dóna 1/16; això fa que tant un [el producte de 4 – ¼ per ell mateix] com l'altre [el producte de 3 i ¾] siguin iguals."

4. Quina és la justificació que fa l'autor perquè menys ¼ de vegades per menys ¼ doni el positiu 1/16?

5. Utilitzeu el mateix raonament dels problemes 1 al 4 per demostrar que –2 vegades –2 és igual a +4 amb el producte (8 – 2) (8 – 2).

6. Feu el vostre propi producte de la forma (a – b) (a – b), amb a > b > 0, i utilitzeu-lo per mostrar que si teniu el resultat de diferents maneres s'arriba a la conclusió que vegades negatives per negatiu és positiu, és a dir que negatiu per negatiu és positiu.

5. Referències

5.1. Bibliografia

Anglin, W. S. (1994) Mathematics: A Concise History and Philosophy. New York: Springer-Verlag,

Archibald, Raymond Clare (1941) *Outline of the History of Mathematics*. Oberlin, Ohio: The Mathematical Association of America,.

Bashmakova, Isabella, and Galina Smirnova (2000) *The Beginnings and Evolution of Algebra*. Washington, D.C.: The Mathematical Association of America,.

Ball, Walter William Rouse (1935) *A Short Account of the History of Mathematics*. London: MacMillan and Co.,

Benoit, Paul (1991) “Cálculo, álgebra y mercancía” en *Historia de las Ciencias,* Michel Serres (ed), Madrid:Ediciones Cátedra, 225-253.

Benoit, Paul; Micheau (1991) “¿El intermediario árabe? en *Historia de las Ciencias*, Michel Serres (ed), Madrid:Ediciones Cátedra, 175-201.

Boyer, Carl B. (1986) *Historia de las Matemáticas*. Madrid: Alianza Editorial.

Burton, David M. (1991) *The History of Mathematics*, Second Edition. Dubuque, Ia.: Wm. C. Brown,

Cajori, Florian (1924) *A History of Elementary Mathematics*. New York: The MacMillan Co.

Collete, Jean Paul (1973) *Histoire des mathématiques*, Vuibert/Erpi, Montréal (Quebec), traducció castellana. Siglo XXI. Mèxico/Barcelona (1983)

Cooke, Roger (1997) The History of Mathematics. New York: John Wiley & Sons.

Chemla, Karine (s/d) “Aperçu sur l’histoire des mathématiques” en Chine Ancienne dans le contexte d’une histoire internationale, 71-90. Article on line: http://www.reunion.iufm.fr/dep/mathematiques/Seminaires/Resources/Chemla22.pdf

Chemla, Karine; Shuchun, Guo (eds.) (2005) Les Neuf Chapitres, le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires [edició crítica bilingüe], París, Dunod.

Datta, Bibhutibhusan; Avadhesh. N. Singh (1961) History of Hindu Mathematics. Bombay: Asia Publishing House.

Demattè, Adriano (2006) Fare matematica con i documenti storici. Una raccoltaper la scuola scondaria de primo e secondo grado. Volume per l'alunno e Volume per l'insegnante. Editore Provincia Autonoma di Trento – IPRASE del Trentino.

Guedj, Denis (1998) El imperio de las cifras y los números. Barcelona. Edicions B, S.A.

Heath, Sir Thomas L. (1964) Diophantus of Alexandria, Second Edition. New York: Dover Publications, Inc

Ho Peng Yoke (2000) LI, QI and SHU An Introduction to Science and Civilization in China. Mineola, New York, Dover Publications, Inc.

Hogben, Lancelot (1960) Mathematics in the Making. New York: Doubleday & Co.

Ifrah, Georges (1997) Historia universal de las cifras. Madrid. Espasa Calpe S.A.

Jami, Catherine (1988) "Une histoire chinoise du 'nombre π'", Archive for History of Exact Sciencies 38 (1), 39-50

Joseph, George Gheverghese (1996) La cresta del pavo real. Las matemáticas y sus raíces no europeas. Madrid. Pirámide.

Lam Lay Yong. (1994) "Jui Zhang Suanshu (Nine Chapters on the Mathematical Art): An Overview." Archive for History of Exact Sciences 47:1, pages 1-51.

Li Yan; Du Shiran (1987) Chinese Mathematics. A Concise History, Oxford, Clarendon Press.

Katz, Víctor J; Michalowicz, Kareen Dee (2004) Historical Modules for teaching and Learning of Mathematics. The Mathematical Association of America, Washington.

Katz, Víctor J (ed) (2007) The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam: A Sourcebook. Princeton University Press.

Katz, Víctor J (2008) (3a Ed) A History of Mathematics. Addison Wesley

Kline, Morris (1972) Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. New York: Oxford University Press.

Mankiewicz, Richard (2000) Historia de las Matemáticas. Barcelona. Paidos.

Mikami, Yoshio (1974) The Development of Mathematics in China and Japan. New York: Chelsea.

Pla i Carrera, Josep (2009) Liu Hui. Nueve capítulos de la matemática china. La matemática y sus personajes, 39. Ed. Nivola

Plofker, Kim (2009) Mathematics in India, Princeton University Press.

Rashed, Roshdi (1994) translated by A. F. W. Armstrong. The Development of Arabic Mathematics: Between Arithmetic and Algebra. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Robson, Eleanor; Stedall, Jacqueline (ed) (2009) The Oxford Handbook of History of mathematics. Oxford University Press.

Struik, Dirk J. (1987)A Concise History of Mathematics. New York: Dover Publications.

Struik, Dirk J. (1987) (Editor) A Source Book in Mathematics, 1200-1800. Princeton: Princeton University Press.

Swetz, Frank (1994 (Editor) From Five Fingers to Infinity. Chicago: Open Court.

Temple, Robert (1989) The Genius of China. New York: Simon and Schuster.

5.2. Pàgines web

Aquests llocs web eren operatius l'agost del 2009

http://divulgamat.ehu.es/weborriak/Enlaces/CategoriasDet.asp?Id=13 Enllaç de Divulgamat (Centro virtual de divulgación de las matemáticas de la Real Sociedad) de Matemática Española) a diferents llocs web sobre Història de la matemàtica.

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/index.html The MacTutor History of Mathematics Archive, de la University of St. Andrews, Scotland.

http://scienceworld.wolfram.com/biography/topics/Mathematicians.html. Biografies de matemàtics i científics.

http://www.scidiv.bcc.ctc.edu/math/MathFolks.html Bellevue Community College in Bellevue, Washington, biografies de matemàtics.