

**EL TEOREMA DE PITÀGORES A LA GRÈCIA CLÀSSICA**  
**Els *Elements* d'Euclides (300 aC)**

## ÍNDIX

<b>1. Introducció</b>	<b>3</b>
<b>2. Idees trigonomètriques en els <i>Elements</i></b>	<b>4</b>
<b>3. Activitat de classe: la demostració del Teorema de Pitàgores</b>	<b>6</b>
<b>4. Conclusió</b>	<b>9</b>
<b>5. Referències</b>	<b>10</b>
<b>Annex 1: Fulls de treball per a l'alumnat</b>	<b>11</b>
<b>Annex 2: Valoració de l'activat</b>	<b>21</b>

## 1. Introducció

En aquest element es presenta l'anàlisi d'una proposició dels *Elements* d'Euclides (300 aC) que estan relacionades amb la geometria i la trigonometria que s'imparteix a l'ESO. És la proposició 47 del llibre I dels *Elements* que coneixem actualment com "el teorema de Pitàgores", de la qual s'ha fet una petita guia didàctica que ja ha estat experimentada amb alumnes de 4rt de l'ESO. Mostrarem que amb aquesta activitat l'alumnat desenvolupa especialment el raonament geomètric i ho valorem positivament perquè és una eina valuosa per la seva formació científica. Hem inclòs dos annexos, un amb els fulls de treball per a l'alumnat i l'altre amb algunes valoracions posteriors a la implementació a l'aula que poden ser d'interès per a realitzar l'activitat.

L'estudi de la Proposició I, 47, així com el disseny de l'activitat per a l'aula i els fulls de material per a l'alumnat pertanyen al fons del grup d'història d'ABEAM i formen part del projecte "El naixement i desenvolupament de la trigonometria en les diferents civilitzacions" que investiga els orígens de la trigonometria. Aquest estudi, amb el títol "Els Elements d'Euclides. Idees trigonomètriques a l'aula" va ser presentat pel grup a les II Jornades sobre la Història de la Ciència en l'Ensenyament (Barcelona 2005)<sup>1</sup>, organitzades per la SCHCT<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup> Vegeu les Referències en aquest mateix element.

<sup>2</sup> SCHCT: Societat Catalana d'Història de la Ciència i la Tècnica.

## 2. Idees trigonomètriques en els *Elements*

L'episodi històric que presentem se situa en el marc de la ciència grega. Si bé Hiparc de Nicea (c. 190 aC-c.120 aC) és considerat el pare de la trigonometria i Ptolemeu, amb la seva obra *Almagest*, va contribuir de manera important al seu desenvolupament, sense els *Elements* d'Euclides aquests avenços segurament haurien hagut d'esperar molt de temps. Cal remarcar que el mètode que Ptolemeu emprà per a construir les taules de cordes es basa en diferents proposicions dels *Elements* d'Euclides.

En els *Elements* d'Euclides es recullen els coneixements matemàtics de diferents escoles gregues i es demostren algunes proposicions geomètriques que es poden interpretar en termes trigonomètrics. Aquesta obra, que es creu que podria ser col·lectiva, és una de les més editades, després de la Bíblia, i és una de les que més influència cultural ha exercit al llarg de la Història de la Ciència. Durant molts segles, va ser emprada com a llibre de text a les universitats i va influir extraordinàriament en els grans autors de les revolucions científiques com ara Galileu Galilei, Isaac Newton i altres.

Els *Elements* consten de tretze llibres: els sis primers dedicats a la geometria plana, els tres següents a l'aritmètica (o teoria de nombres), el desè que tracta dels incommensurables i els tres últims que tracten de la geometria de sòlids.<sup>3</sup> Pel que fa a l'estil de l'obra podem qualificar-lo d'axiomàtic i rigorós. Cada llibre té la mateixa estructura, primer els axiomes i/o postulats, seguidament les definicions i després, les proposicions, cadascuna amb la seva demostració. Es demostren tots els resultats a partir d'hipòtesis clares i de propietats explícitament establertes tot anotant en el marge les proposicions i definicions que s'empren.

A l'obra d'Euclides s'hi troben algunes proposicions, com ara la que correspon al que actualment coneixem com a teorema de Pitàgores (*Elements*, 47, I), fonamental per a la construcció de les taules de cordes que van marcar els inicis de la trigonometria sistemàtica. També conté el que avui anomenem teorema del cosinus i que s'utilitza en el primer curs de Batxillerat per a la resolució de triangles qualssevol, tot i que en

---

<sup>3</sup> Els quatre primers (I-IV) s'atribueixen als pitagòrics, el cinquè i el sisè són deguts a Èudox. Els VIII-IX són també dels pitagòrics. El X és degut a Teeteto. El llibre XI procedeix de l'escola Jònica. El XII té diversos precursors però el mètode d'exhaustió que s'hi inclou i que és el que permet demostracions rigoroses, és d'Èudox. Finalment, el llibre XIII és obra de Teeteto. Per a més informació, vegeu Dou (1986: 68).

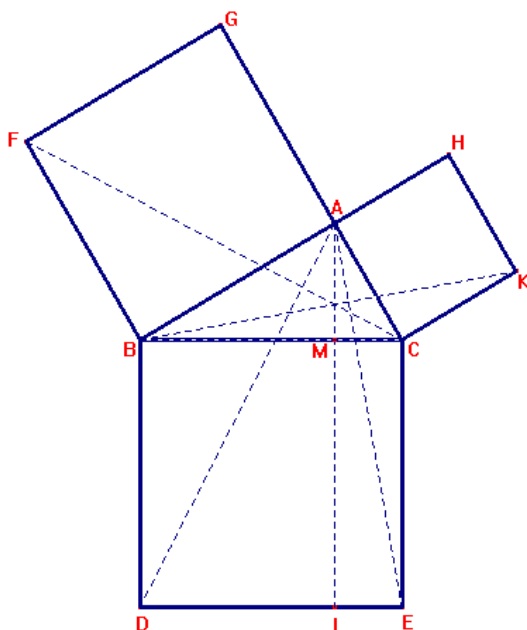
els *Elements* està formulat amb llenguatge geomètric i es distingeix entre triangles obtusangles (*Elements*, 12, II) i acutangles (*Elements*, 13, II).

### 3. Activitat de classe: la demostració del Teorema de Pitàgores

L'enunciat de la proposició (Prop. 47, I) és:

*En els triangles rectangles, el quadrat sobre el costat que correspon a l'angle recte és igual als quadrats sobre els costats que formen l'angle recte.*<sup>4</sup>

La demostració d'Euclides es basa en comprovar que el quadrat BDEC construït sobre la hipotenusa BC és la suma dels quadrats GB i HC construïts sobre els catets BA i AC, respectivament



Dibuix original que il·lustra la Proposició 47, I dels *Elements* d'Euclides

En el text per a l'alumnat, es parteix del dibuix original d'Euclides i es segueix el seu raonament amb l'ajuda de nous dibuixos que s'han construït a partir de l'inicial. Es tractarà de veure que els dos paral·lelograms BL i CL, que formen el quadrat BDEC, són iguals als quadrats respectius GB i HC.

El raonament per a demostrar que el paral·lelogram BL és igual al quadrat corresponent GB es desenvolupa en quatre etapes:

a) Els triangles ABD i FBC són iguals, ja que tenen iguals dos costats i l'angle comprés entre ells.

- b) El paral·lelogram BL és el doble que el triangle ABD, ja que tenen la base i l'altura iguals.
- c) El quadrat GB és el doble que el triangle FBC, perquè tots dos tenen, com en el cas anterior, la mateixa base i la mateixa altura.
- d) El paral·lelogram BL i el quadrat GB són iguals, ja que ho són els dos triangles amb els que s'han comparat.

Anàlogament es demostra que el paral·lelogram CL és igual al quadrat HC considerant els triangles AEC i BCK.

Per tant, el quadrat BDEC, que és la suma dels paral·lelograms BL i CL, és igual a la suma dels quadrats GB, HC fet que demostra el teorema de Pitàgores.

El material del que disposen els alumnes consisteix en deu fulls amb dibuixos que ajuden a entendre el raonament propi dels *Elements*. (Vegeu Annex 1). Es parteix del dibuix original de l'obra i s'il·lustren els quatre passos del fil conductor amb noves figures mitjançant les quals es guia els alumnes a través del raonament geomètric, al qual no estan habituats. De fet, en el currículum de 3r i 4t de l'ESO es dona molta importància a les relacions numèriques, algebraiques i funcionals oblidant, massa sovint, el raonament geomètric que queda relegat a cursos més elementals.

Al llarg de la primera classe s'explica el raonament geomètric de la demostració d'Euclides i els alumnes poc a poc refan dibuixos, completen frases i, finalment, escriuen i dibuixen de nou els passos de la demostració. És la seva demostració perquè l'han construïda ells mateixos, seguint les pautes del dossier. Per a reconstruir tota la demostració del teorema han fet falta dues sessions, una per els raonaments i l'altra per completar la demostració. Els alumnes treballen per parelles i comenten entre ells els passos del raonament. El professor propicia que tothom treballi i procura que els alumnes avancin de forma autònoma. Al final, es recull en un petit treball tota la demostració del teorema: els passos seguits, les frases utilitzades, les fórmules i els dibuixos que sostenen el raonament a partir dels suggeriments i les pautes del dossier de treball. Es completa l'estudi presentant el personatge emmarcant-lo en el seu temps i analitzant les idees científiques de l'època grega.

---

<sup>4</sup> "In right-angle triangles the square on the side subtending the right angle is equal to the

Al principi de l'experiència, alguns alumnes es mostren una mica desconcertats pel fet de poder demostrar una fórmula sense haver d'efectuar operacions algebraiques complicades però, a mida que van avançant en la demostració, el mètode els sorprèn i, fins i tot, uns quants descobreixen la potència d'aquest raonament i s'entusiasmen. En general, els alumnes valoren positivament l'experiència i es mostren predisposats a fer més treballs en aquesta línia. Des del punt de vista del professorat ens complau la bona acollida que ha tingut aquesta activitat i ens duu a pensar que hem aconseguit un doble repte: dissenyar i aplicar una activitat d'aprenentatge original, diferent de les que habitualment es fan amb els alumnes i aconseguir que sigui el propi alumne qui construeixi el seu raonament.

---

squares on the sides containing the right angle.” (Euclides, 1956: 349).



#### 4. Conclusió

L'ús de textos històrics, com ara els *Elements* d'Euclides, és un dels recursos que es poden utilitzar per a millorar la transmissió i adquisició dels continguts matemàtics i també per a actuar de revulsiu en aquells casos en els quals manca motivació als alumnes.

De fet, la utilització a l'aula de textos històrics aporta a l'alumnat una nova visió de les idees matemàtiques i l'ajuda a assolir una formació més integral.

L'activat presentada es poden programar com a complement en un bloc de classes de trigonometria (4t d'ESO) però també es pot utilitzar en cursos més baixos, quan es resolen problemes relacionats amb el teorema de Pitàgores (2n o 3r d'ESO). Completar-ho amb un treball (com el que es comenta en l'annex 2) entorn als *Elements* d'Euclides obra fonamental dins l'evolució de les matemàtiques, permet que els alumnes s'apropin a una manera de treballar i a un model de raonament que ha tingut un paper clau en la història de les matemàtiques. Durant molts segles, aquesta obra va ser el paradigma de text científic que calia seguir, tant pel que fa a l'estructura amb què estava escrit (axiomes i/o postulats, definicions, i proposicions amb la seva demostració) com per a la utilització dels resultats que contenia (proposicions). Recordar als alumnes alguns dels científics posteriors que citen els *Elements*, com ara a Galileu Galilei o Isaac Newton, als quals segurament coneixen des d'àmbits no matemàtics, els ajudarà a copsar la rellevància d'aquesta obra en la història de la ciència.

La presentació dels *Elements* també possibilita que ens aproximem a la cultura grega des de la classe de matemàtiques, que els alumnes s'adonin que les matemàtiques i la seva història formen part del bagatge cultural d'un poble i d'una manera de pensar i raonar.

Finalment, remarquem que l'exemple presentat és especialment gratificant tant pel seu contingut com per la manera com es demostra el resultat, ja que és el propi alumnat qui aprèn utilitzant el seu raonament a imitació dels antics savis grecs.

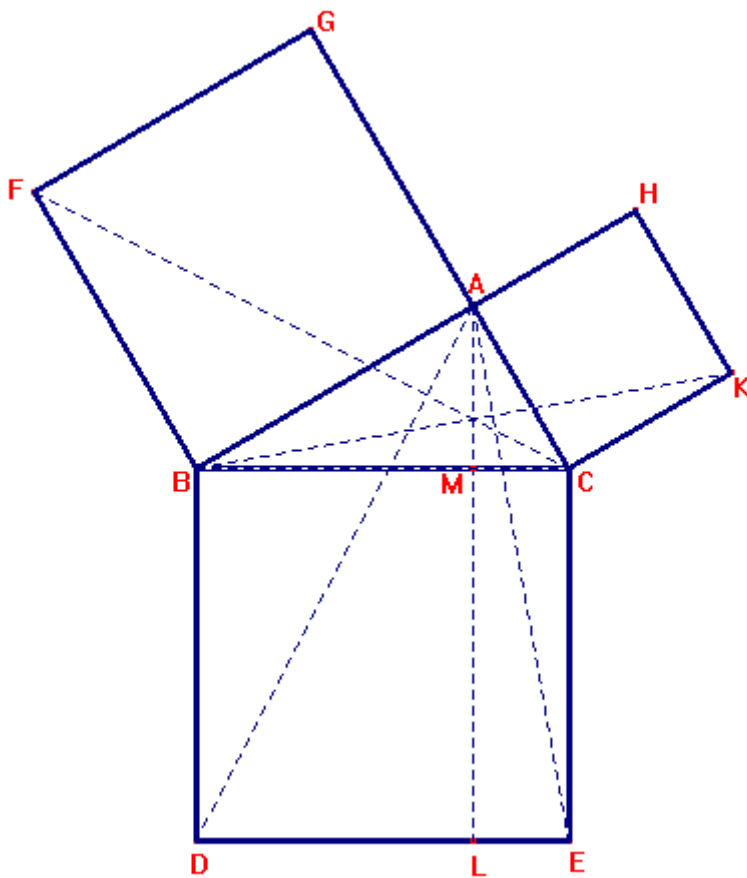
## 5. Referències

- Boyer, Carl B. (1986) *Historia de las Matemáticas*. Madrid: Alianza Editorial.
- Bulmer-Thomas, "Euclid, Life and Works", en Dictionary of Scientific Biography (Ch. Gillispie, ed. New York, Charles Scribner & Sons, 1970-1980, reimpressió 1981); vol. 4, pp. 414-437.
- Caveing, M. "Euclides" dins El saber griego, Jaques Brunschwig y Geoffrey Lloyd, (Ed) Madrid: Akal (Diccionarios Akal), 2000; pp. 479-485.
- Dou, Albert. (1986). "Euclides". A: Historia de la Matemàtica hasta el siglo XVII. Madrid: Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 61-78.
- Euclides, (1956). The Elements. Vol. 2. Nova York: Dover. [Edició anglesa de Thomas Little Heath].
- Euclidis *opera omnia*, vols. I-IV: Elementa. Edició de J.L. Heiberg. Leipzig, 1883-1886; revisió de E.S. Stamatis, Leipzig, Teubner, 1969-1973.
- Euclides, *Elementos*. Introducció de L. Vega; traducció de M<sup>a</sup>L. Puertas. Madrid, Gredos, I (Libros I-IV), 1991; II (Libros V-IX), 1994; III (Libros X-XII), 1996.
- Maor, Eli (1998) Trigonometric delights. Princeton: Princeton University Press.
- Romero, Fátima; Guevara, Iolanda; MASSA, M<sup>a</sup> Rosa (2007) "Els Elements d'Euclides. Idees trigonomètriques a l'aula". Actes de la II Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament. SCHCT. Barcelona.
- Zeller, Sister Maria Claudia (1944). The Development of Trigonometry from Regiomontanus to Pitiscus, Ann Arbor / Michigan, University of Michigan.
- <http://www.euclides.org/> Versió catalana i castellana de l'edició anglesa de Th. L. Heath (1921, The Elements; edic. disponible en <http://perseus.tufts.edu>) i d'alguns complements elaborats per D.E. Joyce.
- <http://divulgamat.ehu.es/weborriak/historia/mateospetsuak/Inprimaketak/Euclides.asp>  
Biografia d'Euclides. Autor: Luis Vega Reñón

Annex 1: Fulls de treball per a l'alumnat

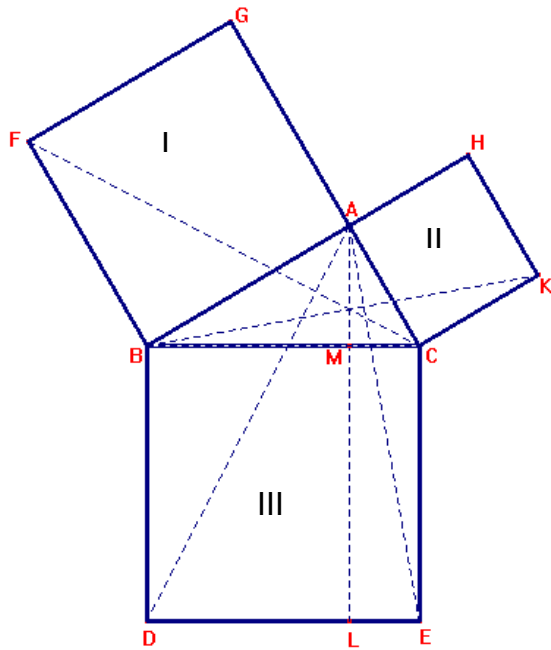
El Teorema de Pitàgores en els Elements d'Euclides

Proposició(I,47)



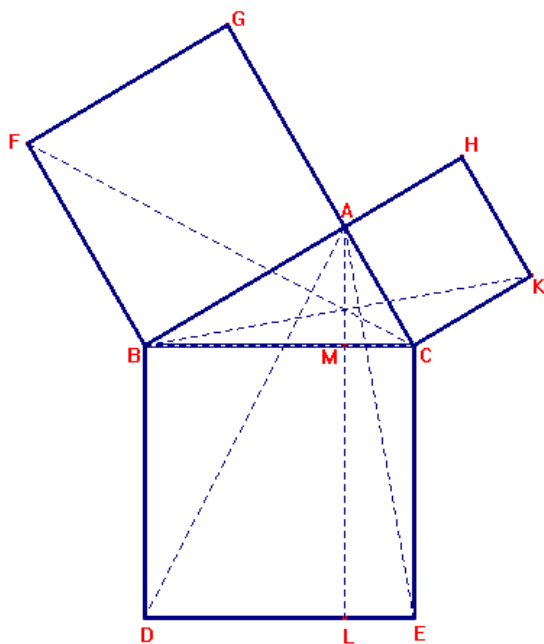
En els triangles rectangles, el quadrat sobre el costat que corresponent a l'angle recte és igual als quadrats sobre els costats que formen l'angle recte.

La proposició ens diu que  $I + II = III$

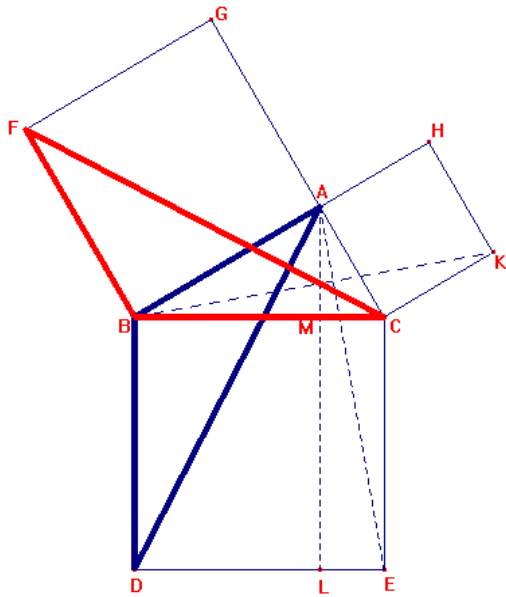


El fil conductor de la demostració:

el que vosaltres demostrareu és que el quadrat III està compost de dos rectangles, I i II  
i que aquest dos rectangles són iguals als quadrats respectius I i II



**Els triangles ABD i FBC són iguals:**



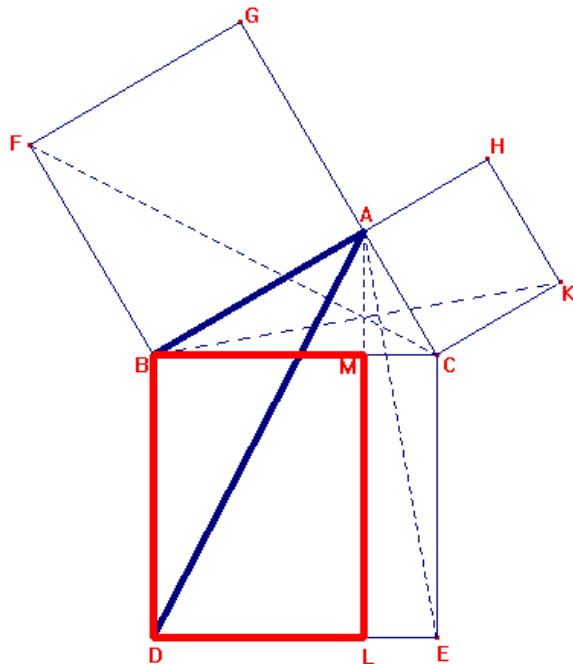
Pinteu els dos triangles amb tramats diferents.

Heu de veure que els dos triangles tenen dos costats iguals i l'angle comprès entre els dos costats iguals també igual, per tant són iguals:

- Localitzeu els costats que són iguals dos a dos i pinteu-los del mateix color.
- Desmunteu els triangles aquí sota per veure'ls millor per separat i amb la mateix orientació que en el dibuix de dalt.

- En aquests triangles torneu a pintar del mateix color els costats iguals.
- Descomponeu l'angle entre els dos costats iguals en un recte i l'angle igual.

**El paral·lelogram BL (rectangle MBDL) és el doble del triangle ABD:**



**El rectangle i el triangle tenen la mateixa base:**

- Encareu-vos el dibuix de manera que la base sigui la mateixa per a les dues figures.
- Escriviu la paraula “base” en el costat que correspongui

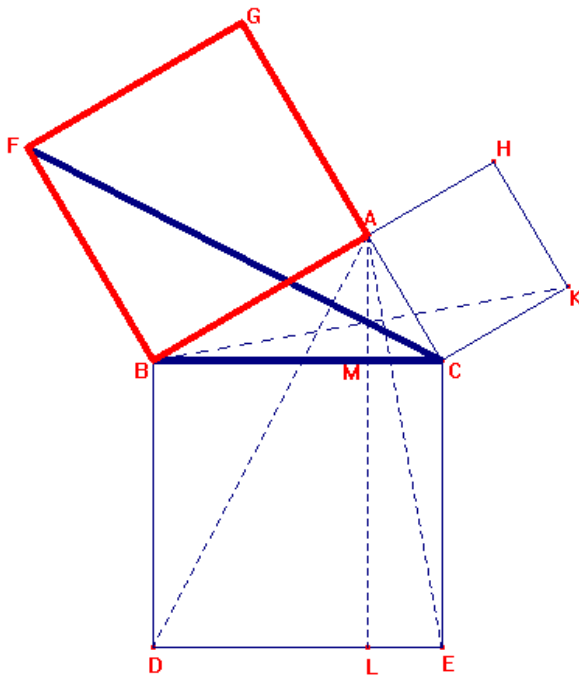
**El rectangle i el triangle tenen la mateixa altura:**

- Localitzeu l'altura del rectangle i del triangle, escriviu la paraula “altura” al costat. Com són l'altura del rectangle i del triangle?

**Conclusió:**

- En aquestes condicions: bases iguals i altures iguals, quina relació hi ha entre l'àrea del triangle i del rectangle?

**El quadrat GB és el doble del triangle FBC :**



El raonament és igual al que heu fet amb el rectangle i el triangle de la pàgina anterior.

**El quadrat i el triangle tenen la mateixa base:**

- a) Encareu-vos el dibuix de manera que la base sigui la mateixa per a les dues figures.
- b) Escriviu la paraula “base” en el costat que correspongui.

**El quadrat i el triangle tenen la mateixa altura:**

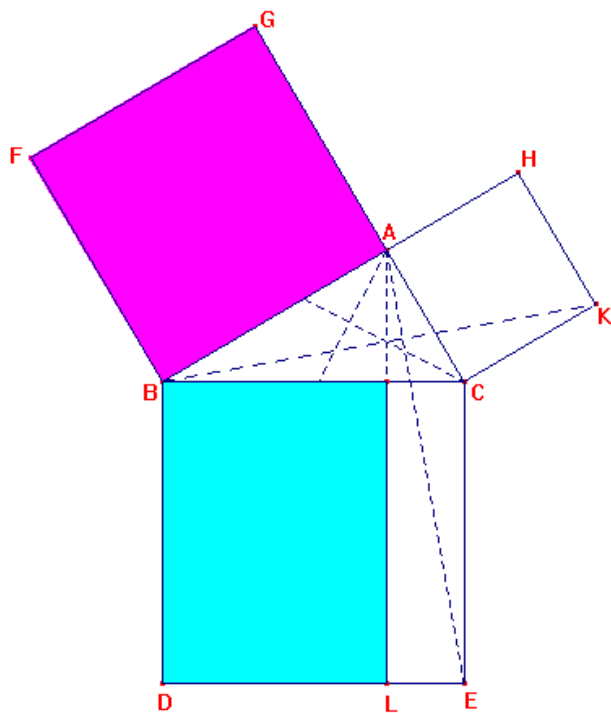
- c) Localitzeu-la i escriviu la paraula “altura” al costat.

**Conclusió:**

En aquestes condicions, bases iguals i altures iguals,

L'àrea del quadrat és ..... de l'àrea del triangle

El paral·lelogram BL i el quadrat GB pintats són iguals:



Amb tot el que heu fet fins ara, quin és el raonament que us permet dir que el quadrat I és igual al rectangle I?

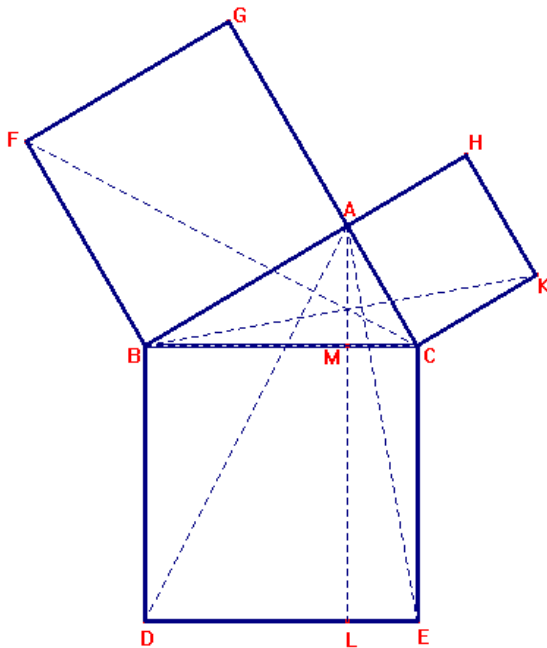
a) Expliqueu aquest raonament



Ara hem de seguir els passos equivalents per veure que el quadrat II és com el rectangle II (pàgina 2)

Recordeu,

**heu de trobar en el dibuix els dos triangles que seran iguals i que us han de servir per a comparar després el quadrat II amb el rectangle II.**



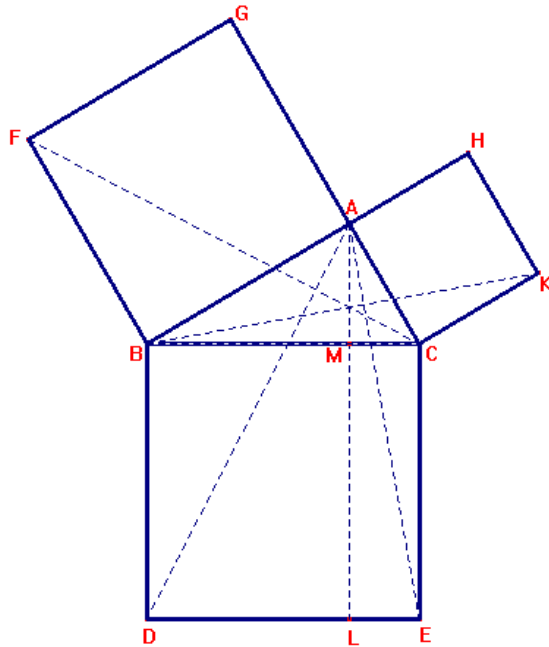
a) Localitzeu els triangles en el dibuix i pinteu-los com abans, el mateix color per als dos costats iguals

b) Traslladeu els triangles aquí sota per separat i amb la mateixa orientació que al dibuix inicial.

c) Pinteu els costats iguals del mateix color i descomponeu l'angle que ha de ser igual a un recte més l'angle igual.

Ara heu de veure que un triangle és la meitat del rectangle II i l'altre triangle és la meitat del quadrat II.

**Un triangle és la meitat del rectangle II**



a) Localitzeu en el dibuix el rectangle i el triangle dels que estem parlant i repasseu amb un color els seus contorns. De quin triangle i de quin rectangle estem parlant? Indica'l amb els noms dels vèrtexs.

El triangle .....

El rectangle .....

b) Encareu-vos el dibuix convenientment perquè la base sigui un costat comú al rectangle i al triangle.

c) Escriviu la paraula "base" en el dibuix.

El costat que fa de base és Indiqueu el costat amb el nom dels vèrtexs.

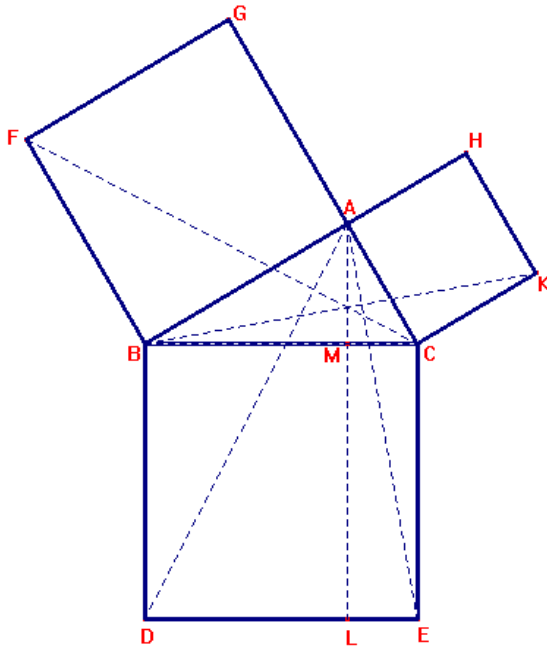
La base de les dues figures és .....

d) Localitzeu l'altura i escriviu la paraula "altura" en el costat corresponent.

L'altura de les figures és .....

**Conclusió: el triangle és la meitat del rectangle.**

**Un triangle és la meitat del quadrat II**



e) Localitzeu en el dibuix el quadrat i el triangle dels que estem parlant i repasseu amb un color els seus contorns. De quin triangle i de quin quadrat estem parlant? Indica'l amb els noms dels vèrtexs.

El triangle .....

El quadrat .....

f) Encareu-vos el dibuix convenientment perquè la base sigui un costat comú al quadrat i al triangle.

g) Escriviu la paraula “base” en el dibuix.

El costat que fa de base és Indiqueu el costat amb el nom dels vèrtexs.

La base de les dues figures és .....

h) Localitzeu l’altura i escriviu la paraula “altura” en el costat corresponent.

L’altura de les figures és .....

**Conclusió: el triangle és la meitat del quadrat.**

Amb tot el que teniu fins ara, quin és el raonament que us permet dir que el quadrat II és igual al rectangle II?

*Escriviu aquí el vostre raonament.*

Torneu a l'inici, ha quedat demostrat el teorema?

*Expliqueu-ho aquí*

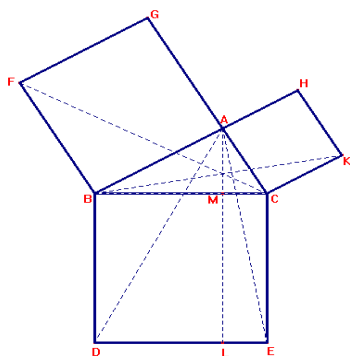
## Annex 2: Valoració de l'activat

### El teorema de Pitàgores en els Elements d'Euclides

Aquesta activitat es va realitzar amb un grup-classe de 4t d'ESO de l'IES Badalona VII, dins de la programació del curs 2004-05 amb l'objectiu d'estudiar el raonament geomètric en els *Elements* d'Euclides. La idea era doble, d'una banda presentar l'obra d'Euclides i de l'altra treballar el raonament geomètric, de vegades una mica oblidat a les nostres aules tot i que l'alumnat, habituat al món de la imatge, aviat se sent còmode amb aquest tipus de raonament.

A partir de la demostració de la Proposició 47 del llibre I: En els triangles rectangles, el quadrat del costat corresponent a l'angle recte és igual als quadrats dels costats que constitueixen l'angle recte, s'havia elaborat un material per a l'aula que pretenia fer seguir a l'alumnat el raonament geomètric d'aquesta demostració. El material consta de 10 fulls amb dibuixos que visualitzen el raonament geomètric propi dels *Elements*. (Vegeu l'Annex 1)

A partir d'un dibuix únic que es va repetint, amb petites variacions tota l'estona,



s'aconsegueix que l'alumnat practiqui el raonament geomètric.

Paral·lelament es van realitzar una sèrie d'activitats complementàries: recerca d'informació a internet sobre la biografia d'Euclides i els Elements.<sup>5</sup>

---

<sup>5</sup> Vegeu informació sobre espais web a les Referències.

Treball realitzat per l'alumnat: El teorema de Pitàgores en els Elements d'Euclides

Guió del treball:

Euclides, situació en el temps i l'espai.

Els Elements, contingut dels XIII llibres.

El Teorema i la demostració dels Elements.

Valoració de les dificultats:

- a) Biografia d'Euclides: calia fer-los restringir les "grans frases" que trobaven, primer pel seu compte i després a la pàgina esmentada. Hem fet buscar en un mapa on era Alexandria.
- b) El resum dels XIII llibres dels Elements: preguntaven sobre termes que desconeixien i que apareixen en el resum dels continguts dels XIII llibres. Definicions, postulats, proposicions, àlgebra geomètrica, magnituds commensurables i incommensurables, teoria eudoxiana, ....

c) La demostració:

Com ho hem treballat: dues sessions, la primera amb mig grup<sup>6</sup> i la segona amb tot el grup sencer. El primer dia vam arribar fins a la plana 4/5. El segon dia, tots junts la resta. L'últim full potser va ser molt ràpid.

Pàg 3: problemes al descompondre un angle en un recte i un altre. No ho sabien visualitzar i a més els despistava que en un angle el recte era el de l'esquerra i en l'altre el recte era el de la dreta. Vam acabar assenyalant a la pissarra amb la cantonada d'un full on era l'angle recte.

Pàg 4: problemes per veure què és l'altura del triangle ABD. Vam acabar dibuixant el triangle a la pissarra, comparar-lo a una escala recolzada a la paret i veient a quina alçada arribava. Després aquesta alçada calia traslladar-la des del vèrtex A al vèrtex B per acabar veient que era realment BM.

Pàg 5: la mateixa dificultat per veure que l'alçada del triangle és AB.

Pàg 6: algun dels alumnes més avantatjats va fer l'explicació oral de que si havíem comparat triangle amb triangle i cada triangle amb el corresponent quadrat o rectangle podíem dir que es complia el que deia la frase inicial del full.

Pàg 7: era una mica dur localitzar els triangles. Algun alumne parlava del triangle ALE i calia fer-li veure que aquest triangle no li serviria de res, perquè es tractava de comparar amb el rectangle MCEL i calia que tinguessin alguna cosa en comú.

---

<sup>6</sup> Aquell curs de les tres hores de matemàtiques setmanals, dues es feien amb el grup sencer i una amb el grup partit en una hora i a l'hora següent l'altre mig.

Pàg 8: Un triangle és la meitat del rectangle II. Tot i que pot semblar que posar la frase a l'inrevés (triangle meitat del rectangle, en lloc de rectangle doble que triangle) no vaig observar una dificultat afegida. Ho vam plantejar així perquè el que primer havia calgut localitzar i els era més difícil eren els triangles que calia comparar.

Tant a la pàgina 8 com a la 9 ara ja no ha estat tant complicat visualitzar les altures perquè ja ho havíem fet amb els triangles de la banda esquerra.

Pàgina 10: ha estat una mica costós que arribessin a lligar-ho tot però altre cop algun alumne ho ha fet oralment.

Valoració general de tota la demostració:

S'ha fet una mica pesada, ha durat dues classes en lloc d'una com ens ho havíem imaginat inicialment.

Ho fèiem oralment tots a l'hora i els alumnes tenen ritmes molt diferents, alguns acabaven molt ràpid i d'altres anaven molt a poc a poc.

En general, han quedat força sorpresos d'aquesta manera de fer matemàtiques, pintant, comparant figures, sense números. Hem comentat que era la manera de treballar dels grecs, amb arguments geomètrics. Fins i tot hem dit que resolien equacions de  $1^r$  i  $2^n$  grau sense números amb segments, hem quedat que quan repasséssim les equacions també faríem equacions a la "manera dels grecs"