***EL TEOREMA DE PITÀGORES A LA XINA ANTIGA***

**El capítol 9 (Gou gu) dels *Nou Capítols sobre els procediments matemàtics* (s. I)**

**ÍNDEX**


**1. Introducció** **3**

**2. Els antics textos matemàtics xinesos** **5**

**3. *Els Nou capítols sobre els procediments matemàtics* (*Jiuzhang suanshu*) 7**

**4. El capítol 9: Base (*gou*) i altura (*gu*)** **9**

**5. Algunes idees per a treballar a l'aula** **13**

**6. Conclusions** **16**

**7. Referències** **18**

**Annex 1. Tots els problemes del capítol 9** **20**

**Annex 2. Classificació dels problemes del capítol 9** **30**

**Annex 3: Prova del triangle rectangle** **32**

## 1. Introducció

En aquest element es presenta l'anàlisi del capítol 9 dels *Nou capítols sobre els procediments matemàtics* text de referència per a les matemàtiques xineses, com ho han estat els *Elements* d'Euclides per a les matemàtiques Europees. S'ha triat aquest capítol, dedicat a la resolució de problemes amb triangles rectangles perquè les situacions plantejades es resolen a través del Teorema de Pitàgores, en el text que es presenta el teorema s'anomena *Gou gu*[1] o per proporcionalitat geomètrica (semblança entre triangles), dos procediments l'abast de l'alumnat de l'ESO i recollits en el currículum oficial[2]. També cal dir que el Teorema de Pitàgores és un dels exemples de contextos històrics que s'inclouen en el nou currículum.[3] S'ha inclòs en un annex els enunciats de tots els problemes del capítol 9, així com alguns dels dibuixos que acompanyen l'edició del text estudiat[4].

Els problemes del capítol 9 es van treballar durant tres setmanes en un grup de 3r d'ESO de l'IES Badalona VII, durant el curs 2007-08. En aquella ocasió els procediments que es promovien entre l'alumnat numèrics i algebraics perquè connectaven amb els coneixements previs que havien adquirit en finalitzar el 2n d'ESO.

L'ús de procediments geomètrics més visuals, a l'estil dels que introdueixen els comentaristes dels *Nou capítols sobre els procediments matemàtics* seria l'alternativa als mètodes algebraics per als primers cursos de l'ESO, com s'analitza en l'apartat *3. algunes idees per a treballar a l'aula*.

L'estudi del capítol 9 dels *Nou capítols sobre els procediments matemàtics*, així com el disseny de l'activitat per a l'aula i els fulls de material per a l'alumnat pertanyen al fons del grup d'història d'ABEAM[5] i formen part del projecte "El naixement i desenvolupament de la trigonometria en les diferents civilitzacions" que investiga els

---

[1] Gou és el nom que s'assigna al catet més curt que sempre actua com a base del triangle rectangle i gu el més llarg que actua d'altura.
[2] 2n d'ESO: Utilització de raons i proporcions per a representar relacions entre quantitats; creació i ús d'arguments respecte la congruència, la semblança i la relació pitagòrica en diferents contextos; aplicació dels teoremes de Tales i Pitàgores en la resolució de problemes (Decret 143/2007 DOGC núm. 4915)
[3] 2n d'ESO, exemples de contextos històrics: Origen i utilització de les fraccions a l'antiguitat; les proporcions i la seva utilització; el Teorema de Pitàgores; mesures del meridià terrestre: d'Eratòstenes al naixement del metre; jocs d'atzar en diferents cultures. (Decret 143/2007 DOGC núm. 4915). Vegeu un altre annex d'aquest treball dedicat al Teorema de Pitàgores a la Grècia clàssica.
[4] Vegeu Chemla, 2005.
[5] Associació de Barcelona per l'estudi i aprenentatge de les matemàtiques.

orígens de la trigonometria. Aquest estudi, amb el títol "La trigonometria en els inicis de la matemàtica xinesa. Algunes idees per treballar a l'aula" va ser presentat pel grup a les IV Jornades sobre la Història de la Ciència en l'Ensenyament (Barcelona, 2007)[6], organitzades per la SCHCT[7].

Un any després, l'estudi es va ampliar amb la incorporació dels arguments geomètrics que justifiquen els algorismes numèrics descrits al text per a resoldre els problemes. Aquesta nova versió es va presentar a la XI Jornada d'ABEAM[8] (Barcelona, 2008) i a les V Jornades sobre la Història de la Ciència en l'Ensenyament, en el marc de la X Trobada d'Història de la Ciència i de la Tècnica (Lleida 2008) amb el títol "Procediments xinesos amb auxiliars visuals"[9]

[6] Vegeu les Referències en aquest mateix element.
[7] SCHCT: Societat Catalana d'Història de la Ciència i la Tècnica.
[8] Vegeu presentació a la web d'ABEAM: http://phobos.xtec.cat/fmoren25/moodle/, dins Materials XI Jornada d'ABEAM.
[9] Vegeu les Referències en aquest mateix element

**2. Els antics textos matemàtics xinesos**

Durant molt de temps l'Occident no ha parat prou atenció a la història de la matemàtica oriental i, en particular, de la matemàtica xinesa. Tanmateix, ja abans de la nostra era els xinesos conreaven les matemàtiques com s'ha evidenciat mitjançant els textos que, en el decurs dels darrers trenta anys, han estat analitzats per diferents especialistes (Li Yan; Du Shiran, 1987: 33–56; Jami, 1988; Volkov, 1994: 139–157; Cullen, 1996; Martzloff, 1997; Lloyd, 2001).

Un dels antics textos xinesos de matemàtica que podem consultar des de fa poc temps, en una excel·lent edició crítica bilingüe –xinesa i francesa- és el dels *Nou capítols sobre els procediments matemàtics*.

Els primers textos xinesos dedicats a les matemàtiques que ens han arribat daten de l'època de la dinastia Han (206 aC – 220 dC). La unificació de l'Imperi Xinès duta a terme per Qin Shi Huangdi (221 aC) i la posterior consolidació d'una administració centralitzada van afavorir la recopilació de coneixements en diferents àmbits del sabers i, en particular, dels relacionats amb el camp de les matemàtiques (Chemla, s/d: 76).

Al segle I dC es va compilar el text matemàtic que més influència posterior va tenir en la matemàtica xinesa, una obra que va ser objecte d'una important tradició de comentaris en els segles posteriors. Ens referim al *Jiuzhang suanshu* o *Els Nou capítols sobre els procediments matemàtics* (a partir d'ara *NC*) [10].

Aquest no és el text matemàtic xinès més antic que ens ha arribat, com en algun moment s'havia pensat (Li Yan; Du Shiran, 1987: 33) ja que el *Suanshushu* o *Llibre dels Procediments Matemàtics*, descobert el 1984 a una tomba que es va segellar l'any 186 aC, està considerat com el primer llibre xinès conegut dedicat estrictament a les matemàtiques. Es tracta d'una obra lligada a la gestió administrativa i la seva redacció va precedir alguns decennis la dels *NC* (Chemla; Shuchun, 2005: 3-4). D'altra banda, també durant la dinastia Han es va compondre el *Zhoubi suanjing o Clàssic*

[10] Val a dir que el títol, literalment, és "Els procediments matemàtics en nou capítols". Tanmateix, per tal d'evitar confusions (per exemple amb el *Llibre dels procediments matemàtics* o *Suanshushu*), s'ha adoptat el conveni de referir-se a aquest text de la manera que s'ha esmentat o simplement com a *Els Nou Capítols*. Potser la nomenclatura lligada a textos matemàtics clàssics occidentals ha fet que alguns historiadors s'hagin referit a aquesta obra com "Els Nou capítols de l'art matemàtica" (Li Yan; Du Shiran, 1987: 33).

*matemàtic del Gnòmon dels Zhou* (s.I aC), un text relacionat amb la topografia, l'astronomia i el calendari (Cullen, 1996).

Amb tot, el fet que els *NC* fos considerat un clàssic (*jing*) i que nombrosos matemàtics posteriors hi fessin referència ha fet que s'hagi comparat el paper que va desenvolupar aquesta obra a la Xina amb el que van exercir els *Elements* d'Euclides a l'Occident (Chemla, s/d: 76).

## 3. *Els Nou capítols sobre els procediments matemàtics* (*Jiuzhang suanshu*)

El text dels *NC* està estructurat, com el seu nom indica, en nou capítols. El capítol 1, “Camp rectangular”, està dedicat al càlcul de les àrees de terres cultivades i al procediment per operar amb fraccions; el capítol 2, “Cereals”, presenta problemes sobre proporcions (regla de tres) i, en particular, proporcions relacionades amb el procés d’intercanvi de cereals; el capítol 3, “Distribució per proporcions”, s’ocupa de problemes de repartiments proporcionals; el capítol 4, “Quant mesura l’amplada?”, planteja la qüestió en la que es dóna l’àrea o el volum d’una figura i cal trobar la longitud d’un costat. En aquest capítol també s’hi explica el mètode per trobar arrels quadrades i cúbiques; el capítol 5, “Discutir les obres”, tracta de diversos tipus de càlculs per fer construccions; el capítol 6, “Taxes justes”, fa referència a la distribució dels impostos segons la població i les distàncies entre els llocs; el capítol 7 “Excedent i dèficit” té relació amb l’ús de les regles de falsa doble posició per resoldre problemes de certa dificultat; el capítol 8 “Files rectangulars” (*Fangcheng*) presenta el procediment de resolució de sistemes d’equacions lineals (que avui utilitzem amb el nom de regla del pivot) i, finalment, el capítol 9, “Base i altura” (*Gougu*), que és el que ens interessa aquí, tracta sobre les múltiples aplicacions de l’anomenat “procediment de la base i de l’altura” (avui conegut com teorema de Pitàgores) que s’enuncia en forma d’algorisme. També apareix en aquest capítol alguna equació de segon grau.

A cada capítol se succeeixen els problemes amb una estructura semblant. L’enunciat amb dades numèriques concretes i la demanda de noves mesures o quantitats relacionades amb la situació plantejada. A continuació les respostes i després una breu descripció de l’algorisme de càlcul per a trobar les solucions. El procediment descrit pretén ser una generalització, dóna una breu idea al lector dels càlculs que hauria de fer per a resoldre situacions semblants amb unes altres dades però no justifica el procediment de càlcul. La justificació la introduiran els comentaristes del text clàssic en les successives edicions.

El primer testimoni que designa els *NC* com un clàssic és el text del comentarista Liu Hui (263). Més tard, serà el comentarista Li Chunfeng (656) qui continuarà aquesta tradició. L’objectiu dels comentaristes dels *NC* era mostrar el procediment que conduïa a trobar el valor de les respostes en el text clàssic (Chemla; Shuchun, 2005: 27). Es tractava de demostrar la correcció dels algorismes emprats en la resolució de problemes fent explícit cada pas, explicant el significat de les operacions realitzades per elaborar el resultat final i establint que aquest resultat correspon a la qüestió formulada. Tot i que treballaven amb problemes concrets i aplicaven els algorismes a unes dades concretes, sovint feien referència al procediment emprat més que a l'obtenció del resultat.

En alguns casos, el comentarista Liu Hui canvia l'enunciat d'un problema del Clàssic sense canviar els valors numèrics per tal de facilitar la interpretació de cadascun dels passos que fa per mostrar la correcció de l'algorisme. En altres, es modifiquen els valors numèrics sense canviar la situació. Un dels exemples que il·lustren aquest darrer cas és un problema que proposa trobar el volum d'una piràmide truncada. El que pretén el comentador amb els nous valors és facilitar la descomposició de la figura en tres figures iguals. Apareix aquí un nou element de la pràctica matemàtica dels comentadors, que són els auxiliars visuals. S'ha de remarcar que als *NC* no es fa cap referència a figures ni a cap altra forma de visualització.

La idea de "demostració" subjacent en els comentaris dels *NC* difereix, doncs, considerablement del mètode axiomàtic deductiu dels *Elements* d'Euclides, que és pel món occidental el model per excel·lència de procediment demostratiu.

**4. El capítol 9: Base (*gou*) i altura (*gu*)**

El títol d'aquest capítol, íntegrament consagrat al triangle rectangle, pren el seu nom del primer dels procediments que es presenten, el que avui en dia coneixem com a Teorema de Pitàgores i que en el text s'anomena Procediment de la base i de l'altura. [11]

> BASE (*GOU*) I ALTURA (*GU*) ES MULTIPLIQUEN CADA UNA PER SI MATEIXES, SE SUMEN (ELS RESULTATS) I ES DIVIDEIXEN PER EXTRACCIÓ DE L'ARREL QUADRADA, EL QUE DÓNA ÉS LA HIPOTENUSA[12].

El 24 problemes del capítol 9 estan constituïts per dos blocs, el primer de l'1 al 12 i el segon del 13 al 24, tot i que el 24, pel seu enunciat i pel procediment de resolució seria més propi del primer (Chemla; Shuchun, 2005: 665)[13]. En els dos blocs, els primers problemes plantegen situacions geomètriques generals, sense context, però sempre amb valors numèrics concrets. En els problemes següents, l'enunciat situa un context "real" té context i aquest, un cop interpretat, duu a la situació inicial dels primers problemes sense context. En el primer bloc, els problemes de context tracten de canyes recolzades a la paret, submergides en estanys o de bastons que cal fer passar per una porta. En tots els casos cal trobar les dimensions, amplades, llargades, altures, etc., de manera que el procés sempre remet a la resolució d'un triangle rectangle pel procediment de la base i de l'altura. En el segon bloc, els primers problemes parlen de moviments de persones en direccions sud i est, i de la visualització d'objectes des d'aquestes posicions. Els darrers plantegen situacions que es resolen amb vistes realitzades amb l'ajuda de gnòmons o d'altres dispositius per a determinar distàncies o mesures inaccessibles. El procés duu a la resolució d'un triangle rectangle pel procediment de la *lü*. Pels antics matemàtics xinesos, dos

[11] Si bé la majoria de temes tractats en els *NC* apareixien en el *Llibre dels procediments matemàtics* (*Suanshushu*), els temes tractats en aquest capítol només els trobem anteriorment en el *Clàssic matemàtic del Gnòmon dels Zhou,* dedicat a l'astronomia, els calendaris i la cosmografia, elaborat també durant la dinastia Han. En el prefaci que Liu Hui fa a l'edició comentada dels *NC* (263), explica que en aquesta obra hi va trobar l'expressió "dobles diferències", en va buscar el significat i va escriure un comentari sobre aquest mètode que va ser afegit com apèndix en el *Gougu* dels *NC*. Cap al segle VII aquest apèndix es va separar dels *NC* i es va convertir en un treball independent, el *Clàssic matemàtic de l'illa marítima*. Els problemes que conté recorden els enunciats de la segona part del capítol 9 perquè es recolzen en vistes realitzades amb l'ajuda de gnòmons o d'altres dispositius per a determinar distàncies o mesures inaccessibles. Aquests problemes inspirats en l'astronomia i la topografia van esdevenir un clàssic en els tractats posteriors xinesos.

[12] Chemla; Shuchun, 2005: 705. Les citacions del text clàssic les indiquem en majúscules.

[13] En l'experiència a l'aula de 3r d'ESO (Ensenyament Secundari Obligatori) realitzada durant el curs acadèmic 2007-08, a l'IES (Institut d'Ensenyament Secundari) Badalona VII, es va constatar que el problema 24, atès el seu procediment de resolució, correspondria al primer bloc.

conjunts de quantitats, “estaven en *lü*,” quan la relació entre les quantitats del primer conjunt era la mateixa que la relació entre les quantitats del segon. En el cas que ens ocupa, aquest procediment consisteix a comparar el triangle donat amb un altre de semblant.

Malgrat que els 24 problemes s’agrupen en dos blocs, el corresponent *al procediment de la base i de l’altura* i el corresponent a la *proporcionalitat* o *lü,* un estudi més detallat dels diferents procediments i de les justificacions dels comentaristes permet constatar que tots tenen un fil conductor comú: el *procediment de recomposició de figures i conservació de les àrees*. En aquesta continuïtat hi tenen un paper rellevant els problemes 13 i el 14.

El problema 13, el primer del segon bloc és un problema amb context, molt semblant als que vindran després en aquest bloc, dues persones que partint d’un lloc comú caminen en direcció sud i est, respectivament, i després la primera persona va a buscar la segona caminant en direcció obliqua fins a trobar-la. En el procés per a resoldre el problema hi apareixen dos triangles rectangles, el real, del que només es coneix un costat (*a)*[14] i el triangle imaginat o auxiliar, el que li és *lü* o proporcional, del que es coneix *b* i *a+c*. Es resol el triangle auxiliar amb una de les variants de la primera part del *procediment de la base i l’altura* i després per la ***lü*** o *proporcionalitat* es resol el triangle real.

El problema 14, busca el quadrat inscrit en el triangle rectangle. El problema es resol per dos procediments: per *recomposció de figures* i per *lü o proporcionalitat*. A la resta de problemes d’aquest segon bloc, 16-23[15], tots ells amb context i resolts per *lü,* hi apareixen quadrats o rectangles inscrits en triangles rectangles, aquest fet és el que porta a afirmar que tots els problemes del capítol formen un tot, la *lü* o *proporcionalitat* és equivalent a la *recomposició de figures* quan s’utilitza en dos triangles que provenen d’inscriure un quadrat en un triangle rectangle.

[14] En la descripció dels triangles s’utilitza la nomenclatura de Karine Chemla, on a, b, c són respectivament els tres costats del triangle rectangle ordenats per dimensions; i seguint el conveni del text Clàssic, on no apareixien lletres, però el costat més petit s’anomena sempre base i el mitjà altura, independentment del paper que hi facin en l’enunciat del problema

[15] S’ha exclòs el 15 perquè és com una 2a versió del 14, inscriure un cercle en lloc d’un quadrat, en el triangle rectangle i que només està resolt per recomposició de figures.

Els tres primers problemes del capítol 9 plantegen els tres casos possibles de resolució d'un triangle rectangle, exemplificat amb la terna (3,4,5). S'enuncien, es dóna la resposta i, a continuació, el text inclou el procediment de la base i l'altura[16]. En l'edició de Chemla i Shuchun s'alterna el Clàssic amb els comentaris de Liu Hui i de Li Chunfeng. En aquest sentit Liu Hui escriu[17]:

> La base multiplicada per ella mateixa fa un quadrat vermell, l'altura per ella mateixa un quadrat blau-vert, i es fa de tal manera que es recomponen els uns amb els altres; partint del fet que es guarden els fragments que queden sense bellugar, es genera per reunió l'àrea del quadrat de costat la hipotenusa. Dividint aquesta per extracció de l'arrel quadrada donarà la hipotenusa.
>
> ALTRAMENT, L'ALTURA (*GU*) MULTIPLICADA PER ELLA MATEIXA, ES RESTA DE LA HIPOTENUSA MULTIPLICADA PER ELLA MATEIXA. ES DIVIDEIX EL QUE QUEDA PER L'EXTRACCIÓ DE L'ARREL QUADRADA, EL QUE DÓNA ÉS LA BASE (*GOU*).
>
> Li Chunfeng i els seus associats ho expressen: En aquest procediment, amb l'ajuda de les àrees (*mi*) de la base (*gou*) i de l'altura (*gu*), es genera per reunió l'àrea (*mi*) de la hipotenusa. El quadrat de costat de la base (*gou*) és a l'interior [del quadrat de costat l'altura (*gu*)], de fet la base (*gou*) és més curta que l'altura (*gu*). Si fem de manera que l'altura (*gu*) multiplicada per ella mateixa la restem de la hipotenusa multiplicada per ella mateixa, el que dóna és el quadrat de la base (*gou*). És per això que dividint pel mètode de l'arrel quadrada obtenim la base (*gou*).

Els comentaris de Liu Hui i Li Chunfeng descriuen figures geomètriques que no apareixen en el text; les utilitzen per a justificar els algorismes del Clàssic, a través del procediment de recomposició de figures i conservació de les àrees[18]. Diferents autors (Cullen, 1996: 206-216) (Chemla; Shuchun, 2005: 665) opten per reconstruccions semblants, on, fent servir la terminologia més emprada actualment, anomenen *a* la base, *b* l'altura i *c* la hipotenusa:

---

[16] Enunciat a l'inici d'aquest apartat.

[17] Com en l'edició comentada, s'indica amb majúscules el text Clàssic i en minúscules els comentaris de Liu Hui. Si els comentaris són de Li Chunfeng s'indica explícitament.

[18] Les figures geomètriques són els auxiliars visuals descrits al començament de l'apartat 2.

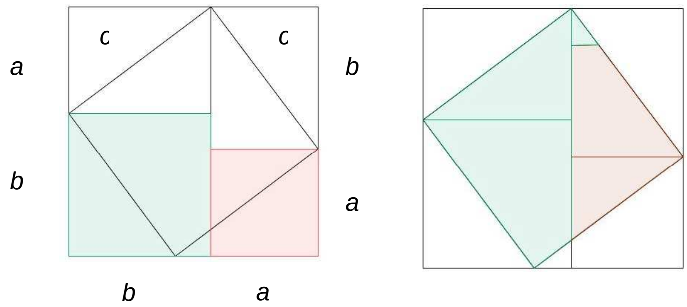



Figura 1. Figures geomètriques corresponents a la “primera figura fonamental”.

Al llarg de tot el capítol els comentaristes fan al·lusió a dues figures fonamentals[19], la primera de les quals s’utilitza per a justificar el procediment del triangle rectangle (problemes 1, 2, 3) i més endavant per a justificar el problema 11.

[19] L’expressió “primera figura fonamental” és un quadrat de costat *a*+*b* (suma de catets) que conté inscrit el quadrat de costat *c* (hipotenusa) (Chemla; Shuchun, 2005: 673). Val a dir que, tot i que no la tractem aquí, hi ha una “segona figura fonamental”, introduïda per Liu Hui en el problema 9.6, que consisteix en el quadrat de costat *c* (hipotenusa) on s’hi capiculen els quadrats de costats *a* i *b* (catets). Aquest auxiliar visual permet trobar els catets del triangle quan es coneix *c* (hipotenusa) i la diferència entre els catets (*b* - *a*).

## 5. Algunes idees per a treballar a l'aula

Els problemes del capítol 9 es van treballar durant tres setmanes en un grup de 3r d'ESO de l'IES Badalona VII, durant el curs 2007-08. L'objectiu d'aquesta experiència era presentar a l'alumnat una col·lecció de problemes contextualitzats sobre triangles rectangles on calia utilitzar diferents conceptes i procediments:

- el teorema de Pitàgores
- la semblança entre figures i la seva utilització per trobar costats desconeguts mitjançant les proporcions corresponents
- la resolució d'equacions de 1r grau
- el procediment de la substitució quan es treballa amb més d'una incògnita.

Alguns dels quals havien estat treballats en cursos anteriors i els altres es treballaven per primera vegada.

Altres qüestions conjunturals que van aparèixer en la resolució dels problemes del capítol 9 a l'aula van ser:

- les unitats de mesura utilitzades, que tot i ser desconegudes, seguien també el sistema decimal
- l'orientació referida als punts cardinals: l'est on nosaltres hi posaríem l'oest i el sud on hi posaríem el nord.

Introduir un context del passat i d'una altra cultura, on es resolen problemes que encara són actuals, mostra a l'alumnat la universalitat d'aquesta disciplina, alguns trets de la seva història, i diferents enfocaments per a tractar una mateixa situació.

En aquesta primera experiència de portar a l'aula els problemes del capítol 9, la resolució es va realitzar pels procediments numèrics i algebraics que encaixaven amb els coneixements previs que els alumnes havien adquirit a 2n d'ESO. Queda ara per estudiar la viabilitat i la conveniència de plantejar la resolució d'aquests problemes a l'aula utilitzant els procediments xinesos antics, és a dir, seguint les indicacions de l’algorisme clàssic o bé mitjançant el procediment de recomposició de figures i conservació de les àrees introduït pels comentaristes posteriors.

L’alumnat de 3r d’ESO que va resoldre els problemes del capítol 9 coneixia el teorema de Pitàgores, era prou hàbil en la manipulació de termes algebraics, i va resoldre els problemes mitjançant equacions. Va veure com les diferents situacions que se li plantejaven sempre el duien a un triangle rectangle del que coneixia algun costat o la diferència entre dos d’ells. A la segona part, problemes del 13 al 24, va haver d’afegir un procediment més, la proporcionalitat entre triangles semblants.

Pensant amb els primers cursos de l’ESO, quan el recurs algebraic és més una dificultat que una ajuda per a l’alumnat, els problemes del capítol 9 poden ser un bon recurs per a introduir la manipulació algebraica de la ma de la interpretació geomètrica. A través de construccions geomètriques, amb dibuixos de quadrats i rectangles de colors, i fins i tot retallant i reconstruint figures, l’alumnat podrà resoldre els problemes sense utilitzar per res el simbolisme algebraic, com ho feien els comentaristes en la justificació del algorisme Clàssic.

Després, un cop entesa la situació i amb el problema resolt, es pot introduir el llenguatge algebraic i mantenir el procediment geomètric com a justificació de les diferents manipulacions en el procés algebraic. L’alumnat podrà copsar així la potència d’aquest nou llenguatge veient que resol la mateixa situació d’una manera més ràpida i eficaç.

Aquest anar i tornar, veure com un mateix problema es pot resoldre per dues vies diferents i situar cada procediment en el moment històric en que esdevé, és una bona pràctica docent perquè l’alumnat conegui el desenvolupament de les matemàtiques i entengui que és una ciència en contínua evolució.

Es presenten a continuació el problema 6, com a mostra dels tipus de problemes del primer bloc (procediment del triangle rectangle) i el problema 16 com a mostra dels del segon bloc (semblança de triangles).

Problema 6

Suposem que tenim un estanc quadrat de 1 *zhang* de costat, en el centre del qual hi ha una canya que sobresurt 1 *chi* del nivell de l'aigua. Quan estirem la canya cap a la riba, queda just a la superfície. Es demana quant valen, respectivament, la fondària de l'estany i la longitud de la canya[20].

Resposta: (5, 12, 13)

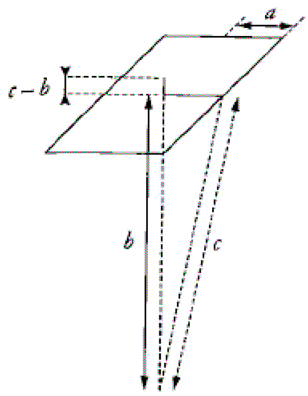



Figura 2. Il·lustració corresponent al problema 6.

Problema 16

Suposem que tenim una vila quadrada de 200 *bu* de costat i que al centre de cada costat hi ha una porta. A 15 *bu* de la porta est de la vila hi ha un arbre. Es demana a quants *bu* a l'exterior de la porta sud cal anar per veure l'arbre.

Resposta: 666 *bu* i 2/3 de *bu*

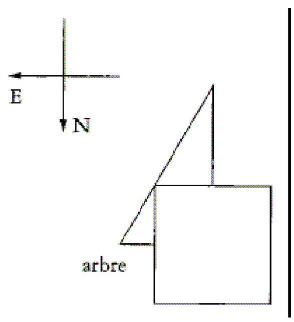



Figura 3. Il·lustració corresponent al problema 16.

[20] El dibuixos il·lustratius són actuals i es troben a la presentació de Chemla del capítol 9 (Chemla; Shuchun, 2005: 667-669).

## 5. Conclusions

La utilització explícita de textos històrics a l'aula és un recurs per a millorar l'aprenentatge de l'alumnat. En aquest cas, la recent traducció crítica al francès dels *Nou Capítols* és una eina per abordar l'estudi d'un text de referència en la matemàtica xinesa i, alhora, facilita la introducció d'altres procediments en la resolució de problemes, diferents als que estan habituats els alumnes.

L'experiència realitzada durant tres setmanes, en una classe de 3r d'ESO, ha evidenciat que, a través de la resolució dels problemes del capítol 9, els alumnes han combinat processos i continguts matemàtics que habitualment utilitzen per separat.

Pel que fa als processos:

- S'han hagut d'interpretar enunciats referits a situacions concretes mitjançant representacions adequades que permetin la comprensió del que es plantejava.
- S'ha treballat en grups de quatre i, per tant, s'ha afavorir la comunicació del pensament matemàtic per tal d'arribar a un consens sobre l'estratègia més adequada.
- S'han efectuat connexions entre diferents continguts matemàtics: la geometria i l'àlgebra.

En relació amb els continguts matemàtics pròpiament dits:

- S'ha compaginat l'aplicació del teorema del triangle rectangle amb la semblança de triangles.
- S'han resolt equacions per mètodes algebraics i per mètodes geomètrics a través del càlcul de superfícies.
- S'ha emprat el procediment de la substitució per resoldre problemes amb més d'una incògnita.
- S'ha consolidat el concepte de sistema d'unitats i s'ha practicat el canvi d'unitats
- S'ha posat de manifest la relativitat de la referència per situar els punts cardinals: N, S, E i O.

La introducció a l'aula de conceptes i procediments a partir de contextos històrics és una experiència força enriquidora tant per l'alumnat com pel professorat que la proposa. L'alumnat ha de desenvolupar unes capacitats que no es requereixen en activitats més estàndards, i ha de saber aplicar coneixements que ha après, sovint descontextualitzats, a situacions complexes. La majoria d'activitats que es plantegen requereixen la discussió en grup. La consegüent verbalització, a més d'afavorir la comprensió permet al professorat valorar habilitats dels alumnes que romandrien ocultes en altres tipus d'activitats.

## 7.Referències


Chemla, Karine (s/d) "Aperçu sur l'histoire des mathématiques en Chine Ancienne dans le contexte d'une histoire internationale", 71-90. Article on line:http://www.reunion.iufm.fr/dep/mathematiques/Seminaires/Resources/Chemla22.pdf

Chemla, Karine; Shuchun, Guo (eds.) (2005) Les Neuf Chapitres, le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires [edició crítica bilingüe], París, Dunod.

Cullen, Christopher (1996) Astronomy and Mathematics in Ancient China: The Zhou bi suan jing, Cambridge/New York, Cambridge University Press.

Cullen, Christopher (2009) "People and numbers in early imperial China". The Oxford Handbook of The History of Mathematics. Robson, Eleanor; Stedall, Jacqueline (Ed) New York: Oxford Univ Press Inc.

Dauben, Joseph.W (2007) "Chinese Mathematics" in The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam. A sourcebook. Victor J. Katz, Editor. Princeton University Press.187-384.

Guevara, Iolanda; Puig-Pla, Carles; Romero Fàtima (2008) "Procediments xinesos amb auxiliars visuals" Comunicació presentada a la VII Jornada sobre la Història de la Ciencia i l'Ensenyament dins de la X Trobada d'Història de la Ciència i de la Tècnica. Lleida.

Ho Peng Yoke (2000) Li, Qi and Shu. An introduction to Science and Civilitation in China. Dover Publications, Inc. Mineola, New York.

Jami, Catherine (1988) "Une histoire chinoise du « nombre π »", Archive for History of Exact Sciences, vol. 38, 1, 39-50.

Joseph, George Gheverghese (1996) La cresta del pavo real. Las matemáticas y sus raíces no europeas. Madrid. Pirámide.

Katz, Víctor J (ed) (2007) *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam: A Sourcebook.* Princeton: Princeton University Press.

Lam Lay Yong. (1994) "Jui Zhang Suanshu (Nine Chapters on the Mathematical Art): An Overview." Archive for History of Exact Sciences 47:1, pages 1-51.

Li Yan; Du Shiran (1987) *Chinese Mathematics*. A Concise History, Oxford, Clarendon Press.

LLoyd, Geoffrey E.R. (2001) Explorant la ciència antiga, Barcelona, Societat Catalana d'Història de la Ciència i de la Tècnica.

Man-Keung, Siu (2000) "An Excursion in Ancien Chinese Mathematics" in *Using History to Teach Mathematics. An International Perspective.* Katz, Victor J.(ed.) Washington.The Mathematical Association of America, 159-166.

Martzloff, Jean-Claude (1997) A history of Chinese mathematics, Berlin/Heidelberg/New York, Springer-Verlag.

Mikami, Yoshio (1974) The Development of Mathematics in China and Japan. New York: Chelsea.

Pla i Carrera, Josep (2009) *Liu Hui. Nueve capítulos de la matemática china.* Tres Cantos: Nivola.

Romero, Fátima; Puig-Pla, Carles; Guevara, Iolanda; Massa, Mª Rosa (2007). "La trigonometria en els inicis de la matemàtica xinesa. Algunes idees per a treballar a l'aula". Actes de la VI Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament. SCHCT. Barcelona (en premsa.)

Romero, Fátima; Puig-PlaA, Carles; Guevara, Iolanda; Massa, Mª Rosa (2008). "Els triangles rectangles a la matemàtica xinesa antiga" Comunicació presentada a la XI Jornada Didàctica d'ABEAM. Barcelona:

http://phobos.xtec.cat/fmoren25/moodle/course/view.php?id=13

Swetz, Franz (1997) "Enigmas of Chinese Mathematics" in Vita Mathematica. Cambridge University Press. pp. 87-97

Volkov, Alexei (1994) "Transformations of Geometrical objects in Chinese Mathematics and their evolution". Dins: Alleton, Viviane; Volkov, Alexei (eds.) Notions et perceptions du changement en Chine, París, Collège de France / Institut des Hautes Études Chinoises, vol. XXXVI, 133-148.

http://www.xtec.cat/estudis/eso/curriculum_2007/matematiques_eso.pdf

## Annex 1. Els problemes del capítol 9[21]

**unitats:** *zhang chi cun*[22]

**Problema 1**

Suposem que la base és de 3 *chi* i l'altura és de 4 *chi.* Es demana quant fa la hipotenusa

(3, 4, 5)

**Problema 2**

Suposem que la hipotenusa és de 5 *chi* i la base de 3 *chi.* Es demana quant fa l'altura.

(3, 4, 5)

**Problema 3**

Suposem que l'altura és de 4 *chi* i la hipotenusa de 5 *chi.* Es demana quant fa la base.

(3, 4, 5)

**Problema 4**

Suposem que tenim un tronc de fusta de secció circular de 2 *chi* 5 *cun* de diàmetre que en volem fer una planxa de secció rectangular, de manera que tingui 7 *cun* de gruix (base). Es demana quan tindrà de llargada (altura)

(7, 24, 25)

**Problema 5**

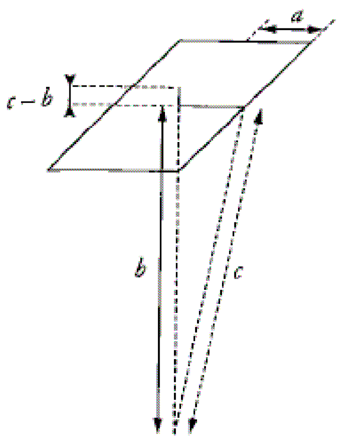
Suposem que tenim un arbre de 2 *zhang* d'altura i de 3 *chi* de perímetre. Una parra que creix des de la seva base rodeja 7 vegades l'arbre abans d'arribar a dalt de tot. Es demana quant val la longitud de la parra

(20, 21, 29)

[21] Els dibuixos que il·lustren els problemes pertanyen a l'obra citada (Chemla & Shuchun, 2005)
[22] Les unitats xineses funcionen en base deu, així 1 *chi* = 10 *cun, etc.*

**Problema 6**

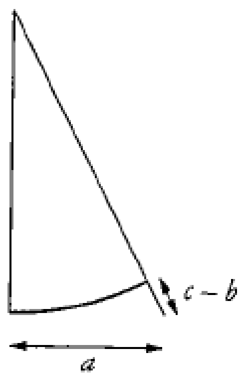
Suposem que tenim un estanc quadrat de 1 *zhang* de costat, en el centre del qual hi ha una canya que sobresurt 1 *chi* del nivell de l'aigua. Quan estirem la canya cap a la riba, arriba just a la punta. Es demana quant valen respectivament la profunditat de l'estany i la longitud de la canya




(5, 12, 13)

**Problema 7**

Suposem que a l'extrem d'un bastó hi pengem una corda que arrossega 3 *chi* damunt del terra. Si reculem tibant la corda ens quedem a 8 *chi* de la base del bastó quan arribem al final de la corda. Es demana quant val la longitud de la corda




1/6(48, 55, 73)

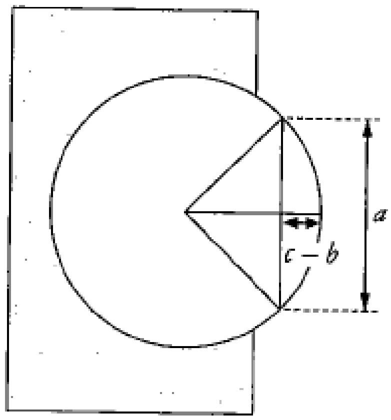
**Problema 8**

Suposem que tenim un mur de 1 *zhang* d'altura. Recolzem un bastó en el mur de manera que la part superior del bastó arribi a dalt del mur. Si el separem 1 *chi* cau a terra. Es demana quant val la longitud del bastó

5(20,99,101)

**Problema 9**

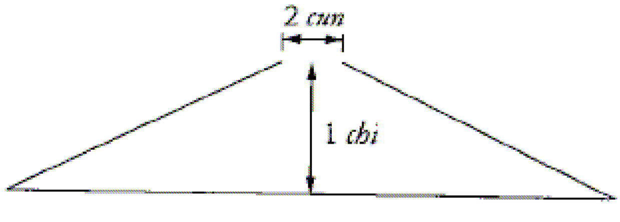
Suposem que tenim un tronc de fusta de secció circular enfonsat en un mur del que no coneixem les dimensions. Si amb l'ajuda d'una serra el serrem a una profunditat d'1 *cun* , el trajecte de la serra té una longitud d'1 *chi.* Es demana la longitud del diàmetre




(5, 12, 13)

**Problema 10**

Suposem que obrim els dos batents d'una porta fins a una distància d'1 *chi* i que d'aquesta manera queda una obertura de 2 *cun* entre les dues portes. Es demana quina és la longitud de cada batent de la porta.




½ (20, 99, 1001)

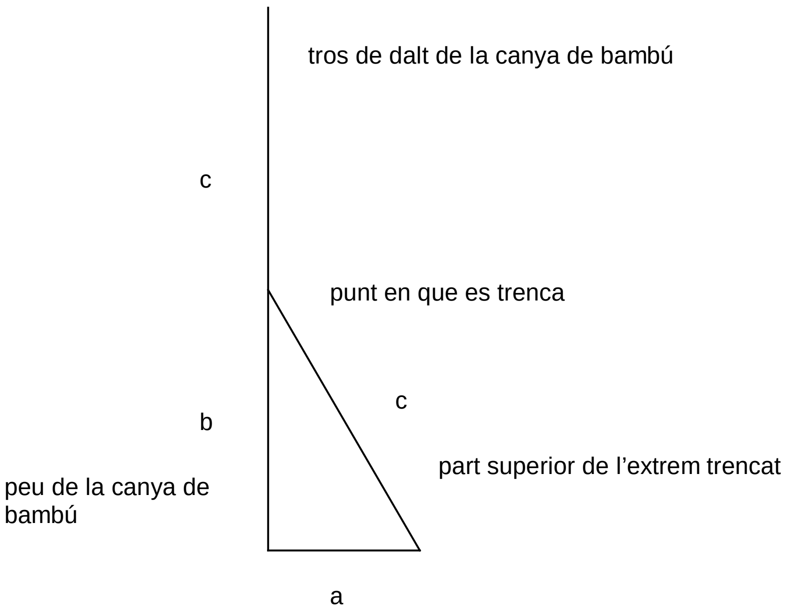
**Problema 11**

Suposem que tenim una porta d'un sol batent on l'altura sobrepassa l'amplada en 6 *chi* 8 *cun* i on dos angles oposats són a una distància d'1 *zhang* l'un de l'altre. Es demana quant valen l'altura i la longitud de la porta.

4(7,24,25)

**Problema 12**

Suposem que tenim un bambú de 1 *zhang* d'alt i que el seu extrem en trencar-se toca el terra a una distància de 3 *chi* de la base. Es demana a quina alçada s'ha trencat.

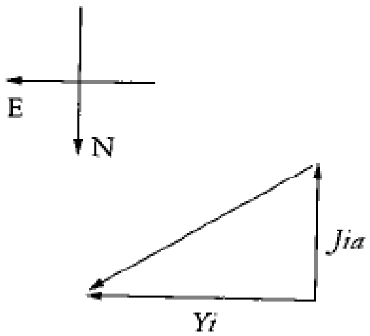



1/20 (60, 91, 109)

Mesures de camps i distàncies: 1 *li* = 300 *bu*

**Problema 13**

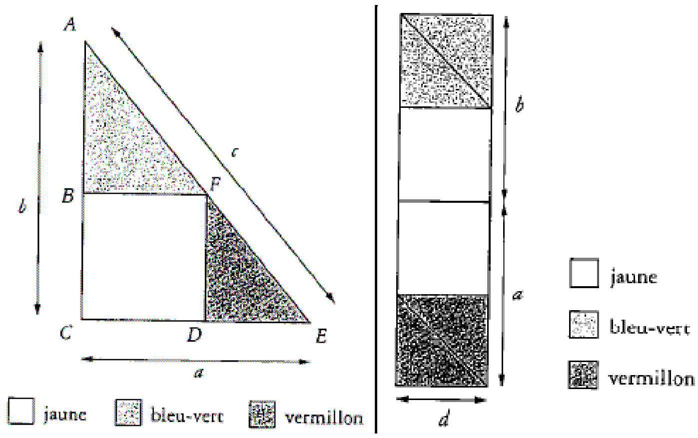
Suposem que dues persones estan de peu en un mateix lloc. Si el *lü*[23] del que camina *Jia* val 7, i el *lü* del que camina *Yi* val 3. *Yi* camina cap a l'est. *Jia* camina 10 *bu* cap al sud, després obliquament cap al nord-est i retroba *Yi.* Es demana quant caminen respectivament *Jia* i *Yi*




(10, 21/2, 29/2)

**Problema 14**

Suposem que la base (*gou)* val 5 *bu* i l'altura (*gu)*12 *bu*. Es demana quant val el costat del quadrat inscrit a l'interior de la base (*gou)*

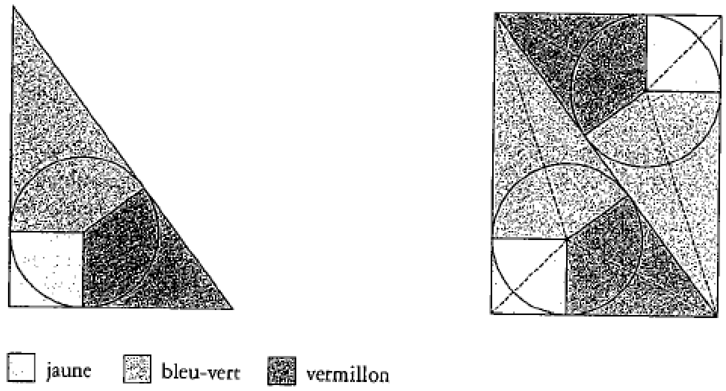



(5,12,13) i costat = 3

[23] *lü* indica una quantitat proporcional, és com si es treballés amb el triangle real i un imaginari proporcional o semblant al real

**Problema 15**

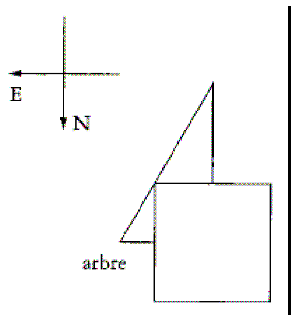
Suposem que la base (*gou)* val 8 *bu* i l'altura (*gu)* 15 *bu*. Es demana quant val el diàmetre del cercle inscrit a l'interior de la base.




(8,15,17) i diàmetre = 6

**Problema 16**

Suposem que tenim una vila quadrada de 200 *bu* de costat i que al centre de cada costat hi ha una porta. A 15 *bu* de la porta est de la vila hi ha un arbre. Es demana a quants *bu* a l'exterior de la porta sud cal anar per veure l'arbre.




666 2/3 *bu*

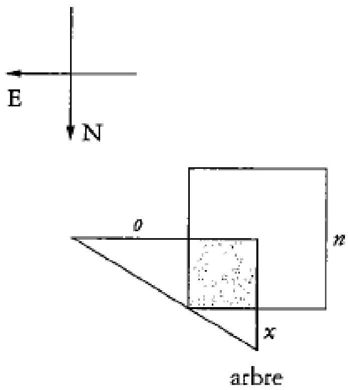
**Problema 17**

Suposem que tenim una vila, de est a oest fa 7 *li*, de nord a sud, 9 *li*, i que al centre de cada costat s'hi obre una porta. A 15 *li* de la porta est hi ha un arbre. Es demana a quants *bu* de l'exterior de la porta sud ens hem de posar per veure l'arbre.

315 *bu*

**Problema 18**

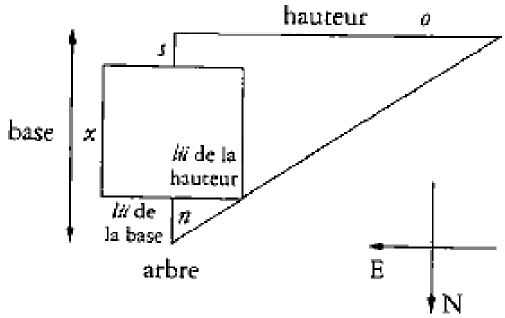
Suposem que tenim una vila quadrada de la que no coneixem la longitud del costat i que al centre de cada costat s'hi obre una porta. A 30 *bu* a l'exterior de la porta nord hi ha un arbre i que caminant 750 *bu* a l'exterior de la porta oest, veiem l'arbre. Es demana quant fa el costat de la vila quadrada




1 *li*

**Problema 19**

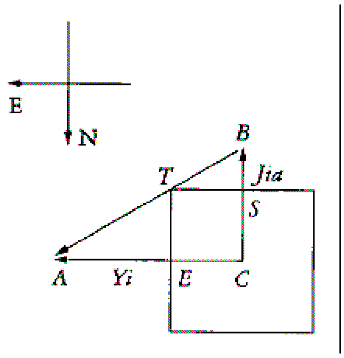
Suposem que tenim una vila quadrada de la que no coneixem els costats i que al mig de cada costat hi ha una porta. A 20 bu a l'exterior de la porta nord hi ha un arbre, i si després d'haver fet 14 bu a l'exterior de la porta sud, girem i caminem 1775 bu cap a l'oest, veiem l'arbre. Es demana quant fa el costat de la vila.




259 *bu*

**Problema 20**

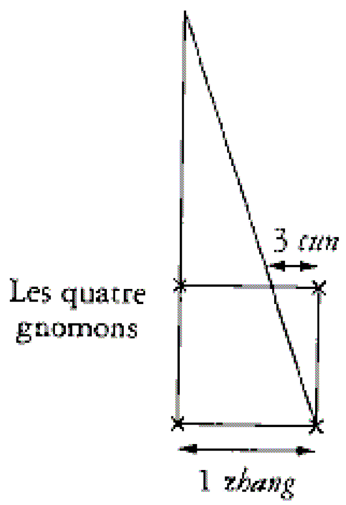
Suposem que tenim una vila quadrada de 10 li de costat, al centre de cada costat hi ha una porta, i que Jia i Yi parteixen tots dos del centre de la ciutat i surten d'ella: Yi surt per l'est; Jia surt pel sud, marxa per l'exterior no sabem quina quantitat de bu, després obliquament cap al nord-est, passa per la cantonada de la vila i es troba a Yi. Les lü de 5 pel que camina Jia i de 3 pel que camina Yi. Es demana quant caminen Jia i Yi respectivament




Jia surt de la porta sud, fa 800 *bu,* després de manera obliqua cap a nord-est camina 4887 ½ *bu* i es troba amb Yi. Yi camina cap a l'est 4312 ½ *bu*

**Problema 21**

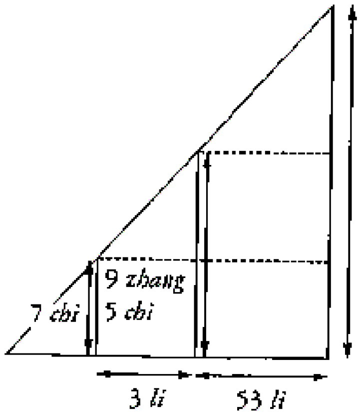
Suposem que tenim un arbre a una distància desconeguda d'una persona i que aquesta aixeca 4 gnoms distanciats entre ells d'1 zhang. Suposem que els dos gnoms de l'esquerra i el que veu estan alineats, quan s'ho mira des del gnom inferior esquerra i que penetra 3 cun del gnom davanter dret quan s'ho mira des del gnom inferior dret. Es demana quant val la distància de l'arbre a la persona situada en el gnom inferior esquerra.




33 *zhang 3 chi 3 1/3 cun*

**Problema 22**

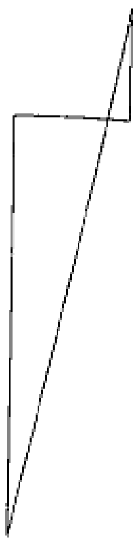
Suposem que tenim a l'oest d'un arbre, una muntanya de la que no coneixem l'alçada, que la muntanya està a una distància de 53 li de l'arbre, que l'arbre té una alçada de 9 zhang 5 chi i que si una persona es posa a 3 li a l'est de l'arbre, veu el dalt de l'arbre i el cim de la muntanya a la mateixa visual. Si l'ull de la persona està a una alçada de 7 chi, es demana quant val l'alçada de la muntanya




164 *zhang* 9 *chi* 6 2/3 *cun*

**Problema 23**

Suposem que tenim un pou de 5 chi de diàmetre del que desconeixem la profunditat i que plantem un bastó de 5 chi a la vora del pou, just al costat del pou. Si mirem, a partir de l'extrem del bastó el fons del pou la visual penetra 4 cun a l'interior del diàmetre. Es demana quant val la profunditat del pou.



5 *zhang* 7 *chi* 5 *cun*

**Problema 24**

Suposem que tenim una porta de la que no coneixem ni l'altura ni l'amplada i una barra de la que no coneixem la longitud. Transversalment falten 4 chi perquè la barra pugui sortir per la porta, longitudinalment falten 2 chi perquè pugui sortir i obliquament surt justa. Es demana quant fa la porta d'alçada, amplada i obliqua.

(6 *chi,* 8 *chi*, 1 *zhang)*

**Annex 2. Classificació dels problemes del capítol 9**

Estan agrupats en dos blocs: 1-12, 13-24

**El 1r bloc: el procediment del triangle rectangle**

Sense context,

1
2 En un triangle rectangle es coneixen 2 costats i es demana el 3r
3

Amb context:

4 S'introdueix un cercle i un rectangle inscrit, la diagonal és la hipotenusa del triangle rectangle. Es coneix el diàmetre del cercle (hipotenusa) i un costat, es demana l'altre.

5 S'utilitza implícitament un raonament per desplegament, un cilindre esdevé un rectangle. Es coneixen dos costats i es demana la hipotenusa

6
7 Es coneix un costat i la diferència entre els altres dos.
8 Si, dels dos desconeguts, un és la hipotenusa.
9 el procediment és de 1grau
10 Si els dos desconeguts són la base i l'altura el procediment
11 esdevé de 2n grau (11)
12

**El 2n bloc: semblança de triangles i en alguns s'hi afegeix el procediment del triangle rectangle**

Amb context, moviment i velocitat

13 Es coneix un costat, es demanen els altres dos però es dóna el lu del triangle, la velocitat del moviment. Semblança i procediment del triangle rectangle

Sense context,

14 Inscriure un quadrat en un triangle rectangle. Semblança de triangles en que el quadrat parteix el triangle.

15 Inscriure un cercle en un triangle rectangle. Descomposició en triangles rectangles i un quadrat de costat el radi del cercle inscrit. Procediment de reconstrucció d'àrees.

A partir d'aquí tots tornen a tenir context,

Moviment i orientació (N, S, E, O). Només semblança de triangles

16
17 Semblança entre els triangles petits que es generen amb un quadrat o un rectangle combinat amb un triangle més gran.
18

19 Aquí els triangles petits inclouen més incògnites, el procediment es complica una mica més i esdevé de 2n grau

Moviment i orientació + velocitat. Semblança i procediment del triangle rectangle

20 Com els quatre anteriors, afegint la lu o velocitat del moviment.
Utilitza el procediment del 13 i els del 16 al 18.

Gnòmons

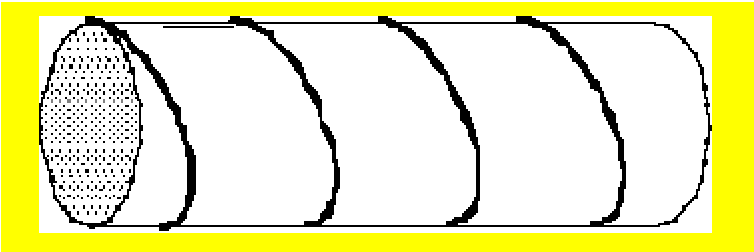
21 Mesures de distàncies, alçades o profunditats amb l'ajuda de gnòmons.
22 Només semblança de triangles
23

24 Es coneix la hipotenusa i la relació entre aquesta i els altres dos costats. No hi ha semblança de triangles, només procediment del triangle rectangle.

**Annex 3: Prova del triangle rectangle**[24]

**1. El cordill**

Enrotllem un cordill de manera regular al voltant d'un tub cilíndric. El cordill fa exactament 4 voltes al llarg del tub. El tub té una llargada de 12 cm i la longitud de la circumferència de la secció fa 4 cm.



Busqueu la longitud del cordill i expliqueu i mostreu tot el treball que feu.

**2. Les ombres**

L'ombra d'un arbre és de 2.5m, quan l'ombra d'una persona de 1.60 m d'altura és d'1 m. Calculeu l'alçada de l'arbre.

**3. L'antena**

El tensor d'una antena quan penja des de dalt de l'antena sense tensar-se sobrepassa en 3 m l'alçada de l'antena. Tensat a 8 m de la base de l'antena arriba just. Quina alçada té l'antena i quina longitud té el cable tensor?

**4. La corda**

Determineu la longitud d'una corda estesa entre una finestra i la finestra del davant del pis de sota de la casa de la casa d'enfront, sabent que la distància entre els dos pisos és de 4.50 m i l'amplada del carrer és de 6m.

[24] Prova realitzada per l'alumnat de 3r d'ESO que havia resolt els problemes del capítol 9

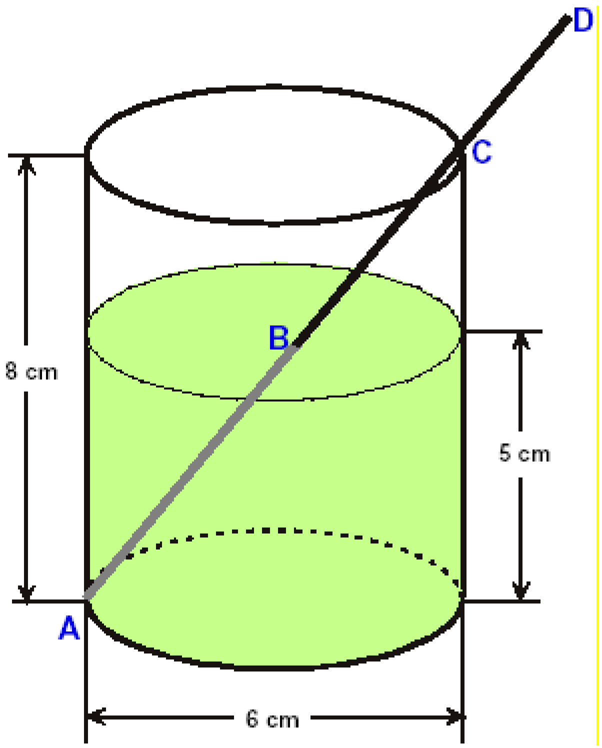
**5. El pal**

Un recipient cilíndric té 8cm d'alt i 6 cm de diàmetre.

El líquid dins del recipient arriba a una altura de 5 cm.

Un pal, AD, de 15 cm de llargada està submergit dins el líquid tal com es veu a la figura.

El pal esta posat de manera que la distància AC que correspon al tros de pal submergit sigui tan gran com sigui possible. El punt B és el punt en el qual el pal es fica dins del líquid.




Quina és la longitud del segment AB ? (Part del pal submergida)