

LA RESOLUCIÓ DE SISTEMES D'EQUACIONS A LA XINA ANTIGA
El capítol 8 (fangcheng) dels Nou Capítols sobre els procediments matemàtics (s. I)

ÍNDIX

1. Introducció	3
2. Justificació de la tria dels sistemes d'equacions i del context de la matemàtica xinesa antiga	4
3. Els Nou Capítols sobre els procediments matemàtics	6
4. El capítol 8: <i>Fangcheng</i>¹	10
5. El mètode matricial xinès de resolució d'equacions. Activitats per a l'aula	22
6. Referències bibliogràfiques	24
7. Annex: els enunciats dels 18 problemes	26

¹ Així com en altres capítols dels NC Karine Chemla, en fer la traducció al francès tradueix també el títol del capítol, en aquest cas degut a la complexitat del terme opta per donar explicacions diferents interpretacions al terme *fangchen* però opta per no traduir-lo

1.Introducció

La resolució de sistemes d'equacions de 1r grau és un dels continguts del currículum de 3r d'ESO. En els llibres de text habituals s'hi troben els diferents mètodes de resolució de sistemes (substitució, igualació i reducció) formant part de la col·lecció de tècniques de càlcul que comencen a esdevenir anacròniques en l'era de l'ordinador i la calculadora; cal esmerçar tants esforços per aconseguir que l'alumnat sigui hàbil en uns càlculs que li solucionen les TIC? Potser cal posar més èmfasi en plantejar i resoldre problemes amb tots els mètodes que tenim a l'abast, sense perdre de vista l'assaig i prova o dit d'una altra manera l'aproximació successiva al resultat que compleixi millor les condicions establertes en el problema.

Quan es proposen situacions o problemes que es poden resoldre mitjançant un sistema d'equacions es descarta sovint la possibilitat de trobar la solució mitjançant el tempteig o el càlcul mental. Quantes vegades no s'ha descartat la solució proposada no perquè sigui incorrecta sinó perquè no s'hi ha arribat a través del sistema corresponent sinó a partir de l'assaig i error?

D'acord amb aquestes consideracions, i formant part de la proposta general de desenvolupar alguns dels exemples de contextos històrics que conté el currículum de l'ESO es presenta aquest element que inclou:

- la justificació del tema triat des del punt de vista de la seva rellevància dins del currículum així com el fet de triar un context no occidental
- la presentació del context històric i de les fons utilitzades
- diverses propostes sobre com utilitzar el context per a confeccionar activitats per a l'aula
- referències bibliogràfiques generals i específiques del tema
- els enunciats dels 18 problemes que contenen situacions de sistemes de 2×2 , 3×3 , 4×4 i 5×5 fins i tot un de 5×6

2. Justificació de la tria dels sistemes d'equacions i del context de la matemàtica xinesa antiga

Més enllà del que diu el currículum oficial i del que contenen els llibres de text, els professors i professores, en decidir la seva programació d'aula, es fan preguntes sobre la conveniència i idoneïtat del tema i també sobre la manera de proposar les situacions d'aprenentatge més idònies per al seu alumnat:

- Cal que tothom arribi a resoldre sistemes d'equacions?
- Què és prioritari resoldre el sistema o arribar a plantejar el sistema a partir de la situació o problema plantejat?
- Quines situacions de la vida quotidiana plantegen problemes que s'han de resoldre amb sistemes d'equacions?
- Aquestes mateixes situacions es poden resoldre per altres mètodes més intuïtius, assaig i error, càlcul mental,..., és pertinent insistir en la resolució a través de sistemes?
- Quines dificultats plantegen els diferents mètodes de resolució dels sistemes d'equacions (substitució, igualació, reducció)?
- Té sentit ensenyar/aprendre a resoldre sistemes d'equacions amb mètodes manuals, amb llapis i paper, al s. XXI quan les calculadores i els ordinadors ho resolen?
- Com s'han resolt al llarg de la història els problemes que requereixen la resolució de sistemes d'equacions?
- Fins a quin punt, a partir del concepte de proporcionalitat ben assolit es pot transferir la idea a la resolució de sistemes?
- Quin o quins mètodes que proporciona la història pot ser adient per treballar a l'aula de manera que l'alumnat el pugi reproduir i fer-se'l seu?
- Què cal explicar de la història de la matemàtica per a fer viure a l'alumnat la necessitat de resoldre sistemes d'equacions?

Partint d'aquestes preguntes i de l'estudi del capítol 8 dels *Nou capítols sobre els procediments matemàtics*, (s. I) text clàssic de la matemàtica xinesa antiga, equivalent als *Elements* d'Euclides per a la matemàtica occidental, es presenta la proposta d'introduir el

context de la matemàtica xinesa antiga a l'inici, durant o després d'iniciar l'estudi dels sistemes d'equacions lineals.

Per què matemàtica xinesa? Durant molt de temps l'Occident no ha parat prou atenció a la història de la matemàtica oriental i, en particular, de la matemàtica xinesa. Tanmateix, ja abans de la nostra era els xinesos conreaven les matemàtiques com s'ha evidenciat mitjançant els textos que, en el decurs dels darrers trenta anys, han estat analitzats per diferents especialistes (Li Yan; Du Shiran, 1987: 33–56; Jami, 1988; Volkov, 1994: 139–157; Cullen, 1996; Martzloff, 1997; Lloyd, 2001).

Un dels antics textos xinesos de matemàtica que podem consultar des de fa poc temps, en una excel·lent edició crítica bilingüe –xinesa i francesa- és el dels *Nou capítols sobre els procediments matemàtics*. El capítol 8 “Files rectangulars” (*Fangcheng*) presenta el procediment de resolució de sistemes d'equacions lineals (que avui utilitzem amb el nom de regla del pivot).

El mètode es planteja a partir de problemes concrets, amb situacions reals, i amb dades numèriques, això afavoreix el pas del llenguatge parlat a la representació simbòlica, però a més la disposició matricial permet prescindir de l'àlgebra, en el sentit més usual del maneig d'equacions. A partir dels coeficients obtinguts, al llegir i interpretar la situació que s'ha de resoldre, s'utilitzen raonaments de proporcionalitat per anar eliminant coeficients fins arribar a les solucions, sense perdre de vista a cada pas el sentint de les operacions i de les expressions intermèdies. En resum, la informació de les dades que conté el problema s'escriu en forma de matriu i s'apliquen transformacions successives fins arribar a la diagonalització dels coeficients.

Finalment, el fet que en les matemàtiques occidentals les primeres referències al càlcul matricial es trobin molt temps després, és una bona ocasió per a plantejar a l'aula la universalitat de les matemàtiques i l'alternança en les diferents cultures i civilitzacions de la primacia dels descobriments. Ens referim a l'obra de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), tot i que els escrits on apareixen aquests termes no es va publicar fins a 1850 i van haver de ser redescoberts de nou mig segle més tard. Avui dia el mètode, que es troba en qualsevol llibre de batxillerat, duu el títol de mètode de Gauss, amb el que se li pot atribuir falsament a Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

3. Els Nou Capítols sobre els procediments matemàtics

3.1. Els antics textos matemàtics xinesos

Els primers textos xinesos dedicats a les matemàtiques que ens han arribat daten de l'època de la dinastia Han (206 aC – 220 dC). La unificació de l'Imperi Xinès duta a terme per Qin Shi Huangdi (221 aC) i la posterior consolidació d'una administració centralitzada van afavorir la recopilació de coneixements en diferents àmbits del saber i, en particular, dels relacionats amb el camp de les matemàtiques (Chemla, s/d: 76).

Al segle I dC es va compilar el text matemàtic que més influència posterior va tenir en la matemàtica xinesa, una obra que va ser objecte d'una important tradició de comentaris en els segles posteriors. Ens referim al *Jiuzhang suanshu* o *Els Nou capítols sobre els procediments matemàtics* (a partir d'ara *NC*)².

Aquest no és el text matemàtic xinès més antic que ens ha arribat, com en algun moment s'havia pensat (Li Yan; Du Shiran, 1987: 33) ja que el *Suanshushu* o *Llibre dels Procediments Matemàtics*, descobert el 1984 a una tomba que es va segellar l'any 186 aC, està considerat com el primer llibre xinès conegut dedicat estrictament a les matemàtiques. Es tracta d'una obra lligada a la gestió administrativa i la seva redacció va precedir alguns decennis la dels *NC* (Chemla; Shuchun, 2005: 3-4). D'altra banda, també durant la dinastia Han es va compondre el *Zhoubi suanjing* o *Clàssic matemàtic del Gnòmon dels Zhou* (s.l aC), un text relacionat amb la topografia, l'astronomia i el calendari (Cullen, 1996).

Amb tot, el fet que els *NC* fos considerat un clàssic (*jing*) i que nombrosos matemàtics posteriors hi fessin referència ha fet que s'hagi comparat el paper que va desenvolupar aquesta obra a la Xina amb el que van exercir els *Elements* d'Euclides a l'Occident (Chemla, s/d: 76).

² Val a dir que el títol, literalment, és "Els procediments matemàtics en nou capítols". Tanmateix, per tal d'evitar confusions (per exemple amb el *Llibre dels procediments matemàtics* o *Suanshushu*), s'ha adoptat el conveni de referir-se a aquest text de la manera que s'ha esmentat o simplement com a *Els Nou Capítols*. Potser la nomenclatura lligada a textos matemàtics clàssics occidentals ha fet que alguns historiadors s'hagin referit a aquesta obra com "Els Nou capítols de l'art matemàtica" (Li Yan; Du Shiran, 1987: 33).

3.2. Els Nou capítols sobre els procediments matemàtics (*Jiuzhang suanshu*)

El text dels *NC* és una col·lecció de 246 problemes agrupats en nou capítols, com indica el seu nom. Els 246 problemes i les seves solucions mostren que els matemàtics xinesos de l'època tenien accés a una gran varietat de fórmules d'àrees volums de les formes bàsiques així com als mètodes de resolució d'equacions i sistemes d'equacions en dos i tres incògnites. Utilitzaven un sistema de numeració decimal que incloïa fraccions decimals i, segons les dades que es tenen, van ser la primera societat que va utilitzar els nombres negatius en els seus càlculs.

The *Jiuzhang suanshu* no és un text teòric sinó un manual pràctic per arquitectes, enginyers, inspectors, topògrafs i comerciants. Els candidats a la funció pública de l'administració xinesa estudiaven aquest manual quan es preparaven per a les proves d'accés a la funció pública i d'acord amb els resultats es determinava si el candidat guanyava o no la plaça. Cadascun dels nou capítols conté una o més d'una regla per obtenir a les solucions dels problemes que es plantegen en aquell capítol. Els problemes estan directament relacionats amb la vida pràctica i reflecteixen el saber i les habilitats de la Xina antiga. (Katz, 2004)

El capítol 1, "Camp rectangular", està dedicat al càlcul de les àrees de terres cultivades i al procediment per operar amb fraccions; el capítol 2, "Cereals", presenta problemes sobre proporcions (regla de tres) i, en particular, proporcions relacionades amb el procés d'intercanvi de cereals; el capítol 3, "Distribució per proporcions", s'ocupa de problemes de repartiments proporcionals; el capítol 4, "Quant mesura l'amplada?", planteja la qüestió en la que es dona l'àrea o el volum d'una figura i cal trobar la longitud d'un costat. En aquest capítol també s'hi explica el mètode per trobar arrels quadrades i cúbiques; el capítol 5, "Discutir les obres", tracta de diversos tipus de càlculs per fer construccions; el capítol 6, "Taxes justes", fa referència a la distribució dels impostos segons la població i les distàncies entre els llocs; el capítol 7 "Excedent i dèficit" té relació amb l'ús de les regles de falsa doble posició per resoldre problemes de certa dificultat; el capítol 8 "Files rectangulars" (*Fangcheng*) presenta el procediment de resolució de sistemes d'equacions lineals (que avui utilitzem amb el nom de regla del pivot) i, finalment, el capítol 9, "Base i altura" (*Gougu*), que és el que ens interessa aquí, tracta sobre les múltiples aplicacions de l'anomenat "procediment de la base i de l'altura" (avui conegut com teorema de

Pitàgores) que s'enuncia en forma d'algorisme. També apareix en aquest capítol alguna equació de segon grau.

A cada capítol se succeeixen els problemes amb una estructura semblant. L'enunciat amb dades numèriques concretes i la demanda de noves mesures o quantitats relacionades amb la situació plantejada. A continuació les respostes i després una breu descripció de l'algorisme de càlcul per a trobar les solucions. El procediment descrit pretén ser una generalització, dóna una breu idea al lector dels càlculs que hauria de fer per a resoldre situacions semblants amb unes altres dades però no justifica el procediment de càlcul. La justificació la introduiran els comentaristes del text clàssic en les successives edicions.

El primer testimoni que designa els *NC* com un clàssic és el text del comentarista Liu Hui (263). Més tard, serà el comentarista Li Chunfeng (656) qui continuarà aquesta tradició. L'objectiu dels comentaristes dels *NC* era mostrar el procediment que conduïa a trobar el valor de les respostes en el text clàssic (Chemla; Shuchun, 2005: 27). Es tractava de demostrar la correcció dels algorismes emprats en la resolució de problemes fent explícit cada pas, explicant el significat de les operacions realitzades per elaborar el resultat final i establint que aquest resultat correspon a la qüestió formulada. Tot i que treballaven amb problemes concrets i aplicaven els algorismes a unes dades concretes, sovint feien referència al procediment emprat més que a l'obtenció del resultat.

En alguns casos, el comentarista Liu Hui canvia l'enunciat d'un problema del Clàssic sense canviar els valors numèrics per tal de facilitar la interpretació de cadascun dels passos que fa per mostrar la correcció de l'algorisme. En altres, es modifiquen els valors numèrics sense canviar la situació. Un dels exemples que il·lustren aquest darrer cas és un problema que proposa trobar el volum d'una piràmide truncada. El que pretén el comentador amb els nous valors és facilitar la descomposició de la figura en tres figures iguals. Apareix aquí un nou element de la pràctica matemàtica dels comentadors, que són els auxiliars visuals. S'ha de remarcar que als *NC* no es fa cap referència a figures ni a cap altra forma de visualització.

La idea de "demostració" subjacent en els comentaris dels *NC* difereix, doncs, considerablement del mètode axiomàtic deductiu dels *Elements* d'Euclides, que és pel món occidental el model per excel·lència de procediment demostratiu.

Aquests dos darrers apartats, 3.1 y 3.2, formen part de la comunicació "La trigonometria en els inicis de la matemàtica xinesa. Algunes idees per a treballar a l'aula" que el grup d'història d'ABEAM va presentar a *VI Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament* (novembre 2007) organitzat per la SCHCT (Societat Catalana d'Història de la Ciència i de la Tècnica).

4. El capítol 8: *Fangcheng*³

Per a tractar el que està barrejat així com el positiu i el negatiu⁴

Aquest capítol conté divuit problemes, sobre produccions de cereals, preus d'animals, i pesos d'ocells que requereixen la resolució de sistemes d'equacions lineals. El títol, *fangcheng*, fa referència al mètode matemàtic que s'explica a través dels primers problemes i que s'aplica després a tots el altres. En termes actuals, es podria dir que correspon al que avui utilitzem amb el nom de regla del pivot.

Dels divuit problemes, vuit corresponen a sistemes 2 x 2;

sis, a sistemes 3 x 3;

dos, a sistemes 4 x 4;

un, a un sistema 5 x 5.

Un altre, a un sistema amb 5 equacions i 6 incògnites, és el problema 13. En aquest darrer cas, la resposta ve donada per una sèrie de raons o proporcions, i això indica que l'autor apreciava la indeterminació del problema.⁵

El terme *Fangcheng*⁶

Aquest terme apareix al llarg de tota la matemàtica xinesa antiga i a partir d'ara, en la descripció del capítol, significarà **sistema d'equacions lineals**. Malgrat aquesta consideració és interessant fer un breu seguiment de l'ús d'aquest terme i dels seus diferents significats. A mitjans segle XIX es va començar a utilitzar per a designar simplement l'**equació**. Al llarg del s XX es va anar consolidant aquest significat, mentre que l'expressió xinesa corresponent a **sistema d'equacions lineals** es va anar imposant per a substituir el sentit inicial del terme *fangcheng*. El mot **equació** apareix a la Xina amb la introducció de les obres matemàtiques europees. Inicialment, al llibre *a'errebala suanfa* (*Algoritme de l'àlgebra*), publicat a l'inci de la dinastia Qing, es va traduir per **expressions iguals les unes a les altres** (*xiangdenshi*)

³ Així com en tots els altres capítols dels NC Karine Chemla, en fer la traducció al francès, tradueix també el títol del capítol, en aquest cas degut a la complexitat del terme opta per donar explicacions diferents interpretacions al terme *fangcheng* però opta per no traduir-lo

⁴ Comentari de Lui Hui

⁵ Franz Swetz, "Enigmas of Chinese Mathematics" , a *Vita Mathematica*, p. 87-97

Li Shanlan (1811-1882) i A. Wylie (1815-1887) van originar la confusió quan, a la traducció (1859) dels *Elements d'Àlgebra (Daishuxue)* de De Morgan (1806-1871), van utilitzar el terme **fangcheng** per a traduir el terme **equació**.

Més tard (1872), Hua Hengfang (1833-1902) i J. Fryer (1839-?) van traduir *El Tractat d'Àlgebra (Daishushu)* de J. Wallis (1616-1703). Van utilitzar per **equació** el que nosaltres podríem entendre per **expressió fangcheng (fangchengshi)**. Hua Hengfang va utilitzar el dos termes, **fangcheng** i **fangchengshi** a la seva obra *Xuesuan bitan (Conversacions al compàs de la ploma sobre l'aprenentatge de les matemàtiques)*. **Fangcheng** repren el significat inicial mentre que el segon tradueix el mot **equació**. Finalment l'any 1959, el *Shuxue mingci (Termes matemàtics)* publicat per la casa de les ciències (*Kexue chubanshe*) acabà per traduir **equació** per **fangcheng**. Així, en l'actualitat els matemàtics xinesos han oblidat el primer sentit del terme **fangcheng** (sistema d'equacions lineals, que és el correspon al capítol 8 dels NC)

Veiem l'origen del significat d'aquest terme. Les primeres referències les trobem en la dinastia Song. El matemàtic dels Song del Nord Jia Xian declara a *Huangdi jiu Zhang suanjing (Detalls sobre els procediments del Clàssic dels nou capítols sobre les matemàtiques de Huangdi)* que:

Fang és la forma de les quantitats;

Cheng és la denominació genèrica corresponent a l'operació de mesura.

Amb aquesta mirada **fangcheng** és la forma en que es disposen els coeficients, forma matricial en els termes actuals. Aquesta tesi és l'adoptada actualment per Qian Baocong.

Els matemàtics dels Qing, entre ells Mei Wending i Qu Zengfa, justifiquen el terme sota un altre punt de vista:

Fang és comparar, relacionar (es busquen relacions entre els coeficients dels sistema);

Cheng és forma.

És a dir es disposen els coeficients en línies i columnes per obtenir una forma determinada i per eliminació es transformen en proporcions. Cap d'aquests punts de vista descriu realment el terme, són interpretacions molt literals. Això és així perquè els NC no estaven disponibles durant la dinastia Ming i només ho eren a mitjans de la dinastia Qing.

⁶ El desenvolupament d'aquest apartat parteix de la presentació de Karine Chemla al capítol 8 dels NC, p 599-602

Aquests erudits, per tant, no van tenir l'oportunitat de consultar directament el capítol **fangcheng**.

Per intentar esbrinar el significat original del terme retornem al sentit dels dos caràcters que el componen:

Fang: posar de costat, davant per davant. Xu Shen, un erudit de la dinastia dels Han, escriu a *Shuowen jiezi* (*Interpretació de les grafies, Explicació dels caràcters*):

“fang és posar costat per costat els vaixells”.

En altres ocasions el terme es va utilitzar també per indicar que posant de costat joncs es construïa un rai. Tot sembla indicar que a l'origen **fang** significava un rai fet de peces de fusta o bambú que es posaven costat per costat, paral·lels entre elles, d'aquí la derivació de *posar costat per costat*, o *cara a cara* de l'explicació del procediment de càlcul que veurem.

Cheng, era originalment el nom d'una mesura. Xu Shen a *Shuowen jiezi* (*Interpretació de les grafies, Explicació dels caràcters*), diu:

“10 fa fan un cheng, 10 cheng fan un fen, 10 fen fan un cun”.

Per derivació també ha significat mesura o norma⁷ de les coses. En general tant als *NC* com a *Suanshushu* (*Llibre dels procediments matemàtics*) *cheng* designa mesures estàndards de treball. També s'utilitza com a verb en el sentit de *buscar la norma*⁸ de les coses.

En resum aquest breu anàlisi suggereix que **fangcheng** pot tenir un primer sentit que sigui *buscar la norma de les coses posant-les costat per costat, o davant per davant*. És a dir, posar costat per costat el conjunt de relacions quantitatives per avaluar-les entre elles. Una tal relació quantitativa es col·loca en una columna, com si fos una branca de bambú o un tronc de fusta, i el conjunt d'aquestes columnes es posa costat per costat de la mateixa manera que un rai es munta amb les respectives planxes. Així es veu a la figura següent on simplement s'ha substituït la grafia dels *NC*. on els nombres es representaven per bastonets, per l'escriptura numèrica actual⁹:

1	2	3
2	3	2

⁷ norma en el sentit de manera numèrica de trobar unes quantitats

⁸ altre cop norma en sentit numèric de manera de buscar quantitats

⁹ Retrobarem aquesta disposició de les dades del problema més endavant quan s'explica pròpiament el procediment *fangcheng*

3	1	1
26	34	39

El mateix Liu Hui fa la definició de *fangcheng*

“Mesurar (*cheng*), és buscar les mesures. Coses de diferents grups s’agrupen sense perdre la seva diferència; per a cada tipus, en una línia tenim les quantitats (*shu*), i s’expressa el seu dividend (*shi*) de manera global. De tal manera que cada columna està constituïda per *lü* (proporció o raó). Si tenim dos tipus de coses les hem de mesurar dues vegades; si tenim 3 tres tipus, tres cops; en qualsevol cas mesurem tantes vegades com quantitats (*shu*) tipus de coses tenim. Després juxtaposem les línies per fer columnes, per aquesta raó anomenem això *fangcheng*.”¹⁰

El procediment *fangcheng*

D’acord amb l’afirmació que fa Lui Hui en el primer problema, el procediment *fangcheng*, és un mètode general que s’utilitzarà durant tot el capítol. Segons ell mateix, com que és un mètode general abstracte s’utilitzen els cereals per a explicar-lo.

Es tracta de col·locar tantes columnes com mesures s’han fet i tantes files per damunt dels totals (produccions) com incògnites tenim. A partir d’aquí va eliminant els coeficients superiors de les columnes per comparació amb la columna de més a la dreta. Successivament va baixant als altres coeficients mantenint només els que queden a la diagonal.

De vegades per arribar a aquesta disposició ha d’arreglar prèviament les equacions i ho fa pel mètode de ***disminució i augment*** (passar termes d’un costat a l’altre de l’equació en la terminologia actual, problema 2)

A partir del problema 3 apareixen també coeficients negatius, i es donen les regles per a tractar-los, ***procediment del positiu i el negatiu***.

¹⁰ NC, pàg 617

De vegades el procediment d'eliminació d'incògnites restant columnes entre elles és llarg perquè el coeficients són grans, en aquest cas s'introdueix la **multiplicació recíproca**.

A continuació es reproduïx una breu descripció del procediment seguint el problema 8.1.

L'enunciat del problema 8.1¹¹

“SUPOSEM QUE 3 BALES (*BING*) DE MILL DE QUALITAT SUPERIOR, 2 BALES (*BING*) DE MILL DE QUALITAT MITJANA I 1 BALES (*BING*) DE MILL DE QUALITAT INFERIOR PRODUEIXEN (*SHI*) 39 DOU¹²; QUE 2 BALES (*BING*) DE MILL DE QUALITAT SUPERIOR, 3 BALES (*BING*) DE MILL DE QUALITAT MITJANA I 1 BALES (*BING*) DE MILL DE QUALITAT INFERIOR PRODUEIXEN (*SHI*) 34 DOU; QUE 1 BALES (*BING*) DE MILL DE QUALITAT SUPERIOR, 2 BALES (*BING*) DE MILL DE QUALITAT MITJANA I 3 BALES (*BING*) DE MILL DE QUALITAT INFERIOR PRODUEIXNE (*SHI*) 26 DOU; ES DEMANA QUANT PRODUEIXEN (*SHI*) RESPECTIVAMENT 1 BALES (*BING*) DE MILL DE QUALITAT SUPERIOR, DE QUALITAT MITJANA I DE QUALITAT INFERIOR.”¹³

En notació actual el problema equival a resoldre el sistema

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{array} \right\}$$

Escrivim el sistema, utilitzant la grafia actual dels nombres, però en la situació que descriu el *fangcheng*¹⁴

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

¹¹ Conservem, com a la traducció francesa, les majúscules per indicar el text clàssic i diferenciar-lo dels comentaris de Lui Hui.

¹² Podem interpretar que s'estan barrejant diferents tipus de gra de mill per a moldre'ls i produir farina de mill.

¹³ NC, p 617

¹⁴ Retrobem els coeficients utilitzats anteriorment per a descriure el terme *fangcheng*

Es multipliquen els termes de la columna del mig pel coeficient superior de la columna de la dreta (3) i es resta tantes vegades com calgui la columna de la dreta perquè el coeficient superior de la columna del mig s'anul·li, és a dir:

multiplicat per 3 i restant tantes vegades com calgui a la columna del mig i a la columna de l'esquerra s'obté, respectivament:

$$\begin{array}{ll}
 6 - 3 \Rightarrow 3 - 3 \Rightarrow 0 & 3 - 3 \Rightarrow 0 \\
 9 - 2 \Rightarrow 7 - 2 \Rightarrow 5 & 6 - 2 \Rightarrow 4 \\
 3 - 1 \Rightarrow 2 - 1 \Rightarrow 1 & 9 - 1 \Rightarrow 8 \\
 102 - 39 \Rightarrow 63 - 39 \Rightarrow 24 & 78 - 39 \Rightarrow 39
 \end{array}$$

Aquest procediment es compon de dos subprocediments: la multiplicació i la subtracció. En explicar el procediment Lui Hui el descriu com homogenització-igualació (multiplicació i subtracció).

“La intenció que presideix la confecció del procediment és que la columna més petita es vagi restant de la columna més gran, de manera repetida, fins que la posició inicial desaparegui.[.....] Que efectuem d'entrada la multiplicació de la columna central per la quantitat de mill de qualitat superior de la columna de la dreta, té per intenció realitzar una homogenització-igualació. Realitzar una homogenització-igualació és restar entre quantitats que estan cara a cara.”

Lui Hui continua dient, com que “s'utilitzen totes les *lǚ* per restar unes columnes a les altres això no influeix en les quantitats (*shu*) restants”¹⁵. De fet ho tracta com si fos una propietat ben coneguda.

El sistema nou seria:

$$\begin{array}{ccc}
 & & 3 \\
 4 & 5 & 2 \\
 8 & 1 & 1 \\
 39 & 24 & 39
 \end{array}$$

¹⁵ NC, p 619

Ara es tracta de repetir el procediment amb les dues últimes columnes. El paper de coeficient superior el juga ara la quantitat de cereal de qualitat mitjana de la columna central (5), es multiplica per ell la columna de més a l'esquerra i resta la columna central tants cops com calgui:

$$20 - 5 \Rightarrow 15 - 5 \Rightarrow 10 - 5 \Rightarrow 5 - 5 \Rightarrow 0$$

$$40 - 1 \Rightarrow 39 - 1 \Rightarrow 38 - 1 \Rightarrow 37 - 1 \Rightarrow 36$$

$$195 - 24 \Rightarrow 171 - 24 \Rightarrow 147 - 24 \Rightarrow 123 - 24 \Rightarrow 99$$

Després es pot dividir tota la columna $\begin{matrix} 0 \\ 36 \\ 99 \end{matrix}$ per 9 i s'obté:

$$\begin{array}{r} 3 \\ 5 \ 2 \\ 4 \ 1 \ 1 \\ 11 \ 24 \ 39 \end{array}$$

L'expressió de la darrera columna en la terminologia actual fóra $4z = 11$ i aleshores $z = 11/4$ permet d'entendre que, en el text clàssic, es parli del divisor (4) i del dividend (*sh*), la producció total (11) o parcial de cada columna. I així per a continuar i eliminar el coeficient inferior de la columna del mig es digui:

“PER TROBAR EL MILL DE QUALITAT MITJANA, ES MULTIPLICA PEL DIVISOR, EL DIVIDEND (*SH*) DE SOTA DE LA COLUMNA CENTRAL I S'ELIMINA EL DIVIDEND (*SH*) DE MILLET DE QAULITAT INFERIOR”

És a dir que :

24 EL DIVIDEND (*SH*) DE SOTA DE LA COLUMNA CENTRAL

es multiplica per 4 PEL DIVISOR, aquesta operació dóna 96

S'ELIMINA EL DIVIDEND (*SH*) DE MILLET DE QAULITAT INFERIOR, o sigui 11

i obtenim el 85.

La següent indicació és:

“DIVIDIR LA RESTA PER LA QUANTITAT *SHU* DE BALES (BING) DE MILL DE QUALITAT MITJANA, EL QUE DÓNA EL DIVIDEND (*SHI*) DE MILL DE QUALITAT MITJANA”

És a dir,

$$\begin{bmatrix} & 5 \\ 4 & 1 \\ 11 & 24 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} & 20 \\ 4 & 0 \\ 11 & 85 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} & 4 \\ 4 & 0 \\ 11 & 17 \end{bmatrix}$$

24·4 - 11 = 85 i després dividint tota la columna per 5 EL
DIVIDEND(*SHI*) DE MILL DE QUALITAT MITJANA

Finalment per obtenir el mill de qualitat superior:

$$\begin{array}{r} 0 \quad 0 \quad 3 \\ 0 \quad 4 \quad 2 \\ 4 \quad 0 \quad 1 \\ 11 \quad 17 \quad 39 \end{array}$$

ES MULTIPLICA PEL DIVISOR , EL DIVIDEND (*SHI*) DE SOTA DE LA COLUMNA DE LA DRETA I S'ELIMINEN ELS DIVIDENDS (*SHI*) DELS MILLETS DE QUALITATS INFERIORS I MITJANES

En aquest cas¹⁶, com que els dos divisors (columna esquerra i central) són iguals (4) multipliquem el 39 (dividend) per 4 (156) i li restem un cop l'11, a la línia del mill inferior han quedat davant per davant un 4 i un 4, però hem de restar dos cops el 17 perquè a la línia del mill mitjà han quedat davant per davant un 8 i un 4, per tant el 4 l'hem de restar dos cops i en conseqüència el 17 també. Així s'obté la columna, que altre cop dividida per 3, *shu* del mill de qualitat superior

$$\begin{array}{r} 12 \\ 8 - 4 - 4 \\ 4 - 4 \\ 156 - 11 - 17 - 17 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 12 \\ 0 \\ 0 \\ 111 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 37 \end{array}$$

En definitiva:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 11 & 24 & 39 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 11 & 17 & 37 \end{bmatrix}$$

El procediment de disminuir i augmentar

L'operació de *disminuir i augmentar*¹⁷ designa un mètode que permet transformar les equacions (terminologia actual) per poder utilitzar el *fangcheng*. Es descriu com

*“Allò de què es disminueix es dit augmentar, allò de què s'augmenta és dit disminuir”*¹⁸

Significa que disminuir d'una quantitat un dels membres d'una relació és equivalent a augmentar en una quantitat igual l'altre membre de l'equació. Seguint amb la terminologia actual significa canviar un terme de membre.

L'explicació del procediment apareix per primer cop en el problema 2 i després s'utilitza fent-hi referència als problemes 4, 5, 6, 8, 10, 11 i 15.

Així en el problema 2, en terminologia actual, es canvien termes constants:

$$\left. \begin{array}{l} (7x - 1) + 2y = 10 \\ 2x + (8y + 1) = 10 \end{array} \right\} \text{ passa a } \left. \begin{array}{l} 7x + 2y = 11 \\ 2x + 8y = 9 \end{array} \right\}$$

i, al problema 4, a més es canvien també les incògnites

$$\left. \begin{array}{l} 5x - 11 = 7y \\ 7x - 25 = 5y \end{array} \right\} \text{ passa a } \left. \begin{array}{l} 5x - 7y = 11 \\ 7x - 5y = 25 \end{array} \right\}$$

¹⁶ Si els dos divisors no fossin iguals caldria fer el procediment dues vegades, primer amb un divisor i després amb l'altre

¹⁷ Aquests termes són els que utilitza el text clàssic, NC p 623

¹⁸ Veieu la p 623

En algun cas les transformacions produeixen equacions amb produccions negatives, però això no presenta dificultats perquè en el problema 3 s'explica com operar quan apareixen coeficients negatius (*el procediment del positiu i el negatiu*). Així en el problema 6:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 6 = 10y \\ 5y + 1 = 2x \end{array} \right\} \text{ passa a } \left. \begin{array}{l} 3x - 10y = -6 \\ 5y - 2x = -1 \end{array} \right\}$$

En el problema 11 hi trobem reflectida, a més, la tècnica d'eliminar els denominadors:

$$\left. \begin{array}{l} (2x + y) - 10000 = \frac{1}{2}x \\ 10000 - (x + 2y) = \frac{1}{2}y \end{array} \right\} \text{ i aplicant disminucions i augments } \left. \begin{array}{l} 1\frac{1}{2}x + y = 10000 \\ x + 2\frac{1}{2}y = 10000 \end{array} \right\}$$

I aleshores eliminant els denominadors o en termes del comentarista Lui Hui¹⁹ “fent comunicar les parts i incorporant-les als numeradors”

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 20000 \\ 2x + 5y = 20000 \end{array} \right\}$$

El procediment del positiu i el negatiu

La introducció del nombres negatius i l'ampliació consecutiva del conjunt dels coeficients constitueix un altre aspecte remarcable d'aquest capítol. En el curs de l'eliminació de les incògnites apareixen coeficients negatius en problemes en que inicialment tot era positiu. Són els problemes 3, 12, 13, 14, 16, 17, 18 .

Però també es proposen problemes en els quals les equacions que s'estableixen contenen, des del començament, coeficients negatius, problemes 4, 5, 6, 8 i 15.

Tant les regles que cal seguir (text clàssic) com les justificacions dels comentaristes (Lui Hui) s'emmarquen dins del problema 3 que és el primer cop en què apareixen.

En el text clàssic es proposen les regles d'addició i subtracció de positius i negatius:

“SI ELS NOMBRES DEL MATEIX NOM S'ELIMINEN L'UN DE L'ALTRE, ELS NOMBRES DE NOMS DIFERENTS S'UGMENTEN L'UN AMB L'ALTRE; SI EL POSITIU NO TÉ ON ENTRAR, ES TORNA NEGATIU, SI EL NEGATIU NO TE ON ENTRAR, SE'L CNAVIA PER POSITIU. SI NOMBRES DE NOMS DIFERENTS S'ELIMINEN L'UN AMB L'ALTRE, ELS NOMBRES DEL MATEIX NOM S'AUGMENTEN L'UN AMB L'ALTRE; SI EL POSITIU NO TE ON ENTRAR , EL DEIXEM POSITIU, SI EL NEGATIU NO TÉ ON ENTRAR, EL DEIXEM NEGATIU”²⁰

En aquest problema, Lui Hui qui explica perquè cal introduir positius i negatius:

“Si dues menes de nombres representats per barretes, el que s'adquireix i el que es perd, són oposats l'un de l'altre, cal utilitzar positius i negatius per nomenar-ho. [...] És per aquesta raó que fem que barretes vermelles i negres²¹ es compensin i es facin desaparèixer les unes amb les altres”²²

En ocasions es fan multiplicacions o divisions per positius i negatius en el procés. No es donen unes regles explícites de multiplicació i divisió per negatius fins a Zhu Shijie (s XIII) tot i que s'usen sempre de manera correcta.

Els nombres positius i negatius, les seves addicions i subtraccions només apareixen als *NC* dins del marc del *fangcheng*. És probable que Zu Chongzhi els utilitzés més tard en els seus treballs per resoldre equacions amb una incògnita de 2n o 3r grau amb coeficients negatius. A l'època de les dinasties Song i Yuan, la utilització de nombres positius i negatius per extraure arrels s'estén en molts treballs.

El mètode d'eliminació per multiplicació recíproca

¹⁹ Veieu la p 641

²⁰ Veieu-ne les pp 627-629

²¹ Les barretes vermelles corresponen als nombres positius i les negres als negatius. El fet de parlar de barretes s'explica per la grafia dels nombres de l'època que era una combinació de ratlletes verticals i horitzontals. L'escriptura dels nombres és posicional i decimal, i utilitza ratlles verticals i horitzontals alternades. Verticals per indicar les unitats corresponents a unitats, centenes, i així alternativament; horitzontals per indicar les unitats en el lloc de les desenes, milers, etc. Fins a 5 amb barres verticals 1 = I; 2 = II; 3 = III; 4 = IIII; 5 = IIIII; 6 =

²² Veieu la p 625

Aquest mètode s'utilitza per eliminar incògnites que estan cara a cara i que implica moltes subtraccions. Lui Hui, en el problema 7, aporta aquest procediment nou i el descriu com a eliminació d'incògnites per multiplicació recíproca. Proposa que l'homogenització (multiplicació) i igualació (subtraccions successives) es pot fer multiplicant cada columna pel coeficient superior de l'altra.

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 10 & 10 \\ 25 & 4 \\ 40 & 20 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 21 & 4 \\ 20 & 20 \end{bmatrix}$$

Aquesta millora del mètode no va ser utilitzada per tots els seguidors posteriors. Obres com *Zhang Qiujian suanjing* (Clàssic matemàtic de Zhang Qiujian) utilitzen el mètode de subtracció cara a cara. Al s. XI el matemàtic dels Song del Nord Jia Xian reprèn el mètode d'eliminació per multiplicació recíproca per també utilitza la subtracció cara a cara. Al s. XII els matemàtic dels Song del Sud Qin Jiushao en el *Shushu jiu Zhang* (Escrits sobre els matemàtiques dels NC) utilitza exclusivament aquest mètode i el millora.

Classificació dels 18 problemes

\underline{n} = problema que utilitza el procediment de disminuir i augmentar

n' = problema en que en el procés de resolució apareixen nombres negatius

n^* = problema en que les equacions inicials contenen coeficients negatius

quants	equacions x incògnites	problemes
8	2 x 2	$\underline{2}$, $\underline{4}^*$, $\underline{5}^*$, $\underline{6}^*$, 7, 9, $\underline{10}$, $\underline{11}$
6	3 x 3	1, 3', $\underline{8}^*$, 12', $\underline{15}^*$, 16'
2	4 x 4	14', 17'
1	5 x 5	18'
1	5 x 6	13'

5. El mètode matricial xinès de resolució d'equacions. Activitats de classe

La resolució d'equacions lineals pel mètode matricial xinès sembla, a primera vista que s'escapa dels continguts de l'ESO perquè s'explica amb un exemple de sistema de 3 equacions amb 3 incògnites. L'explicació del procediment, partint d'una situació que es tradueix a un sistema amb dades numèriques, on cada pas es pot interpretar en el context tractat i dóna sentit a les operacions que es van efectuant amb les diferents columnes del sistema fins a arribar a diagonalitzar-lo, és el que fa pensar que pot ser un context adequat per a ESO.

La proposta es pot introduir com ampliació dels mètodes ja apresos, en el sentit de veure diferents procediments per a realitzar una mateixa activitat: la resolució d'equacions lineals de 3º d'ESO. Una altra possibilitat és pensar-la com alternativa als mètodes de substitució o reducció que contenen habitualment els llibres de text. De fet és el mètode de reducció però explicat d'altra manera.

Hauria d'anar acompanyada de la situació en el temps (s I dC) i del lloc en que es produeix, fent referència al llibre *Els Nou capítols dels procediments matemàtics*, al tipus de públic al que anava dirigit el llibre (oficials de l'exèrcit i venedors del govern). També seria convenient comentar el fet que en les matemàtiques occidentals no es troben referències al càlcul matricial fins a l'obra de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Malgrat tot, aquest mètode no es van publicar fins a 1850 i va haver de ser redescobert de nou mig segle més tard. Avui dia el mètode, que es troba en qualsevol llibre de text de batxillerat, duu el títol de mètode de Gauss, amb el que se li pot atribuir falsament a Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

En els NC s'ha vist que l'exemple utilitzat per a explicar el procediment en el problema 1, correspon a un sistema 3 x 3, sembla més convenient introduir el mètode amb un exemple de 2 x 2 que és el que millor correspon a l'alumnat de tercer d'ESO. Una altra possibilitat és introduir-lo de manera semblant a com es descriu en el problema 1 i a continuació demanar a l'alumnat que ho concreti i ho apliqui en sistemes de 2 x 2 que vinguin de la llista dels 18 del capítol 8, és a dir que sigui algun o tots d'entre la llista dels vuit de 2 x 2 que conté el capítol (2, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11). S'inclou en el projecte la traducció dels 18 problemes del capítol 8 . La resolució de sistemes d'equacions pel mètode matricial xinès com ampliació i comparació amb els mètodes habitualment utilitzats en l'ESO (substitució,

igualació i reducció) són una bona activitat per a pensar i raonar matemàticament perquè el mètode es presenta a partir d'un exemple numèric que remet a una situació real. En ell, la seqüència d'operacions que s'hauran de realitzar amb els coeficients del sistema es justifiquen en el mateix context on apareixen, això fa que el procés de càlcul sigui més comprensible per a l'alumnat perquè pot anar donant sentit a les operacions que realitza amb els coeficients i se'n pot fer una imatge física i mental del que signifiquen.

És convenient convidar a l'alumnat a comparar aquest mètode amb l'habitual que s'ha treballat en classe i que valori avantatges i inconvenients. També és raonable pensar en la utilització de l'ordinador (wiris) i les calculadores (gràfiques o no) que resolen sistemes per a contrastar resultats i per a seguir el pas històric del temps. Si existeixen en el s XXI instruments de càlcul bé val la pena utilitzar-los.

El fet que el mètode es plantegi a partir de problemes concrets i amb situacions reals, afavoreix el pas del llenguatge parlat a la representació simbòlica, però a més la disposició matricial permet prescindir de l'àlgebra, en el sentit més usual del maneig d'equacions, perquè tot es basa en manipular convenientment els coeficients que apareixen després d'interpretar la situació que s'ha de resoldre. Es resolen problemes i es representen processos amb matrius successives en les quals, en el llenguatge actual, es diagonalitzen els coeficients.

Una vegada entès el procediment de càlcul, la mecanització del procés pot fer perdre interès per explicar els passos que s'estan fent però és una bona ocasió per a rescatar la pràctica del càlcul mental, a la manera com els xinesos antics feien amb els seus 'taulers de càlcul' i els seus bastons, on era de vital importància retenir mentalment algunes operacions.

Finalment constatar que, si el procés d'aprenentatge del mètode xinès es realitza en petits grups i es compagina amb posades en comú dels procediments apresos i dels resultats obtinguts, és una bona ocasió per a promoure la capacitat comunicativa de l'alumnat, especialment en la vessant oral, perquè haurà d'explicar i raonar els descobriments realitzats.

6. Referències bibliogràfiques

6.1. Bibliografía general

Boyer, Carl B. (1986) *Historia de las Matemáticas*, Alianza Editorial, Madrid.

Bishop, Alan J. (1999) *Enculturación matemática. La educación desde una perspectiva cultural*. Temas de educación. Paidós. Barcelona.

Fauvel, John; van Maanen, Jan. (editors) 2000, *History in Mathematics Education. The ICMI Study*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Guevara, Iolanda; Massa, M^a Rosa; Romero, Fátima (2006) "Textos históricos para la enseñanza de las matemáticas". Actas del IX Congreso de la Sociedad Española de Historia de las ciencias y de las Técnicas. Cádiz.

Guevara, Iolanda; Romero, Fátima; MASSA, M^a Rosa (2007) "Enseñar matemáticas a través de su historia: algunos conceptos trigonométricos" en Actas de las XIII JAEM de Granada.

Guevara, Iolanda; Massa, M^a Rosa; Romero, Fátima (2007) "Enseñar matemáticas a través de su historia: algunos conceptos trigonométricos" en Epsilon nº 67, vol 23 (1 y 2) pp 97-107

Guevara, Iolanda; Massa, M^a Rosa (2007) "La història de les matemàtiques en els nous currículums de secundària". Actes de la VI Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament. SCHCT. Barcelona (en premsa)

Katz, Victor J.(ed.) (2000) *Using History to Teach Mathematics. An International Perspective*. The Mathematical Association of America. Washington.

Katz, Víctor J; Michalowicz, Kareen Dee (2004) *Historical Modules for teaching and Learning of Mathematics*. The Mathematical Association of America, Washington.

Massa, M^a Rosa (2003) "Aportacions de la història de la matemàtica a l'ensenyament de la matemàtica" *Biaix*, 21, 2003, 4-9.

Massa, M^a Rosa; Romero, Fátima; Guevara, Iolanda (2006) "Teaching Mathematics through history: some trigonometric concepts". Proceedings of the 2nd International Conference of the European society for the History of Science. Cracow.

Mankiewicz, Richard (2000) *Historia de las Matemáticas*. Paidós. Barcelona.

Niss, Mogen (2002) *Mathematical Competencies and the Learning of Mathematics: The Danish KOM Project*. Denmark.

NCTM (2000) *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. Proyecto Sur Industrias Gráficas S.L. Granada.

Schubring, Gert (2006) "History of Teaching and Learning Mathematics" en *Paedogica Historica*, vol 42, nº 4-5, (Ejemplar dedicado a: History of teaching and learning mathematics) pp 511-514.

http://www.xtec.cat/estudis/eso/curriculum_2007/matematiques_eso.pdf

6.2. Referències bibliogràfiques específiques

- Chemla, Karine; Shuchun, Guo (eds.) (2005) *Les Neuf Chapitres, le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires* [edició crítica bilingüe], París, Dunod.
- Cullen, Christopher (1996) *Astronomy and Mathematics in Ancient China: The Zhou bi suan jing*, Cambridge/New York, Cambridge University Press.
- Cullen, Christopher (2009) "People and numbers in early imperial China". *The Oxford Handbook of The History of Mathematics*. Robson, Eleanor; Stedall, Jacqueline (Ed) New York: Oxford Univ Press Inc.
- Dauben, Joseph.W (2007) "Chinese Mathematics" in *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam. A sourcebook*. Victor J. Katz, Editor. Princeton University Press. 187-384
- Ho Peng Yoke (2000) *Li, Qi and Sh. An introduction to Science and Civilization in China*. Dover Publications, Inc. Mineola, New York.
- Li Yan; Du Shiran (1987) *Chinese Mathematics. A Concise History*, Oxford, Clarendon Press.
- Lloyd, Geoffrey E.R. (2001) *Explorant la ciència antiga*, Barcelona, Societat Catalana d'Història de la Ciència i de la Tècnica.
- Man-Keung, Siu (2000) "An excursión in Ancient Chinese Mathematics" en *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective*. KATZ, Victor J.(ed.) (2000) *Using History to Teach Mathematics. An International Perspective*. The Mathematical Association of America. Washington. pp 159-166
- Martzloff, Jean-Claude (1997) *A history of Chinese mathematics*, Berlin/Heidelberg/New York, Springer-Verlag.
- Pla i Carrera, Josep (2009) *Liu Hui. Nueve Capítulos de la matemática china*. Col. *La matemática en sus personajes*, n. 39, Ed. Nivola.
- Romero, Fátima; Puig-Pla, Carles; Guevara, Iolanda; Massa, M^a Rosa (2007). "La trigonometria en els inicis de la matemàtica xinesa. Algunes idees per a treballar a l'aula". *Actes de la VI Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament*. SCHCT. Barcelona (en premsa.)
- Swetz, Franz (1997) "Enigmas of Chinese Mathematics" in *Vita Mathematica*. Cambridge University Press. pp. 87-97
- Volkov, Alexei (1994) "Transformations of Geometrical objects in Chinese Mathematics and their evolution". Dins: Alleton, Viviane; Volkov, Alexei (eds.) *Notions et perceptions du changement en Chine*, París, Collège de France / Institut des Hautes Études Chinoises, vol. XXXVI, 133-148.

7. Annex: els enunciats dels 18 problemes del capítol 8²³

Problema 1

Suposem que 3 bales (*bing*)²⁴ de mill de qualitat superior, 2 bales (*bing*) de mill de qualitat mitjana, i 1 bales (*bing*) de qualitat inferior produeixen (*shi*) 39 dou²⁵; que 2 bales (*bing*) de mill de qualitat superior, 3 bales (*bing*) de mill de qualitat mitjana, 1 bales (*bing*) de mill de qualitat inferior produeixen (*shi*) 34 dou; que 1 bales (*bing*) de mill de qualitat superior, 2 bales (*bing*) de mill de qualitat mitjana, 3 bales (*bing*) de mill de qualitat inferior produeixen (*shi*) 26 dou; es pregunta quan produeixen (*shi*) respectivament una bala (*bing*) de mill de qualitat superior, una de qualitat mitjana, una de qualitat inferior.

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 2y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{array} \right\} \quad (9 \frac{1}{4}, 4 \frac{1}{4}, 2 \frac{3}{4})$$

Problema 2

Suposem que al disminuir la producció (*shi*) de 7 bales (*bing*) de mill de qualitat superior en 1 dou i augmentant-la amb 2 bales (*bing*) de mill de qualitat inferior obtenim una producció global de 10 dou; que augmentant la producció de 8 bales (*bing*) de mill de qualitat inferior en 1 dou junt amb 2 bales (*bing*) de mill de qualitat superior, aleshores la producció (*shi*) global és de 10 dou. Es demana quan produeixen (*shi*) respectivament una bala (*bing*) de mill de qualitat superior i una d'inferior.

$$\left. \begin{array}{l} (7x - 1) + 2y = 10 \\ 2x + (8y + 1) = 10 \end{array} \right\} \quad (1 \frac{18}{52}, 41/52)$$

Problema 3

Suposem que tenim 2 bales (*bing*) de mill de qualitat superior, 3 bales (*bing*) de mill de qualitat mitjana, 4 bales (*bing*) de mill de qualitat inferior, de manera que les seves produccions no omplen mai un dou. Si amb tot el mill de qualitat superior prenem mill de qualitat mitjana, amb tot el de qualitat mitjana en prenem d'inferior, i amb el d'inferior en prenem de superior. Cada vegada a raó d'una bala (*bing*), aleshores la producció omple

²³ Traducció del text francès: Iolanda Guevara

²⁴ paquets, munts

un *dou* cada vegada. Es demana quan produeixen respectivament una bala (*bing*) de mill de qualitat superior, una de mitjana i una d'inferior.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 1 \\ 3y + z = 1 \\ 4z + x = 1 \end{array} \right\} (9/25, 7/25, 4/25)$$

Problema 4

Suposem que tenim 5 bales (*bing*) de mill de qualitat superior que, si disminuïm la [seva]²⁶ producció (*shi*) en 1 *dou* 1 *shen*²⁷, [la producció que queda] equival a la de 7 bales (*bing*) de mill de qualitat inferior; i 7 bales (*bing*) de mill de qualitat superior que, si disminuïm la producció (*shi*) de 2 *dou* 5 *sheng*, equival a 5 bales (*bing*) de mill de qualitat inferior. Es demana quan produeixen (*shi*) respectivament una bala (*bing*) de mill de qualitat superior i inferior.

$$\left. \begin{array}{l} 5x - 11 = 7y \\ 7x - 25 = 5y \end{array} \right\} (5, 2)$$

Problema 5

Suposem que tenim 6 bales (*bing*) de mill de qualitat superior, que si disminuïm la producció (*shi*) en 1 *dou* 8 *sheng*, equival a la de 10 bales (*bing*) de qualitat inferior; i que si 15 bales (*bing*) de mill de qualitat inferior, disminuïm la producció (*shi*) de 5 *sheng*, aleshores equival a 5 bales (*bing*) de mill de qualitat superior. Es demana quan produeixen (*shi*) respectivament una bala (*bing*) de mill de qualitat superior i una de qualitat inferior.

$$\left. \begin{array}{l} 6s - 18 = 10i \\ 15i - 5 = 5s \end{array} \right\} (8,3)$$

²⁵ mesura antiga xinesa

²⁶ Els claudàtors són afegits nostres per facilitar la comprensió del text.

²⁷ *dou* i *sheng* unitats de mesura en sistema decimal: 10 *sheng* = 1 *dou*

Problema 6

Suposem que tenim 3 bales (*bing*) de mill de qualitat superior, que si augmentem disminuïm la producció (*shi*) en 6 *dou*, equival a la de 10 bales (*bing*) de qualitat inferior; i que si de 5 bales (*bing*) de mill de qualitat inferior, augmentem la producció (*shi*) en 1 *dou*, equival a 2 bales (*bing*) de mill de qualitat superior. Es demana quan produeixen (*shi*) respectivament una bala (*bing*) de mill de qualitat superior i una d'inferior.

$$\left. \begin{array}{l} 3s + 6 = 10i \\ 5i + 1 = 2s \end{array} \right\} \quad (8,3)$$

Problema 7

Suposem que 5 bous i 3 bents valen 10 grapats (*liang*) d'or, que 2 bous i 5 bents valen 8 grapats (*liang*) d'or. Es demana quan valen respectivament un bou i un be.

$$\left. \begin{array}{l} 5v + 2b = 10 \\ 2v + 5b = 8 \end{array} \right\} \quad (1 \text{ i } 13/21, 20/21)$$

Problema 8

Suposem que si venem 2 bous i 5 bents per comprar 13 porcs, sobren 1000 monedes, que si venem 3 bous y 3 porcs per comprar 9 bents, tenim les monedes justes, i que si venem 6 bents i 8 porcs per comprar 5 bous, tenim un dèbit de 600 monedes. Es demana quan val respectivament un bou, un be i un porc.

$$\left. \begin{array}{l} 2v + 5b = 13p + 1000 \\ 3v + 3p = 9b \\ 6b + 8p = 5v - 600 \end{array} \right\} \quad (1200, 500, 300)$$

Problema 9

Suposem que 5 pardals i 6 orenetes es reuneixen sobre els dos plats d'una balança i que el conjunt dels pardals és més pesat que els conjunt de les orenetes. Si un pardal i una oreneta canvien de plat el braç de la balança queda just horitzontal. Si ajuntem els pardals

i les orenetes, el pes és d'un *jin*²⁸. Es demana quan pesa respectivament un pardal i una oreneta.

$$\left. \begin{array}{l} 5p + r = 5r + p \\ 5p + 6r = 16 \end{array} \right\} (1 \frac{13}{19}, 1 \frac{5}{19})$$

Problema10

Suposem que 2 persones, Jia i Yi, tenen sapèques²⁹ però no sabem quina quantitat (shu), si Jia obté la meitat dels que te Yi, aleshores en te 50, i que si Yi obté dos terços de les que te Jia, aleshores ell també en te 50. Es demana quants troncs te cadascú.

$$\left. \begin{array}{l} j + \frac{1}{2}y = 50 \\ y + \frac{2}{3}j = 50 \end{array} \right\} (37 \frac{1}{2}, 25)$$

Problema11

Suposem que el preu de 2 cavalls i d'un bou supera en 10.000 sapèques el preu de mig cavall, i que el preu d'un cavall i de dos bous no arriba per de mig bou als 10.000 Es demana quan val respectivament un bou i un cavall.

$$\left. \begin{array}{l} 2c + b = 10000 + 1/2c \\ c + 2b = 10000 - 1/2b \end{array} \right\} (5454 \text{ i } 6/11, 1818 \text{ i } 2/11)$$

Problema 12

Suposem que 1 cavall de guerra, 2 cavalls de qualitat mitjana, 3 cavalls de qualitat inferior, cada grup porta 40 dan, arriben a un pendent que cap grup pot escalar. Si el cavall de guerra es ajudat per un cavall de qualitat mitjana, si els cavalls de qualitat mitjana són ajudats per un cavall de qualitat inferior, si els cavalls de qualitat inferior són ajudats per un de guerra, aleshores tots poden escalar el desnivell. Es demana quina és

²⁸ Unitat de pes xinesa. 1 *jin* = 16 *liang*

²⁹ Moneda xinesa

la força respectiva que pot estirar un cavall de guerra, un de qualitat mitjana i un de qualitat inferior.

$$\left. \begin{array}{l} g + m = 40 \\ 2m + i = 40 \\ 3i + g = 40 \end{array} \right\} \quad (22 \text{ i } 6/7, 17 \text{ i } 1/7, 5 \text{ i } 5/7)$$

Problema13

Suposem que 5 famílies es reparteixen un pou. El que li falta a 2 cordes de Jia per arribar al fons del pou, és com una corda de Yi, el que li falta a 3 cordes de Yi, es com una corda de Bing, el que li falta a 4 cordes de Bing és com una corda de Ding, el que li falta a 5 cordes de Ding és com una corda de Wu, el que li falta a 6 cordes de Wu, és com una corda de Jia i que si cadascú obté la corda que li falta totes arribarien al fons del pou. Es demana la profunditat del pou i la longitud de les cordes.

$$\left. \begin{array}{l} x - 2J = Y \\ x - 3J = B \\ x - 4B = D \\ x - 5D = W \\ x - 6W = J \end{array} \right\} \quad \text{Si } x = 721; \text{ les longituds respectives són } 265, 191, 148, 129, 76)$$

Problema 14

Suposem que tenim 2 *bu* de mill blanc, 3 *bu* de mill blau-verd, 4 *bu* de mill groc, 5 *bu* de mill negre, de manera que el que produeixen (*shi*) cadascun d'ells no omple en cap cas un *dou*. Si amb el blanc hi posem blau-verd i groc, amb el blau-verd hi posem groc i negre; amb el groc, negre i blanc; amb el negre, blanc i blau-verd; sempre a raó d'1 *bu*, aleshores la producció (*shi*) és d'un *dou*. Es demana quan produeixen respectivament 1 *bu* de mill blanc, blau-verd, groc i negre respectivament.

$$\left. \begin{array}{l} 2b + v + g = 1 \\ 3v + g + n = 1 \\ 4g + n + b = 1 \\ 5n + b + v = 1 \end{array} \right\} \quad (33/111, 28/111, 17/111, 10/111)$$

Problema15

Suposem que el pes de 2 *bing*³⁰ de mill de *Jia*, de 3 *bing* de *Yi*, de 4 *bing* de mill de *Bing* sobrepassen tots d'1 *dan*, el pes de 2 *bing* de *Jia* com el d'1 de *Yi*, el pes de 3 *bing* de *Yi* com el d'1 de *Bing*, el pes de 4 de *Bing* com el d'1 de *Jia*. Es demana quan pesen respectivament un *bing* de mill de *Jia*, un de *Yi*, un de *Bing*

$$\left. \begin{array}{l} 2J - 1 = Y \\ 3Y - 1 = B \\ 4B - 1 = J \end{array} \right\} (17/23, 11/23, 10/23)$$

Problema16

Suposem que un director, 5 oficials i 10 lacais mengen 10 pollastres; 10 directors, 1 oficial i 5 lacais mengen 8 pollastres; 5 directors, 10 oficials i un lacai mengen 6 pollastres. Es demana quan menja respectivament un director, un oficial i un lacai.

$$\left. \begin{array}{l} x + 5y + 1z = 10 \\ 10x + 1y + 5z = 8 \\ 5x + 10y + 1z = 6 \end{array} \right\}^{31} (45/122, 41/122, 97/122)$$

Problema17

Suposem que 5 bens, 4 gossos, 3 pollastres i 2 conills valen 1496 sapèques (monedes); 4 bens, 2 gossos, 6 pollastres i 3 conills valen 1175 sapèques; 3 bens, 1 gos, 7 pollastres i 5 conills valen 958 sapèques; 2 bens, 3 gossos, 5 pollastres i un conill valen 861 sapèques. Es demana els preus respectius d'un be, un gos, un pollastres i un conill.

$$\left. \begin{array}{l} 5b + 4g + 3p + 2c = 1496 \\ 4b + 2g + 6p + 3c = 1175 \\ 3b + 1g + 7p + 5c = 958 \\ 2b + 3g + 5p + 1c = 861 \end{array} \right\} (177, 121, 23, 29)$$

³⁰ paquets, munts

³¹ Per escriure els sistemes de cada problema en la notació actual s'han triat lletres per les incògnites que fan referència a la quantitat que representen. En aquest problema no s'ha seguit aquest criteri perquè la grafia "o", per oficial i la "l" per lacai es podia confondre zeros i uns.

Problema18

Suposem que 9 *dou* de gra de cànem, 7 *dou* de blat, 3 *dou* de soja, 2 *dou* de mongetes i 5 *dou* de mill valen 140 sapèques; 7 *dou* de gra de cànem, 6 *dou* de blat, 4 *dou* de soja, 5 *dou* de mongetes i 3 *dou* de mill valen 128 sapèques; 3 *dou* de gra de cànem, 5 *dou* de blat, 7 *dou* de soja, 6 *dou* de mongetes i 4 *dou* de mill valen 116 sapèques; 2 *dou* de gra de cànem, 5 *dou* de blat, 3 *dou* de soja, 9 *dou* de mongetes i 4 *dou* de mill 112 sapèques; 1 *dou* de gra de cànem, 3 *dou* de blat, 2 *dou* de soja, 8 *dou* de mongetes i 5 *dou* de mill valen 95 sapèques. Es demana quant val un *dou* de cada producte.

$$\left. \begin{array}{l} 9c + 7b + 3s + 2g + 5m = 140 \\ 7c + 6b + 4s + 5g + 3m = 128 \\ 3c + 5b + 7s + 6g + 4m = 116 \\ 2c + 5b + 3s + 9g + 4m = 112 \\ 1c + 3b + 2s + 8g + 5m = 95 \end{array} \right\} (7, 4, 3, 5, 6)$$