LA RESOLUCIÓ GEOMÈTRICA D'EQUACIONS DE 2n GRAU

***Hisâb al-jabr wal-muqqabala* de Mohamed Ben-Musa al-Khwârizmî (813)**

ÍNDEX

1. Introducció

La resolució d'equacions de 2n grau és un dels continguts del currículum de 3r d'ESO que presenten més dificultats als alumnes d'aquest nivell perquè el grau d'abstracció de comporta fa que memoritzin l'algorisme de resolució, amb més o menys fortuna, però sense cap mena de significativitat i sentit; especialment si es considera que al s. XXI la calculadora i l'ordinador desplacen a un segon lloc els càlculs manuals.

L'experiència ens diu que en aquest tema esmercem molts esforços per aconseguir que els alumnes utilitzin correctament una fórmula per resoldre equacions amb el resultat final que massa sovint s'equivoquen en l'obtenció de les solucions per uns càlculs mal fets, un signe oblidat,...

D'acord amb aquestes consideracions, i formant part de la proposta general de desenvolupar alguns dels exemples de contextos històrics que conté el currículum de l'ESO es presenta aquest element que inclou:

- la justificació del tema triat des del punt de vista de la seva rellevància dins del currículum
- la presentació del context històric i de les fons utilitzades
- una proposta d'activitat per a l'aula
- la justificació de l'activitat a partir del context històric i dels aspectes de la competència matemàtica que s'hi desenvolupen
- algunes consideracions entorn a la realització de l'activitat durant el curs 2007-08 amb alumnes de 3r d'ESO

2. Justificació de la tria de l'equació de 2n grau

Més enllà del que diu el currículum oficial i del que conten els llibres de text, els professors i professores, en decidir la seva programació d'aula, es fan preguntes sobre la conveniència i idoneïtat del tema i també tenen en ment les que els poden fer el seu alumnat:

- Per a què serveixen les equacions de 2n grau?
- Quines situacions de la vida quotidiana plantegen problemes que s'han de resoldre amb equacions de 2n grau?
- Com es resolen les equacions de 2n grau?
- Té sentit ensenyar/aprendre a resoldre equacions de 2n grau amb mètodes manuals, amb llapis i paper, al s. XXI quan les calculadores i els ordinadors ho resolen?
- Com s'han resolt al llarg de la història aquestes equacions?
- Hi ha alguna relació entre el mètode per a resoldre equacions de 1r grau i el de 2n grau?
- Sabent resoldre equacions de 1r grau podem transferir en el procediment a la resolució d'equacions de 2n grau?
- Què es podria utilitzar del desenvolupament històric de la resolució de l'equació de 2n grau per a construir un mètode de resolució a l'abast de l'alumnat? La història implícita en les lliçons de l'aula.[1]
- Què cal explicar d'història de la matemàtica per a fer viure a l'alumnat la necessitat de resoldre equacions de 2n grau? La història explícita en les classes de matemàtiques.

Partint d'aquestes preguntes s'ha fet una tria més adreçada al procés de resolució que a la recerca de situacions on apareixen equacions de 2n grau Partint d'aquestes preguntes s'ha fet una tria més adreçada al procés de resolució que a la recerca de situacions on apareixen equacions de 2n grau. Ens centrarem en els mètodes àrabs de resolució, presentarem el context històric on es va desenvolupar i un dels personatges més rellevants que ho va dur a terme i es presentarà una proposta d'activitats per treball per a l'aula.

.

[1] Els termes història implícita i explícita estan més desenvolupats en Massa: 2005.

En el currículum oficial, a 3r d'ESO, un dels exemples de contextos històrics proposats és *La resolució geomètrica d'equacions (Grècia, Índia, Món Àrab).* En aquest element ens cenyim a un dels dos tipus d'equacions, les de 2n grau, tot i que veurem la relació amb les de 1r grau. En quant a l'època, tot i donar referències de diferents períodes ens centrem en el Món Àrab, perquè és la baula final que durà a la resolució de l'equació de 2n grau amb la fórmula actual, i perquè d'ell s'ha tret la proposta d'activitats per a l'aula. S'inclouen referències per a trobar informació sobre els períodes anteriors i posteriors.

3. Les regles de l'àlgebra (chèber) al Món Àrab

Els àrabs han jugat un paper fonamental en el desenvolupament de l'àlgebra, així com en el d'altres branques de la ciència. Cal recordar que mentre l'imperi romà va desaparèixer a Occident i amb ell es va produir la decadència de la ciència grega, l'imperi a Orient es va mantenir. El profeta Mahoma nascut l'any 580, va formar un estat mahometà a la Meca l'any 622, que es va anar expandint fins al segle XII.

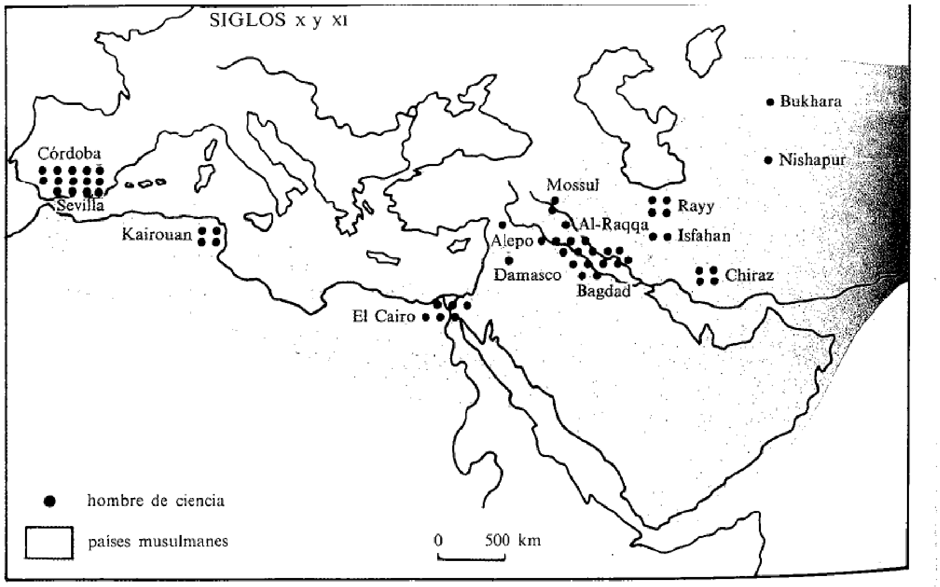


Figura 1.- Els principals focus de la cultura àrab dels s. X i XI

Allà va prendre importància el llenguatge "siríac" encara que el grec seguia sent conegut per tots els savis. Es van traduir moltes obres del grec al siríac i els perses van crear diversos centres científics. Els perses possiblement varen rebre influències dels hindús; així, a Aryabhata (500 dc.) es solucionen diverses equacions, també Brahmagupta en la seva obra d'astronomia dedica dos capítols a les matemàtiques.

Els àrabs, doncs, van recollir l'abstracció del saber grec i el pragmatisme i càlcul del saber hindú, millorant i transformant aquests coneixements assimilats, i creant-ne de nous a partir dels recursos de la seva pròpia civilització. Bagdad va ser el gran centre científic on hi varen arribar i es varen traduir les grans obres gregues com ara els *Elements* d'Euclides, l'*Almagest* de Ptolemeu, i també s'hi varen elaborar noves taules astronòmiques,... Després de Bagdad, altres focus de cultura varen ser: El Caire, Córdova, Samarcanda, Isfahan,... Els àrabs van fer importants contribucions en física, astronomia d'observació, alquímia, medicina, geometria i àlgebra.

L'ús conjunt de raonaments geomètrics i algebraics es pot trobar a Mohamed Ben-Musa al-Khwârizmî, matemàtic, astrònom i membre de la Casa de la Saviesa de Bagdad, que va morir el 850 dC. i és considerat com el creador de les regles de l'àlgebra. La seva obra *Hisâb al-jabr wal-muqqabala* (813) va ser traduïda al llatí per Roberto de Chester amb el títol *Liber algebrae et almucabala* (Segòvia, 1145), d'on prové el nom actual d'àlgebra.

L'obra d'al-Khwârizmî, constava d'una part teòrica amb el mètode per resoldre equacions amb coeficients positius (que classificava en sis tipus, fins a segon grau) i una part pràctica que contenia problemes il·lustratius de cadascun dels tipus: problemes de nombres, de comerç, de dots, del blat i la civada, dels exèrcits i dels correus.

Totes les altres àlgebres àrabs, basades en aquesta, conservaven aquesta estructura. Les equacions les estructuraven en sis tipus, sense escriure cap símbol: "Quadrats igual a arrels" [en notació actual, $ax^2 = bx$], "Quadrats igual a nombres" [$ax^2 = c$], "Arrels igual a nombres" [$bx = c$], "Quadrats i arrels igual a nombres" [$ax^2 + bx = c$], "Quadrats i nombres igual a arrels" [$ax^2 + c = bx$], "Arrels i nombres igual a quadrats" [$bx + c = ax^2$] Primer donaven, amb llenguatge retòric,[2] l'algorisme de resolució de cada tipus mitjançant un exemple numèric i, després, en la part pràctica, cada vegada que en un problema plantejaven una equació donaven el tipus i la solució, sense fer les operacions. Aquesta classificació seria la que m'inspiraria l'evolució d'equacions que jo proposaria després als meus alumnes.

Per explicar la solució del tipus "quadrats i arrels igual a nombres" ho fa amb l'exemple "un quadrat i deu arrels del mateix és igual a trenta-nou unitats" [$x^2 + 10x = 39$]

> "L'operació per això és que dividiu per dos el nombre d'arrels, que en la present instància dóna 5 [$b/2$]. Aquest multipliqueu-lo per ell mateix; el producte és 25 [$(b/2)^2$]. El que resulti afegiu-lo a les unitats [39]; la suma és 64 [$(b/2)^2 + c$]. Ara pren l'arrel d'aquest, que és 8, [$(b/2)^2 + \mathrm{c}]^{1/2}$, i resta-li la meitat del nombre d'arrels, que és 5; la resta és 3 [$-(b/2) + ((b/2)^2 + \mathrm{c})^{1/2}$]. Aquesta és l'arrel del quadrat i el quadrat mateix és 9".

Finalitza la resolució comprovant el resultat:

> “La comprovació d’això consisteix en que sumis el quadrat que és nou , amb deu arrels seves , que són trenta i s’obté el total, trenta-nou , com s’havia proposat”.

El llenguatge emprat era retòric, sense utilització de símbols i amb alguna justificació geomètrica de les solucions trobades.

Qui va difondre en el món occidental tots aquests coneixements va ser Leonardo de Pisa (1180-1250), fill d’un cònsol, anomenat Bonacci, que és conegut amb el nom de Fibonacci. A la seva obra *Liber abaci* (1202) reflecteix els problemes que va aprendre a calcular a les àlgebres àrabs així com els mètodes de càlcul de la numeració hindú.[3]

---

[2] El llenguatge retòric, és el que descriu les operacions que cal anar fent per a trobar el valor de la incògnita sense utilitzar cap mena de símbol per a indicar les operacions.

[3] Fins aquí un resum de *Les regles de l’àlgebra (chéber)* inclòs en l’article de Mª Rosa Massa (2005) *“Les equacions de segon grau al llarg de la història”* a *Biaix* nº 24, 4-15. Veure altres fonts a les referències bibliogràfiques.

4. Del context històric a una proposta d'activitats per a l'aula

La justificació geomètrica que feien els àrabs de les solucions de l'equació de segon grau es basava en construir un quadrat de costat "*x*" i completar-lo amb alguns casos amb dos rectangles de mides "*x*" i "*b/2*" o amb quatre rectangles de mides "*x*" i "*b/4*". En el primer cas calia afegir un quadrat de costat "*b/2*" i en el segon, quatre quadrats de costat "*b/4*", per obtenir un quadrat de costat "*x* + *b/2*".

En els manuscrits de l'època apareixen els figures, els quadrats s'anomenen "*a b*", indicats per lletres en dos vèrtexs oposats i els rectangles com a *"c"*, i "*d*" respectivament en el primer cas i com a *"c", "d",* "*e*" i *"f"* en el segon cas en que cal afegir-ne quatre.

Les figures següents il·lustren la construcció geomètrica del primers cas, afegir el quadrat de costat "*b/2*", amb la terminologia actual:

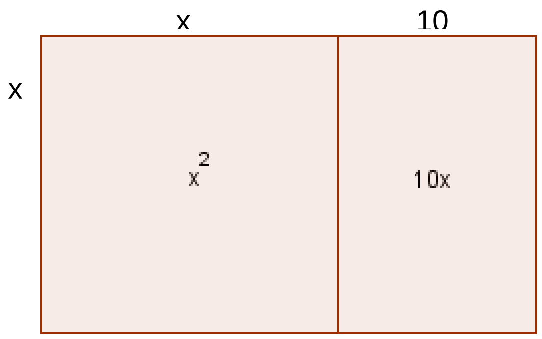


Fig. 2: $x^2 + 10x = 39$

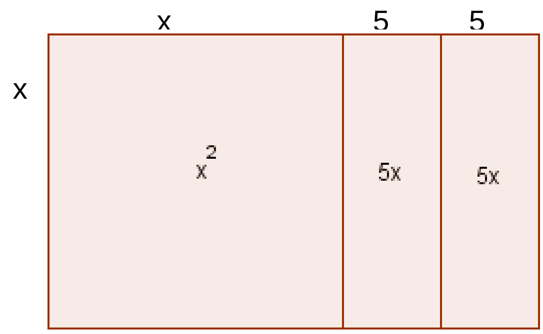


Fig. 3: $x^2 + 2(\frac{10}{2}x) = 39$

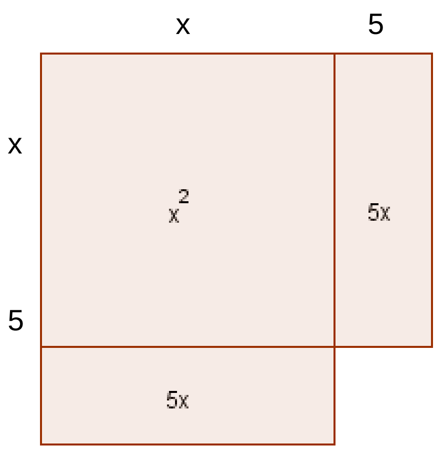


Fig. 4: $x^2 + 2(\frac{10}{2}x) = 39$

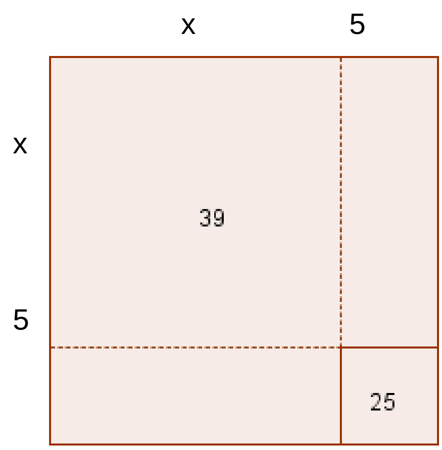


Fig. 5: $x^2 + 2(\frac{10}{2}x) + (\frac{10}{2})^2 = 39 + (\frac{10}{2})^2$

$(x + \frac{10}{2})^2 = 64 \qquad x + \frac{10}{2} = 8$

Aquest exemple serà el nucli de la proposta de les activitats per a l'aula. S'ha triat la primera opció perquè sembla més intuïtiva, la pretensió no és demostrar la fórmula general, per a la que s'arriba millor amb la segona construcció geomètrica sinó resoldre equacions geomètricament.

La idea és que els alumnes segueixin l'evolució dels dibuixos i associïn les longituds i les àrees als valors que apareixen a l'equació que se'ls presenta per resoldre, sense les fórmules algebraiques. Seguir les fórmules serà un segon pas per a més endavant, el mateix curs o el curs següent. En l'experiència es va posposar intencionadament al curs següent (4t d'ESO).

5. Una proposta d'activitats per a l'aula

Abans d'entrar en la matèria pròpiament matemàtica caldrà situar l'alumnat en el Món Àrab de l'època. Aquesta primera introducció es planteja com a tasca de recerca de l'alumnat entorn al-Khwârizmî:

- Quan i on va viure?
- A què es dedicava?
- Quines obres va escriure que van transcendir i van marcar camí en la història de les matemàtiques?
- A quines preguntes volia respondre amb la seva obra?

Cada alumne/a trobarà dades sobre l'època i el personatge a través d'internet, amb la posada en comú a l'aula es confeccionarà el corpus final sobre l'època, el personatge i l'obra. L'activitat proposada cobrirà l'anàlisi de les característiques del text i del tipus de raonament de l'època.

Per tal de treballar a l'estil d' al-Khwârizmî es fa la proposta següent, en ella es barreja el raonament algebraic actual amb el raonament geomètric propi de l'època. Fins a quin punt és important que l'alumnat diferencií entre què podria ser raonament a l'estil del personatge estudiat i què és propi del raonament actual dependrà del grau d'aprofundiment que vulguem arribar. Podria ser suficient comentar que el raonament geomètric era el propi de l'època atès que l'àlgebra com avui la coneixem justament estava en procés de gestació, tot comentant l'origen de la paraula àlgebra i algoritme.

Es dediquen unes primeres sessions a la resolució algebraica d'equacions incompletes, utilitzant els procediments propis de les equacions de 1r grau combinats amb l'extracció de l'arrel quadrada.[4] Cal tenir present que aquest tema, l'equació de 2n grau, s'introdueix com a tal per primer cop a 3r d'ESO, després de d'haver treballat àmpliament uns mesos abans, la introducció a les expressions algebraiques de 1r grau, la seva relació amb situacions i problemes i la resolució de les equacions. En algunes promocions s'ha fet una primera introducció a l'àlgebra de 1r grau a finals de 2n d'ESO. Es tracta doncs d'aprofitar les habilitats adquirides per a l'alumnat en plantejar, interpretar i resoldre equacions de 1r grau, per a resoldre les equacions de 2n grau incompletes.

[4] A l'Annex s'inclouen els fulls de treball per a l'alumnat

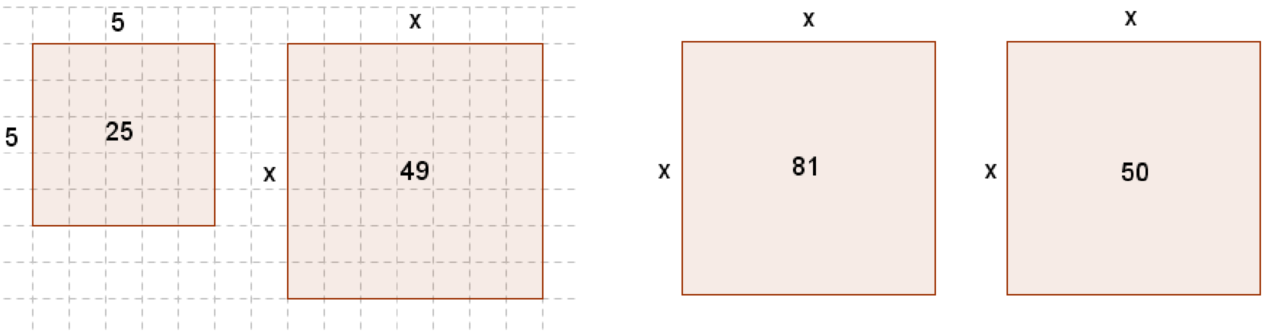
Després de resoldre algebraicament les equacions de 2n grau incompletes en una primera sessió, es dediquen unes sessions a la interpretació geomètrica de x^2 i poc a poc s'introdueix a l'alumnat en la resolució d'equacions de 2n grau incompletes, però ara des del punt de vista geomètric, a través de la interpretació de x i x^2 com a mesures de costats de quadrats i de les seves àrees respectives.

Es posen en joc dos mètodes de resolució:

- l'algebraic (provenint de les equacions de 1r i introduint quan cal l'arrel quadrada)
- el geomètric que té tota la potència en aconseguir raonar amb quadrats

Pas a pas es van exhaurint tots els tipus d'equacions de 2n grau incompletes, s'està seguint la classificació d'equacions d'al-Khwârizmî.

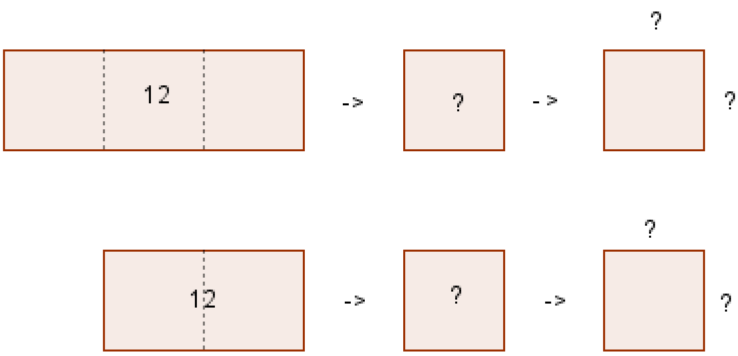
a) Treballant amb un quadrat i la seva àrea



Es resolen equacions del tipus:

$$x^2 = a \quad \text{o bé} \quad x^2 - a = 0 \quad \text{amb} \quad a > 0$$

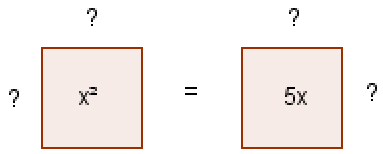
b) Quan es treballa amb més d'un quadrat



Es resolen equacions del tipus:

$$ax^2 = c$$

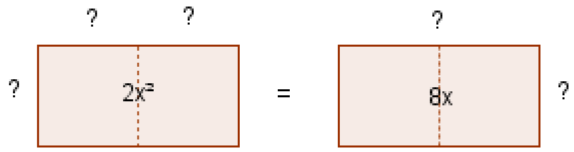
c) Per introduir les equacions on x és factor comú cal treballar amb:



$\Rightarrow \quad x = ...$

Com seria l'expressió algebraica de l'equació resolta? . . . .

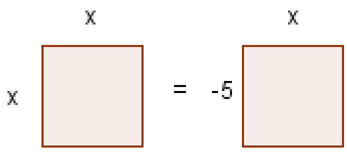
I també:



$\Rightarrow \quad x = ...$

Resolució de l'equació: . . . .

Es resol pel mateix procediment: $x^2 + 5x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = -5x$[5]



segons la figura, quin valor ha de tenir x perquè tot funcioni?
En definitiva es resolen les equacions dels tipus:

$ax^2 = bx$ on *a* i *b* poden ser indistintament coeficients positius o negatius

És el moment de fer recapitulació i parlar de les solucions obtingudes fins ara i d'introduir les solucions negatives o nul·les.

[5] La interpretació de mesures i àrees negatives és una dificultat afegida, es tracta d'anar-la treballant.

Un cop l'alumnat ha descobert com són les solucions de les equacions que s'han anat resolent fins ara (nombres oposats o bé un nombre qualsevol i el zero) se'ls convida a que escriguin equacions a partir de les seves solucions, en els casos equivalents als analitzats fins ara, és a dir:

$x = 3, -3 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 9$ o bé $x^2 - 9 = 0$

$x = 3, 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 3x$ o bé $x^2 - 3x = 0$

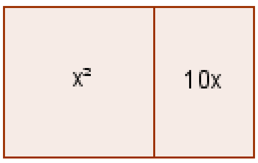
$x = -3, 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 3x$ o bé $x^2 + 3x = 0$

i totes les seves múltiples fins arribar a: $ax^2 = c$ i $ax^2 = bx$

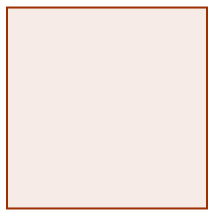
d) Arribats a aquest punt es planteja resoldre una equació amb tots els coeficients, per exemple:

$$x^2 + 10x = 39$$

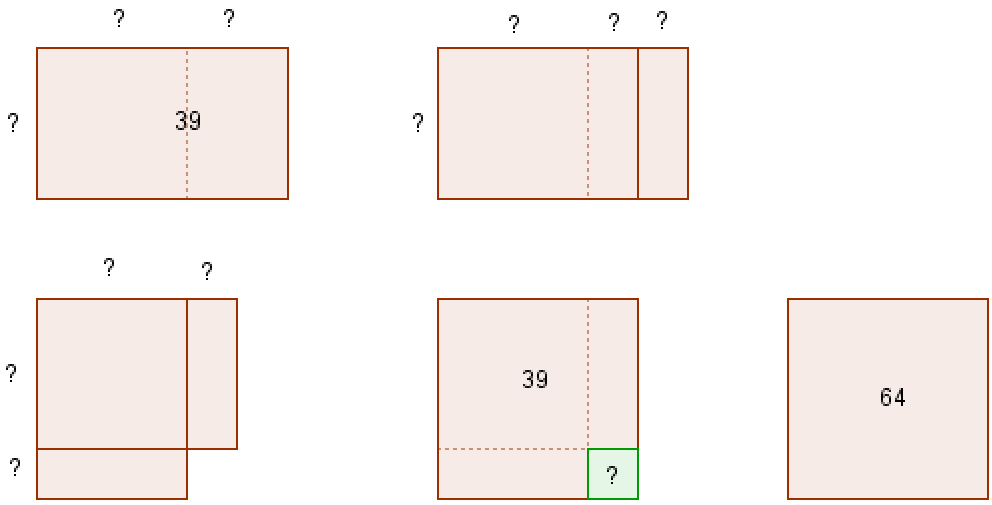
utilitzant, com hem fet fins ara, el procediment de les àrees de quadrats i de rectangles:



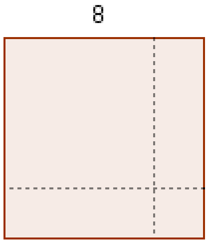
cal transformar aquesta figura d'àrea coneguda: 39 en un quadrat o gairebé.

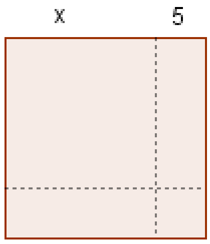


el procediment d'al-Khwârizmî a l'obra *Hisâb al-jabr wal-muqqabala* (813) és descriptiu amb algunes justificacions geomètriques de les solucions trobades. Seguint el fil conductor de les seves justificacions geomètriques i reinterpretades en el llenguatge algebraic actual obtenim:

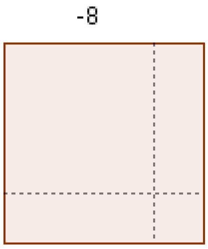


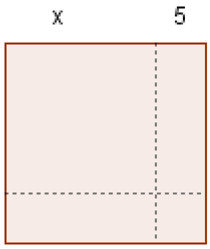
a partir del 64 i de les seves arrels quadrades, 8 i –8 cal reconstruir el procés i arribar a les solucions:





$\Rightarrow \quad x = \ldots$





$\Rightarrow \quad x = \ldots$

6. L’experimentació de la proposta

La resolució geomètrica d’equacions de 2n grau es va treballar durant quatre setmanes amb un grup d’alumnes de 3r d’ESO de l’IES Badalona en el curs 2007-08 VII. L’objectiu de l’experiència era:

- Començar un tema, l’equació de 2n grau, a partir de la seva història per a donar raó de perquè s’estudia i de quina importància ha tingut en el desenvolupament de la matemàtica.
- Mostrar la manera de raonar matemàticament d’altres èpoques per tal de modificar la visió de ciència exacta i inamovible que tenen la majoria d’alumnes sobre aquesta matèria, el que avui fem així en altres èpoques es feia altrament i en el futur també pot ser diferent.
- Utilitzar les connexions entre diferents continguts matemàtics, com a manera de fer veure a l’alumnat que les matemàtiques són un tot que conté diferents camps i que aquests s’han de posar en acció alhora quan ens plantegem resoldre un problema, en aquest cas la resolució d’equacions de segon grau. en aquest cas es tractava de connectar l’equació de 1r grau amb la de 2n grau però a la vegada i el més important el raonament geomètric i el raonament algebraic.
- Partir dels coneixements previs dels alumnes, no era solament connectar l’equació de 1r grau amb la de 2n grau sinó acompanyar-los perquè el mètode algebraic de resolució d’equacions de 1r grau el transfereixin a d’altres situacions que poguessin reconèixer, les equacions incompletes de 2n grau.
- Introduir un mètode, la resolució geomètrica, amb el que els alumnes adquiriran més confiança en la seva capacitat de resoldre equacions perquè és més intuïtiu que l’aplicació directa i freda d’una fórmula i a més els familiaritza millor amb el llenguatge algebraic.

Partint de la resolució Àrab de les equacions de segon grau i utilitzant com a primer recurs el càlcul de la resolució algebraica de les de 1r grau, es dissenyen una sèrie de tasques perquè l’alumnat connecti els seus coneixements de les equacions de 1r grau d’una banda i el càlcul d’àrees de quadrats i rectangles, i els apliqui per interpretar geomètricament la resolució de les equacions de 2n grau incompletes. Després per comparació i síntesi, arribarà a construir un procediment de càlcul, aplicable a totes les equacions de 2n grau, basat en la construcció geomètrica de completar quadrats. Aquesta primera part va quedar recollida en el quadre del disseny de l’activitat.

L'activitat va ser l'últim tema treballat amb els alumnes de 3r D en el curs 2007-08. Es van dedicar 9 sessions a la resolució de les taques proposades, 2 més a proves individuals i 1 tercera a la correcció i comentari de la primera de les proves.

En aquesta activitat, com a la resta del curs, es va treballar en grups heterogenis A partir del material lliurat[6] es convidava a l'alumnat que treballessin conjuntament. El material que es va lliurar a l'alumnat és molt simple, només conté enunciats i preguntes; les explicacions les havia d'elaborar cada grup i cada alumne/a les escrivia en el dossier que havia de lliurar un cop acabat el tema.

A cada sessió de classe, abans del treball en grup i un cop repartits els fulls amb les qüestions que calia resoldre, es feia una lectura comentada entre tothom, per tal d'aclarir les tasques encomandes. Els dubtes individuals s'havien de resoldre en el fòrum del grup i es consultava a la professora quan el dubte ho era de tot el grup. La professora anava passant per les taules observant què feien els alumnes, atenia les demandes de grup si pot ser amb suggeriments i altres preguntes més que amb respostes directes. Quan els dubtes es generalitzaven, ho eren de més de dos grups, els aclariments es feien per a tothom a la pissarra.

[6] El material lliurat als alumnes i les dues proves són a l'Annex 1.

7. Aspectes competencials que es desenvolupen

A partir del currículum de matemàtiques i de les competències bàsiques del DOGC, s'analitza com es concreta en aquest element els aspectes competencial. A la columna esquerra els documents oficials (currículum i document de competències bàsiques), a la dreta l'aportació de la resolució d'equacions de 2n grau geomètricament.

Contribució a l'adquisició de la competència matemàtica

implicacions, processos, continguts i criteris d'avaluació del DOGC que es treballen en l'Element

El currículum de matemàtiques del DOGC			La resolució geomètrica d'equacions de 2n grau
La competència matemàtica		• Pensar matemàticament • Raonar matemàticament • Plantejar-se i resoldre problemes. • Obtenir, interpretar i generar informació amb contingut matemàtic. • Utilitzar les tècniques matemàtiques bàsiques i els instruments • Interpretar i representar expressions, processos i resultats matemàtics. • Comunicar als altres el treball i els descobriments realitzats, tant oralment com per escrit, utilitzant el llenguatge matemàtic.	L'alumnat avança en el camí de l'adquisició de la competència matemàtica a través del processos que va realitzant a l'aula amb les activitats que se li plantegen. Els processos que es preveuen estan desglossats en l'apartat següent i molts d'elles es repeteixen en la competència. Pel que fa a l'ús del llenguatge algebraic, en aquesta proposta l'àlgebra està totalment lligada a la interpretació geomètrica. S'ha fet aquesta aposta conscientment pensant que recolzar en els inicis la comprensió d'aquest llenguatge abstracte en un model real i concret pot ser un referent més proper per l'alumne/a que podrà abandonar més endavant quan arribi al grau de comprensió adequat.
Continguts	**Canvi i relacions**	Representar i analitzar situacions i estructures matemàtiques utilitzant símbols algebraics • *Resolució d'equacions* de 2n grau amb fluïdesa. Interpretació gràfica.	En la proposta es resolen tot tipus d'equacions de 2n grau a través de la interpretació geomètrica .
	Espai i forma	Analitzar les característiques i propietats de figures geomètriques de dues i tres dimensions i desenvolupar raonaments sobre relacions geomètriques. • *Relació* entre perímetres i àrees Utilitzar la visualització, el raonament matemàtic i la modelització geomètrica per a resoldre problemes • *Ús* de models geomètrics per representar i explicar relacions numèriques i relacions algebraiques.	El mètode, en la línia del nou currículum, permet trobar les solucions amb un algorisme de càlcul on cada valor numèric s'associa amb les mesures de longituds i d'àrees de quadrats i de rectangles i les operacions algebraiques s'associen a operacions entre les mesures de les figures.
	Mesura	Comprendre els atributs mesurables dels objectes, i les unitats, sistemes i processos de mesura. • *Relació* entre longituds i àrees	El raonament geomètric que s'utilitza en el procés de resolució de les equacions es basa en la relació multiplicativa entre longituds dels costats de quadrats i rectangles i les àrees corresponents.
Processos generals que es treballen a tots els cursos		• Resolució de problemes *(identificació, distinció, simulació, desenvolupament d'estratègies, elaboració de conclusions)* • Raonament i prova *(ús/utilització, anàlisi, comparació, selecció, efecte, decisió, formulació de conjectures, resolució, càlcul, aproximació històrica)* • Comunicació i representació *(argumentació, expressió, construcció, representació, generació, utilització del vocabulari)* • Connexions *(relació, transformació, interpretació, determinació, exploració)*	Es resol la situació plantejada inicialment: les equacions de 2n grau utilitzant un mètode històric. En tot el procés de construcció del mètode hi ha raonament i prova i a més s'actua per comparació quan s'identifiquen diversos casos (l'equació incompleta) per similitud a l'equació de 1r grau. El fet de treballar en grup, treure conclusions i posar-ho en comú amb tota la classe comporta comunicació i representació. Completar quadrats per a resoldre l'equació de 2n grau donen peu a connectar l'àlgebra, la geometria i la mesura. La utilització del referent geomètric ajuda a donar un sentit més concret a les operacions, les sumes són adjunció de segments, els productes són àrees. Si mesurem les longituds i les sumem estem afegint segments, si el que fem és multiplicar estem calculant la mesura de les àrees.

Criteris d'avaluació	• Resoldre problemes de la vida quotidiana, d'altres matèries i de les pròpies matemàtiques utilitzant símbols i mètodes algebraics, i avaluar altres mètodes de resolució possibles. • Expressar verbalment amb precisió, raonaments, relacions quantitatives i informacions que incorporin elements matemàtics, valorant la utilitat i simplicitat del llenguatge matemàtic i la seva evolució al llarg de la història. • Analitzar i avaluar les estratègies i el pensament matemàtic dels altres, a través del treball per parelles o en grup o bé la posada en comú amb tota la classe. • Expressar per escrit amb precisió raonaments, conjectures, relacions quantitatives observades i informacions que incorporin elements matemàtics, simbòlics o gràfics i contrastar-los amb els dels companys.	Els criteris d'avaluació no solament diuen com avaluar l'alumnat sinó que són un referent clar per a decidir la metodologia de treball a l'aula. En aquest sentit la proposta recull clarament l'orientació transmesa per els quatre primers criteris d'avaluació de 3r d'ESO: En l'element es tracta de resoldre un problema de la pròpia matemàtica: la resolució d'equacions de 2n grau. Justament és el que s'ha fet, la comparació entre el llenguatge retòric d'al-Khwârizmî, la interpretació geomètrica i la traducció a l'àlgebra actual. Es treballa en grup i hi ha posada en comú. Es demana a l'alumnat que escrigui els seus raonaments, que els contrasti i comparteixi amb el grup. Es completa l'actuació recollint el dossier individual de cada alumne/a.

Contribució a l’adquisició de les competències bàsiques

Les competències bàsiques al DOGC		La resolució geomètrica d’equacions de 2n grau
1. Competència comunicativa lingüística i audiovisual	En el desenvolupament d'aquesta competència juga un paper essencial saber seleccionar i aplicar determinats propòsits o objectius a les accions pròpies de la comunicació lingüística (el diàleg, la lectura, l'escriptura, etc.). Per aprendre a fer-ho, cal que en les diferents matèries curriculars es generin situacions comunicatives i projectes o tasques en la resolució dels quals calgui emprar habilitats per a representar-se mentalment, interpretar i comprendre la realitat, i organitzar i autoregular el coneixement i l'acció dotant-los de coherència.	- Cercar informació per internet del context històric estudiat - Treballar en grup dialogant, contrastant i acordant. - Construir el propi coneixement i expressar per escrit el procés de raonament. Són algunes de les accions que es realitzen en la proposta que contribueixen directament al desenvolupament d’aquesta competència.
2. Competència artística i cultural	Les matemàtiques, més enllà de les seves aplicacions, constitueixen una creació humana d’un gran valor cultural que cal conèixer, valorar i relacionar amb la realitat. A més, al ser una ciència i un llenguatge construït històricament per les diferents cultures, atorga valor a la construcció de la identitat, tant de les cultures com de les persones.	En el treball amb contextos històrics es mostra l’afirmació de ciència i llenguatge construït històricament. En aquest cas es mostra una part del desenvolupament que donarà lloc a l’àlgebra actual.
3. Tractament de la informació i competència digital	Aquesta competència es desenvolupa en la cerca, captació, selecció, registre i processament de la informació, amb l'ús de tècniques i estratègies diverses segons la font i els suports que s'utilitzin (oral, imprès, audiovisual, digital).	En aquest element s’ha desenvolupat la cerca i selecció d’informació: - Cercar informació per internet del context històric estudiat.
4. Competència matemàtica	Correspon a tot el quadre desenvolupat inicialment	

5. Competència d'aprendre a aprendre	Per desenvolupar aquesta competència cal ser conscient del que se sap i del que cal aprendre, de com s'aprèn, i de com es gestionen i controlen de forma eficaç els processos d'aprenentatge, optimitzant-los i orientant-los a satisfer objectius personals. Implica també fomentar el pensament creatiu, la curiositat de plantejar-se preguntes, identificar i plantejar la diversitat de respostes possibles davant una mateixa situació o problema utilitzant diverses estratègies i metodologies que permetin afrontar la presa de decisions, racionalment i crítica, amb la informació disponible.	A la proposta es tracta de fer conscient l'alumnat del que saben, la resolució algebraica de l'equació de 1r grau i per intentar resoldre una situació nova, les equacions de 2n grau incompletes per comparació amb les anteriors. L'element presentat ha començat amb una sèrie de preguntes que es poden traslladar a la situació d'aula, convidant l'alumnat a plantejar-se-les o bé a proposar-ne d'altres que es puguin relacionar amb el tema.
6. Competència d'autonomia i iniciativa personal	En la mesura que l'autonomia i la iniciativa personal involucra sovint altres persones, aquesta competència obliga a disposar d'habilitats socials per a relacionar-se, cooperar i treballar en equip: posar-se en el lloc de l'altre, valorar les idees d'altri, dialogar i negociar, l'assertivitat per fer saber adequadament a les altres persones les pròpies decisions, i treballar de forma cooperativa i flexible.	El fet de plantejar el treball en grup respon també a aquest propòsit.
7. Competència en el coneixement i la interacció amb el món físic	També incorpora l'aplicació d'algunes nocions, conceptes científics i tècnics, i de teories científiques bàsiques prèviament compreses, com per exemple: identificar i plantejar problemes rellevants; realitzar observacions directes i indirectes; plantejar i contrastar solucions temptatives o hipòtesis; identificar el coneixement disponible i comunicar conclusions.	En l'element plantejat es porta a l'alumnat a plantejar i contrastar solucions, a identificar el coneixement disponible (la resolució d'equacions de1r grau, la visualització en forma de mesures de longituds i d'àrees les operacions numèriques i algebraiques)
8. Competència social i ciutadana	Afavoreix també la comprensió de la realitat històrica i social del món, la seva evolució, els seus assoliments i problemes. La comprensió crítica de la realitat exigeix experiència, coneixements i consciència de l'existència de distintes perspectives en analitzar aquesta realitat.	L'ús de contextos històrics també busca donar raó del contingut que s'està estudiant, és enllà de justificar-lo perquè està en un programa oficial. En l'exemple el repte era la classificació dels tipus d'equacions i la cerca d'un mètode general per a resoldre-les..

8. Referències bibliogràfiques

ABENBEDER (1916) *Compendio de àlgebra de Abenbeder,* José Sánchez Pérez (ed. i trad.), Madrid, Centro de Estudios Históricos.

BENOIT, Paul; MICHEAU Françoise (1991) "¿El intermediario árabe?", dins de *Historia de las ciencias*, M. Serres (ed), Madrid, Cátedra, 175-201.

CATALA, M. A. (1981)"El nacimiento del álgebra", dins de *Historia de la ciencia árabe*, J. Vernet (ed), Madrid, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 23-37.

MASSA, Mª Rosa (2005) "*Les equacions de 2n grau al llarg de la història"*. Dins: *Biaix* n 24, 4-15.

MOHAMED BEN MUSA AL-KHWARIZMI (1986) *The Algebra,* Rosen (ed. i trad.), Londres, Olms.

PUIG, Luis (1998) "Componentes de una historia del álgebra. El texto de al-Khwarizmi restaurado." En F. Hitt (Ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 109-131). México, DF: Grupo Editorial Iberoamérica. [Versión ligeramente modificada en 2003.]

PUIG,.Luis (2003) "Historia de las ideas algebraicas: componentes y preguntas de investigación desde el punto de vista de la matemática educativa." Conferencia invitada al Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Granada: Universidad de Granada, 10-13 de septiembre 2003.

PUIG, Luis (2008) "Historias de al-Khwârizmî". Dins: *Suma* n 58, 125-130; 59, 105-112; 60, 103-108; Torrent, Ed. FESPM.

RASHED, R. (1997) "L'algèbre" dins de *Histoire des sciences arabes 2. Mathématiques et physique*, Paris, Seuil, 31-54.

TOOMER, G. J. (1970-1990) Al-Khwärizmï, Abu Ja'far Muhammad ibn Müsä. In C.C. Gillispie (Ed) *Dictionary of Sicentific Biography.* Vol 7 (pp. 358-365) Charles Scribner's Sons. New York.

YOUSCHKEVITCH, A. P. (1976) *Les Mathématiques Arabes (VIII-XV s.)* Paris, Lib. Philos, Vrin.

http://www.xtec.cat/estudis/eso/curriculum_2007/matematiques_eso.pdf

http://www.xtec.cat/estudis/eso/curriculum_2007/competencies_eso.pdf

9.1. ANNEX: Els fulls de treball i els exàmens

Les primeres equacions de 2n grau

A. La resolució aritmètica

1. Resol les equacions següents:

a) $x^2 = 25$	e) $x^2 - 81 = 0$	i) $x^2 + 81 = 0$
b) $3x^2 = 12$	f) $2x^2 - 50 = 0$	j) $2x^2 + 50 = 0$
c) $x^2 = 20$	g) $x^2 - 24 = 0$	k) $x^2 + 24 = 0$
d) $2x^2 = 12$	h) $3x^2 - 54 = 0$	l) $3x^2 + 54 = 0$

Conclusions:
Què heu vist resolent aquestes equacions? Quantes solucions hi ha? Tenen alguna relació entre elles? Totes les equacions tenen solucions?

2. Escriu una equació de 2n grau amb solucions:

a)2 i –2 c) sense solucions, justifica que no en tindrà

b)3 i –3

Comprova, resolent les equacions, que el que dius és cert.

3. Resol les equacions següents:

a) $x^2 - 5x = 0$ c) $2x^2 - 8x = 0$

b) $x^2 + 5x = 0$ d) $3x^2 + 81x = 0$

Conclusions:
Què heu vist resolent aquestes equacions? Quantes solucions hi ha? Tenen alguna relació entre elles? Totes les equacions tenen solucions?

4. Escriu una equació de 2n grau amb solucions:

a)2 i 0 c) 2

b) –2 i 0

Comprova, resolent les equacions, que el que dius és cert.

5. Intenta escriure una equació de 2n grau amb solucions:

a) 2 i 3 b) 2 i –3

B. La resolució geomètrica

6. Per a cadascuna de les equacions de l'exercici ***1*** dibuixa figures, rectangles o quadrats que tinguin respectivament les àrees que apareixen a les equacions.

Exemple:

a)dibuixa un quadrat de costat .... que tindrà d'àrea 25

Conclusions:
Pots resoldre gràficament tots els casos? Quins són els casos que no es poden resoldre geomètricament?

7. Fes una interpretació gràfica de les equacions de l'exercici ***3***, quines d'aquestes equacions es poden resoldre geomètricament? A quina figura vas a parar quan pots resoldre l'equació geomètricament.

Primera prova d'equacions de 2n grau
En aquesta prova es poden consultar els apunts de classe

Recorda que:

- *algunes equacions es poden resoldre aïllant les incògnites i fent l'arrel quadrada al final* - *algunes equacions tenen la solució zero i una altra que es "veu" mirant bé* - *en altres casos, ens recolzàvem en figures geomètriques i les seves àrees per esbrinar la solució*

1. Resol les equacions següents pel mètode que et sembli més convenient, dóna totes les solucions que puguis trobar i comprova, substituint per escrit en tots els casos, que la solució o solucions que dones són correctes.

Alerta, estan totes barrejades tu has de decidir el mètode més convenient!

a) $x^2 - 225 = 0$

b) $x^2 - 39x = 0$

c) $x^2 + 30x = 175$

d) $2x^2 + 56x = 0$

e) $3x^2 - 300x = 0$

f) $x^2 = 169$

g) $x^2 + 14x = 147$

h) $x^2 + 25 = 0$

i) $x^2 + 27x = 0$

j) $3x^2 - 363 = 0$

Ara et toca a tu construir equacions de 2n grau

2. Escriu equacions de 2n grau que tinguin les solucions que s'indica a cada cas. Comprova, substituint per escrit en tots els casos, que l'equació que tu dones té les solucions demanades

a) solucions: x = 8 i x = -8

b) solucions: x = 7 i x = 0

c) solucions: x = -9 i x = 0

d) solució x = 5 i que no tingui solució x = -5 ni x = 0

3. Investiga, amb els resultats que tens de l'exercici 1 i posant-hi una mica d'imaginació, amb figures o sense o per prova i assaig quines solucions poden tenir les equacions següents. Escriu en el full tots els assaig i proves per a trobar la solució.

a) $x^2 - 14x = 147$

b) $x^2 - 30x = 175$

c) $x^2 - 28x = 60$

d) $x^2 - 6x = 91$

Resolució d'equacions de 2n grau

Distingeix de quin tipus d'equació es tracta i resol-la pel mètode més convenient. Un cop resoltes, comprova substituint que les solucions que dones són correctes:

a) $2x^2 - 288 = 0$

b) $x^2 - 5x - 24 = 0$

c) $x^2 + 11x + 24 = 0$

d) $3x^2 - 75x = 0$

e) $x^2 + 5x = 0$

f) $2x^2 - 11x = 0$

g) $2x^2 - 18 = 0$

h) $x^2 - 5x - 24 = 0$

i) $x^2 - 11x + 24 = 0$

j) $2x^2 - 288x = 0$

k) $x^2 + 8x - 9 = 0$

l) $2x^2 + 20x + 18 = 0$

m) $2x^2 + 32 = 0$

n) $x^2 - 12x + 20 = 0$

o) $3x^2 - 24x - 60 = 0$

p) $2x^2 + 62x = 0$

q) $x^2 + 4x + 4 = 0$

r) $3x^2 - 18x + 27 = 0$

Construcció d'equacions de 2n grau

Per escriure les equacions del full anterior vaig realitzar una sèrie d'operacions, a la majoria de casos multiplicacions, i després vaig igualar els resultats finals a zero i vaig obtenir les equacions de 2n grau:

$$(x-2)(x+7) = x^2 + 7x - 2x - 14 = x^2 + 5x - 14$$
$$(x-2)(x-7) = x^2 - 7x - 2x + 14 = x^2 - 9x + 14$$
$$(x+2)(x+7) = x^2 + 7x + 2x + 14 = x^2 + 9x + 14$$
$$(x+2)(x-7) = x^2 - 7x + 2x - 14 = x^2 - 5x - 14$$

$x^2 = 144 \qquad 2x^2 = 288 \qquad 2x^2 - 288 = 0$
$x^2 = 25 \qquad 5x^2 = 125 \qquad 5x^2 - 125 = 0$

$$(x-3)(x+8) = x^2 + 8x - 3x - 24 = x^2 + 5x - 24$$
$$(x+3)(x-8) = x^2 - 8x + 3x - 24 = x^2 - 5x - 24$$
$$(x+3)(x+8) = x^2 + 8x + 3x + 24 = x^2 + 11x + 24$$
$$(x-3)(x-8) = x^2 - 8x - 3x + 24 = x^2 - 11x + 24$$

$$(x-1)(x+9) = x^2 + 9x - x - 9 = x^2 + 8x - 9$$
$$(x-1)(x-9) = x^2 - 9x - x + 9 = x^2 - 10x + 9$$
$$(x+1)(x+9) = x^2 + 9x + x + 9 = x^2 + 10x + 9$$
$$(x+1)(x-9) = x^2 - 9x + x - 9 = x^2 - 8x - 9$$

$$(x-2)(x+10) = x^2 + 10x - 2x - 20 = x^2 + 8x - 20$$
$$(x-2)(x-10) = x^2 - 10x - 2x - 20 = x^2 - 12x + 20$$
$$(x+2)(x+10) = x^2 + 10x + 2x + 20 = x^2 + 12x + 20$$
$$(x+2)(x-10) = x^2 - 10x + 2x - 20 = x^2 - 8x - 20$$

$$(x+2)^2 = x^2 + 2x + 2x + 4 = x^2 + 4x + 4$$

$$(x-3)^2 = x^2 - 3x - 3x + 9 = x^2 - 6x + 9$$

1. Busca en el teu full les solucions de les respectives equacions. Escriu al costat de cada equació les seves solucions.

Conclusions generals sobre la construcció d'equacions, si volem que tinguin unes solucions concretes?
Recorda com construïes equacions amb solució, per exemple 3 i –3. Mira si pots fer-ho amb el procediment anterior.

Recorda com construïes equacions quan una de les solucions era zero, per exemple 0 i 7. Mira si pots fer-ho amb el procediment general que acabes de deduir.

2. Escriu equacions de 2n grau amb les condicions següents:

a) solucions: $x = 2$ i $x = 3$

b) solucions: $x = 2$ i $x = -5$

c) solucions: $x = -2$ i $x = 7$

d) solucions: $x = -5$ i $x = -7$

e) solucions: $x = 0$ i $x = 5$

f) solucions: $x = 0$ i $x = -7$

g) una única solució doble: $x = 3$

h) una única solució doble: $x = -4$

i) sense solució

2n Examen d'equacions de 2n grau

1. Classifica i resol les equacions següents pel mètode més convenient. Un cop resoltes comprova substituint que el resultat és correcte

a) $3x^2 - 48 = 0$

b) $x^2 - 5x + 6 = 0$

c) $x^2 + 10x + 25 = 0$

d) $2x^2 + 12x - 32 = 0$

e) $3x^2 + 21x = 0$

f) $3x^2 - 15x - 18 = 0$

g) $x^2 + 8x + 15 = 0$

h) $2x^2 + 18x = 0$

i) $5x^2 - 20x + 20 = 0$

j) $4x^2 - 36x = 0$

2. Escriu equacions de 2n grau amb les condicions següents

a) solucions $x = 2$ i $x = 3$

b) $x = 2$ i $x = -5$

c) $x = -2$ i $x = 7$

d) $x = -7$ i $x = 7$

e) $x = 0$ i $x = 5$

f) $x = 0$ i $x = -5$

9.2. ANNEX:

Un nou recurs manipulable

En una sessió, quan m'adono que tenen dificultats per distingir el cas en que el coeficient de la x de 1r grau és positiu $(x^2 + ax = b)$ del cas en que el coeficient de la x de 1r grau és negatiu $(x^2 - ax = b)$ improviso amb un full de paper un "retallable" quadrat que reprodueix la *figura 5* de la pàg.9 del procés de resolució d'una equació completant quadrats. Quan el quadrat està desplegat els costats amiden $x + \frac{a}{2}$ i es veu a dins el quadrat de costat x.

Quan el quadrat està plegat en dins, el costat amida x però dins es veu un altre quadrat de costat x – a.

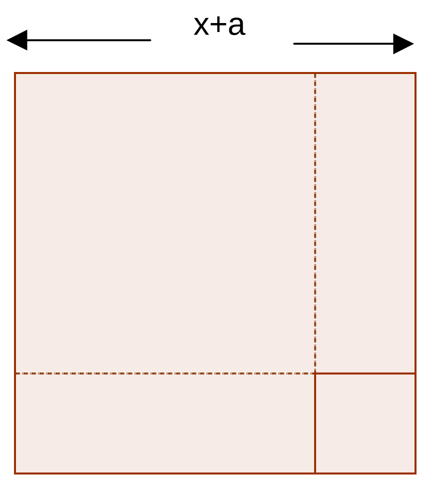


Fig.6: El "retallable" obert

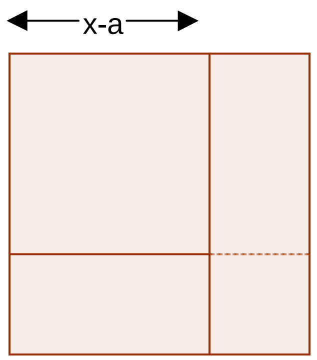


Fig. 7: El "retallable" plegat endins

El "retallable" ha estat una eina molt potent per entendre quan s'ha de sumar i quan s'ha de restar per a trobar la incògnita, un cop s'ha trobat el costat del quadrat obtingut completant el rectangle inicial que és la representació geomètrica de l'equació plantejada.

Com totes les eines se'n pot fer un mal ús i alguns alumnes han escrit + a, o - a en el "retallable" de manera que desplegat veuen + a i plegat – a, consulten el "retallable" per tal de saber el darrer pas sense representar-s'ho geomètricament que és el que es pretenia.

9.3. ANNEX

El seguiment de les tasques de quatre alumnes

Per tal fer el seguiment de l’activitat amb produccions dels alumnes es van triar algunes tasques de quatre alumnes. El nombre semblava suficient i permetia aplicar-hi els criteris següents:

- Mostra equitativa per sexes: dos nois i dues noies.
- Reunir diferents tipologies d’alumnes que representessin el que havia succeït a tot el grup.

Per a cada cas, es fa una primera lectura de perquè l’alumne/a no ha arribat fins al final de la resolució correctament i quines conclusions se’n poden treure. Els quatre casos que donen força joc per a les interpretacions. El coneixement continuat dels alumnes al llarg del curs també ha influït en la tria i en la interpretació del que han fet.

a) L’alumna 1

És una noia molt fluixa que va fer diverses fluctuacions al llarg del curs amb algunes avaluacions aprovades i algunes suspeses. Vol aprovar més que aprendre i és capaç d’estudiar el que calgui malgrat que no entengui res. La seva producció té aquestes característiques:

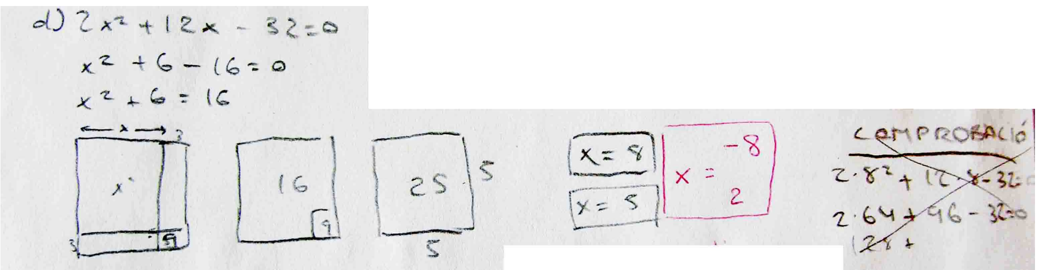


Fig. 8: Exercici 1

CC, aquesta alumna comença bé el procés, però té problemes per acabar-lo. Ha après o ha memoritzat que ha de trobar dues solucions i tant si com no les dona. Una és el *5* directament i l’altre la suma del *5* amb el *3* , el *8*. No ha explotat fins al final la potència del dibuix i tampoc ha escrit que l’arrel de 25 pot ser 5 però també –5, li sona que ha de fer alguna cosa amb el *5* i el *3* però no sap ben bé què.

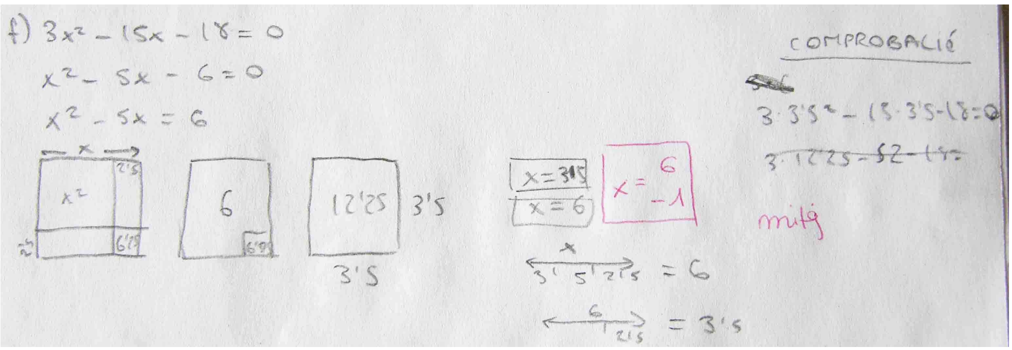


Fig. 9: Exercici 2

Igual que en l'exercici 1, fa la primera part del procés correctament però en trobar el 3,5 no sap ben bé què fer amb ell. Torna a sumar com abans i ara encerta una de les solucions, perquè ara realment calia sumar, mentre que abans calia restar. Com abans la segona solució que dóna és el resultat mateix de l'arrel.

b) L'alumne 2

Aquest alumne és noi amb bona capacitat de reflexionar i raonar però amb uns hàbits de treball molt deficitaris. Es llença a investigar si la proposta més o menys l'atrau, aquí s'hi va engrescar, però li falta constància i una mica més de dedicació per sedimentar el que va construint. Així s'evidencia en les dues mostres:

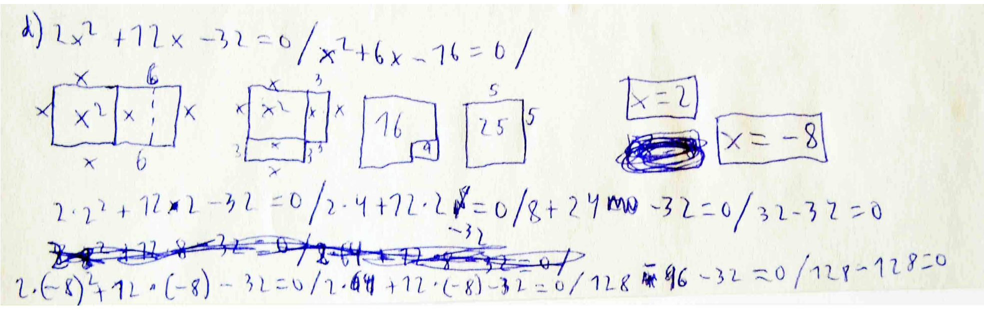


Fig. 10: Exercici 1

SR , aquest noi ha fet bé tot el procés. No explica com ha trobat el 2 i el –8 a partir del 5 però segurament sap el que ha de fer a partir del 5 per aconseguir les solucions. Sí que indica totes les operacions per a comprovar que els valors obtinguts són correctes

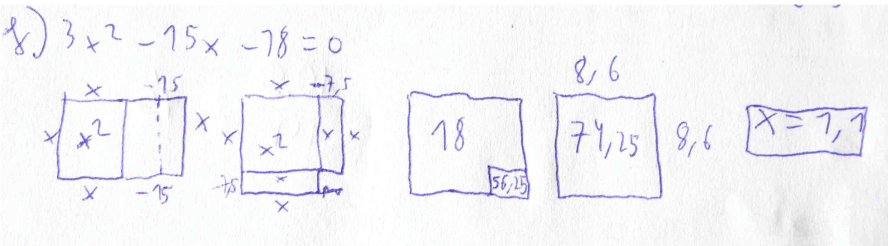


Fig. 11: Exercici 2

Aquí ha tingut problemes perquè no ha simplificat l’equació i en realitat n’està resolent una altra $x^2 - 15x - 18 = 0$. El fet que no li doni un nombre exacte fa que ja no faci tot el procés de comprovar i tampoc s’esforça en buscar la 2a solució com havia fet abans perquè sospita que ha comès algun error de càlcul. A classe es van treballar exemples amb solucions exactes o amb decimals finits.

c) L’alumna 3

La tercera alumna era una noia que anava força perduda al 1r trimestre però que va anar remuntant a partir de gener. És molt lenta però té una característica notable, vol entendre el que fa i si no ho entén es col·lapsa i no fa res.

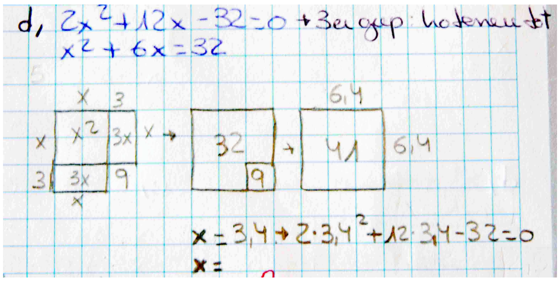


Fig. 12: Exercici 1

AJ ha tingut un “despiste” al simplificar l’equació, està resolent una altra equació. Tampoc entén molt bé què vol dir comprovar perquè ho iguala a zero però no ha comprovat que doni, sinó veuria que la solució no és correcta. Ha dubtat pel fet que li dóna decimal i ja no ha buscat la 2a solució, tot i que apunta l’espai per posar-la.

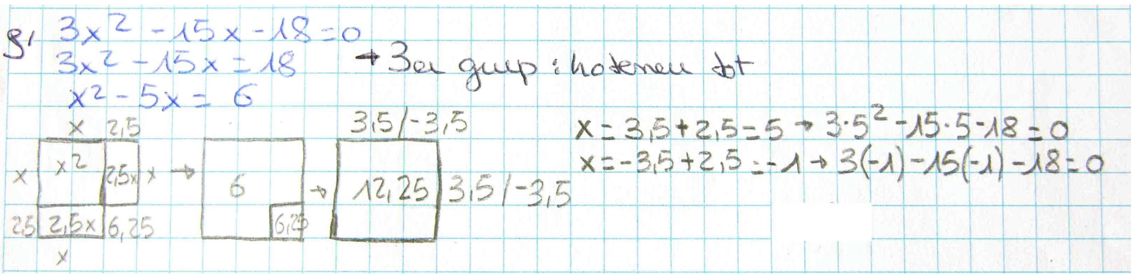


Fig. 13: Exercici 2

Ara només té un error al final 3,5 + 2,5 no és 5 sinó 6. Com abans la comprovació no és una comprovació real sinó simplement una substitució i una igualació a zero no li permet detectar l'error. El fet de treballar amb 2,5 en lloc de - 2,5 no produeix error perquè es treballa amb el seu quadrat que sempre resulta positiu. No queda clar perquè sap que cal sumar el 2,5 i no restar-lo com havia fet, mentalment, en l'exercici 1.

d) L'alumne 4

En MG té les idees molt clares i ho fa sempre tot molt bé. Sovint s'avorreix a classe perquè ho entén tot a la primera i raona bé. És mot competitiu i li costa treballar en grup. A nivell de resultats acadèmics és el millor alumne de la classe. Ell és qui ha demanat diverses vegades per les equacions de 2n grau. No tinc clar que aquest mètode li agradés gaire, el deuria trobar "poc seriós".

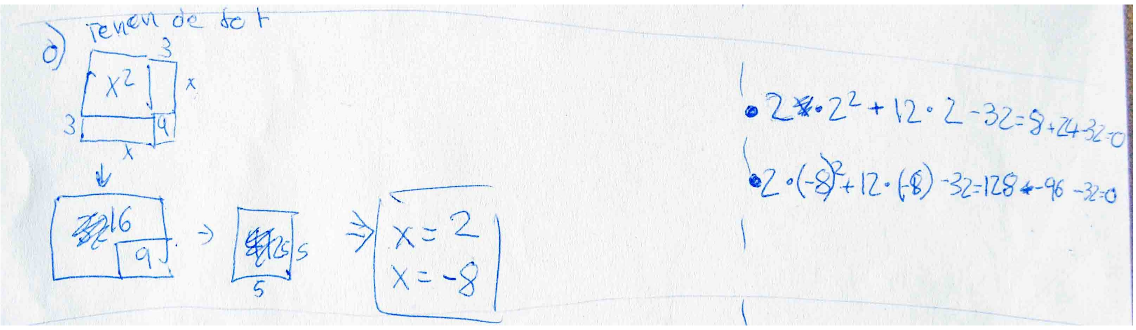


Fig. 14: Exercici 1

Amb poca escriptura és capaç de resoldre el que se li planteja i comprovar-ho correctament. No explica com ho fa però segurament a partir de les figures fa els càlculs mentalment.

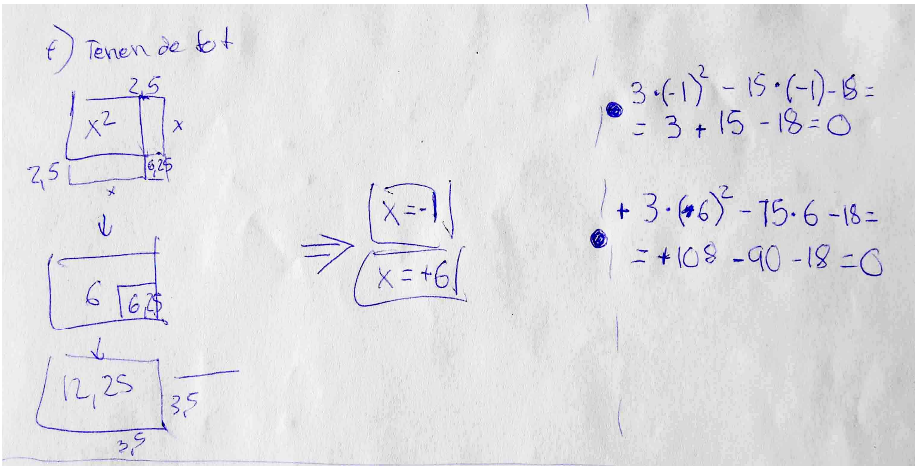


Fig. 15: Exercici 2

9.3. *ANNEX*

Consideracions entorn de l'experimentació de la proposta

S'exposen algunes conclusions referides al desenvolupament de l'activitat i a l'aprenentatge que va produir en l'alumnat.

L'activitat, realitzada amb els alumnes de 3r d'ESO D de l'IES Badalona VII, durant el curs 2007-08, va quedar totalment integrada en la programació del curs.

És exportable a qualsevol classe de 3r d'ESO perquè està prou documentada perquè qualsevol persona que hagi previst treballar amb els seus alumnes la resolució d'equacions de 2n grau la pugui reproduir, adaptant-la si cal al seu alumnat. Va ser valorada positivament pels alumnes en fer el recull al final del trimestre i per la professora en el treball de recerca.

En el disseny de l'activitat s'ha utilitzat com a recurs implícit la història de les matemàtiques, en concret l'àlgebra d'al-Khwârizmî ha estat el fil conductor per a dissenyar la resolució d'equacions de 2n grau amb auxiliars visuals.

En el context de la matemàtica àrab no s'hi ha aprofundit especialment, però s'hi ha fet referència de manera oral a classe, així s'ha situat el moment històric on es produeix el tipus de raonament seguit en l'activitat i aquest fet li dóna més significativitat.

Els alumnes han après que els procediments de resolució no són únics, s'ha presentat l'activat explicant que aquest mètode de resolució provenia de la història de la matemàtica i era diferent de la fórmula que apareix en els llibres de text actuals.

Els alumnes han utilitzat el que ja sabien per a construir nou coneixement, en aquest cas han utilitzat tècniques de resolució de l'equació de 1r grau transferides a alguns tipus d'equacions de 2n grau incompletes.

Han recorregut a la geometria i al càlcul d'àrees per a resoldre unes situacions noves que no admetien la resolució algebraica. Recórrer a la geometria no ha estat casual, hi han arribar després que a l'activitat se'ls demanés de comparar els casos d'equacions incompletes resolts a través de l'àlgebra, amb la seva representació gràfica mitjançant rectangles i quadrats. Amb aquestes primeres comparacions, s'han adonat que el cal fer és transformar, el rectangle representant de l'equació de partida, en un quadrat incomplet per un extrem, mitjançant un procediment de retallar i enganxar conservant les àrees. Després van afegir el petit quadrat que falta i van obtenir traient l'arrel quadrada, la mesura del costa del quadrat completat. Utilitzant aquest valor aconsegueixen mitjançant sumes/restes resoldre l'equació. Aquest és el procés clau de tota l'activitat, transformar el rectangle en quadrat incomplet, afegir el petit quadrat fins aconseguir el gran quadrat i recuperar la incògnita que havia quedat amagada en el procés.

Un cop entès aquest procés de construcció geomètrica l'han interioritzat com a procediment general per a resoldre les equacions completes de 2n grau i l'han practicat amb tot tipus d'equacions.

Quan se'ls ha recordat que les arrels quadrades tenen dues solucions, han investigat i treballat fins aconseguir donar també dues solucions a les equacions de 2n grau. Pel camí han donat significat a les longituds, negatives, a les àrees negatives i a la regla dels signes del producte amb nombres enters positius i negatius.

El procés de relacionar la geometria i el càlcul d'àrees amb la resolució d'equacions els va fer adonar que per a resoldre problemes cal connectar diferents continguts matemàtics, que les matemàtiques són un tot global, malgrat que en la majoria de llibres es fragmentin en lliçons separades.

La participació i la curiositat dels alumnes ha anat en augment a mesura que han anat entenent el que estan fent. Que aquest mètode els ha premés adquirir més confiança en la resolució d'equacions ho demostra el fet que tots els alumnes han estat capaços

de resoldre correctament les equacions més senzilles, les que no s'havien de simplificar o les que no produïen àrees negatives.

La interacció entre ells els ha ensenyat, un cop més, que treballar de manera responsable en equip serveix per avançar i construir millor el coneixement, explicar als altres ordena i sedimenta els propi coneixement, sentir el dubtes dels companys dóna confiança i a la vegada és un repte per veure qui troba primer una resposta que satisfaci i sigui acceptada pel grup.

Queda pendent veure com a partir d'aquí s'avança per arribar a l'àlgebra sense el recolzament dels auxiliars visuals, altrament, sense el suport de la geometria, però aquest pas requereix una mica més de maduresa per part dels alumnes.

ANNEX 4*:* El disseny de l'activitat

l'activitat desglossada per tasques		*el coneixement*			*la representació*
contingut de les tasques	**finalitat de la tasca**	**coneixements previs que han d'usar o que espero que utilitzin**	**novetat respecte al que saben**	**què queda pendent**	**aritmètica, algebraica, geomètrica,...**
1. Resoldre equacions del tipus: $ax^2 \pm b = 0$ - comprovar, substituint, que les solucions són correctes, treure conclusions.	- introduir eqs de 2n grau - transferir els procediments de 1r a 2n grau - reforçar la idea que resoldre una equació és trobar uns nombres que compleixen una fórmula	- tècniques de resol de l'eqs de 1r grau: • a vista • simplificar l'eq. dividint • canviar termes de lloc • aïllar • substituir	- l'arrel quadrada com a procediment final - l'arrel quadrada té dues solucions (recordar-ho) - les equació tenen dues solucions - hi ha equacions sense solució	- altres eqs de 2n grau amb més termes	aritmètica i algebraica
2. Construir equacions de 2n grau a partir de les solucions. Només: $x = \pm a$ o sense solució - comprovar substituint que funciona	- relacionar: equacions, solucions i la comprovació	- construcció d'equacions de 1r grau a partir de les solucions - les conclusions de l'exercici anterior	- construir eqs sense solució - hi ha infinites eqs de 2n grau sense solucions	- construir eqs amb dos nombres qualssevol - construir l'eq a partir la multiplicació de monomis: $(x+a)(x-a)$	aritmètica i algebraica
3. Resoldre equacions del tipus: $ax^2 \pm bx = 0$ - comprovar, substituint, que les solucions són correctes, treure conclusions.	- introduir més tipus d'eqs de 2n grau - transferir els procediments de 1r a 2n grau - reforçar la idea que resoldre una equació és trobar uns nombres que compleixen una fórmula	- tècniques de resol de l'eqs de 1r grau: • a vista • simplificar l'eq. dividint • canviar termes de lloc • aïllar • substituir	- la solució zero	operativitat algebraica: - treure factor comú - multiplicar monomis	aritmètica i algebraica

4. Construir equacions de 2n grau a partir de les solucions. i) $x = a \; i \; x = 0$ ii)només $x = a$ - comprovar substituint que funciona	- relacionar: equacions, solucions i la comprovació - introduir pregunta: com han de ser les equacions perquè només tinguin una solució?	- les conclusions de l'exercici anterior	- la solució zero	- construir equacions amb dos nombres qualssevol - construir l'equació a partir la multiplicació de monomis: $x\,(x-a)$ - l'operativitat algebraica	aritmètica i algebraica
5. Construir eqs de 2n grau amb dues solucions diferents	- adonar-se que no tenen prou eines per resoldre-ho - fer hipòtesis de treball: com seran les equacions que resolguin aquesta situació?	- deixem l'activitat sense resoldre perquè no tenen eines per fer-la	- cal algun contingut nou que ens permeti resoldre aquesta situació	- verificar les hipòtesis generades per la pregunta de com seran les noves equacions	aritmètica i algebraica
6. Dibuixar quadrats d'àrea els nombres que apareixen a les equacions resoltes a l'exercici 1 i 3: $ax^2 \pm b = 0$ $ax^2 \pm bx = 0$ per a relacionar la resolució numèrica i la geomètrica. - resoldre noves eqs d'aquest tipus només geomètricament	- introduir la representació geomètrica en la resolució d'eqs per aplicar aquest procediment a la resolució d'equacions completes - el quadrat i la seva àrea, figura clau per a resoldre eqs. de 2n grau geomètricament	- visualitzar l'àrea d'un quadrat a partir dels costats - visualitzar els costats del quadrat a partir de l'àrea	- les equacions tenen representació geomètrica - les operacions algebraiques tenen l'equivalent en la geometria - les equacions sense solució tenen el seu equivalent en situacions geomètriques impossibles	- la representació geomètrica i la resolució de les equacions completes - la solució zero geomètricament	aritmètica, algebraica i geomètrica
7. Resolució geomètrica de $x^2 + ax = b$ (a i b>0) - comprovar substituint que la solució és vàlida	- construir a la pissarra, entre tots, els passos per a resoldre l'equació completant quadrats - practicar-ho amb més exemples	- les operacions algebraiques i les seves equivalències geomètriques - el quadrat i la seva àrea, figura clau per a resoldre les eqs de 2n grau geomètricament	- completar una figura fins arribar al quadrat - les àrees es mantenen per transformacions de "tallar i enganxar" - l'addició de segments i la interpretació per a la resolució geomètrica de: x + 1 = 4 ; x = 3	- la 2a solució que prové de la solució negativa de l'arrel quadrada - les equacions: $x^2 + ax = b$ amb *a* i *b* negatius	algebraica i geomètrica
8. Prova amb apunts: - exercicis similars als resolts fins ara - exercici nou: $x^2 - ax = b$	- organitzar els coneixements adquirits i mostrar-ho - transferir el raonament geomètric a noves situacions	- els coneixements adquirits - comparar resultats, fer hipòtesis noves i comprovar si són certes	- la resta d'àrees i la interpretació geomètrica en la resolució d'equacions	les equacions: $x^2 + ax = b$ amb *b* negatiu	algebraica i geomètrica

9. La 2a solució de les equacions $x^2 + ax = b$ (a i b>0) - comprovar substituint que la 2a solució també és vàlida	- descobrir la 2a solució - importància de validar i comprovar resultats	- les arrels quadrades tenen dues solucions	- l'addició de segments i la interpretació amb longituds negatives per a resoldre geomètricament per exemple: $x + 15 = -20; \quad x = -35$		algebraica i geomètrica
10. Resoldre equacions de 2n grau de tot tipus amb els procediments utilitzats fins ara. - comprovar substituint que les solucions són vàlides	- caracteritzar, mirant la fórmula els 3 tipus d'equacions: ▪ sense x de 1r grau ▪ sense terme independent ▪ completa - resoldre l'equació amb el procediment més adequat. - importància de validar i comprovar resultats	- reconèixer els 3 tipus d'equacions i associar-les amb els 3 procediments: ▪ l'arrel quadrada ▪ la solució zero i el coeficient de la x ▪ el geomètric per les completes	- equacions amb una solució doble - àrees negatives, interpretació i solucions per als costats - les interpretacions geomètriques de: $x^2 - ax = b$ $x^2 + ax = -b$ $x^2 - ax = -b$ - el quadrat retallable: afegir enfora o plegar cap a dins	la fórmula de l'equació de 2n grau	algebraica i geomètrica
11. Construir equacions de 2n grau de tot tipus	- connexió entre resolució d'equacions i construcció d'eqs.	- posar en funcionament tot el que s'ha fet fins ara	- la relació entre un monomi i la solució d'una equació - la multiplicació de monomis		algebraica i geomètrica

ANNEX 5: La posada en pràctica de l'activitat

Relació de totes les sessions, del 3 del maig al 10 de juny del 2008

l'activitat		l'alumnat		la professora	
descripció	**qüestions que han quedat pendents**	**coneixement real del que han posat en joc, què fan servir realment**	**reaccions i dificultats que sorgeixen**	**introdueixo (idees, interpretació,...)**	**per què introdueixo o no qüestions concretes**
13 de maig					
- Resoldre equacions del tipus: $ax^2 \pm b = 0$ - comprovar, substituint, que les solucions són correctes, treure conclusions.		- el que s'havia previst però amb dificultats per aïllar i per simplificar	- poca acceptació de les arrels que no donen justes i de les solucions no exactes - sorpresa perquè hi hagi equacions sense solució	- insisteixo en simplificar les equacions dividint pel coeficient de la x^2 - treballem més la simplificació que passar el coeficient de la x^2 dividint	- evitar els perills de la mecanització, és més entenedor així, no es perd tant de vista el que s'està fent
2. Construir equacions de 2n grau a partir de les solucions. Només: $x = \pm a$ o sense solució - comprovar substituint que funciona	- construir l'equació a partir del producte (x-a)(x+a)	- el que s'havia previst	- cap problema especial per a construir equacions amb les solucions donades - què vol dir que hi hagi tantes eqs sense solució?		- en general totes les activitats proposades eviten la manipulació algebraica (producte de binomis, etc) perquè és el més abstracte i menys significatiu per l'alumnat
16 de maig					
3. Resoldre equacions del tipus: $ax^2 \pm bx = 0$ - comprovar, substituint, que les solucions són correctes, treure conclusions.	- treure factor comú i descomposar en producte de dos monomis	- la poca agilitat en la manipulació algebraica ha fet que no arribessin a fer, per exemple $x^2 - 5x = 0 \rightarrow x^2 = 5x$	- bloqueig inicial perquè no es pot aïllar x	- introdueixo la solució zero: "proveu de substituir amb x = 0" - "mirant bé amb quin altre nombre se us acut provar?"	$x^2 - 5x = 0 \rightarrow x^2 = 5x$ aquest pas podia suggerir més directament les solucions però no el va fer ningú i jo em proposava no introduir res que no fos estrictament necessari
4. Construir equacions de 2n grau a partir de les solucions. i) $x = a$ *i* $x = 0$ ii)només $x = a$ - comprovar substituint que funciona	- les equacions muntades amb una solució tenen una segona solució que caldria trobar	- per al cas ii) un alumne utilitza la tècnica de construir sistemes a partir de les solucions i escriu: $2^2 + 4 \cdot 2 = 8$ per tant $x^2 + 4x = 8$ te solució x = 2	- accepten fàcilment la construcció d'equacions pel mètode presentat per l'alumne perquè hi reconeixen el mètode utilitzat amb els sistemes	- aprofitant el procediment de l'alumne, fem un torn oral. Cada alumne diu un nombre qualsevol, fa operacions i munta una equació de 2n grau amb aquella solució	- el procediment de construcció operant reforça la idea de solució nombre que compleix la fórmula

5. Construir eqs de 2n grau amb dues solucions diferents	- queda pendent per a més endavant perquè ara no tenen prou eines				
22 de maig					
6. Dibuixar quadrats d'àrea els nombres que apareixen a les equacions resoltes a l'exercici 1: $ax^2 \pm b = 0$ (1) per a relacionar la resolució numèrica i la geomètrica.			- cal acompanyar-los en fer-los veure la diferència entre $x^2 - 81 = 0$ i $x^2 + 81 = 0$ perquè inicialment donen per als dos casos les solucions $x = 9$ i $x = -9$	- comentem a la pissarra davant del dibuix que estem sumant dues àrees i si dóna zero és que una és negativa i això no té sentit	- cal filar prim amb què vol dir àrea negativa: l'àrea no pot ser negativa si els dos costats han de tenir el mateix signe perquè tots dos són x, en canvi podem obtenir una àrea negativa si un costat és, per exemple 5 i l'altre –5, si cal que sigui –25 això soluciona $5x = -25$ però no $x^2 = -25$
Dibuixar quadrats d'àrea els nombres que apareixen a les equacions resoltes a l'exercici 3: $ax^2 \pm bx = 0$ (2) - resoldre noves eqs dels dos tipus (1) i (2) només geomètricament		en $x^2 + 5x = 0$ després dels suggeriments arriben a: $5x$ ha de ser negatiu i en valor absolut igual a x^2 ...troben les solucions	- problemes amb eqs tipus: $ax^2 + bx = 0$ venint del cas anterior diuen que $x^2 + 5x = 0$ no té solució - la longitud d'un costat del quadrat és negativa!	- els faig buscar les resolucions de $x^2 + 5x = 0$ trobades per mètodes aritmètics	- continuem amb els arguments de quan una àrea té sentit que sigui negativa i quan no té solució la situació plantejada
23 de maig					
7. Resolució geomètrica de $x^2 + ax = b$ (a i b>0) - comprovar substituint que la solució és vàlida		- a partir de la primera equació resolta a la pissarra els alumnes hauran de resoldre d'altres	- una alumna de la 1a fila amb forces dificultats a classe destaca per la seva visió geomètrica i esdevé la protagonista del procés geomètric per a resoldre l'equació - alguns alumnes consideren que aquest mètode fa pensar i escriure molt	- es resol un primer exemple entre tots a la pissarra $x^2 + 4x = 21$	- resoldre tots a la pissarra fent-me portaveu del que els alumnes van argumentant ha estat el recurs més habitual al llarg d'aquest tema, cada vegada que es canvia de tipus d'equació a resoldre.

			- un alumne repetidor pregunta per la fórmula de l'equació		
26 de maig					
Corregim a la pissarra equacions pendents i fem un repàs de què saben fer i de quines equacions saben construir					
27 de maig					
8. Prova amb apunts: - exercicis similars als resolts fins ara - exercici nou: $x^2 - ax = b$	- l'exercici només el van resoldre 3 alumnes	- els alumne discriminen bé els 3 tipus d'equacions $ax^2 \pm b = 0$ $ax^2 \pm bx = 0$ les intenten resoldre o les resolen aritmèticament $x^2 + ax = b$ la resolen geomètricament - els 3 alumnes resolen per comparació però només 1 dels 3 és capaç de fer hipòtesis noves i comprovar-les	- protestes dels alumnes per haver inclòs un exercici que no estava fet a classe - els alumnes resolen amb més seguretat quan ho fan geomètricament - fallen més les equacions incompletes perquè per fer-ho "més ràpid" ho fan aritmèticament i cometen errors que no farien si ho fessin geomètricament	- l'examen es va fer amb un professor de guàrdia i no vaig poder "animar-los" a fer l'exercici nou	- posteriorment els argumento que l'exercici nou era per avaluar com investigaven i que puntuava només 2 punts de 10, per discriminar entre 8 i 10
30 de maig					
Corregim l'examen a la pissarra i fem especialment l'exercici 3 que era el nou					
2 de juny					
9. La 2a solució de les equacions $x^2 + ax = b$ (a i b>0) - comprovar substituint que la 2a solució també és vàlida		- la descoberta que el producte de les solucions és el terme independent eclipsa trobar la 2a solució geomètricament	- des del punt de vista aritmètic algú observa que el producte de les solucions és el terme independent - resistència a comprovar substituint	- el procediment de trobar la segona solució aritmèticament (producte 2 solucions = terme independent) no s'explota fins al final per arribar a descomposar el polinomi	- els manca madures algebraica per introduir la descomposició del polinomi
3 de juny					
Es reparteix un full on hi ha equacions de tots els tipus					
10. Resoldre equacions de 2n grau de tot tipus amb els procediments utilitzats fins ara.	- la fórmula de l'equació de 2n grau	- reconeixen prou bé els 3 tipus d'equacions - en general només resolen gràficament les que no poden	- problemes amb els nombres negatius tant a l'equació com a les solucions - els alumnes comenten que	- a la segona sessió aclarim a la pissarra els 4 casos, fent la resolució geomètrica i trobant les dues solucions:	- es prepara la construcció d'equacions a partir de les solucions ja que els 4 exemples són les equacions

- comprovar substituint que les solucions són vàlides		fer d'altra manera (completes) - les incompletes les resolen aritmèticament/algebraicament això comporta deus qüestions contraposades: ▪ rapidesa ▪ més errors de càlcul que si ho fessin geomètricament	en els altres 3rs han fet la fórmula "Què passarà l'any vinent si tu no hi ets i el professor que tenim ens ho fa fer amb la fórmula?	$x^2 + 5x = 24$ $x^2 + 11x = -24$ $x^2 - 5x = 24$ $x^2 - 11x = -24$ utilitzem un retallable amb els afegits quan l'equació és $x^2 + 5x = 24$ i plegant el quadrat endins quan és: $x^2 - 5x = 24$	de solucions: x = 3, -8 x = -3, -8 x = -3, 8 x = 3, 8 - el recurs del retallable és adient però acaba sent "perniciós" quan els alumnes s'hi apunten + o – per establir la relació entre el costat del quadrat i la x cercada en un intent de mecanitzar sense entendre
6 de juny					
Es fan en grup les equacions de la l) a la r)					
9 de juny					
Correcció a la pissarra de la l) a la r)					
Es reparteix el darrer full de l'annex: construcció d'equacions de 2n grau					
11. Construir equacions de 2n grau de tot tipus	- aquest exercici només el realitzen dos alumnes, els que han acabat l'anterior, un d'ells és el que a la 1a prova va ser capaç de comparar, formular hipòtesis i comprovar-les		- necessiten algun aclariment de l'enunciat	- els aclareixo dubtes de comprensió del que se'ls demana	- cal refer el redactat per a una posterior utilització
10 de juny					
Examen final de tot el tema, veure l'annex 2					