EL TEOREMA DE MENELAU

Les *Esfèriques* de Menelau (s. I), la construcció amb Geogebra (s. XXI)

ÍNDEX

1. Introducció

En aquest element es presenta el teorema de Menelau per a tres dimensions, inclòs a les *Esfèriques* del mateix autor (100 dC), i la demostració, amb sis lemes previs, recollida a l'*Almagest* de Ptolemeu (85-165 dC). El lema 2, versió plana del teorema, és el que ha originat l'activitat d'aula per a alumnes de 4t d'ESO que es proposa com a mostra del tipus d'activitats que es poden generar a partir de textos històrics. L'activitat du a l'alumnat a refer la demostració a l'estil dels autors clàssics i paral·lelament es realitza la construcció a través del Geogebra, programa de geometria dinàmica dissenyat per ús escolar i amb una implantació creixent en els darrers anys a les aules d'ESO i BTX. L'activitat es va implementar a l'IES Badalona VII durant el curs escolar 2006-07, inclosa en les activitats d'introducció a la trigonometria (Teorema de Tales i Teorema de Menelau).[1]

L'estudi del Teorema de Menelau, així com el disseny de l'activitat per a l'aula i els fulls de material per a l'alumnat pertanyen al fons del grup d'història d'ABEAM i formen part del projecte "El naixement i desenvolupament de la trigonometria en les diferents civilitzacions" que investiga els orígens de la trigonometria. Aquest estudi, amb el títol "Geometria i Trigonometria en el Teorema de Menelau (100 dC) va ser presentat pel grup a les III Jornada d'Història de la Ciència i Ensenyament (Girona 2006) organitzades per la SCHCT[2]; es va presentar a les XIII JAEM[3] (Granada 2007) amb el títol "*Enseñar matemáticas a través de su historia: algunos conceptos* trigonometricos"; posteriorment es va publicar, amb el mateix títol a la revista *Epsilon*[4] (2007); i amb el títol "The Menelaus theorem, the Ptolemy proof (S. I) and the Geogebra construction" es va presentar al 3rd International conference of the European Society for the History of Science (Viena 2008) [5].

[1] Vegeu la prova del Teorema de Tales i Teorema de Menelau, inclosa en els annexos d'aquest element.
[2] SCHCT: Societat Catalana d'Història de la Ciència i la Tècnica.
[3] Jornadas sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, organitzadas por la FESPM (Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas)
[4] Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales".
[5] Vegeu les Referències en aquest mateix element.

2. El context històric

Des de l'Antiguitat, l'astronomia va representar un estímul important pel desenvolupament d'algunes branques de les matemàtiques com la geometria i la trigonometria esfèriques que, juntament amb alguns elements de cosmografia, van propiciar l'aparició d'una disciplina anomenada Esfèrica.

Dins d'aquesta tradició, l'esfera era considerada com una figura més pròpia de l'astronomia que de la geometria i en les Esfèriques s'estudiaven les línies sobre l'esfera més que l'esfera pròpiament dita. Els treballs més antics d'Esfèrica van ser escrits entre els segle IV aC i el I dC i van ser sintetitzats per Pappus (~320 dC) en el llibre VI de la seva *Col·lecció Matemàtica.*

Alguns autors anteriors a Menelau que van tractar problemes relatius a l'Esfèrica van ser Autolycos de Pytane (~320 aC), Euclides (~300 aC), Hipparc (190- 120 aC) i Teodosi (107-43 aC). D'aquest darrer autor l'obra més important que ens ha arribat és *Les Esfèriques.* Es tracta d'un recull, dividit en tres llibres, que conté 60 teoremes i problemes sobre l'esfera.

Menelau d'Alexandria (aprox. 70 -130) astrònom grec, seguint aquesta tradició va escriure l'obra homònima, *Les Esfèriques (100 dC),* amb un element innovador el triangle esfèric, completament absent a l'obra de Teodosi.[6] per al que demostra propietats generals, de manera semblant a com Euclides ho havia fet als *Elements* per a triangles plans.

Encara que es coneix molt poc de la seva vida, Ptolemeu esmenta observacions astronòmiques realitzades per Menelau a Roma el 14 de gener de l'any 98. Una d'aquestes observacions correspon a una conjunció de la Lluna amb les estrelles del front d'Escorpí. La comparança entre successives observacions de la posició d'aquestes estrelles, suficientment distanciades en el temps, va permetre constatar a Ptolemeu (i possiblement a Menelau amb anterioritat) que els equinoccis es desplacen cap a l'oest a raó d'un grau cada cent anys[7] , com havia postulat Hiparc[8] (180-125 aC).

[6] Segons Paul Ver Eecke (1927) Hipparc de Nicea ja havia fet observacions astronòmiques, un segle abans que Teodosi, que l'havien dut a plantejar-se problemes que exigien l'ús del triangle esfèric. El fet que Teodosi el descartés de la seva obra, podria ser degut a que les propietats d'aquesta figura no havien estat encara totalment desenvolupades, caldria esperar a l'obra de Menelau.
[7] En realitat avui sabem que és un grau cada setanta-dos anys
[8] Conegut com a "pare de l'astronomia" per les seves taules de cordes.

Menelau també apareix citat en una obra de Plutarc[9] (45-125) que descriu una conversa entre ell i Luci, en la qual aquest es disculpa a Menelau per haver dubtat que la llum, quan es reflecteix, compleix el que coneixem actualment com a primera llei de la reflexió: “l'angle d'incidència és igual a l'angle de reflexió”. Aquesta conversa se suposa que va tenir lloc a Roma bastants anys després del 75 i concordaria amb el fet de situar el seu naixement en l'any 70. Poca cosa més se sap d'ell, excepte que va ser anomenat Menelau d'Alexandria per Pappus[10] (300-350) i Procle[11] (410-485). L'única cosa que es pot deduir de les dades anteriors, és que va passar temporades a Roma i a Alexandria, segurament va viure a Alexandria de jove, on se suposa que va néixer i més tard va marxar cap a Roma.

Finalment, en un registre de matemàtics realitzat per Ibn al-Nadim (segona meitat del segle X) apareix una entrada corresponent a Menelau. En ella, basant-se que Ptolomeo ho cita en la seva obra, se li situa anterior a ell. Segons el registre, s'atribuïxen a Menelao diverses obres: *El llibre de les Proposicions de les esfèriques*, *Sobre el coneixement dels pesos i la distribució dels diferents cossos*, tres llibres sobre *Elements de Geometria* i *El Llibre del triangle*. De totes elles l'única que ha sobreviscut és les *Esfèriques*[12].

FIGURA 1: Mapa de l’Imperi romà al s. II[13]

[9] Plutarc va ser un historiador grec. És famós per la seva obra *Vides paral·leles,* on estableix comparacions entre figures gregues i romanes i és una font molt important d’informació sobre l’Antiguitat. Els altres escrits seus són: *Obres morals,* són 78 tractats que recullen discussions filosòfiques i de caràcter retòric.

[10] Pappus d’Alexandria va escriure una obra titulada *Col·lecció Matemàtica* que contenia originalment 8 llibres del que el primer i part del segon s’han perdut. Aquesta obra és important perquè presenta resultats de diversos autors, afegint lemes, demostracions i comentaris.

[11] Procle, nascut a Constantinoble, va estudiar retòrica, filosofia i matemàtiques a Alexandria i més tard a Atenes, a l’Acadèmia fundada per Plató, on finalment va succeí a Plutarc com a màxim responsable d’ella.

[12] Vegeu més informació sobre la biografia de Menelau a Bulmer-Thomas, Ivan (1971).

[13] http://www.pais-global.com.ar/mapas/mapa14.htm

3. Les *Esfèriques* de Menelau

El text original grec no ens ha arribat i només el coneixem a través de les diferents versions àrabs, llatines i hebraiques a les quals ha donat lloc. La primera de les traduccions podia haver estat feta cap a l'any 200 de l'Hègira (≈ 815-816 dC) a partir d'una versió siríaca. Aquesta traducció va ser revisada per l'astrònom i matemàtic al-Māhāni (entre el 825 i el 880) i després per al-Harawi (entre el 930 i el 990) un dels més grans astrònoms perses del seu temps. Hi ha hagut moltes altres versions del text però se'n poden destacar dues explícitament crítiques redactades per dos savis àrabo-musulmans: la primera, el 1265 pel conegut astrònom i matemàtic Nasir-al-Din al-Tūsi (1201-1274) i la segona, poc abans del 1300 per Muhammad Jamāl al-Din. Pel que fa a Europa cal destacar la traducció al llatí de l'erudit sicilià François Maurolico, publicada a Messina el 1558. Aquesta traducció llatina va ser reimpresa en una obra del pare Mersenne a París el 1664 i a continuació de la segona edició del text grec de Teodosi per Hunt a Oxford el 1707. També el gran astrònom Halley (1656-1742) va donar-ne una versió llatina que va ser impresa el 1758.

Les Esfèriques de Menelau, segons les versions i els agrupaments de proposicions que s'hi fan, comprenen entre 63 i 91 teoremes i normalment es divideixen en tres llibres, amb ells s'evidencia que és el primer autor que separa la trigonometria de les esfèriques i de l'astronomia.

El llibre I comença amb la definició: "un triangle esfèric és l'espai comprès entre tres arcs de cercles màxims sobre la superfície de l'esfera amb la limitació que aquests arcs són sempre menors que un semicercle". En aquest llibre sembla tenir la intenció de demostrar per als triangles esfèrics proposicions anàlogues a les d'Euclides per als triangles plans en el llibre I dels *Elements*. A la proposició 11 prova que la suma dels tres angles d'un triangle esfèric és més gran que dos rectes. Menelau no va utilitzar l'estil de demostració d'Euclides, va evitar l'ús de proves indirectes com la reducció a l'absurd.

En el segon llibre s'hi troben les primeres proposicions directament relacionades amb problemes d'astronomia, algunes de les quals es poden trobar a l'obra de Teodosi, *les Esfèriques,* o a la d'Euclides, els *Fenòmens.* Aplica la geometria esfèrica desenvolupada en el llibre I a l'astronomia.

El tercer llibre es pot dividir en dues parts i està dedicat a la trigonometria esfèrica. La primera part conté alguns resultats trigonomètrics fonamentals com la proposició I coneguda amb el nom de “teorema de Menelau”. Les proposicions següents estableixen la proporcionalitat dels sinus de certs arcs homòlegs (o de la seva suma o diferència) de dos triangles esfèrics amb certs elements iguals. Hi ha també teoremes que venen de la geometria plana, referits, per exemple, a la intersecció de les bisectrius o les altures d’un triangle esfèric. La segona part tracta problemes més específics, com la comparació entre raons entre determinats arcs de cercles màxims. Aquesta segona part sembla reprendre una altra obra de Menelau que es va perdre i que tractava de problemes relatius a la sortida i la posta dels signes del zodíac.

4. El teorema de Menelau i la demostració en l'*Almagest* de Ptolemeu

El Llibre III de les *Esfèriques* de Menelau comença amb la proposició següent, que més tard es coneixerà com a Teorema de Menelau:

Si ADB i AEG són dos arcs de cercles màxims i DG i BE són dos arcs més que es tallen en el punt Z, aleshores es compleix:

$$\frac{\mathrm{Crd}(\text{arc } 2\mathrm{GE})}{\mathrm{Crd}(\text{arc } 2\mathrm{EA})} = \frac{\mathrm{Crd}(\text{arc } 2\mathrm{GZ})}{\mathrm{Crd}(\text{arc } 2\mathrm{ZD})} \cdot \frac{\mathrm{Crd}(\text{arc } 2\mathrm{DB})}{\mathrm{Crd}(\text{arc } 2\mathrm{BA})}$$

La demostració d'aquest teorema la presentarem a partir de la que es troba al llibre I de l'*Almagest*, de Ptolemeu (85-165 dC). En aquesta obra la demostració ve precedida de sis lemes que faciliten la seva comprensió.[14]

Els dos primers lemes expressen relacions entre les longituds dels segments obtinguts al tallar tots els costats d'un triangle, o les seves prolongacions, per una recta qualsevol.

El lema 2, que es coneix com a versió plana del teorema de Menelau[15], estableix el següent:

Donat un triangle ADG i una recta BZF que talla els tres costats del triangle o les seves prolongacions en els punts: B, Z i F, llavors es compleix:

$$\frac{\mathrm{GE}}{\mathrm{EA}} = \frac{\mathrm{GZ}}{\mathrm{ZD}} \cdot \frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{BA}}$$

---

[14] Menelau no havia inclòs a les seva obra els sis lemes previs que trobem a l'*Almagest* de Ptolemeu. No se sap del cert perquè no els va incloure, bé perquè eren coneguts per l'època o bé perquè els havia demostrat en altres llibres que s'han perdut.

[15] Aquest lema és el s'ha triat per a desenvolupar com a activitat per als alumnes.

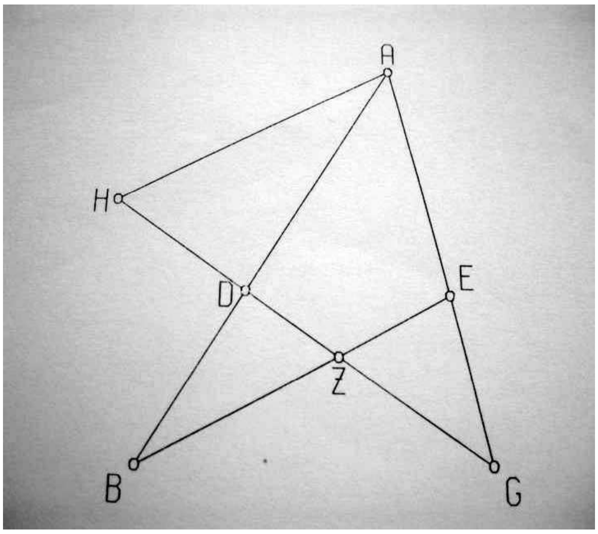


FIGURA 2: Il·lustració del lema 2 de l'*Almagest.* (Ptolemy, 1984: 65, fig.1.9)

Els altres quatre lemes relacionen arcs i cordes en un cercle i seran els que permetran fer el pas de la trigonometria plana a la trigonometria esfèrica. A tall d'exemple, el lema 3 estableix el següent:

Lema 3,

Si prenen tres punts consecutius A, B i G en un cercle de centre D, de tal manera que els arcs AB i BG siguin menors que un semicercle. S'uneix el punt A amb el G i el centre de la circumferència amb el punt B. Llavors:

$$\frac{\text{Crd arc } 2AB}{\text{Crd arc } 2BG} = \frac{AE}{EG}$$

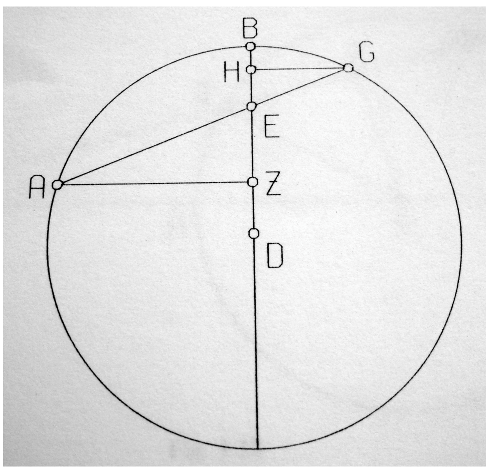


FIGURA 3: Il·lustració del lema 3 de l'*Almagest.* (Ptolemy, 1984: 70, fig.1.10)

Per demostrar el teorema de Menelau, Ptolemeu utilitza una figura, en la qual BE i GD són arcs de cercle màxim que es tallen a Z i van a trobar els altres arcs de cercle màxim, AB i AG. Aquesta figura reprodueix sobre l'esfera la figura que il·lustra la versió plana del teorema.

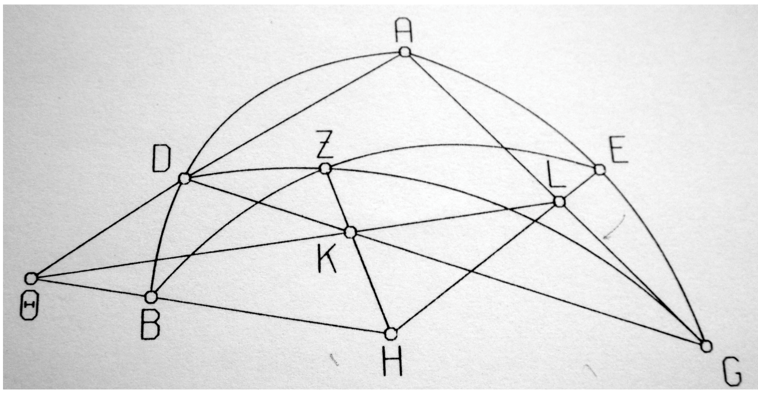


FIGURA 4: Il·lustració del Teorema de Menealau de l'*Almagest.* (Ptolemy, 1984: 68, fig. 1.14)

El que es tracta de demostrar és:

$$\frac{\mathrm{Crd}\ (\mathrm{arc}\ \ 2GE)}{\mathrm{Crd}\ (\mathrm{arc}\ \ 2EA)} = \frac{\mathrm{Crd}\ (\mathrm{arc}\ \ 2GZ)}{\mathrm{Crd}\ (\mathrm{arc}\ \ 2ZD)} \cdot \frac{\mathrm{Crd}\ (\mathrm{arc}\ \ 2DB)}{\mathrm{Crd}\ (\mathrm{arc}\ \ 2BA)}$$

Per fer la demostració, primer es construeixen una sèrie de línies addicionals. S'uneix el centre H de l'esfera amb els punts B, Z i E, obtenint els segments HB, HZ i HE. S'ajunten A amb D i també H amb B i es prolonguen fins a trobar-se en Θ. S'ajunten també D amb G i a amb G i s'anomenen K i L els punts de tall de les línies DG i AG amb HZ i HE.

Un cop feta la construcció, es posa de manifest que els punts Θ, K i L estan alineats perquè pertanyen simultàniament al pla que determina el triangle ADG i també al pla que determina el cercle màxim BZE.

La demostració pròpiament dita, comença amb l'aplicació del teorema en la seva versió plana a la figura determinada per les línies AΘ, AG, ΘL i GD i en resulta la igualtat:

$$\frac{GL}{LA} = \frac{GK}{KD} \cdot \frac{D\Theta}{\Theta A} \quad (*)$$

Després es converteix cadascuna d'aquestes fraccions en quocient de cordes aplicant els lemes previs. Per exemple, aplicant a la part dreta de la figura el lema 3 que hem posat d'exemple, obtindrem:

$$\frac{GL}{LA} = \frac{\text{Crd arc } 2GE}{\text{Crd arc } 2EA}$$

De manera similar, es converteixen les altres dues fraccions, i un cop convertides, es rescriu la igualtat (*) en termes de cordes, i s'obté el teorema.

Després d'aquesta demostració hi ha una sèrie d'exemples sobre l'aplicació del teorema als càlculs astronòmics, com per exemple, el càlcul de la declinació de l'eclíptica.

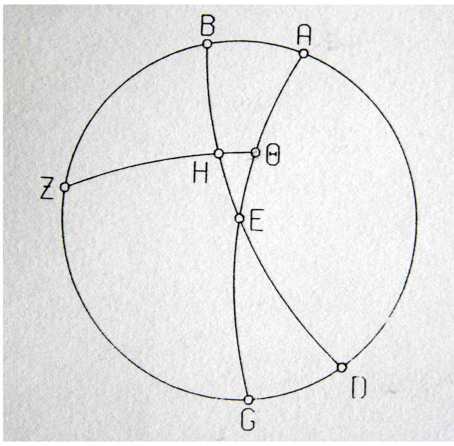


FIGURA 5: Il·lustració del càlcul de la declinació de l'eclíptica (Ptolemy, 1984: 70, fig.1.15)

En aquesta figura, AEG representa l'equador i BED l'eclíptica. E és el punt d'intersecció d'ambdós cercles a l'equinocci de primavera. Z és el pol de l'equador en l'arc ABG i ZΘ és un arc de cercle màxim que talla l'eclíptica en el punt H.
Es tracta de determinar la declinació HΘ.

Els arcs BE i ZΘ, que troben els arcs AZ i AE i es tallen en el punt H, reprodueixen la figura del teorema de Menelau i, per tant es pot aplicar el teorema que donarà el valor de la declinació.

5. Teorema de Menelau per a dues dimensions. Activitat de classe

Aquest Teorema és el que s'ha desenvolupat com a activitat d'aprenentatge per a alumnes de 4t d'ESO. L'enunciat del Teorema diu:

Si una recta talla els costats AG, GD i DA del triangle ADG (o les seves prolongacions) en els punts E, Z i B respectivament, aleshores: $\frac{GE}{EA} = \frac{GZ}{DZ} \cdot \frac{DB}{BA}$

Que equival a dir: $\frac{AE}{EG} \cdot \frac{GZ}{ZD} \cdot \frac{DB}{BA} = 1$

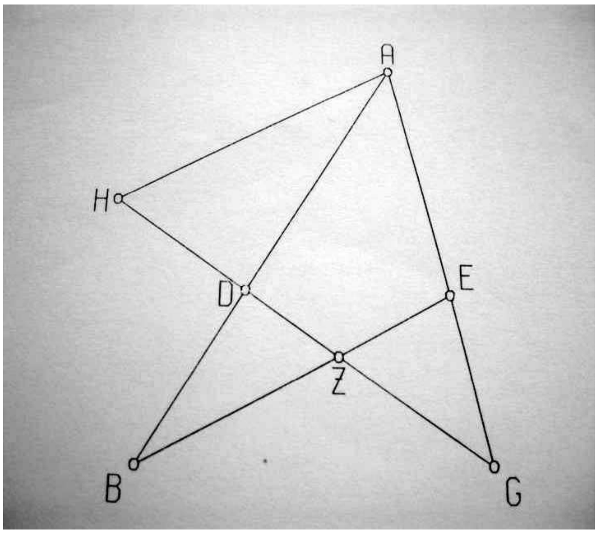


FIGURA 6: Il·lustració del lema 2 de l'*Almagest.* (Ptolemy, 1984: 65, fig 1.9)

L'activitat es realitza durant dues sessions de classe consecutives, a la primera de les quals, cada alumne ha de disposar d'un ordinador. Es tracta de fer una construcció amb el Geogebra, semblant a la que il·lustra el lema 2 previ a la demostració del teorema de Menelau a l'Almagest i comprovar amb el mateix programa la igualtat: $\frac{AF}{BF}\frac{CE}{AE}\frac{BD}{CD} = 1$. A continuació, amb la dinàmica que permet el programa[16] es tracta d'anar movent la figura i, fent el càlcul per diferents posicions, veure que la igualtat es manté per a qualsevol triangle i qualsevol recta que talli els seus costats o les seves prolongacions.

[16] En les construccions amb Geogebra es poden moure objectes, sense que es perdin els vincles amb què han estat creats. Això permet comprovar propietats d'una manera molt àgil. Encara que aquestes comprovacions no poden substituir les demostracions, són de gran ajut per a la seva comprensió. Sovint convencen més als alumnes que les demostracions formals.

Es planteja la situació als alumnes, un triangle A,B,C i una recta qualsevol per dos punts P,Q que talla els tres costats del triangle en tres punts D,E,F , se'ls dóna una sèrie d'instruccions i finalment se'ls demana que enunciïn el teorema. La seqüència d'instruccions pels alumnes és:

1. *Construïu un triangle ABC i una recta PQ que talli els tres costats del triangle o les seves prolongacions.*

2. Anomeneu D el punt de tall de la recta PQ amb BC o la seva prolongació i E i F als corresponents a AC i AB respectivament

3. Calculeu la relació $\frac{AF}{BF} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{BD}{CD}$

4.Moveu els vèrtexs del triangle i també la recta PQ. Refeu el càlcul de l'apartat anterior i observeu que la relació es manté.

5. Enuncieu el teorema

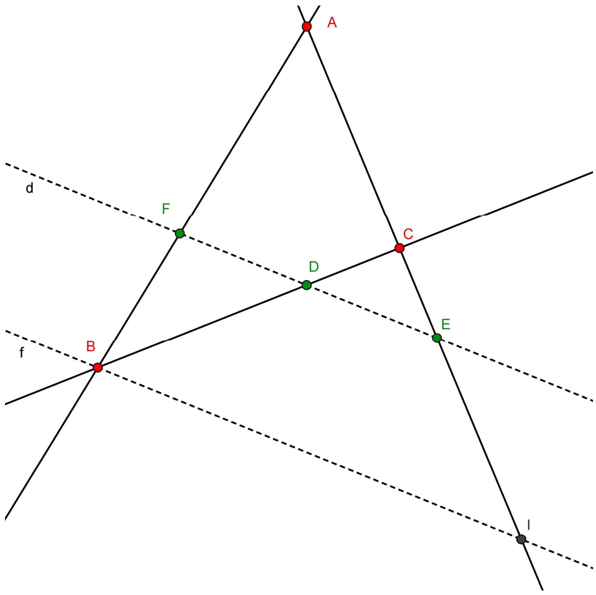


FIGURA 7:Il·lustració de la construcció del Teorema amb el Geogebra

L'activitat es va desenvolupar satisfactòriament. La majoria d'alumnes van enunciar el teorema de forma correcta després d'una posta en comú amb els companys. Finalment un alumne va escriure l'enunciat a la pissarra.

Per a la segona sessió els alumnes havien d'haver cercat informació sobre Menelau i Ptolemeu, l'època i el lloc en què van viure, i les seves obres.

L'objectiu d'aquesta sessió era que cada alumne reproduís la demostració del teorema de Menelau que apareix a l'*Almagest* amb l'ajuda d'unes indicacions que se'ls donaven en els fulls de treball. Un cop completat per l'alumne el text havia de dir:

a) *Es construeix la paral·lela a la recta DEF pel punt B i s'anomena I al punt de tall amb AC.*

b) Es reuneixen les condicions per aplicar el Teorema de Tales als costats AB i AC del triangle i , per tant, es complirà $\frac{AF}{BF}=\frac{AE}{IE}$

c) Es multiplica i divideix per CE el segon membre de la igualtat, que es transformarà en: $\frac{AF}{BF}=\frac{AE}{CE}\cdot\frac{CE}{IE}$

d) S'aplica el teorema de Tales als costats AC i BC , aleshores es compleix

$\frac{CE}{IE}=\frac{CD}{BD}$

e) A la igualtat obtinguda a l'apartat c), es substitueix $\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{IE}}$ *per la fracció equivalent obtinguda a l'apartat a) i s'obté:* $\frac{AF}{BF}=\frac{AE}{IE}=\frac{AE}{CE}\cdot\frac{CE}{IE}=\frac{AE}{CE}\cdot\frac{CD}{BD}$.

Considerant el primer i darrer termes d'aquesta igualtat i, passant el producte de fraccions del segon membre al primer, equival a:

$\frac{AF}{BF}\frac{CE}{AE}\frac{BD}{CD}=1$ És interessant remarcar que la demostració inclou dos tipus de raonaments, el geomètric i l'aritmètic, i que trobar-los plegats en una demostració ja és de per si un bon argument per incloure aquesta activitat en una unitat didàctica. Com a mostra del primer raonament s'adjunta el paràgraf següent del dossier, que correspon a l'apartat b) de la seqüència descrita anteriorment:

Completa la proporció següent amb els segments corresponents:

$$\frac{AF}{BF}=\frac{\quad}{\quad}$$

Pinta sobre el dibuix amb dos colors diferents els quatre segments relacionats, els numeradors verds i els denominadors vermells.

Com a mostra del raonament aritmètic, a l'apartat c) es llegeix el paràgraf següent:

La relació que volem demostrar comença com la fórmula $\frac{AF}{BF} = \frac{}{}$ *però cal introduir el segment CE*

$$\frac{AF}{BF} = \frac{}{CE}\frac{CE}{}$$

Si la primera igualtat és certa també ho és la segona, quina propietat de les fraccions permet fer-ho?

Per tal de donar rellevància a la introducció de petites falques d'història, aquest tipus d'activitats d'aprenentatge també són avaluades dins de la seqüència didàctica on s'incorporen. En aquest cas el tema treballat pels alumnes va ser el Teorema de Tales i el Teorema de Menelau. Una de les activitats d'avaluació va consistir en un examen de quatre preguntes, la darrera de les quals era:

a) Enuncia el Teorema de Menelau ajudant-te amb un dibuix

b) Quin altre teorema s'utilitza per a fer la demostració?

c) A quina època va viure Menelau i per a què s'utilitzava teorema que ara porta el seu nom?

És interessant remarcar la bona acollida que va tenir l'activitat per part de l'alumnat i la riquesa de registres que va suposar incloure preguntes d'història de la matemàtica en la prova; va donar més versatilitat a l'avaluació i va afavorir l'atenció a la diversitat..

6. Algunes produccions de l'alumnat

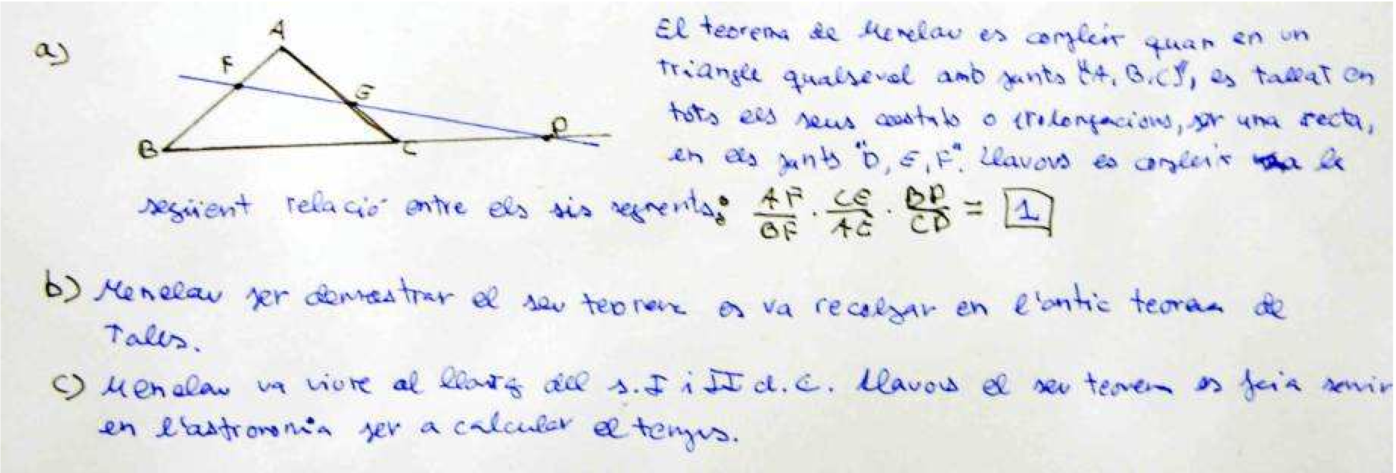


FIGURA 8: Resposta d'un alumne en la prova

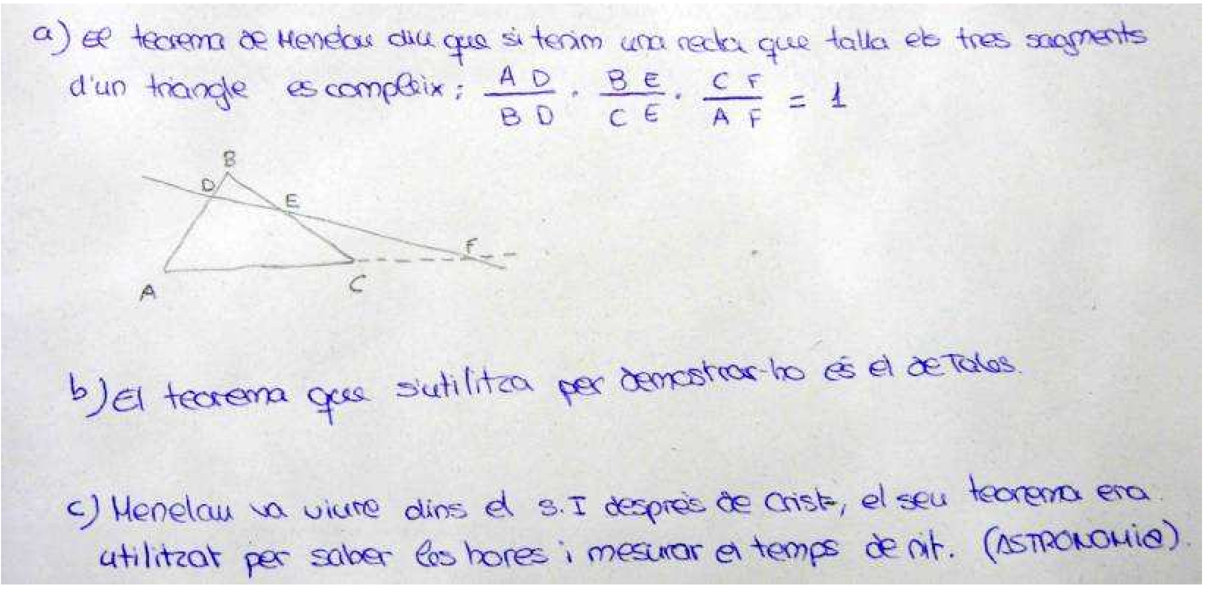


FIGURA 9: Resposta d'un altre alumne en la prova

7. Conclusions

L'activitat de classe ha aportat als alumnes diversos coneixements i han après diferents maneres de treballar. Han construït el teorema utilitzant el Geogebra, un recurs actual per a demostrar un teorema antic. Han fet la demostració simulant el raonament que fa Ptolemeu en *l'Almagest.*

Han constatat que aquest teorema matemàtic dóna resposta a un problema d'astronomia: mesurar les posicions i el moviment dels astres. Han vist que la recerca matemàtica obté resultats importants quan hi ha confluència entre diferents escoles i autors que treballen en la mateixa línia. La introducció de la part històrica ha contribuït, també, a la millora de l'actitud d'alguns alumnes.

Des de la perspectiva del projecte "El naixement i desenvolupament de la trigonometria dins les diferents civilitzacions", el Teorema de Menelau és significatiu perquè marca el moment en que se separa la trigonometria de les esfèriques i de l'astronomia. A les *Esfèriques* de Menelau, després del llibre I dedicat a la geometria esfèrica i del II dedicat a l'astronomia, el teorema és la primera proposició del llibre III, el dedicat a la trigonometria esfèrica.

Però a més, el Teorema de Menelau és important perquè va ser un dels pilars sobre els que es va desenvolupar la trigonometria àrab. El mateix Nasir Al Din Al-Tusi (1201-1274), en el *Tractat del quadrilàter*, reconeix la importància del teorema i referint-se a la relació que estableix diu: "Els antics no han deixat d'utilitzar-la en aquest sentit i se n'han servit amb confiança, així és com es veu a les Esfèriques de Menelau i al començament de l'Almagest de Ptolemeu" (Nasir Al Din Al-Tusi, 1891:?). I més endavant, en el mateix text, la utilitza per a demostrar el teorema del sinus. Aquest nou teorema serà un altre pas de gegant en el desenvolupament de la trigonometria perquè permetrà passar d'una relació entre sis quantitats, la que establia el teorema de Menelau

$$\frac{\sin \mathrm{CE}}{\sin \mathrm{EA}} = \frac{\sin \mathrm{CZ}}{\sin \mathrm{ZD}} \cdot \frac{\sin \mathrm{DB}}{\sin \mathrm{BA}}$$

a una relació més simple i eficaç per als càlculs on només n'hi apareixen quatre quantitats:

$$\frac{\sin a}{\sin b} \cdot \frac{\sin B}{\sin A} = 1$$

8. Referències

Bulmer-Thomas, Ivan (1971) “Menalaus of Alexandria”, Gillispie (ed), *Dictionary of Scientific Biography*, Nova York, 296-302.

Dorce, Carlos (2006) *Ptolomeo. El astrónomo de los círculos*. Col. La matemática en sus personajes, 25, Ed. Nivola.

Guevara, Iolanda; Romero, Fátima; Massa, Maria Rosa (2009) “Geometria i trigonometria en el Teorema de Menelau” en *Actes d’Història de la Ciència i de la Tècnica*. Barcelona: SCHCT, 39-50.

Guevara, Iolanda; Romero, Fátima; Massa, Mª Rosa (2007) “Enseñar matemáticas a través de su historia: algunos conceptos trigonometricos” , Granada: *Actas de las XIII JAEM*.

Guevara, Iolanda; Massa, Mª Rosa; Romero, Fátima (2007) “Enseñar matemáticas a través de su historia: algunos conceptos trigonometricos”, *Epsilon* nº 67*.* Cádiz: SAEM “Thales”, CD “Thales, Univ de Cádiz, CasEM, 97-107.

Guevara, Iolanda (2008) “The Menelaus Theorem, The Ptolemy proof (s. I) and the Geogebra construction (s XXI)” *Proceedings of the 3rd International Conference of the European society for the History of Science,* Viena (en premsa)

Maor, Eli (1998) *Trigonometric delights*. Princeton: Princeton University Press.

Massa Esteve, Mª Rosa (2003) “Aportacions de la història de la matemàtica a l’ensenyament de la matemàtica”, Biaix, 21, 4-9.

Massa, Maria Rosa; Romero, Fàtima (2003). "De la Geometria a la Trigonometria: El teorema de Ptolemeu", Batlló, Josep [et al.] [ed]. Actes de la VII Trobada d'Història de la Ciència i de la Tècnica. Barcelona: SCHCT, 153-159.

Nadal, Robert; Abdelkaddous,Taha; Pinel, Pierre (2004). “Le contenu astronomique des Sphériques de Ménélaos”, *Archive for History of Exact Sciences,* 58, 381-436.

Nassiruddin-el-Toussy (1891) *Traité du quadrilatère*, A. Pacha (trad), Constantinopla.

Ptolemy (1984) *Almagest*, Toomer G.J. (trad.), New York - Berlin - Heidelberg - Tokio: Springer-Verlag

Romero, Fàtima.; Massa, Maria Rosa; Casals, Maria Àngels (2006) “La trigonometria en el món àrab. Tractat sobre el quadrilàter complet de Nasir al-Din Altusi (1201-1274)”, Batlló, Josep [et al.] [ed]. *Actes de la VIII Trobada d'Història de la Ciència i de la Tècnica*, Barcelona: SCHCT, 569-575.

Teodosi de Trípoli (1927) *Les spheriques de Théodose de Tripoli*, Ver Eecke, Paul (trad) Bruges: Desclee de Brouwer et Cie.

Zeller, Sister Maria Claudia (1944) *The Development of Trigonometry from Regiomontanus to Pitiscus*, Annn Astor / Michigan, University of Michigan.

Hohenwarter, Markus; Geogebra. Dynamic Mathematics for Schools http://www.geogebra.org (31-08-09)

Annex 1: El Teorema de Menelau d'Alexandria (segle I), construcció amb el Geogebra

Si en un triangle ABC, tracem una recta qualsevol que talli els tres costats o les seves prolongacions en els punts D, E, F, aleshores es compleix una relació entre sis segments en que la recta ha tallat els tres costats del triangle.

Et proposem que investiguis amb el Geogebra la relació esmentada:

Resolució amb el Geogebra

a) Construcció de la situació:

1. Entra a visualitza i treu els eixos de coordenades.
2. Situa tres punts qualssevol: A, B, C *són els vèrtexs del triangle.*

3. Traça les tres rectes que formen el triangle: *són els costats del triangle*
   - recta per A,C
   - recta per A, B
   - recta per B,C

Tens el triangle construït

4. Situa dos punts qualssevol, fora del triangle, que anomenarem P, Q. *Aquests dos punts serviran per traçar la recta que tallarà els costats del triangle. Caldrà renombrar-los perquè el Geogebra t'hi posa unes altres lletres.*

5. Traça la recta que passa per aquests punts.

6. Nomena D, E, F els punts d'intersecció de la recta per P i Q amb el triangle ABC
   D = punt d'intersecció de la recta per P i Q amb el costat BC
   E = punt d'intersecció de la recta per P i Q amb el costat AC
   F = punt d'intersecció de la recta per P i Q amb el costat AB

Tens la situació construïda

b) Càlculs amb el Geogebra

1. Calcula les 6 distàncies següents, que són els 6 segments en que la recta ha dividit els tres costats del triangle ABC:

sobre el costat AB:	AF =	BF =
sobre el costat BC:	BD =	CD =
sobre el costat AC:	CE =	AE =

És convenient que a mesura que obtens el resultat canviïs el nom que per defecte t'ha posat el Geogebra a aquestes distàncies.

2. La relació que busquem:

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = ...$$

Calcula aquesta relació amb el Geogebra, recorda que cal situar-se a la línia d'edició i escriure:

$(BD/CD)*(CE/AE)*(AF/BF)$ *i aplica l'enter*

Tens la relació numèrica entre els 6 segments

Ves ara al Geogebra, mou les diferents rectes i punts que apareixen a la construcció i observa que la relació es manté fixa.

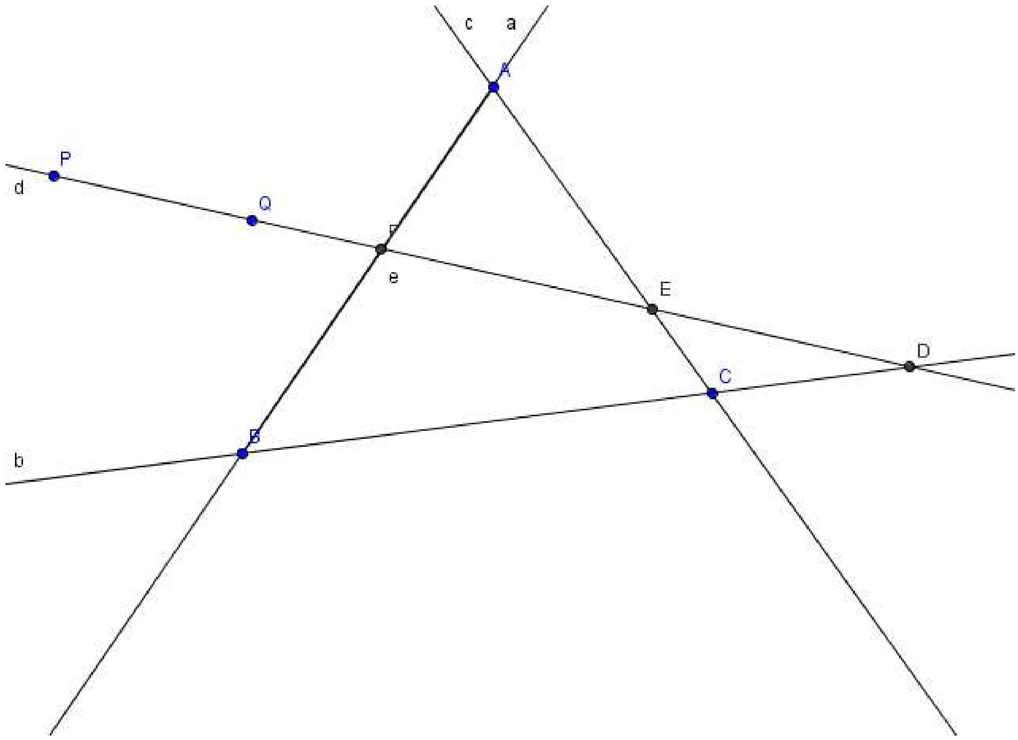
Conclusió:

a) Enuncia el Teorema de Menelau. Acompanya l'enunciat amb el dibuix corresponent.
b) Cerca informació sobre Menelau d'Alexandria.

Annex 2: El Teorema de Menelau d'Alexandria (segle I), la demostració de Ptolemeu

Si en un triangle ABC, tracem una recta qualsevol que talli els tres costats o les seves prolongacions en els punts D, E, F, aleshores es compleix

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = 1$$



La demostració utilitza una relació equivalent a l'anterior :

$$\frac{AF}{BF} = \frac{AE}{CE} \cdot \frac{CD}{BD}$$

justifica que les dues fórmules són equivalents

. . . .

Una mica d'història

Tot i que aquest Teorema rep el nom de Teorema de Menelau, la demostració que construirem no ens ha arribat a través de l'obra de Menelau (70-130 DC), sinó d'un autor una mica posterior, Ptolemeu (85-165 DC).

Menelau demostra el teorema per a geometria esfèrica perquè és la geometria que s'utilitzava en aquella època per a realitzar els càlculs necessaris per a l'astronomia. L'astronomia era cabdal per mesurar el temps.

La demostració que realitzarem està recollida en l'*Almagest* de Ptolemeu. En aquesta obra apareix el Teorema de Menelau també per a trigonometria esfèrica però amb tots els lemes i consideracions prèvies que no apareixen a l'obra de Menelau. No se sap si aquestes lemes previs estaven en alguna obra que no ha arribat fins a nosaltres o bé Menelau ja donava els resultats com a coneguts per a l'època.

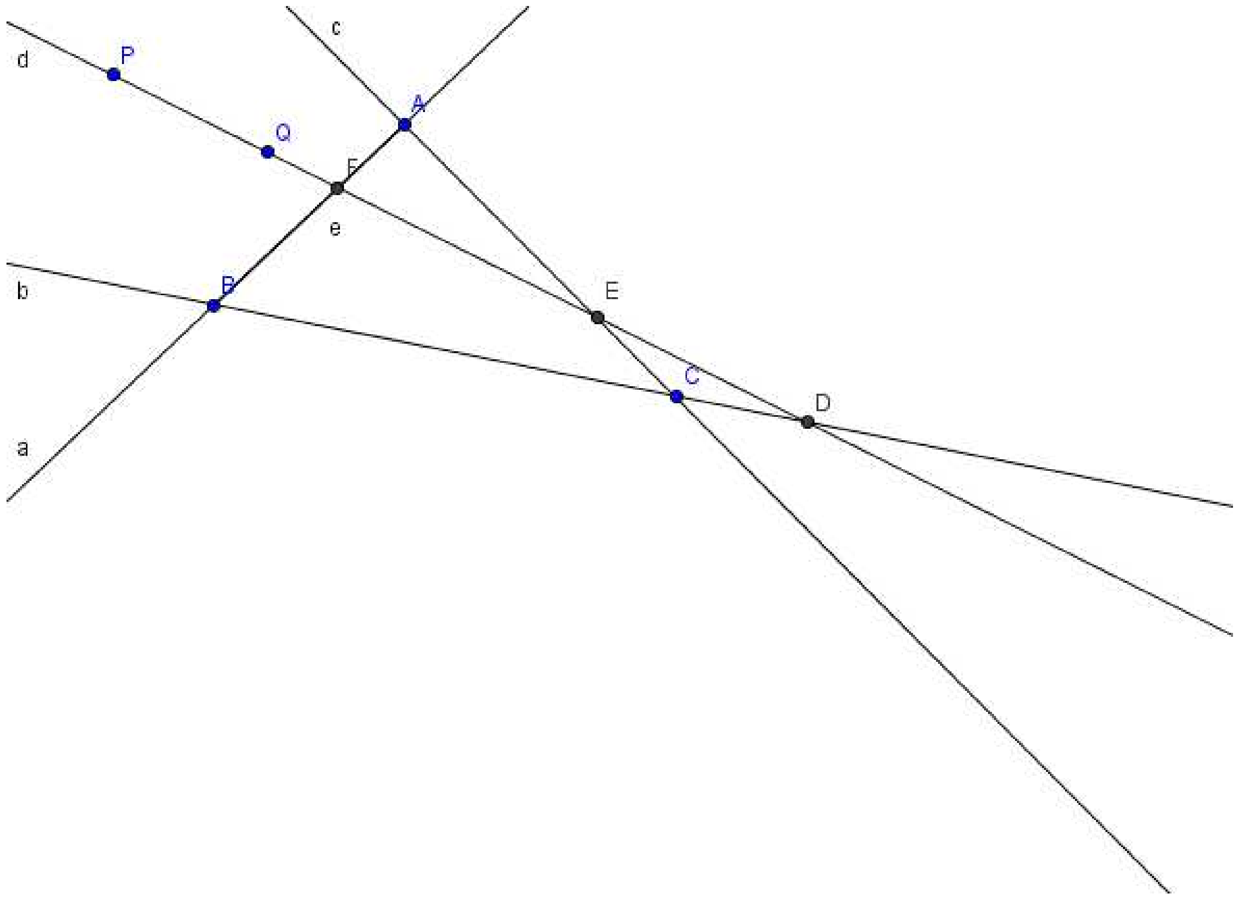
Demostració

El Teorema per a geometria plana, tal com el demostrarem, apareix com a Lema 2 de la proposició 13, Teorema de Menelau esfèric, del llibre I de l'Almagest.

$$\frac{AF}{BF} \stackrel{?}{=} \frac{AE}{CE} \cdot \frac{CD}{BD} \qquad (1)$$

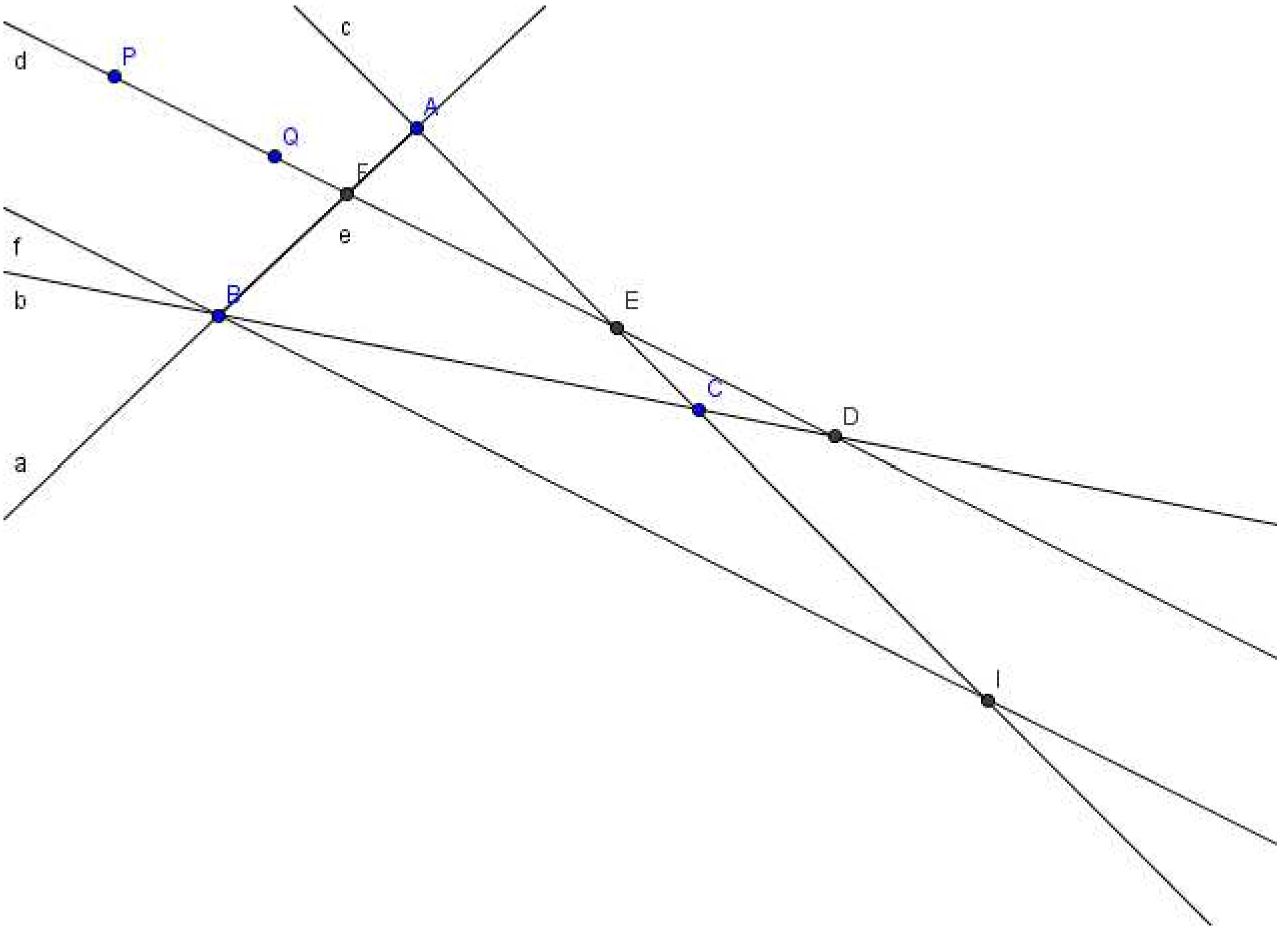
a) Construcció d'un punt I per traçar una paral·lela a DEF des d'un dels vèrtex del triangle ABC

Sigui un punt I situat sobre la recta AC de manera que la recta BI sigui paral·lela a la recta FED. *Situa el punt en el dibuix i traça la recta paral·lela BI*



b) Condicions per aplicar el Teorema de Tales

AB i AC són dues rectes que es tallen en el punt A i que ara estan tallades per dues rectes paral·leles FED i BI, en aquestes condicions podem aplicar el Teorema de Tales.



Completa la proporció següent amb els segments corresponents:

$$\frac{AF}{BF} = \frac{\quad}{\quad} \qquad (2)$$

Pinta sobre el dibuix en color els quatre segments relacionats. Pinta en verd els numeradors i en vermell els denominadors.

c) Introduïm CE a la relació anterior

La relació anterior comença com la fórmula (1) però cal introduir el segment CE

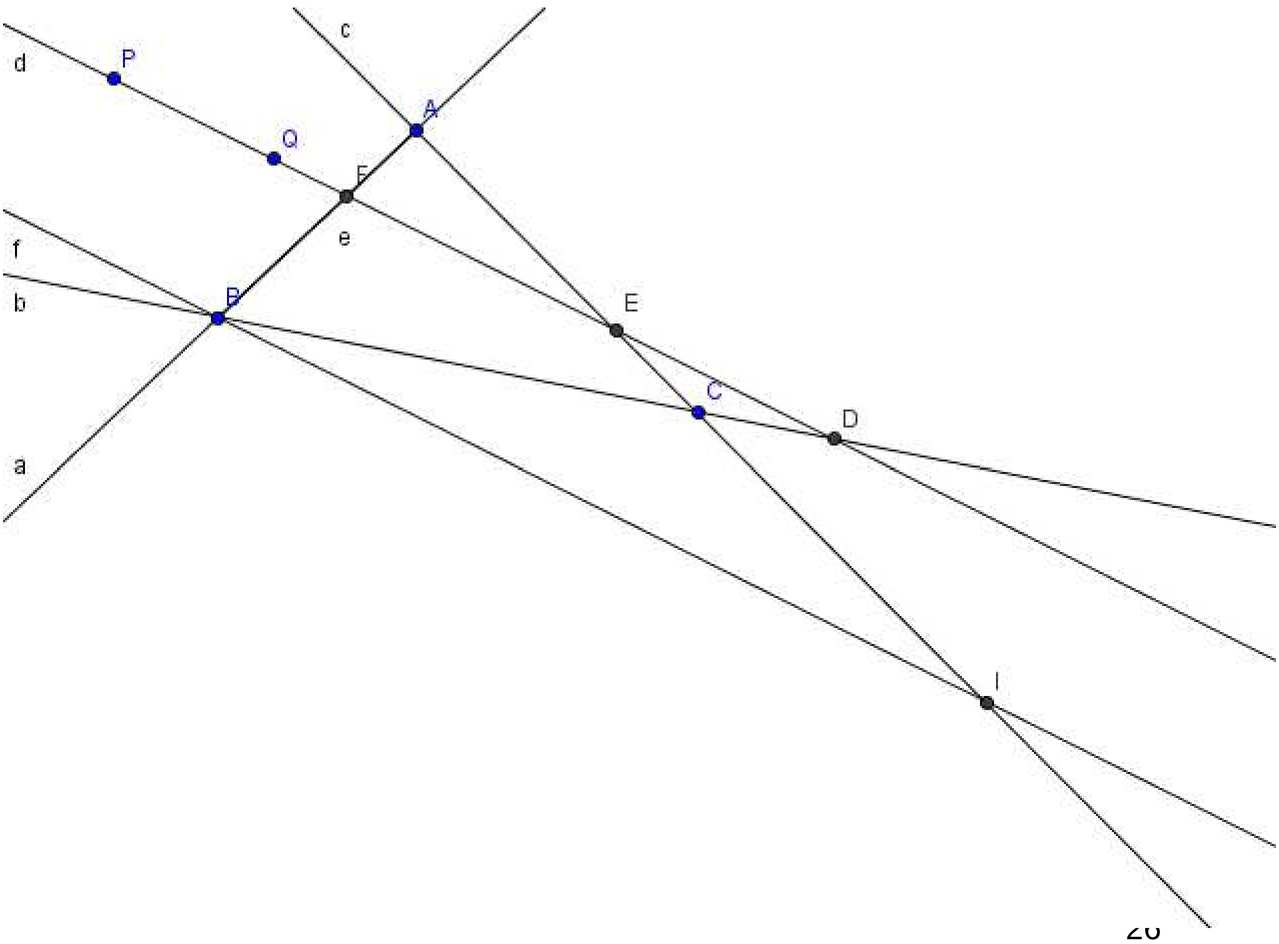
$$\frac{AF}{BF} = \frac{\quad}{CE} \cdot \frac{CE}{\quad} \qquad (3)$$

Si la igualtat (2) és certa també ho és la (3), per què?

. . . .

d) Condicions per aplicar el Teorema de Tales

Fixem-nos ara en les rectes EI i BD que també són dues rectes que es tallen en un punt, el punt C, i a la vegada aquestes dues rectes estan tallades per dues rectes paral·leles FED i BI



Ara es tracta de fer aparèixer $\frac{CD}{BD}$ a la relació (3) per tant cal completar la relació següent aprofitant que estem en situació de Tales entre les rectes BD i EI. Completa la proporció següent:

$$\frac{\quad}{\quad} = \frac{CD}{BD} \qquad (4)$$

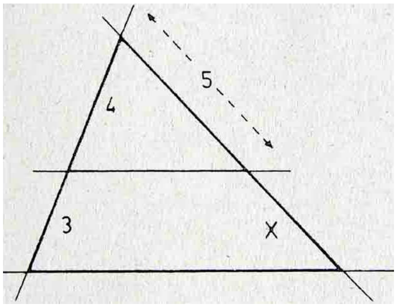
Pinta sobre el dibuix en color els quatre segments relacionats. Pinta en verd els numeradors i en vermell els denominadors.

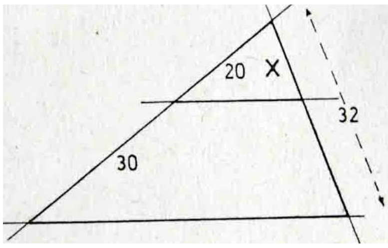
e) Conclusió

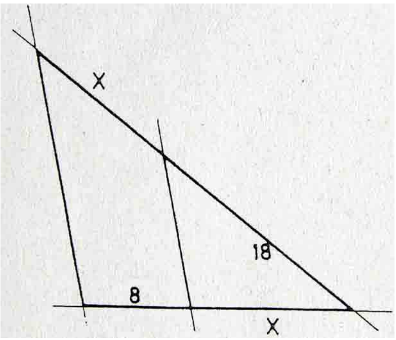
Si enllacem correctament les relacions (2), (3) i (4) obtenim la relació buscada (1). *Fes-ho:*

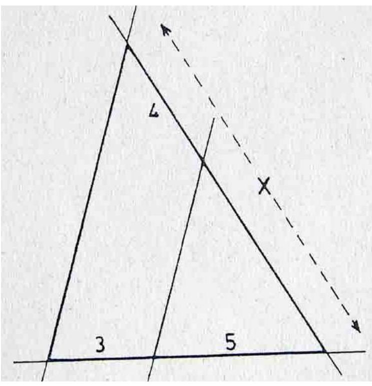
Annex 3: Prova del T. Tales i T. de Menelau

1. Troba x en els triangles següents:









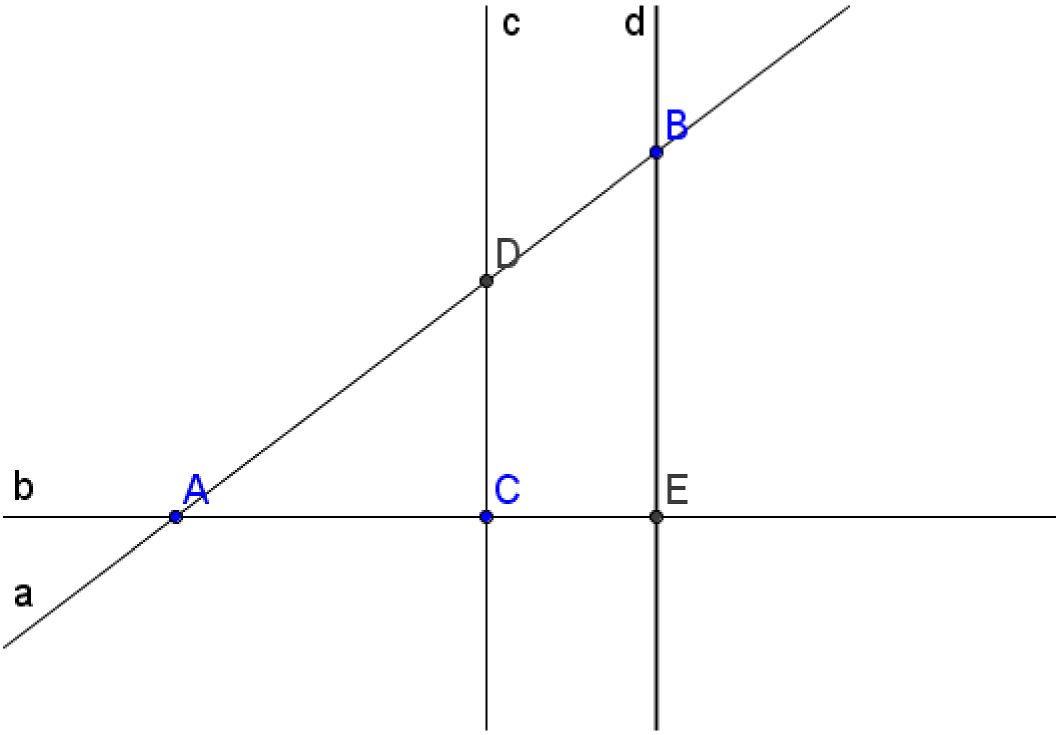
2. Una rampa per salts d'exhibició de moto ocupa una longitud de 7m i té una alçada de 2m. Es vol prolongar de manera que l'alçada sigui ara de 3m Calcula

la longitud total de la nova rampa. Fes un dibuix aproximat de la situació indicant les dades que tens i les que et falten.

3. En el dibuix següent coneixem les dades següents:

AD = 5CD = 3DB = 2

Calcula utilitzant Pitàgores i Tales les longituds que falten: AC, CE i BE



4. a) Enuncia i dibuixa el Teorema de Menelau.

b) Quin teorema s'utilitza per a demostrar aquest teorema?

c) A quina època va viure Menelau, per a què s'utilitzava a la seva època el seu Teorema?