RESOLUCIÓ DE TRIANGLES PER MÈTODES GEOMÈTRICS I ALGEBRAICS

De triangulis Omnimodis *de Regiomontanus (1464)*

ÍNDEX

1. Introducció

En aquest element s'analitzen els mètodes algebraics i geomètrics per a la resolució de triangles en l'obra *De Triangulis omnimodis* (1464) de Regiomontanus (1436-1476). Aquestes proposicions del segle XV aporten unes demostracions prou suggerents per a justificar la seva inclusió com a activitats de matemàtiques. La proposta de treball d'aquestes activitats es situa en els cursos de 3r o 4t d'ESO i ha estat validada amb alumnes d'aquests nivells, utilitzant-les en l'actualitat de manera habitual en alguns dels nostres IES. En els exemples de contextos històrics del currículum de l'ESO s'inclou a quart curs *El naixement i primer desenvolupament de la trigonometria.*

De triangulis omnimodis (1464) de Regiomontanus es considera un dels textos més importants en la història de la trigonometria.[1] L'obra consta de cinc llibres, dos dedicats a la trigonometria plana i tres a l'esfèrica. En aquest element es tractarà dels dos primers, que són els que ens poden proporcionar textos per a les classes de secundària, atès que la trigonometria esfèrica no es contempla en els plans d'estudi de l'ESO, ni en els de Batxillerat. Concretament, en el llibre II s'hi troba uns teoremes molt adients per explicar a l'aula, on Regiomontanus utilitza mètodes algebraics per a resoldre triangles.

S'iniciarà l'estudi situant breument en el temps l'autor i la influència que va tenir sobre autors posteriors, tot seguit es tractarà dels llibres I i II de l'obra *De triangulis Omnimodis,* classificant-ne els teoremes segons el seu contingut i explicant el fil conductor d'algunes demostracions i, finalment, es presentaran alguns dels teoremes que hem utilitzat com a activitats de classe a 3r i 4t d'ESO.[2]

L'estudi de l'obra *De triangulis Omnimodis*, així com el disseny de l'activitat per a l'aula i els fulls de material per a l'alumnat pertanyen al fons del grup d'història d'ABEAM i formen part del projecte “El naixement i desenvolupament de la trigonometria en les diferents civilitzacions” que investiga els orígens de la trigonometria. Una primera part d'aquest estudi es va presentar a la *VII Trobada d'Història de la Ciència i de la Tècnica*[3] (2002). Un treball més complert, on s'analitzava l'aportació de Regiomontanus no

[1] L'edició que s'ha treballat és una traducció del llatí a l'anglès, de Barnabas Hughes, (1967).La traducció compagina el text original en llatí, pàgines parelles, amb la traducció a l'anglès pàgines imparelles. L'edició també conté una introducció de Barnabas Hugues on situa l'època i el personatge. Es pot veure més informació sobre la trigonometria de Regiomontanus a Zeller, 1944: 17-35.

[2] Una altra línia de treball que es desenvoluparà properament és l'estudi de les *Tabulae directionum* (Regiomontanus, 1467) perquè en elles s'hi troba a la Proposició 2, la deducció del sinus de 90º, 30º, 60º, 45º, 15º i 75º partint d'un cercle de radi unitari on s'hi dibuixa el triangle rectangle corresponent a l'arc de 30º.(Zeller, 1944: 33)

[3] Vegeu Guevara-Casals (2003)

solament a la història de la trigonometria sinó també a la de l'àlgebra, es va publicar a la revista *Biaix*[4] (2005)

[4] Vegeu Guevara-Massa (2005)

2. El context històric, l'àlgebra "cossista" alemanya a finals del segle XV

Després que Roberto de Chester el 1145 traduís al llatí l'obra *Hisab al-jabr wal-muqqabala* (813) d'al-Khwarizmi les regles algebraiques àrabs de resolució de les equacions de segon grau varen començar a difondre's a Europa. Segons Malet, 1984 : 66-67, els llibres d'àlgebra que aparegueren a Alemanya durant la primera meitat del segle XVI són molt nombrosos. Les grans aportacions de l'escola alemanya està centrada sobretot en els símbols: empren els signes "+" i "-" actuals**,** també el signe de radicació actual (que va sobreviure a la R emprada pels italians). Entre els noms més citats es troben: Christoff Rudolff (ca. 1500 - ca. 1545) autor d'una àlgebra escrita en alemany i Adam Riese (1492-1559), que és l'autor d'una obra anomenada *Coss* el 1525, que va romandre en manuscrit fins 1892, i on quedava reflectit l'estat de l'àlgebra en aquell temps.

De fet l'obra de Regiomontanus només empra el llenguatge algebraic en alguns teoremes anomenant-lo "*arte rei*" , és a dir, l'art de la "cosa", ja que "*res*" vol dir cosa en llatí. Regiomontanus empra, com Leonardo de Pisa (1170-1250) en el seu *Liber abaci* (1202), la paraula "*census*" per expressar el quadrat i l'expressió "*duplicata*" per elevar al quadrat; per sumar diu "*addo*" i per restar "*demptis*". És à dir, que no trobem a la seva obra cap de les contribucions alemanyes. Cal remarcar però, que Regiomontanus empra els procediments algebraics, com si fossin habituals, tot i que amb llenguatge retòric, i a més, les regles per solucionar l'equació de segon grau les considera conegudes i deixa al lector els càlculs.

3. Regiomontanus i la seva obra

Johann Müller (1436-1476) de Königsberg adoptà el nom de Regiomontanus, forma llatinitzada del nom de la seva ciutat de naixement ("muntanya del rei"). Estudià a les Universitats de Leipzig i Viena i demostrà gran interès per les matemàtiques i l'astronomia. Cal remarcar que a Viena va ser deixeble de Georg Peuerbach (1423-1469).[5] Després de viatjar i estudiar per Itàlia, tornà a Alemanya, on instal·là a Nuremberg una impremta i un observatori per promoure l'interès per la ciència i la literatura. Va morir a Roma on va anar, convidat pel papa Sixte IV, per tal de formar part d'un projecte de reforma del calendari.[6]

Quan Constantinoble passà a mans de l'Imperi Turc (1453), Viena, Cracòvia, Praga i Nuremberg, es convertiren en uns dels centres més importants de l'època en matemàtiques i astronomia. En particular, a mitjan s. XVI, Nuremberg va esdevenir un important centre d'impressió d'obres d'autors científics. Podem suposar que l'obra de Regiomontanus era coneguda en aquests cercles (Boyer, 1986: 353). Segons Hughes (1967: 3-18), es poden citar cinc autors posteriors que van rebre la influència de l'obra de Regiomontanus: Martin Behaim (1459-1507), que va ser deixeble seu i que l'any 1492 va construir un *globus terraqüi* que representava tots els detalls terrestres coneguts abans que Cristòfol Colom (1451-1506) arribés a Amèrica; Colom que va utilitzar les seves taules astronòmiques en el viatge a Les Índies l'any 1492; Tycho Brahe (1546-1601) que, el 1573, a la seva publicació *Una nova estrella* va citar *De triangulis Omnimodis* per establir la correcta situació de la constel·lació Cassiopea; Nicolàs Copèrnic (1473-1543), que va ser deixeble de Regiomontanus i va contribuir a estendre la seva obra a través dels teoremes trigonomètrics que apareixien a l'obra *De revolutionibus orbium coelestium* (1543); i finalment, Georg Joachim Rheticus (1514-1576), que va tenir com a llibre de capçalera *De triangulis Omnimodis* abans de treballar amb Copèrnic.

Regiomontanus va escriure: *Epitome of the Almagest* (1462), *De triangulis omnimodis* (1464), *Tabulae directionum* (1467), *Ephemerides* (*1474), Prospectus* (1471), i *Kalendarium novum* (1476). D'entre elles, les que contenen aportacions a l'àmbit de la trigonometria són les *Tabulae directionum* i *De Triangulis omnimodis*. La primera va ser escrita el 1467 i publicada per primera vegada el 1490, tot i que aquestes taules circulaven manuscrites en els cercles científics de l'època, i consistien en unes noves

[5] Peuerbach matemàtic i astrònom, va construir taules de càlculs d'eclipses i juntament amb el seu deixeble Regiomontanus va escriure sobre l'eclipse lunar del 1457 i també va col.laborar amb ell en l'obra *Epitome in Ptolemaei Almagestum*.
[6] Més informació es pot trobar a Hugues, 1967: 3-21 i a Rosen, 1970-1990 : 348-352.

taules trigonomètriques fetes a partir de les revisions de l'obra de Ptolemeu.[7] En elles s'utilitzava radis de 600.000 unitats, 10.000.000 o 600.000.000 per al sinus i de 100.000 per a la tangent. La segona, *De Triangulis omnimodis*, amb la què volia contribuir al desenvolupament de l'astronomia, és la que s'analitzarà a l'apartat següent.

[7] Claudi Ptolemeu (85-165) astrònom i geògraf va escriure l'*Almagest* (150) obra fonamental sobre astronomia. Vegeu Romero-Massa, 2003: 31-36.

4. *De Triangulis omnimodis* (Els triangles de qualsevol mena)

Aquesta obra, escrita el 1464, es va imprimir per primera vegada l'any 1533 i posteriorment el 1561, tot i que es coneixia per via manuscrita en el cercle de matemàtics de Nuremberg. Regiomontanus volia, amb aquesta obra trigonomètrica, conèixer millor les estrelles, tal com ell mateix explicava en el pròleg de la seva obra:

> No es pot tenir un coneixement satisfactori de les estrelles sense conèixer la ciència dels triangles.[8]

Pel que fa a l'estil de l'obra, l'autor era conscient que estava fent un ampli manual de mètodes de resolució de triangles i volia facilitar la comprensió de l'obra afegint exemples numèrics concrets en molts teoremes. Així, en el pròleg explicava:

> Malgrat la quantitat de qüestions que cal aprendre, els nous estudiants no s'han de desesperar. Les coses bones valen la pena malgrat les seves dificultats. Quan un teorema presenta alguna dificultat, sempre es poden mirar els exemples numèrics que estan per ajudar.[9]

En aquesta obra Regiomontanus utilitzava les taules de cordes en la resolució d'alguns teoremes, les raons trigonomètriques[10] i el teorema del sinus, i del cosinus, per trigonometria plana i esfèrica.

El llibre I, dedicat a la trigonometria plana, conté 57 teoremes i comença amb definicions com ara:

> Una quantitat és considerada coneguda si mesurada a partir d'una mesura arbitrària coneguda podem assignar-li aquesta mesura un nombre determinat de vegades.[11]

Defineix costat d'un quadrat, cercle, arc, corda, sinus recte, arc complementari, angle complementari. Per exemple:

> A partir de qualsevol longitud d'una línia podem dibuixar un cercle de radi aquesta longitud qualsevol.
>
> Un arc és una part de la circumferència d'aquest cercle.
>
> La línia recta que abasta l'arc s'anomena corda de l'arc. [12]

També defineix la base, el costat d'un triangle, el triangle isòsceles, el triangle equilàter i el triangle escalè. Després de les definicions continua amb set axiomes. A tall d'exemple en citem un parell

> Quantitats iguals tenen mesures iguals. En dues quantitats iguals hi ha contingudes les mateixes mesures. [13]

---

[8] Regiomontanus, 1464:27-29
[9] Regiomontanus, 1464:27-29
[10] Només emprava el sinus i el cosinus, no citava la tangent.
[11] "*Cognita vocabitur quantitas, quam mensura famosa, aut pro libito sumpta secundum numerum metitur notum*" (Regiomontanus, 1464 :30-31)

I segueixen 57 teoremes que podem classificar segons el contingut en tres parts: proporcions, resolució de triangles rectangles i resolució de triangles no rectangles.

La primera part, dels teoremes 1 al 19, tracta de proporcions i inclou teoremes sobre magnituds, raons i proporcions basats en la teoria de proporcions del llibre V dels *Elements* (300 aC) d'Euclides.[14]

> Llibre I. Teorema 12. Si la raó de dues quantitats respecte a una tercera és coneguda podem trobar la raó entre les dues quantitats inicials.[15]

A la segona part, dels teoremes 20 al 30, resol diferents casos de triangles rectangles basant-se en les propietats geomètriques d'aquests triangles. En alguns teoremes utilitza el concepte de sinus (T. 20, 27, 28).[16]

La definició de sinus que utilitza Regiomontanus és:

> Sinus d'un arc de circumferència AB és la perpendicular que s'obté quan des d'un extrem de l'arc anem a trobar el diàmetre traçat des de l'altre extrem per un radi fix conegut.[17]

Destacarem el teorema 20 perquè és el que estableix el lligam entre la definició utilitzada en tota l'obra de sinus d'un angle, lligat a un arc de circumferència, i el sinus referit només a un triangle rectangle i el teorema 27 perquè en ell a més inclou un exemple numèric.[18]

> Llibre I. Teorema 20. En qualsevol triangle rectangle un dels seus angles aguts esdevé el centre d'un cercle tal que el seu radi és la hipotenusa i el costat oposat a aquest angle és el sinus de l'arc corresponent a aquest angle, i el tercer costat del triangle és el sinus de l'arc complementari.[19]
>
> Llibre I. Teorema 27. Si coneixem dos costats d'un triangle rectangle podem conèixer tots els angles.[20]

La demostració d'aquest darrer es realitza remetent al teorema 20 quan es coneix un catet i la hipotenusa. Quan es coneixen els dos catets busca la hipotenusa, per passar al cas d'un catet i la hipotenusa.[21] D'aquesta manera resol tots els casos possibles utilitzant només els concepte de sinus. Després de la demostració del teorema 27 inclou l'exemple numèric següent:

---

[12] Regiomontanus, 1464 : 30-31.
[13] Regiomontanus, 1464: 32-33.
[14] Cal recordar que els *Elements* d'Euclides és un dels textos que més van influir al Renaixement. Sobre aquest tema es pot consultar Dou (1986).
[15] Regiomontanus, 1464 : 46-47
[16] Cal aclarir que la definició de sinus que feia servir Regiomontanus encara estava associada a un arc de circumferència i que no és fins a Rhaeticus (1514-1574) que la definició es basa únicament en la raó entre dos costats d'un triangle rectangle (Zeller, 1944: 17-35).
[17] Regiomontanus 1464: 59
[18] Incloure exemples numèrics és una pràctica que utilitza a diferents Teoremes del llibres I i II.
[19] Regiomontanus, 1464: 58-61
[20] *"Trianguli rectanguli duobus lateribus cognitis, omnes angulos datum iri".* Regiomontanus, 1464: 64-67.
[21] Regiomontanus no parla de catets i hipotenusa sinó dels costats que inclouen l'angle recte i del costat oposat a l'angle recte.

> Si AB és 20, AC 12 i BC 16 i el factor escala de la nostra taula és 60000, multipliquem 60000 per 12, obtenim 720000 que dividit entre 20 dóna 36000. Per aquest sinus la taula dóna un angle aproximat de 36º 52'. És l'angle ABC. Després restant-lo de 90 obtenim 53º 8' que és l'altre angle agut que buscàvem.[22]

La tercera part, dels teoremes 31 al 57, del llibre I està dedicada a la resolució de triangles no rectangles. En el teorema 31 classifica els triangles en obtusangles, rectangles o acutangles, segons la posició de l'altura, que ell anomena perpendicular, respecte a la base; en el teorema 32, determina que si coneix els tres costats i una altura podrà conèixer les altres altures. Aquest teorema l'utilitzarà en altres teoremes posteriors de triangles qualssevol perquè amb l'ajut de les altures descompondrà un triangle qualsevol en dos triangles rectangles.

Els teoremes següents, dels teoremes 33 al 41, fan referència a resolucions de triangles equilàters i isòsceles. Finalment, en els darrers teoremes d'aquest primer llibre, dels teoremes 42 al 57, resol triangles de qualsevol tipus. En el primer d'aquests teoremes, teorema 42, planteja la classificació de triangles d'acord amb la longitud dels seus costats en obtusangles, rectangles i acutangles. Aquesta classificació remet a comparar les longituds dels costats a través de les sumes dels seus quadrats i classificar-los segons el quadrat d'un costat sigui igual a les sumes dels quadrats dels altres dos (triangle rectangle) o bé més petit (triangle acutangle) o bé més gran (triangle obtusangle).

En els següents, dels teoremes 43 al 57, resol triangles qualssevol a partir de conèixer només algunes dades. Aquests teoremes inclouen tots els casos possibles: dos costats coneguts i l'angle inclòs, dos costats coneguts i l'angle oposat a un d'ells, dos angles i el costat comprés i dos angles i un costat oposat a un d'ells. Totes les demostracions consisteixen en dividir el triangle segons l'altura en dos triangles rectangles. Cal remarcar el teorema 49, que avui anomenem teorema del cosinus,

> Llibre I. Teorema 49. Si coneixem dos costats d'un triangle i l'angle inclòs, podem trobar l'altre costat i els angles que falten. [23]

El llibre II, també dedicat a la trigonometria plana, consta de 33 teoremes. Aquí introdueix un nou teorema, el teorema 1, que li facilitarà la resolució d'alguns casos que havia resolt

---

[22] "*Vt si a b fuerit 20 a c 12, & b c 16, sinus autem totus quemadmodu in tabula nostra suppsuimus 60000, mutiplicabo 12 per 60000, producuntur 720000, quae diluido per 20, exeunt 36000, huius sinus arcum tabula praebet gradus 36, & minuta 52 fere tantu igitur pronunciabimus angulum a b c, qui tandem sublatus ex 90, relinquet 53 gradus & 8 minuta fere, & tantus habebitur angulus reliquus acutus." (*Regiomontanus, 1464: 66-67)

d'una manera més llarga en el llibre I. Aquest teorema 1 és l'enunciat i demostració del que avui anomenem teorema del sinus:

> Llibre II. Teorema 1. En qualsevol triangle la raó entre un costat i un altre és la mateixa que les raons entre els sinus dels angles oposats.[24]

La demostració consisteix en dividir el triangle en dos triangles rectangles, aplicar proporcions entre els costats dels triangles i emprar la definició de sinus d'un angle.[25] Després torna a fer dos casos que ja havia resolt anteriorment però utilitzant el teorema del sinus. La resta de teoremes es podrien considerar avui en dia com exercicis d'aplicació.

Els punts més remarcables del llibre II són el fet que ofereix solucions "algebraiques" utilitzant nombres concrets (ho anomena mecànica) per a trobar les longituds dels costats dels triangles; que inclou equacions quadràtiques i dóna per suposat que les solucions són conegudes pel lector (per exemple, en els teoremes 12 i 23);[26] i que treballa amb angles i costats per a resoldre triangles però també hi fa aparèixer, en alguns casos, l'àrea del triangle com a dada (així ho fa en els teoremes 10, 25, 26, 28).

Cal remarcar que en les solucions "algebraiques" Regiomontanus constatava que aquestes solucions podien no ser exactes[27] quan es trobava amb nombres que no tenien arrels exactes, tanmateix les acceptava com a bones:

> Malgrat tot, de vegades passa que els nombres que de vegades mesurem no tenen arrels exactes; aleshores, per tal de no ignorar la realitat propera és preferible rebaixar la definició inicial de quantitat coneguda. Parlarem de quantitat coneguda quan la considerem més o menys igual a una quantitat coneguda; perquè és millor estar a prop del que volem conèixer que ignorar-ho completament. No és tant conèixer-ho com saber que estem a prop del que volem conèixer.[28]

---

[23] *"Si duo latera trianguli data notum ambiant angulum, reliquos angulos residuumos latus dimetiri"* (Regiomontanus, 1464: 98-101)

[24] *"In omni triangulo rectilineo proportio lateris ad latus est, tanque sinus recti anguli altererum eorum respicientis, ad sinum rectum anguli reliquum latus respicientis."* (Regiomontanus, 1464: 108-111)

[25] Aquest procediment és similar al que fem nosaltres a classe per a demostrar el teorema del sinus.

[26] Aquests dos teoremes formen part del conjunt d'activitats que hem triat com a proposta per a les classes.

[27] Entén per exactes les solucions amb nombres enters o racionals (Bos, 2001 : 135-143)

[28] *"Cum autem saepenumero accidat numeros secundum quos quadrata nostra metimur esse non quadratos ne prosus ignoremus propinquum veritatti (ut sun scibilia humana) laxius posthac utemur vocabulo quantitatis notaes, quam initio diffinierimus. Quantitatem igitur omnem quae aut nota praecise fuerit, aut notae quantitati fermè aequalis, univoce notam appellabimus. Pulchrius equidem arbitror, aut notae quantitati ferme aequalis, univoce notam appellabimus. Pulchrius equidem arbitror scire propinquum veritati, quam veritatem ipsam penitus negligere: non modo enim contingere metam, verumetiam propinque accedere viruti dabitur"* (Regiomontanus, 1464: 34-35)

També comentava que així estava ampliant la definició inicial de quantitat desconeguda, però que no havia definit la quantitat desconeguda de manera més àmplia des del començament per tal de no confondre el lector.[29]

Els llibres III , IV i V contenen un total de 105 teoremes sobre trigonometria esfèrica, 56, 34 i 15 teoremes, respectivament. En el llibre IV hi apareix el teorema del sinus per a triangles esfèrics i en el V el teorema del cosinus. [30]

[29] *"Non libuit autem hoc pacto superius diffinire quantitatem notam per praecisum et propinquum, ne suspecta lectori diffinitio nostra redderetur, fluctuante vocabulo propinqui id agente:nam etsi praecisum pro vero ponere soleamus, propinquum tamen veritati vis diffinitionem lectori satis facturam accipiet."*(Regiomontanus, 1464: 34-35)

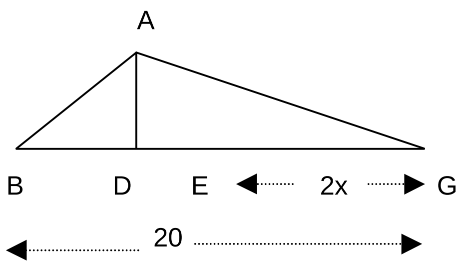
[30] Aquest tres llibres no han estat objecte d'aquest estudi, atès que la trigonometria esfèrica no apareix en el currículum del Batxillerat LOGSE i que l'objecte d'aquest estudi era confeccionar activitats de classe a partir de textos històrics i compatibles amb el currículum de Matemàtiques actual de la ESO i el Batxillerat.

5. Mètodes algebraics a classe

En la lectura del llibres I i II s'han trobat diversos teoremes que ens interessaven com a activitat de classe, que ens permeten conservar el text original i que compaginen el raonament geomètric amb l´algebraic, són els teoremes 12 i 23 del llibre II. Aquestes activitats són adequades per a 3r o 4t d'ESO, de fet es poden situar a partir de 3r ja que encara que no utilitzen pròpiament conceptes trigonomètrics s'hi relaciona la geometria amb l'àlgebra en un tema tan senzill com és la resolució de triangles. Totes aquestes activitats han quedat recollides de manera habitual a les programacions de diferents IES des del curs 2002-2003.

> Llibre II.Teorema 12. Si coneixem la perpendicular (altura) d'un costat, la base i la raó entre costats podem conèixer els costats.[31]

Regiomontanus comença aclarint que aquest problema només el pot resoldre per l'"art de la cosa" (*per arte rei*).



Dades:

$AD = 5$

$BG = 20$

$$\frac{AB}{AG} = \frac{3}{5}$$

Demostració:

$\frac{AB}{AG} = \frac{3}{5}$ vol dir $AB < AG \Rightarrow BD < DG$

Prenem el punt E tal que $BD = DE$

Diem a $EG = 2x$ $\Rightarrow BE = 20 - 2x$

$BD = 10 - x \Rightarrow DG = DE + EG = 10 + x + 2x = 10 + x$

$$\left.\begin{aligned} BD^2 &= x^2 + 100 - 20x \\ AD^2 &= 25 \end{aligned}\right\} \quad AB^2 = x^2 + 125 - 20x$$

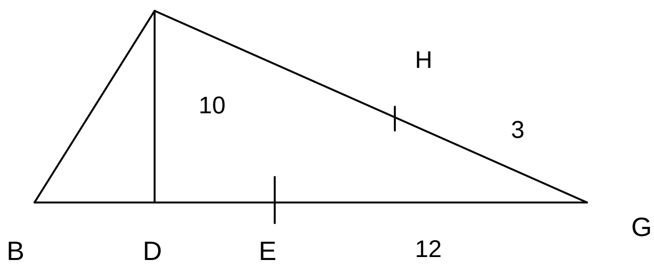
[31] *"XII. Data perpendiculari atque basi &proportione laterum cognitis, utruncque latus cognoscere*." (Regiomontanus, 1464:118-119)

$$\left.\begin{array}{l} DG^2 = x^2 + 20x + 100 \\ AD^2 = 25 \end{array}\right\} \quad AG^2 = x^2 + 125 + 20x$$

$$\frac{AB^2}{AG^2} = \frac{9}{25} = \frac{x^2 + 125 - 20x}{x^2 + 125 + 20x} \quad \Rightarrow \quad 16x^2 + 2000 = 680x$$

El text és retòric, per exemple, l'equació l'escriu: "16 quadrats (*census*) i 2000 igual a 680 coses (*rebus*)." Segons Regiomontanus es resol per unes regles conegudes. Així trobem $2x$ i reconstruïm BD. Amb BD i AD obtenim AB i després a través de $\frac{AB}{AG}$ el AG.

> Llibre II. Teorema 23. Si en un triangle coneixem la diferència entre dos costats, la diferència entre els segments en què la perpendicular[32] divideix (al tercer costat) i la perpendicular mateixa, podem trobar tots els costats.[33]



També aquí Regiomontanus especifica "Per l'art de la cosa i del quadrat resoldrem aquest problema".[34]

Dades:

AG – AB = HG = 3

DG – BD = EG = 12

AD = 10

Demostració:

Prenem la base BG = x, llavors la suma dels dos costats AB + AG = 4x

Aquesta segona afirmació Regiomontanus la dóna sense cap explicació però, a classe, requereix que ens hi aturem.

---

[32] Nosaltres parlaríem de l'altura.

[33] *"Data differentia duorum laterum, diferentiaque duorum casuu cu ipsa perpendiculari cognita omnia latera propalare"*. (Regiomontanus, 1464:126-129)

[34] "*Per artem rei & census hoc problema absolvemus"* (Regiomontanus, 1464 : 127).

Sabem que $\dfrac{AG-AB}{DG-BD}=\dfrac{3}{12}$, hem assumit que $DG+BD=x$ i en aquestes condicions volem veure que $AG+AB=4x$, o el que és el mateix

$$\frac{x}{4x}=\frac{DG+BD}{AG+AD}=\frac{AG-AB}{DG-BD}=\frac{3}{12}$$

que equival a dir $DG^2-BD^2=AG^2-AB^2$

o el que és igual $AB^2-BD^2=AG^2-DG^2$

però aquesta darrera igualtat és certa perquè en ambdós casos és AD^2.

En aquestes condicions

$$BD=\frac{(BG-EG)}{2}=\frac{x-12}{2}=\frac{1}{2}x-6$$

$$AB=\frac{(AG+AB)-(AG-AB)}{2}=\frac{4x-3}{2}=2x-\frac{3}{2}$$

elevant ambdues igualtats al quadrat

$$AB^2=4x^2+2\frac{1}{4}-6x$$

$$BD^2=\frac{1}{4}x^2+36-6x$$

restant les dues equacions obtenim una equació de segon grau igual a un nombre que podem acabar de resoldre per obtenir "*x*" i els altres costats del triangle.

Regiomontanus dóna per suposat que el lector és capaç d'acabar els càlculs. Nosaltres acabarem el desenvolupament

$$3\frac{3}{4}x^2-\frac{135}{4}=AD^2=10^2$$

$$\frac{15}{4}x^2=\frac{135}{4}+100$$

$$\frac{15}{4}x^2=\frac{535}{4}$$

$$x=\sqrt{\frac{535}{15}}$$

a partir d'x podem recuperar

$AB = \frac{4x-3}{2} = 2x - \frac{3}{2}$ i després $AG = AB + 3$

6. Conclusió

Estudiar textos de la història de la trigonometria ens proporciona elements per situar cronològicament aspectes rellevants d'alguns coneixements matemàtics que treballem a l'ESO o al Batxillerat. A l'hora d'utilitzar aquests materials a les nostres classes podrem presentar el personatge, situar-lo a l'època i intentar explicar el significat de la seva obra dins l'evolució de la ciència. Aquesta opció queda més completa si la il·lustrem amb teoremes o demostracions fets a la manera del personatge que hem presentat.

Al nostre entendre, l'obra de Regiomontanus contribueix a donar resposta a dues preocupacions de l'època: la situació dels vaixells a alta mar mitjançant l'observació astronòmica i l'establiment d'un calendari el més ajustat possible al moviment de la terra al voltant del sol[35]. La revisió i ampliació de taules trigonomètriques era una activitat comuna entre els científics de l'època. D'elles depenia l'astronomia i el coneixement de la situació d'astres i planetes. A més, l'astronomia era cabdal per a la navegació a través dels oceans, més enllà de la Mediterrània, que començava a adquirir, en aquell temps, un desenvolupament important.

Pel que fa al fil conductor del desenvolupament de la trigonometria podem argumentar que *De triangulis omnimodis* és un tractat àmpliament utilitzable per a treballar la trigonometria. Hem vist que els teoremes dels llibres I i II estan organitzats per tipus de triangles i això, a la nostra manera d'entendre, coincideix amb l'estructura de qualsevol text actual de la trigonometria plana elemental. En aquest article hem presentat, com a activitats de classe els teoremes 12 i 23 del llibre II, perquè conjugava conceptes trigonomètrics i algebraics. Molts altres teoremes del llibre I i II podrien formar part d'aquest conjunt d'activitats de classe, així per exemple, el teorema 27 del llibre I que, tot i que utilitza una definició anterior a la nostra del sinus d'un angle, es podria adaptar perfectament per fer-la compatible amb la presentada a l'aula. Dins la formació matemàtica dels alumnes és important presentar-los activitats connectades en més d'un àmbit, en el cas de les activitats suggerides observem que s'hi relacionen geometria, trigonometria i àlgebra.

[35]Ja hem citat més amunt el fet que Cristòfol Colom utilitzà les seves taules per al seu viatge a Les Índies. També en els trets biogràfics hem esmentat el fet que Regiomontanus va anar a Roma per tal de formar part d'un projecte de calendari. (Zeller, 1944: 35)

8. Referències

Bos, Henk J.M. (2001) Redefining geometrical exactness. Nova York: Springer,135-143.

Boyer, Carl B. (1986) *Historia de las Matemáticas*. Madrid: Alianza Editorial.

Dou, Albert. (1986). “Euclides”. Historia de la Matemàtica hasta el siglo XVII. Madrid: Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 61-78.

Guevara, Iolanda; Casals, Mª Àngels (2003) “Resolució de triangles per mètodes geomètrics i mètodes algebraics, en l’obra de Regiomontanus”. *Actes de la VII Trobada d’Història de la Ciència i de la Tècnica*. Barcelona: SCHCT, 191-199.

Guevara, Iolanda; Massa, Mª Rosa (2005) “Mètodes algebraics a l’obra de Regiomontanus (1436-1476)”. *Biaix* 25, 27-34.

Malet, Antoni; Paradís, Jaume (1984) *Els orígens i l’ensenyament de l’àlgebra simbòlica.* Barcelona: Edicions de la Universitat de Barcelona.

Maor, Eli (1998) Trigonometric delights. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Regiomontanus (1967) De Triangulis omnimodis. On triangles of everything. Hughes, Barnabas (trad) [ed. bilingüe]. Madison: The University of Wisconsin Press.

Romero, Fàtima; Massa, Mª Rosa (2003) “El teorema de Ptolemeu”. Biaix, 21, 31-36.

Rosen, Edward (1971) “Regiomontanus”. Dictionary of Scientific Biography. C.C Gillispie, C.C. (ed). Nova York: 348-352.

Zeller, Sister Mª Claudia (1944) The Development of Trigonometry from Regiomontanus to Pitiscus, Annn Astor / Michigan, University of Michigan.

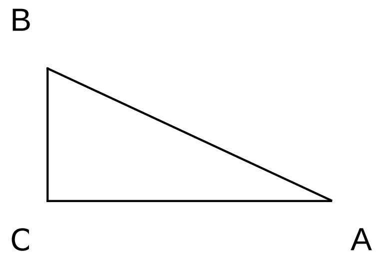
Annex: Fulls de treball per l'alumnat

Teorema 27, llibre I

Si coneixem dos costats d'un triangle rectangle, podem conèixer tots els angles.

Definició de sinus d'un angle:

En un triangle rectangle, recte en C,



definim $\text{sinus } A = \frac{BC}{AB}$

demostració i aplicació en exemples:

cas 1: coneixem BC i AB

En aquest cas el quocient . . . . és per definició el sinus d'A.

Introduïm aquest valor a la calculadora, demanem INV sin i obtenim l'angle A.

Regiomontanus no tenia calculadora però disposava d'una taula de sinus que relacionava angles i sinus com avui en dia ens fan les calculadores.

Exemple:

AB = 20   BC = 16

el quocient . . . . . . .és sin A i la calculadora ens diu que A. . . .

Com que B + A han de sumar 90º, podem deduir que B és . . . . .

cas 2:

Coneixem AC i AB.

En aquest cas el quocient . . . . és per definició el sinus de B i podem trobar el valor de B. Després restant obtindrem A.

Exemple:

AB = 20 AC = 12

el quocient . . . . . és sin B i la calculadora ens diu que B és . . .

Igual que en el cas anterior B + A han de sumar 90º,

podem deduir que A és . . . .

cas 3:

Coneixem AC i BC. Pel Teorema de Pitàgores podem conèixer AB i aleshores

retornem al cas 1 i 2.

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$$

Exemple:

AC = 12

BC = 16

Calculem AB = ... , dóna . . . . i ara

podem recuperar el cas 1.

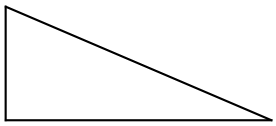
Teorema 29, llibre I

Si coneixem un dels dos angles aguts del triangle rectangle i un dels costats, podem conèixer tots els angles i tots els costats.

demostració i aplicació en exemples:

Sigui el triangle ABC, recte en C, B un angle conegut i AC un costat conegut.

En aquestes condicions podem averiguar l'angle A perquè A + B = ...



Ara busquem els costats que falten . . . . . . i . . . . . .

Si coneixem B, amb la calculadora podem trobar sin B, fem-ho

sin B = ..., però a la vegada segons la definició de sin B tenim la relació

sin B = $\dfrac{AC}{AB}$, d'aquesta relació coneixem sin B i AC , podem aïllar i trobar AB.

El tercer costat del triangle, BC, el trobarem aplicant el T. de Pitàgores

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2}$$

o bé utilitzant la definició de sin A que és $\dfrac{BC}{AB}$ i aïllant BC perquè coneixem:

A, sin A i AB.

Exemple:

B = 36º

AC = 20

l'angle A és . . . . , perquè ha de sumar 90 juntament amb B.

Segons la calculadora o la taula de sinus, podem trobar sin B, fem-ho

sin B = ...

$\frac{20}{AB} =$ . . . ., aleshores podem aïllar AB = ... i podem trobar

el tercer costat BC, aplicant la definició de sin A perquè ja havíem trobat A

sin A = ... però a la vegada $\frac{BC}{AB} = \sin A$

$\frac{\qquad}{\qquad} = \sin A =$ . . . . i d'aquí aïllem BC.