

NFORME D'INVESTIGACIÓ

Títol:

LA HISTÒRIA DE LES MATEMÀTIQUES DINS DELS NOUS CURRÍCULUMS DE SECUNDÀRIA:

**La introducció de contextos històrics a l'aula, un recurs per a millorar la
competència matemàtica.**

Autora: Iolanda Guevara Casanova

Supervisora: Maria Rosa Massa Esteve

Memòria d'investigació: Llicència tipus A

Curs: 2008-09

Agost del 2009

Índex

	Pàgina
Resum	1
1. Introducció	
Propòsit de la investigació	4
Antecedents, conceptes de la investigació i definicions	4
Hipòtesis o preguntes a les que respon la recerca	9
Context general de la investigació	10
Variables i aspectes considerats	10
Limitacions	11
2. Marc teòric	
Les matemàtiques	13
La història	14
Els blocs de referència i les seves relacions	14
Els autors de referència i els trets que representen	15
Aportacions de la història a les matemàtiques	16
Ús de la història en l'aprenentatge	18
3. Mètode	
Descripció de la metodologia utilitzada	20
Documentació i recollida d'informació	21
Criteris de selecció de les fonts de les dades	22
Anàlisi i interpretació de dades	22
4. Resultats	
Quan introduir contextos històrics	24
Com introduir-los	24
Criteris utilitzats per a la tria dels elements	25
Elements desenvolupats en la investigació	26
Components de cada element	27
Sobre els elements desenvolupats	28
Objectius dels elements	28
Com utilitzar-los	28
Gestió de l'aula	29
Temporització	29
Materials i equipament necessari	30
5. Discussió	31
6. Referències	
Bibliografia	33
Pàgines web	40

7. Annexos	42
<i>ELS NOMBRES NEGATIUS I EL ZERO.</i> Xina, Grècia, Índia, Món àrab, Europa (250- 1567)	1-60
APROXIMACIONS AL NOMBRE π . El mètode d'Arquimedes per aproximar el nombre π (aprox. 287 a C – aprox. 212 a C)	1-24
EL TEOREMA DE PITÀGORES A LA GRÈCIA CLÀSSICA. Els Elements d'Euclides (300 aC)	1-23
<i>EL TEOREMA DE PITÀGORES A LA XINA ANTIGA.</i> El capítol 9 (Gou gu) dels <i>Nou Capítols sobre els procediments matemàtics</i> (s. I)	1-33
<i>LA RESOLUCIÓ DE SISTEMES D'EQUACIONS A LA XINA ANTIGA.</i> El capítol 8 (<i>fangcheng</i>) dels <i>Nou Capítols sobre els procediments matemàtics</i> (s. I)	1-32
<i>LA RESOLUCIÓ GEOMÈTRICA D'EQUACIONS DE 2n GRAU.</i> <i>Hisâb al-jabr wal-muqabala</i> de Mohamed Ben-Musa al-Khwârizmî (813)	1-46
EL TEOREMA DE MENELAU. Les Esfèriques de Menelau (s. I), la construcció amb Geogebra (s. XXI)	1-29
<i>RESOLUCIÓ DE TRIANGLES PER MÈTODES GEOMÈTRICS I ALGEBRAICS.</i> <i>De triangulis Omnimodis</i> de Regiomontanus (1464)	1-22

Resum

El propòsit d'aquesta investigació ha estat desenvolupar alguns dels exemples de contextos històrics que s'inclouen en el nou currículum de matemàtiques de l'ESO. Cada element estudiat inclou un apartat d'història, en el que se situa els temps, l'indret i els personatges que ho han treballat, i un altre apartat amb activitats d'aprenentatge per a l'aula. Aquestes s'han dissenyat a partir de textos antics o de traduccions i interpretacions documentades, amb l'objectiu de que mentre es resolguin s'entri en el context presentat i es treballi "a la manera" del personatge estudiat.

El fet que en els nous currículums es reconegui que la història de les matemàtiques és un recurs que cal considerar, en la planificació de la programació i de les activitats d'aula, fa pensar al grup d'història d'ABEAM¹ que ha arribat el moment de presentar al professorat en general un projecte, sobre la utilització de la història per ensenyar i aprendre matemàtiques, que reculli i revisi materials que ja s'havien implementant a les aules en els darrers anys i que s'havien exposat en jornades, congressos i cursos de formació davant d'un públic més restringit.

La idea s'acaba de concretar fent confluïr l'experiència del grup d'història i el desig expressat pel CREAMAT² de promoure la construcció d'un recobriment del nou currículum de matemàtiques des de diferents àmbits (resolució de problemes, activitats manipulatives, contes, contextos no matemàtics, contextos històrics, etc.).

Així, en aquest estudi ha participat la persona coordinadora del grup d'història, com a supervisora de la recerca i l'equip del CREAMAT creant l'espai web necessari per a difondre aquesta investigació, dins d'un espai més general on s'inclouran els diversos recobriments. Cal esmentar la participació de diferents professors i professores, formadors³ i assistents a cursos de formació en Pràctica reflexiva⁴ durant el curs 2008-09 perquè amb els seus comentaris i reflexions han millorat els elements dissenyats. Per acabar l'enumeració de participants caldria citar també l'alumnat de l'IES Badalona VII que durant els anys anteriors a aquesta recerca han estat alumnes d'ESO i han après matemàtiques a través de contextos històrics.⁵

La investigació parteix dels materials del fons del grup, que contenen activitats implementades a l'aula, articles i comunicacions sobre història, i reflexions sobre com utilitzar la història per ensenyar matemàtiques. Per tal de tenir una visió àmplia de la situació actual sobre l'ús de la història per ensenyar i aprendre matemàtiques, a l'hora de revisar els materials ja elaborats i també per a dissenyar-ne de nous, la recerca ha continuat amb l'estudi d'algunes fonts reconegudes a nivell internacional en aquest camp. Es tracta del *X ICMI Study*, que amb el lema *The Role of the History in the Teaching and Learning of Mathematics*, es va publicar en forma de llibre amb el títol *History in Mathematics Education. The ICMI Study*, amb John Fauvel i Jan van Maanen

¹ ABEAM: Associació de Barcelona per a l'estudi i aprenentatge de les matemàtiques. Grup fundat el 1999. <http://phobos.xtec.cat/fmoren25/moodle/>. El grup d'història de les matemàtiques d'ABEAM treballa en el projecte *El naixement i desenvolupament de la trigonometria dins les diferents civilitzacions*.

² CREAMAT: Centre de recursos per ensenyar i aprendre matemàtiques del Departament d'Educació de la Generalitat de Catalunya. <http://phobos.xtec.cat/creammat/joomla/>

³ Com la persona que signa aquests informes.

⁴ IES Brossa i CRP del Tarragonès.

⁵ 3r d'ESO curs 2007-08: "Gou gu El teorema de Pitàgores a la xina antiga" i "La resolució geomètrica d'equacions de 2n grau". 4t d'ESO curs 2006-07: "Gou gu El teorema de Pitàgores a la xina antiga" i "Les Esfèriques de Menelau". 3r d'ESO curs 2005-06: "Els Elements d'Euclides. Una demostració del teorema de Pitàgores". 4t d'ESO curs 2004-05: "*De triangulis Omnimodis* de Regiomontanus"

(eds.)(2000)⁶, i de *Using History to Teach Mathematics. An International Perspective* de Victor J. Katz (ed.) (2000)⁷.

Cal citar també els *Historical Modules for teaching and Learning of Mathematics*, de Víctor J Katz i Kareen Dee Michalowicz (ed.) (2004) i *Fare matematica con i documenti storici. Una raccolta per la scuola secondaria de primo e secondo grado*, d'Adriano Demattè (2006). Mentre els primers llibres referenciatos recullen l'obra de diferents autors i autores reunits per donar raó de l'ús de la història per ensenyar i aprendre matemàtiques, aquests dos darrers són projectes globals amb l'objectiu de recobrir tot el currículum.⁸ Algunes seccions d'aquests materials s'ha traduït al català i s'han inclòs en dos dels nous elements dissenyats⁹ que encara no s'han experimentat. Els dos projectes comentats sí que han estat implementats en el seu país d'origen, USA i Itàlia.

Com a resultat d'aquesta recerca ara es disposa d'un desenvolupament d'alguns dels exemples de contextos històrics del nou currículum. Amb aquest material, el professorat podrà situar l'alumnat en el moment històric i a través de les activitats proposades els obrirà un ventall més ampli de maneres de treballar en matemàtiques.

Els exemples desenvolupats¹⁰ són un primer recobriment del currículum de matemàtiques de l'ESO perquè abasten gairebé tots els blocs de continguts (Numeració i càlcul, Mesura, Espai i forma, Canvi i relacions), els quatre cursos de l'ESO i, des del punt de vista de la història, contenen exemples de diferents països (Egipte, Xina, Grècia, Índia, Món Àrab i Europa) i de diferents èpoques.

El que també és un resultat important de la recerca és el fet d'haver establert, mitjançant l'estudi i la comparació entre el que proposen exposen diferents autors, un divisor comú, en termes matemàtics. Cada element és únic i es pot utilitzar de manera independent però tots es recolzen en una base comuna, sobre quins aspectes cal tenir en compte a l'hora d'introduir contextos històrics, que s'exposa de manera raonada en l'apartat de *Resultats*. Els temes desenvolupats s'inclouen en aquesta memòria en forma d'*Annexos*.

Amb la investigació s'ha evidenciat que la utilització de la història per ensenyar matemàtiques és un recurs reconegut internacionalment. Fruit d'aquesta tendència, en els últims cinc anys diferents països han anat incorporant la història dins dels currículums de matemàtiques de secundària. El nostre país no ha quedat al marge d'aquesta tendència i en el nou currículum de matemàtiques (juny del 2007) la història hitéun lloc. Amb el propòsit de nodrir al professorat de criteris i materials per a facilitar la incorporació de la història a l'aula, s'han desenvolupat els elements que conté aquesta investigació.

Respecte a la difusió de la investigació, ja hi hagut una primera ocasió d'exposar els resultats i un exemple a les XIV JAEM¹¹ (Girona: 1-4 de juliol del 2009)¹². Pel que fa a

⁶ Tot i que aquest era el lema del X ICMI Study les conclusions del mateix es van publicar amb el títol més curt que duu el llibre de referència: *History in Mathematics Education. The ICMI Study*.

⁷ Vegeu la *Introducció* i el *Marc de referència* on es comenten aquestes obres.

⁸ *Historical Modules for teaching and Learning of Mathematics* de Katz abasta des del Middle School fins als primers cursos de la Universitat i *Fare matematica con i documenti storici. Una raccolta per la scuola secondaria de primo e secondo grado* la secundària obligatòria i pots obligatòria.

⁹ Els nombres negatius i el zero. Xina, Grècia, Índia, Món àrab, Europa (250- 1567) i també en Aproximacions al nombre π . El mètode d'Arquimedes per aproximar el nombre π (aprox. 287 a C – aprox. 212 a C)

¹⁰ Veure el quadre complet a l'apartat de Resultats.

¹¹ JAEM: Jornadas sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, que organitza la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM)

la inclusió dins dels projecte Global del CREAMAT, properament s'introduiran els elements elaborats a l'aplicatiu ARC-Cercamat.

De cara al curs 2009-10 estan previstes d'actuacions de difusió que incidiran en la formació inicial del professorat i de recerca sobre la repercussió de la introducció de contextos històrics en l'aprenentatge de l'alumnat. Queda oberta la possibilitat de difondre la recerca en altres jornades o sessions adreçades als professorat.

Pel que fa a la formació inicial, s'han concertat diferents sessions en els Màster de Formació inicial del professorat de secundària en l'especialitat de matemàtiques de la UPC i de la UPF.

Sobre la repercussió de la introducció de contextos històrics en l'aprenentatge de l'alumnat, aquesta recerca es concretarà properament en una proposta de tesi en el camp de la didàctica de la matemàtica que inclourà en els seus termes preguntes com: Quines matemàtiques aprèn l'alumnat quan s'introdueixen contextos històrics a l'aula?.

Pel que fa als exemples de contextos històrics del currículum vigent de matemàtiques animem a desenvolupar més exemples, aquesta investigació només ha incitat el procés. En aquest sentit també podria ser interessant pensar en la possibilitat de traduir al català tant els *Historical Modules for teaching and Learning of Mathematics* com *Fare matematica con i documenti storici. Una raccolta per la scuola scondaria de primo e secondo grado*, perquè abasten moltes temes i nivells i contenen els exemples que inclou el currículum català.

¹² Veure "La historia de las matemáticas en los nuevos currículos de secundaria" en NT7 (Núcleo temático 7) en la carpeta de Comunicaciones en las Actas de las XIV JAEM.

1. Introducció

Propòsit de la investigació

La utilització de la història de la matemàtica per ensenyar matemàtiques, i en general l'ús de la història de la ciència per ensenyar ciències, és la idea que impulsa diversos col·lectius de professors i professores del nostre país que, des de fa bastants anys, introdueixen contextos històrics a l'aula. Aquest col·lectiu¹³, al que pertanyo, ha trobat en la història de la ciència un espai de recerca i reflexió sobre els temes que imparteix a l'alumnat de l'ESO i el batxillerat.

El que podria semblar un recurs més d'un petit nucli de professors i professores, aficionats a la història de la matemàtica, forma part d'un dels temes d'estudi i debat recolzat a nivell internacional per l'ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) com es mostrarà en l'apartat següent, en el que es descriuen els antecedents i l'estat de la qüestió sobre la utilització de contextos històrics a l'aula.

En aquesta investigació es lliura una proposta de com treballar contextos històrics a l'aula i s'il·lustra amb diferents exemples. Es desenvolupen alguns dels títols que apareixen en el nou currículum de l'ESO, amb la intenció de facilitar al professorat la incorporació d'aquest recurs didàctic a l'aula de matemàtiques.

A partir d'uns títols, el que apareixen en el currículum oficial, s'ha fet una tria de moments històrics i llocs on s'han desenvolupat aquells continguts, s'ha escrit una petita introducció històrica i s'han dissenyat activitats d'aprenentatge que situen, en l'espai i el temps, l'origen del problema que s'està estudiant a classe. Amb aquestes activitats es pretén contextualitzar millor el contingut matemàtic que s'està treballant. En analitzar i decidir els temes històrics es treballa amb dues components, la del desenvolupament històric i la dels aspectes de la competència matemàtica que es volen fomentar.

Cada aula és única, cada alumne/a, cada professor/a també, la investigació no pretén assortir el professorat amb unes activitats d'aula tancades i estandarditzades per utilitzar contextos a l'aula, sinó que dona idees, referencia documentació, analitza criteris, proposa eines i lliura alguns exemples concrets, perquè cada professor o professora amb el seu propi criteri i pensant en la seva classe tingui material i documentació suficient per construir les activitats adequades per a la seva aula, a l'hora d'introduir els contextos històrics que es proposen en el nou currículum.

Antecedents, conceptes de la investigació i definicions

Des del segle XIX els matemàtics dedicats a l'educació han fet us de la història de les matemàtiques des de diferents perspectives (Cajori, 1894; Zeuthen, 1902; Felix Klein, 1908). Per exemple, la història de les matemàtiques s'ha utilitzat com a eina de llarg abast per a contradir l'opinió molt estesa entre el professorat i l'alumnat que les veritats i els mètodes matemàtics no s'han qüestionat mai. Les biografies de diversos matemàtics s'han utilitzat com a font de motivació per l'alumnat. A més, descobrir que, al llarg de la història, alguns coneixements matemàtics han aparegut en països i

¹³ El professorat aquí esmentat participa activament en les *Jornades sobre la història de la ciència i l'ensenyament* organitzades anualment per la SCHCT (societat catalana d'història de la ciència i la tècnica), filial de l'IEC (Institut d'Estudis Catalans)

cultures ben diferents ha posat de manifest l'origen i desenvolupament múltiple de les matemàtiques actuals. (Fulvia Furinghetti i Luis Radford, 2008)

En l'actualitat, un referent acceptat internacionalment per filòsofs, matemàtics i educadors, respecte al paper de la història en educació matemàtica és el desè ICMI Study: *The Role of the History of Mathematics in the Teaching and Learning of Mathematics*, recollit en el llibre *History in Mathematics Education. The ICMI Study* (Jonh Fauvel i Jan van Maanen, ed., 2000) sota la responsabilitat del grup HPM¹⁴.

Els participants en l'estudi tenien en comú una àmplia experiència en aquest camp, el convenciment que la història de les matemàtiques és un bon recurs per al professorat i que les matemàtiques escolars també han de reflectir l'aspecte més obert de les matemàtiques com a activitat cultural.

L'ICMI Study recull diferents aspectes que cal considerar a l'hora de situar l'ús de la història en l'educació matemàtica, mostra la situació del final del s XX, marca tendències i recomana vies d'investigació. Dels diversos aspectes que tracta l'estudi, s'han triat i desenvolupat els que són més rellevants per aquesta recerca: el paper del context polític i cultural; les raons filosòfiques, culturals i interdisciplinars per les que es justifica la utilització de la història en l'educació matemàtica; les possibilitats d'integrar realment la història en el currículum; la relació entre el desenvolupament històric i el desenvolupament del coneixement en l'alumnat.

La humanitat ha estudiat, ha après i ha utilitzat les matemàtiques des de fa milers d'anys. Les decisions sobre què s'ha d'ensenyar a les escoles i com, són en darrer cas decisions polítiques, induïdes per molts factors que inclouen l'experiència del professorat, les expectatives de pares i mares, i del món laboral, així com el context social on es desenvolupa (Florence Fasanelli, 2000). Molts països han incorporat o estan incorporant la història de les matemàtiques en els seu currículums i en la formació del professorat perquè aquest, que no és historiador, ha de tenir un coneixement bàsic del tema, si n'ha de fer ús a les seves classes.

Els aspectes filosòfics, multiculturals i interdisciplinaris estan molt relacionats entre ells. Des del punt de vista filosòfic i multicultural, les matemàtiques s'han de veure com una activitat humana realitzada en cultures individuals però que a la vegada es pot abstraure d'elles pel seu caràcter universal. Des del punt de vista interdisciplinar, la història proporciona situacions amb les que l'alumnat trobarà més sentit a les matemàtiques perquè al llarg de la història molts problemes s'han resolt amb la confluència de diverses disciplines.

La història de les matemàtiques i la història de les idees estan estretament relacionades, o millor, són una part de la història dels éssers humans. En aquest sentit cal analitzar el context cultural, polític, social i econòmic on apareixen les idees. La història mostra l'evolució de les matemàtiques a partir de la suma de moltes contribucions que neixen de diferents cultures. Això proporciona a l'alumnat la perspectiva de ciència viva i en contínua evolució, en contraposició a ciència estàtica i acabada que sovint impera a les aules. La perspectiva cultural de les matemàtiques fa que es pari atenció a la seva història i al que ella ens explica sobre qui desenvolupa les idees matemàtiques a les diferents societats (Lucia Grugnetti i Leo Rogers, 2000).

¹⁴ Història, Psicologia i Matemàtiques. La idea de formar un grup internacional d'estudi de les relacions entre història, pedagogia i matemàtiques havia nascut l'any 1972, i es va consolidar en forma de grup l'any 1976. Més informació sobre HPM a: <http://www.clab.edc.uoc.gr/HPM/>

Segons aquests autors, en parlar d'història cal tenir present que hi ha la dels documents i la de les idees i que des del punt de vista de la didàctica es parla de la història referint-se a la de les idees, on els documents són el seu suport i en aquest sentit aquests passen a un segon pla. També cal diferenciar la filosofia de la matemàtica de la lògica de la matemàtica. La lògica parla de l'estructura interna de les matemàtiques, la filosofia de les idees que s'hi desenvolupen. Des del punt de vista de l'educació interessa la filosofia de la matemàtica, el desenvolupament històric serà una guia per fer la tria didàctica, la planificació de l'ensenyament. És a dir, la història és un dels elements, que no vol dir que sigui l'únic, que cal utilitzar per decidir què s'ensenyà i amb quin ordre. Sempre amb el benentès que la història és un recurs però que en darrer terme el que prima són els objectius didàctics.

Un altre aspecte que consideren són les possibilitats reals d'integrar la història en el currículum de matemàtiques, quines dificultats s'hi veuen i quines vies es proposen per afavorir la integració. Quan es parla d'integrar la història en el currículum de matemàtiques hi ha una sèrie de sobreentesos que val la pena esmentar, el professorat ha de conèixer una mica la història de les matemàtiques, està comprovat que aquest coneixement li canvia la seva percepció sobre les matemàtiques, entén millor els conceptes i les teories, influint això en la seva manera d'ensenyar-les i afecta al que finalment l'estudiant aprèn i entén sobre les matemàtiques.

Dues idees importants en relació a com canvia la perspectiva del professorat, la primera és que a partir del temps de la història s'entén millor el temps que necessita l'alumnat per comprendre i la segona que el coneixement matemàtic és el resultat d'un procés de resolució de problemes en sentit ampli, el que porta a situar la resolució de problemes com un dels focus de l'activitat matemàtica a les aules. Aquesta darrera idea no és nova en didàctica i educació matemàtica però es reforça amb interpretació que aporta la història sobre el desenvolupament del coneixement.

Un altre argument a favor de la utilització de la història és que l'alumnat necessita situacions educatives variades, amb l'ús de fonts històriques el professorat és més capaç de donar suport a l'aprenentatge dissenyant activitats múltiples i diverses. (Karen Dee Michalowicz, 2000). Fins aquí s'ha exposat una utilització implícita de la història, només en fa ús el professorat.

Pel que fa a la inclusió de la història a l'aula de manera explícita, incloent episodis d'història a classe, es pot fer de manera puntual per un tema concret o bé com a estratègia didàctica d'una manera més global. En qualsevol cas s'ha d'incloure en el context cultural en el que es desenvolupa. El professorat ha de localitzar el coneixement dins la història de la humanitat i de les idees. Cal prendre consciència de les dificultats que comporta: utilitzar il·lustracions històriques fragmentàries pot donar una visió falsa i truncada de les matemàtiques i de la seva història. D'altra banda un projecte global pot arribar a ser una educació en història de la matemàtica independent de les necessitats de l'educació matemàtica i en el pitjor dels casos substituir les matemàtiques per l'ensenyament de la seva història. (Evelyn Barbin, 2000)

Un altre fet il·lustratiu de l'estat actual de la qüestió és que el moviment d'integrar la història de les matemàtiques en la formació inicial o formació permanent del professorat que ha estat un tema internacionalment acceptat en els últims cent anys (Gert Schubring, 2000).

Un punt important en l'ús de la història i en el que incideixen diversos autors és la relació entre la comprensió matemàtica de l'alumnat i la construcció històrica del pensament matemàtic. S'estudia la història com a font per entendre el procés de formació del pensament matemàtic i per explorar de quina manera aquest es pot

utilitzar per a dissenyar activitats de classe. Es necessita un marc de referència teòric prou ric sobre la formació del pensament matemàtic que relacioni els aspectes de la història amb els de la psicologia per arribar a una metodologia fecunda. En aquest corpus teòric un dels aspectes que cal estudiar és la relació entre el desenvolupament individual de recapitulació (ontogènesi) i el desenvolupament del pensament (filogènesi)(Luis Radford, 2000).

Radford descriu que en els darrers 150 anys són molts els matemàtics que s'han pronunciat a favor d'integrar la història en l'educació matemàtica De Morgan 1865, Glaisher 1890, Poincaré 1908, Barwell 1913, Miller 1916, MAA 1935, Klein 1914/1945, British Ministry of Education 1958, Lakatos 1976, Leake 1983, Kline 1973, 1969 the US NCTM. Aquesta llarga perspectiva ha fet que es pugui parlar amb coneixement de causa dels inconvenients i dels avantatges de la utilització de la història.

Si s'analitzen els inconvenients, aquests es poden agrupar en dos blocs, un més filosòfic i un altre més pràctic (Man-Keung Siu)¹⁵. Per exemple, pel que fa al primer, que la història no és matemàtiques i que els estudiants tenen un sentit erràtic del passat. Entre els inconvenients pràctics, el poc coneixement del professorat sobre la història de la matemàtica i la dificultat de l'avaluació dels resultats.

Pel que fa als arguments a favor, es reconeixen en l'ICMI Study els següents:

- La reconstrucció d'exemples fa que els estudiants entenguin la motivació per introduir nous conceptes, teories, mètodes, proves i assoleixen els continguts més profundament.
- S'anima a l'alumnat i al professorat a pensar per ells mateixos i a fer noves descobertes.
- Identificar els punts crucials de la història de la disciplina revela interrelacions entre les matemàtiques i també fora de les matemàtiques, el que té alt interès didàctic.
- En la presentació dels exercicis i els problemes, la història ajuda a completar la importància del problema plantejat.
- La història suggereix diferents possibilitats d'acord amb les necessitats del currículum i de la classe; així es pot donar més importància a alguns aspectes històrics, o a algunes idees matemàtiques específiques, o a la interrelació entre diferents continguts matemàtics, o entre matemàtiques i altres disciplines.
- El professorat té l'oportunitat de comparar les matemàtiques actuals amb les antigues (notació, terminologia, mètodes de demostració i de càlcul). La presentació d'aquestes comparacions pot resultar beneficiosa per l'alumnat.
- El professorat té la possibilitat de buscar i reconèixer les dificultats i els obstacles dels alumnes per entendre les matemàtiques.

Tots aquests arguments estan estretament relacionats amb els termes en que es planteja aquesta investigació com es veurà en l'apartat següent.

Un altre aspecte digne de consideració és el paper que pot jugar la integració de la història en la comprensió del significat del coneixement matemàtic en les seves dues vessants, la intrínseca i l'extrínseca. (Constantinos Tzanakis i Abraham Arcavi, 2000). En el coneixement de naturalesa intrínseca de l'activitat matemàtica, la història de les

¹⁵ Aquests inconvenients estan basats en la conferència plenària que Man-Keung Siu, va realitzar en el marc de l' ICMI Study Conference, 19-26 April 1998, CIRM, Luminy, Marseilles, France: "The (in)complete quadrangle: historians of mathematics, mathematicians, mathematics educators and teachers of mathematics"

matemàtiques dona oportunitats per revelar, analitzar i emfatitzar importants aspectes del quefer matemàtic:

- El paper del marc de referència associat a la motivació dels problemes.
- L'evolució de les matemàtiques en contingut i en forma; notació terminologia, mètodes de càlcul, maneres d'expressar i representar, les nocions de prova, de rigor, d'evidència, en comparació amb les matemàtiques d'avui en dia.
- El paper dels dubtes, paradoxes, contradiccions, intuïcions, heurístics i les dificultats d'ensenyar i produir noves matemàtiques en el context de les qüestions i els problemes específics, i les motivacions per generalitzar, fer abstracció i formalitzar en aquest context.

En el coneixement de naturalesa extrínseca, la matemàtica moltes vegades s'ha vist com una disciplina desconnectada de les influències socials i culturals. La història pot il·lustrar sobre la superficialitat d'aquesta concepció:

- Aspectes de la matemàtica que es poden relacionar directament amb la filosofia, l'art, altres ciències i també amb les humanitats.
- El mitjà social i cultural ha propiciat el desenvolupament o l'abandó d'alguns camps de les matemàtiques.
- La matemàtica es reconeix com una part que integra l'herència cultural i les pràctiques de diferents civilitzacions.
- Els corrents en l'educació de la matemàtica a través de la seva història reflecteixen tendències i preocupacions en cultura i societat.

Per acabar d'exposar les aportacions del desè ICMI Study, cal comentar que es reconeix que la utilització de fonts originals a l'aula de matemàtiques és la via més ambiciosa per integrar la història en l'ensenyament dels matemàtiques però a la vegada és una de les més agraiades tant en formació de professorat com en formació d'alumnat en l'educació secundària (Hans-Niels Jahnke, 2000). Aquesta és l'opció que s'ha seguit en aquest estudi i es mostrarà més àmpliament en el marc de referència.

Finalment, citar com a curiositat que en la bibliografia per a treballs futurs (Jonh Fauvel, 2000) s'hi recullen autors i llibres en xinès, danès, anglès, francès, alemany, grec i italià però res en espanyol, en cap de les quatre llengües (català, castellà, gallec i euskera), el que fa pensar que malgrat que hi hagi una llarga tradició sobre la incorporació de la història en l'educació matemàtica, com s'ha vist en aquesta introducció, existeix poca documentació a casa nostra reconeguda a nivell internacional.

Des del desè ICMI Study cap aquí, han continuat les propostes i els estudis entorn a la utilització de la història en l'ensenyament, encapçalats i coordinats de manera general per les mateixes persones. Citar, a tall d'exemple, un monogràfic del Educational Studies Mathematics del 2007, en el que hi contribueixen diversos autors i que es prendrà com a referència perquè planteja qüestions i mostra punts de vista coincidents amb els que es desenvoluparan en aquest estudi. En la introducció, algunes de les preguntes que es plantegen són recurrents en aquest tema: Poden els professors i els educadors treure avantatges de la història de les matemàtiques per a millorar la comprensió matemàtica de l'alumnat? Com? (Luis Radford; Fulvia Furinghetti; Victor Katz, 2007).

Destaquen per la seva relació amb el present projecte dos articles, el primer signat per Luis Radford i Luis Puig (2007) i el segon per Victor J. Katz (2007). El primer inclou

punts de referència relacionats amb els aspectes del paper de la visualització. El segon descriu les diferents etapes de la història de la construcció de l'àlgebra i relaciona l'evolució dels símbols (estadi retòric, sincopat i simbòlic) amb quatre estadis de canvi conceptual. Aquests darrers són: el geomètric, on la majoria dels conceptes algebraics són geomètrics; l'estadi estàtic de la resolució d'equacions, on l'objectiu es trobar nombres que satisfan determinades condicions; l'estadi dinàmic de les funcions, on el moviment és la idea fonamental i finalment, l'estadi abstracte, on l'estructura matemàtica és el punt central. Els estadis no són disjunts, sinó que se solapen. Es caracteritzen els punts clau de cada període i es reflexiona sobre quina importància poden tenir per a l'ensenyament de l'àlgebra.

Per acabar aquest recull que mostra la situació actual de l'ús de la història de la matemàtica en l'educació, un altre article que sembla de referència obligada és el signat per Fluvià Furinghetti, Luis Radford (2008). En ell, a més de tots els arguments tractats amb anterioritat es defensa que si es presenta a l'aula el desenvolupament de l'àlgebra al llarg de la història l'alumnat se sent més reconfortat davant de les dificultats que ell mateix té per entendre-la.

Conté també algunes recomanacions per a futures recerques i també les seves implicacions per a l'aula i s'il·lustra amb la referència a un treball realitzat per Adriano Demattè (2006) en el que s'estudia, a través d'un qüestionari adreçat a l'alumnat, el paper de la història de les matemàtiques a l'aula. Es diu que per que l'ús de la història sigui efectiu cal crear un entorn d'aprenentatge convenient. Això requereix que el professorat tingui un coneixement adequat del desenvolupament ontogenètic i el filogenètic i mantingui una postura crítica respecte a la recapitulació; i també una certa destresa en la manipulació dels aspectes cognitius i històrics.

Hipòtesis o preguntes a les que respon la recerca

La introducció dels contextos històrics a la classe de matemàtiques hauria de ser un fet a partir dels nous currículums¹⁶ però la realitat és que encara és una pràctica poc habitual a les nostres aules per les diferents dificultats que suposa, semblants a les que s'apuntaven a l' ICMI Study del 2000.

La recerca s'ha plantejat per a trobar respostes a preguntes que es poden emmarcar en tres grans blocs: com fer-ho? què aprèn de més l'alumnat? com es relaciona amb l'adquisició de la competència matemàtica i de les competències generals?

Com fer-ho?

- Com es poden treballar a l'aula els contextos que apareixen en el currículum? Quins dels textos més significatius de la història de la matemàtica són els adequats per a reforçar l'aspecte de la competència matemàtica que volem treballar?
- Quin material cal posar a l'abast del professorat perquè incorpori a la seva aula la història dels continguts treballats?

¹⁶ DOGC del juny del 2007

Què aprèn l'alumnat?

- Quines matemàtiques aprèn l'alumnat quan s'introdueixen contextos històrics a l'aula?
- Com es fa seva la situació històrica l'alumnat? El raonar "a la manera de" ajuda a que entenguin millor el que estan estudiant?

Relació amb la competència matemàtica i les competències generals?

- Perquè treballar contextos històrics ajuda l'alumnat a adquirir la competència matemàtica?
- L'ús de la història en el treball de les matemàtiques, contribueix a relacionar les competències generals i la competència matemàtica dins d'un àmbit cultural més ampli?

Context general de la investigació

La recent publicació en el DOGC (Diari Oficial de la Generalitat de Catalunya) del nou currículum català (juny del 2007), la trajectòria del grup d'història de ABEAM i el coneixement en profunditat dels nous currículums (persones del grup havien participat en la redacció) van confluïr en la petició que el CREAMAT va fer al grup: desenvolupar contextos històrics que recobrissin el nou currículum. Si realment es volia que l'aposta del nou currículum per la introducció de la història de les matemàtiques en les aules fos efectiva, era necessari facilitar amb idees i recursos la posada en pràctica d'aquesta innovació.

Aquest encàrrec va donar lloc a un primer estudi "La història de les matemàtiques en els nous currículums de secundària" que es va presentar al novembre del 2007, en el marc de les IV Jornades sobre Història de la Ciència i Ensenyament que organitza la Societat Catalana d'Història de la Ciència i de la Tècnica (SCHCT). El treball apuntava unes idees bàsiques sobre com i quan utilitzar els contextos històrics en l'aula de secundària. En les conclusions s'indicava que el pas següent era desenvolupar i estructurar dintre d'una seqüència didàctica tots els exemples de contextos històrics que apareixien en el nou currículum.

Des del punt de vista de la història i de la seva didàctica el projecte es recolza en el treball realitzat per el grup d'Història de les Matemàtiques d'ABEAM i en la formació rebuda en cursos del Màster d'Història de la Ciència de la UAB.

L'aportació didàctica-competencial i la connexió amb el nou currículum, essencial per a la tria dels textos i per al disseny de les activitats d'aula, es basa en el meu coneixement del nou currículum, vaig formar part de l'equip redactor, i en la formació rebuda en els cursos de doctorat en Didàctica de les Ciències Experimentals i la Matemàtica de la Facultat de Formació de Professorat de la UB.

Variables i aspectes considerats

Aquesta recerca s'emmarca en l'ús conjunt de les dues vessants sobre com s'entén la utilització de la història a l'aula:

- a) La implícita, com a eina per ajudar al professorat a entendre el desenvolupament del pensament de l'alumnat i també com a font de recursos per a dissenyar noves activitats.
- b) La explícita, mostrant la història a l'alumnat perquè reconegui les matemàtiques com a ciència viva i en continua evolució.

Les variables estudiades i els aspectes considerats responen als tres blocs de preguntes enunciats anteriorment:

Com fer-ho?

Què aprèn l'alumnat?

Com es relaciona amb l'adquisició de competències?

Si el que es pretén és a que, a mig termini, una part del professorat s'anima a introduir contextos històrics a l'aula no es pot ser maximalista, la proposta ha de permetre introduir un sol context al llarg de tot un curs però a la vegada ha de deixar oberta la possibilitat d'anar-ho ampliant en cursos successius, poc a poc l'ensenyant s'anirà trobant més còmode amb aquest tipus d'activitats, veurà la necessitat d'introduir-les i estarà més motivat per fer-ho. A partir del material que es presenta el professorat disposarà dels elements necessaris per dur-ho a terme.

A cada tema s'inclou la seva justificació, dins del currículum i dins la història de cadascun dels temes desenvolupats. Cada exemple també conté una introducció històrica i unes activitats dissenyades per a ser resoltes a la manera en que ho feien els matemàtics del context introduït. Aquesta tandem, context històric i activitat a la manera de, és el nucli bàsic de tots els exemples desenvolupats. A més, cada activitat inclou una presentació amb el nivell per al que s'adreça, els materials que necessita, el moment recomanat per fer-la servir, com utilitzar-la, quin coneixement mínim sobre el context històric caldria fer arribar a l'alumnat i altres idees relacionades.

Un quadre resum conté els contextos desenvolupats amb el bloc o blocs de continguts als que pertany i els aspectes de la competència matemàtica que desenvolupen. Així es justifica també la introducció de contextos històrics com un recurs més per a desenvolupar la competència matemàtica en l'alumnat.

Limitacions

Tot i que en el projecte presentat inicialment es parlava de constituir un grup de professors i professores amb experiència perquè experimentessin a les seves classes alguna de les propostes que es presentarien en aquesta llicència, s'ha fet una modificació que ja es va presentar en el primer informe de progrés:

Aprofitant que la persona docent amb llicència retribuïda actuava també com a formadora en dos cursos de Pràctica Reflexiva de Matemàtiques en la modalitat d'aprofundiment (CRP del Tarragonès i IES Joan Brossa de Barcelona) per tant amb professors amb una certa experiència, no s'ha creat un grup específic sinó que s'han pres aquest dos grups com a element de contrast i és amb ells que s'han treballat algunes d'aquestes qüestions. També cal dir que una part de les propostes d'activitats d'aula que s'inclouen en aquest projecte ja s'han dut a terme en cursos anteriors amb alumnat de 3r i 4t d'ESO de l'IES Badalona VII.¹⁷

¹⁷ Vegeu nota 5 del *Resum*.

L'altra modificació tracta del contingut global. Es desenvoluparà més material del previst i, a més el treball s'ha passat a emmarcar dins d'un projecte més global de recobriment curricular que porta a terme el CREAMAT.

Entenem que aquests canvis no desvirtuen els objectius del projecte ni deixa de cercar resposta a les preguntes plantejades, sinó que ha permès exemplificar més contextos i ajudarà a fer-los arribar a tot el professorat que en pugui estar interessat.

Per acabar, dins de les limitacions caldria recordar el que diu Adriano Demàtte (2006) i que ja s'ha apuntat als antecedents: "Perquè l'ús de la història sigui efectiu cal crear un entorn d'aprenentatge convenient. Això requereix que el professorat tingui un coneixement adequat del desenvolupament ontogenètic i el filogenètic i mantingui una postura crítica respecte a la recapitulació; i també una certa destresa en la manipulació dels aspectes cognitius i històrics." Aquesta limitació fa que per aconseguir la situació descrita, la història de les matemàtiques s'ha d'incloure dins de la formació bàsica del professorat de matemàtiques.

2. Marc teòric

Els dos grans blocs que configuraran el marc teòric de referència per aquesta recerca són la història i les matemàtiques, i les seves interrelacions, en el benentès que s'estarà parlant de les matemàtiques escolars, i de la història de les matemàtiques i que, a la vegada, tot plegat està inclòs en una visió més àmplia de l'aprenentatge en general.

Les matemàtiques

En cada moment històric, les matemàtiques escolars han estat el reflex del que la societat ha considerat que havien d'aprendre els nois i noies, futurs ciutadans adults del demà. En el món global i connectat d'avui en dia, s'accepta que les matemàtiques són un instrument de coneixement i anàlisi de la realitat i al mateix temps es reconeix que constitueixen un conjunt de sabers de gran valor cultural, que ajuda a raonar, de manera crítica, sobre les diferents realitats i problemàtiques actuals.

La idea de la matemàtica per a tothom, com una eina o instrument per a capacitar a la població per entendre i viure en el món, ha estat acceptada progressivament en l'àmbit educatiu ens els darrers trenta anys. L'ús d'aquesta disciplina com a eina universal, juntament amb altres com a instrument de coneixement per a tothom s'ha concretat en els darrers deu anys amb el terme competències. En termes educatius parlar de matemàtiques ha passat a ser parlar de la competència matemàtica.

Recollint aquesta situació, en aquest estudi, es parlarà de *competència matemàtica*, en els termes establerts per Mogens Niss (2002), de la *capacitat matemàtica* segons els *Principis i estàndards* de la NCTM (2000), de la idea d'*enculturació matemàtica* d'Alan J. Bishop (1991) i de les referències a les *competències generals* i a la *competència matemàtica* del nou currículum de Matemàtiques de Catalunya (2007).

L'adquisició de la competència matemàtica requereix unes determinades característiques en el tipus de tasques que es duen a l'aula. El professorat planteja tasques que generen activitats per l'alumnat, però les activitats en si no són aprenentatge, però fent aquestes activitats l'alumnat relaciona les idees matemàtiques i els temes, desenvolupa i practica tècniques i usa la potència matemàtica (John Mason i Sue Johnston-Wilder, 2006). Segons aquests autors les intencions de les tasques poden ser diverses:

- Introduir determinats temes matemàtics.
- Proporcionar un context on trobar noves idees o bé aplicar-ne d'altres que s'han desenvolupat anteriorment.
- Propiciar actes de revisió o consolidació, per promoure la reflexió i la integració de diferents punts de vista.

Aquestes intencions es retroben també quan es decideix introduir a l'aula un context històric, per entrar en un tema nou, per aplicar el que ja s'ha estudiat o bé com a manera de connectar diferents temes treballats amb anterioritat.

La història

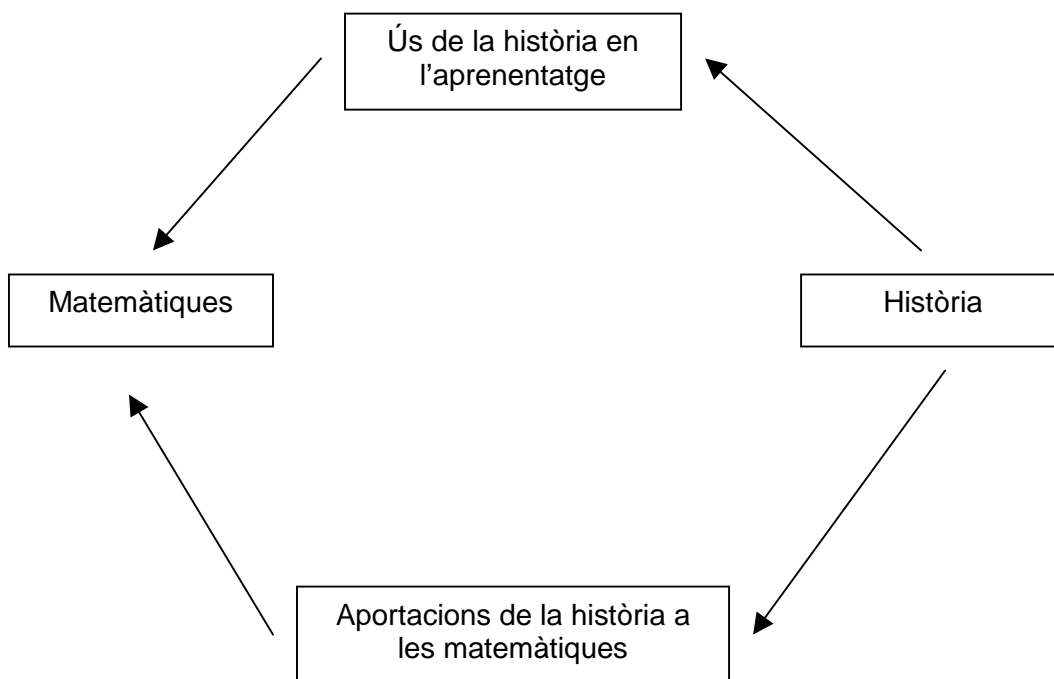
La història de les matemàtiques mostra el desenvolupament del coneixement matemàtic, explica els processos que han calgut per arribar fins al moment actual. Els autors de referència en aquesta recerca han estat: Carl B. Boyer (1986), Joseph

George Gheverghese (1996), Ricahrd Mankiewicz (2000), Victor J. Katz (2007), (2008)

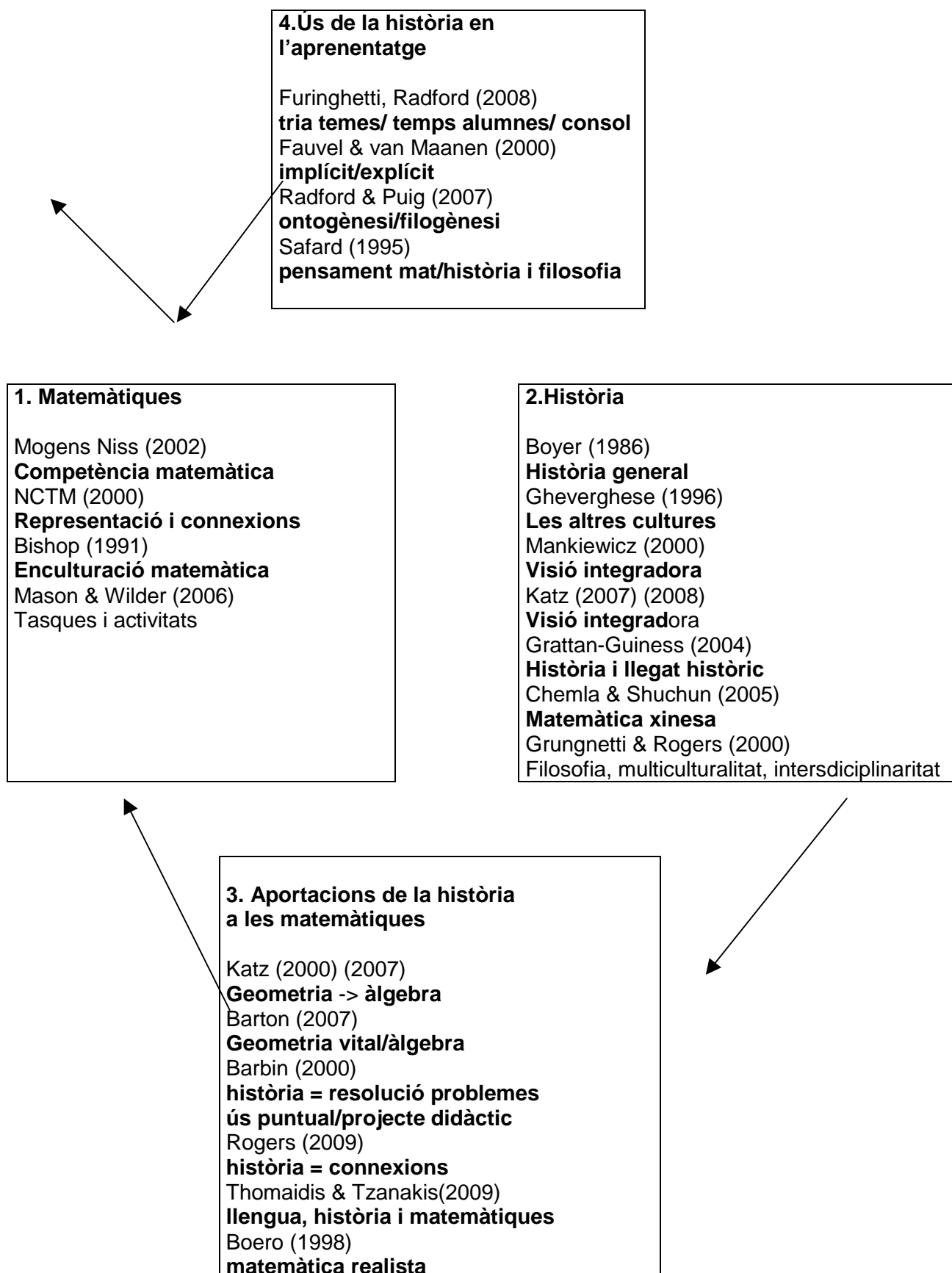
La idea bàsica és la que planteja al desè l'IMCI Study, en particular la visió de Lucia Grungetti i Leo Rogers, la història des del punt de vista filosòfic, multicultural i interdisciplinar; tenint present que hi ha la història de les idees i la història dels documents, que els documents contenen les idees i que són aquestes les que realment interessen a l'educació matemàtica.

També cal diferenciar entre què és la historia i què és la interpretació dels fets dins del procés de formació del coneixement, el llegat que deixa la història per a les generacions següents, el que fa que es puguin analitzar uns fets des de diferents perspectives, que es reinterpreti el passat amb els ulls del present. (Ivor Grattan-Guiness, 2004).

Els blocs de referència i les seves relacions



Els autors de referència i els trets que representen



Un cop establerts els dos blocs de referència: història i matemàtiques, cal veure com es relacionen. Per una banda apareixen les aportacions que fa la història a les matemàtiques, el que la història diu de nou per a definir i concretar les matemàtiques que es treballen, i en particular les connexions que s'estableixen entre diferents aspectes de la matemàtica que, sense conèixer el desenvolupament de la història, potser no s'establirien de manera natural.

Per l'altra banda, però en el mateix pla, apareix l'ús de la història com a context d'aprenentatge, s'analitzen els diferents usos que se'n poden fer per ensenyar matemàtiques i es concreta sota quina òptica s'enfoca aquest estudi.

Aportacions de la història a les matemàtiques

D'acord amb la situació exposada en la introducció, són molts els matemàtics que s'han interessat per la història i per les aportacions que aquesta podia fer a les matemàtiques i també al seu ensenyament. En els darrers vint anys, alguns d'ells han escrit obres que actualment són de referència obligada en aquest camp. Aquest és el cas, per exemple, de Victor J. Katz tan pel que fa a llibres d'història de les matemàtiques (2007, 2008), a les aportacions de la història per a l'ensenyament (2000) i al disseny d'activitats per ensenyar matemàtiques a través de la història (2004).¹⁸

Del mateix autor, cal detenir-se en l'article del 2007, que ja s'ha citat en la introducció, perquè conté molts aspectes d'interès per aquesta recerca. Després de relacionar els diferents períodes del simbolisme algebraic (retòric, sincopat i simbòlic) amb els estadis dels canvis conceptuals que representa (geometria, resolució d'equacions, funcions i estructura), conclou amb algunes implicacions per a l'ensenyament.

Segons Katz, l'àlgebra s'hauria de començar estretament relacionada amb la geometria i amb la resolució de problemes. Els nous objectes matemàtics que s'anessin introduint s'haurien d'anar discutint de manera oral a classe amb tot el grup de nois i noies. I es pregunta: per què no començar l'àlgebra raonant amb figures geomètriques? Són objectes més concrets que la x que habitualment introduïm. La x^2 és exactament això un quadrat. Els productes de nombres es poden representar com a rectangles, la propietat distributiva no és més que dues maneres diferents de representar un mateix rectangle, i així successivament. Al mateix temps segurament és convenient discutir aquests conceptes verbalment. L'alumnat està familiaritzat amb les paraules de la geometria; segurament poden aprendre a argumentar amb elles fent dibuixos geomètrics. Actualment a les escoles, l'àlgebra inicial es tracta com una generalització de l'aritmètica, caldria girar una mica la visió cap a la resolució de problemes.

En el mateix article, Bill Barton¹⁹, diu: que l'àlgebra actual deu més al tipus de problemes on es genera i a les eines que calen per resoldre'ls que a les regles de

¹⁸ Victor J. Katz, juntament amb Karen dee Michalowicz són els coordinadors de: *Historical Modules for the Teaching and Learning of Mathematics*, projecte de disseny d'activitats per a l'ensenyament de les matemàtiques que inclou activitats per a alumnes de final de primària fins als primers cursos de la universitat, agrupades en 11 blocs: Arquímedes, Combinatòria, Exponencial i logaritmes, Funcions, Demostracions geomètriques, Longituds, àrees i volums, Equacions lineals, Nombres negatius, Polinomis, Estadística i Trigonometria. Les activitats han estat dissenyades pel professorat que posteriorment les implementava a l'aula. El projecte es va realitzar amb el suport de Mathematical Association of America.

¹⁹ L'article surt en algunes referències signat conjuntament per Victor J. Katz & Bill Barton. En qualsevol cas l'aportació final titulada *Comentarios d'un educador matemàtic* és la que es comenta en aquest darrer punt i Bill Barton n'és l'autor

l'aritmètica. S'ha de partir de la resolució de problemes i desenvolupar l'àlgebra inicial de la mà de la geometria perquè l'àlgebra, com a generalització essencialment matemàtica durant l'escolaritat obligatòria, és poc probable que sigui útil, i, fins ara, no ha estat pedagògicament encertada. Es converteix en un seguit de regles que només són aplicables en unes situacions matemàtiques molt concrets. Tot això no vol dir que més endavant no se li hagi de donar la volta en els nivells alts, en l'estudi i l'ús de sistemes matemàtics i axiomàtics, però com mostra la història, una introducció a partir de la resolució de problemes no és contradictòria amb aquesta idea.

Barton continua argumentant que la matemàtica moderna, basada en estructures, la matemàtica del càlcul, basada en números ha de deixar pas als objectes matemàtics i als processos que formen part de les experiències dels joves. Els conceptes geomètrics són vitals i els lligams amb l'àlgebra són tangibles d'una manera que no ho són els numèrics.

Les teories de l'aprenentatge parlen de la necessitat d'experiències concretes i a partir d'elles generalitzar. Per passar del concret al més general diversos components ho poden facilitar: dibuixar i llegir plànols, construir estructures, experimentar amb objectes llençats, plegar paper, fer esbossos i dibuixos, etc. De la mateixa manera experimentar amb aplicacions múltiples dels nombres i dels objectes matemàtics, les diferents maneres de representar-los i de descriure'ls, com es troba en la història, ajudaran en el procés de generalització. S'han inclòs tots aquests arguments amb detall perquè recullen molt bé moltes de les idees que es desenvolupen en la recerca que es presenta.

Segons Evelyn Barbin (2000), la història mostra que les matemàtiques s'han desenvolupat a partir de la resolució de problemes i que aquesta és una raó més per fer que la resolució de problemes sigui el nucli de les activitats d'aprenentatge a l'aula. També afegeix que si es decideix incloure història de manera explícita es pot fer com a estratègia didàctica general o bé de manera local, per un tema concret. En qualsevol cas s'ha d'incloure en el context cultural en el que es desenvolupa. El professorat ha de localitzar el coneixement dins la història de la humanitat i de les idees. Per acabar, exposa dues dificultats. La primera, utilitzar il·lustracions històriques fragmentàries pot donar una visió falsa i truncada de les matemàtiques i de la seva història. La segona, un projecte global pot arribar a ser una educació en història de la matemàtica independent de les necessitats de l'educació matemàtica i en el pitjor dels casos substituir les matemàtiques per l'ensenyament de la seva història.

En els darrers anys, segurament per la influència de les conclusions del desè ICMI Study, diversos països han introduït explícitament la història de les matemàtiques en el seu currículum com ha estat el cas de Catalunya. Alguns d'aquests països han aprofitat la situació per realitzar formació del professorat en aquests aspectes i per a realitzar estudis sobre com s'estava introduint la història a les aules. Es comenten dos d'ells pels punts en comú que tenen amb la recerca que es presenta.

Al Regne Unit, on la història s'ha introduït recentment en el currículum de matemàtiques (2008), Leo Rogers (2009) coordina un projecte en el que es desenvolupen temes d'història perquè el professorat els faci servir a classe com a punt de partida dels nous temes que es van introduint a l'aula. Es treballa amb activitats molt obertes, a l'estil de les que descriuen Mason i Wilder (2006), per a desenvolupar en l'alumnat la capacitat de construir les matemàtiques per ell mateix. A partir d'un currículum que ja donava molta importància als processos i que ara ha incorporat els conceptes claus de la història, el projecte anglès planteja els contextos històrics com a situacions canòniques (textos, imatges o problemes conceptuals) que el professor introdueix per a fomentar la discussió i el diàleg entre l'alumnat. L'autor

defensa que la història permet establir connexions entre diferents àrees del currículum i, a la vegada, entre diferents parts de les matemàtiques que tradicionalment no s'han relacionat. En la seva presentació l'exemple que inclou és l'equació de 2n grau, un dels temes també desenvolupats en aquesta recerca.

Un altre projecte que estudia de quina manera la història pot influir en els currículums de matemàtiques, el signen Yannis Thomaïdis i Constantinos Tzanakis (2009) des de Grècia, on recentment (2007) la història s'ha introduït oficialment en el currículum de manera explícita. Analitzen diversos casos i conclouen que tots tenen en comú tres aspectes que altres autors també han apuntat: estimula l'interès de l'alumnat i desenvolupa en ell una actitud positiva cap a la matèria; revela i reforça la naturalesa humana de les matemàtiques a través de la història; contribueix a fer entendre els conceptes matemàtics i els problemes perquè dona a conèixer el context i les circumstàncies que l'han originat i també les condicions del seu desenvolupament. Un dels exemples analitzats és una experiència intercurricular que reuneix tres àrees del currículum: llengua, història i matemàtiques i en la que es treballa amb un text dels *Elements* d'Euclides i amb *La crítica als Elements* de Proclus.

Però la introducció de la història, a més de poder fer canviar el pes específic de diferents blocs del currículum o d'orientar les maneres d'enfocar-los, també proporciona altres elements de reflexió sobre les matemàtiques escolars. Boero i els seu col·laboradors: Pedemonte, Robotti, Chiappini (1998) utilitzen la història per investigar la natura del coneixement teòric i les condicions en que emergeix. La seva investigació històrica-epistemològica es basa en dissenyar i implementar seqüències didàctiques basades en una selecció acurada de textos de fonts primàries. Essent l'objectiu que els estudiants repeteixin les veus dels matemàtics antics, raonin "a la manera de".

Ús de la història en l'aprenentatge

En la introducció s'ha vist que diversos autors (Fulvia Furinghetti, Luis Radford, 2008) (Jonh Fauvel, Jan van Maanen, 2000) plantegen que en l'ús de la història per ensenyar/aprendre matemàtiques un factor important a tenir en compte és la relació entre el desenvolupament del pensament dels alumnes i el desenvolupament de la història. Reconeixen que la introducció de la història de manera implícita serveix al professorat:

- Per decidir seqüències, i la manera d'introduir els conceptes.
- Perquè li dona elements per entendre les produccions de l'alumnat.

Si s'afegeix la forma explícita:

- Serveix al professor com a element de referència per a dissenyar activitats que inclouen situacions històriques.
- Serveix a l'alumnat per a situar i relativitzar les seves dificultats.

En aquest estudi se'n ha fet un ús explícit, és a dir, que no solament ha servit com a font d'inspiració i orientació sobre la seqüència d'activitats que s'han dissenyat i per a tenir elements que ajudin a analitzar el desenvolupament del pensament de l'alumnat, a través de les dificultats i els encerts que mostrin les seves produccions, sinó que la història està present dins de les mateixes activitats. En els elements implementats, l'alumnat ha conegut el context cultural i social en el que es va desenvolupar, el contingut estudiat (concepte, procediment de càlcul o demostració). Però a més també

s'ha utilitzat per a fer-lo conscient de que les seves dificultats també les han patit altres persones en diferents moments de la història.

Sobre l'ús implícit de la història, cal vetllar per establir una relació entre el desenvolupament del pensament de l'alumnat i el desenvolupament de la història. No s'està dient que l'organització curricular d'un tema s'hagi de fer exclusivament a partir del desenvolupament històric, ja que molts autors (Luis Radford, Luis Puig, 2007) han vist que el principi de la recapitulació és altament problemàtic, ni que el desenvolupament del pensament de l'alumnat s'hagi d'analitzar només per comparació amb el desenvolupament històric de les idees, sinó que són elements que s'han de tenir presents a l'hora d'estudiar-los. En definitiva parlar compte entre el desenvolupament ontogenètic (desenvolupament personal) i el filogenètic (desenvolupament històric-cultural).

També s'ha recollit la idea apuntada en la introducció, que l'ús explícit - situar el contingut matemàtic en el seu moment històric, presentar al personatge que ho ha estudiat, raonar a la manera de i mostrar l'evolució del concepte o el raonament fins al moment actual- és un procés llarg i en curs acadèmic no es podrà fer més de tres o quatre cops. Aquest fet justifica que a l'hora de decidir quins contextos històrics es desenvolupaven en aquesta recerca s'hagin triat un màxim de tres per a cada curs.

4. Metodologia

Descripció de la metodologia utilitzada

Els títols, que a tall d'exemple apareixen en el nou currículum de l'ESO, pretenen recobrir els blocs de continguts de tots els cursos. En aquesta investigació s'han desenvolupat uns quants exemples dins d'un marc general²⁰ que dona explicació de com treballar contextos històrics a l'aula de matemàtiques i que a la vegada mostra quins aspectes de la competència matemàtica es desenvolupen.

Per tal de tenir una visió global de la relació entre els exemples de contextos del currículum, el bloc de continguts que al que pertanyen i els aspectes de la competència matemàtica que desenvolupen, s'ha utilitzat un quadre que ja s'havia inclòs en la presentació de projecte. Un cop finalitzada la investigació el quadre actualitzat dona explicació dels exemples desenvolupats en l'apartat de *Resultats*.

Els contextos que apareixen en el currículum, s'han estudiat i documentat, per tal de decidir quins eren els textos històrics, originals o traduïts, que incideixen millor en els aspectes de la competència matemàtica que es volien treballar.

Pel que fa a com treballar cada element o context, s'ha partit de les línies presentades en els objectius concrets del projecte i s'han intentat contestar les preguntes plantejades: Com es poden treballar a l'aula els contextos que apareixen en el currículum? Perquè treballar contextos històrics ajuda l'alumnat a adquirir la competència matemàtica?

De la llista de contextos històrics que presenta el nou currículum s'han triat alguns títols concrets. En una primera selecció es van incloure exemples de tots els cursos i que pertanyin als diferents blocs de continguts: Numeració i càlcul, Canvi i relacions, Espai i forma, Mesura i Estadística i atzar. Finalment, l'extensió d'alguns dels exemples desenvolupats i el fet que algun tema aparegui a tots els cursos (Nombres negatius) ha dut a posposar per més endavant el context relatiu a Estadística i Atzar.

Per a cada exemple concret, es presenta l'època, els textos de referència i els seus autors, s'analitza una part de l'obra i finalment es plantegen activitats per a l'aula a partir dels problemes o demostracions originals. En tots els exemples un element essencial és que l'alumnat pugui raonar "a la manera de", és a dir com ho feien els matemàtics presentats. També es recomana resoldre el problema amb els mètodes habituals amb que es faria sense el coneixement de la història presentada, obrint el debat a l'aula sobre els avantatges i inconvenients de cada manera de fer.

Simultàniament a l'elaboració dels exemples i del marc general de referència general s'havia de constituir, segons la memòria del projecte, un conjunt de professors i professores que amb experiència didàctica d'aula però no especialment en incorporació de contextos històrics serien els que experimentaran la proposta. En el primer informe de progrés ja es va presentar el canvi introduït:

Aprofitant que la persona docent amb llicència retribuïda actuava també com a formadora en dos cursos de Pràctica Reflexiva de Matemàtiques en la modalitat d'aprofundiment (CRP del Tarragonès i IES Joan Brossa de Barcelona) per tant amb professorat amb una certa experiència, no s'ha creat un grup nou sinó que s'han pres aquest dos grups com a element de contrast i

²⁰ Veure *Introducció: Antecedents, conceptes de la investigació i definicions, i Marc teòric*

és amb ells que s'han treballat algunes d'aquestes qüestions. També cal dir que una part de les propostes d'activitats d'aula que s'inclouran en aquest projecte ja s'han dut a terme en cursos anteriors amb alumnes de 3r i 4t d'ESO.

Efectivament, durant el 2n trimestre es van comentar, amb aquest professorat, els exemples ja estaven acabats, alguns d'ells ho van utilitzar a la seva aula i després van exposar les seves valoracions sobre l'ús de contextos històrics per ensenyar matemàtiques.

Cal recordar que la recerca va néixer dins d'un projecte més global de recobriment curricular que va impulsar el CREAMAT. En aquest sentit, a més de les trobades amb la supervisora, s'han realitzat d'altres, en el marc del CREAMAT, amb professors i professores que també estaven realitzant llicències de matemàtiques (d'infantil, primària i secundària). Fruit d'aquestes trobades ha estat la creació d'un aplicatiu informàtic en el que s'aniran penjant els diferents resultats d'aquestes llicències per a ús de tot el professorat. També es va crear un codi d'estil i es va acordar una manera de tipificar les produccions per a facilitar la cerca a través de l'aplicatiu. Així per exemple, es va prendre la paraula *element* com a definitòria de cadascuna de les produccions diferents que genera cada treball de llicència. En el cas que ens ocupa, cadascun dels exemples de contextos històrics desenvolupats és, segons aquesta terminologia, un element.

La metodologia ha permès que en acabar la investigació s'hagin elaborat diferents elements per introduir contextos històrics a l'aula que recobreixen el currículum de l'ESO. Aquestes elements s'expliquen per ells mateixos i seran útils no solament per al professorat amb coneixements previs d'història de la matemàtica sinó també per qualsevol altre que, sense tenir-ne, opti per utilitzar-los.

Documentació i recollida d'informació

Com es poden treballar a l'aula els contextos que apareixen en el currículum? Quin material cal posar a l'abast del professorat perquè incorpori a la seva aula la història dels continguts estudiats?

Per tal de donar resposta a aquestes preguntes s'havien apuntat, en els objectius del projecte les grans línies de treball. Com que el resultat havia de ser utilitzable per a qualsevol professor o professora que amb un mínim d'interès decideixi incorporar els contextos històrics a la seva aula, calia fer alguna cosa més que seguir les directrius del currículum.

Així, a mesura que ha anat avançant la investigació i s'han anat documentant els diferents contextos triats, també s'ha fet una recerca important sobre documentació referida a la utilització de la història a l'aula de matemàtiques. S'ha vist que hi estan interessats en el tema d'historiadors, pedagogs i matemàtics i que es fomenta la participació en grups mixtes de les tres especialitats HPM²¹. També han estat importants les dades recollides sobre com s'han concretat aquestes reflexions més generals en propostes d'activitats per a l'aula.

Aquesta recerca de documentació, realitzada de manera força exhaustiva durant el segon i el tercer trimestre del curs ha donat un mapa de la situació a nivell internacional. En l'actualitat, un referent acceptat internacionalment per filòsofs, matemàtics i educadors, respecte al paper de la història en educació matemàtica és el

²¹ Veure Introducció i Marc teòric

desè ICMI Study: *History in Mathematics Education. The ICMI Study* (Jonh Fauvel i Jan van Maanen, 2000) sota la responsabilitat del grup HPM²².

criteris de selecció de les fonts de les dades

Inicialment es va partir dels materials elaborats i recollits pel grup d'Història de l'ABEAM. Més tard un cop establert i el paper del *X ICMI Study* es va seguir el fil dels diversos autors que coordinaven els capítols, s'ha fet un cerca exhaustiva d'articles posteriors fins al mateix any 2009, tots ells constitueixen el mapa de referència o marc teòric respecte al paper de la història en l'educació matemàtica.

Pel que fa al tipus d'activitats que es poden plantejar a l'aula fent ús de la història i utilitzant la història per a ensenyar matemàtiques, el referent ha estat els *Historical Modules for teaching and Learning of Mathematics*. Aquesta proposta, coordinada per Víctor J Katz i Kareen Dee Michalowicz (2004) és obra d'un grup nombrós de professors i professores, i s'ha realitzat amb l'esponsorització de The Mathematical Association of America. Conté onze blocs temàtics²³ i presenta activitats de diversos nivells, des de l'escola de grau mig fins a la universitat. Víctor J Katz també ha coordinat una altra obra que de manera semblant a com ho fa el *X ICMI Study* estableix el paper de la història en l'educació matemàtica i que també ha esdevingut un clàssic del tema: *Using History to Teach Mathematics. An International Perspective* (2000). En aquesta publicació, que recull de diversos articles sobre el tema, es retroben molts dels autors i autores que també tenien comunicació al *X ICMI Study* o que hi coordinaven capítols.

Finalment, seguint el fil d'un dels autors referenciats, Adriano Demmattè (2009), s'ha pogut conèixer, molt recentment²⁴, una obra que en la línia d'aquesta recerca fa una proposta com a resultat, segons diu l'autor, de forces anys d'experiència en introduir contextos històrics a l'aula: *Fare matematica con i documenti storici. Una raccolta per la scuola secondaria di primo e secondo grado*. (2006) Consta de dos llibres, un per l'alumnat i un pel professorat i conté tres grans capítols.²⁵

Anàlisi i interpretació de dades

En l'anàlisi i la interpretació de les dades, a l'hora de fer la proposta general de com treballar la introducció dels contextos històrics a l'aula, s'ha vetllat perquè la relació entre el context històric, el bloc de continguts treballats i els aspectes de la competència matemàtica que s'hi desenvolupen siguin els adequats. Calia mantenir l'equilibri entre les tasques proposades, evitant posar massa pes en la història i buidar de rellevància el contingut que s'està treballant o viceversa, que la introducció històrica quedés reduïda a l'anècdota i deixés de tenir sentit. En els elements elaborats s'hi veu la història d'on provenen les activitats plantejades, cal que l'alumnat la conegui mínimament i en molts casos també es convida a buscar més informació que després s'hauria de comentar amb tot el grup classe en una posada en comú. Pel que fa a les activitats proposades, que estan pensades per treballar un cop familiaritzats amb el

²² Història, Psicologia i Matemàtiques. La idea de formar un grup internacional d'estudi de les relacions entre història, pedagogia i matemàtiques havia nascut l'any 1972, i es va consolidar en forma de grup l'any 1976. Més informació sobre HPM a: <http://www.clab.edc.uoc.gr/HPM/>

²³ Arquimedes, Combinatòria, Exponencial i logaritmes, Funcions, Proves geomètriques, Longituds, àrees i volums, Equacions lineals, Nombres negatius, Polinomis, Estadística, Trigonometria.

²⁴ Agost del 2009 i per gentilesa de l'IPRASE del Trentino

http://www.iprase.tn.it/prodotti/libri/strumenti_d.asp

²⁵ De l'aritmètica a l'àlgebra, Sobre la geometria, Temes de matemàtica moderna.

context històric on han aparegut, volen dur l'alumnat a treballar "a la manera de" però són prou obertes perquè l'alumnat les reconstrueixi al seu aire i se les pugui fer realment seves.

5. Resultats

En aquest apartat es presenten els resultats de la investigació sobre els contextos més adients per començar a introduir a l'aula de secundària de matemàtiques, producte de l'anàlisi de les dades recollides, estudiades i analitzades. La forma final ha estat l'elaboració de diferents materials que es puguin utilitzar a l'aula de manera independent, donant opció a que el professorat faci la tria dels que cregui més adients per al seu alumnat i per als objectius que persegueixi amb la introducció d'aquests contextos.

A continuació es formula una proposta sobre quan introduir els contextos i com fer-ho. S'expliquen els criteris utilitzats per a decidir quins elements s'han desenvolupat perquè també pot orientar al professorat a l'hora de decidir per on començar a introduir-los. Després, a través d'un quadre general, apareixen els títols dels contextos que es presenten, relacionats amb els blocs de continguts i els aspectes de la competència sobre els que s'incideix. Finalment es concreten els components que conté cada element i s'afegeix informació general (objectius, com utilitzar-los, gestió de l'aula, temporització, materials i equipament necessari).

Quan introduir contextos històrics

Dins de la seqüència didàctica quin és millor moment per introduir el context històric? Es poden concretar com a mínim cinc moments on introduir contextos en una seqüència didàctica i per a cadascun existeix una justificació:

- a) En la introducció d'un tema o d'un concepte, serveix per a situar el concepte en el temps, per donar-ne explicació de la seva necessitat, contribueix a fer l'aprenentatge més significatiu.
- b) Al final d'una seqüència d'activitats, per aprofundir, per anar una mica més enllà de l'aula, també per a donar significat, un altre cop, als continguts introduïts que ara queden més justificats.
- c) Per explicar diferències entre dos contextos, la història ens pot servir com a medi natural de lligar continguts matemàtics que van néixer aparellats o viceversa que malgrat aparèixer per separat es van relacionar amb el pas del temps.
- d) De vegades algun tipus de problemes poden resultar més difícils, diferents, nous pels alumnes, la introducció del context històric on es van produir pot ser una manera més entenedora de dur-los a l'aula.
- e) Finalment podem pensar-ho com a recurs per aclarir algun raonament que sense el context històric pot resultar artificios, rebuscat o poc interessant.

Com introduir-los

Les matemàtiques són una ciència desenvolupada per persones que, en la seva època i amb els mitjans de que disposen, intenten respondre uns reptes. De vegades els problemes són nous, en altres ocasions es busca millorar les respostes existents. A continuació s'exposen algunes idees generals que poden ajudar a orientar al professorat quan tria contextos històrics i dissenya activitats per a l'aula a partir d'ells. Els exemples que s'han desenvolupat responen a aquestes preguntes:

- a) El problema, en el context plantejat, és nou o es busca millorar respostes ja existents?. És convenient que el nostre alumnat conegui aquesta dialèctica, entengui els temes que s'intentaven resoldre en un moment històric concret, com ho afrontaven diferents persones i buscaven les solucions.

- b) L'anàlisi del text escollit no ha de quedar aïllat de les idees matemàtiques que s'estan estudiant. Si es tracta de resoldre problemes, sembla convenient analitzar quines situacions es plantegen i quins tipus de procediments s'utilitzen per a resoldre'ls. Si es tracta de demostracions, és convenient veure quin raonament s'utilitza per a portar-les a terme.
- c) Després, s'ha de situar el problema o la demostració dins de la programació, s'ha de connectar amb els continguts matemàtics que s'estan estudiant, el procediment o la demostració estudiada continua vigent avui dia? En aquest sentit pot resultar enriquidor comparar la resolució actual amb la resolució presentada en el context històric.
- d) Però també cal situar el problema o la demostració dins de la història de la matemàtica. És la primera vegada que s'aborda aquesta situació? Tenim notícies sobre com s'havia resolt anteriorment?

En definitiva, si un mateix resultat apareix sota diferents perspectives, l'alumnat veu que el que està aprenent forma part d'un coneixement més global i valora el desenvolupament històric del contingut matemàtic.

criteris utilitzats per a la tria dels elements

Els criteris utilitzats per a realitzar la selecció equilibren la component històrica amb la epistemològica i busquen recobrir l'etapa des de diferents aspectes. El resultat és que el conjunt de contextos seleccionats pertanyen a:

- a) Els quatre cursos de l'ESO, utilitzant el Decret com punt de partida, encara que sembla raonable pensar que cada context és pot moure un curs cap amunt o cap avall.
- b) Els cinc blocs de continguts del currículum: Numeració i càlcul, Canvi i relacions, Mesura, Espai i forma, Estadística i atzar²⁶, donant prioritat a aquells casos que conflueixen més d'un bloc per l'exemplificació sobre connexions que representa.
- c) Els diferents moments de la seqüència educativa on es proposa utilitzar-los.
- d) Els diversos moments de la història i les diverses cultures. Coneixem en general, molt poc sobre altres cultures no europees i és relativament recent la inclusió de la història d'elles quan es parla d'història de les matemàtiques. En aquest sentit s'ha donat cabuda a les Matemàtiques Xineses i les Índies antigues, a més d'Egipte, Grècia antiga, el Món àrab i l'Europa renaixentista.

²⁶ Finalment no s'ha desenvolupat cap tema d'aquest bloc.

Elements desenvolupats en la investigació

Context històric	Bloc de continguts	Aspectes de la competència matemàtica que se desenvolupen
1r d'ESO		
<i>ELS NOMBRES NEGATIUS I EL ZERO.</i> Xina, Grècia, Índia, Món àrab, Europa (250- 1567) Els nombres xinesos i El tauler de comptes xinès.	Numeració i càlcul	Comprendre els nombres i les diferents formes de representació.
APROXIMACIONS AL NOMBRE π . El mètode d'Arquimedes per aproximar el nombre π (aprox. 287 a C – aprox. 212 a C)	Mesura	Aplicar tècniques, instruments i fórmules apropiats per a obtenir mesures i fer estimacions raonables.
2n d'ESO		
EL TEOREMA DE PITÀGORES A LA GRÈCIA CLÀSSICA. Els Elements d'Euclides (300 aC)	Espai i forma	Utilitzar la visualització, el raonament matemàtic i la modelització geomètrica per a resoldre problemes
EL TEOREMA DE PITÀGORES A LA XINA ANTIGA. El capítol 9 (Gou gu) dels <i>Nou Capítols sobre els procediments matemàtics</i> (s. I)	Espai i forma	Utilitzar la visualització, el raonament matemàtic i la modelització geomètrica per a resoldre problemes.
<i>ELS NOMBRES NEGATIUS I EL ZERO.</i> Xina, Grècia, Índia, Món àrab, Europa (250- 1567) Els nombres negatius en Al-Samaw'al i Els Abacistes Italians	Numeració i càlcul	Comprendre els nombres i les diferents formes de representació. Comprendre el significat de les operacions.
3º de ESO		
LA RESOLUCIÓ DE SISTEMES D'EQUACIONS A LA XINA ANTIGA. El capítol 8 (<i>fangcheng</i>) dels <i>Nou Capítols sobre els procediments matemàtics</i> (s. I)	Canvi i relacions	Representar i analitzar situacions i estructures matemàtiques utilitzant símbols algebraics.
LA RESOLUCIÓ GEOMÈTRICA D'EQUACIONS DE 2n GRAU. <i>Hisâb al-jabr wal-muqqabala</i> de Mohamed Ben-Musa al-Khwârizmî (813)	Canvi i relacions	Representar i analitzar situacions i estructures matemàtiques utilitzant símbols algebraics.
	Espai i forma	Analitzar les característiques i propietats de les figures geomètriques de dos i tres dimensions i desenvolupar raonaments geomètrics sobre relacions geomètriques.
<i>ELS NOMBRES NEGATIUS I EL ZERO.</i> Xina, Grècia, Índia, Món àrab, Europa (250- 1567) Problemes xinesos i indis.	Numeració i càlcul	Comprendre els nombres i les diferents formes de representació. Comprendre el significat de les operacions.
	Canvi i relacions	Utilitzar models matemàtics per a representar i comprendre relacions quantitatives.
4º de ESO		
EL TEOREMA DE MENELAU. <i>Les Esfèriques de Menelau</i> (s. I), <i>la construcció amb Geogebra</i> (s. XXI)	Espai i forma	Utilitzar la visualització, el raonament matemàtic i la modelització geomètrica para a resoldre problemes
	Mesura	Aplicar tècniques, instruments i fórmules apropiats per a obtenir mesures i fer estimacions raonables.
RESOLUCIÓ DE TRIANGLES PER MÈTODES GEOMÈTRICS I ALGEBRAICS. <i>De triangulis Omnimodis</i> de Regiomontanus (1464)	Espai i forma	Utilitzar la visualització, el raonament matemàtic i la modelització geomètrica para a resoldre problemes.
	Mesura	Aplicar tècniques, instruments i fórmules apropiats per a obtenir mesures i fer estimacions raonables.
<i>ELS NOMBRES NEGATIUS I EL ZERO.</i> Xina, Grècia, Índia, Món àrab, Europa (250- 1567). L'àlgebra sincopada de Diofant	Numeració i càlcul	Comprendre els nombres i les diferents formes de representació. Comprendre el significat de les operacions.
	Canvi i relacions	Representar i analitzar situacions i estructures matemàtiques utilitzant símbols algebraics.

Components de cada element

Com a pauta general, en l'elaboració de cada element s'han desenvolupat els mateixos apartats. No obstant això, aquesta estructura comuna es flexibilitza per a cada context segons ho requereix el tema i també perquè, en algun cas, la proposta presentada prové d'una investigació més recent que encara no s'ha implementat a l'aula.

- a) Introducció: es formulen algunes preguntes relatives al tema. Són preguntes que es podria plantejar el professorat quan es disposa a programar aquest contingut. A partir d'elles, el professor o professora que coneix la realitat del seu alumnat haurà de formular les preguntes adequades per a dur-les a l'aula.
- b) Justificació de l'elecció: és un tema del currículum però, per què s'ha triat per detenir-se en el seu desenvolupament històric? Quina rellevància social o cultural té?
- c) El context històric: el procediment objecte d'estudi, la demostració, on i quan té lloc? A quines preguntes respon? Quin personatge o quins personatges ho estudien?
- d) El text, els problemes, la demostració, el tipus de raonament: entre els elements d'història presentats alguns són termes o símbols d'una època, altres descripcions de procediments actualment en desús però que tenen valor didàctic, uns altres es refereixen a demostracions a la manera d'una època concreta per a comparar-les amb l'actual, etc. Aquest apartat es dirigeix fonamentalment a informar al professorat i pretén introduir-lo al tema des del punt de vista històric.
- e) Del context històric a una proposta d'activitats per a l'aula: a partir d'un context històric es poden introduir activitats molt diverses. Cada aula és única, l'alumnat i el professorat també; no es tracta de presentar unes activitats molt tancades sinó el que es pretén és oferir idees i documentar-les, donar criteris i instruments per a passar del coneixement del context històric per part del professorat, a decidir si aquell context interessa introduir-lo en classe i com es farà.
- f) Una proposta d'activitat per a l'aula: es presenta una activitat per a dur-la a terme a classe però, apuntant i suggerint idees a desenvolupar més que com proposta acabada i tancada. El professorat, amb el seu criteri propi i pensant en la seva classe, serà qui finalment decidirà i dissenyarà les activitats adequades per a la seva aula. Una part dels elements presentats en aquest projecte ja s'han implementat en classe amb alumnat de l'ESO. En la proposta, es presenta l'activitat, situant-la en el curs o cursos per als quals es proposa, en quin moment de la unitat didàctica i amb quin objectiu. En els casos que l'activitat s'ha implementat a classe, s'exposa com es va introduir i s'inclouen algunes reflexions sobre el seu ús.
- g) Aspectes competencials que es desenvolupen: a partir del currículum de matemàtiques i dels competències bàsiques del DOGC, s'analitza com es concreten en cada element els aspectes competencials.
- h) Referències bibliogràfiques: s'adjunten les referències utilitzades per a l'estudi de cada element. Aquestes referències poden ser d'utilitat per al professorat interessat en el tema i en la seva implantació en l'aula per a completar i personalitzar la seva proposta. També poden servir per a proposar ampliacions a una part de l'alumnat.

Sobre els elements desenvolupats

La recerca pretén documentar, donar criteris, eines i assortir amb alguns exemples concrets, perquè cada professor o professora amb el seu propi criteri i pensant en la seva classe tingui material i documentació suficient per construir les activitats adequades per a la seva aula, a l'hora d'introduir els contextos històrics que es proposen en el nou currículum.

Malgrat que cada element s'explica per ell mateix, ha semblat convenient, per d'apropar-los al professorat i per a facilitar-li la creació del clima i l'ambient més adients per aquest tipus d'activitats incloure alguns aspectes generals.

Objectius dels elements

- Permetre els estudiants desenvolupar una comprensió molt més rica de les matemàtiques i les seves aplicacions veient els mateixos fenòmens des de perspectives matemàtiques múltiples.
- Permetre els estudiants entendre el fons històric i les connexions entre idees històriques que condueixen al desenvolupament de les matemàtiques.
- Permetre els estudiants veure com evolucionaven els conceptes matemàtics durant períodes de temps.
- Donar oportunitats als estudiants d'aplicar el seu coneixement de matemàtiques a diverses situacions concretes i a problemes en un context històric.
- Desenvolupar en els estudiants una apreciació de la història connectada amb el desenvolupament dels diferents conceptes matemàtics.
- Permetre els estudiants reconèixer i utilitzar connexions entre idees matemàtiques.
- Permetre els estudiants entendre com s'interconnecten les idees matemàtiques i es construeixen les unes amb les altres per a produir un conjunt coherent.
- Portar els estudiants a reconèixer i aplicar matemàtiques en contextos a fora de matemàtiques.

Com utilitzar-los

El material és prou obert per a poder encaixar amb diferents programacions d'aula. Un dels elements té una certa continuïtat i apareix als quatre cursos ("Nombres negatius"), els altres s'adjudiquen a un curs concret, malgrat aquesta primera classificació tots es poden pujar o baixar un curs, segons les característiques del grup per al que es vulguin programar.

El professorat decidirà per quins elements començar, segurament optarà pels que incloguin els continguts relacionats amb la seva programació i pels que consideri que la introducció de la component històrica pot ser una manera d'enriquir la visió del contingut matemàtic per al seu grup-classe. En els elements hi trobarà el material necessari per a situar l'alumnat en un context històric, social i científic ampli.

Algunes de les activitats es poden utilitzar per introduir un tema, completant-ho amb els problemes o exercicis habituals previstos en llibres de text o dossiers de classe. Unes altres activitats s'utilitzen millor com a suplementos, o ampliacions, després de que l'alumnat s'ha familiaritzat amb el contingut matemàtic treballat prèviament a l'aula.

En qualsevol cas, la utilització d'aquestes activitats que apropen a la història de la matemàtica estem convençuts que serviran perquè l'alumnat entengui millor les idees matemàtiques.

Uns elements contenen fulls preparats per a ser fotocopiats i distribuïts entre l'alumnat, d'altres contenen suggeriments per que cada professor o professora els confeccioni. Els fulls per l'alumnat contenen indicacions o guies perquè construeixi les seves respostes als problemes i situacions a la manera del personatge del context estudiat. En aquests casos, quan l'element conté fulls per a ser fotocopiats per a l'alumnat, el material pròpiament històric que descriu el context, l'autor que es vol presentar i la seva obra està redactat per a ser llegit a l'aula individualment, per parelles o en grup; en qualsevol cas, es recomana fer una posada en comú després amb tota la classe.

Es podria pensar en l'enfocament interdisciplinari d'alguns elements. Per exemple, si el professorat desitja treballar amb altres departaments com ciències socials, ciències de la naturalesa, o tecnologia, podria planejar conjuntament lliçons i activitats que connectessin la història, la població, l'indret i el tema objecte d'estudi; després programar-ho per fer-ho simultàniament des de les diferents matèries, o en períodes prou propers perquè l'alumnat no perdés el fil conductor.

A cada element s'inclouen referències bibliogràfiques i llocs web per a facilitar la cerca de més informació sobre el tema.

Gestió de l'aula

Els elements estan dissenyats per a treballar en grups petits (tres o quatre alumnes). Totes les activitats implementades s'han realitzat amb aquesta organització²⁷, malgrat tot, es poden utilitzar d'una manera més tradicional en la que el professorat lidera directament l'exposició i discussió del grup.

Temporització

Els elements desenvolupats tenen durades diferents. De manera aproximada cada element conté una indicació general sobre el temps. Malgrat tot, el temps dependrà, del nivell de l'alumnat, del material que s'utilitzi per introduir el context històric, de si es fa buscar més informació a l'alumnat i cal fer-ne la posada en comú i també del tipus de gestió d'aula que es decideix i de si és el primer cop que l'alumnat treballa contextos històrics.

²⁷ A cada element es dona explicació sobre si les activitats han estat experimentades a l'aula o estan encara per experimentar.

Materials i equipament necessari

És important per a totes les activitats tenir un mapamundi penjat a l'aula. Si el professorat té accés a mapes antics, aquests també serien valuosos. També se'n poden fer cerques a través d'internet.

Els materials necessaris varien segons els elements, però generalment estan fàcilment disponibles. La majoria de les activitats proposades en els elements estan dissenyats per fer-se sense calculadora ni l'ordinador, tot i que algunes d'elles es podrien fer amb aquestes eines. Hi ha un element, "EL TEOREMA DE MENELAU. Les Esfèriques de Menelau (s. I), la construcció amb Geogebra (s. XXI)" (4t d'ESO) pensat i implementat per a treballar amb l'ordinador.

6. Discussió

La utilització de la història per ensenyar matemàtics és un recurs reconegut internacionalment per historiadors, pedagogs, filòsofs i matemàtics, essent el *X IMCI/Study* (2000) un referent clau.

Si bé de la història se'n pot fer un ús implícit (la utilitza el professorat com a mètode d'anàlisi del desenvolupament del pensament de l'alumnat i com a font d'inspiració per al disseny d'activitats però no s'explica a l'aula), l'ús explícit (el que afegeix la introducció de la història a classe, l'estudi dels textos antics per part de l'alumnat o en la seva omisió la realització d'activitats "a la manera de") s'ha anat estenent entre el professorat i els grups de treball que aposten per la utilització de la història per ensenyar i aprendre matemàtiques.

Fruit d'aquesta tendència, en els últims cinc anys diferents països han anat incorporant la història dins dels currículums de matemàtiques de secundària, i també en la formació inicial i permanent del seu professorat. Paral·lelament s'han creat grups de treball que han generat una àmplia documentació teòrica i pràctica sobre com i amb quin material fer-ho.

Afortunadament, el nostre país i no ha quedat al marge d'aquesta tendència. La història ha entrat al currículum de les matemàtiques de l'ESO i del BTX, la història està present en els plans d'estudis de les diferents Facultats de Matemàtiques i també ho estarà en el nou Màster de Formació del professorat de secundària en l'especialitat de matemàtiques. Existeixen grups de professors i professores que treballen en el tema, el grup d'història d'ABEAM, n'és un d'ells.

Ensenyar matemàtiques utilitzant la seva història pot ser una pràctica més estesa en les nostres aules des del moment que el nou currículum català ha inclòs també la història com font possible on trobar contextos significatius per a aprendre matemàtiques i a més ho exemplifica amb títols de contextos històrics en cada curs.

El fet de disposar d'exemples desenvolupats i implementats a les aules ajudarà a que aquesta aposta innovadora es faci realitat. Amb aquest propòsit s'han escrit els elements que conté aquesta investigació.

Pel que fa al projecte que s'havia presentat inicialment i al treball finalment realitzat la investigació s'ha orientat a fer un ampli l'estudi de la situació actual respecte al tema, a la revisió d'elements elaborats i experimentats i a l'elaboració de nous elements, deixant per a altres investigacions la implementació dels nous elements i la comprovació del que realment aprèn l'alumnat quan s'introdueixen contextos històrics a l'aula.

De tota la documentació recollida destaquen els *Historical Modules for teaching and Learning of Mathematics* de Katz, Víctor J; Michalowicz, Kareen Dee (ed.) (2004) i també *Fare matematica con i documenti storici. Una raccolta per la scuola secondaria di primo e secondo grado* de Adriano Demattè (2006), perquè són propostes globals que contenen molt material per a utilitzar a l'aula. Altres articles i materials consultats es concreten a un sol tema i no pretenen un recobriment curricular com aquests. Seria un encert traduir al català alguns d'aquests materials.

Pel que fa a altres grups que estan treballant en projectes semblants caldria fer un seguiment del grup coordinat per Leo Rogers (Oxford University) que està desenvolupant un projecte de formació de professorat en el que busca, a partir del nou

currículum anglès (2008) que inclou la història de la matemàtica, desenvolupar temes d'història perquè el professorat el faci servir a classe com a punt de partida del tema d'una manera molt oberta a l'estil de treballs anteriors que havien fet Watson and Mason (1998) i Swan (2006).

En aquest mateix sentit caldria fer un seguiment del treball realitzat per Thomaidis, Yannis; Tzanakis, Constantinos (2009) que analitzen la implantació que s'ha produït a Grècia amb la introducció de la història en el currículum (anunciada l'any 2002) i l'aparició de notes d'història en els llibres de text (2007). Les primeres notícies que es tenen no són molt optimistes perquè sovint la introducció històrica ha estat errònia o en el millor dels casos anecdòtica i sense travar un lligam real entre la història i el contingut que s'estava treballant.

En aquesta recerca s'han desenvolupat vuit dels exemples de contextos històrics que conté el nou currículum, s'anima als lectors i lectores a desenvolupar altres exemples i completar així d'una manera més extensa el recobriment curricular amb contextos històrics.

Respecte a la difusió de la investigació es va apuntar en la memòria del projecte la participació en jornades i congressos. Ja hi hagut una primera ocasió d'exposar els resultats i un exemple a les XIV JAEM (Girona, 1-4 de juliol del 2009)²⁸.

Pel que fa a la inclusió dins dels projecte Global del CREAMAT, properament s'introduiran els elements elaborats a l'aplicatiu ARC-Cercamat.

De cara al curs 2009-10 estan previstes d'actuacions de difusió que incidiran en la formació inicial del professorat i de recerca sobre la repercussió de la introducció de contextos històrics en l'aprenentatge de l'alumnat. Queda oberta la possibilitat de difondre la recerca en altres jornades o sessions adreçades als professorat.

Pel que fa a la formació inicial, s'han concertat diferents sessions en els Màster de Formació inicial del professorat de secundària en l'especialitat de matemàtiques de la UPC i de la UPF.

Sobre la repercussió de la introducció de contextos històrics en l'aprenentatge de l'alumnat, aquesta recerca es concretarà properament en una proposta de tesi en el camp de la didàctica de la matemàtica que inclourà en els seus termes preguntes com: Quines matemàtiques aprèn l'alumnat quan s'introdueixen contextos històrics a l'aula?.

²⁸ Veure "La historia de las matemáticas en los nuevos currículos de secundaria" en NT7 (Núcleo temático 7) en la carpeta de Comunicaciones en las Actas de las XIV JAEM.

6. Referències

Bibliografia

- Abenbeder (1916) *Compendio de álgebra de Abenbeder*. Madrid: Centro de Estudios Históricos [Sánchez Pérez, José (ed. i trad.)].
- Al-Khwarizmi (1986) *The Algebra of Mohammed ben Musa*. () Hildesheim/Zürich/Nova York: George Olms Verlag [Rosen, Fredrick (ed. i trad.); 1a ed., Londres, 1831]
- Anglin, W. S. (1994) *Mathematics: A Concise History and Philosophy*. New York: Springer-Verlag.
- Archibald, Raymond Clare (1941) *Outline of the History of Mathematics*. Oberlin, Ohio: The Mathematical Association of America.
- Authier, Michel (1991) "Arquímedes: El canon del sabio". Dins: Serres, Michel (ed.), *Historia de las Ciencias*. Madrid: Ediciones Cátedra, 119 -149.
- Ball, Walter William Rouse (1935) *A Short Account of the History of Mathematics*. London: MacMillan and Co.
- Barbin, Evelyn (2000) "Integrating history: research perspectives". Dins: Fauvel, John; Maanen, Jan van (eds.), *History in Mathematics Education. The ICMI Study*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 63-90.
- Bashmakova, Isabella, and Galina Smirnova (2000) *The Beginnings and Evolution of Algebra*. Washington, D.C.: The Mathematical Association of America.
- Benoit, Paul; Micheau, Françoise (1991) "¿El intermediario árabe?". Dins: Serres, Michel (ed.), *Historia de las ciencias*. Madrid: Ediciones Cátedra, 175-201.
- Benoit, Paul (1991) "Cálculo, álgebra y mercancía". Dins: Serres, Michel (ed.), *Historia de las ciencias*. Madrid: Ediciones Cátedra, 225-253.
- Bishop, Alan J. (1999) *Enculturación matemática. La educación des de una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós [col. Temas de educación].
- Boero, Paolo (1998) "Teaching and Learning Geometry in Contexts". Dins: Mammana, C.; Villani, V. (eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, vol. 1, 52-61.
- Bos, Henk J.M. (2001) *Redefining geometrical exactness*. Nova York: Springer, 135-143.
- Boyer, Carl B. (1986) *Historia de las Matemáticas*. Madrid: Alianza Editorial.
- Bulmer-Thomas, Ivan (1971) "Menalaus of Alexandria", Dins: Gillispie, Charles C. (ed.), *Dictionary of Scientific Biography*. Nova York: Charles Scribner's Sons, 296-302.
- Burckheimer, Maxim; Arcavi, Abraham (2000) "Mathematics and Its History: An Educational Partnership". Dins: Katz, Victor J. (ed.), *Using History to Teach Mathematics. An International Perspective*. Washington: Mathematical Association of America, 135-147.

- Burton, David M. (1991) *The History of Mathematics: An Introduction*. Dubuque, Iowa: Wm. C. Brown Publ. [2a ed.].
- Cajori, Florian (1924) *A History of Elementary Mathematics*. New York: The MacMillan Co.
- Catala, M. A. (1981) "El nacimiento del álgebra". Dins: Vernet, Juan (ed.), *Historia de la ciencia árabe*. Madrid: Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 23-37.
- Chemla, Karine (s/d) "Aperçu sur l'histoire des mathématiques en Chine Ancienne dans le contexte d'une histoire internationale", 71-90.
<<http://www.reunion.iufm.fr/dep/mathematiques/Seminaires/Resourses/Chemla22.pdf>> [Consulta: 18 agost 2009].
- Chemla, Karine; Shuchun, Guo (eds.) (2005) *Les Neuf Chapitres, le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*. París: Dunod [edició crítica bilingüe].
- Collete, Jean Paul (1973) *Histoire des mathématiques*. Montréal: Vuibert/Erpi [traducció castellana (1983) México/Barcelona: Siglo XXI].
- Cooke, Roger (1997) *The History of Mathematics*. New York: John Wiley & Sons.
- Cullen, Christopher (1996) *Astronomy and Mathematics in Ancient China: The Zhou bi suan jing*. Cambridge/New York: Cambridge University Press.
- Cullen, Christopher (2009) "People and numbers in early imperial China". Dins: Robson, Eleanor; Stedall, Jacqueline (eds.), *The Oxford Handbook of The History of Mathematics*. New York: Oxford Univ. Press Inc.
- Datta, Bibhutibhusan; Singh, Avadhesh Narayan (1961) *History of Hindu Mathematics*. Bombay: Asia Publishing House.
- Dauben, Joseph. W (2007) "Chinese Mathematics". Dins: Katz, Victor J. (ed.), *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam. A sourcebook*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 187-384.
- Demattè, Adriano (2006) *Fare matematica con i documenti storici. Una raccolta per la scuola secondaria de primo e secondo grado*. Trento: Editore Provincia Autonoma di Trento – IPRASE del Trentino [hi ha volum per a l'alumnat i volum per al professorat].
- Demattè, Adriano (2006) "A questionnaire for discussing the 'strong' role of the history of mathematics in the classroom". Dins: Furinghetti, Fulvia; Kaijser, S.; Tzanakis, Constantinos (eds.), *Proceedings HPM 2004 & ESU 4*. Iraklion, Greece: University of Crete, 218–228.
- Demattè, Adriano; Furinghetti, Fulvia (2009) "Historical pictures for acting on the view of mathematics" Dins: *Working group 15²⁹. The role of the history of mathematics in Mathematics Education: Theory and Research*, 42-51.
<<http://educmath.inrp.fr/Educmath/recherches/actes-en-ligne/1wg15.pdf>> [Consulta: 17 d'agost del 2009].

²⁹ Working group 15, is one of groups of the 6-CERME (European Society for Researche in Mathematics Education, Conference) 28 gener-1 febrer 2009

- Dou, Albert (1986) "Euclides". Dins: *Historia de la Matemática hasta el siglo XVII*. Madrid: Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 61-78.
- Dorce, Carlos (2006) *Ptolomeo. El astrónomo de los círculos*. Madrid: Ed. Nivola [col. La matemática en sus personajes, 25].
- Euclides (1956) *The Elements*. Nova York: Dover, vol. 2 [edició anglesa de Thomas Little Heath].

- Fasanelli, Florence (2000) "The political context". Dins: Fauvel, John; Maanen, Jan van (eds.), *History in Mathematics Education. The ICMI Study*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 1-38.
- Fauvel, John; Maanen, Jan van (eds.) (2000) *History in Mathematics Education. The ICMI Study*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.
- Furinghetti, Fulvia; Radford, Luis (2008) "Contrasts and oblique connections between historical conceptual developments and classroom learning in mathematics". Dins: English, Lyn D., et al. (eds.), *Handbook of International research in mathematics education*. New York: Taylor & Francis, 626 – 655.
- Goldstein, Catherine (1991) "El uno es el otro: una historia del círculo". Dins: Serres, Michel (ed.), *Historia de las Ciencias*. Madrid: Ediciones Cátedra, 151-173.
- Grungnetti, Lucia; Rogers, Leo (2000) "Philosophical, multicultural and interdisciplinary issues". Dins: Fauvel, John; Maanen, Jan van (eds.), *History in Mathematics Education. The ICMI Study*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 39 - 62.
- Grattan-Guinness, Ivor (2004) *History of the Mathematical Sciences*. India: Hindustan Book Agency.
- Guedj, Denis (1998) *El imperio de las cifras y los números*. Barcelona: Edicions B, S. A.
- Guevara, Iolanda; Casals, M^a Àngels (2003) "Resolució de triangles per mètodes geomètrics i mètodes algebraics, en l'obra de Regiomontanus". Dins: Batlló, Josep, et al. (eds.), *Actes de la VII Trobada d'Història de la Ciència i de la Tècnica*. Barcelona: SCHCT, 191-199.
- Guevara, Iolanda; Massa, M^a Rosa (2005) "Mètodes algebraics a l'obra de Regiomontanus (1436-1476)". *Biaix*, 25, 27-34.
- Guevara, Iolanda; Massa, M^a Rosa; Romero, Fàtima (2006) "Textos históricos para la enseñanza de las matemáticas". Dins: Pérez-Bustamante, Juan Antonio, et al. (coords.), *Actas del IX Congreso de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*. Cádiz: SEHCYT, 1301-1304.
- Guevara, Iolanda; Romero, Fàtima; Massa, M^a Rosa (2008) "Geometria i trigonometria en el Teorema de Menelau". *III Jornada d'Història de la Ciència i Ensenyament*, nova època/vol. 1 (2), 39-50.
- Guevara, Iolanda; Massa, M^a Rosa (2007) "La història de les matemàtiques en els nous currículums de secundària". *IV Jornada d'Història de la Ciència i Ensenyament* [en premsa].
- Guevara, Iolanda; Romero, Fàtima; Massa, M^a Rosa (2007) "Enseñar matemáticas a través de su historia: algunos conceptos trigonométricos". Berenguer, M^a Isabel et al. (eds), *Actas de las XIII JAEM*. Granada: Servicio de Publicaciones de la FESPM [Edició en CD: CD3/pdf/comunicaciones/C05-06]
- Guevara, Iolanda; Massa, M^a Rosa; Romero, Fàtima (2007) "Enseñar matemáticas a través de su historia: algunos conceptos trigonométricos". *Epsilon*, 67, 97-107.
- Guevara, Iolanda (2008) "The Menelaus Theorem, The Ptolemy proof (s. I) and the Geogebra construction (s XXI)". Dins: Hunger, Hermann (ed.), *Proceedings of the 3rd International Conference of the European society for the History of Science*. Viena: ESHS (en premsa).
- Guevara, Iolanda; Puig-Pla, Carles; Romero Fàtima (2008) "Procediments xinesos amb auxiliars visuals". Comunicació presentada a la *VII Jornada sobre la Història de la Ciència i Ensenyament* dins de la *X Trobada d'Història de la Ciència i de la Tècnica*. Lleida: SCHCT.

- Heath, Sir Thomas L. (1964) *Diophantus of Alexandria*. New York: Dover Publications, Inc. [2a ed.].
- Ho, Peng Yoke (2000) *Li, Qi and Shu. An introduction to Science and Civilisation in China*. Mineola, New York: Dover Publications, Inc.
- Hogben, Lancelot (1960) *Mathematics in the Making*. New York: Doubleday & Co.
- Ifrah, Georges (1997) *Historia universal de las cifras*. Madrid: Espasa Calpe S.A.
- Jami, Catherine (1988) "Une histoire chinoise du « nombre π »". *Archive for History of Exact Sciences*, 38, 1, 39-50.
- Jahnke, Hans-Niels (2000) "The use of original sources in the mathematics classroom". Dins: Fauvel, John; Maanen, Jan van (eds.), *History in Mathematics Education. The ICMI Study*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 291-328.
- Jankvist, Uffe-Thomas (2009) "Students' beliefs about the evolution and development of mathematics". Dins: *Working group 15. The role of the history of mathematics in Mathematics Education: Theory and Research*, 52-65. <<http://educmath.inrp.fr/Educmath/recherches/actes-en-ligne/1wg15.pdf>> [Consulta: 8 maig 2009].
- Joseph, George Gheverghese (1996) *La cresta del pavo real. Las matemáticas y sus raíces no europeas*. Madrid: Pirámide.
- Lam Lay Yong (1994) "Jui Zhang Suanshu (Nine Chapters on the Mathematical Art): An Overview". *Archive for History of Exact Sciences*, 47:1, 1-51.
- Li, Yan; Du, Shiran (1987) *Chinese Mathematics: a Concise History*. Oxford: Clarendon Press.
- LLoyd, Geoffrey E.R. (2001) *Explorant la ciència antiga*. Barcelona: Societat Catalana d'Història de la Ciència i de la Tècnica.
- Malet, Antoni; Paradís, Jaume (1984) *Els orígens i l'ensenyament de l'àlgebra simbòlica*. Barcelona: Edicions de la Universitat de Barcelona.
- Katz, Victor J.(ed.) (2000) *Using History to Teach Mathematics. An International Perspective*. Washington: The Mathematical Association of America.
- Katz, Víctor J.; Michalowicz, Karen Dee (eds.) (2004) *Historical Modules for teaching and Learning of Mathematics*. Washington: The Mathematical Association of America.
- Katz, Víctor J. (ed.) (2007) *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam: A Sourcebook*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.
- Katz, Víctor J.; Barton, Bill (2007) "Stages in the history of algebra with implications for teaching". *Educational Studies in Mathematics* 66: 185 –201.
- Katz, Víctor J., (2008) *A History of Mathematics. An Introduction*. Massachusetts: Addison Wesley Logman Inc. Reading [3a ed.].
- Klein, Felix (2006) *Matemática elemental desde un punto de vista superior*. Madrid: Nivola [col. Ciencia abierta, 15].
- Kline, Morris (1972) *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York: Oxford University Press.

- Keital, Christine (2004) "¿Para qué necesitan nuestros estudiantes las matemáticas?"
Dins: Giménez, Joaquim *et al.* (coords.), *La actividad matemática en el aula Homenaje a Pablo Abrantes*. Barcelona: Ed.Graó, 12-24.
- Maor, Eli (1998) *Trigonometric delights*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.
- Massa, M^a Rosa (2003) "Aportacions de la història de la matemàtica a l'ensenyament de la matemàtica". *Biaix*, 21, 4-9.
- Massa, M^a Rosa; Romero, Fàtima (2003) "De la Geometria a la Trigonometria: El teorema de Ptolemeu", Dins: Batlló, Josep *et al.* (eds.), *Actes de la VII Trobada d'Història de la Ciència i de la Tècnica*. Barcelona: SCHCT, 153-159.
- Massa, M^a Rosa (2005) "Les equacions de 2n grau al llarg de la història". *Biaix*, 24, 4-15.
- Massa, M^a Rosa; Romero, Fàtima; Guevara, Iolanda (2006) "Teaching Mathematics through history: some trigonometric concepts". Dins: Kokowski, Michal (ed.), *Proceedings of the 2nd International Conference of the European society for the History of Science*. Cracow, Poland: ESHS, 150-157.
- Mankiewicz, Richard (2000) *Historia de las Matemáticas*. Barcelona. Paidós.
- Man-Keung, Siu (2000) "An Excursion in Ancien Chinese Mathematics". Dins: Katz, Victor J.(ed.), *Using History to Teach Mathematics. An International Perspective*. Washington:The Mathematical Association of America, 159-166.
- Martzloff, Jean-Claude (1997) *A history of Chinese mathematics*. Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag.
- Mason, John; Johnston-Wilder, Sue (2006) *Designing and using Mathematical Tasks*. St.Albans/Milton keynes, UK: Tarquin Publications & Open University
- Michalowicz, Karen Dee (2000) "History in support of divers educational requirements"
Dins: Fauvel, John; Maanen, Jan van (eds.), *History in Mathematics Education. The ICMI Study*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 172 – 200.
- Mikami, Yoshio (1974) *The Development of Mathematics in China and Japan*. New York: Chelsea Publishing Company [2a ed.]
- Nadal, Robert; Abdelkaddous,Taha; Pinel, Pierre (2004) "Le contenu astronomique des Sphériques de Ménélaos". *Archive for History of Exact Sciences*, 58, 381-436.
- Nassiruddin-el-Toussy (1891) *Traité du quadrilatère*. Constantinoble. [Caratheodory, Alexandre Pacha (trad.)].
- Niss, Mogen (2002) *Mathematical Competencies and the Learning of Mathematics: The Danish KOM Project*. Denmark.
<http://www7.nationalacademies.org/mseb/Mathematical_Competencies_and_the_Learning_of_Mathematics.pdf> [Consulta: 9 gener 2009].
- NCTM³⁰(2000) *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Granada: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. Proyecto Sur Industrias Gráficas.

³⁰ National Council of Teachers of Mathematics

- Pla i Carrera, Josep (2009) *Liu Hui. Nueve capítulos de la matemática china*. Madrid: Nivola [col. La matemática en sus personajes, 39].
- Plofker, Kim (2009) *Mathematics in India*. Princeton, New Jersey: Princeton Univ Press.
- Ptolemy (1984) *Almagest*. New York/Berlin/Heidelberg/Tokio: Springer-Verlag [Toomer G.J. (trad)].
- Puig, Luis (1998) "Componentes de una historia del álgebra. El texto de al-Khwarizmi restaurado." Dins: Hitt, F. (ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II*. México, DF: Grupo Editorial Iberoamérica, 109-131.
- Puig, Luis (2003) "Historia de las ideas algebraicas: componentes y preguntas de investigación desde el punto de vista de la matemática educativa." Conferencia invitada al *Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Granada: Universidad de Granada, [10-13 de septiembre 2003].
- Puig, Luis (2008) "Historias de al-Khwârizmî". *Suma* 58, 125-130; 59, 105-112; 60, 103-108.
- Radford, Luis (2000) "Historical formation and student understanding of mathematics". Dins: Fauvel, John; Maanen, Jan van (eds.), *History in Mathematics Education. The ICMI Study*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 143 – 170.
- Radford, Luis; Furinghetti, Fulvia; Katz, Victor (2007) "Introduction. The topos of meaning or the encounter between past and present". *Educational Studies in Mathematics*, 66, 107–110.
- Radford, Luis; Puig, Luis (2007) "Syntax and meaning as sensuous, visual, historical forms of algebraic thinking". *Educational Studies in Mathematics*, 66, 145-164.
- Rashed, Roshdi (1997) "L'algèbre". Dins: Rashed, Roshdi (ed.), *Histoire des sciences arabes. Mathématiques et physique*. Paris: Seuil, vol. 2, 31-54.
- Rashed, Roshdi (1994) *The Development of Arabic Mathematics: Between Arithmetic and Algebra*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers [Armstrong, A. F. W. (trad.)].
- Regiomontanus (1967) *De Triangulis omnimodis. On triangles of everything*. Madison: The University of Wisconsin Press [Hughes, Barnabas (trad.)] [ed. bilingüe].
- Robson, Eleanor; Stedall, Jacqueline (eds.) (2009) *The Oxford Handbook of The History of Mathematics*. New York: Oxford University Press Inc.
- Rogers, Leo (2009) "History, heritage, and the UK mathematics classroom". Dins: *Working group 15. The role of the history of mathematics in Mathematics Education: Theory and Research*, 119-128.
<<http://educmath.inrp.fr/Educmath/recherches/actes-en-ligne/1wq15.pdf>>
[Consulta: 8 de maig 2009].

- Romero, Fàtima; Massa, M^a Rosa (2003) “El teorema de Ptolemeu”. *Biaix*, 21, 31-36.
- Romero, Fàtima; Massa, M^a Rosa; Casals, M^a Àngels (2006) “La trigonometria en el món àrab. Tractat sobre el quadrilàter complet de Nasir al-Din Altusi (1201-1274)”. Dins: Batlló, Josep (ed. i alt.), *Actes de la VIII Trobada d'Història de la Ciència i de la Tècnica*. Barcelona: SCHCT, 569-575.
- Romero, Fàtima; Guevara, Iolanda; MASSA, M^a Rosa (2007) “Els Elements d'Euclides. Idees trigonomètriques a l'aula”. Dins: Grapí, Pere; Massa M^a Rosa (ed.), *Actes de la II Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament*. Barcelona: SCHCT, 113-119.
- Romero, Fàtima; Puig-Pla, Carles; Guevara, Iolanda; Massa, M^a Rosa (2007). “La trigonometria en els inicis de la matemàtica xinesa. Algunes idees per a treballar a l'aula”. Comunicació presentada a la *VI Jornada sobre la Història de la Ciència i Ensenyament*. Barcelona: SCHCT.
- Romero, Fàtima; Puig-Pla, Carles; Guevara, Iolanda; Massa, M^a Rosa (2008). “Els triangles rectangles a la matemàtica xinesa antiga”. Comunicació presentada a la XI Jornada Didàctica d'ABEAM. Barcelona.
<<http://phobos.xtec.cat/fmoren25/moodle/course/view.php?id=13>>
[Consulta: 17 agost 2009]
- Rosen, Edward (1971) “Regiomontanus”. Dins: Gillispie, Charles C. (ed.), *Dictionary of Scientific Biography*. Nova York: Charles Scribner's Sons, 348-352.
- Schubring, Gert (2000) “History of Mathematics for trainee teachers”. Dins: Fauvel, John; Maanen, Jan van (eds), *History in Mathematics Education. The ICMI Study*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 91 – 142.
- Sfard, Ana (1995). “The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives”. *Journal of Mathematical Behavior*, 14, 15-39.
- Smith, Margaret Schwan; Stein, Mary Kay (1998) “Selecting and Creating Mathematical Tasks: From Research to Practice.” *Mathematics Teaching in the Middle School* vol. 3, n. 5, 344-349.
- Struik, Dirk J. (1987) *A Concise History of Mathematics*. New York: Dover Publications.
- Struik, Dirk J. (ed.) (1987) *A Source Book in Mathematics, 1200-1800*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.
- Swetz, Frank (ed.) (1994) *From Five Fingers to Infinity*. Chicago: Open Court.
- Swetz, Franz (1996) “Enigmas of Chinese Mathematics”. Dins: Calinger, Ronald (ed.), *Vita Mathematica: historical research and integration with teaching*. USA: The Mathematical Association of America, 87-97.
- Temple, Robert (1989) *The Genius of China*. New York: Simon and Schuster.
- Teodosi de Trípoli (1927) *Les spheriques de Théodose de Tripoli*. Bruges: Desclée de Brouwer et Cie. [Ver Eecke, Paul (trad)].
- Thomaidis, Yannis; Tzanakis, Constantinos (2009) “The implementation of the history of mathematics in the new curriculum and textbooks in Greek secondary education”. Dins: *Working group 15. The role of the history of mathematics in Mathematics Education: Theory and Research*, 139 -151.
<<http://educmath.inrp.fr/Educmath/recherches/actes-en-ligne/1wg15.pdf>>
[Consulta: 8 maig 2009]

- Toomer, G. J. (1970-1990) "Al-Khwārizmī, Abu Ja'far Muhammad ibn Mūsā". Dins: Gillispie, Charles C. (ed.), *Dictionary of Scientific Biography*. New York: Charles Scribner's Sons, vol. 7, 358-365.
- Torija Herrera, Rosalina (2003) *Arquímedes. Alrededor del círculo*. Madrid: Ed. Nivola [col. La matemática en sus personajes, 1].
- Tzanakis, Constantinos; Arcavi, Abraham (2000) "Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey". Dins: Fauvel, John; Maanen, Jan van (eds.), *History in Mathematics Education. The ICMI Study*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 201- 240.
- Volkov, Alexei (1994) "Transformations of Geometrical objects in Chinese Mathematics and their evolution". Dins: Alleton, Viviane; Volkov, Alexei (eds.), *Notions et perceptions du changement en Chine*. París: Collège de France / Institut des Hautes Études Chinoises, vol. XXXVI, 133-148.
- Youschkevitch, A. P. (1976) *Les Mathématiques Arabes (VIII-XV s.)* Paris: Lib. Philos, Vrin.
- Zeller, Sister M^a Claudia (1944) *The Development of Trigonometry from Regiomontanus to Pitiscus*. Ann Arbor, Michigan: University of Michigan.
- Zeuthen, Hieronymus Georg (1902) *Histoire des mathématiques dans l'antiquité et le moyen age*. París: Gauthier-Villars [Mascart, Jean (trad.)]
<<http://www.archive.org/stream/histoiredesmath00zeutuoft#page/n7/mode/2up>>
[Consulta: 3 setembre 2009]

Pàgines web:

[Totes aquestes pàgines web estaven actives l'agost del 2009]

Biografies de matemàtics i textos d'història:

<http://divulgamat.ehu.es/weborriak/Enlaces/CategoriasDet.asp?Id=13> DivulgaMAT, Centro Virtual de Divulgación de las matemáticas. Categoría: Historia de las matemáticas.

http://www.rac.es/0/0_1.php Real Academia de Ciencias

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/index.html> The MacTutor History of Mathematics Archive.

<http://www.dcs.warwick.ac.uk/bshm/resources.html> The British Society for History of Mathematics

<http://www.euclides.org/> Versió catalana i castellana de l'edició anglesa de Th. L. Heath (1921, *The Elements*; edic. disponible en <http://perseus.tufts.edu>) i d'alguns complements elaborats per D.E. Joyce.

Associacions que han publicat textos d'història o sobre l'ús de la història en l'educació matemàtica:

<http://www.irem.univ-mrs.fr/> IREM (Institut de Recherche sur l'enseignement des mathématiques) Aix-Marseille.

<http://www.iprase.tn.it/index.aspx> IPRASE (Istituto Provinciales per la ricerca, l'aggiornamento e la sperimentazione educativi) Trentino.

<http://www.maa.org/> The Mathematical Association of America.

Curriculum i competències:

http://www.xtec.cat/estudis/eso/curriculum_2007/matematiques_eso.pdf Currículum de l'ESO del Departament d'Educació de la Generalitat de Catalunya

<http://phobos.xtec.cat/creammat/joomla/> CREAMAT, Centre de recursos per ensenyar i aprendre matemàtiques, Departament d'Educació Generalitat de Catalunya.

http://www7.nationalacademies.org/mseb/Mathematical_Competerencies_and_the_Learning_of_Mathematics.pdf Niss, Mogen (2002) *Mathematical Competencies and the Learning of Mathematics: The Danish KOM Project*. Denmark.

<http://www.nctm.org/> National Council of Teachers of Mathematics.

<http://www.spm.pt/> web de la societat Portuguesa de Matemàtiques.

Espais d'investigació i debat sobre educació matemàtica:

<http://www.icmi-es.tk/> The International Commission on Mathematical Instruction

<http://www.icmihistory.unito.it/icmistudies.pdf> The ICMI Studies

<http://www.seiem.es/> Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática

<http://educmath.inrp.fr/Educmath> Educació Matemàtica, espai web de debat.

<http://www.clab.edc.uoc.gr/HPM/> History, Psychology and Mathematics group

Sobre el nombre pi:

http://www.gap-system.org/~history/HistTopics/Pi_through_the_ages.html.
Història de pi.

<http://ciencia.astroseti.org/matematicas/articulo.php?num=3489> *Traducció al castellà de la pàgina anterior*

<http://www.math.utep.edu/Faculty/lesser/piday.html> *Pi day (14 de març)31. Inclou gran varietat d'adreces web entorn el nombre pi, per exemple:*

<http://www.piday.org/>

<http://www.pidayinternational.org/>

<http://www.piacrossamerica.org/>

<http://teachpi.org/>

³¹ 3.14 en la nomenclatura anglosaxona per a escriure el dia i el mes.

7. Annexos

Títol	pàgs.
<i>ELS NOMBRES NEGATIUS I EL ZERO.</i> Xina, Grècia, Índia, Món àrab, Europa (250- 1567)	1-60
APROXIMACIONS AL NOMBRE π . El mètode d'Arquimedes per aproximar el nombre π (aprox. 287 a C – aprox. 212 a C)	1-24
EL TEOREMA DE PITÀGORES A LA GRÈCIA CLÀSSICA. Els Elements d'Euclides (300 aC)	1-23
<i>EL TEOREMA DE PITÀGORES A LA XINA ANTIGA.</i> El capítol 9 (Gou gu) dels <i>Nou Capítols sobre els procediments matemàtics</i> (s. I)	1-33
<i>LA RESOLUCIÓ DE SISTEMES D'EQUACIONS A LA XINA ANTIGA.</i> El capítol 8 (<i>fangcheng</i>) dels <i>Nou Capítols sobre els procediments matemàtics</i> (s. I)	1-32
<i>LA RESOLUCIÓ GEOMÈTRICA D'EQUACIONS DE 2n GRAU.</i> <i>Hisâb al-jabr wal-muqqabala</i> de Mohamed Ben-Musa al-Khwârizmî (813)	1-46
EL TEOREMA DE MENELAU. Les Esfèriques de Menelau (s. I), la construcció amb Geogebra (s. XXI)	1-29
<i>RESOLUCIÓ DE TRIANGLES PER MÈTODES GEOMÈTRICS I ALGEBRAICS.</i> <i>De triangulis Omnimodis</i> de Regiomontanus (1464)	1-22