

Curs de preparació per a la prova
d'accés a cicles formatius de
grau superior

Matemàtiques

BLOC 1:

ARÍTMÈTICA I ÀLGEBRA

AUTORA: Alícia Espuig Bermell

Bloc 1: Aritmètica i àlgebra

Tema 1: Conjunts numèrics....3

Tema 2: Equacions..... 105

Tema 3: Polinomis..... 185

TEMA 1: CONJUNTS NUMÈRICS

1. Nombres naturals. Divisibilitat.
2. Nombres enters.
3. Nombres racionals.
4. Nombres reals.
5. Potències i radicals.
6. Notació científica.
7. Logaritmes.

1. NOMBRES NATURALS. DIVISIBILITAT

Nombres naturals

Els nombres naturals són els que fem servir per comptar.

El conjunt dels nombres naturals es representa amb la lletra $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

És un conjunt il·limitat (té un nombre infinit d'elements).

Divisibilitat

Múltiples

Donats dos nombres naturals, a i b , diem que a és múltiple de b si $a = n \cdot b$, en què n és un altre nombre natural.

Exemples:

1. 12 és múltiple de 3, ja que $12 = 4 \cdot 3$.

2. 40 és múltiple de 8, ja que $40 = 5 \cdot 8$.

Així, per trobar els múltiples d'un nombre anem multiplicant aquest nombre pels nombres naturals.

Cada nombre té infinits múltiples.

Exemples:

Múltiples de 2 $\rightarrow$ 2, 4, 6, 8, 10...

Múltiples de 5 $\rightarrow$ 5, 10, 15, 20, 25...

Exercici: Calcula cinc múltiples de 4 i de 7.

Múltiples de 4 $\rightarrow$

Múltiples de 7 $\rightarrow$

NOMBRES NATURALS. DIVISIBILITAT

Divisors

Donats dos nombres naturals, a i b , diem que **b és divisor de a** si $a = n \cdot b$, en què n és un altre nombre natural.

Exemples:

1. 3 és divisor de 12, ja que $12 = 4 \cdot 3$.

2. 8 és divisor de 40, ja que $40 = 5 \cdot 8$.

Si la divisió $a:b$ és exacta, a és múltiple de b i b és divisor de a . També diem que a és divisible per b .

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ 0 & n \end{array} \rightarrow \begin{cases} a \text{ és múltiple de } b \\ b \text{ és divisor de } a \\ a \text{ és divisible per } b \end{cases}$$

Exemple:

$$\begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 0 & 5 \end{array} \rightarrow \begin{cases} 15 \text{ és múltiple de } 3 \\ 3 \text{ és divisor de } 15 \\ 15 \text{ és divisible per } 3 \end{cases}$$

Nota:

5 també és divisor de 15

$$\begin{array}{r|l} 15 & 5 \\ 0 & 3 \end{array}$$

Exemples:

Divisors de 12 $\rightarrow$ 1, 2, 3, 4, 6, 12.

Divisors de 15 $\rightarrow$ 1, 3, 5, 15.

Exercici: Calcula els divisors de 8 i de 20.

Divisors de 8 $\rightarrow$

Divisors de 20 $\rightarrow$

NOMBRES NATURALS. DIVISIBILITAT

Criteris de divisibilitat

Els criteris de divisibilitat són regles senzilles que ens permeten saber si un nombre és divisible per un altre. Vegem els més utilitzats:

Un nombre natural és:

- Divisible per 2 si acaba en 0 o nombre parell.
- Divisible per 3 si la suma de les seves xifres és múltiple de 3.
- Divisible per 4 si les dues últimes xifres, o bé són dos zeros, o bé formen un nombre múltiple de 4.
- Divisible per 9 si la suma de les seves xifres és múltiple de 9.
- Divisible per 5 si acaba en 0 o 5.
- Divisible per 6 si és divisible per 2 i per 3.
- Divisible per 10 si acaba en 0.

Exemple: Calcula tots els divisors de 60.

- És divisible per 1: $60:1 = 60 \rightarrow 1$ i **60** són divisors de 60.
- És divisible per 2 perquè acaba en 0: $60:2 = 30 \rightarrow 2$ i **30** són divisors de 60.
- És divisible per 3 perquè $6+0 = 6$ és múltiple de 3: $60:3 = 20 \rightarrow 3$ i **20** són divisors de 60.
- És divisible per 4: $60:4 = 15 \rightarrow 4$ i **15** són divisors de 60.
- És divisible per 5 perquè acaba en 0: $60:5 = 12 \rightarrow 5$ i **12** són divisors de 60.
- És divisible per 6 perquè és divisible per 2 i per 3: $60:6 = 10 \rightarrow 6$ i **10** són divisors de 60.
- No és divisible per 7, per 8 i per 9.

Divisors de 60 $\rightarrow 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30$ i 60.

Exercici: Calcula tots els divisors de 150.

NOMBRES NATURALS. DIVISIBILITAT

Nombres primers i compostos

Un nombre natural més gran que 1 és **primer** si només és divisible per ell mateix i pel nombre 1 (l'1 no es considera nombre primer).

Exemples:

Nombres primers $\rightarrow 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\ldots$

Exercici: Troba tots els nombres primers més petits que 100.

Un nombre natural és **compost** si té altres divisors a més d'ell mateix i el nombre 1.

Factorització d'un nombre compost

Factoritzar un nombre és descompondre'l en potències de factors primers, és a dir, expressar-lo com un producte de potències de nombres primers.

Exemple: Factoritza els nombres 60 i 72.

60	2		72	2
30	2	$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$	36	2
15	3		18	2
5	5		9	3
1			3	3
			1	

$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2$

Exercici: Factoritza els nombres 84 i 450.

Sol.: $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$; $450 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

NOMBRES NATURALS. DIVISIBILITAT

Màxim comú divisor (*m.c.d.*) i mínim comú múltiple (*m.c.m.*)

El **màxim comú divisor** de dos o més nombres és el més gran dels divisors comuns a tots ells.

Exemple: Calcula el màxim comú divisor de 12 i 28.

El màxim comú divisor de 12 i 28 es representa amb *m.c.d.* (12, 28).

Calculem-lo:

Divisors de 12 → 1, 2, 3, 4, 6, 12.

Divisors de 28 → 1, 2, 4, 7, 14, 28.

Dels divisors comuns, el més gran és el 4: $m.c.d. (12, 28) = 4$

El **mínim comú múltiple** de dos o més nombres és el més petit dels múltiples comuns a tots ells.

Exemple: Calcula el mínim comú múltiple de 4 i 6.

El mínim comú múltiple de 4 i 6 es representa amb *m.c.m.* (4, 6).

Calculem-lo:

Múltiples de 4 → 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36...

Múltiples de 6 → 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42...

Dels divisors comuns, el més gran és el 4: $m.c.m. (4, 6) = 12$

Per calcular el *m.c.d.* i el *m.c.m.* de dos o més nombres, es pot utilitzar la següent regla pràctica:

<i>m.c.d.</i>	<i>m.c.m.</i>
- <u>Factoritzem</u> els nombres. - Triem els factors primers <u>comuns</u> elevats a <u>l'exponent més petit</u> i els multipliquem.	- <u>Factoritzem</u> els nombres. - Triem els factors primers <u>comuns i no comuns</u> elevats a <u>l'exponent més gran</u> i els multipliquem.

Exemples:

1. Calcula el *m.c.d.* i el *m.c.m.* de 60 i 72.

60		2		72		2			
30		2		36		2			
15		3		18		2			
5		5		9		3			
1				3		3			
				1					

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \quad 72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2$$

$$m.c.d.(60,72) = 2^2 \cdot 3 = \boxed{12}$$

$$m.c.m. (60,72) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = \boxed{360}$$

2. Calcula el *m.c.d.* i el *m.c.m.* de 6 i 4.

6		2		4		2			
3		3		2		2			
1				1					

$$6 = 2 \cdot 3 \quad 4 = 2 \cdot 2 = 2^2$$

$$m.c.m. (6,4) = 2^2 \cdot 3 = \boxed{12} \quad m.c.d. (6,4) = \boxed{2}$$

3. Calcula el *m.c.d.* i el *m.c.m.* de 12 i 56.

12		2		56		2			
6		2		28		2			
3		3		14		2			
1				7		7			
				1					

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3 \quad 56 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 = 2^3 \cdot 7$$

$$m.c.d. (12,56) = 2^2 = \boxed{4} \quad m.c.m. (12,56) = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 = \boxed{168}$$

4. Calcula el *m.c.d.* i el *m.c.m.* de 12, 20 i 50.

12		2		20		2		50		2			
6		2		10		2		25		5			
3		3		5		5		5		5			
1				1		1		1					

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$$

$$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5$$

$$50 = 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2 \cdot 5^2$$

$$m.c.d. (12,20,50) = \boxed{2}$$

$$m.c.m. (12,20,50) = \boxed{2}$$

Exercicis:

a) Calcula el *m.c.d.* i el *m.c.m.* de 84 i 14.

b) Calcula el *m.c.d.* i el *m.c.m.* de 75 i 45.

c) Calcula el *m.c.d.* i el *m.c.m.* de 9 i 70.

d) Calcula el *m.c.d.* i el *m.c.m.* de 90, 12 i 10.

e) Calcula el *m.c.d.* i el *m.c.m.* de 5, 15 i 13.

f) Calcula el *m.c.d.* i el *m.c.m.* de 150, 90 i 70.

Sol.: a) *m.c.d.* = 14; *m.c.m.* = 84 b) *m.c.d.* = 15; *m.c.m.* = 225
 c) *m.c.d.* = 1*; *m.c.m.* = 630 d) *m.c.d.* = 2; *m.c.m.* = 180
 e) *m.c.d.* = 1*; *m.c.m.* = 195 f) *m.c.d.* = 10; *m.c.m.* = 3.150

***Nota:** Si no hi ha cap divisor comú, el *m.c.d.* és 1.

EXERCICIS: DIVISIBILITAT.

Exercicis

1. Calcula cinc múltiples dels nombres següents:

6 →	25 →	8 →
12 →	15 →	9 →
4 →	11 →	20 →
7 →	30 →	45 →

2. Calcula tots els divisors dels nombres següents:

6 →	25 →	4 →
8 →	12 →	11 →
15 →	9 →	20 →
7 →	30 →	45 →

3. Encercla els nombres divisibles pel nombre donat a l'esquerra, usant els criteris de divisibilitat:

2 → 41, 32, 20, 153, 25, 48, 91, 92, 1220.	3 → 285, 93, 352, 318, 225, 491, 5411, 31242.
5 → 31, 36, 20, 350, 355, 32, 35, 81, 89, 10.	10 → 35, 200, 350, 8001, 8005, 70, 425, 53, 110.
9 → 28, 585, 95, 504, 9756, 321, 921, 594, 9.	6 → 36, 28, 335, 333, 336, 422, 84, 1352, 552.
4 → 36, 424, 586, 1.200, 1.336, 4.252, 1.340.	

4. Encercla els nombres primers:

35, 41, 39, 12, 25, 96, 97, 51, 2, 63, 5, 81, 7, 61.

5. Si un nombre és múltiple de 3 i de 5, també ho és de 15? Per què?

6. Calcula el **m.c.d.** i el **m.c.m** dels nombres següents:

a) 54 i 72.	c) 10, 4 i 6.	e) 14, 35 i 49.
b) 70 i 245.	d) 20, 120 i 240.	f) 120, 700 i 180.

7. En una parada d'autobús, hi paren autobusos de tres línies diferents. L'autobús de la línia 1 passa cada 15 minuts; el de la línia 2, cada 25 minuts, i el de la línia 3, cada 10 minuts. Si tots paren a les vuit del matí i compleixen puntualment l'horari, cada quants minuts tornaran a coincidir tots tres a la parada?
8. L'encarregat de cuina d'un hotel vol preparar bosses de pícnic per als seus clients. Disposa de 378 entrepans, 252 peces de fruita i 630 caramels. Vol que totes les bosses siguin iguals, que li surtin el màxim nombre de bosses possible i que no li sobri menjar. Quantes bosses farà? Quants entrepans, peces de fruita i caramels posarà a cada bossa?

SOLUCIONS: DIVISIBILITAT

Solucions

1. La solució no és única:

$6 \rightarrow 6, 12, 18, 24, 30.$	$25 \rightarrow 25, 50, 75, 100, 125.$	$8 \rightarrow 8, 16, 24, 32, 40.$
$12 \rightarrow 12, 24, 36, 48, 60.$	$15 \rightarrow 15, 30, 45, 60, 75.$	$9 \rightarrow 9, 18, 27, 36, 45.$
$4 \rightarrow 4, 8, 12, 16, 20.$	$11 \rightarrow 11, 22, 33, 44, 55.$	$20 \rightarrow 20, 40, 60, 80, 100.$
$7 \rightarrow 7, 14, 21, 28, 35.$	$30 \rightarrow 30, 60, 90, 120, 150.$	$45 \rightarrow 45, 90, 135, 180, 225.$

2. $6 \rightarrow 1, 2, 3, 6.$ $25 \rightarrow 1, 5, 25.$ $4 \rightarrow 1, 2, 4.$
 $8 \rightarrow 1, 2, 4, 8.$ $12 \rightarrow 1, 2, 3, 4, 6, 12.$ $11 \rightarrow 1, 11.$
 $15 \rightarrow 1, 3, 5, 15.$ $9 \rightarrow 1, 3, 9.$ $20 \rightarrow 1, 2, 4, 5, 10, 20.$
 $7 \rightarrow 1, 7.$ $30 \rightarrow 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30.$ $45 \rightarrow 1, 3, 5, 9, 15, 45.$

- 3.

$2 \rightarrow 32, 20, 48, 92, 1220.$	$3 \rightarrow 285, 93, 318, 225, 31242.$
$5 \rightarrow 20, 350, 355, 35, 10.$	$10 \rightarrow 200, 350, 70, 110.$
$9 \rightarrow 585, 504, 9756, 594, 9.$	$6 \rightarrow 36, 336, 84, 552.$
$4 \rightarrow 36, 424, 1200, 1336, 4252, 1340.$	

4. 41, 97, 2, 5, 7, 61.

5. Sí. Si un nombre és múltiple de 5 i de 3, aquests dos factors apareixen en la seva descomposició factorial:

El nombre es pot descompondre com $n \cdot 3 \cdot 5 = n \cdot 15$ (on n és un nombre natural); llavors és un múltiple de 15.

Exemple: 90 és múltiple de 3 i de 5 $\rightarrow$ 90 és múltiple de 15: $90 = \underbrace{2 \cdot 3}_n \cdot \underbrace{3 \cdot 5}_n = \underbrace{6 \cdot 3 \cdot 5}_n = \underbrace{6 \cdot 15}_n$

- 6.

a) $m.c.d. = 18$; $m.c.m. = 216$	d) $m.c.d. = 20$; $m.c.m. = 240$
b) $m.c.d. = 35$; $m.c.m. = 490$	e) $m.c.d. = 7$; $m.c.m. = 490$
c) $m.c.d. = 2$; $m.c.m. = 60$	f) $m.c.d. = 20$; $m.c.m. = 12.600$

7. Coincidiran cada 150 minuts, és a dir, cada dues hores i mitja.

8. Farà 126 bosses. A cada bossa hi haurà: 2 peces de fruita, 3 entrepans i 5 caramels.

Solucions dels exercicis de la teoria

Múltiples de 4 $\rightarrow 4, 8, 12, 16, 20.$

Múltiples de 7 $\rightarrow 7, 14, 21, 28, 35.$

Divisors de 8 $\rightarrow 1, 2, 4, 8.$

Divisors de 20 $\rightarrow 1, 2, 4, 5, 10, 20.$

Divisors de 150 $\rightarrow 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 25, 30, 50, 75, 150.$

Nombres primers fins al 100 $\rightarrow 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.$

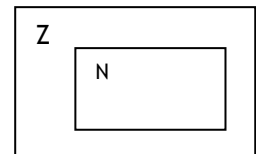
2. NOMBRES ENTERS.

Nombres enters.

Els nombres enters varen sorgir de la necessitat de resoldre operacions matemàtiques que no tenen solució en el conjunt dels nombres naturals (per exemple, la resta 3-10) i d'expressar numèricament situacions que no es poden expressar amb nombres naturals.

El **conjunt dels nombres enters** està format per:

- Els nombres enters **positius** (= els nombres naturals).
- Els nombres enters **negatius**.
- El nombre **0**.

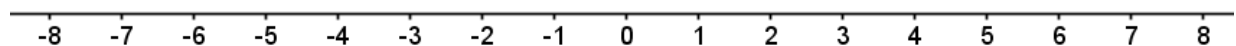


Representem el conjunt dels **nombres enters** amb $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} = \{\dots -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\dots\} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+ \quad \mathbb{N} = \mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{Z}$$

El conjunt dels nombres naturals està inclòs en el conjunt dels nombres enters.

Representem gràficament els nombres enters ordenats en una **recta numèrica**:



Exemples: Vegem exemples de l'ús de nombres enters negatius en la vida quotidiana:

- Per expressar la temperatura sota 0: -5°C
- Per expressar la profunditat: -300 m (sota el nivell del mar)
- Per expressar deutes: -100 €
- Per expressar nivells per sota de la planta baixa en un ascensor: planta -2

Valor absolut i oposat

El **valor absolut** d'un nombre enter és el nombre natural que obtenim en prescindir del seu signe. El valor absolut es representa amb $|\quad|$.

Exemples:

$$|-3| = 3 \quad | +3 | = 3 \quad |-5| = 5 \quad | +10 | = 10$$

Exercicis:

$$| +6 | = \quad | -1 | = \quad | -4 | = \quad | +9 | =$$

NOMBRES ENTERS

L'oposat d'un nombre enter és un altre nombre enter que té el mateix valor absolut, però signe diferent.

Exemples:

$$\begin{array}{llll} \text{Op}(-3) = +3 & \text{Op}(+3) = -3 & \text{Op}(-5) = +5 & \text{Op}(+10) \\ & & & = -10 \end{array}$$

Exercicis:

$$\text{a) Op}(+8) = \quad \text{b) Op}(-9) =$$

Comparació de nombres enters

Nota: Vegem el significat dels símbols $<$, $>$, $\leq$ i $\geq$.

$$a < b \rightarrow a \text{ és més petit que } b. \quad a \leq b \rightarrow a \text{ és més petit o igual que } b.$$

$$a > b \rightarrow a \text{ és més gran que } b. \quad a \geq b \rightarrow a \text{ és més gran o igual que } b.$$

Donats dos nombres enters, el més petit és el que està situat més a l'esquerra en la recta numèrica:

- Tots els nombres negatius són més petits que 0 i que qualsevol nombre positiu.
- Donats dos nombres enters negatius, el més gran és el que té el valor absolut més petit.

Exemples:

$$\begin{array}{lll} -3 < +2 & -8 < -5 & -1 < 0 \\ +7 > -10 & -6 > -10 & +1 > 0 \end{array}$$

Exercici: Completa amb $<$ o $>$

$$\begin{array}{lll} \text{a) } +3 \dots\dots +2 & \text{c) } +8 \dots\dots -5 & \text{e) } -1 \dots\dots +5 \\ \text{b) } -7 \dots\dots -10 & \text{d) } -6 \dots\dots -1 & \text{f) } +1 \dots\dots -3 \end{array}$$

Operacions amb nombres enters

Suma i resta de dos nombres enters

Per sumar o restar dos nombres enters, seguim els passos següents:

- Traiem parèntesis fent servir la regla següent:

$+(+ = +$	$+(- = -$
$-(- = +$	$-(+ = -$

NOMBRES ENTERS

- Si obtenim dos nombres amb el mateix signe, sumem els seus valors absoluts i hi escrivim aquest mateix signe.
- Si obtenim dos nombres de signe diferent, restem els seus valors absoluts i hi escrivim el signe del que té el valor absolut més gran.

Exemples:

1. $(-3) + (-2) = -3 - 2 = -5$

5. $(+3) + (-2) = +3 - 2 = +1$

2. $(+2) - (+10) = +2 - 10 = -8$

6. $(-2) - (-9) = -2 + 9 = +7$

3. $(-3) + (+2) = -3 + 2 = -1$

7. $(-5) - (-7) = -5 + 7 = +2$

4. $(-4) - (+6) = -4 - 6 = -10$

8. $(+8) + (+2) = +8 + 2 = +10$

Exercici:

a) $(-5) + (+6) =$

c) $(-5) + (-6) =$

b) $(+5) - (-6) =$

d) $(+5) - (+6) =$

Sol.: 1; 11; -11; -1

Propietats de la suma d'enters

- Propietat **commutativa**: $a + b = b + a \rightarrow$ Exemple: $(-3) + (+5) = (+5) + (-3) = -2$
- Propietat **associativa**: $(a + b) + c = a + (b + c)$

Exemple:

$$(+3) + (-5) + (-2) = \underbrace{((+3) + (-5))}_{(-2)+(-2)} + (-2) = \underbrace{(+3) + ((-5) + (-2))}_{(+3)+(-7)} = -4$$

- Element **neutre (0)**: $a + 0 = 0 + a = a$
- Element **simètric (l'oposat)**: $a + (-a) = (-a) + a = 0 \rightarrow$ Exemple: $(-3) + (+3) = 0$

Suma i resta de més de dos nombres enters

Per **sumar o restar** més de dos nombres enters, podem procedir de la manera següent:

- Traiem parèntesis fent servir la mateixa regla que en l'apartat anterior.
- Si, després de treure parèntesis, tots els nombres són del mateix signe, sumem els seus valors absoluts i hi escrivim el mateix signe.
- Si obtenim nombres de signes diferents:
 - o Sumem els valors absoluts dels positius i els negatius per separat. El resultat seran dos nombres enters de signe diferent.

NOMBRES ENTERS

- o Restem els seus valors absoluts i hi escrivim el signe del que té el valor absolut més gran.

Exemples:

1. $(-3) + (-2) + (+10) - (+5) - (-8) + (-1) = -3 - 2 + 10 - 5 + 8 - 1 = +18 - 11 = +7$

2. $(-6) + (-11) - (+10) + (-2) = -6 - 11 - 10 - 2 = -29$

3. $(+5) - (+5) - (-13) + (-20) - (+7) = +5 - 5 + 13 - 20 - 7 = +18 - 32 = -14$

Exercici:

a) $(-8) - (-1) + (-12) + (+5) - (+8) - (-4) =$

b) $(+3) - (-2) + (+11) - (-7) =$

c) $(+8) - (+6) - (-5) + (-7) =$

d) $(+7) - (+16) + (-15) - (-20) + (+9) =$

Sol.: a) -18 b) +23 c) 0 d) +5

Multiplicació i divisió exacta de dos nombres enters

Per **multiplicar o dividir** dos nombres enters, seguim els passos següents:

- Multipliquem o dividim el seus valors absoluts per calcular el valor absolut del resultat.
- El signe del resultat el calculem aplicant la regla del producte de signes:
 - o El resultat és positiu si els dos nombres tenen el mateix signe.
 - o El resultat és negatiu si són nombres de signes diferents.

$+\cdot+=+$	$+\cdot-= -$
$- \cdot -= +$	$- \cdot += -$

Exemples:

1. $(-3) \cdot (-2) = +6$

4. $(+4) : (-2) = -2$

2. $(-6) \cdot (+5) = -30$

5. $(-5) : (-5) = +1$

3. $(+5) \cdot (+5) = +25$

6. $(-15) : (-5) = +3$

NOMBRES ENTERS

Exercici:

a) $(-10) \cdot (+2) =$

d) $(-36) : (-9) =$

b) $(-6) \cdot (-4) =$

e) $(-5) : (+5) =$

c) $(+3) \cdot (-7) =$

f) $(+6) : (-3) =$

Nota:

- Per multiplicar i dividir, apliquem la regla del producte de signes.
- Per sumar i restar, escrivim el signe del que té el valor absolut més gran.

Compara els signes:

Producte i divisió

Suma i resta

$$(-3) \cdot (-2) = +6$$

$$-3 - 2 = -5$$

$$(-5) \cdot (+7) = -35$$

$$-5 + 7 = +2$$

$$(+40) : (+8) = +5$$

$$+40 + 8 = +48$$

$$(-5) : (+1) = -5$$

$$-5 + 1 = -4$$

Propietats de la multiplicació

- **Commutativa:** l'ordre dels factors no altera el producte:

$$a \cdot b = b \cdot a \rightarrow \text{Exemple: } (+3) \cdot (-2) = (-2) \cdot (+3) = -6$$

- **Associativa:** la manera en què agrupem els factors no altera el producte:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \rightarrow \text{Exemple: } [(+3) \cdot (-2)] \cdot (-4) = (+3) \cdot [(-2) \cdot (-4)]$$
$$\begin{array}{rcl} (-6) \cdot (-4) & = & (+3) \cdot (+8) \\ +24 & = & +24 \end{array}$$

- **Distributiva de la multiplicació respecte de la suma:**

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \rightarrow \text{Exemple: } (-3) \cdot [(-2) + (+5)] = (-3) \cdot (-2) + (-3) \cdot (+5)$$
$$\begin{array}{rcl} (-3) \cdot (+3) & = & (+6) + (-15) \\ -9 & = & -9 \end{array}$$

- **Element neutre (1):** $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

Treure factor comú

Quan en una sèrie de sumands hi ha un factor comú a tots ells, podem treure factor comú, aplicant la propietat distributiva:

NOMBRES ENTERS

<u>Exemples:</u> 1. $(-5) \cdot (-2) + (-5) \cdot (+6) = (-5) \cdot [(-2) + (+6)]$ $\begin{array}{rcl} (+10) + (-30) & = & (-5) \cdot (+4) \\ -20 & = & -20 \end{array}$ 2. $-6 + 9 - 15 = 3 \cdot (-2 + 3 - 5)$ $\begin{array}{rcl} -21 + 9 & = & 3 \cdot (-7 + 3) \\ -12 & = & -12 \end{array}$ Tots els sumands són múltiples de 3.	<u>Exercicis:</u> Treu factor comú i fes les operacions per comprovar que es verifica la igualtat. a) $3 \cdot (-1) + 3 \cdot (-3) + 3 \cdot (+4) =$ b) $-5 + 10 - 15 + 25 =$
--	--

Multiplicació de més de dos nombres enters

Per **multiplicar** més de dos nombres enters:

- Multipliquem els seus valors absoluts per calcular el valor absolut del resultat.
- El signe del resultat està en funció del nombre de factors negatius:
 - o El resultat és positiu si hi ha un nombre parell de factors negatius.
 - o El resultat és negatiu si hi ha un nombre imparell de factors negatius.

<u>Exemples:</u> 1. $(-3) \cdot (-2) \cdot (-6) \cdot (+5) = -180$ 2. $(-4) \cdot (+2) \cdot (-2) \cdot (+2) \cdot (+3) = +96$ 3. $(-5) \cdot (-2) \cdot (-7) \cdot (+1) \cdot (-10) = +700$ 4. $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$	<u>Exercici:</u> a) $(-3) \cdot (-3) \cdot (+5) \cdot (+5) =$ b) $(-1) \cdot (+2) \cdot (-8) \cdot (+2) \cdot (-10) =$ c) $(-7) \cdot (-2) \cdot (-7) \cdot (-1) \cdot (-10) =$ d) $(-10) \cdot (-10) \cdot (-10) \cdot (-10) =$ Sol.: a) +225; b) -320; c) -980; d) +10.000
--	---

Operacions combinades

Quan treballem amb operacions combinades, cal seguir l'ordre següent:

- Resolem els **parèntesis i claudàtors**.
- Fem els **productes i les divisions** en l'ordre en què es presentin.
- Fem les **sumes i restes**.

NOMBRES ENTERS

Exemples:

1. $(-3) \cdot (-2) + (-5) \cdot (+6) + (+3) \cdot (-4) =$

$$+6 + (-30) + (-12) =$$

$$+6 - 30 - 12 = +6 - 42 = -36$$

2. $3 + 2 \cdot (-5) - 4 \cdot [4 - 8 : (+3 - 5) - 5] =$

$$3 + 2 \cdot (-5) - 4 \cdot [4 - 8 : (-2) - 5] =$$

$$3 + 2 \cdot (-5) - 4 \cdot [4 + 4 - 5] =$$

$$3 + 2 \cdot (-5) - 4 \cdot (+3) = 3 - 10 - 12 = 3 - 22 = -19$$

3. $5 - [(-3) + (+2) \cdot (-1) + (-5)] + 10 =$

$$5 - [(-3) + (-2) + (-5)] + 10 =$$

$$5 - [-3 - 2 - 5] + 10 =$$

$$5 - (-10) + 10 = 5 + 10 + 10 = +25$$

4. $4 - 12 : [(-3) + (+2) \cdot (-1 + 10 : (-2) : (-5))] + (-3)] + 10 =$

$$4 - 12 : [(-3) + (+2) \cdot (-1 + 1) + (-3)] + 10 =$$

$$4 - 12 : [(-3) + (+2) \cdot 0 + (-3)] + 10 =$$

$$4 - 12 : [(-3) + 0 + (-3)] + 10 =$$

$$4 - 12 : [-3 - 3] + 10 =$$

$$4 - 12 : (-6) + 10 = 4 + 2 + 10 = +16$$

Exercicis:

a) $5 + 2 \cdot (-3) - (2 - 4) : (+2) =$

Sol.: 0

b) $8 - 5 \cdot [(+4) + (-7) \cdot (-1 + (-8) : (+4))] =$

Sol.: -117

NOMBRES ENTERS

Nota: Si entre un nombre i un parèntesi o entre dos parèntesis no hi ha cap signe, se sobreentén que hi ha un signe de multiplicació ($\cdot$) :

$$3(2+5) = 3 \cdot (2+5) \qquad (5+2 \cdot 10)(4+5) = (5+2 \cdot 10) \cdot (4+5)$$

Múltiples i divisors en el conjunt dels nombres enters

Les definicions de *múltiple* i *divisor* que hem donat en l'apartat de *Nombres naturals* s'amplien al conjunt dels nombres enters:

Donats dos nombres enters, a i b (amb $b \neq 0$), diem que **a és múltiple de b** i **b és divisor de a** si **$a = n \cdot b$** , en què n és un altre nombre enter.

Així, per calcular múltiples i divisors de nombres enters hem de tenir en compte els múltiples i divisors negatius:

Exemples:

1. Múltiples de 2 $\rightarrow +2, -2, +4, -4, +6, -6, +8, -8 \dots$

2. Divisors de 12 $\rightarrow +1, -1, +2, -2, +3, -3, +4, -4, +6, -6, +12, -12$.

EXERCICIS: NOMBRES ENTERS

6. Dibuixa una recta numèrica i representa-hi els nombres enters següents:

-5, +7, +2, -7, +3, -2, -10

7. Ordena de menor a major els nombres següents:

+3, -4, -3, -1, +9, -6, +1, -8, -21

8. Comprova gràficament (representant els nombres en la recta numèrica) l'exercici anterior.

9. Completa amb < o > :

a) $-1 \dots\dots +2$

b) $+8 \dots\dots +5$

c) $-6 \dots\dots +5$

d) $+8 \dots\dots 0$

e) $+7 \dots\dots -12$

f) $-1 \dots\dots -5$

g) $-10 \dots\dots -4$

h) $-9 \dots\dots 0$

10. Calcula:

a) $|-2| =$

b) $|+8| =$

c) $|+7| =$

d) $|-12| =$

e) $op(-2) =$

f) $op(+8) =$

g) $op(+7) =$

h) $op(-12) =$

11. Calcula el valor de x. Dóna tots els resultats possibles:

a) $|x| = 3$

$x =$

b) $|x| = 5$

$x =$

c) $|x - 5| = 3$

$x =$

d) $|x+2| = 10$

$x =$

EXERCICIS: SUMA I RESTA DE NOMBRES ENTERS

Efectua les sumes i restes següents:

1. $(-4) + (-5) =$

2. $(-8) + (+5) =$

3. $(-14) - (-5) =$

4. $(-10) - (+6) =$

5. $(-24) + (-5) =$

6. $(+20) + (-5) =$

7. $(+4) - (-5) =$

8. $(-13) + (-5) =$

9. $(+4) + (-15) =$

10. $(+4) - (+12) =$

11. $(-9) + (+5) =$

12. $(-10) + (-5) =$

13. $(+6) + (-1) =$

14. $(-14) - (-21) =$

15. $(+24) - (+15) =$

16. $(-7) + (+12) =$

17. $(-4) - (-18) =$

18. $(-31) + (-5) =$

19. $(-25) + (+5) =$

20. $(-12) + (-16) =$

21. $(+8) + (-10) =$

22. $(-3) - (-7) =$

23. $(-11) + (-9) =$

24. $(-2) - (+5) =$

25. $(+13) + (-6) =$

26. $(-15) + (-17) =$

27. $(+36) + (-5) =$

28. $(-8) - (-5) =$

29. $(-4) - (+2) =$

30. $(+17) + (-6) =$

31. $(-15) + (-18) =$

32. $(+24) + (-11) =$

33. $(-3) + (-19) =$

34. $(+10) + (-4) =$

35. $(+34) + (-5) =$

36. $(-9) + (-3) =$

37. $(+8) + (-15) =$

38. $(+16) + (+5) =$

39. $(+16) + (-5) =$

40. $(-16) + (-5) =$

41. $(-16) - (-5) =$

42. $(+21) + (-25) =$

43. $(+36) - (-8) =$

44. $(-12) + (-7) =$

45. $(+4) + (-11) =$

46. $(+6) + (-5) =$

47. $(-10) - (+5) =$

48. $(+23) + (-11) =$

49. $(-13) - (-25) =$

50. $(+9) - (+15) =$

51. $(-14) - (-3) =$

52. $(-19) + (-6) =$

53. $(-8) + (+25) =$

54. $(+3) - (-5) =$

55. $(+3) + (-5) =$

56. $(-3) + (-5) =$

57. $(-3) - (-5) =$

58. $(+6) + (+26) =$

59. $(+19) - (-35) =$

60. $(+13) + (-45) =$

61. $(-41) + (-51) =$

62. $(+41) + (-51) =$

63. $(-41) - (-5) =$

64. $(+10) + (-10) =$

65. $(+10) - (10) =$

66. $(-14) + (-5) =$

EXERCICIS: OPERACIONS AMB NOMBRES ENTERS

Operacions amb enters 1

Efectua les operacions següents:

1. a) $(-3)+(-5) = -3-5 = -8$

b) $(-3)-(-10) =$

c) $(-11)-(+6) =$

d) $(+11)-(+16) =$

e) $(+5)+(+3) =$

f) $(+8)+(-10) =$

g) $(-8)-(-15) =$

h) $(+6)-(+12) =$

i) $(-13)+(-18) =$

j) $(-3)+(-3) =$

k) $(-3)+(+5) =$

l) $(+9)+(-7) =$

m) $(-2)+(+2) =$

n) $(-4)+(+7) =$

o) $(+3)+(-9) =$

2. a) $(-3)+(-11) =$

b) $(-9)+(+11) =$

c) $(+7)-(+5) =$

d) $(+6)+(-10) =$

e) $(-17)+(-15) =$

f) $(-21)-(+3) =$

g) $(-5)+(-4) =$

h) $(+8)-(-2) =$

i) $(-10)+(-6) =$

j) $(-10)-(-1) =$

k) $(-1)+(-5) =$

l) $(-3)+(+1) =$

m) $(+4)+(+5) =$

n) $(-12)+(-5) =$

o) $(-12)-(-5) =$

3. a) $(-3)+(-5)-(-2)+(+10)-(+15)+(-4) =$

b) $(-1)+(+9)-(+6)+(-5) =$

c) $(+2)-(+5)+(+17)-(-7)-(+1)+(-4) =$

d) $(-4)-(+5)-(+8)+(-2) =$

e) $(-6)-(-3)-(+11)-(-8)+(-20) =$

4. a) $(-8)\cdot(-8) =$

d) $(-2)\cdot(+9) =$

g) $(-5)\cdot(+7) =$

b) $(-1)\cdot(-8) =$

e) $(-7)\cdot(+4) =$

h) $(+5)\cdot(-11) =$

c) $(+5)\cdot(+4) =$

f) $(+9)\cdot(-7) =$

i) $(+6)\cdot(-8) =$

EXERCICIS: OPERACIONS AMB NOMBRES ENTERS

5. a) $(-8) \cdot (-1) \cdot (+10) \cdot (-2) =$

b) $(-2) \cdot (+5) \cdot (+3) \cdot (+3) \cdot (-1) \cdot (+2) =$

c) $(-2) \cdot (-1) \cdot (-3) \cdot (+7) \cdot (-1) \cdot (-3) =$

d) $(-5) \cdot (-5) \cdot (-5) =$

e) $(-3) \cdot (+3) \cdot (-3) =$

6. a) $(-25) : (-5) =$

b) $(-9) : (-3) =$

c) $(-10) : (+2) =$

d) $(-120) : (+4) =$

e) $(-27) : (-9) =$

f) $(-8) : (+1) =$

g) $(+15) : (-5) =$

h) $(-22) : (+2) =$

i) $(+16) : (+4) =$

7. a) $-5 + (-3) \cdot (-2) - 2 \cdot (8 - 5 \cdot 2 + 1) + 3 =$

b) $(-5) \cdot (+8) - (-3) \cdot (-2) - (+4) \cdot (+6) - (+12) : (-3) =$

c) $-2 - (2 - 5 \cdot 3) + 8 \cdot (1 - 6 : (-2)) =$

d) $5 - 2 \cdot 8 + (-60) : (+5) =$

e) $-2 - (-3 + 4 - 1 + 2) + 3 \cdot [2 \cdot (1 + 2 \cdot (-8))] =$

EXERCICIS: OPERACIONS AMB NOMBRES ENTERS 2

Operacions amb enters 2

Efectua les operacions següents:

1. a) $(+16) + (-4) - (-3) - (+10) - (+15) + (-14) =$

b) $(+12) + (+1) - (+6) + (-9) =$

c) $(+21) - (-5) + (-11) - (-7) - (+10) + (-4) =$

d) $(-4) - (+2) - (+8) + (-2) =$

2. a) $(-7) \cdot (+8) =$

b) $(-2) \cdot (-21) =$

c) $(+9) \cdot (+6) =$

d) $(-1) \cdot (+9) =$

e) $(-7) \cdot (-9) =$

f) $(+8) \cdot (-6) =$

3. a) $(-8) \cdot (-1) \cdot (-11) \cdot (-2) =$

b) $(-2) \cdot (+5) \cdot (+3) \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot (+2) =$

c) $(-2) \cdot (-1) \cdot (-3) \cdot (-8) \cdot (-1) \cdot (-3) =$

d) $(-6) \cdot (-6) \cdot (-6) =$

4. a) $(-35) : (-7) =$

b) $(-9) : (-9) =$

c) $(-100) : (+2) =$

d) $(-120) : (+6) =$

e) $(+54) : (-9) =$

f) $(+28) : (+2) =$

5. a) $5 + (-3) \cdot (+2) - 2 \cdot (8 + 5 \cdot 2 + 1) - 3 \cdot 5 =$

b) $(+5) \cdot (+9) - (-2) : (-2) - (+4) \cdot (-6) - (-12) : (-6) =$

c) $-2 - (2 - 15 : 3) - 4 \cdot (10 - 5 \cdot (-2)) =$

EXERCICIS: OPERACIONS AMB NOMBRES ENTERS 2

6. a) $-3 + 2 \cdot 5 - 2 \cdot [-5 - 3 \cdot (-2) - (-10) : (-2)] =$

b) $-4 \cdot [5 \cdot (-4 + 1) - 8 \cdot (-2 - 1)] - 2 \cdot [3 \cdot (2 - 8) + 10] =$

c) $[(-18) : (-6)] \cdot 4 - 12 + [(-5) \cdot (-2) \cdot (-1)] : (+10) =$

d) $-3 \cdot [(-8) - (-3) - (-5) + (-1)] : (+3) =$

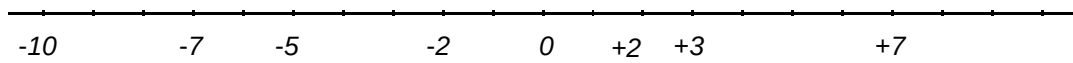
e) $2 \cdot 7 - 10 + 4 \cdot [-5 \cdot 3 - 7 \cdot (-2)] =$

f) $-(-4 + 2 - 10 + 25 - 5) - 6 \cdot [2 - 15 : (-2 + 32 : (-4) + 5)] =$

SOLUCIONS: NOMBRES ENTERS

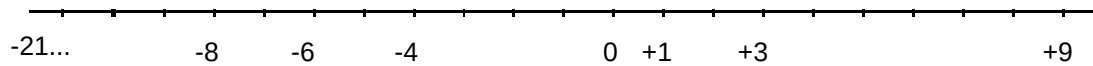
Nombres enters

1.



2. $-21 < -8 < -6 < -4 < -3 < -1 < +1 < +3 < +9$

3.



4. a) < b) > c) < d) >

5. a) 2 b) 8 c) 7 d) 12

e) > f) > g) < h) <

e) +2 f) -8 g) -7 h) +12

6. a) 3 i -3

b) 5 i -5

c) 8 i 2

d) 8 i -12

Suma i resta de nombres enters

1. $-4 - 5 = -9$

18. $-31 - 5 = -36$

34. $+10 - 4 = +6$

51. $-14 + 3 = -11$

2. $-8 + 5 = -3$

19. $-25 + 5 = -20$

35. $+34 - 5 = +29$

52. $-19 - 6 = -25$

3. $-14 + 5 = -9$

20. $-12 - 16 = -28$

36. $-9 - 3 = -12$

53. $-8 + 25 = +17$

4. $-10 - 6 = -16$

21. $+8 - 10 = -2$

37. $+8 - 15 = -7$

54. $+3 + 5 = +8$

5. $-24 - 5 = -29$

22. $-3 + 7 = +4$

38. $+16 + 5 = +21$

55. $+3 - 5 = -2$

6. $+20 - 5 = +15$

23. $-11 - 9 = -20$

39. $+16 - 5 = +11$

56. $-3 - 5 = -8$

7. $+4 + 5 = +9$

24. $-2 - 5 = -7$

40. $-16 - 5 = -21$

57. $-3 + 5 = +2$

8. $-13 - 5 = -18$

25. $+13 - 6 = +7$

41. $-16 + 5 = -11$

58. $+6 + 26 = 32$

9. $+4 - 15 = -11$

26. $-15 - 17 = -32$

42. $+21 - 25 = -4$

59. $+19 + 35 = +54$

10. $+4 - 12 = -8$

27. $+36 - 5 = +31$

43. $+36 + 8 = +44$

60. $+13 - 45 = -32$

11. $-9 + 5 = -4$

28. $-8 + 5 = -3$

44. $-12 - 7 = -19$

61. $-41 - 51 = -92$

12. $-10 - 5 = -15$

29. $-4 - 2 = -6$

45. $+4 - 11 = -7$

62. $+41 - 51 = -10$

13. $+6 - 1 = +5$

30. $+17 - 16 = +1$

46. $+6 - 5 = +1$

63. $-41 + 5 = -36$

14. $-14 + 21 = +7$

31. $-15 - 18 = -33$

47. $-10 - 5 = -15$

64. $+10 - 10 = 0$

15. $+24 - 15 = +9$

32. $+24 - 11 = +13$

48. $+23 - 11 = +12$

65. $+10 - 10 = 0$

16. $-7 + 12 = +5$

33. $-3 - 19 = -22$

49. $-13 + 25 = +12$

66. $-14 - 5 = -19$

17. $-4 + 18 = +14$

50. $+9 - 15 = -6$

Operacions amb nombres enters

1.

- a) -8 i) -31
- b) +7 j) -6
- c) -17 k) +2
- d) -5 l) +2
- e) +8 m) 0
- f) -2 n) +3
- g) +7 o) -6
- h) -6

2.

- a) -14 i) -16
- b) +2 j) -9
- c) +2 k) -6
- d) -4 l) -2
- e) -32 m) +9
- f) -24 n) -17
- g) -9 o) -7
- h) +10

3.

- a) -15
- b) -3
- c) +16
- d) -19
- e) -26

4. a) +64 b) +8 c) +20
- d) -18 e) -28 f) -63
- g) -35 h) -55 i) -48

5. a) -160 d) -125
- b) +180 e) +27
- c) -126

5. a) +5 b) +3 c) -5
- d) -30 e) +3 f) -8
- g) -3 h) -11 i) +4

7. a) +6 d) -23
- b) -66 e) -94
- c) +43

Operacions amb nombres enters 2

6.

- a) -24
- b) -2
- c) +8
- d) -16

2.

- a) -56 b) +42 c) +54
- d) -9 e) +63 f) -48

7.

- a) +176
- b) -120
- c) +144
- d) -216

4.

- a) +5 b) +1 c) -50
- d) -20 e) -6 f) +14

5.

- a) -54 b) +66 c) -79

6.

- a) +15 b) -20 c) -1 d) +1 e) 0 f) -38

Solucions dels exercicis de teoria

Valor absolut

$$|+6|=6 \quad |-1|=1 \quad |-4|=4 \quad |+9|=9$$

Oposat

$$\text{a) Op}(+8) = -8 \quad \text{b) Op}(-9) = +9$$

Comparació de nombres enters

$$\text{a) } +3 > +2 \quad \text{c) } +8 > -5 \quad \text{e) } -1 < +5$$

$$\text{b) } -7 > -10 \quad \text{d) } -6 < -1 \quad \text{f) } +1 > -3$$

Multiplacions i divisions

$$\text{a) } -20 \quad \text{b) } +24 \quad \text{c) } -21 \quad \text{d) } +4 \quad \text{e) } -1 \quad \text{f) } -2$$

Treure factor comú

$$\text{a) } 3 \cdot [(-1) + (-3) + (+4)] = 0$$

$$\text{b) } 5 \cdot [-1 + 2 - 3 + 5] = 0$$

3. NOMBRES RACIONALS

Fraccions

Una fracció és una expressió del tipus $\frac{a}{b}$, en què a i b són nombres enters, amb $b \neq 0$, anomenats **numerador** i **denominador** respectivament (a = numerador i b = denominador).

$\frac{\text{numerador}}{\text{denominador}}$

Concepte de fracció

Una fracció pot representar:

- El quocient entre dos nombres enters:

$\frac{a}{b}$ expressa el quocient o divisió de a entre $b \rightarrow a : b$

Exemples:

$$\frac{1}{2} = 0,5$$

$$\frac{3}{4} = 0,75$$

$$\frac{5}{4} = 1,25$$

$$-\frac{5}{3} = -1,666...$$

$$\frac{12}{3} = 4$$

El resultat del quocient s'anomena **expressió decimal** de la fracció i pot ser un nombre enter o un nombre decimal.

Si el numerador és més petit que el denominador, el quocient és més petit que 1 i la fracció s'anomena **pròpia**.

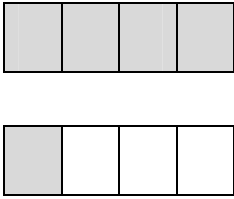
Si el numerador és més gran que el denominador, el quocient és més gran que 1 i la fracció s'anomena **impròpia**.

- Una part de la unitat:

$\frac{a}{b}$ pot representar una part de la unitat.

El denominador indica el nombre de parts iguals en què dividim la unitat, i el numerador indica el nombre de parts que volem destacar.

NOMBRES RACIONALS.

<u>Exemples:</u> (Completa els dos últims)			
Fracció	Part de la unitat	Expressió decimal	Pròpia o impròpia
$\frac{1}{2}$		0,5	pròpia
$\frac{3}{4}$		0,75	pròpia
$\frac{5}{4}$		1,25	impròpia
$\frac{9}{3}$		3	impròpia
$\frac{2}{5}$			
$\frac{7}{3}$			

- L'operador d'un nombre:

Per calcular $\frac{a}{b}$ d'un nombre, dividim el nombre entre b i el resultat el multipliquem per a .

Exemples:

1. $\frac{3}{4}$ de 24 $\rightarrow 24:4 = 6 \quad 6 \cdot 3 = \mathbf{18} \rightarrow \left(\frac{3}{4} \text{ de } 24\right) = 18$

2. $\frac{5}{3}$ de 12 $\rightarrow 12:3 = 4 \quad 4 \cdot 5 = \mathbf{20} \rightarrow \left(\frac{5}{3} \text{ de } 12\right) = 20$

Exercici: Calcula:

$\frac{2}{3}$ de 24 $\rightarrow$

$\frac{5}{2}$ de 16 $\rightarrow$

NOMBRES RACIONALS.

Nombre mixt

Si descomponem una fracció impròpia en la suma d'una part entera i una fracció pròpia, obtenim un **nombre mixt**. S'expressa com $c + \frac{a}{b}$ o com $c \frac{a}{b}$, en què c és la part entera i $\frac{a}{b}$ és la fracció pròpia.

Per calcular el nombre mixt, fem la divisió de la fracció impròpia; el quocient serà la part entera del nombre mixt i el residu serà el numerador de la seva part fraccionària.

Per transformar un nombre mixt en una fracció impròpia, multipliquem l'enter pel denominador i sumem el resultat al numerador. El nombre obtingut serà el numerador de la fracció impròpia.

Exemples:

$$\underline{1.} \quad \frac{23}{7} = 3 \frac{2}{7} \quad \begin{array}{r} 23 \overline{) 7} \\ 21 \\ \hline 2 \end{array} \quad 3 \frac{2}{7} = \frac{21+2}{7} = \frac{23}{7}$$

$$\underline{2.} \quad \frac{25}{4} = 6 \frac{1}{4} \quad \begin{array}{r} 25 \overline{) 4} \\ 24 \\ \hline 1 \end{array} \quad 6 \frac{1}{4} = \frac{24+1}{4} = \frac{25}{4}$$

Exercici: Passa de fracció a nombre mixt i viceversa:

a) $\frac{17}{4} =$

b) $2 \frac{3}{5} =$

Representació d'una fracció sobre la recta numèrica

Per **representar una fracció sobre una recta numèrica**, procedim com s'indica en l'exemple següent. Si la fracció és impròpia, l'expressem prèviament com un nombre mixt per representar-la fàcilment.

Exemples: Representa $-\frac{3}{4}$ i $\frac{5}{3}$ sobre la recta numèrica.

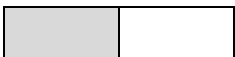
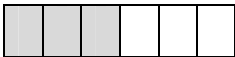


NOMBRES RACIONALS.

Fraccions equivalents

Dues fraccions $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ són **equivalents** si $a \cdot d = b \cdot c$.

Si dues fraccions són equivalents, els resultats dels seus quocients són iguals (tenen la mateixa expressió decimal) i representen la mateixa part de la unitat.

Exemples: Les fraccions següents són equivalents:			
Fracció	Parts de la unitat	Expressió decimal	$a \cdot d = b \cdot c$
$\frac{1}{2}$		$1:2 = 0,5$	$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \rightarrow 1 \cdot 4 = 2 \cdot 2$
$\frac{2}{4}$		$2:4 = 0,5$	$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} \rightarrow 1 \cdot 6 = 3 \cdot 2$
$\frac{3}{6}$		$3:6 = 0,5$	$\frac{2}{4} = \frac{3}{6} \rightarrow 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$

Per trobar fraccions equivalents a una fracció donada, es pot fer:

- Per **amplificació**: multiplicant el numerador i el denominador de la fracció per un mateix nombre enter. Es poden calcular infinites fraccions equivalents.
- Per **simplificació**: dividint el numerador i el denominador de la fracció per un mateix nombre enter, que sigui divisor comú de tots dos.

Exemples: Calcula fraccions equivalents a la donada:

1. $\frac{3}{4} \rightarrow \frac{6}{8}, \frac{9}{12}, \frac{12}{16}, \frac{15}{20}, \frac{18}{24} \dots$

(per amplificació)

2. $\frac{60}{24} \rightarrow \frac{30}{12}, \frac{20}{8}, \frac{15}{6}, \frac{10}{4}, \frac{5}{2}$

(per simplificació)

Exercici: Calcula 5 fraccions equivalents a la donada:

a) $\frac{2}{5} \rightarrow$

(per amplificació)

b) $\frac{120}{180} \rightarrow$

(per simplificació)

Nota:

Donada una fracció, podem trobar infinites fraccions equivalents a aquesta.

NOMBRES RACIONALS.

Reducció a denominador comú

Reduir a denominador comú dues o més fraccions és trobar fraccions equivalents a aquestes que tinguin el mateix denominador. Per fer-ho, seguim els passos següents:

- Calculem el mínim comú múltiple dels denominadors, el qual serà el denominador comú.
- Calculem els numeradors perquè les fraccions siguin equivalents, és a dir, multipliquem el numerador de cada fracció pel nombre pel qual es multiplicaria el denominador per trobar el denominador comú (perquè siguin equivalents s'ha de multiplicar el numerador i el denominador pel mateix nombre).

Exemples: Redueix a denominador comú:

1.

$$\frac{3}{4}, \frac{1}{6} \rightarrow \frac{9}{12}, \frac{2}{12} \quad \left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot \underline{3} = 12 \rightarrow \text{multipliquem el numerador i denominador de la primera fracció per 3.} \\ 6 \cdot \underline{2} = 12 \rightarrow \text{multipliquem el numerador i denominador de la segona fracció per 2.} \end{array} \right.$$

$$m.c.m.(4,6) = 12$$

2.

$$\frac{3}{5}, \frac{4}{15}, \frac{2}{25} \rightarrow \frac{45}{75}, \frac{20}{75}, \frac{6}{75} \quad \left\{ \begin{array}{l} 5 \cdot \underline{15} = 75 \rightarrow \text{multipliquem el num. i denom. de la primera fracció per 15.} \\ 15 \cdot \underline{5} = 75 \rightarrow \text{multipliquem el num. i denom. de la segona fracció per 5.} \\ 25 \cdot \underline{3} = 75 \rightarrow \text{multipliquem el num. i denom. de la tercera fracció per 3.} \end{array} \right.$$

$$m.c.m.(5,15,25) = 75$$

Exercici: Redueix a denominador comú:

a) $\frac{2}{15}, \frac{7}{10}$

b) $\frac{5}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}$

c) $\frac{3}{20}, \frac{4}{12}, \frac{2}{24}$

Fracció irreductible i simplificació de fraccions:

Una fracció és **irreductible** quan el numerador i el denominador no tenen cap divisor comú (són primers entre ells).

NOMBRES RACIONALS.

Simplificar una fracció és trobar la fracció equivalent irreductible. Es pot fer de tres maneres:

- Dividint el numerador i el denominador per divisors comuns fins que ja no tinguin cap divisor comú.
- Dividint el numerador i el denominador pel màxim comú divisor d'ells.
- Factoritzant el numerador i el denominador i eliminant els factors comuns.

Exemples:		
1. Simplifica $\frac{120}{36}$		
1r mètode: $\frac{120}{36} = \frac{60}{18} = \frac{30}{9} = \boxed{\frac{10}{3}}$	2n mètode: $\left. \begin{array}{l} 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \\ 36 = 2^2 \cdot 3^2 \end{array} \right\} m.c.d. (120, 36) = 2^2 \cdot 3 = 12$ $\rightarrow \frac{120}{36} = \frac{120 : 12}{36 : 12} = \boxed{\frac{10}{3}}$	3r mètode: $\frac{120}{36} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 2 \cdot \cancel{3} \cdot 5}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot 3} = \frac{2 \cdot 5}{3} = \boxed{\frac{10}{3}}$
2. Simplifica $\frac{45}{270}$		
1r mètode: $\frac{45}{270} = \frac{9}{54} = \frac{3}{18} = \boxed{\frac{1}{6}}$	2n mètode: $\left. \begin{array}{l} 45 = 3^2 \cdot 5 \\ 270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 \end{array} \right\} m.c.d. (45, 270) = 3^2 \cdot 5 = 45$ $\rightarrow \frac{45}{270} = \frac{45 : 45}{270 : 45} = \boxed{\frac{1}{6}}$	3r mètode: $\frac{45}{270} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{5}}{2 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 3 \cdot \cancel{5}} = \boxed{\frac{1}{6}}$
Exercici: Simplifica $\frac{720}{420}$ fent servir els tres mètodes.		
Sol.: $\frac{12}{7}$		

Comparació de fraccions

En general, si una fracció és positiva:

- Com més gran és el seu numerador, més gran és la fracció.
- Com més gran és el seu denominador, més petita és la fracció.

Per comparar dues fraccions positives:

- Si tenen el mateix denominador, serà més gran la que tingui el numerador més gran.

NOMBRES RACIONALS.

- Si tenen el mateix numerador, serà més gran la que tingui el denominador més petit.
- Si tenen denominador i numerador diferents, les reduïm a denominador comú per comparar-les, o bé fem el quocient:

Si les fraccions no són totes dues positives, les comparem de la mateixa manera que comparem nombres enters.

Exemples:

1. Mateix denominador: $\frac{3}{4} < \frac{7}{4}$

2. Mateix numerador: $\frac{3}{5} < \frac{3}{2}$

3. Numerador i denominador diferents:

$$\frac{3}{4}, \frac{4}{5} \rightarrow \frac{15}{20}, \frac{16}{20} \rightarrow \frac{15}{20} < \frac{16}{20} \quad \frac{3}{4} = 0,75 < \frac{4}{5} = 0,8$$

Operacions amb fraccions

Suma i resta de fraccions

Per sumar o restar fraccions amb el mateix denominador, sumem o restem els seus numeradors i deixem invariant el denominador. Si el resultat obtingut no és irreductible, el simplifiquem.

Exemples:

1. $\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

2. $\frac{3}{4} + \frac{7}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

3. $\frac{8}{4} - \frac{2}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

Per sumar o restar fraccions amb **diferent denominador**, reduïm les fraccions a denominador comú i les sumem o restem com en el cas anterior. Finalment, simplifiquem el resultat obtingut.

Exemples:

1. $\frac{3}{4} - \frac{1}{18} = \frac{27}{36} - \frac{2}{36} = \frac{25}{36}$ $m.c.m.(4,18) = 36$

2. $2 + \frac{1}{3} + \frac{7}{15} = \frac{2}{1} + \frac{1}{3} + \frac{7}{15} = \frac{30}{15} + \frac{5}{15} + \frac{7}{15} = \frac{42}{15} = \frac{14}{5}$ $m.c.m.(1,3,15) = 15$

Nota: Tot nombre enter el podem expressar com una fracció de denominador 1: $2 = \frac{2}{1}$

NOMBRES RACIONALS.

Exercicis:

a) $\frac{1}{8} + \frac{3}{4} - \frac{1}{6} =$

b) $\frac{1}{10} - \frac{2}{15} + \frac{5}{9} =$

c) $\frac{11}{12} + \frac{19}{45} - \frac{13}{18} =$

Sol.: a) $\frac{17}{24}$ b) $\frac{47}{90}$ c) $\frac{37}{60}$

Multiplicació de fraccions

El **producte de dues o més fraccions** és una altra fracció que té per numerador el producte dels numeradors i per denominador el producte dels denominadors. Per calcular el signe de la fracció resultant, apliquem la regla del producte de signes.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Exemples:

1. $\frac{5}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5 \cdot 2}{4 \cdot 3} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

2. $\frac{5}{3} \cdot \left(-\frac{9}{10}\right) = -\frac{45}{30} = -\frac{3}{2}$

Nota: El resultat final s'ha de simplificar sempre que no sigui irreductible.

Exercici:

a) $\frac{7}{2} \cdot \frac{8}{3} =$

b) $\frac{5}{3} \cdot \frac{7}{6} =$

Sol.: a) $\frac{28}{3}$ b) $\frac{35}{18}$

Divisió de fraccions

El **quocient de dues fraccions** és una altra fracció que té per numerador el producte del numerador de la primera fracció pel denominador de la segona, i per denominador, el producte del denominador de la primera pel numerador de la segona. A la pràctica diem que multipliquem en creu:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \qquad \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Exemples:

1. $\frac{1}{4} : \frac{5}{3} = \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 5} = \frac{3}{20}$

2. $\frac{8}{5} : \frac{3}{10} = \frac{8 \cdot 10}{5 \cdot 3} = \frac{16}{3}$

Nota: El resultat final s'ha de simplificar sempre que no sigui irreductible.

NOMBRES RACIONALS.

Exercicis:

$$\text{a) } \frac{5}{9} : \frac{7}{4} =$$

$$\text{b) } \frac{1}{3} : \frac{1}{9} =$$

$$\text{Sol.: a) } \frac{20}{63} \quad \text{b) } 3$$

A vegades, quan fem un producte o divisió de diverses fraccions, és convenient simplificar abans de multiplicar.

Exemples:

$$\underline{1.} \quad \frac{4}{9} : \frac{16}{15} = \frac{4 \cdot 15}{9 \cdot 16} = \frac{\cancel{4} \cdot \cancel{15} \cdot \cancel{5}}{\cancel{3} \cdot 3 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{2} \cdot 2} = \frac{5}{12}$$

$$\underline{2.} \quad \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{15} \cdot \frac{18}{14} = \frac{5 \cdot 7 \cdot 18}{12 \cdot 15 \cdot 14} = \frac{\cancel{5} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{18} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}}{\cancel{2} \cdot 2 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 2 \cdot \cancel{7}} = \frac{1}{4}$$

Exercicis:

$$\text{a) } \frac{28}{5} : \frac{21}{25} =$$

$$\text{b) } \frac{18}{10} \cdot \frac{42}{45} \cdot \frac{25}{27} =$$

$$\text{Sol: a) } \frac{20}{3} \quad \text{b) } \frac{14}{9}$$

Si tenim el quocient de dues fraccions expressat com una fracció en què el numerador i el denominador són alhora dues fraccions, podem expressar-ho com un quocient i procedir com abans, o aplicar la següent regla pràctica:

$$\left[\begin{array}{c} \rightarrow \frac{a}{b} \\ \frac{c}{d} \leftarrow \end{array} \right] = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} = \frac{\text{producte dels extrems}}{\text{producte dels mitjans}}$$

Exemples:

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}} = \frac{2 \cdot 6}{3 \cdot 5} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{2}} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 1} = \frac{6}{5}$$

Operacions combinades

Quan fem operacions combinades amb fraccions, cal respectar la jerarquia de les operacions:

- Resolem els **parèntesis i claudàtors** (es comença pels que hi ha més endins i es continua cap a fora).

NOMBRES RACIONALS.

- Fem els **productes i les divisions** en l'ordre en què es presentin.
- Fem les **sumes i restes**.

Convé anar fent les operacions a banda i **simplificar** cada resultat parcial.

Quan hi ha operacions en el numerador i en el denominador d'una fracció, les resollem per separat i fem el quocient de les dues fraccions resultants.

Exemples:

1.

$$\frac{\frac{1}{5} \cdot \left(2 - \frac{3}{4}\right)}{1 + \frac{1}{6} : \frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{4}}{1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{1}{5}$$

Operacions:

$$2 - \frac{3}{4} = \frac{8}{4} - \frac{3}{4} = \frac{5}{4} \quad \frac{1}{6} : \frac{2}{3} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$1 + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

2.

$$\frac{\frac{2}{3} : \frac{10}{9} + \frac{8}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) - 1}{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} - \frac{6}{5} : \frac{2}{3}} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{4} - 1}{\frac{1}{5} - \frac{9}{5}} = \frac{\frac{2}{3} + 2 - 1}{-\frac{8}{5}} = \frac{\frac{5}{3}}{-\frac{8}{5}} = -1$$

Operacions:

$$\frac{2}{3} : \frac{10}{9} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5} \quad 1 - \frac{1}{4} = \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} \quad \frac{6}{5} : \frac{2}{3} = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}$$

$$\frac{8}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{24}{12} = 2 \quad \frac{1}{5} - \frac{9}{5} = -\frac{8}{5}$$

$$\frac{2}{3} + 2 - 1 = \frac{2}{3} + 1 = \frac{2}{3} + \frac{3}{3} = \frac{5}{3}$$

Exercici:

$$\frac{\left(\frac{3}{2} - \frac{4}{5}\right) \cdot 2 - \frac{3}{5} : \frac{3}{4}}{\frac{1}{10} + 1} =$$

Sol: $\frac{6}{11}$

NOMBRES RACIONALS.

Nombres decimals

Quan calculem l'expressió decimal d'una fracció, el resultat pot ser un nombre enter o un nombre decimal. Si el resultat és un nombre decimal, es poden donar tres casos:

- Que sigui un nombre **decimal exacte**, és a dir, que tingui un nombre limitat de xifres decimals.
- Que sigui un nombre **decimal periòdic pur**, és a dir, que tingui un nombre il·limitat de xifres decimals que es van repetint periòdicament. El grup de xifres decimals que es repeteix s'anomena **període**.
- Que sigui un nombre **decimal periòdic mixt**, és a dir, que tingui un nombre il·limitat de xifres decimals, algunes de les quals (no totes) es van repetint periòdicament. El grup de xifres decimals que no es repeteix s'anomenen **anteperíode** i està situat davant del període.

Exemples:

$$\frac{1}{4} = 0,25 \rightarrow \text{Decimal exacte.}$$

$$\frac{3}{2} = 1,5 \rightarrow \text{Decimal exacte.}$$

$$\frac{10}{3} = 3,33333... = 3,\widehat{3} \rightarrow \text{Decimal periòdic pur.}$$

$$\frac{1}{6} = 0,16666... = 0,1\widehat{6} \rightarrow \text{Decimal periòdic mixt.}$$

$$\frac{3}{8} = 0,375 \rightarrow \text{Decimal exacte.}$$

$$\frac{2}{7} = 0,\overbrace{285714} \rightarrow \text{Decimal periòdic pur.}$$

$$\frac{15}{11} = 1,363636... = 1,\widehat{36} \rightarrow \text{Decimal periòdic pur.}$$

$$\frac{13}{12} = 1,08333... = 1,0\widehat{83} \rightarrow \text{Decimal periòdic mixt.}$$

Fracció generatriu (pas de nombre decimal a fracció)

Tot nombre decimal exacte o periòdic el podem expressar per mitjà d'una fracció irreductible que anomenem **fracció generatriu**.

Càlcul de la fracció generatriu d'un nombre decimal exacte

La **fracció generatriu d'un nombre decimal exacte** és equivalent a una fracció que té per numerador el nombre decimal sense la coma i per denominador un 1 seguit de tants zeros com xifres decimals tingui el nombre.

Exemples:

1. $0,75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

2. $1,8 = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}$

3. $0,123 = \frac{123}{1000}$

Nota: Hem de simplificar, sempre que sigui possible, atès que la fracció generatriu és irreductible.

NOMBRES RACIONALS.

Càlcul de la fracció generatriu d'un nombre decimal periòdic pur

Per calcular la fracció generatriu d'un nombre decimal periòdic pur, procedim com en els exemples:

<u>Exemple:</u> Calcula la fracció generatriu de $1,\widehat{3}$ i de $0,\widehat{123}$:		
Passos a seguir	$1,\widehat{3}$	$0,\widehat{123}$
Anomenem x el nombre decimal	$x = 1,\widehat{3} = 1,3333333...$	$x = 0,\widehat{123} = 0,123123...$
Multipliquem x per un 1 seguit de tants zeros com xifres té el període, per obtenir un nombre amb la mateixa part decimal que x .	$10x = 13,333333...$	$1000x = 123,123123...$
Restem els dos nombres anteriors. Com que tots dos nombres tenen la mateixa part decimal, el resultat serà un nombre enter.	$\begin{array}{r} 10x = 13,3333333... \\ - x = 1,3333333... \\ \hline 9x = 12 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1000x = 123,123123... \\ - x = 0,123123... \\ \hline 999x = 123 \end{array}$
Aïllem la x i simplifiquem.	$x = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$	$x = \frac{123}{999} = \frac{41}{333}$
Fem el quocient per comprovar que és correcte.	$4:3 = 1,\widehat{3}$	$41:333 = 0,\widehat{123}$

Càlcul de la fracció generatriu d'un nombre decimal periòdic mixt:

Per calcular la fracció generatriu d'un nombre decimal periòdic mixt, procedim com en els exemples:

<u>Exemple:</u> Calcula la fracció generatriu de $1,\widehat{16}$ i de $1,\widehat{254}$		
Passos a seguir	$1,\widehat{16}$	$1,\widehat{254}$
Anomenem x el nombre decimal	$x = 1,\widehat{16} = 1,1666666...$	$x = 1,25454545454...$
Multipliquem x per un 1 seguit de tants zeros com xifres té l'antepèriode, per obtenir un nombre decimal periòdic pur.	$10x = 11,666666...$	$10x = 12,545454...$

NOMBRES RACIONALS.

Multipliquem x per un 1 seguit de tants zeros com xifres tenen el període i l'anteperíode junts, per obtenir un altre nombre amb la mateixa part decimal que l'anterior.	$100x = 116,66666...$	$1000x = 1254,545454...$
Restem els dos nombres anteriors. Com que tots dos nombres tenen la mateixa part decimal, el resultat serà un nombre enter.	$\begin{array}{r} 100x = 116,666666... \\ - 10x = 11,6666... \\ \hline 90x = 105 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1000x = 1254,545454... \\ - 10x = 12,545454... \\ \hline 990x = 1242 \end{array}$
Aïllem la x i simplifiquem.	$x = \frac{105}{90} = \frac{7}{6}$	$x = \frac{1242}{990} = \frac{69}{55}$
Fem el quocient per comprovar que és correcte.	$7:6 = 1,1\overline{6}$	$69:55 = 1,2\overline{54}$
Exercicis: Calcula la fracció generatriu de:		
a) 25,5	b) $1,8\overline{}$	c) $0,7\overline{2}$
d) $0,41\overline{6}$	e) $1,18\overline{5}$	f) $0,159\overline{0}$
Sol: a) $\frac{51}{2}$ b) $\frac{17}{9}$ c) $\frac{8}{11}$ d) $\frac{5}{12}$ e) $\frac{32}{27}$ f) $\frac{7}{44}$		

NOMBRES RACIONALS.

Nombres racionals

Un nombre racional és el conjunt format per una fracció i totes les seves fraccions equivalents. Per tant, diverses fraccions equivalents representen el mateix nombre racional. Se sol prendre com a representant del nombre racional la fracció irreductible o la seva expressió decimal:

Exemple:

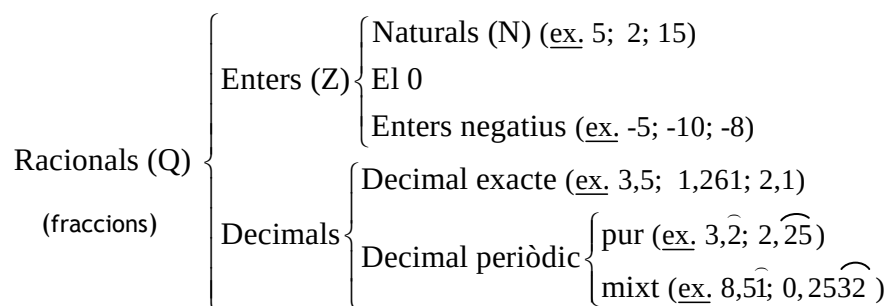
$\left\{ \frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \frac{3}{12}, \frac{4}{16}, \frac{5}{20}, \dots \right\}$ és el nombre racional representat per $\frac{1}{4}$ i d'expressió decimal 0,25.

Per simplificar, diem el nombre racional $\frac{1}{4}$ o el nombre racional 0,25.

Així doncs, tot nombre racional es pot expressar en forma de fracció.

El conjunt de tots els nombres racionals el simbolitzem amb la lletra $\mathbb{Q}$.

Classificació dels nombres racionals



Nota:

La calculadora arrodoneix l'última xifra dels nombres periòdics que li cap a la pantalla. Exemple:

$$\frac{5}{3} = 1,\overline{6}$$

El resultat que dona la calculadora és:

1,666666667

Exemple: Classifica els nombres següents:

a) $\frac{4}{9} \rightarrow$ Racional, decimal periòdic pur.

g) $3,3\overline{5} \rightarrow$ Racional, decimal periòdic mixt.

b) $-\frac{7}{6} \rightarrow$ Racional, decimal periòdic mixt.

h) 9,161616 $\rightarrow$ Racional, decimal exacte.

c) $\frac{13}{5} \rightarrow$ Racional, decimal exacte.

i) 3,212121... $\rightarrow$ Racional, decimal periòdic pur.

d) $-\frac{8}{2} \rightarrow$ Racional, enter negatiu.

j) $\frac{25}{5} \rightarrow$ Racional, enter, natural.

e) 9,25356284542 $\rightarrow$ Racional, decimal exacte.

f) 3,1256256256... $\rightarrow$ Racional, decimal periòdic mixt.

NOMBRES RACIONALS.

Exercici: Classifica els nombres següents:

a) $-\frac{4}{5}$

i) $-\frac{12}{4}$

b) $\frac{5}{11}$

j) $-\frac{8}{3}$

c) $\frac{11}{6}$

k) $\frac{5}{66}$

d) 3,8546953215

l) $\frac{5}{7}$

e) $3,\overline{3}$

m) 541,35222...

f) 4,555

n) $8,\overline{45}$

g) $9,\overline{253}$

o) $3,\overline{521}$

h) 3,111...

p) $\frac{10}{2}$

EXERCICIS: NOMBRES RACIONALS

1. Completa el quadre:

Fracció	Parts de la unitat	Expressió decimal	Pròpia o impròpia
$\frac{3}{5}$			
			
	 		
$\frac{8}{3}$			

2. Calcula:

a) $\frac{3}{5}$ de 25 =

b) $\frac{8}{3}$ de 15 =

c) $\frac{5}{4}$ de 16 =

3. Passa de fracció a nombre mixt o viceversa:

a) $3\frac{2}{5} =$

b) $6\frac{3}{11} =$

c) $5\frac{3}{8} =$

d) $\frac{12}{5} =$

e) $\frac{25}{6} =$

f) $\frac{37}{8} =$

4. Representa els nombres següents en la recta numèrica:

$$-\frac{5}{4}; \frac{3}{2}; -\frac{10}{3}; \frac{9}{2}$$

5. Calcula 5 fraccions equivalents a la donada:

a) $\frac{4}{7} \rightarrow$

(per amplificació)

b) $\frac{150}{360} \rightarrow$

(per simplificació)

EXERCICIS: NOMBRES RACIONALS

6. Redueix a denominador comú:

a) $\frac{4}{15}, \frac{1}{6} \rightarrow$

b) $\frac{7}{6}, \frac{1}{9}, \frac{5}{2} \rightarrow$

c) $\frac{9}{10}, \frac{4}{25}, \frac{7}{12} \rightarrow$

7. Simplifica les fraccions següents, fent servir els tres mètodes que coneixes:

Fracció	1r mètode	2n mètode	3r mètode
$\frac{150}{60}$			
$\frac{16}{80}$			
$\frac{252}{70}$			

8. Compara les fraccions següents, sense fer el quocient:

a) $\frac{2}{3} i \frac{5}{3}$

b) $\frac{5}{3} i \frac{5}{4}$

c) $\frac{2}{5} i \frac{5}{3}$

d) $\frac{5}{3} i \frac{4}{5}$

e) $\frac{8}{9} i \frac{10}{11}$

EXERCICIS: NOMBRES RACIONALS

9. Efectua les sumes i restes següents. Simplifica el resultat:

a) $\frac{1}{4} - \frac{1}{8} =$

b) $\frac{1}{3} + \frac{5}{2} =$

c) $\frac{1}{40} - \frac{4}{35} =$

d) $-\frac{1}{2} - \frac{4}{3} =$

e) $-\frac{25}{6} + \frac{3}{2} =$

f) $\frac{3}{10} - \frac{2}{15} =$

g) $\frac{3}{20} - \frac{5}{12} =$

h) $\frac{4}{5} - \frac{3}{10} + \frac{2}{15} =$

i) $\frac{5}{2} - \frac{3}{4} + \frac{1}{6} - \frac{7}{8} =$

j) $\frac{4}{25} + \frac{2}{15} - \frac{1}{2} =$

9. Efectua els productes següents. Simplifica el resultat:

a) $\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{5} =$

b) $\frac{5}{6} \cdot \frac{9}{5} =$

c) $\left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(+\frac{2}{15}\right) =$

d) $\left(-\frac{1}{7}\right) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) =$

10. Efectua els productes següents. Simplifica abans de fer el producte:

a) $\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{15}{9} =$

b) $\frac{25}{6} \cdot \frac{30}{77} \cdot \frac{14}{15} =$

c) $\left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(+\frac{2}{15}\right) \cdot \left(-\frac{10}{27}\right) \cdot \left(+\frac{3}{2}\right) =$

d) $\left(-\frac{49}{75}\right) \cdot \left(-\frac{10}{21}\right) =$

EXERCICIS: NOMBRES RACIONALS

11. Efectua les divisions següents. Si ho creus convenient simplifica abans de fer la divisió:

a) $\frac{5}{4} : \frac{25}{2} =$

b) $\frac{2}{3} : \frac{7}{8} =$

c) $\left(-\frac{6}{11}\right) : \left(-\frac{2}{5}\right) =$

d) $\left(+\frac{7}{12}\right) : \left(-\frac{28}{3}\right) =$

12. Calcula i simplifica:

a) $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{3}{4}} =$

b) $\frac{\frac{4}{7}}{\frac{10}{3}} =$

c) $\frac{2}{\frac{6}{5}} =$

13. Calcula i simplifica:

a) $\frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} =$

b) $\frac{\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{3}\right) : \frac{2}{3} - 1}{\frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{5}{6}} =$

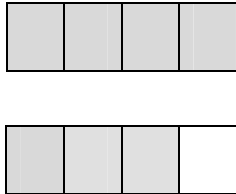
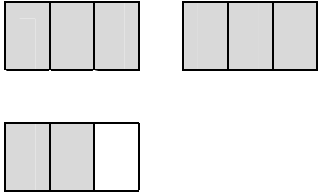
c) $3 : \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) + \left(-\frac{1}{5}\right) : \left(+\frac{7}{15}\right) - \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{21} =$

d) $\frac{2 \cdot \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right) + \frac{4}{5} : \frac{6}{25} - \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{3}{2} + \frac{5}{3} + \frac{1}{6}} =$

e) $\frac{5 + \frac{7}{8} \cdot \frac{4}{14} - 3 \cdot \left(2 + \frac{1}{3}\right)}{\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5}} =$

Solucions

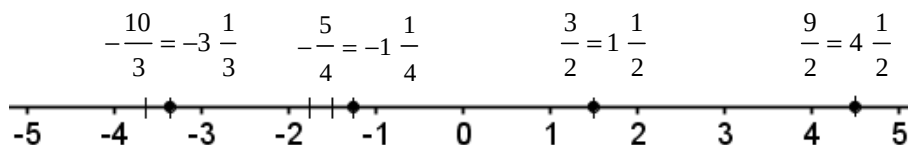
1.

Fracció	Parts de la unitat	Expressió decimal	Pròpia o impròpia
$\frac{3}{5}$		0,6	Pròpia
$\frac{5}{7}$		0,714285	Pròpia
$\frac{7}{4}$		1,75	Impròpia
$\frac{8}{3}$		$2,\widehat{6}$	Impròpia

2. a) 15 b) 40 c) 20

3. a) $\frac{17}{5}$ b) $\frac{69}{11}$ c) $\frac{43}{8}$ d) $2\frac{2}{5}$ e) $4\frac{1}{6}$ f) $4\frac{5}{8}$

4.



5. a) $\frac{4}{7}, \frac{8}{14}, \frac{12}{21}, \frac{16}{28}, \frac{20}{35}$

b) $\frac{75}{180}, \frac{50}{120}, \frac{25}{60}, \frac{30}{72}, \frac{5}{12}$

SOLUCIONS: NOMBRES RACIONALS

6. a) $\frac{8}{30}, \frac{5}{30}$

b) $\frac{21}{18}, \frac{2}{18}, \frac{45}{18}$

c) $\frac{270}{300}, \frac{48}{300}, \frac{175}{300}$

7. $\frac{150}{60} = \frac{5}{2}$

$\frac{16}{80} = \frac{1}{5}$

$\frac{252}{70} = \frac{18}{5}$

8. a) $\frac{2}{3} < \frac{5}{3}$

b) $\frac{5}{3} > \frac{5}{4}$

c) $\frac{2}{5} < \frac{5}{3}$

d) $\frac{5}{3} > \frac{4}{5}$

e) $\frac{8}{9} < \frac{10}{11}$

9. a) $\frac{1}{8}$

b) $\frac{17}{6}$

c) $-\frac{5}{56}$

d) $-\frac{11}{6}$

e) $-\frac{8}{3}$

f) $\frac{1}{6}$

g) $-\frac{4}{15}$

h) $\frac{19}{30}$

i) $\frac{25}{24}$

j) $-\frac{31}{150}$

10. a) $\frac{6}{5}$

b) $\frac{3}{2}$

c) $-\frac{1}{10}$

d) $+\frac{5}{14}$

11. a) 2

b) $\frac{50}{33}$

c) $\frac{1}{18}$

d) $\frac{14}{45}$

12. a) $\frac{1}{10}$

b) $\frac{16}{21}$

c) $+\frac{15}{11}$

d) $-\frac{1}{16}$

13. a) $\frac{4}{5}$

b) $\frac{6}{35}$

c) $\frac{5}{3}$

14. a) $\frac{3}{2}$

b) $-\frac{3}{5}$

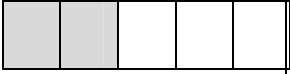
c) $-\frac{520}{21}$

d) $\frac{11}{40}$

e) -7

Solucions dels exercicis de la teoria

Concepte de fracció

$\frac{2}{5}$		0,4	pròpia
$\frac{7}{3}$		$2,\bar{3}$	impròpia a

$$\frac{2}{3} \text{ de } 24 \rightarrow 16$$

$$\frac{5}{2} \text{ de } 16 \rightarrow 40$$

Nombre mixt

$$\text{a) } \frac{17}{4} = 4\frac{1}{4}$$

$$\text{b) } 2\frac{3}{5} = \frac{13}{5}$$

Fraccions equivalents

$$\text{a) } \frac{2}{5} \rightarrow \frac{4}{10}, \frac{6}{15}, \frac{8}{20}, \frac{10}{25}, \frac{12}{30} \dots \quad \text{b) } \frac{120}{180} \rightarrow \frac{60}{90}, \frac{40}{60}, \frac{30}{45}, \frac{24}{36}, \frac{12}{18}.$$

Reducció a denominador comú

$$\text{a) } \frac{2}{15}, \frac{7}{10} \rightarrow \frac{4}{30}, \frac{21}{30} \quad \text{b) } \frac{5}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2} \rightarrow \frac{10}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8} \quad \text{c) } \frac{3}{20}, \frac{4}{12}, \frac{2}{24} \rightarrow \frac{18}{120}, \frac{40}{120}, \frac{10}{120}$$

Classificació de nombres racionals

- a) Racional, decimal exacte.
- b) Racional, decimal periòdic pur.
- c) Racional, decimal periòdic mixt.
- d) Racional, decimal exacte.
- e) Racional, decimal periòdic pur.
- f) Racional, decimal exacte.
- g) Racional, decimal periòdic mixt.
- h) Racional, decimal periòdic pur.
- i) Racional, enter negatiu.
- j) Racional, decimal periòdic pur.
- k) Racional, decimal periòdic mixt.
- l) Racional, decimal periòdic pur.
- m) Racional, decimal exacte.
- n) Racional, decimal periòdic pur.
- o) Racional, decimal periòdic pur.
- p) Racional, enter, natural.

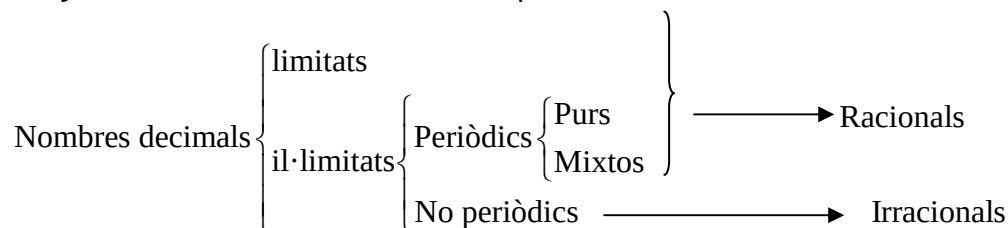
4. NOMBRES REALS

Nombres irracionals

Diem que un nombre és **irracional** si no es pot expressar en forma de fracció.

Els nombres irracionals són nombres decimals il·limitats (amb infinites xifres decimals) no periòdics.

El conjunt dels nombres irracionals es representa amb la lletra I.



Exemples de nombres irracionals

- Qualsevol **arrel no exacta** (el resultat de la qual no sigui un nombre enter):

Exemples:

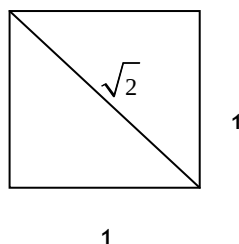
1. a) $\sqrt{2} = 1,414213562\dots$

b) $\sqrt{3} = 1,73205808\dots$

c)

$\sqrt{5} = 2,236067977\dots$

2. La diagonal d'un quadrat de costat 1 és $\sqrt{2}$ (aplicant el teorema de Pitàgores: $d = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$). Per tant, la longitud de la diagonal d'un quadrat és un nombre irracional.



- El nombre π :

$$\pi = 3,141592654\dots$$

El nombre π és la raó entre el diàmetre d'una circumferència i la seva longitud:

$$\pi = \frac{l}{d}$$

NOMBRES REALS.

- El nombre d'or (o nombre auri):

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618033989...$$

- El nombre e:

$$e = 2,718281...$$

- Qualsevol nombre il·limitat no periòdic:

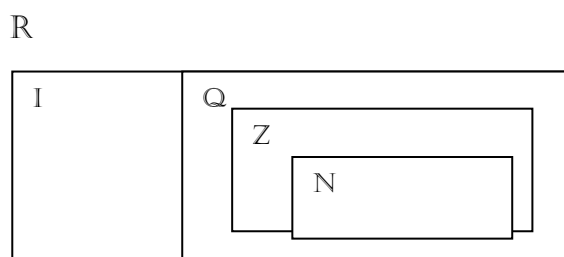
Exemples: 0,01001000100001...

5,23655258913125...

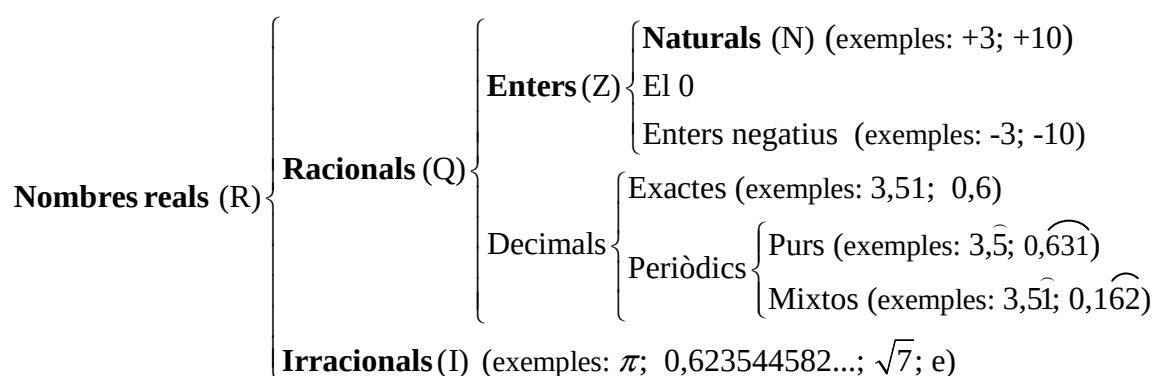
Nombres reals

El conjunt dels nombres reals està format per la unió dels nombres racionals i els irracionals. El representem amb la lletra R.

El conjunt dels nombres reals inclou tots els conjunts que hem estudiat fins ara: els racionals, enters i naturals: $N \subset Z \subset Q \subset R$



Classificació dels nombres reals



Exercici: Classifica els nombres següents:

a) $-3,5231\dots$

i) $-\frac{2}{11}$

b) $5,21111\dots$

j) $\frac{7}{6}$

c) $\frac{1}{5}$

k) $\pi + 3$

d) $5,1549122136$

l) $3e + 1$

e) $1,\hat{2}$

m) -5

f) $-\sqrt{3} + 1$

n) $\frac{24}{4}$

g) $\sqrt{9}$

o) $\frac{5}{4}$

h) $1,333\dots$

p) $\sqrt{10}$

Nota: En llenguatge matemàtic escrivim:

- $x \in Q \rightarrow x$ pertany al conjunt dels nombres racionals $\rightarrow x$ és un nombre racional.
- $x \notin Q \rightarrow x$ no pertany al conjunt dels nombres racionals $\rightarrow x$ és un nombre irracional.

La recta real

La recta real és una recta on estan representats tots els nombres reals. El conjunt dels nombres reals es correspon amb els punts de la recta, de manera que a cada punt de la recta li correspon un nombre real i a l'inrevés.

Representació en la recta de nombres irracionals

Els nombres irracionals també els podem representar sobre la recta real.

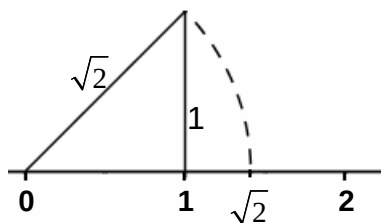
Els nombres irracionals que són radicals quadràtics es poden representar sobre la recta utilitzant mètodes geomètrics.

Per representar una arrel quadrada no exacta, construïm un triangle rectangle de manera que la longitud de la seva hipotenusa sigui igual al nombre que volem representar.

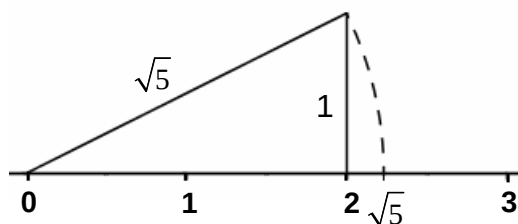
NOMBRES REALS.

Exemples:

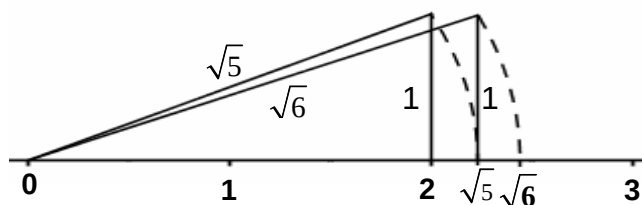
1. $\sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1^2}$



2. $\sqrt{5} = \sqrt{1^2 + 2^2}$



3. $\sqrt{6} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 1^2}$



Un nombre irracional que no és una arrel quadrada es pot representar sobre la recta real de manera aproximada, a partir d'una aproximació de la seva expressió decimal. Com més xifres decimals utilitzem per representar el nombre, més precisa serà la representació.

Ordre en el conjunt dels nombres reals

Els nombres reals s'ordenen a partir de la seva representació en la recta real. Donats dos nombres reals, el més petit és el que està situat més a l'esquerra en la recta real.

Exercici: Ordena de menor a major els següents nombres reals:

$$3,14; 5,3852\dots; 5,3; 5,36; 5,\widehat{36}; \frac{17}{3}; 5,365; \pi; e; \sqrt{29}$$

NOMBRES REALS.

Intervals

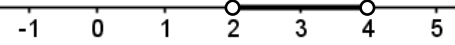
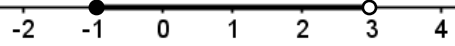
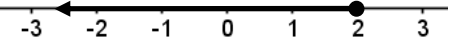
Un **interval** és un conjunt de nombres reals que es corresponen amb els punts d'un segment o una semirecta de la recta real. Els intervals que es corresponen amb una semirecta s'anomenen **intervals infinits o semirectes**.

Els intervals poden ser **oberts**, si els punts extrems no s'inclouen en l'interval, **semioberts**, si només un dels punts extrems s'inclou en l'interval, o **tancats**, si tots dos punts extrems s'inclouen en l'interval.

En el quadre següent es mostren els diferents tipus d'intervals:

Interval obert (a, b)	$\{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$		Conjunt format per tots els nombres reals <u>compresos entre a i b</u> , <u>excloent-ne a i b</u> .
Interval tancat $[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$		Conjunt format per tots els nombres reals <u>compresos entre a i b</u> , <u>inclouent-hi a i b</u> .
Interval semiobert $(a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$		Conjunt format per tots els nombres reals <u>compresos entre a i b</u> , <u>excloent-ne a i inclouent-hi b</u> .
Interval semiobert $[a, b)$	$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$		Conjunt format per tots els nombres reals <u>compresos entre a i b</u> , <u>inclouent-hi a i exclouent-ne b</u> .
Semirecta oberta $(a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} / x > a\}$		Conjunt format per tots els nombres reals <u>més grans que a</u> .
Semirecta tancada $[a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$		Conjunt format per tots els nombres reals <u>més grans o iguals que a</u> .
Semirecta oberta $(-\infty, b)$	$\{x \in \mathbb{R} / x < b\}$		Conjunt format per tots els nombres reals <u>més petits que b</u> .
Semirecta tancada $(-\infty, b]$	$\{x \in \mathbb{R} / x \leq b\}$		Conjunt format per tots els nombres reals <u>més petits o</u>

NOMBRES REALS.

			<u>iguals que b.</u>
<u>Exemples:</u> Completa les dues últimes files.			
Interval obert (2,4)	$\{x \in \mathbb{R} / 2 < x < 4\}$		Conjunt format per tots els nombres reals <u>compresos</u> entre 2 i 4, <u>excloent-ne 2 i 4.</u>
Interval semiobert [-1,3)	$\{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x < 3\}$		Conjunt format per tots els nombres reals <u>compresos</u> entre -1 i 3, <u>incloent-hi -1 i excloent-ne 3.</u>
Semirecta tancada $(-\infty, 2]$	$\{x \in \mathbb{R} / x \leq 2\}$		Conjunt format per tots els nombres <u>més petits o iguals</u> que 2.
Interval semiobert (-3,0]			
Semirecta oberta (5, +∞)			

Quan un nombre és dintre d'un interval donat, diem que pertany a l'interval i ho escrivim:

$$x \in (a, b) \rightarrow \text{Exemple: } 2 \in (1, 5]$$

Si el nombre no és dintre de l'interval, diem que no pertany a l'interval i ho escrivim:

$$x \notin (a, b) \rightarrow \text{Exemple: } 2 \notin (3, +\infty)$$

La recta real també la podem representar en forma d'interval infinit $(-\infty, +\infty)$.

NOMBRES REALS.

Valor absolut d'un nombre real.

El **valor absolut** d'un nombre real x es representa amb $|x|$ i es defineix de la manera següent:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Així, per obtenir el valor absolut d'un nombre real el deixem invariant si és positiu i el canviem de signe si és negatiu. El valor absolut d'un nombre sempre és positiu.

Exemple:

$$|-5| = 5 \text{ i } |+4| = 4.$$

Aproximacions i errors

Aproximacions

Per treballar amb nombres decimals que tenen moltes xifres decimals, o infinites xifres decimals, fem **aproximacions**.

Diem que una aproximació d'un nombre és **per defecte** quan és més petita que el valor exacte i **per excés**, quan és més gran.

<u>Exemples:</u> Completa l'última fila		
Valor exacte	Aproximació per defecte	Aproximació per excés
$\pi = 3,14159265358...$	3,14	3,15
$e = 2,718182...$	2,718	2,719
5,856712...		

Podem **aproximar un nombre real** per truncament o per arrodoniment:

- Per aproximar un nombre per **truncament**, prenem el nombre de xifres decimals que necessitem i eliminem la resta.

NOMBRES REALS.

- Per aproximar un nombre per **arrodoniment**, prenem el nombre de xifres decimals que necessitem, eliminem la resta i modifiquem, si cal, l'última xifra decimal de l'aproximació en funció de la regla següent:
 - o Si la primera xifra que eliminem és més petita que 5, deixem igual les xifres anteriors (en aquest cas, el resultat coincideix amb el truncament).
 - o Si la primera xifra que eliminem és més gran o igual que 5, sumem 1 a la xifra anterior (l'última xifra de l'aproximació).

<u>Exemples:</u> Completa les dues últimes files.			
Valor exacte	Nombre de xifres decimals	Aproximació per truncament	Aproximació per arrodoniment
321,548752...	Dos (fins a les centèsimes)	321,54	321,55
-1,52338...	Tres (fins a les mil·lèsimes)	-1,523	-1,523
$0,2\overline{5}$	Quatre (fins a les deumil·lèsimes)	0,2555	0,2556
1,349612	Tres (fins a les mil·lèsimes)		
9,2548	Dues (fins a les centèsimes)		

L'arrodoniment és la millor aproximació amb un nombre determinat de xifres decimals. Per tant, a partir d'ara utilitzarem l'arrodoniment per aproximar un nombre.

Errors en l'aproximació

Error absolut i relatiu

Cada vegada que fem una aproximació cometem un error, ja que no estem considerant el valor exacte.

L'**error absolut** (E_a) d'una aproximació és la diferència, en valor absolut, entre el valor exacte i el valor aproximat.

L'**error relatiu** (E_r) d'una aproximació és el quocient entre l'error absolut i el valor absolut del valor exacte, i ens indica quin és l'error comès per unitat.

L'error relatiu es pot expressar en tant per cent (error comès per cada 100 unitats). Aquest error s'anomena **percentatge d'error** i es calcula multiplicant per 100 l'error relatiu.

NOMBRES REALS.

$$E_a = |V_{aproximat} - V_{exacte}| \quad E_r = \frac{E_a}{|V_{exacte}|}$$

$$\text{Percentatge d'error} = E_r \cdot 100$$

Exemples: Completa l'última fila

Valor exacte	Aproximació	Error absolut	Error relatiu	Percentatge d'error
0,5134	0,5	0,0134 ($ 0,5134 - 0,5 $)	0,0261 ($0,0134:0,5134$)	2,61 ($0,0134 \cdot 100$)
- 8,558	- 8,56	0,002 ($ - 8,56 - (-8,558) $)	0,0002337 ($0,002:8,558$)	0,023 ($0,0002337 \cdot 100$)
52,36	52,4			

L'error relatiu ens dóna informació sobre l'error comès en comparació amb el valor exacte. Ens serveix per comparar diverses aproximacions i indicar quina és més precisa. Com més gran és l'error relatiu menys precisa és l'aproximació:

Exemple: Troba l'error absolut i el relatiu de les aproximacions següents i indica quina aproximació és més precisa:

a) Prenem 8,2 m² com l'àrea d'una habitació que en realitat fa 8,27 m².

b) Prenem 120 m com la distància d'una pista de córrer que fa 120,5 m.

$$\text{a) } E_a = |8,27 - 8,2| = 0,07 \quad E_r = \frac{0,07}{8,27} = 0,00846 \rightarrow 0,846\%$$

$$\text{b) } E_a = |120,5 - 120| = 0,5 \quad E_r = \frac{0,5}{120,5} = 0,00415 \rightarrow 0,415\%$$

L'error absolut de l'apartat a) és més petit que el de l'apartat b); tanmateix l'error relatiu és més gran. Això vol dir que l'aproximació de l'apartat b) és més precisa que la de l'apartat a).

NOMBRES REALS.

Exercici: Completa el quadre.

Valor exacte	Nombre de xifres decimals	Aproximació per arrodoniment	Aproximació per defecte o per excés?	Error absolut	Error relatiu	Percentatge d'error
50,32561	Una xifra					
50,32561	Dues xifres					
50,32561	Tres xifres					
-11,345	Una xifra					
-11,345	Dues xifres					

Fita d'error absolut

Si un nombre és irracional, no coneixem el seu valor exacte i, per tant, no podem trobar l'error absolut comès quan fem una aproximació d'aquest nombre. Tanmateix, sí que podem acotar l'error, és a dir, donar un valor més gran o igual que l'error comès. Aquest valor s'anomena una **fita d'error absolut** (hi ha moltes possibles fites d'error absolut, la solució no és única).

Si aproximem fins a les dècimes, una fita d'error absolut serà 0,1. Si aproximem fins a les centèsimes, una fita d'error absolut serà 0,01. Si aproximem fins a les mil·lèsimes, una fita d'error absolut serà 0,001 i així, successivament.

Exemple:

Donat el nombre $\sqrt{3} = 1,732050808\dots$:

- Si l'aproximem fins a les dècimes, el valor aproximat és 1,7 i una fita de valor absolut és 0,1:

$$E_a = | 1,732050808\dots - 1,7 | = 0,032050808\dots < 0,1 \rightarrow \text{Una fita d'error absolut és 0,1.}$$

- Si l'aproximem fins a les centèsimes, el valor aproximat és 1,73 i una fita de valor absolut és 0,01:

$$E_a = | 1,732050808\dots - 1,73 | = 0,002050808\dots < 0,01 \rightarrow \text{Una fita d'error absolut és 0,01.}$$

NOMBRES REALS.

Exercici: Completa el quadre.

Valor exacte	Nombre de xifres decimals de l'aproximació	Aproximació per arrodoniment	Aproximació per defecte o per excés?	Fita d'error absolut
π	Dues xifres			
π	Tres xifres			
-3,25667...	Tres xifres			
$\sqrt{3}$	Una xifra			
$\sqrt{3}$	Quatre xifres			

EXERCICIS: NOMBRES REALS

1. Classifica els nombres següents:

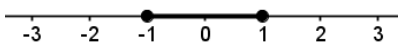
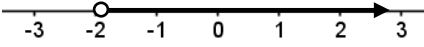
- | | |
|--------------------------|---------------------|
| a) $-3,5231111...$ | i) $-\frac{17}{12}$ |
| b) $-\sqrt{16}$ | j) $\frac{7}{2}$ |
| c) $\frac{1}{12}$ | k) $\pi - 1$ |
| d) $5,15151515...$ | l) $e + 1$ |
| e) $1,38$ | m) -8 |
| f) $\sqrt{8} + \sqrt{4}$ | n) $-51,324$ |
| g) $-\sqrt{15}$ | o) $\frac{11}{3}$ |
| h) $1,312534...$ | p) $5,211$ |

2. Representa en la recta real $\sqrt{10}$ i $-\sqrt{13}$

3. Ordena de menor a major:

$$2,45; 2,99; 2,\hat{9}; -\sqrt{2}; -1,42; 0; \frac{5}{2}$$

4. Completa el quadre:

Interval tancat $[-1,1]$	$\{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x \leq 1\}$		Conjunt format per tots els nombres reals <u>compresos</u> entre -1 i 1, <u>incloent</u> -1 i 1.
			
Semirecta oberta $(-\infty, 0)$			
Interval semiobert $(-5, 0]$			
			Conjunt format per tots els nombres reals <u>més grans</u> que -5 i <u>més petits</u> que -3.
	$\{x \in \mathbb{R} / x \geq -4\}$		

EXERCICIS: NOMBRES REALS

5. Completa el quadre:

Valor exacte	Aproximació per defecte (fins a les centèsimes)	Aproximació per excés (fins a les centèsimes)
4,2852614		
$e = 2,718182\dots$		
$5,3\overline{8}$		
$5,9\overline{}$		
3,1237		

6. Completa el quadre:

Valor exacte	Aproximació per truncament		Aproximació per arrodoniment	
	2 xifres decimals	3 xifres decimals	2 xifres decimals	3 xifres decimals
4,2852614				
$e = 2,718182\dots$				
$5,3\overline{8}$				
$5,9\overline{}$				
3,1237				

7. Completa el quadre:

Valor exacte	Nombre de xifres decimals de l'aproximació	Aproximació per arrodoniment	Aproximació per defecte o per excés?	Error absolut	Error relatiu	Percentatge d'error
2,115	Una xifra					
2,115	Dues xifres					
- 0,984	Una xifra					
- 0,984	Dues xifres					

Quina de les aproximacions anteriors és més precisa? Quina ho és menys?

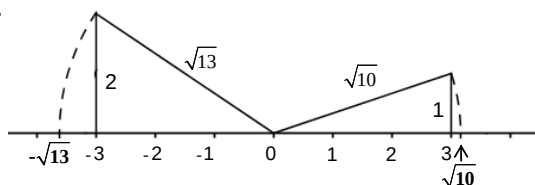
8. Completa el quadre:

Valor exacte	Nombre de xifres decimals de l'aproximació	Aproximació per arrodoniment	Aproximació per defecte o per excés?	Fita d'error absolut
3,555...	Dues xifres			
40,3232...	Tres xifres			

Solucions

1. a) Racional, decimal periòdic mixt.
b) Racional, enter negatiu.
c) Racional, decimal periòdic mixt.
d) Racional, decimal, periòdic pur.
e) Racional, decimal exacte.
f) Irracional.
g) Irracional.
h) Irracional.
- i) Racional, decimal periòdic mixt.
j) Racional, decimal exacte.
k) Irracional.
l) Irracional.
m) Racional, enter negatiu.
n) Racional, decimal exacte.
o) Racional, decimal, periòdic pur.
p) Racional, decimal exacte.

2.



3. $-1,42 < -\sqrt{2} < 0 < 2,45 < \frac{5}{2} < 2,99 < 2,9$

4.

Interval tancat $[-1, 1]$	$\{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x \leq 1\}$		Conjunt format per tots els nombres reals compresos entre -1 i 1, incloent-hi -1 i 1.
Semirecta oberta $(-2, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} / x > -2\}$		Conjunt format per tots els nombres reals més grans que -2.
Semirecta oberta $(-\infty, 0)$	$\{x \in \mathbb{R} / x < 0\}$		Conjunt format per tots els nombres més petits que 0.
Interval semiobert $(-5, 0]$	$\{x \in \mathbb{R} / -5 < x \leq 0\}$		Conjunt format per tots els nombres reals compresos entre -5 i 0, incloent-hi 0 i excloent-ne -5.
Interval obert $(-5, -3)$	$\{x \in \mathbb{R} / -5 < x < -3\}$		Conjunt format per tots els nombres reals més grans que -5 i més petits que -3.
Semirecta tancada $[-4, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} / x \geq -4\}$		Conjunt format per tots els nombres més grans o iguals que -4.

SOLUCIONS: NOMBRE REAL

5. Completa el quadre:

Valor exacte	Aproximació per defecte (fins a les centèsimes)	Aproximació per excés (fins a les centèsimes)
4,2852614	4,28	4,29
$e = 2,718182\dots$	2,71	2,72
$5,3\overline{8}$	5,38	5,39
$5,9\overline{}$	5,99	6
3,1237	3,12	3,13

6. Completa el quadre:

Valor exacte	Aproximació per truncament		Aproximació per arrodoniment	
	2 xifres decimals	3 xifres decimals	2 xifres decimals	3 xifres decimals
4,2852614	4,28	4,285	4,29	4,285
$e = 2,718182\dots$	2,71	2,718	2,72	2,718
$5,3\overline{8}$	5,38	5,388	5,39	5,389
$5,9\overline{}$	5,99	5,999	6	6
3,1237	3,12	3,123	3,12	3,124

7. Completa el quadre:

Valor exacte	Nombre de xifres decimals de l'aproximació	Aproximació per arrodoniment	Aproximació per defecte o per excés?	Error absolut	Error relatiu	Percentatge d'error
2,115	Una xifra	2,1	Defecte	0,015	0,0071	0,71 %
2,115	Dues xifres	2,12	Excés	0,005	0,0024	0,24 %
- 0,984	Una xifra	-1	Defecte	0,016	0,0163	1,63 %
- 0,984	Dues xifres	-0,98	Excés	0,004	0,0041	0,41 %

L'aproximació més precisa és 2,12 , ja que té l'error relatiu més petit. La menys precisa és -1, perquè té l'error relatiu més gran.

8. Completa el quadre:

Valor exacte	Nombre de xifres decimals de l'aproximació	Aproximació per arrodoniment	Aproximació per defecte o per excés?	Fita d'error absolut
3,555...	Dues xifres	3,56	Excés	0,01
40,3232...	Tres xifres	40,323	Defecte	0,001

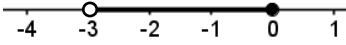
Solucions dels exercicis de la teoria

Classificació de nombres reals

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| a) Irracional. | j) Racional, decimal periòdic mixt. |
| b) Racional, decimal periòdic mixt. | k) Irracional. |
| c) Racional, decimal exacte. | l) Irracional. |
| d) Racional, decimal exacte. | m) Racional, enter negatiu. |
| e) Racional, decimal periòdic pur. | n) Racional, enter, natural. |
| f) Irracional. | o) Racional, decimal exacte. |
| g) Racional, enter, natural. | p) Irracional. |
| h) Racional, decimal periòdic pur. | |
| i) Racional, decimal periòdic pur. | |

Ordre $e < 3,14 < \pi < 5,3 < 5,36 < 5,365 < 5,3\hat{6} < \sqrt{29} < \frac{17}{3}$

Intervals

Interval semiobert $(-3, 0]$	$\{x \in \mathbb{R} / -3 < x \leq 0\}$		Conjunt format per tots els nombres reals <u>compresos entre -3 i 0, excloent-ne el -3 i incloent-hi el 0.</u>
Semirecta oberta $(5, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} / x > 5\}$		Conjunt format per tots els nombres reals <u>més grans que 5.</u>

Aproximacions

Valor exacte	Aproximació per defecte	Aproximació per excés
5,856712...	5,8	5,9

Valor exacte	Nombre de xifres decimals de l'aproximació	Aproximació per truncament	Aproximació per arrodoniment
1,349612	Tres (fins a les mil·lèsimes)	1,349	1,350
9,2548	Dues (fins a les centèsimes)	9,25	9,25

Errors en l'aproximació

V_{exacte}	Nre. xifres	Arrodon.	Excés o defecte?	E_a	E_r	Percentatge d'error
50,32561	Una xifra	50,3	Defecte	0,02561	0,0005089	0,05089
50,32561	Dues xifres	50,33	Excés	0,00439	0,0000872	0,00872
50,32561	Tres xifres	50,326	Excés	0,00039	0,00000775	0,000775
- 11,345	Una xifra	-11,3	Excés	0,045	0,0039665	0,39665
- 11,345	Dues xifres	-11,35	Defecte	0,005	0,00044072	0,044072

V_{exacte}	Nre. xifres	Arrodon.	Excés o defecte?	Fita d' E_a
π	Dues xifres	3,14	Defecte	0,01
π	Tres xifres	3,142	Excés	0,001
-3,25667...	Tres xifres	-3,257	Defecte	0,001
$\sqrt{3}$	Una xifra	1,7	Defecte	0,1
$\sqrt{3}$	Quatre xifres	1,7321	Excés	0,0001

5. POTÈNCIES I RADICALS

Potències

Potència d'exponent natural

Si a és un nombre real i n un nombre natural, anomenem **potència de base a i exponent n** el resultat de multiplicar a per ell mateix n vegades:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a \quad (n \text{ vegades}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Cal multiplicar la base per ella mateixa} \\ \text{tantes vegades com indiqui l'exponent.} \end{array} \right.$$

a^n ← exponent
 ↑
 base

Exemples:

1. $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$

base: 3

exponent: 2

2. $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

base: 2

exponent: 3

3. $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

base: 2

exponent: 5

4. $(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$

base: -2

exponent: 2

5. $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

base: 2/3

exponent: 2

Signe d'una potència d'exponent natural

- Si la base és positiva, la potència té signe positiu.
- Si la base és negativa:
 - o La potència té signe positiu si l'exponent és parell.
 - o La potència té signe negatiu si l'exponent és imparell.

$$\begin{aligned} (+a)^n &= + \\ (-a)^n &= \begin{cases} + & \text{si } n \text{ parell} \\ - & \text{si } n \text{ imparell} \end{cases} \\ a &> 0 \end{aligned}$$

Exemples:

1. $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = +9$

2. $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$

3. $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = +81$

4. $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = +\frac{4}{9}$

5. $(+2)^3 = (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) = +8$

6. $(-1)^5 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$

Nota:

$$(-2)^2 \neq -2^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} (-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = +4 \rightarrow \text{la base de la potència és } -2 \\ -2^2 = -2 \cdot 2 = -4 \rightarrow \text{la base de la potència és } 2 \end{array} \right.$$

POTÈNCIES I RADICALS.

Exercici: Calcula:

$$(-5)^4 =$$

$$-5^4 =$$

$$(-5)^3 =$$

$$-5^3 =$$

Potències i calculadora

Per fer potències amb la calculadora se sol utilitzar la tecla x^y o la tecla amb el símbol $\wedge$.

Resol les potències següents fent servir la teva calculadora i apunta't com es fa:

$$3^4 =$$

$$5^6 =$$

$$2^{10} =$$

Exercici: Resol fent servir la calculadora (si cal) i la regla dels signes d'una potència:

a) $(-5)^4 =$

d) $(-3)^5 =$

g) $(+6)^7 =$

b) $(+4)^3 =$

e) $(-1)^{100} =$

h) $(-10)^9 =$

c) $(-8)^6 =$

f) $-8^6 =$

i) $(-2,5)^{12} =$

Propietats de les potències

	Propietat	Exemples	Desenvolupament
<u>Producte</u> de potències amb la <u>mateixa</u> base	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$	$2^2 \cdot 2^3 = \underbrace{2 \cdot 2}_{2^2} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{2^3} = 2^5$
<u>Quocient</u> de potències amb la <u>mateixa</u> base.	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$\frac{5^7}{5^3} = 5^{7-3} = 5^4$ $\frac{5^3}{5^7} = 5^{3-7} = 5^{-4}$ $\frac{5^7}{5^7} = 5^{7-7} = 5^0$	$\frac{5^7}{5^3} = \frac{\cancel{5} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{5} \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{\cancel{5} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{5}} = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$ $\frac{5^3}{5^7} = \frac{\cancel{5} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{5}}{\cancel{5} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{5} \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1}{5^4}$ $\frac{5^7}{5^7} = 1$
Potència d'un producte	$*(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(3 \cdot 5)^2 = 3^2 \cdot 5^2$	$(3 \cdot 5)^2 = 15^2 = 225$ $3^2 \cdot 5^2 = 9 \cdot 25 = 225$
Potència d'un quocient	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{6}{2}\right)^2 = \frac{6^2}{2^2}$	$\left(\frac{6}{2}\right)^2 = \frac{6}{2} \cdot \frac{6}{2} = \frac{36}{4} = 9; \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 3^2 = 9$

POTÈNCIES I RADICALS.

Potència d'una potència	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$(3^2)^3 = 3^{2 \cdot 3} = 3^6$	$(3^2)^3 = 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 =$ $= \underbrace{3 \cdot 3}_{3^2} \cdot \underbrace{3 \cdot 3}_{3^2} \cdot \underbrace{3 \cdot 3}_{3^2} = 3^6$
Potència d'exponent 1	$a^1 = a$	$7^1 = 7$	

***Nota:** $(a+b)^n \neq a^n + b^n \rightarrow \text{ex. } \underbrace{(2+3)^2}_{5^2=25} \neq \underbrace{2^2+3^2}_{4+9=13}$

Exercicis: Simplifica (escriu com una sola potència), aplicant les propietats de les potències:

a) $2^5 \cdot 2^3 =$

b) $2^5 : 2^3 =$

c) $(2 \cdot 5)^3 =$

d) $(10 : 5)^3 =$

e) $(2^5)^3 =$

Potència d'exponent 0

Qualsevol potència d'exponent 0 es defineix com la unitat:

$$a^0 = 1$$

Potència d'exponent enter negatiu

Qualsevol potència que té exponent enter negatiu és igual a l'invers de la mateixa potència en exponent positiu:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Nota:

$$\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a} \rightarrow \frac{b}{a} \text{ és la inversa de } \frac{a}{b}$$

Exemples:

1. $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

2. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$

3. $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$

Exercicis:

a) $7^{-2} =$

b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-4} =$

c) $(-8)^{-2} =$

Quadre resum

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
$a^1 = a$	$a^0 = 1$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Radicals (arrels)

La radicació és l'operació inversa de la potenciació.

Si a és un nombre real i n és un nombre natural, anomenem **arrel enèsima (o radical d'índex n) de a** tot nombre real que elevat a n és igual a a . Es representa amb $\sqrt[n]{a}$. El nombre a s'anomena **radicand** i el nombre n s'anomena **índex** x :

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \leftrightarrow b^n = a}$$

$\xrightarrow{\text{radical}} \sqrt[n]{a} \xleftarrow{\text{radicand}}$

Si l'índex és 2, no s'indica en l'arrel. Així $\sqrt{a}$, es llegeix arrel quadrada de a .

De la definició d'arrel podem deduir que:

- L'arrel d'índex parell d'un nombre positiu té dues solucions, que són dos nombres reals oposats:

$$\text{Exemples: } \sqrt{25} = \pm 5 \rightarrow \begin{cases} 5^2 = 25 \\ (-5)^2 = 25 \end{cases} \quad \sqrt[4]{16} = \pm 2 \rightarrow \begin{cases} 2^4 = 16 \\ (-2)^4 = 16 \end{cases}$$

Però si no escrivim cap signe davant de l'arrel considerem que estem prenent el valor positiu (per prendre el negatiu s'escriu el signe - davant de l'arrel). A partir d'ara considerarem:

$$\sqrt{25} = 5 \quad -\sqrt{25} = -5 \quad \pm\sqrt{25} = \pm 5$$

- L'arrel quadrada d'un nombre negatiu no existeix (no és un nombre real), ja que no hi ha cap nombre real que elevat al quadrat sigui igual a un nombre negatiu.
- En general, podem dir que l'arrel d'índex parell d'un nombre negatiu no existeix (no és un nombre real), perquè qualsevol nombre ~~negatiu~~ elevat a exponent parell és positiu.
- L'arrel d'índex imparell d'un nombre negatiu existeix, és única i negativa.

POTÈNCIES I RADICALS.

Exemples:

a) $\sqrt{9} = 3 \rightarrow 3^2 = 9$

radicand: 9

índex: 2

b) $\sqrt[3]{8} = 2 \rightarrow 2^3 = 8$

radicand: 8

índex: 3

c) $\sqrt[4]{625} = 5 \rightarrow 5^4 = 625$

radicand: 625

índex: 4

d) $\sqrt{-9} \notin R \rightarrow \begin{cases} 3^2 = 9 \\ (-3)^2 = 9 \end{cases}$

radicand: -9 (negatiu)

índex: 2 (parell)

e) $\sqrt[3]{-8} = -2 \rightarrow (-2)^3 = -8$

radicand: -8 (negatiu)

índex: 3 (imparell)

f) $\sqrt[4]{-625} \notin R \rightarrow \begin{cases} 5^4 = 625 \\ (-5)^4 = 625 \end{cases}$

radicand: -625 (negatiu)

índex: 4 (parell)

Exercici: Resol:

a) $\sqrt[3]{27} =$

b) $\sqrt[3]{-27} =$

c) $\sqrt[4]{81} =$

d) $\sqrt[4]{-81} =$

e) $-\sqrt{81} =$

f) $\sqrt{-81} =$

Radicals i calculadora

Per fer radicals amb la calculadora se solen utilitzar les tecles $\sqrt[n]{}$ o $x^{\frac{1}{y}}$

Resol els radicals següents fent servir la teva calculadora i apunta't com es fa:

$\sqrt[6]{64} =$

$\sqrt[4]{2401} =$

$\sqrt[5]{10} =$

Exercici: Resol fent servir la calculadora. Si no és exacta, arrodoneix fins a les centèsimes.

a) $\sqrt[3]{27} =$

b) $\sqrt[10]{1024} =$

c) $\sqrt[3]{-9} =$

El radical com a potència d'exponent fraccionari

Un radical és una potència en la qual l'exponent és una fracció. El numerador de l'exponent és la potència del radicand i el denominador de l'exponent és l'índex del radical:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Exemples:

1. Expressa en forma de potència:

a) $\sqrt{9} = 9^{\frac{1}{2}}$

b) $\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$

c) $\sqrt[4]{2^3} = 2^{\frac{3}{4}}$

d) $\sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}}$

e) $-\sqrt[3]{5^6} = -5^{\frac{6}{3}} = -5^2$

2. Expressa en forma de radical:

a) $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

b) $12^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{12^5}$

c) $(-2)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{-2}$

d) $-20^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{20}$

e) $6^{-\frac{7}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{6^7}}$

Exercicis:

1. Expressa en forma de potència:

a) $\sqrt[8]{2} =$

b) $\sqrt[3]{-4} =$

c) $\sqrt[5]{5^3} =$

d) $\sqrt[15]{5^5} =$

e) $\sqrt[3]{5^{-1}} =$

2. Expressa en forma de radical:

a) $7^{\frac{3}{8}} =$

b) $11^{\frac{1}{4}} =$

c) $(-9)^{\frac{1}{2}} =$

d) $-6^{\frac{2}{5}} =$

e) $2^{-\frac{1}{3}} =$

Propietats dels radicals

	Propietat	Exemple	Demostració passant a potències
Arrel d'un producte	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} *$	$\sqrt[3]{9 \cdot 4} = \sqrt[3]{9 \cdot 4}$ $\sqrt[3]{36=6} \quad \quad \quad \sqrt[3]{3 \cdot 2=6}$	$\sqrt[n]{a \cdot b} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}}$ $= \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
Arrel d'un quocient	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
Arrel d'una arrel	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{64}} = \sqrt[12]{64}$ $\sqrt[4]{2=2} \quad \quad \quad \sqrt[3]{2}$	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n \cdot m}}$ $= a^{\frac{1}{n \cdot m}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$
Potència d'una arrel	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$	$\left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64}$ $\sqrt[2^2=4]{4} \quad \quad \quad \sqrt[3]{4}$	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

POTÈNCIES I RADICALS.

Arrels equivalents	$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$	$\sqrt[3]{9} = \sqrt[4]{9^2} = \sqrt[6]{9^3} = \dots$ $\sqrt[4]{81}=3$ $\sqrt[6]{729}=3$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m \cdot p}{n \cdot p}} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$
Arrel com a inversa de la potència	$\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a$	$\sqrt{3^2} = (\sqrt{3})^2 = 3$ $\sqrt[3]{2^3} = (\sqrt[3]{2})^3 = 2$	$\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$

***Nota:** $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} \rightarrow \text{ex. } \sqrt[5]{9+16} \neq \sqrt[5]{9} + \sqrt[5]{16}$
 $\sqrt[5]{25}=5$ $\sqrt[5]{9} \neq 3$ $\sqrt[5]{16} \neq 4$

Quadre resum

$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$	$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$	$\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a$

Exercicis:

1. Aplica les propietats de les arrels per resoldre:

a) $\sqrt[3]{27 \cdot 8} =$ b) $\sqrt{\frac{16}{25}} =$ c) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{10}} =$

d) $(\sqrt{5})^3 =$

2. Calcula 3 arrels equivalents a $\sqrt[5]{3^2}$:

Introducció de factors en un radical

Per introduir un factor dintre d'un radical, elevem el factor a l'índex de l'arrel:

$$b \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b^n \cdot a} \quad (\text{Demostració: } b \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b^n} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b^n \cdot a})$$

Exemples:

a) $5 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{5^2 \cdot 2} = \sqrt{50}$ b) $2 \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{24}$ c) $3 \cdot \sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{3^5 \cdot 2} = \sqrt[5]{486}$

Exercici: Introdueix el factor dintre del radical:

a) $10 \cdot \sqrt{3} =$

b) $3 \cdot \sqrt[6]{3} =$

Extracció de factors d'un radical

Per **extreure factors d'un radical**, actuem de manera inversa al cas anterior. Factoritzem el radicand i quan l'exponent d'un factor del radicand és més gran que l'índex del radical, extraïem aquest factor fora del radical, tal com s'indica en l'exemple següent:

$$\sqrt[n]{b^n \cdot a} = b \cdot \sqrt[n]{a} \rightarrow \text{ex. } \sqrt[5]{5^{13}} = \sqrt[5]{5^5 \cdot 5^5 \cdot 5^3} = \sqrt[5]{5^5} \cdot \sqrt[5]{5^5} \cdot \sqrt[5]{5^3} = 5^2 \cdot \sqrt[5]{5^3} = 25 \cdot \sqrt[5]{125}$$

Una altra manera de fer-ho és dividir l'exponent del factor entre l'índex del radical:

- El quocient de la divisió ens indica el nombre de factors que hem d'extreure.
- El residu de la divisió ens indica el nombre de factors que hem de deixar dins del radical.

Així l'exemple anterior quedaria:

$$\begin{array}{r} 13 \overline{) 5} \\ 3 \quad 2 \end{array} \quad \sqrt[5]{5^{13}} = 5^2 \cdot \sqrt[5]{5^3} \rightarrow \text{Extraïem 2 cincs i en deixem 3 a dins.}$$

Exemples:

$$\underline{1.} \sqrt{24} = \sqrt{2^3 \cdot 3} = 2 \cdot \sqrt{2 \cdot 3} = 2 \cdot \sqrt{6} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2^3 \cdot 3} = \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 3} = 2 \cdot \sqrt{2 \cdot 3} \\ 3 \overline{) 2} \\ 1 \quad 1 \end{array} \right. \text{extraïem 1 factor i en deixem 1 a dins}$$

$$\underline{2.} \sqrt[3]{16000} = \sqrt[3]{2^7 \cdot 5^3} = 2^2 \cdot 5 \cdot \sqrt[3]{2} = 20 \cdot \sqrt[3]{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt[3]{2^7 \cdot 2^3 \cdot 2 \cdot 5^3} = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \sqrt[3]{2} \\ 7 \overline{) 3} \quad 3 \overline{) 3} \rightarrow \text{Extraïem 2 dosos i en deixem 1 a dins} \\ 1 \quad 2 \quad 0 \quad 1 \quad \text{Extraïem 1 cinc i no en deixem cap a dins} \end{array} \right.$$

$$\underline{3.} \sqrt[3]{2^8 \cdot 5^3 \cdot 3^2 \cdot 7^{10}} = 2^2 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot \sqrt[3]{2^2 \cdot 3^2 \cdot 7}$$

$$\underline{4.} \sqrt[7]{11^{25}} = 11^3 \cdot \sqrt[7]{11^4}$$

POTÈNCIES I RADICALS.

Exercici: Extreu factors:

a) $\sqrt{864} =$

b) $\sqrt[9]{3^{30} \cdot 5^{25}} =$

Simplificació de radicals

Per simplificar radicals, dividim l'índex del radical i l'exponent del radicand pel màxim comú divisor de tots dos, aplicant la propietat:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$$

Exemples: Simplifica:

a) $\sqrt[10]{3^5} = \sqrt{3}$

b) $\sqrt[9]{7^{15}} = \sqrt[3]{7^5}$

Exercici: Simplifica:

a) $\sqrt[15]{3^{25}} =$

b) $\sqrt[4]{7^{12}} =$

Reducció a índex comú

Reduir dos o més radicals a índex comú és trobar radicals equivalents a aquests amb el mateix índex. L'índex comú serà el *m.c.m.* dels índexs i per calcular els radicals equivalents usarem la propietat:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$$

També podem passar els radicals a potència d'exponent fraccionari i reduir a denominador comú els exponents.

Exemples: Redueix a índex comú $\sqrt[4]{5^3}$ i $\sqrt[6]{7}$:

$$mcm(4, 6) = 12 \begin{cases} \sqrt[3 \cdot 4]{5^{3 \cdot 3}} = \sqrt[12]{5^9} & i & \sqrt[2 \cdot 6]{7^{2 \cdot 1}} = \sqrt[12]{7^2} \\ \sqrt[4]{5^3} = 5^{\frac{3}{4}} = 5^{\frac{9}{12}} = \sqrt[12]{5^9} & i & \sqrt[6]{7} = 7^{\frac{1}{6}} = 7^{\frac{2}{12}} = \sqrt[12]{7^2} \end{cases}$$

Exercici: Redueix a índex comú $\sqrt[6]{5}$ i $\sqrt[15]{2^2}$:

Operacions amb radicals

Suma i resta de radicals

Només podem **sumar o restar radicals** si, després de simplificar-los i extreure'n els factors, tenen el mateix índex i el mateix radicand, és a dir, si són **semblants**.

Per sumar o restar radicals semblants, sumem o restem els nombres que multipliquen els radicals (els que hi ha davant dels radicals) i deixem invariant el radical.

Exemples:

$$1. \quad 7\sqrt{2} + \sqrt{2} - 3\sqrt{2} = \boxed{5\sqrt{2}}$$

$$2. \quad \sqrt{32} + \sqrt{18} - \sqrt{200} = \sqrt{2^5} + \sqrt{2 \cdot 3^2} - \sqrt{2^3 \cdot 5^2} = 2^2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 2 \cdot 5\sqrt{2} \\ = 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 10\sqrt{2} = \boxed{-3\sqrt{2}}$$

$$3. \quad 3\sqrt{5} + 5\sqrt{20} + \sqrt{125} = 3\sqrt{5} + 5\sqrt{2^2 \cdot 5} + \sqrt{5^3} = 3\sqrt{5} + 10\sqrt{5} + 5\sqrt{5} = \boxed{18\sqrt{5}}$$

Producte i divisió de radicals

Per multiplicar i dividir radicals amb el mateix índex, multipliquem i dividim els radicands, aplicant les propietats:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Si no tenen el mateix índex, cal reduir-les a índex comú (el m.c.m. dels índexs) i després realitzar l'operació.

Exemples:

$$1. \quad \sqrt{7} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{42}$$

$$3. \quad \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{3^3} \cdot \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{3^3 \cdot 5^2} = \sqrt[6]{675}$$

$$2. \quad \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}} = \sqrt{5}$$

$$4. \quad \frac{\sqrt[6]{3^2}}{\sqrt[4]{5}} = \frac{\sqrt[12]{3^4}}{\sqrt[12]{5^3}} = \sqrt[12]{\frac{3^4}{5^3}} = \sqrt[12]{\frac{81}{125}}$$

Exercicis: Realitza les operacions següents:

a) $5\sqrt{5} - 10\sqrt{5} - 2\sqrt{2} =$

b) $2\sqrt{27} + \sqrt{48} + \sqrt{147} - 5\sqrt{20} =$

c) $3\sqrt{12} - 2\sqrt{45} - 5\sqrt{75} =$

$$d) \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{10} =$$

$$e) \sqrt{8} \cdot \sqrt[4]{5} =$$

$$f) \frac{\sqrt[10]{3^3}}{\sqrt[15]{5}} =$$

Sol.:

$$a) -5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}$$

$$b) 17\sqrt{3} - 10\sqrt{5}$$

$$c) -19\sqrt{3} - 6\sqrt{5}$$

$$d) \sqrt[3]{40}$$

$$e) \sqrt[4]{320} = 2\sqrt[4]{20}$$

$$f) \sqrt[30]{\frac{19683}{25}}$$

Productes notables

Els **productes notables** són multiplicacions de binomis que es poden realitzar utilitzant fórmules que faciliten molts càlculs. Vegem els més importants:

Quadrat de la suma

$$(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b) = a^2 + a \cdot b + b \cdot a + b^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

Quadrat de la resta

$$(a-b)^2 = (a-b) \cdot (a-b) = a^2 - a \cdot b - b \cdot a + b^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

Suma per diferència

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 + a \cdot b - b \cdot a - b^2 = a^2 - b^2$$

Nota: $a-b$ s'anomena conjugat de $a+b$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$$

Exemples: Desenvolupa:

$$1. (5+\sqrt{3})^2 = 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 25 + 10\sqrt{3} + 3 = \boxed{28+10\sqrt{3}}$$

$$2. (\sqrt{5}-\sqrt{3})^2 = (\sqrt{5})^2 - 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 5 - 2\sqrt{15} + 3 = \boxed{8-2\sqrt{15}}$$

$$3. (\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2 = 5 - 3 = \boxed{2}$$

Exercicis: Desenvolupa:

a) $(1 + \sqrt{7})^2 =$

b) $(1 - \sqrt{7})^2 =$

c) $(1 + \sqrt{7})(1 - \sqrt{7}) =$

d) $(\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 =$

e) $(3 - \sqrt{6})^2 =$

f) $(\sqrt{10} + \sqrt{3})(\sqrt{10} - \sqrt{3}) =$

Sol.:

a) $8 + 2\sqrt{7}$

b) $8 - 2\sqrt{7}$

c) -6

d) $8 + 2\sqrt{15}$

e) $15 - 6\sqrt{6}$

f) 7

Racionalització

Racionalitzar una fracció que tingui radicals en el denominador és trobar una fracció equivalent a aquesta que no n'hi tingui. A la pràctica, diem que suprimim els radicals del denominador. Estudiarem els casos més freqüents de racionalització:

Racionalització d'una fracció amb una arrel quadrada en el denominador

Per suprimir una **arrel quadrada** del denominador, multipliquem numerador i denominador per la mateixa arrel, operem i simplifiquem el resultat.

Exemples: Racionalitza:

1. $\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \boxed{\frac{5\sqrt{2}}{2}}$

2. $\frac{8}{3\sqrt{6}} = \frac{8\sqrt{6}}{3\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{8\sqrt{6}}{3\cdot 6} = \frac{8\sqrt{6}}{18} = \boxed{\frac{4\sqrt{6}}{9}}$

Racionalització d'una fracció amb una arrel enèsima en el denominador

Per suprimir una **arrel enèsima** del denominador del tipus $\sqrt[n]{a^m}$, multipliquem numerador i denominador per $\sqrt[n]{a^{n-m}}$. Així obtenim una potència enèsima en el radicand de l'arrel del denominador.

POTÈNCIES I RADICALS.

Exemples: Racionalitza:

$$1. \frac{1}{\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5^2}} = \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}} = \boxed{\frac{\sqrt[3]{25}}{5}}$$

$$2. \frac{3}{\sqrt[5]{2^3}} = \frac{3\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^3} \cdot \sqrt[5]{2^2}} = \frac{3\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^5}} = \boxed{\frac{3\sqrt[5]{4}}{2}}$$

Racionalització d'una fracció amb un binomi en el denominador, en què almenys un dels termes és una arrel quadrada

Per suprimir les arrels quadrades d'una suma o resta de dos termes (binomi) en el denominador, multipliquem numerador i denominador pel conjugat del denominador:

o Si el denominador és del tipus $a + b$, multipliquem per $a - b$.

o Si el denominador és del tipus $a - b$, multipliquem per $a + b$.

Exemples: Racionalitza:

$$\frac{3}{4 + \sqrt{10}} = \frac{3(4 - \sqrt{10})}{(4 + \sqrt{10})(4 - \sqrt{10})} = \frac{3(4 - \sqrt{10})}{4^2 - (\sqrt{10})^2} = \frac{3(4 - \sqrt{10})}{6} = \boxed{\frac{4 - \sqrt{10}}{2}}$$

Exercicis: Racionalitza:

a) $\frac{3}{2\sqrt{3}} =$

b) $\frac{2}{\sqrt[4]{3}} =$

c) $\frac{4}{3\sqrt[5]{8}} =$

d) $\frac{2}{\sqrt{3} - \sqrt{7}} =$

e) $\frac{5}{\sqrt{2} + 1} =$

Sol.:

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\frac{2\sqrt[4]{27}}{3}$

c) $\frac{\sqrt[5]{4096}}{6}$

d) $-\frac{\sqrt{3} + \sqrt{7}}{2}$

e) $5\sqrt{2} - 5$

EXERCICIS: POTÈNCIES

1. Calcula:

a) $7^2 =$	g) $7^{-2} =$	m) $7^0 =$	s) $-(-7)^0 =$
b) $(-7)^2 =$	h) $(-7)^{-2} =$	n) $(-7)^0 =$	t) $-(+7)^0 =$
c) $-7^2 =$	i) $-7^{-2} =$	o) $-7^0 =$	u) $-(+7)^3 =$
d) $(-7)^3 =$	j) $7^{-3} =$	p) $7^1 =$	v) $-(+7)^2 =$
e) $-7^3 =$	k) $(-7)^{-3} =$	q) $-(-7)^2 =$	w) $-(-7)^{-2} =$
f) $(+7)^3 =$	l) $-7^{-3} =$	r) $-(-7)^3 =$	x) $-(-7)^{-3} =$

2. Calcula:

a) $\frac{2}{3}^2 =$	f) $\left(-\frac{5}{6}\right)^0 =$	k) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-2} =$
b) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 =$	g) $\left(-\frac{5}{6}\right)^1 =$	l) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-3} =$
c) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 =$	h) $-\left(-\frac{5}{6}\right)^2 =$	m) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-1} =$
d) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 =$	i) $-\left(-\frac{5}{6}\right)^3 =$	n) $\left(-\frac{4}{7}\right)^{-2} =$
e) $\left(+\frac{2}{3}\right)^3 =$	j) $-\left(+\frac{5}{6}\right)^3 =$	o) $\left(-\frac{4}{7}\right)^{-3} =$

3. Simplifica usant les propietats de les potències (donant el resultat com una sola potència) i calcula:

a) $5^5 \cdot 5^3 =$	g) $3^2 \cdot 3^6 \cdot 3^7 =$	m) $(-4)^3 \cdot (-4)^2 =$
b) $(-4)^3 \cdot (-4)^3 \cdot (-4)^2 =$	h) $3^5 \cdot 3^{-2} =$	n) $4^2 \cdot 7^2 =$
c) $5^3 \cdot (-3)^3 \cdot 2^3 =$	i) $2^5 \cdot 4^3 \cdot 16^2 =$	o) $2^3 \cdot 5^2 =$
d) $\frac{11^7}{11^3} =$	j) $\frac{6^7}{6^9} =$	p) $\frac{2^4 \cdot 2^6 \cdot 2^{-1}}{2^2 \cdot 2^5} =$
e) $\frac{8^5 \cdot 3^8 \cdot 8 \cdot 7^5 \cdot 7^{-2}}{3^5 \cdot 7^4 \cdot 8^4} =$	k) $\frac{(-3)^3 \cdot (-3)^6}{(-3)^{10}} =$	q) $\frac{18^3}{3^3} =$
f) $(6^2)^5 =$	l) $\left(\left((-5)^2\right)^3\right)^2 =$	r) $\left((-2)^{-1}\right)^5 =$

4. Treu els parèntesis:

a) $(8yx)^2 =$	c) $(x^3 \cdot b^5 \cdot c)^3 =$	e) $(2 \cdot b^5 \cdot c^{-1})^4 =$
b) $\left(\frac{2}{11}\right)^5 =$	d) $\left(\frac{a^2 \cdot x}{y \cdot z^3}\right)^5 =$	f) $\left(\frac{2a}{7b}\right)^2 =$

SOLUCIONS: POTÈNCIES

1.

a) 49	g) $\frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$	m) 1	s) -1
b) 49	h) $\frac{1}{(-7)^2} = \frac{1}{49}$	n) 1	t) -1
c) -49	i) $-\frac{1}{7^2} = -\frac{1}{49}$	o) -1	u) -343
d) -343	j) $\frac{1}{7^3} = \frac{1}{343}$	p) 7	v) -49
e) -343	k) $\frac{1}{(-7)^3} = -\frac{1}{343}$	q) - (+49) = -49	w) $-\frac{1}{49}$
f) 343	l) $-\frac{1}{7^3} = -\frac{1}{343}$	r) - (-343) = +343	x) $-\frac{1}{-343} = \frac{1}{343}$

2.

a) $\frac{4}{3}$	f) 1	k) $\left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$
b) $\frac{4}{9}$	g) $-\frac{5}{6}$	l) $\left(\frac{7}{4}\right)^3 = \frac{343}{64}$
c) $\frac{4}{9}$	h) $-\frac{25}{36}$	m) $\frac{7}{4}$
d) $-\frac{8}{27}$	i) $-\left(-\frac{125}{216}\right) = \frac{125}{216}$	n) $\left(-\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$
e) $\frac{8}{27}$	j) $-\frac{125}{216}$	o) $\left(-\frac{7}{4}\right)^3 = -\frac{343}{64}$

3.

a) $5^8 = 390.625$	g) $3^{15} = 14.348.907$	m) $(-4)^5 = -1.024$
b) $(-4)^8 = 65.536$	h) $3^3 = 27$	n) $28^2 = 784$
c) $(-30)^3 = -27.000$	i) $2^5 \cdot (2^2)^3 \cdot (2^4)^2 = 2^{19} = 524.288$	o) $8 \cdot 25 = 200 *$
d) $11^4 = 14.641$	j) $6^{-2} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$	p) $2^2 = 4$
e) $\frac{8^2 \cdot 3^3}{7} = \frac{1728}{7} *$	k) $(-3)^{-1} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$	q) $\left(\frac{18}{3}\right)^3 = 6^3 = 216$
f) $6^{10} = 60.466.176$	l) $(-5)^{12} = 244.140.625$	r) $(-2)^{-5} = \frac{1}{(-2)^5} = \frac{1}{-32} = -\frac{1}{32}$

* Els apartats e) i o) no es poden posar com una sola potència.

4. a) $64y^2x^2$ b) $\frac{2^5}{11^5} = \frac{32}{161051}$ c) $x^9b^{15}c^3$ d) $\frac{a^{10}x^5}{y^5z^{15}}$ e) $16b^{20}c^{-4}$ f) $\frac{4a^2}{49b^2}$

EXERCICIS: RADICALS

1. Calcula les arrels següents, en cas que sigui possible:

a) $\sqrt{60} =$

c) $\sqrt{-49} =$

e) $\sqrt[3]{-729} =$

b) $-\sqrt{64} =$

d) $\sqrt[3]{1000} =$

f) $\sqrt[5]{-\frac{1}{100000}} =$

2. Expressa en forma d'arrel:

a) $5^{\frac{1}{4}}$

e) $(-3)^{\frac{1}{5}} =$

i) $6^{\frac{1}{2}} =$

m) $(-6)^{\frac{1}{2}} =$

b) $5^{\frac{3}{4}} =$

f) $(-3)^{\frac{2}{5}} =$

j) $6^{\frac{3}{2}} =$

n) $(-6)^{\frac{4}{2}} =$

c) $-5^{\frac{1}{4}} =$

g) $-(-3)^{\frac{2}{5}} =$

k) $6^{\frac{1}{-2}} =$

o) $(-6)^{\frac{-5}{3}} =$

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}} =$

h) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{5}} =$

l) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{-3}{2}} =$

p) $\left(-\frac{6}{5}\right)^{\frac{2}{3}} =$

3. Expressa en forma de potència:

a) $\sqrt[5]{3^6} =$

d) $\sqrt{8} =$

g) $\sqrt[3]{5} =$

b) $\sqrt[3]{4^6} =$

e) $\sqrt{5^4} =$

h) $\sqrt[3]{-2} =$

c) $\sqrt[3]{(-6)^2} =$

f) $\sqrt{2^2} =$

i) $\sqrt[3]{-5^2} =$

4. Aplicant les propietats de les arrels, posa el resultat com una sola arrel:

a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{10} =$

c) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{-4} =$

e) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}} =$

g) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} =$

b) $\frac{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{-15}} =$

d) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{5}} =$

f) $\sqrt{\sqrt{7}} =$

h) $(\sqrt{2})^3 =$

5. Simplifica aplicant les propietats de les arrels i calcula:

a) $\sqrt{\frac{169}{64}} =$

c) $\sqrt[3]{\frac{8}{125}} =$

e) $\sqrt{7^4 \cdot 5^2 \cdot 3^8} =$

b) $\sqrt{25 \cdot 144} =$

d) $\sqrt[3]{\frac{2^{15} \cdot 3^6}{5^9 \cdot 7^{12}}} =$

6. Simplifica els radicals següents:

a) $\sqrt[4]{4} =$

c) $\sqrt[10]{243} =$

e) $\sqrt[12]{1024} =$

b) $\sqrt[6]{625} =$

d) $\sqrt[9]{64} =$

f) $\sqrt{81} =$

7. Redueix els radicals següents a índex comú:

a) $\sqrt[4]{5}, \sqrt{2}, \sqrt[3]{5}$

b) $\sqrt[5]{5^2}, \sqrt{7}, \sqrt[15]{3^4}$

c) $\sqrt[4]{11^3}, \sqrt[8]{2^7}, \sqrt[6]{7}$

EXERCICIS: RADICALS

8. Extreu fora del radical els factors que sigui possible:

a) $5\sqrt{32} =$

d) $\sqrt[5]{384} =$

b) $\sqrt{\frac{9}{20}} =$

e) $\sqrt[3]{\frac{72}{250}} =$

c) $5\sqrt[3]{128} =$

f) $\sqrt[4]{7^8 \cdot 5^3 \cdot 2^{11}} =$

9. Introdueix els factors sota el signe radical:

a) $5\sqrt{3} =$

c) $3\sqrt[3]{2} =$

e) $5\sqrt[4]{3} =$

b) $\frac{1}{4}\sqrt{2} =$

d) $\frac{2}{5}\sqrt[3]{\frac{1}{4}} =$

10. Efectua els productes següents, simplificant el resultat si és possible:

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[5]{4} =$

c) $\sqrt[15]{3} \cdot \sqrt[6]{7} =$

b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[4]{2} =$

d) $\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[6]{\frac{2}{3}} =$

11. Efectua les sumes i restes següents:

a) $2\sqrt{54} - \sqrt{216} + 5\sqrt{24} =$

b) $5\sqrt{3} + \sqrt{12} - 2\sqrt{75} + 3\sqrt{27} =$

c) $\sqrt[3]{40} - 2\sqrt[3]{135} + 3\sqrt[3]{5} =$

d) $3\sqrt{50} - 2\sqrt{98} + \sqrt{32} =$

e) $\sqrt[3]{250} - 2\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{81} =$

f) $\sqrt{98} + \sqrt{300} - 2\sqrt{72} + \sqrt{50} - 5\sqrt{3} =$

12. Desenvolupa i digues si el resultat és racional o irracional.

a) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 =$

b) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 =$

c) $(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2}) =$

d) $(2\sqrt[3]{7})^3 =$

13. Racionalitza:

a) $\frac{12}{\sqrt{2}} =$

b) $\frac{2}{3\sqrt[4]{2}} =$

c) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} =$

d) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} =$

e) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} =$

14. Realitza les operacions següents, racionalitzant les expressions prèviament:

a) $\frac{5}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{3} =$

b) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3} =$

c) $\frac{1}{3+\sqrt{7}} + \frac{1}{3-\sqrt{7}} =$

d) $\frac{1}{\sqrt{5}+1} + \frac{1}{\sqrt{5}-1} =$

SOLUCIONES: RADICALS

1. a) 7,746 b) -8 c) $\sqrt{-49} \notin \mathbb{R}$ d) 10 e) -9 f) $-\frac{1}{10}$

2.

a) $\sqrt[4]{5}$ e) $\sqrt[5]{-3}$ i) $\sqrt{6}$ m) $\sqrt{-6} \notin \mathbb{R}$
 b) $\sqrt[4]{5^3} = \sqrt[4]{125}$ f) $\sqrt[5]{9}$ j) $\sqrt[6]{6^3} = \sqrt{216}$ n) $\sqrt{(-6)^4} = (-6)^2$
 c) $-\sqrt[4]{5}$ g) $-\sqrt[5]{9}$ k) $\frac{1}{\sqrt{6}}$ o) $\frac{1}{\sqrt[3]{(-6)^5}}$
 d) $\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$ h) $\sqrt[5]{\left(\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt[5]{\frac{4}{25}}$ l) $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{27}{8}}$ p) $\sqrt[3]{\left(-\frac{6}{5}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{36}{25}}$

3.

a) $3^{\frac{6}{5}}$ d) $8^{\frac{1}{2}}$ g) $5^{\frac{1}{3}}$
 b) $4^{\frac{6}{3}} = 4^2$ e) $5^{\frac{4}{2}} = 5^2$ h) $(-2)^{\frac{1}{3}}$
 c) $(-6)^{\frac{2}{3}}$ f) $2^{\frac{2}{2}} = 2$ i) $(-5^2)^{\frac{1}{3}} = -5^{\frac{2}{3}}$

4.

a) $\sqrt{50}$ c) $\sqrt[3]{-12}$ e) $\sqrt{3}$ g) $\sqrt{\frac{3}{10}}$
 b) $\sqrt[3]{\frac{30}{-15}} = \sqrt[3]{-2}$ d) $\sqrt[24]{5}$ f) $\sqrt[4]{7}$ h) $\sqrt{2^3} = \sqrt{8}$

5.

a) $\frac{13}{8}$ c) $\frac{2}{5}$ e) $7^2 \cdot 5 \cdot 3^4$
 b) $5 \cdot 12 = 60$ d) $\frac{2^5 \cdot 3^2}{5^3 \cdot 7^4}$

6.

a) $\sqrt[4]{2^2} = \sqrt{2}$ c) $\sqrt[10]{3^5} = \sqrt{3}$ e) $\sqrt[12]{2^{10}} = \sqrt[6]{32}$
 b) $\sqrt[6]{5^4} = \sqrt[3]{25}$ d) $\sqrt[9]{2^6} = \sqrt[3]{4}$ f) $\sqrt{3^4} = 3^{\frac{4}{2}} = 3^2 = 9$

7.

a) $\sqrt[12]{5^3}, \sqrt[12]{2^6}, \sqrt[12]{5^4}$ b) $\sqrt[30]{5^{12}}, \sqrt[30]{7^{15}}, \sqrt[30]{3^8}$ c) $\sqrt[24]{11^{18}}, \sqrt[24]{2^{21}}, \sqrt[24]{7^4}$

SOLUCIONES: RADICALS

8.

a) $20\sqrt{2}$

d) $2\sqrt[5]{12}$

b) $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{5}}$

e) $\frac{2}{5}\sqrt[3]{\frac{9}{2}}$

c) $20\sqrt[3]{2}$

f) $7^2 \cdot 2^2 \sqrt[4]{5^3 \cdot 2^3} = 196\sqrt[4]{1.000}$

9.

a) $\sqrt{5^2 \cdot 3} = \sqrt{75}$

c) $\sqrt[3]{3^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{54}$

e) $\sqrt[4]{5^4 \cdot 3} = \sqrt[4]{1.875}$

b) $\sqrt{\frac{1}{8}}$

d) $\sqrt[3]{\frac{2^3 \cdot 1}{5^3 \cdot 4}} = \sqrt[3]{\frac{2}{125}}$

10.

a) $\sqrt[10]{2^9}$

c) $\sqrt[30]{151.263}$

b) $\sqrt[12]{2^{17}} = 2\sqrt[12]{2^5}$

d) $\sqrt[6]{\frac{1}{12}}$

11.

a) $10\sqrt{6}$

b) $6\sqrt{3}$

c) $-\sqrt[3]{5}$

d) $5\sqrt{2}$

e) $\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{3}$

f) $5\sqrt{3}$

12.

a) $5 + 2\sqrt{6}$

b) $5 - 2\sqrt{6}$

c) 1

d) 56

13.

a) $6\sqrt{2}$

b) $\frac{\sqrt[4]{2^3}}{3}$

c) $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$

d) $2 + \sqrt{3}$

e) $\frac{\sqrt{14} + \sqrt{10}}{2}$

14.

a) $\frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$

b) $\frac{3\sqrt{2} + 2}{6}$

c) 3

d) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

SOLUCIONS: EXERCICIS DE LA TEORIA

Solucions dels exercicis de la teoria

Potències

Signe d'una potència d'exponent natural

$$(-5)^4 = 625$$

$$-5^4 = -625$$

$$(-5)^3 = -125$$

$$-5^3 = -125$$

Calculadora

$$3^4 = 81$$

$$5^6 = 15.625$$

$$2^{10} = 1.024$$

a) 625

d) -243

g) 279.936

b) 64

e) 1

h) -1.000.000.000

c) 262.144

f) -262.144

i) 59.604,64

Propietats de les potències

a) 2^8

b) 2^2

c) 10^3

d) 2^3

e) 2^{15}

Potència d'exponent enter negatiu

a) $\frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$

b) $5^4 = 625$

c) $\frac{1}{64}$

Radicals

a) 3

b) -3

c) 3

d) $\notin R$

e) -9

f) $\notin R$

Calculadora

$$\sqrt[6]{64} = 2$$

$$\sqrt[4]{2401} = 7$$

$$\sqrt[5]{10} \approx 1,58$$

a) 3

b) 2

c) -2,08

L'arrel com a potència d'exponent fraccionari

1. a) $2^{\frac{1}{8}}$

b) $(-4)^{\frac{1}{3}}$

c) $5^{\frac{3}{5}}$

d) $5^{\frac{1}{3}}$

e) $5^{-\frac{1}{3}}$

2. a) $\sqrt[8]{7^3}$

b) $\sqrt[4]{11}$

c) $\sqrt{-9}$

d) $-\sqrt[5]{6^2}$

e) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

Propietats dels radicals

1. a) $3 \cdot 2 = 6$

b) $\frac{4}{5}$

c) $\sqrt[30]{10} \approx 1,08$

d) $\sqrt{125} \approx 11,18$

2.

a) $\sqrt[10]{3^4}; \sqrt[15]{3^6}; \sqrt[20]{3^8}$

Introducció de factors en un radical

a) $\sqrt{300}$

b) $\sqrt[6]{3^7}$

SOLUCIONS: EXERCICIS DE LA TEORIA

Extracció de factors d'un radical

a) $12\sqrt{6}$ b) $3^3 \cdot 5^2 \cdot \sqrt[9]{3^3 \cdot 5^7}$

Simplificació de radicals

a) $\sqrt[3]{3^5}$ b) 7^3

Reducció a índex comú

a) $\sqrt[30]{5^5}$ a) $\sqrt[30]{2^4}$

6. NOTACIÓ CIENTÍFICA

NOTACIÓ CIENTÍFICA

c) $1.000.000 =$

d) $0,0032 =$

2. Passa de notació científica a forma decimal habitual:

a) $8,123 \cdot 10^{17} =$

b) $3 \cdot 10^{-10} =$

c) $2,15 \cdot 10^{-6} =$

d) $10^{-3} =$

Notació científica i calculadora

Quan operem amb una calculadora científica i el resultat té més xifres de les que caben en la pantalla o hi ha molts zeros a la dreta de la coma, la calculadora expressa aquest resultat directament en notació científica.

Exemple: Efectua l'operació 2^{100} amb la teva calculadora i apunta el que surt a la pantalla:

$= 1,2676506 \cdot 10^{30}$

Nota: En moltes calculadores no apareix el 10. No t'oblides d'escriure'l tu.

També podem introduir a la calculadora valors en notació científica i operar amb ells. Per fer aquesta operació s'utilitza, en la majoria de calculadores, la tecla **EXP**.

Exemples: Introdueix a la calculadora i apunta com es fa:

1. $6,02 \cdot 10^{23} =$

2. $1,6 \cdot 10^{-19} =$

Operacions en notació científica

Suma i resta en notació científica

Per sumar i resta nombres en notació científica, aquests han de tenir la mateixa potència de 10 (els exponents de les potències de 10 han de ser iguals).

- Si els nombres que volem sumar o restar tenen la mateixa potència de 10, sumem o restem els nombres i deixem invariant la potència de 10.

NOTACIÓ CIENTÍFICA

- Si els nombres que volem sumar o restar no tenen la mateixa potència de 10, els haurem d'expressar prèviament com a nombres amb la mateixa potència de 10.

Exemples: Efectua les operacions següents:

1. $6,5 \cdot 10^5 - 3 \cdot 10^5 + 9,25 \cdot 10^5 = (6,5 - 3 + 9,25) \cdot 10^5 = 12,75 \cdot 10^5 = \boxed{1,275 \cdot 10^6}$

2. $1,6 \cdot 10^{-13} + 2,23 \cdot 10^{-13} = \boxed{3,83 \cdot 10^{-13}}$

3. $3,2 \cdot 10^{10} + 1,2 \cdot 10^{12} = 3,2 \cdot 10^{10} + 120 \cdot 10^{10} = 123,2 \cdot 10^{10} = \boxed{1,232 \cdot 10^{12}}$

4. $1,6 \cdot 10^{-8} - 2,23 \cdot 10^{-11} = 1,6 \cdot 10^{-8} - 0,00223 \cdot 10^{-8} = \boxed{1,59777 \cdot 10^{-8}}$

Exercicis: Efectua les operacions següents:

a) $3,8 \cdot 10^7 - 1,5 \cdot 10^7 =$

b) $8,021 \cdot 10^7 - 1,533 \cdot 10^8 + 2,4 \cdot 10^5 =$

c) $8 \cdot 10^{-4} - 9,15 \cdot 10^{-5} + 6,2 \cdot 10^{-6} =$

Sol: a) $2,3 \cdot 10^7$ b) $-7,285 \cdot 10^7$ c) $7,147 \cdot 10^{-4}$

Multiplicació i divisió en notació científica

Per multiplicar i dividir nombres en notació científica, apliquem les propietats de les potències.

Exemples: Efectua les operacions següents:

1. $(6,5 \cdot 10^5) \cdot (-3 \cdot 10^7) = 6,5 \cdot (-3) \cdot 10^{5+7} = -19,5 \cdot 10^{12} = \boxed{-1,95 \cdot 10^{13}}$

2. $5 \cdot 10^{-13} \cdot 5 \cdot 10^5 = 25 \cdot 10^{-13+5} = 25 \cdot 10^{-8} = \boxed{2,5 \cdot 10^{-7}}$

3. $\frac{3,2 \cdot 10^{10}}{1,2 \cdot 10^{12}} = (3,2 : 1,2) \cdot 10^{10-12} = \boxed{2,6 \cdot 10^{-2}}$

4. $\frac{3 \cdot 10^{-8} \cdot 2,5 \cdot 10^5}{5 \cdot 10^3} = \frac{3 \cdot 2,5}{5} \cdot 10^{-8+5-3} = \boxed{1,5 \cdot 10^{-6}}$

Exercicis: Efectua les operacions següents:

a) $(-5 \cdot 10^{-4}) \cdot (-3 \cdot 10^6) =$

NOTACIÓ CIENTÍFICA

$$\text{b)} \frac{8,21 \cdot 10^7}{2 \cdot 10^{10}} =$$

$$\text{c)} \frac{3,47 \cdot 10^{15} \cdot 2 \cdot 10^{-5}}{1,4 \cdot 10^4} =$$

Sol: a) $1,5 \cdot 10^3$ b) $4,105 \cdot 10^{-3}$ c) $4,957 \cdot 10^6$

1. Escribe los números siguientes en notación decimal habitual:

a) $3 \cdot 10^8 =$

c) $8,31 \cdot 10^{-10} =$

e) $5,2 \cdot 10^{-5} =$

g) $3,5 \cdot 10^{12} =$

b) $1,325 \cdot 10^9 =$

d) $6,345821 \cdot 10^{25} =$

f) $7,25 \cdot 10^{-4} =$

h) $6 \cdot 10^{-1} =$

2. Escriu els nombres següents en notació científica:

a) $3.526.498.889.500 =$

d) 350.000.000.000 =

b) 0,0005 =

e) $0,00000000000000000000000025 =$

c) $0,01 =$

f) $453.000 =$

3. Calcula l'expressió decimal de:

a) $10^6 =$

c) $10^{-3} =$

e) $10^{-2} =$

b) $10^{-1} =$

d) $10^{10} =$

f) $10^{-6} =$

4. Expressa en notació científica:

a) 100.000.000 =

c) $10.000 =$

b) $0,001 =$

d) $0,000001=$

5. Calcula usant la calculadora i expressa el resultat en notació científica:

a) $3^{25} =$

b) $12^{20} =$

c) $2:5^{20} =$

6. Efectua les operacions següents (comprova el resultat amb la calculadora):

a) $1,5 \cdot 10^{15} - 9,5 \cdot 10^{15} =$

$$\text{d) } \frac{4,3 \cdot 10^{10}}{3 \cdot 10^{21}} =$$

b) $2,5 \cdot 10^{15} + 3 \cdot 10^{17} =$

$$\text{e) } \frac{1,25 \cdot 10^{12} - 5 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^{10}} =$$

c) $2,5 \cdot 10^{15} \cdot 3 \cdot 10^{-5} =$

7. Calcula quants quilòmetres equivalen a un any llum (distància que recorre la llum en un any) i expressa el resultat en notació científica (la velocitat de la llum és de 300.000 km/s).

SOLUCIONS: NOTACIÓ CIENTÍFICA

1.

- | | |
|-----------------------------------|----------------------|
| a) 300.000.000 | e) 0,000052 |
| b) 1.325.000.000 | f) 0,000725 |
| c) 0,000000000831 | g) 3.500.000.000.000 |
| d) 63.458.210.000.000.000.000.000 | h) 0,6 |

2.

- | | |
|---------------------------------|-------------------------|
| a) $3,5264988895 \cdot 10^{12}$ | d) $3,5 \cdot 10^{11}$ |
| b) $5 \cdot 10^{-4}$ | e) $2,5 \cdot 10^{-21}$ |
| c) 10^{-2} | f) $4,53 \cdot 10^5$ |

3.

- | | |
|--------------|-------------------|
| a) 1.000.000 | d) 10.000.000.000 |
| b) 0,1 | e) 0,01 |
| c) 0,001 | f) 0,000001 |

4.

- | | |
|--------------|--------------|
| a) 10^8 | c) 10^4 |
| b) 10^{-3} | d) 10^{-6} |

5.

- a) $8,47 \cdot 10^{11}$
- c) $3,83 \cdot 10^{21}$
- d) $2,1 \cdot 10^{-14}$

6.

- a) $-8 \cdot 10^{15}$
- b) $3,025 \cdot 10^{17}$
- c) $7,5 \cdot 10^{10}$
- d) $1,43 \cdot 10^{-11}$
- e) 41,5

7. $9,46 \cdot 10^{12}$ km

Solucions dels exercicis de la teoria

1. a) $2,75 \cdot 10^{10}$ c) 10^6
- b) $8,1 \cdot 10^{-21}$ d) $3,2 \cdot 10^{-3}$

2. a) 812.300.000.000.000.000 c) 0,00000215
- b) 0,0000000003 d) 0,001

LOGARITMES

7. LOGARITMES

Si a és un nombre real positiu i diferent de 1 ($a > 0$ i $a \neq 1$), el **logaritme en base a d'un nombre b** és l'exponent al qual s'ha d'eleva a per obtenir b . Es designa amb $\log_a b$ i el nombre b rep el nom d'argument del logaritme.

$$\log_a b = x \leftrightarrow a^x = b$$

↑
base argument

x = l' exponent al qual elevem la base per obtenir l'argument

$$a^{\log_a b} = b \quad \text{"La base elevada al logaritme és igual a l'argument"}$$

De la definició es dedueix que l'argument no pot ser zero ni negatiu, ja que qualsevol potència d'un nombre positiu és positiva:

$$a > 0 \rightarrow a^x > 0 \rightarrow b > 0$$

Exemples:

1. Calcula:

a) $\log_3 9 = 2 \rightarrow 3^2 = \boxed{9}$

e) $\log_7 1 = 0 \rightarrow 7^0 = \boxed{1}$

b) $\log_2 32 = 5 \rightarrow 2^5 = \boxed{32}$

f) $\log_3 \frac{1}{81} = -4 \rightarrow 3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \boxed{\frac{1}{81}}$

c) $\log_8 8 = 1 \rightarrow 8^1 = \boxed{8}$

g) $\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2} \rightarrow 3^{\frac{1}{2}} = \boxed{\sqrt{3}}$

d) $\log_2 2^7 = 7 \rightarrow 2^7 = \boxed{2^7}$

h) $\log_7 \sqrt[9]{7^5} = \frac{5}{9} \rightarrow 7^{\frac{5}{9}} = \boxed{\sqrt[9]{7^5}}$

2. Calcula la x :

a) $\log_x 8 = 3 \rightarrow x^3 = 8 \rightarrow \boxed{x = 2}$

b) $\log_3 x = 2 \rightarrow 3^2 = x \rightarrow \boxed{x = 9}$

Apliquem la definició de logaritme: "La base elevada al logaritme és igual a l'argument"

LOGARITMES

Exercicis:

1. Calcula:

a) $\log_3 27 =$

d) $\log_8 8^3 =$

g) $\log_4 1 =$

b) $\log_5 625 =$

e) $\log_4 \sqrt[3]{16} =$

h) $\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}} =$

c) $\log_2 \sqrt[3]{2} =$

f) $\log_{\frac{1}{2}} 4 =$

2. Calcula el valor de x:

a) $\log_x 81 = 2$

b) $\log_5 x = 3$

c) $\log_3 x = -1$

Logaritmes decimals i neperians

Els logaritmes decimals i neperians són casos particulars de logaritmes:

- El **logaritme decimal** és el logaritme en base 10 i es representa amb **log**.
- El **logaritme neperià** és el logaritme en base e i representa amb **ln**.

Exemples:

1. $\log 1000 = 3 \rightarrow 10^3 = 1000$

2. $\log 0,1 = -1 \rightarrow 10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1$

3. $\ln e^5 = 5 \rightarrow e^5 = e^5$

4. $\ln e = 1$

Logaritmes i calculadora

Amb les tecles log i ln es poden calcular els logaritmes amb la calculadora.

Exemples: Calcula els logaritmes següents amb la calculadora i escriu com es fa:

1. $\log 5 =$

2. $\ln 10 =$

Sol.: 1. 0,699 2. 2,3

LOGARITMES

Propietats dels logaritmes

El logaritme d'un producte és igual a la suma dels logaritmes dels factors.	$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
El logaritme d'un quocient és igual al logaritme del numerador menys el logaritme del denominador.	$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$
El logaritme d'una potència és igual al producte de l'exponent pel logaritme de la base de la potència.	$\log_a b^n = n \log_a b$
El logaritme d'una arrel és igual al logaritme del radicand dividit per l'índex de l'arrel.	$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{\log_a b}{n} = \frac{1}{n} \log_a b$
No existeix el logaritme de 0 o d'un nombre negatiu	$b > 0$
El logaritme de la base és 1	$\log_a a = 1$
El logaritme d'1 és zero, sigui quina sigui la base.	$\log_a 1 = 0$

Exemples:

1. Desenvolupa, aplicant les propietats:

$$\begin{aligned}\log \sqrt[3]{\frac{a^4 \cdot b}{7}} &= \frac{1}{3} \log \left(\frac{a^4 \cdot b}{7} \right) = \frac{1}{3} (\log(a^4 \cdot b) - \log 7) = \frac{1}{3} (\log a^4 + \log b - \log 7) = \\ &= \frac{1}{3} (4 \log a + \log b - \log 7)\end{aligned}$$

2. Expressa com un sol logaritme:

$$\begin{aligned}5 \cdot (3 \ln x + \ln x - 2 \ln x) &= 5 \cdot (\ln x^3 + \ln x - \ln x^2) = 5 \cdot \ln \left(\frac{x^3 \cdot x}{x^2} \right) = \\ &= 5 \cdot \ln x^2 = \ln (x^2)^5 = \ln x^{10}\end{aligned}$$

Exercicis:

a) Desenvolupa, aplicant les propietats:

$$\log \left(\frac{a^2 \cdot b^5}{\sqrt{c}} \right)^3 =$$

LOGARITMES

b) Expressa com un sol logaritme:

$$2 \cdot \left(3 \log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 y - 2 \log_2 x \right) =$$

Canvi de base

Es pot calcular el logaritme d'un nombre en una base a , coneixent el logaritme d'aquest nombre en una altra base, c , utilitzant la fórmula del canvi de base següent:

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}} \rightarrow \text{Si } c = 10 \text{ o } c = e \rightarrow \boxed{\log_a b = \frac{\log b}{\log a} = \frac{\ln b}{\ln a}}$$

Com que amb la calculadora podem obtenir els logaritmes decimals i neperians, usarem la fórmula del canvi de base amb aquests logaritmes per **calcular logaritmes en base qualsevol**.

Exemples: Calcula els següents logaritmes amb la calculadora usant la fórmula del canvi de base. Arrodoneix el resultat fins a les centèsimes. Fes els apartats b) i c):

a) $\log_2 5 = \frac{\log 5}{\log 2} = \frac{\ln 5}{\ln 2} = 2,32$

b) $\log_5 10 =$

c) $\log_{12} 50 =$

SOLUCIONS: LOGARITMES

Exercicis

1. Calcula els següents logaritmes sense fer servir la calculadora:

a) $\log_5 25 =$

f) $\log_6 216 =$

k) $\ln\left(\frac{1}{e}\right) =$

b) $\log_2 8 =$

g) $\log 1000 =$

l) $\log_2\left(\frac{1}{256}\right) =$

c) $\log_{\frac{1}{2}} 1024 =$

h) $\log\left(\frac{1}{10}\right)^5 =$

m) $\log_2 12 - \log_2 6 =$

d) $\log_2 0,5 =$

i) $\ln e^2 =$

n) $\log_{73} 1 =$

e) $\log_2 0 =$

j) $\log_2(-4) =$

o) $\log_2 \sqrt{8} =$

2. Calcula x:

a) $\log_x 5 = -1$

c) $\ln x = \frac{1}{2}$

b) $\log x = 3$

d) $\log_x 216 = 3$

3. Calcula amb la calculadora els següents logaritmes (hauràs de fer un canvi de base):

a) $\log_3 35 =$

c) $\log_{100} 70 =$

e) $\log_{20} 2 =$

b) $\log_2 6 =$

d) $\log_5 50 =$

f) $\log_{50} 25 =$

4. Desenvolupa aplicant les propietats dels logaritmes:

a) $\ln\left(\frac{\sqrt[3]{a} \cdot b}{e}\right)^3 =$

b) $\log\left(\frac{a^4 \cdot \sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{c^2}}\right) =$

5. Expressa com un sol logaritme aplicant les propietats dels logaritmes i simplifica:

a) $\frac{1}{3}(\log_8 a^4 + \log_8 b^8 - \log_8 a - \log_8 b^2) =$

b) $2 \cdot \left(\frac{1}{2} \ln x - 2 \ln y\right) =$

SOLUCIONS: LOGARITMES

1.

- | | | |
|-----------------|-----------------|---|
| a) 2 | f) 3 | k) -1 |
| b) 3 | g) 3 | l) -8 |
| c) -10 | h) -5 | m) $\log_2 \frac{12}{6} = \log_2 2 = 1$ |
| d) -1 | i) 2 | n) 0 |
| e) $\cancel{4}$ | j) $\cancel{4}$ | o) $\log_2 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$ |

2. a) $x = \frac{1}{5}$ b) $x = 1000$ c) $x = \sqrt{e}$ d) $x = 6$

3.

- | | |
|---------|---------|
| a) 3,24 | d) 2,43 |
| b) 2,58 | e) 0,23 |
| c) 0,92 | f) 0,82 |

4. a) $\ln a + 3 \ln b - 3$ b) $4 \log a + \frac{1}{7} \log b - \frac{2}{3} \log c$

5. a) $\log_8(a \cdot b^2)$ b) $\ln \frac{x}{y^4}$

Solucions dels exercicis de la teoria

Logaritmes

- | | | |
|---|---|----|
| 1. a) $\log_3 27 = 3$ | e) $\log_4 \sqrt[3]{16} = \frac{2}{3}$ | |
| b) $\log_5 625 = 4$ | f) $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$ | |
| c) $\log_2 \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3}$ | g) $\log_4 1 = 0$ | |
| d) $\log_8 8^3 = 3$ | h) $\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}$ | |
| 2. a) $\log_x 81 = 2 \rightarrow x = 9$ | b) $\log_5 x = 3 \rightarrow x = 5^3 = 125$ | c) |
| $\log_3 x = -1 \rightarrow x = \frac{1}{3}$ | | |

SOLUCIONS: LOGARITMES

Propietats dels logaritmes

a) $3\left(2\log a + 5\log b - \frac{1}{2}\log c\right)$

b) $\log_3(x^2y)$

Canvi de base

b) 1,43

c) 1,57

TEMA 2: EQUACIONS

1. Equacions de primer grau amb una incògnita.
2. Sistemes d'equacions.
3. Equacions de segon grau amb una incògnita.
4. Equacions irracionals.
5. Equacions exponencials i logarítmiques.
6. Interès simple i compost.

1. EQUACIONS DE PRIMER GRAU AMB UNA INCÒGNITA

Expressions algebraiques

Una **expressió algebraica** (o algèbrica) és una combinació de nombres i lletres units entre ells pels signes de les operacions aritmètiques.

Exemples:

1. $2ab + y + 3z$

2. $x^2 + y^2$

3. $4a + 2b$

4. $7x^2 + 1$

5. $5x$

Nota: Si entre dues lletres o una lletra i un nombre no hi ha cap signe, es considera que és un producte. Per exemple: $2ab = 2 \cdot a \cdot b$

Les expressions algebraiques són molt útils a l'hora de resoldre problemes, ja que ens permeten expressar una part de l'enunciat en llenguatge algebraic (o simbòlic), que és breu i precís, i que ens permet operar.

Exemples: Si x representa l'edat de la Marta, tradueix al llenguatge algebraic les frases següents:

1. La germana de la Marta té tres anys més que ella: $x + 3$

2. La mare de la Marta té el triple d'edat que ella: $3x$

3. El pare de la Marta té el doble d'edat que ella: $2x$

4. El germà de la Marta té la meitat d'anys que ella: $\frac{x}{2}$

5. La cosina de la Marta té 4 anys menys que ella: $x - 4$

Exercici Tradueix al llenguatge algebraic les frases següents::

a) El doble d'un nombre:

b) El triple d'un nombre:

c) La meitat d'un nombre:

d) La cinquena part d'un nombre:

e) La meitat d'un nombre més una unitat:

f) El nombre de dies de x setmanes:

g) El triple d'un nombre menys la seva meitat:

EQUACIONS DE PRIMER GRAU AMB UNA INCÒGNITA.

- h) Dues cinquenes parts d'un nombre:
- i) Repartir una quantitat de diners entre sis germanes:
- j) Dos nombres consecutius:

Valor numèric d'una expressió algebraica

El **valor numèric** d'una expressió algebraica és el nombre que s'obté en substituir les lletres per nombres determinats i efectuar les operacions indicades.

Exemples: Calcula el valor numèric de:

1. $4x$ per a $x = 5 \rightarrow 4 \cdot 5 = \boxed{20}$

2. $x^2 + 1$ per a $x = -5 \rightarrow (-5)^2 + 1 = 25 + 1 = \boxed{26}$

3. $-a^2 + 3b$ per a $a = -2$ i $b = -3 \rightarrow -(-2)^2 + 3 \cdot (-3) = -4 - 9 = \boxed{-13}$

Exercicis: Calcula el valor numèric de:

a) $-3x^3 + 1$ per a $x = -1 \rightarrow$

b) $4x - y$ per a $x = -2$ i $y = -1 \rightarrow$

c) $-x^4 + 3y$ per a $x = -1$ i $y = 0 \rightarrow$

Sol.: a) 4 b) -7 c) -1

Igualtats: identitats i equacions

Quan igualem dues expressions algebraiques, utilitzant el signe igual (=), obtenim una **igualtat algebraica** .

$$\text{Igualtat} \begin{cases} \text{Identitat} \\ \text{Equació} \end{cases}$$

Una igualtat pot ser una **identitat** o una **equació**:

- Una **identitat** és una igualtat algebraica que es verifica sempre, per a qualsevol valor que prenguin les lletres.
- Una **equació** és una igualtat algebraica que només es verifica per a algun o alguns valors de les lletres.

EQUACIONS DE PRIMER GRAU AMB UNA INCÒGNITA.

Exemples:

1. $6x - 2x = 4x$ és una identitat. La igualtat es verifica sempre, per a qualsevol valor que prengui x :

$$\text{Per a } x=1 \rightarrow 6 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 4 \cdot 1 \rightarrow 6 - 2 = 4 \rightarrow 4 = 4$$

$$\text{Per a } x=2 \rightarrow 6 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 4 \cdot 2 \rightarrow 12 - 4 = 8 \rightarrow 8 = 8$$

$$\text{Per a } x=3 \rightarrow 6 \cdot 3 - 2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 \rightarrow 18 - 6 = 12 \rightarrow 12 = 12$$

$\vdots$

2. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ és una identitat. La igualtat es verifica sempre, per a qualsevol valor que prenguin a i b .

3. $2x - 5 = 1$ és una equació. La igualtat només es verifica per a $x = 3$. Si $x \neq 3$, la igualtat no és certa.

3. $2x - 5 = 1$ és una equació. La igualtat només es verifica per a $x = 3$. Si $x \neq 3$, la igualtat no és certa.

$$\text{Per a } x=3 \rightarrow 2 \cdot 3 - 5 \stackrel{?}{=} 1 \rightarrow 6 - 5 \stackrel{?}{=} 1 \rightarrow 1 = 1$$

$$\text{Per a } x=1 \rightarrow 2 \cdot 1 - 5 \stackrel{?}{=} 1 \rightarrow 2 - 5 \stackrel{?}{=} 1 \rightarrow -3 \neq 1$$

$\vdots$

Nomenclatura d'una equació

L'expressió que hi ha a l'esquerra del signe igual s'anomena **primer membre** i la que hi ha a la dreta s'anomena **segon membre**. Els sumands que componen les expressions algebraiques s'anomenen **termes**.

Exemple:

$$\begin{array}{ccc} & \text{Termes} & \\ & \swarrow \downarrow \searrow \downarrow \downarrow & \\ 3x + 5x = 6 + x - 6x & \begin{array}{cc} \underbrace{3x + 5x}_{1r \text{ membre}} & \underbrace{6 + x - 6x}_{2n \text{ membre}} \end{array} & \end{array}$$

Les incògnites d'una equació són les lletres (se solen utilitzar les lletres $x, y, z \dots$)

Tipus d'equacions

Les equacions es classifiquen:

Segons el nombre d'incògnites:

$5x + 2y = -4 \rightarrow$ equació amb dues incògnites

$5x + 2y = -4 \rightarrow$ equació amb dues incògnites

$3x + x = y + 5 + 7z - 1 \rightarrow$ equació amb tres incògnites

Exemples: $3x + x = x + 5 + 7x - 1 \rightarrow$ equació de primer grau

Exemples: $3x + x = x + 5 + 7x - 1 \rightarrow$ equació de primer grau

$$5x^2 + 2x = -4 \rightarrow \text{equació de segon grau}$$

$$3x^3 + x^2 = x + 1 \rightarrow \text{equació de grau 3}$$

La **solució** d'una equació de primer grau és el valor de la incògnita que fa que es verifiqui la igualtat.

La **solució** d'una equació de primer grau és el valor de la incògnita que fa que es verifiqui la igualtat.

Per saber si un nombre donat és solució d'una equació, substituïm el nombre per la incògnita (x) i comprovem si es verifica la igualtat.

Equacions equivalents. Principis d'equivalència

Dues equacions són **equivalents** si tenen les mateixes solucions.

Principis d'equivalència:

EQUACIONS DE PRIMER GRAU AMB UNA INCÒGNITA.

- Si sumem o restem als dos membres d'una equació el mateix nombre o expressió, obtenim una equació equivalent a la primera.
- Si multipliquem o dividim els dos membres d'una equació pel mateix nombre o expressió (diferent de zero), obtenim una equació equivalent a la primera.

Per trobar la solució d'una equació, anem convertint-la en altres d'equivalents més senzilles, aplicant els principis d'equivalència.

Exemple: Aplica els principis d'equivalència a l'equació $7x - 5 = 3x + 3$ i troba'n la solució:

- Sumem 5 a ambdós membres $\rightarrow 7x - 5 + 5 = 3x + 3 + 5 \rightarrow 7x = 3x + 3 + 5^* \rightarrow 7x = 3x + 8$
* (a la pràctica és el mateix que passar el 5 sumant a l'altre membre)
- Restem $3x$ a ambdós membres $\rightarrow 7x - 3x = \cancel{3x} + 8 - \cancel{3x} \rightarrow 7x - 3x^* = + 8 \rightarrow 4x = + 8$
* (a la pràctica és el mateix que passar el $3x$ restant a l'altre membre)
- Dividim ambdós membres per 4 $\rightarrow \frac{4x}{4} = \frac{8}{4} \rightarrow x = \frac{8}{4}^* \rightarrow x = 2$
* (a la pràctica és el mateix que passar el 4 dividint a l'altre membre)

Així doncs, per aplicar els principis d'equivalència, fem servir la regla pràctica següent:

- Podem canviar un terme de membre modificant-ne el signe (si està sumant, hi passa restant, i si està restant, hi passa sumant).
- Si un nombre o una expressió diferent de zero està multiplicant tot un membre, pot passar a l'altre membre dividint-lo. Si està dividint tot un membre, pot passar a l'altre membre multiplicant-lo.

Resolució d'equacions de primer grau amb una incògnita

Resolució d'equacions senzilles

Resoldre una equació és trobar-ne la solució.

Per resoldre una equació de primer grau senzilla (sense parèntesis ni denominadors), seguim els passos següents:

- **Transposem els termes:** Agrupem els termes que tenen x en un membre i els termes numèrics (sense x) en l'altre, modificant el signe d'aquells termes que canviem de membre.

EQUACIONS DE PRIMER GRAU AMB UNA INCÒGNITA.

- **Reduïm els termes semblants:** Sumem o restem (en funció dels signes) els termes que tenen x i els termes numèrics per separat.
- **Aïllem la incògnita:** El coeficient de la x passa dividint a l'altre membre (o multiplicant, si estigués dividint).
- **Fem la prova:** Substituïm la solució per la incògnita en l'equació de l'enunciat i comprovem que es verifica la igualtat.

Exemples: Resol les equacions següents:

1. $2x + 5x + 2 = 3x - x + 10 + 7$

- Transposem els termes:

$$2x + 5x - 3x + x = 10 + 7 - 2$$

- Reduïm els termes semblants:

$$8x - 3x = 17 - 2$$

$$5x = 15$$

- Aïllem la incògnita:

$$x = \frac{15}{5} = 3 \rightarrow x = 3$$

- Fem la prova:

$$2 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 2 = 3 \cdot 3 - 3 + 10 + 7$$

$$6 + 15 + 2 = 9 - 3 + 10 + 7$$

$$23 = 23$$

2. $4x - 2 - x - 5 = 10x + 28$

- Transposem els termes:

$$4x - x - 10x = 28 + 2 + 5$$

- Reduïm els termes semblants:

$$4x - 11x = +35$$

$$-7x = 35$$

- Aïllem la incògnita:

$$x = \frac{35}{-7} = -5 \rightarrow x = -5$$

- Fem la prova:

$$4 \cdot (-5) - 2 - (-5) - 5 = 10 \cdot (-5) + 28$$

$$-20 - 2 + 5 - 5 = -50 + 28$$

$$-22 = -22$$

Exercicis: Resol les equacions següents i fes-ne la prova:

a) $2x + 2x - 10 + 5 = 5x - 1$

Sol.: -4

EQUACIONS DE PRIMER GRAU AMB UNA INCÒGNITA.

b) $-8 + x - 6x - 1 = -3x - 6 - 10$

Sol.: $\frac{7}{2}$

c) $2 - x + 2x = -3x + 4 - x - 2$

Sol.: 0

Casos especials. Discussió de les solucions d'una equació de primer grau amb una incògnita

Resol les equacions dels exemples següents i digues què tenen d'especial.

Exemples:

1. $x + 3x + 2 = 4x + 10 - 5$

2. $8 + 3x + 2 = 4x + 10 - x$

EQUACIONS DE PRIMER GRAU AMB UNA INCÒGNITA.

- 1.** Quan resollem l'equació de l'exemple 1, obtenim l'expressió $0x = 3$. En aquest cas, l'equació no té solució, atès que no hi ha cap nombre que en multiplicar-lo per 0 sigui igual a 3. Tampoc podem aïllar la x , ja que no es pot dividir per 0:

$$x = \frac{3}{0} = \text{no és possible}$$

- 2.** Quan resollem l'equació de l'exemple 2, obtenim l'expressió $0x = 0$. En aquest cas, hi ha infinites solucions, ja que en multiplicar qualsevol nombre per 0 el resultat és 0. En realitat, aquesta igualtat no és una equació, sinó una identitat, ja que es verifica sempre.

En general, quan resollem una equació de primer grau amb una incògnita:

- Si obtenim $ax = b$, amb $a \neq 0$ (b pot ser 0)*, l'equació té una **solució**.
- Si obtenim $0x = b$, amb $b \neq 0$, l'equació **no té solució**.
- Si obtenim $0x = 0$, hi ha **infinites solucions** i la igualtat no és una equació, sinó una **identitat**.

Nota: * Si obtenim $ax = 0$ amb $a \neq 0$, sí que té solució, i aquesta és 0: $x = \frac{0}{a} = 0$.

Resolució d'equacions amb parèntesis

Per **resoldre una equació amb parèntesis**, traiem els parèntesis aplicant la propietat distributiva i després procedim com en el cas anterior.

Exemple: Resol l'equació següent i fes-ne la prova:

$$2(x + 5) + x = -3(6 - 5x) + 16$$

- Traiem els parèntesis:

$$2x + 10 + x = -18 + 15x + 16$$

- Resolem l'equació com en el cas anterior:

$$2x + x - 15x = -18 + 16 - 10$$

$$-12x = -12$$

$$x = \frac{-12}{-12} = 1 \rightarrow x = 1$$

- Fem la prova:

$$2(1 + 5) + 1 = -3(6 - 5 \cdot 1) + 16$$

$$2 \cdot 6 + 1 = -3 \cdot 1 + 16$$

$$\rightarrow 13 = 13$$

EQUACIONS DE PRIMER GRAU AMB UNA INCÒGNITA.

Exercici: Resol l'equació següent i fes-ne la prova: $-4(x-2) - 2x - (3-2x) = -3$

Sol.: 2

Resolució d'equacions amb denominadors

Per resoldre una equació de primer grau amb denominadors, hem de treure els denominadors. Per fer-ho, multipliquem els dos membres de l'equació pel *m.c.m.* dels nombres que hi ha en els denominadors.

Exemple: Resol l'equació següent i fes-ne la prova:

$$\frac{x-4}{6} - \frac{x+6}{4} = \frac{-x+4}{2} \quad mcm(6,4,2)=12$$

- Multipliquem tots els termes per 12:

$$12 \cdot \frac{x-4}{6} - 12 \cdot \frac{x+6}{4} = 12 \cdot \frac{-x+4}{2}$$

- Fem les divisions i traïem els denominadors:

$$2(x-4) - 3(x+6) = 6(-x+4)$$

- Traïem els parèntesis i resolem:

$$2x - 8 - 3x - 18 = -6x + 24$$

$$2x - 3x + 6x = +24 + 8 + 18$$

$$5x = 50$$

$$x = \frac{50}{5} = 10 \rightarrow \boxed{x=10}$$

Prova:

$$\frac{10-4}{6} - \frac{10+6}{4} = \frac{-10+4}{2}$$

$$\frac{6}{6} - \frac{16}{4} = \frac{-6}{2} \rightarrow 1 - 4 = -3 \rightarrow -3 = -3$$

EQUACIONS DE PRIMER GRAU AMB UNA INCÒGNITA.

Exercici: Resol l'equació següent i fes-ne la prova:

$$\frac{x-4}{5} - \frac{x+11}{10} = \frac{3x+5}{2} - 3$$

Sol.: -1

En general, per resoldre una equació de primer grau amb una incògnita, seguim els passos següents:

- Traiem els denominadors.
- Traiem els parèntesis.
- Transposem els termes.
- Aillem la incògnita.

Equacions en forma de proporció

Per resoldre una equació en forma de **proporció** (igualtat entre dues raons), n'hi ha prou de multiplicar en creu (els denominadors passen multiplicant a l'altre membre).

Exemple: Resol l'equació següent i fes-ne la prova:

$$\frac{x-4}{x+1} = \frac{7}{2}$$

$$2(x-4) = 7(x+1)$$

$$2x-8 = 7x+7 \rightarrow 2x-7x = 7+8$$

$$-5x = 15 \rightarrow x = \frac{15}{-5} = -3 \rightarrow \boxed{x = -3}$$

Prova:

$$\frac{-3-4}{-3+1} = \frac{7}{2} \rightarrow \frac{-7}{-2} = \frac{7}{2} \rightarrow \frac{7}{2} = \frac{7}{2}$$

EQUACIONS DE PRIMER GRAU AMB UNA INCÒGNITA.

Exercici: Resol l'equació següent i fes-ne la prova:

$$\frac{x-14}{x} = -\frac{5}{2}$$

Sol.: 4

Resolució de problemes

Per resoldre un problema fent servir equacions de primer grau amb una incògnita, podem seguir els passos següents:

- Llegim atentament l'enunciat i diferenciem les dades que ens donen de les que ens demanen.
- Utilitzem la lletra x per representar la incògnita, és a dir, allò que ens demana el problema. Si el problema ens demana més d'una dada, representem amb x una de les dades i les altres les expressem en funció de x .
- Si cal, fem dibuixos, taules, esquemes...
- Plantegem l'equació, traduint al llenguatge algebraic les parts de l'enunciat que relacionin la incògnita amb les dades.
- Resolem l'equació plantejada.
- Expressem la solució adequadament.
- Comprovem que la solució obtinguda verifica les condicions de l'enunciat del problema.

EQUACIONS DE PRIMER GRAU AMB UNA INCÒGNITA.

Exemples de problemes

- 1.** Si la meva mare em donés un terç dels diners que tinc ara i el meu pare em donés 100 €, tindria 160 €. Quants diners tinc ara?

- Anomenem x a allò que ens demana el problema (la incògnita):

x = diners que tinc ara

- Plantegem l'equació:

$$x + \frac{x}{3} + 100 = 160$$

- Resolem l'equació:

$$3x + 3 \cdot \frac{x}{3} + 3 \cdot 100 = 3 \cdot 160$$

$$3x + x + 300 = 480$$

$$3x + x = 480 - 300$$

$$4x = 180$$

$$x = \frac{180}{4} = 45 \rightarrow \boxed{x = 45}$$

- Expressem la solució adequadament:

Ara tinc 45 €

- Comprovem la solució:

$$45 + 15 + 100 = 160$$

- 2.** La Marina té el doble d'edat que en Joan. Entre tots dos tenen 21 anys. Quants anys té cadascú?

- Anomenem x l'edat d'en Joan i expressem la de la Marina en funció de la d'en Joan:

x = edat d'en Joan

$2x$ = edat de la Marina ("té el doble d'edat que en Joan")

- Plantegem l'equació: $x + 2x = 21$

- Resolem l'equació: $3x = 21 \rightarrow x = \frac{21}{3} = 7 \rightarrow \boxed{x = 7}$

- Expressem la solució adequadament:

En Joan té 7 anys i la Marina té 14 anys

- Comprovem la solució:

14 és el doble de 7; 7 i 14 sumen 21.

EQUACIONS DE PRIMER GRAU AMB UNA INCÒGNITA.

- 3.** Al congelador tenim gelats de maduixa, de xocolata i de torró. Sabem que hi ha el triple de gelats de xocolata que de maduixa i dos gelats més de maduixa que de torró. També sabem que en total hi ha 23 gelats. Quants gelats tenim de cada?

- Anomenem x el nombre de gelats de torró i expressem la resta en funció de x . Per fer-ho, traduïm a llenguatge algebraic el que diu el problema:

$$x = \text{gelats de torró}$$

$$x + 2 = \text{gelats de maduixa} \quad (\text{"dos més de maduixa que de torró"})$$

$$3 \cdot (x + 2)^* = \text{gelats de xocolata} \quad (\text{"el triple de xocolata que de maduixa"})$$

^{*}(Nota: Compte amb el parèntesi!! $\rightarrow 3x + 2$ seria incorrecte!)

- Plantegem l'equació:

$$x + x + 2 + 3(x + 2) = 23$$

- Resolem l'equació:

$$x + x + 2 + 3(x + 2) = 23$$

$$x + x + 2 + 3x + 6 = 23$$

$$x + x + 3x = 23 - 2 - 6$$

$$5x = 15 \rightarrow x = \frac{15}{5} = 3 \rightarrow \boxed{x = 3}$$

- Expressem la solució adequadament:

3 gelats de torró

5 gelats de maduixa

15 gelats de xocolata

- Comprovem la solució:

$$5 = 3 + 2$$

$$15 = 3 \cdot 5$$

$$3 + 5 + 15 = 23$$

EQUACIONS DE PRIMER GRAU AMB UNA INCÒGNITA.

4. Troba tres nombres consecutius que sumen 39.

- Anomenem x el més petit dels tres nombres que ens demanen i expressem els altres dos nombres en funció de x :

$$x = \text{primer nombre}$$

$$x + 1 = \text{segon nombre}$$

$$x + 2 = \text{tercer nombre}$$

- Plantegem l'equació: $x + x + 1 + x + 2 = 39$
- Resolem l'equació:

$$x + x + x = 39 - 1 - 2$$

$$3x = 36 \rightarrow x = \frac{36}{3} = 12 \rightarrow \boxed{x = 12}$$

- Expressem la solució adequadament:

Els tres nombres són:

12, 13 i 14

- Comprovem la solució:

$$12, 13 \text{ i } 14 \text{ són consecutius i sumen } 39: 12 + 13 + 14 = 39$$

5. Una mare i una filla tenen 42 i 17 anys, respectivament. Quants anys han de passar perquè l'edat de la mare sigui el doble de l'edat de la filla?

- Fem un quadre: x = anys que han de passar

	Ara	D'aquí a x anys
Edat de la mare	42	$42 + x$
Edat de la filla	17	$17 + x$

- Plantegem l'equació: $42 + x = 2(17 + x)$

- Resolem l'equació:

$$42 + x = 34 + 2x$$

$$42 - 34 = 2x - x \rightarrow \boxed{x = 8}$$

- Expressem la solució adequadament:

Hauran de passar 8 anys

- Comprovem la solució:

D'aquí a 8 anys la mare tindrà 50 anys i la filla en tindrà 25.

50 és el doble de 25.

EXERCICIS: EQUACIONS DE PRIMER GRAU AMB UNA INCÒGNITA.

1. Resol les equacions **senzilles** següents i fes-ne la prova:

a) $2x - 5 - x + 2 = 5x - 11$

b) $x - 5 + 9 = 5x - 2x + 2$

c) $4x - x + 2 + 5 = 10x - 28$

d) $5x - 4 - x = -3 + 2x + 1$

e) $x - 7x + 11 = -x - 3x + 10 - 5$

f) $2x + 10 - 5 = -3x$

g) $x + 2x - 10 + 5 = 5x - 1$

h) $3x + 5 - x = 2x + 10 - 5$

i) $3x - 2 + x = 4x + 2$

j) $-2 - 2x + 4 = 4x + 2$

k) $40 = 5x - 8 + x$

l) $-3x + 5 - 8 + 8x - x = -5x + 10x$

m) $4x = 7x + 10$

n) $2x + 5 = -10$

o) $1 = -6x - 3 + 11x$

p) $4x - 3x + 10 - 1 = 4x + 10$

q) $x + 10 - 3x = -2x + 10 - 5$

r) $8x - 3x + 5 = 10x + 5 - 5x$

2. Resol les equacions amb **parèntesis** següents i fes-ne la prova:

a) $5(4x - 3) - 2x = x - 2(x - 2) + 19$

b) $-3(1 - 3x) = 3 - 2(1 - x) - 18$

c) $2(x + 3) = 5 - (2x + 1) + 6$

d) $-(1 - x) - 5(3x + 7) = -36$

e) $3x - 3(x + 1) + 2 = -15 - 3x$

f) $1 - 8(2x - 1) - x = 3(x - 2)$

g) $-5(x + 1) + 3x = -(x + 1) - 10$

h) $2x - 6(x - 1) = 13 - 3(1 - 2x)$

i) $-7(x - 1) = 5 - (-x + 2)$

j) $-5(x + 1) + 2 = -5x - 3$

3. Resol les equacions amb **denominadors** següents i fes-ne la prova:

a) $\frac{x+3}{2} - \frac{x-5}{4} = 5$

b) $\frac{4x+10}{5} = \frac{2x+1}{3} + 1$

c) $\frac{-x-2}{4} - \frac{6x-2}{5} = -3$

d) $\frac{4(x-1)}{10} - \frac{8-x}{12} = 2x+5$

e) $\frac{2(x+1)}{3} - \frac{5(x+1)}{2} = \frac{x}{5} - 12$

f) $\frac{1}{4}(4x+2) + \frac{1}{6}(3-6x) = 1$

g) $\frac{x}{4} - \frac{2(x+1)}{2} = x-1$

h) $\frac{2x+1}{2} - x = 5$

i) $\frac{x+5}{4} - \frac{2}{3} = \frac{x+3}{2}$

j) $\frac{2}{5}x - \frac{1}{15} = \frac{1}{3}x - x + \frac{1}{5}$

4. Resol les equacions en forma de **proporció** següents i fes-ne la prova:

a) $\frac{x+3}{3} = \frac{5x+20}{10}$

b) $\frac{2(x+1)}{5} = \frac{x+3}{3}$

c) $\frac{2x-3}{2} = \frac{4x-1}{4}$

d) $\frac{5x+3}{2(x+1)} = \frac{1}{2}$

e) $\frac{3}{x} = \frac{4}{x+1}$

f) $\frac{2}{x-3} = -\frac{4}{x+6}$

SOLUCIONS: EQUACIONS DE PRIMER GRAU AMB UNA INCÒGNITA.

1.

a) $x = 2$

b) $x = 1$

c) $x = 5$

d) $x = 1$

e) $x = 3$

f) $x = -1$

g) $x = -2$

h) $0x = 0$ Identitat

i) $0x = 4$ No té solució

j) $x = 0$

k) $x = 8$

l) $x = -3$

m) $x = -\frac{10}{3}$

n) $x = \frac{-15}{2}$

o) $x = \frac{4}{5}$

p) $x = -\frac{1}{3}$

q) $0x = -5$ No té solució

r) $0x = 0$ Identitat

2.

a) $x = 2$

b) $x = -2$

c) $x = 1$

d) $x = 0$

e) $x = -\frac{14}{3}$

f) $x = \frac{3}{4}$

g) $x = 6$

h) $x = -\frac{2}{5}$

i) $x = \frac{1}{2}$

j) $0x = 0$ Identitat

3.

a) $x = 9$

b) $x = -5$

c) $x = 2$

d) $x = -4$

e) $x = 5$

f) $0x = 0$ Identitat

g) $x = 0$

h) $0x = 9$ No té solució

i) $x = -\frac{11}{3}$

j) $x = \frac{1}{4}$

4.

a) $x = -6$

b) $x = 9$

c) $0x = 10$ No té solució

d) $x = -\frac{1}{2}$

e) $x = 3$

f) $x = 0$

Solucions dels exercicis de la teoria

Expressions algebraiques

a) $2x$

b) $3x$

c) $\frac{x}{2}$

d) $\frac{x}{5}$

e) $\frac{x}{2} + 1$

f) $7x$

g) $3x - \frac{x}{2}$

h) $\frac{2}{5}x$

i) $\frac{x}{6}$

j) $x \text{ i } x+1$

PROBLEMES: EQUACIONS DE PRIMER GRAU AMB UNA INCÒGNITA.

Problemes

1. Si al triple d'un nombre li sumem 5 unitats, el resultat és 50. Quin és aquest nombre?
2. Si al quàdruple d'un nombre li restem 30 unitats, el resultat és 78. Quin és aquest nombre?
3. Si a la meitat d'un nombre li sumem 8 unitats, el resultat és 70. Quin és aquest nombre?
4. Si a la tercera part d'un nombre li restem 6 unitats, el resultat és 25. Quin és aquest nombre?
5. Si a la quarta part d'un nombre li sumem 25 unitats, el resultat és 65. Troba aquest nombre.
6. Si a la meitat d'un nombre li sumem la seva cinquena part, el resultat és 91. Quin és aquest nombre?
7. Troba dos nombres consecutius que sumen 47.
8. Si dupliquem la quantitat de diners que tenim ara i hi afegim 150 €, tindrem 400 €. Quants diners tenim ara?
9. Troba dos nombres que sumen 135 i que un sigui 25 unitats més petit que l'altre.
10. En una granja hi ha 800 animals entre porcs i gallines. Si hi ha el triple de gallines que de porcs, quants porcs i quantes gallines hi ha a la granja?
11. En una classe de 24 alumnes hi ha cinc vegades més noies que nois. Quants nois hi ha? Quantes noies hi ha?
12. En una escola treballen 35 professors/res. Si hi ha 15 professores més que professors, quantes professores i quants professors hi ha?
13. La Carla i en Pere mengen 6 kg de fruita a la setmana entre tots dos. Si sabem que la Carla menja la quarta part de fruita que en Pere, quants quilos de fruita menja cadascú?
14. En una caixa hi ha 21 iogurts. Si hi ha la meitat de iogurts de maduixa que de plàtan, quants iogurts de maduixa hi ha? I de plàtan?
15. En Marc i la Martina tenen 24 anys entre tots dos. Si en Marc és sis anys més gran que la Martina, quants anys té cadascú?
16. La germana d'en Marcel té 10 anys menys que ell, i la seva mare té el doble d'anys que ell. Si les edats de tots tres sumen 90 anys, quants anys té cadascú?

PROBLEMES: EQUACIONS DE PRIMER GRAU AMB UNA INCÒGNITA.

17. La Joana, la Marta i en Miquel tenen 80 anys entre tots tres. Si la Marta té nou anys més que la Joana i en Miquel té 1 any menys que la Marta, quants anys té cadascú?
18. Tres germanes es reparteixen 200 €. La petita es queda el triple d'euros que la mitjana i la gran se'n queda tants com les altres dues juntes. Quants diners es queda cadascuna?
19. En Jofre, en Joan i l'Aina volen comprar un regal que val 120 € a un amic. L'Aina hi posa 20 € més que en Joan i en Jofre hi posa la meitat del que posa en Joan. Quants euros hi posa cadascú?
20. Una noia fa cicloturisme durant tres dies. Si cada dia recorre 15 km més que el dia anterior i en total recorre 228 km, quants quilòmetres recorre cada dia?
21. Tenim 19 kg de fruita entre taronges, plàtans i pomes. Si tenim 3 kg més de taronges que de pomes i el doble de plàtans que de taronges, quants quilos de cada classe de fruita tenim?
22. La Mariona s'ha llegit un llibre de 200 pàgines en tres dies. El segon dia ha llegit 20 pàgines més que el primer dia i el tercer dia n'ha llegit el triple que el segon dia. Quantes pàgines ha llegit cada dia?
23. Quatre amigues fan una obra de teatre i es reparteixen els diners que guanyen amb l'actuació en funció del paper que interpreta cadascuna. La primera s'emporta la meitat dels diners que guanyen, la segona se n'emporta una sisena part, la tercera se n'emporta una vuitena part i l'última s'emporta 50 €. Quants diners guanyen amb l'actuació?
24. La Pepa té deu anys més que la Laura i fa cinc anys la seva edat era el doble de la de la Laura. Quants anys té cadascuna?
25. La Noa té sis anys menys que en Ferran i d'aquí a dos anys l'edat d'en Ferran serà el triple de la de la Noa. Quants anys té cadascú?
26. En Josep i l'Andrea tenen 17 i 11 anys, respectivament. Quants anys fa que l'edat d'en Josep era el doble que la de l'Andrea?

PROBLEMES: EQUACIONS DE PRIMER GRAU AMB UNA INCÒGNITA.

Solucions

1. 15.
2. 27.
3. 124.
4. 93.
5. 160.
6. 130.
7. 23 i el 24.
8. Tenim 125 €.
9. 80 i 55.
10. 200 porcs i 600 gallines.
11. 4 nois i 20 noies.
12. 10 professors i 25 professores.
13. Pere: 4,8 kg; Carla: 1,2 Kg
14. Hi ha 7 iogurts de maduixa i 14 iogurts de plàtan.
15. Marc: 15 anys; Martina: 9 anys.
16. Marcel: 25 anys; germana: 15 anys; mare: 50 anys.
17. Joana: 21 anys; Marta: 30 anys; Miquel: 29 anys.
18. Mitjana: 25 €; petita: 75 €; gran: 100 €.
19. Joan: 40 €; Aina: 60 €; Jofre: 20 €.
20. 1r dia: 61 km; 2n dia: 76 km; 3r dia: 91 km.
21. Pomes: 2,5 kg; taronges: 5,5 kg; plàtans: 11 kg.
22. 1r dia: 24 pàg.; 2n dia: 44 pàg.; 3r dia: 132 pàg.
23. Guanyen 240 €..
24. La Pepa té 25 anys i la Laura en té 15.
25. La Noa té 1 any i en Ferran en té 7.
26. Fa 5 anys.

2. SISTEMES D'EQUACIONS

Solucions d'equacions lineals amb dues incògnites

Una equació lineal (de primer grau) amb dues incògnites té infinites solucions.

Exemples:

1. L'equació amb dues incògnites $x + y = 5$ té per solucions:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=5 \end{cases}; \begin{cases} x=5 \\ y=0 \end{cases}; \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}; \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}; \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}; \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}; \begin{cases} x=-1 \\ y=6 \end{cases}; \begin{cases} x=-2 \\ y=7 \end{cases}; \begin{cases} x=-5 \\ y=10 \end{cases} \dots$$

Així podem continuar trobant més solucions. Té infinites solucions (la qual cosa no vol dir que tot parell de nombres sigui solució)

2. L'equació amb dues incògnites $2x + y = 5$ té per solucions:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=5 \end{cases}; \begin{cases} x=5 \\ y=-5 \end{cases}; \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}; \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}; \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}; \begin{cases} x=4 \\ y=-3 \end{cases}; \begin{cases} x=-1 \\ y=7 \end{cases}; \begin{cases} x=-2 \\ y=9 \end{cases}; \begin{cases} x=-3 \\ y=11 \end{cases} \dots$$

Així podem continuar trobant més solucions. Té infinites solucions.

Exercicis:

1. Troba cinc solucions de l'equació $2x - y = 2$

2. Digues si el parell de valors $x = 3$ i $y = 4$ és solució de les equacions següents:

a) $x + y = 10$

b) $3x + y = 13$

c) $x - y = 1$

d) $x - y = -$

1

Solucions d'un sistema de dues equacions lineals amb dues incògnites

Dues equacions de primer grau amb dues incògnites formen un sistema d'equacions lineals.

Una **solució d'un sistema** és una solució comuna a totes les equacions del sistema. En el cas d'un sistema amb dues equacions, ha de ser solució de les dues equacions.

Exemples:

1. La solució del sistema $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$ és $x = 6$ i $y = 4$, ja que verifica les dues equacions:

$$\begin{cases} 6 + 4 = 10 \\ 6 - 4 = 2 \end{cases}$$

La solució és **única**. No hi ha cap altre parell de nombres que verifiqui les dues equacions. Hi ha infinits parells de nombres que verifiquen la primera equació (que la seva suma sigui 10) i infinits parells de nombres que verifiquen la segona equació (que la seva resta sigui 2), però només hi ha un parell de nombres (6 i 4) que verifiquen les dues equacions a la vegada (que la seva suma sigui 10 i la seva resta sigui 2).

2. La solució del sistema $\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x - 3y = 10 \end{cases}$ **és $x = 8$ i $y = 2$** , ja que verifica les dues equacions:

$$\begin{cases} 8 + 2 = 10 \\ 2 \cdot 8 - 3 \cdot 2 = 10 \end{cases}$$

En aquest cas, també la solució és **única**. És l'únic parell de nombres que verifica les dues equacions.

3. El sistema $\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x + 2y = 20 \end{cases}$ **té infinites solucions**, ja que són dues equacions equivalents (la segona equació s'obté multiplicant la primera per 2). En aquest cas, tots els parells de nombres que són solució de la primera equació ho són també de la segona.

4. El sistema $\begin{cases} x + y = 10 \\ x + y = 5 \end{cases}$ **no té solució**, ja que no hi ha cap parell de nombres la suma dels quals sigui 10 i 5 a la vegada.

Exercici: Digues si el parell de valors $x = 3$ i $y = -2$ és solució dels sistemes següents:

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x - y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y = 8 \\ -x - y = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$

Classificació dels sistemes

Hem vist que un sistema de dues equacions amb dues incògnites pot tenir una solució, pot tenir infinites solucions i pot no tenir solució. En funció del nombre de solucions, els sistemes es classifiquen de la manera següent:

$$\text{SISTEMA} \begin{cases} \text{COMPATIBLE: té solució} \begin{cases} \text{DETERMINAT: té una única solució} \\ \text{INDETERMINAT: té infinites solucions} \end{cases} \\ \text{INCOMPATIBLE: no té solució} \end{cases}$$

Resolució de sistemes de dues equacions lineals amb dues incògnites

Un sistema es pot resoldre algebraicament o gràficament.

Per resoldre un sistema algebraicament, hi ha tres mètodes:

- Mètode de reducció.
- Mètode de substitució.
- Mètode d'igualació.

Mètode de reducció

Per resoldre un sistema per **reducció**, seguim els passos següents:

- Trobem un sistema equivalent al donat en el qual una incògnita (que tant pot ser la x com la y) tingui el **mateix coeficient en les dues equacions, però amb el signe canviat**, de manera que en sumar-les es redueixi aquesta incògnita.

Per fer-ho, si cal, multipliquem una equació per un nombre, o multipliquem les dues equacions, cadascuna pel nombre que correspongui. El coeficient que busquem serà el m.c.m dels dos coeficients.

A vegades, no és necessari fer aquest pas perquè ja hi ha una incògnita que té el mateix coeficient en les dues equacions, però amb el signe canviat.

- **Sumem** les dues equacions per **reduir** una incògnita.
- **Resolem l'equació** que en resulta, que té només una incògnita. Ja tindrem el valor d'una incògnita.
- **Calculem el valor de l'altra incògnita**, substituint en qualsevol de les dues equacions de l'enunciat la incògnita que hem calculat pel seu valor.
- Fem la **prova**, substituint els valors obtinguts en les dues equacions de l'enunciat i comprovant que es verifiquin les dues igualtats.

SISTEMES D'EQUACIONS

Exemples: Resol els sistemes següents per **reducció**:

1.

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 6 \end{cases}$$

- Sumem les dues equacions:

$$\begin{array}{r} x + y = 10 \\ x - y = 6 \\ \hline 2x \quad = 16 \end{array}$$

- Resolem l'equació:

$$x = \frac{16}{2} = 8 \rightarrow \boxed{x = 8}$$

- Calculem el valor de l'altra incògnita:

$$\begin{cases} x + y = 10 \xrightarrow{x=8} 8 + y = 10 \rightarrow y = 10 - 8 = 2 \rightarrow \boxed{y = 2} \\ x - y = 6 \end{cases}$$

- Fem la **prova**:

Substituïm x per **8** i y per **2** en el sistema de l'enunciat i comprovem que es verifiquen les **dues** igualtats:

$$\begin{cases} 8 + 2 = 10 \rightarrow 10 = 10 \\ 8 - 2 = 6 \rightarrow 6 = 6 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x - 3y = -10 \end{cases}$$

- Multipliquem la primera equació per 3. Així, la y tindrà el mateix coeficient en les dues equacions, però amb el signe canviat (3 i -3):

$$\begin{cases} x + y = 10 \xrightarrow{\cdot 3} 3x + 3y = 30 \\ 2x - 3y = -10 \end{cases}$$

- Sumem les dues equacions i resolem l'equació:

$$\begin{array}{r} 3x + 3y = 30 \\ 2x - 3y = -10 \\ \hline 5x \quad = 20 \end{array} \rightarrow x = \frac{20}{5} = 4 \rightarrow \boxed{x = 4}$$

- Calculem el valor de l'altra incògnita:

$$\begin{cases} x + y = 10 \xrightarrow{x=4} 4 + y = 10 \rightarrow y = 10 - 4 = 6 \rightarrow \boxed{y = 6} \\ 2x - 3y = -10 \end{cases}$$

- Fem la **prova**:

Substituïm x per **4** i y per **6** en el sistema de l'enunciat i comprovem que es verifiquen les **dues** igualtats:

$$\begin{cases} 4 + 6 = 10 \\ 2 \cdot 4 - 3 \cdot 6 = -10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 10 = 10 \\ 8 - 18 = -10 \rightarrow -10 = -10 \end{cases}$$

SISTEMES D'EQUACIONS

3.

$$\begin{cases} 3x - 5y = 7 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases}$$

- Multipliquem la primera equació per 2 i la segona per -3. Així, la x tindrà el mateix coeficient en les dues equacions, però amb el signe canviat (6 i -6, que és el $m.c.m.(2,3)$):

$$\begin{cases} 3x - 5y = 7 \xrightarrow{\cdot 2} 6x - 10y = 14 \\ 2x - 3y = 4 \xrightarrow{\cdot (-3)} -6x + 9y = -12 \end{cases}$$

Sumem les dues equacions i resollem l'equació:

$$\begin{cases} 6x - 10y = 14 \\ -6x + 9y = -12 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \hline / \quad -y = 2 \end{array} \rightarrow y = \frac{2}{-1} = -2 \rightarrow \boxed{y = -2}$$

- Calculem el valor de l'altra incògnita:

$$\begin{cases} 3x - 5y = 7 \xrightarrow{y = -2} 3x - 5 \cdot (-2) = 7 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases} \rightarrow 3x + 10 = 7 \rightarrow 3x = 7 - 10 = -3 \rightarrow x = \frac{-3}{3} = -1 \rightarrow \boxed{x = -1}$$

Fem la prova:

- Substituïm x per -1 i y per -2 en el sistema de l'enunciat i comprovem que es verifiquen les **dues** igualtats:

$$\begin{cases} 3 \cdot (-1) - 5 \cdot (-2) = 7 \\ 2 \cdot (-1) - 3 \cdot (-2) = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3 + 10 = 7 \rightarrow 7 = 7 \\ -2 + 6 = 4 \rightarrow 4 = 4 \end{cases}$$

Exercicis: Resol els sistemes següents per reducció i fes-ne la prova:

a) $\begin{cases} 2x + y = 9 \\ 3x + y = 14 \end{cases}$

Prova:

(Sol.: $x = 5$; $y = -1$)

SISTEMES D'EQUACIONS

b) $\begin{cases} 2x - 5y = -14 \\ 3x + 2y = -2 \end{cases}$	Prova:
(Sol.: $x = -2$; $y = 2$)	
c) $\begin{cases} -3x + 3y = -9 \\ 5x - 4y = 15 \end{cases}$	Prova:
(Sol.: $x = 3$; $y = 0$)	
d) $\begin{cases} 6x + 5y = -28 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$	Prova:
(Sol.: $x = -3$; $y = -2$)	

Mètode de substitució

Per resoldre un sistema per **substitució**, seguim els passos següents.

- **Aïllem** una incògnita d'una de les dues equacions (triem la que ens sembli més fàcil d'aïllar).
- **Substituïm** en l'altra equació la mateixa incògnita que hem aïllat per l'expressió obtinguda.

SISTEMES D'EQUACIONS

- **Resolem l'equació** que en resulta, que té només una incògnita. Ja tindrem el valor d'una incògnita.
- **Calculem el valor de l'altra incògnita**, que és la mateixa que hem aïllat en primer lloc, substituint en la igualtat en la qual la tenim aïllada el valor de la incògnita que ja hem calculat.
- **Fem la prova**, substituint els valors obtinguts en les dues equacions de l'enunciat i comprovant que es verifiquen les **dues** igualtats.

Exemples: Resol els sistemes següents per **substitució**:

1.

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x - 3y = 7 \end{cases}$$

- Aïllem una incògnita d'una equació i la substituïm en l'altra:

$$\begin{cases} x - 2y = 3 & \xrightarrow{\text{aïllem } x} \boxed{x = 3 + 2y}^* \\ 2x - 3y = 7 & \xrightarrow{\text{substituïm } x} 2(3 + 2y) - 3y = 7 \end{cases}$$

- Resolem l'equació que en resulta: $2(3 + 2y) - 3y = 7$

$$6 + 4y - 3y = 7 \rightarrow 4y - 3y = 7 - 6 \rightarrow \boxed{y = 1}$$

- Calculem el valor de l'altra incògnita:

$$^* x = 3 + 2y \xrightarrow{y=1} x = 3 + 2 \cdot 1 = 3 + 2 = 5 \rightarrow \boxed{x = 5}$$

- Fem la **prova**:

Substituïm **x** per **5** i **y** per **1** en el sistema de l'enunciat i comprovem que es verifiquen les **dues** igualtats:

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x - 3y = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5 - 2 \cdot 1 = 3 \\ 2 \cdot 5 - 3 \cdot 1 = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5 - 2 = 3 \rightarrow 3 = 3 \\ 10 - 3 = 7 \rightarrow 7 = 7 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 5x - 2y = 13 \end{cases}$$

- Aïllem una incògnita d'una equació i la substituïm en l'altra:

$$\begin{cases} 2x - y = 5 & \xrightarrow{\text{aïllem } y} -y = 5 - 2x \rightarrow \boxed{y = -5 + 2x}^* \\ 5x - 2y = 13 & \xrightarrow{\text{substituïm } y} 5x - 2(-5 + 2x) = 13 \end{cases}$$

- Resolem l'equació que en resulta: $5x - 2(-5 + 2x) = 13$

$$5x + 10 - 4x = 13 \rightarrow 5x - 4x = 13 - 10 \rightarrow \boxed{x = 3}$$

	- Calculem el valor de l'altra incògnita: $*y = -5 + 2x \xrightarrow{x=3} y = -5 + 2 \cdot 3 = -5 + 6 = 1 \rightarrow \boxed{y=1}$ - Fem la prova: Substituïm x per 3 i y per 1 en el sistema de l'enunciat i comprovem que es verifiquen les dues igualtats: $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 5x - 2y = 13 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2 \cdot 3 - 1 = 5 \\ 5 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 13 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6 - 1 = 5 \rightarrow 5 = 5 \\ 15 - 2 = 13 \rightarrow 13 = 13 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2x - 5y = 7 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$	- Aïllem una incògnita d'una equació i la substituïm en l'altra: $\begin{cases} 2x - 5y = 7 \xrightarrow{\text{aïllem } x} 2x = 7 + 5y \rightarrow \boxed{x = \frac{7+5y}{2}}^* \\ 3x + 2y = 1 \xrightarrow{\text{substituïm } x} 3\left(\frac{7+5y}{2}\right) + 2y = 1 \end{cases}$ - Resolem l'equació que en resulta: $3\left(\frac{7+5y}{2}\right) + 2y = 1$ $\frac{21+15y}{2} + 2y = 1 \rightarrow 2 \cdot \frac{21+15y}{2} + 2 \cdot 2y = 2 \cdot 1$ $21+15y+4y = 2 \rightarrow 19y+4y = 2-21$ $19y = -19 \rightarrow y = \frac{-19}{19} = -1 \rightarrow \boxed{y=-1}$ - Calculem el valor de l'altra incògnita: $*x = \frac{7+5y}{2} \xrightarrow{y=-1} x = \frac{7+5 \cdot (-1)}{2} = \frac{7-5}{2} = \frac{2}{2} = 1 \rightarrow \boxed{x=1}$ - Fem la prova: Substituïm x per 1 i y per -1 en el sistema de l'enunciat i comprovem que es verifiquen les dues igualtats: $\begin{cases} 2x - 5y = 7 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2 \cdot 1 - 5 \cdot (-1) = 7 \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2 + 5 = 7 \rightarrow 7 = 7 \\ 3 - 2 = 1 \rightarrow 1 = 1 \end{cases}$

SISTEMES D'EQUACIONS

Exercicis: Resol els sistemes següents per **substitució**:

a) $\begin{cases} x - y = 2 \\ 5x - 3y = 0 \end{cases}$ Sol.: $x = -3; y = -5$		<u>Prova:</u>
b) $\begin{cases} 2x + 3y = -5 \\ -3x + 5y = 17 \end{cases}$ Sol.: $x = -4; y = 1$		<u>Prova:</u>

Mètode d'igualació

Per resoldre un sistema per **igualació**, seguim els passos següents.

- **Aïllem** la mateixa incògnita de les dues equacions (triem la que ens sembli més fàcil d'aïllar).
- **Iguallem** les dues expressions que hem obtingut en el pas anterior.
- **Resolem l'equació** que en resulta, que té només una incògnita. Ja tindrem el valor d'una incògnita.
- **Calculem el valor de l'altra incògnita**, que és la mateixa que hem aïllat en primer lloc, substituint en qualsevol de les dues igualtats on la tenim aïllada el valor de la incògnita que hem calculat.

SISTEMES D'EQUACIONS

- Fem la prova, substituint els valors obtinguts en les dues equacions de l'enunciat i comprovant que es verifiquen les dues igualtats.

Exemples: Resol els sistemes següents per igualació:

1.
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + y = -4 \end{cases}$$

- Aïllem la mateixa incògnita de les dues equacions:

$$\begin{cases} x + y = 2 & \xrightarrow{\text{aïllem } y} \boxed{y = 2 - x}^* \\ 3x + y = -4 & \xrightarrow{\text{aïllem } y} \boxed{y = -4 - 3x} \end{cases}$$

- Igualem: $2 - x = -4 - 3x$

- Resolem l'equació que en resulta:

$$-x + 3x = -4 - 2$$

$$2x = -6 \rightarrow x = \frac{-6}{2} = -3 \rightarrow \boxed{x = -3}$$

- Calculem el valor de l'altra incògnita:

$$^* y = 2 - x \xrightarrow{x = -3} y = 2 - (-3) = 2 + 3 = 5 \rightarrow \boxed{y = 5}$$

- Fem la prova:

Substituïm x per -3 i y per 5 en el sistema de l'enunciat i comprovem que es verifiquen les **dues** igualtats:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + y = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3 + 5 = 2 \\ 3 \cdot (-3) + 5 = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2 = 2 \\ -9 + 5 = -4 \rightarrow -4 = -4 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases}$$

- Aïllem la mateixa incògnita de les dues equacions:

$$\begin{cases} 2x - y = -1 & \xrightarrow{\text{aïllem } x} \boxed{x = \frac{-1 + y}{2}}^* \\ 3x + 2y = 2 & \xrightarrow{\text{aïllem } x} \boxed{x = \frac{2 - 2y}{3}} \end{cases}$$

- Igualem: $\frac{-1 + y}{2} = \frac{2 - 2y}{3}$

- Resolem l'equació que en resulta:

$$\frac{-1 + y}{2} = \frac{2 - 2y}{3} \text{ multipliquem en creu}$$

$$3(-1 + y) = 2(2 - 2y)$$

$$-3 + 3y = 4 - 4y \rightarrow 3y + 4y = 4 + 3$$

$$7y = 7 \rightarrow \boxed{y = 1}$$

	- Calculem el valor de l'altra incògnita: $*x = \frac{-1+y}{2} \xrightarrow{y=1} x = \frac{-1+1}{2} = \frac{0}{2} = 0 \rightarrow \boxed{x=0}$ - Fem la prova: Substituïm x per 0 i y per 1 en el sistema de l'enunciat i comprovem que es verifiquen les dues igualtats: $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2 \cdot 0 - 1 = -1 \\ 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -1 = -1 \\ 0 + 2 = 2 \rightarrow 2 = 2 \end{cases}$
<u>3.</u> $\begin{cases} 5x - 2y = 15 \\ -4x + 3y = -19 \end{cases}$	- Aïllem la mateixa incògnita de les dues equacions: $\begin{cases} 5x - 2y = 15 & \xrightarrow{\text{aïllem } x} 5x = 15 + 2y \rightarrow \boxed{x = \frac{15+2y}{5}}^* \\ -4x + 3y = -19 & \xrightarrow{\text{aïllem } x} -4x = -19 - 3y \rightarrow 4x = 19 + 3y \\ & \rightarrow \boxed{x = \frac{19+3y}{4}} \end{cases}$ - Igualet: $\frac{15+2y}{5} = \frac{19+3y}{4}$ - Resolem l'equació que en resulta: $\frac{15+2y}{5} = \frac{19+3y}{4} \text{ multipliquem en creu}$ $4(15+2y) = 5(19+3y)$ $60+8y = 95+15y \rightarrow 8y-15y = 95-60$ $-7y = 35 \rightarrow y = \frac{35}{-7} \rightarrow \boxed{y=-5}$ - Calculem el valor de l'altra incògnita: $*x = \frac{15+2y}{5} \xrightarrow{y=-5} x = \frac{15+2 \cdot (-5)}{5} \rightarrow x = \frac{15-10}{5} = \frac{5}{5} = 1 \rightarrow \boxed{x=1}$ - Fem la prova: Substituïm x per 1 i y per -5 en el sistema de l'enunciat i comprovem que es verifiquen les dues igualtats: $\begin{cases} 5x - 2y = 15 \\ -4x + 3y = -19 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5 \cdot 1 - 2 \cdot (-5) = 15 \\ -4 \cdot 1 + 3 \cdot (-5) = -19 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5+10 = 15 \\ -4-15 = -19 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 15 = 15 \\ -19 = -19 \end{cases}$

SISTEMES D'EQUACIONS

<u>Exercicis:</u> Resol els sistemes següents per igualació:		
<u>1.</u> $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 8x + y = -5 \end{cases}$ Sol.: $x = 0; y = -5$		<u>Prova:</u>
<u>2.</u> $\begin{cases} 3x - 2y = 10 \\ -5x + 3y = -16 \end{cases}$ Sol.: $x = 2; y = -2$		<u>Prova:</u>

Sistemes compatibles indeterminats i incompatibles

Fins ara tots els exemples que hem vist són sistemes compatibles determinats, ja que tenen una única solució. Vegem ara dos exemples de sistemes que no són compatibles determinats:

Exemples: Resol els sistemes següents pel mètode que vulguis.

1.
$$\begin{cases} 2x + 6y = 4 \\ 3x + 9y = 6 \end{cases}$$

$$\underline{2.} \begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$$

En l'exemple 1:

- Haurem obtingut:
 - o $0x + 0y = 0$ si has intentat resoldre el sistema per reducció.
 - o $0x = 0$ o $0y = 0$ si has intentat resoldre el sistema per substitució o igualació.
- Tots aquests resultats indiquen que és un **sistema compatible indeterminat**, és a dir, que té infinites solucions.
- En realitat, les dues equacions són equivalents. Si dividim la primera equació per 2 i la segona per 3, obtenim la mateixa equació. Llavors, han de tenir les mateixes solucions; les solucions de la primera equació són també solucions de la segona, i viceversa.

$$\begin{cases} 2x + 6y = 4 & \xrightarrow{\div 2} x + 3y = 2 \\ 3x + 9y = 6 & \xrightarrow{\div 3} x + 3y = 2 \end{cases}$$

En l'exemple 2:

- Haurem obtingut:
 - o $0x + 0y = -2$ si has intentat resoldre el sistema per reducció.
 - o $0x = -2$ o $0y = -2$ si has intentat resoldre el sistema per substitució o igualació.
- Cap d'aquests resultats és possible, ja que $0 \neq -2$. Aquests resultats indiquen que és un **sistema incompatible**, és a dir, que **no té solució**. No hi ha cap parell de nombres que sigui solució de les dues equacions.
- Si dividim la segona equació entre 2, trobarem que els primers membres de les dues equacions són iguals, però els segons membres són diferents:

SISTEMES D'EQUACIONS

$$\begin{cases} x+2y=4 \\ 2x+4y=6 \end{cases} \xrightarrow{\div 3} \begin{cases} x+2y=4 \\ x+2y=3 \end{cases}$$

$x+2y$ no pot ser a la vegada 3 i 4 si substituïm x i y per valors determinats.

Podem concloure que:

Si quan resollem un sistema obtenim:

- $0x + 0y = 0$, $0x = 0$ o $0y = 0 \rightarrow$ El sistema és compatible indeterminat $\rightarrow$ Infinites solucions
- $0x + 0y = b$, $0x = b$ o $0y = b$ amb $b \in R$, $b \neq 0 \rightarrow$ El sistema és incompatible $\rightarrow$ No té solució
- $ax = b$ o $ay = b$ amb a i $b \in R$, $a \neq 0 \rightarrow$ El sistema és compatible determinat $\rightarrow$ Solució única

Exercici: Classifica els sistemes següents:

a) $\begin{cases} 5x+2y=1 \\ -10x-4y=-2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x+2y=2 \\ 15x+6y=2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x+2y=7 \\ 15x-10y=5 \end{cases}$

Mètode gràfic

Eixos cartesianes o de coordenades

Els eixos cartesianes estan formats per dues rectes perpendiculars graduades:

- La recta horitzontal s'anomena **eix de les abscisses** o de les x (eix OX).
- La recta vertical s'anomena **eix de les ordenades** o de les y (eix OY).
- El punt de tall dels eixos s'anomena **origen de coordenades**. És el punt $(0,0)$.
- A la dreta de l'origen de coordenades es representen els valors positius de la x i a l'esquerra es representen els valors negatius.

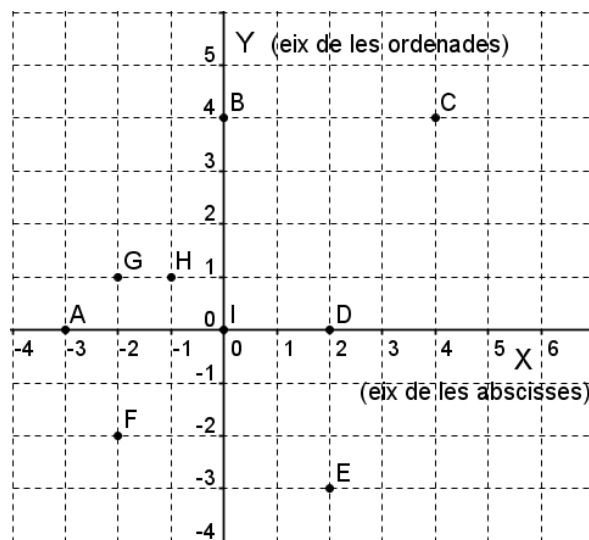
SISTEMES D'EQUACIONS

- A la part superior de l'origen de coordenades es representen els valors positius de la y i a la part inferior es representen els valors negatius.

Per descriure la posició de qualsevol punt del pla, s'utilitza un parell ordenat de nombres (x,y) anomenats coordenades cartesianes del punt. La primera coordenada, x, rep el nom d'abscissa del punt i la segona coordenada, y, rep el nom d'ordenada del punt.

Exemple: Representa en uns eixos cartesianes els punts:

A(-3,0); B(0,4); C(4,4); D(2,0); E(2, -3); F(-2, -2); G(-2,1); H(-1,1); I(0,0).



Representació gràfica d'una equació amb dues incògnites

Una equació lineal (de primer grau) amb dues incògnites té infinites solucions. No podem donar-les totes, però podem representar-les gràficament.

La representació gràfica en uns eixos cartesianes de les solucions d'una equació lineal amb dues incògnites és una recta.

Per fer aquesta representació gràfica, seguim els passos següents:

- Calculem almenys tres solucions de l'equació. Per facilitar el càlcul, podem:
 - o Aïllar la incògnita y.
 - o Escollir valors qualssevol per a la incògnita x i substituir-la per aquests valors.
 - o Calcular el valor de y per a cada valor de x escollit.
 - o Col·locar les solucions en una taula de valors.

SISTEMES D'EQUACIONS

- Representem les solucions obtingudes en uns eixos cartesianes. Cada solució correspon a un punt (x,y) en el gràfic de coordenades.
- Unim els punts i obtenim una recta. Cadascun dels infinits punts de la recta és una solució de l'equació. Així mateix, cada solució de l'equació serà un punt de la recta.

Exemples:

1. Representa gràficament la recta $x + y = 4$

Calculem solucions de l'equació (com a mínim 3):

- Podem buscar directament les solucions perquè és fàcil trobar nombres que sumin 4:

$$x = 0, y = 4; \quad x = 4, y = 0; \quad x = 1, y = 3; \quad x = 2, y = 2; \quad x = -1, y = 5; \quad x = -2, y = 6; \quad \text{etc.}$$

$$(0,4) \qquad (4,0) \qquad (1,3) \qquad (2,2) \qquad (-1,5) \qquad (-2,6) \quad \dots$$

- O bé podem aïllar $y \rightarrow y = 5 - x$, anar donant valors a la x i calcular els valors corresponents de la y :

$$\text{Si } x = 0 \rightarrow y = 4 - 0 = 4 \rightarrow (0,4)$$

$$\text{Si } x = 2 \rightarrow y = 4 - 2 = 2 \rightarrow (2,2)$$

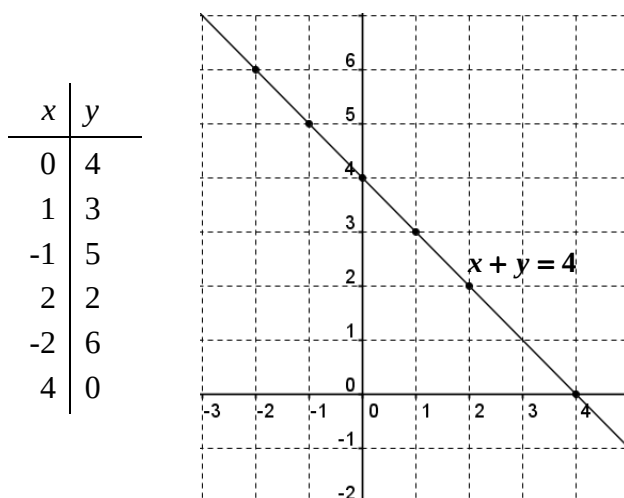
$$\text{Si } x = 1 \rightarrow y = 4 - 1 = 3 \rightarrow (1,3)$$

$$\text{Si } x = -2 \rightarrow y = 4 - (-2) = 6 \rightarrow (-2,6)$$

$$\text{Si } x = -1 \rightarrow y = 4 - (-1) = 5 \rightarrow (-1,5) \quad \text{Si } x = 4 \rightarrow y = 4 - 4 = 0 \rightarrow (4,0)$$

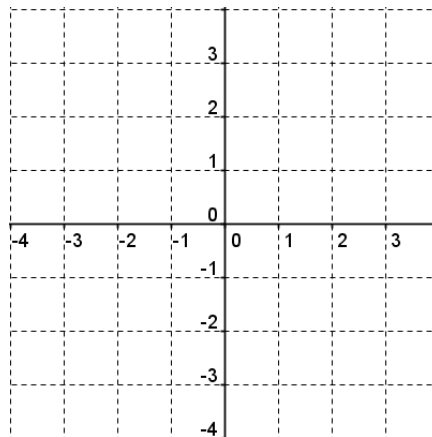
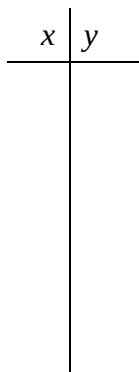
Així podríem continuar calculant solucions...

- Fem una taula de valors amb els resultats obtinguts, representem els punts gràficament i els unim:



SISTEMES D'EQUACIONS

Exercici: Representa gràficament la recta $x - y = 2$.



Representació gràfica d'un sistema lineal de dues equacions amb dues incògnites

Si representem gràficament les dues equacions d'un sistema en uns mateixos eixos cartesianes, el punt o els punts que tinguin en comú les dues rectes seran la solució o les solucions del sistema. Ens podem trobar en aquests tres casos:

- Que les rectes siguin **secants**, és a dir, que es tallin en un punt. Aquest punt de tall (o punt d'intersecció) serà la **solució única** del sistema i, per tant, el sistema serà **compatible determinat**.
- Que les rectes siguin **paral·leles**, és a dir, que no tinguin cap punt en comú. En aquest cas, el sistema **no té solució** i és **incompatible**.
- Que les rectes siguin **coincidentes**, és a dir, que tinguin tots els punts en comú. En aquest cas, el sistema té **infinites solucions** i és **compatible indeterminat**.

Compatible determinat:		→ secants
Incompatible:		→ paral·leles
Compatible indeterminat:		→ coincidents

SISTEMES D'EQUACIONS

Exemples: Resol gràficament els sistemes següents.

1.
$$\begin{cases} x + y = -1 \rightarrow y = -x - 1 \\ x - y = 7 \rightarrow y = x - 7 \end{cases}$$

$$y = -1 - x$$

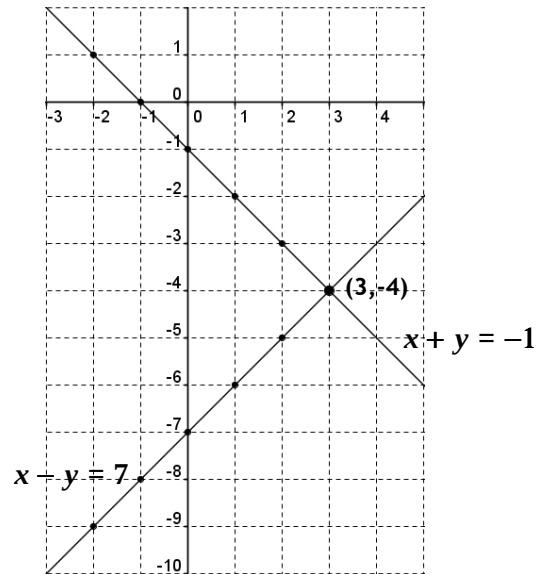
x	y
-2	1
-1	0
0	-1
1	-2
2	-3

$$y = x - 7$$

x	y
-2	-9
-1	-8
0	-7
1	-6
2	-5

La solució és (3,-4).

És compatible determinat.



2.
$$\begin{cases} 4x + 2y = 8 \rightarrow 2y = -4x + 8 \rightarrow y = -2x + 4 \\ 2x + y = 4 \rightarrow y = -2x + 4 \end{cases}$$

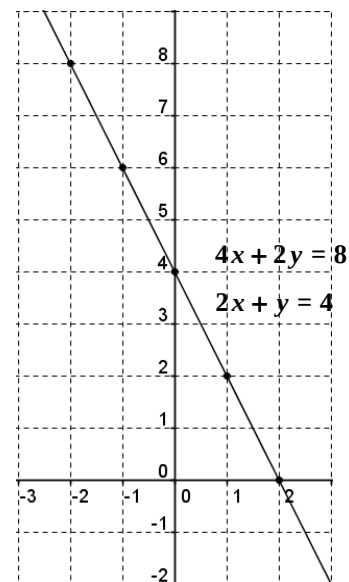
$$y = -2x + 4$$

x	y
-2	8
-1	6
0	4
1	2
2	0

Les rectes són coincidents.

El sistema és compatible indeterminat.

Té infinites solucions.



3.
$$\begin{cases} x - y = -3 \rightarrow y = x + 3 \\ x - y = 0 \rightarrow y = x \end{cases}$$

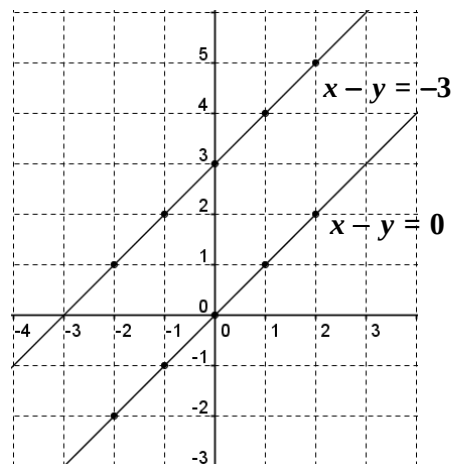
$$y = -1 - x$$

x	y
-2	-2
-1	-1
0	0
1	1
2	2

$$y = x + 3$$

x	y
-2	1
-1	2
0	3
1	4
2	5

Sistema incompatible: No té solució.

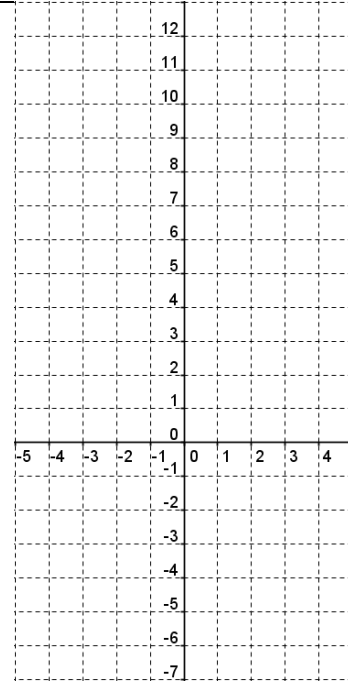


SISTEMES D'EQUACIONS

Exercicis: Resol gràficament els sistemes següents:

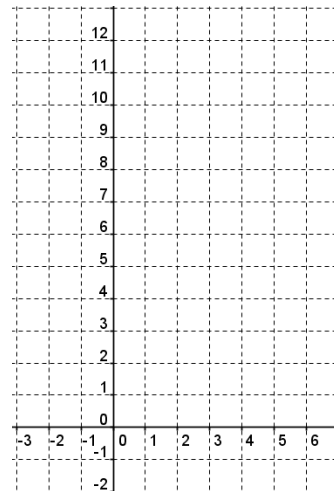
a)
$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

Sol.: (7,3)



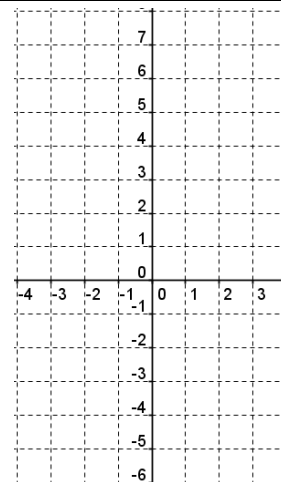
b)
$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

(Sol.: Incompatible)



c)
$$\begin{cases} -x + y = 3 \\ -3x + y = 1 \end{cases}$$

Sol.: (1,4)



SISTEMES D'EQUACIONS

Resolució de sistemes lineals de tres equacions amb tres incògnites

Una solució d'un sistema de tres equacions amb tres incògnites és una terna de nombres reals (un valor per incògnita) que verifiquen totes les equacions del sistema.

Exemple:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 6 \\ 2x - y - z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{La solució del sistema és} \\ x = 1; y = 2 \text{ i } z = -1 \\ \text{ja que verifica les tres} \\ \text{equacions} \end{array} \longrightarrow \begin{cases} 1 + 2 \cdot 2 - (-1) = 6 \rightarrow 1 + 4 + 1 = 6 \\ 2 \cdot 1 - 2 - (-1) = 1 \rightarrow 2 - 2 + 1 = 1 \\ 1 + 2 + (-1) = 2 \rightarrow 1 + 2 - 1 = 2 \end{cases}$$

Per resoldre un sistema lineal de tres equacions amb tres incògnites, hi ha diversos mètodes. Només estudiarem el mètode de Gauss, que és molt semblant al mètode de reducció que s'utilitza per resoldre sistemes de dues equacions amb dues incògnites.

Sistemes equivalents

Donat un sistema d'equacions lineals, podem obtenir sistemes equivalents a aquest:

- Canviant les equacions d'ordre.
- Multiplicant o dividint els dos membres d'una equació per un nombre diferent de zero.
- Sumant a una equació una altra equació multiplicada per un nombre.

Sistemes esglaonats

Un **sistema esglaonat** es caracteritza pel fet que cada equació té menys incògnites que l'equació superior.

Vegem un exemple de sistema esglaonat:

Exemple:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 & \xrightarrow{z=-1; y=3} x + 3^{**} - 2 \cdot (-1)^* = 0 \rightarrow x + 3 + 2 = 0 \rightarrow \boxed{x = -5} \\ 2y - z = 7 & \xrightarrow{z=-1} 2y - (-1)^* = 7 \rightarrow 2y + 1 = 7 \rightarrow \boxed{y = 3}^{**} \\ -3z = 3 & \longrightarrow z = \frac{3}{-3} = -1 \rightarrow \boxed{z = -1}^* \end{cases}$$

A partir de la tercera equació trobem $z = -1$. Substituint el valor de z en la segona equació, obtenim $y = 3$. Finalment, substituint y i z en la primera equació, trobem $x = -5$.

SISTEMES D'EQUACIONS

Tal com hem vist en l'exemple anterior, els sistemes esglaonats són molt fàcils de resoldre.

Mètode de Gauss

Aquest mètode consisteix a anar trobant sistemes equivalents (aplicant les transformacions indicades anteriorment) fins a arribar a un sistema esglaonat.

Vegem amb uns exemples de quina manera ho podem fer:

Exemples: Resol els sistemes següents aplicant el mètode de Gauss.

1.
$$\begin{cases} 4x - 6y + 2z = 20 \\ x - 3y - 2z = -6 \\ -3x + 3y + 5z = 19 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x + 4y - 2z = 3 \\ 3x - 2y + 3z = 1 \\ -2x + 6y - 5z = 2 \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} x + 4y - 2z = 3 \\ 3x - 2y + 3z = 1 \\ -2x + 6y - 5z = -2 \end{cases}$$

1.

$$\begin{cases} 4x - 6y + 2z = 20 \\ x - 3y - 2z = -6 \\ -3x + 3y + 5z = 19 \end{cases}$$

- Si és possible, col·loquem com a primera equació la que tingui els coeficients més senzills (per exemple, la que tingui un 1 com a coeficient de la x). A més, simplifiquem les equacions sempre que sigui possible.

$$\begin{cases} 4x - 6y + 2z = 20 \\ x - 3y - 2z = -6 \\ -3x + 3y + 5z = 19 \end{cases} \xrightarrow[\text{Intercanviem les dues primeres equacions}]{} \begin{cases} x - 3y - 2z = -6 \\ 4x - 6y + 2z = 20 \\ -3x + 3y + 5z = 19 \end{cases} \xrightarrow[\text{Dividim la segona equació per 2}]{} \begin{cases} x - 3y - 2z = -6 \\ 2x - 3y + z = 10 \\ -3x + 3y + 5z = 19 \end{cases}$$

- Reduïm la x de la segona i la tercera equacions. Per fer-ho, a la segona equació li sumem la primera multiplicada per -2 i a la tercera equació li sumem la primera multiplicada per 3 .
- Després reduïm la y de la tercera equació, sumant a la tercera equació la segona multiplicada per 2 .

Anomenem E_1 , E_2 , E_3 cadascuna de les tres equacions.

$$\begin{array}{l} E_2 + (-2) \cdot E_1 \\ E_3 + 3 \cdot E_1 \end{array} \longrightarrow \begin{cases} x - 3y - 2z = -6 \\ 3y + 5z = 22 \\ -6y - z = 1 \end{cases} \xrightarrow{E_3 + 2 \cdot E_2} \begin{cases} x - 3y - 2z = -6 \\ 3y + 5z = 22 \\ 9z = 45 \end{cases}$$

SISTEMES D'EQUACIONS

- Ara ja tenim un sistema en forma esglaonada i el podem resoldre fàcilment:

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 3y - 2z = -6 \xrightarrow[y=-1]{z=5} x - 3 \cdot (-1)^{**} - 2 \cdot 5^* = -6 \rightarrow x + 3 - 10 = -6 \rightarrow \boxed{x=1} \\ 3y + 5z = 22 \xrightarrow{z=5} 3y + 5 \cdot 5^* = 22 \rightarrow 3y + 25 = 22 \rightarrow 3y = -3 \rightarrow \boxed{y=-1}^{**} \\ 9z = 45 \longrightarrow z = \frac{45}{9} = 5 \rightarrow \boxed{z=5}^* \end{array} \right.$$

2.

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 4y - 2z = 3 \\ 3x - 2y + 3z = 1 \\ -2x + 6y - 5z = -2 \end{array} \right. \xrightarrow[E_3 + 2 \cdot E_1]{E_2 + (-3) \cdot E_1} \left\{ \begin{array}{l} x + 4y - 2z = 3 \\ -14y + 9z = -8 \\ 14y - 9z = 4 \end{array} \right. \xrightarrow{E_3 + E_2} \left\{ \begin{array}{l} x + 4y - 2z = 3 \\ -14y + 9z = -8 \\ 0x + 0y + 0z = -4 \end{array} \right.$$

Com que $0x + 0y + 0z = 0 \neq -4 \rightarrow$ **El sistema no té solució. És incompatible.**

En general, si una equació és $0x + 0y + 0z = a$ amb $a \in R$, $a \neq 0 \rightarrow$ El sistema és **incompatible**. No té solució.

3.

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 4y - 2z = 3 \\ 3x - 2y + 3z = 1 \\ -2x + 6y - 5z = 2 \end{array} \right. \xrightarrow[E_3 + 2 \cdot E_1]{E_2 + (-3) \cdot E_1} \left\{ \begin{array}{l} x + 4y - 2z = 3 \\ -14y + 9z = -8 \\ 14y - 9z = 8 \end{array} \right. \xrightarrow{E_3 + E_2} \left\{ \begin{array}{l} x + 4y - 2z = 3 \\ -14y + 9z = -8 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{array} \right.$$

La tercera equació ha quedat $0x + 0y + 0z = 0$ i es verifica sempre. Així doncs, ens queda un sistema amb dues equacions i tres incògnites. Un sistema amb més incògnites que equacions **té infinites solucions** (menys equacions vol dir menys condicions que han de verificar les incògnites). Per tant, és un sistema **compatible indeterminat**.

En general, si una equació és $0x + 0y + 0z = 0 \rightarrow$ El sistema és **compatible indeterminat**. Té infinites solucions.

Podem expressar les solucions del sistema en funció d'una de les incògnites, per exemple, la incògnita z . Es diu que z és un paràmetre, perquè la tractarem com si fos un nombre. Els paràmetres es representen amb lletres gregues. Per exemple, representarem z per la lletra λ :

SISTEMES D'EQUACIONS

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 4y - 2z = 3 \xrightarrow{y = \frac{9\lambda + 8}{14}; z = \lambda} x + 4\left(\frac{9\lambda + 8}{14}\right) - 2\lambda = 3 \rightarrow x = 3 - \frac{18\lambda + 16}{7} + 2\lambda = \frac{-4\lambda + 5}{7} \\ -14y + 9z = -8 \xrightarrow{z = \lambda} 14y = 9\lambda + 8 \rightarrow y = \frac{9\lambda + 8}{14} \end{array} \right.$$

Solució: $x = \frac{-4\lambda + 5}{7}; y = \frac{9\lambda + 8}{14}; z = \lambda$

Si anem donant valors a λ obtindrem solucions del sistema:

$$\lambda = 1 \rightarrow \left(\frac{1}{7}, \frac{17}{14}, 1\right); \lambda = 0 \rightarrow \left(\frac{5}{7}, \frac{4}{7}, 0\right); \lambda = 2 \rightarrow \left(-\frac{3}{7}, \frac{13}{7}, 2\right) \dots$$

Exercicis: Resol, si és possible, els sistemes següents, aplicant el mètode de Gauss.

a)
$$\begin{cases} 5x - 2y + z = -8 \\ x - 3y + 2z = 1 \\ 2x + 2y - 3z = -6 \end{cases}$$

Sol.: $x = -2; y = -1; z = 0$

b)
$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ x + 5y + 2z = 2 \\ 4x - y + 5z = 0 \end{cases}$$

Sol.: Incompatible

$$\text{c) } \begin{cases} x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 10y + z = 2 \\ -2x - 6y - 4z = -1 \end{cases}$$

$$\text{Sol.: } x = -17\lambda - 1; \quad y = \frac{10\lambda + 1}{2}; \quad z = \lambda$$

Resolució de problemes

Molts dels problemes que podem resoldre amb una equació també els podem resoldre plantejant un sistema. A vegades resulta més senzill plantejar un sistema que una sola equació.

Per resoldre un problema fent servir un sistema d'equacions, es procedeix de manera molt semblant a com ho hem fet amb equacions:

- Llegim atentament l'enunciat i diferenciem les dades que ens donen de les que ens demanen.
- Utilitzem les lletres (x, y, z) per representar les incògnites (allò que ens demana el problema).
- Si cal, fem dibuixos, taules, esquemes...
- Traduïm al llenguatge algebraic les parts de l'enunciat que relacionin les incògnites amb les dades i plantejem un sistema d'equacions.
- Resolem el sistema plantejat pel mètode que ens sembli més adient.
- Expressem la solució adequadament.
- Comprovem que la solució obtinguda verifica les condicions de l'enunciat del problema.

SISTEMES D'EQUACIONS

Exemples de problemes

1. Troba dos nombres que sumen 11 i que la seva resta és igual a 7.

- Anomenem x i y els nombres que ens demana el problema (les incògnites):

x = un nombre

y = l'altre nombre

- Plantegem el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x + y = 11 \\ x - y = 7 \end{cases}$$

- Resolem el sistema per reducció:

$$\begin{cases} x + y = 11 \\ x - y = 7 \end{cases}$$

$$2x / = 18 \rightarrow x = \frac{18}{2} = 9 \rightarrow \boxed{x = 9}$$

Calculem y substituint $x = 9$ en la primera equació :

$$\begin{cases} x + y = 11 \rightarrow 9 + y = 11 \rightarrow y = 11 - 9 = 2 \rightarrow \boxed{y = 2} \\ x - y = 7 \end{cases}$$

- Expressem la solució adequadament: Els nombres que ens demanen són el 9 i el
- Comprovem la solució: $9 + 2 = 11$ i $9 - 2 = 7$

2. Fa dos anys l'edat d'un pare i la de la seva filla sumaven 38 anys i d'aquí a cinc anys l'edat del pare serà el triple de l'edat de la filla. Quants anys té cadascú?

- Anomenem x = edat del pare actual i y = edat de la filla actual, i fem el quadre:

	Ara	Fa dos anys	D'aquí a cinc anys
Edat pare	x	$x - 2$	$x + 5$
Edat filla	y	$y - 2$	$y + 5$

- Plantegem el sistema:

$$\begin{cases} x - 2 + y - 2 = 38 \leftarrow \text{Fa dos anys} \\ x + 5 = 3(y + 5) \leftarrow \text{D'aquí a cinc anys} \end{cases}$$

SISTEMES D'EQUACIONS

- Resolem el sistema per substitució:

$$\begin{cases} x - 2 + y - 2 = 38 \rightarrow x + y = 42 \rightarrow \boxed{x = 42 - y}^* & (\text{aïllem}) \\ x + 5 = 3(y + 5) \rightarrow 42 - y + 5 = 3(y + 5) & (\text{substituïm}) \end{cases}$$

$$42 - y + 5 = 3y + 15 \rightarrow -y - 3y = 15 - 5 - 42 \rightarrow -4y = -32 \rightarrow y = \frac{-32}{-4} = 8 \rightarrow \boxed{y = 8} \quad (\text{resolem})$$

Calculem x :

$$^* x = 42 - y \rightarrow x = 42 - 8 = 34 \rightarrow \boxed{x = 34}$$

- Expressem la solució adequadament:

El pare té **34 anys** i la filla té **8 anys**.

- Comprovem la solució: $32 + 6 = 38$ i 39 és el triple de 13

3. La suma dels diners que tenen la Mireia, la Laura i la Jordina és **210 €**. La Mireia té **30 €** més que la Laura i la Jordina té el doble del que tenen la Mireia i la Laura juntes. Quants diners té cadascú?

- Anomenem:

x = euros que té la Mireia.

y = euros que té la Laura.

z = euros que té la Jordina.

- Plantegem i resolem el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 210 \\ x = y + 30 \\ z = 2 \cdot (x + y) \end{cases} \xrightarrow{\substack{\text{Passem les} \\ \text{incògnites} \\ \text{al primer membre} \\ \text{i les ordenem}}} \begin{cases} x + y + z = 210 \\ x - y = 30 \\ -2x - 2y + z = 0 \end{cases} \xrightarrow{\substack{E_2 - E_1 \\ E_3 + 2 \cdot E_1}} \begin{cases} x + y + z = 210 \\ -2y - z = -180 \\ 3z = 420 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 210 \rightarrow x + 20 + 140 = 210 \rightarrow x = 210 - 20 - 140 \rightarrow \boxed{x = 50} \\ 2y + z = 180 \rightarrow 2y + 140 = 180 \rightarrow 2y = 40 \rightarrow \boxed{y = 20} \\ 3z = 420 \rightarrow \boxed{z = \frac{420}{3} = 140} \end{cases}$$

- Expressem degudament la solució:

La Mireia té **50 €**, la Laura té **20 €** i la Jordina té **140 €**.

- Comprovem la solució: $50 + 20 + 140 = 210$; $50 = 20 + 30$; $140 = 2 \cdot (50 + 20)$

EXERCICIS: SISTEMES DE DUES EQUACIONS AMB DUES INCÒGNITES

1. Resol els sistemes següents pel mètode de **reducció** i fes-ne la prova:

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y = 8 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 3x + 5y = -2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x - 2y = -4 \\ 15x + 3y = 6 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4x + 7y = 4 \\ -3x + 2y = -3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3x + 4y = 23 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases}$ g) $\begin{cases} 5x + 2y = 4 \\ 2x + 3y = -5 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 6x - 2y = 0 \\ x - y = -1 \end{cases}$

2. Resol els sistemes següents pel mètode de **substitució** i fes-ne la prova:

a) $\begin{cases} x - y = 8 \\ 3x + 5y = 16 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + y = 8 \\ 2x + 3y = -6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x - 2y = 1 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x + 7y = -8 \\ -x + 2y = 5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x - 3y = -6 \\ 5x - 4y = 20 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3x - 4y = 20 \\ 2x - 12y = 11 \end{cases}$

3. Resol els sistemes següents pel mètode d'**igualació** i fes-ne la prova:

a) $\begin{cases} x - 2y = 7 \\ x + 5y = -7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6x - y = 13 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 5y = -10 \\ x + 2y = 37 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 6x - 5y = 1 \\ -3x + 2y = -1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 4x - 6y = -3 \\ 8x + 3y = 4 \end{cases}$

4. Resol cadascun dels sistemes següents pels tres mètodes. Comprova que et dona el mateix resultat. Quin mètode t'agrada més? Quin creus que et costa menys?

a) $\begin{cases} 3x + y = -3 \\ -8x + y = 30 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - 3y = 30 \\ 10x + 7y = 125 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 4y = -10 \\ 3x - y = -4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 4x + 4y = -1 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

5. Classifica els sistemes següents. Fes-ho analíticament:

a) $\begin{cases} 2x - 7y = -5 \\ -3x + y = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 10x - 6y = -2 \\ -5x + 3y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x + 6y = 7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ 2x - 6y = 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x - 4y = 10 \\ 5x - 10y = 10 \end{cases}$

6. Resol gràficament els sistemes següents:

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ x + y = -2 \end{cases}$

SOLUCIONS: SISTEMES DE DUES EQUACIONS AMB DUES INCÒGNITES

1.

a) $x = 1; y = 2$

b) $x = 4; y = -2$

c) $x = 1; y = -1$

d) $x = 0; y = 2$

e) $x = 1; y = 0$

f) $x = 5; y = 2$

g) $x = 2; y = -3$

h) $x = \frac{1}{2}; y = \frac{3}{2}$

2.

a) $x = 7; y = -1$

b) $x = 3; y = -4$

c) $x = 1; y = 2$

d) $x = -3; y = 1$

e) $x = 12; y = 10$

f) $x = 7; y = \frac{1}{4}$

3.

a) $x = 3; y = -2$

b) $x = 3; y = 5$

c) $x = 15; y = 11$

d) $x = 1; y = 1$

e) $x = 4; y = -2$

f) $x = \frac{1}{4}; y = \frac{2}{3}$

4.

a) $x = -3; y = 6$

b) $x = 9; y = 5$

c) $x = -2; y = -2$

d) $x = \frac{1}{4}; y = -\frac{1}{2}$

5.

a) Compatible determinat

b) Compatible indeterminat

c) Incompatible

d) Compatible indeterminat

e) Compatible indeterminat

f) Incompatible.

6.

a) $x = 2; y = 3$

b) Incompatible

c) $x = 0; y = -2$

Solucions dels exercicis de la teoria

Solucions d'equacions lineals amb dues incògnites

1. La solució no és única: (0,-2); (2,2); (3,4); (1,0); (4,6).

2. a) no b) sí c) no d) sí

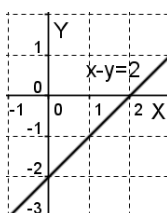
Solucions d'un sistema de dues equacions amb dues incògnites

És solució del sistema b)

Sistemes compatibles indeterminats i incompatibles

a) Compatible indeterminat b) Incompatible c) Compatible determinat.

Mètode gràfic



Problemes

1. Troba dos nombres sabent que sumen 27 i que un d'ells és el doble de l'altre.
2. Troba dos nombres que es diferencien en cinc unitats i que sumen 29.
3. Troba dos nombres consecutius sabent que el triple del petit és igual al gran més 9.
4. Volem repartir 19 caramels entre en Josep i la Mariona, de manera que a la Mariona li donem 5 caramels més que a en Josep. Quants caramels donarem a cadascú.
5. Volem preparar 3 litres d'una beguda barrejant taronjada amb ginebra, de manera que hi hagi quatre vegades més de taronjada que de ginebra. Quants litres de taronjada i de ginebra haurem de posar-hi?
6. L'edat de la Laura és una tercera part de l'edat d'en Pere i si a l'edat d'en Pere li restem l'edat de la Laura, obtenim l'edat de la Laura més quatre anys. Calcula les edats de tots dos.
7. En un alberg hi ha habitacions per a 3 persones (amb 3 llits) i per a 4 persones (amb 4 llits). Si en total hi ha 7 habitacions i 26 llits, quantes habitacions hi ha de cada tipus?
8. En una granja hi ha gallines i vaques. Si en total hi ha 80 caps i 210 potes, quantes gallines i quantes vaques hi ha?
9. Un noia compra 5 caramels i 2 xocolatines per 4 €. En la mateixa botiga, la seva germana compra 3 caramels i 3 xocolatines per 5,1 €. Calcula el preu dels caramels i de les xocolatines.
10. La Clàudia compra 5 kg de verdura, entre tomàquets i cebes, per 4,5 €. Calcula quants quilos de cada classe de verdura ha comprat, sabent que ha pagat els tomàquets a 1,2 €/kg i les cebes a 0,7 €/kg.
11. Entre en Joan i la Paula tenen 500 €. Si en Joan es gastés 25 € i la Paula es gastés 75 €, la Paula tindria el triple de diners que en Joan. Quants diners té cadascú?

PROBLEMES: SISTEMES DE DUES EQUACIONS AMB DUES INCÒGNITES

12. L'Adela té el triple de diners que en Martí, però si donés 100 € a en Martí, tindrien la mateixa quantitat de diners. Quants diners té cadascú?
13. L'Antoni i en Miquel col·leccionen segells. Entre tots dos tenen 150 segells, però si l'Antoni li donés 15 segells a en Miquel tindrien la mateixa quantitat de segells. Quants segells té cadascú?
14. Si en una classe faltessin 4 noies, hi hauria el mateix nombre de noies que de nois. Tanmateix, si faltessin 3 nois, hi hauria el doble de noies que de nois. Quantes noies i quants nois hi ha a la classe?
15. El perímetre d'un rectangle fa 44 cm. Si la base mesura 8 cm menys que l'altura, quines són les dimensions del rectangle?
16. El costat desigual d'un triangle isòsceles mesura un terç del que mesuren els costats iguals. Si el perímetre del triangle fa 42 cm, quant mesura cada costat del triangle?
17. Una mare i una filla es porten 28 anys i d'aquí a tres anys l'edat de la mare serà cinc vegades la de la filla. Quants anys té cadascuna?
18. La Carolina té nou anys més que la seva germana i fa tres anys la seva edat era quatre vegades la de la seva germana. Quants anys té cadascú?
19. En Raimon té el doble d'anys que el seu germà i fa sis anys la seva edat era cinc vegades la del seu germà. Quants anys té cadascú?

PROBLEMES: SISTEMES DE DUES EQUACIONS AMB DUES INCÒGNITES

Solucions dels problemes

1. Ens demanen els nombres **9** i **18**.
2. Ens demanen els nombres **12** i **17**.
3. Ens demanen els nombres **5** i **6**.
4. La Mariona: **12** caramels; en Josep: **7** caramels.
5. **0,6** l de ginebra i **2,4** l de taronjada.
6. Pere: **12** anys; Laura: **4** anys.
7. **2** habitacions de 3 persones i **5** de 4 persones
8. **55** gallines i **25** vaques
9. Caramels: **0,20 €**; xocolatines: **1,5 €**.
10. **2 kg** de tomàquets i **3 kg** de cebes
11. Joan: **125 €**; Paula: **375 €**
12. Adela: **300 €**; Martí: **100 €**.
13. Antoni: **90** segells; Miquel: **60** segells
14. **10** nois i **14** noies.
15. Base: **7 cm**; altura: **15 cm**.
16. **6 cm**, **18 cm** i **18 cm**.
17. Mare: **32** anys; filla: **4** anys.
18. Carolina: **15** anys; germana: **6** anys
19. Raimon: **16** anys; germà: **8** anys.

EXERCICIS: SISTEMES DE TRES EQUACIONS AMB TRES INCÒGNITES

Exercicis i problemes

1. Resol els sistemes següents pel mètode de Gauss:

$$\text{a) } \begin{cases} -x + 2y + z = 3 \\ 5x - y + 4z = 3 \\ -3x + 3y - 5z = -2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x + 2y + 5z = 1 \\ x - y + 3z = -4 \\ 3x - 4y + z = -6 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x - 3y + 8z = 2 \\ x + 3y - z = 8 \\ -x + 2y + z = -3 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 6x - 4y + 7z = 11 \\ -x + 2y + 3z = 2 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ -2x + 4y - 5z = 0 \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ x + 5y + 7z = 1 \\ -x - y + 5z = 1 \end{cases}$$

2. En una fàbrica produeixen cotxes blancs, negres i vermells. Fabriquen 140 cotxes diaris. El nombre de cotxes negres representa $\frac{3}{5}$ del nombre de cotxes blancs, i el nombre de cotxes vermells és $\frac{1}{4}$ del nombre de cotxes negres. Quants cotxes de cada color es fabriquen cada dia?
3. Els diners que porten en Pere, en Joan i l'Àngel sumen 200 €. L'Àngel porta la mateixa quantitat de diners que en Pere i en Joan junts, i en Pere porta $\frac{3}{2}$ dels diners que porta en Joan. Quants diners porta cadascú?
4. La Mariona va tres diumenges seguits a la pastisseria. El primer diumenge compra tres pastissos de moniato, dos de nata i un de xocolata, i es gasta 15,75 €. El segon diumenge compra dos pastissos de moniato, un de nata i un de xocolata, i es gasta 10 €. El tercer dia compra un pastisset de cada tipus i es gasta 7,5 €. Quin és el preu de cada pastisset?
5. En una caixa hi ha pomes, peres i plàtans. En total sumen 12 peces de fruita. El triple del nombre de pomes és igual a la suma del nombre de peres i plàtans i el doble del nombre de peres és igual a la suma del nombre de pomes i plàtans. Troba el nombre de pomes, peres, i plàtans.

EXERCICIS: SISTEMES DE TRES EQUACIONS AMB TRES INCÒGNITES

Solucions

1.

a) $x = 0; y = 1; z = 1$

b) $x = 1; y = 2; z = -1$

c) $x = 5; y = 1; z = 0$

d) $x = \frac{1}{2}; y = -\frac{1}{4}; z = 1$

e) Compatible indeterminat

f) Incompatible

$$x = \frac{\lambda}{2}; y = \frac{3\lambda}{2}; z = \lambda$$

2. 80 cotxes blancs, 48 cotxes negres i 12 cotxes vermells.

3. En Pere: 60 €, en Joan: 40 €, i l'Àngel: 100 €.

4. Pastisset de moniato = 2,5 €, pastisset de nata = 3,25 €, pastisset de xocolata = 1,75 €.

5. Pomes: 3, peres: 4, plàtans: 5

3. EQUACIONS DE SEGON GRAU

Equacions de segon grau

Una equació és de **segon grau** si la potència màxima a què està elevada la incògnita o incògnites és 2. Només estudiarem equacions de segon grau amb una incògnita.

Exemples

1. $x^2 + 25 = 0$

2. $x^2 + 2x + 5 = x + 1$

Exercici: Digues si les equacions següents són de segon grau:

a) $x^2 + 2x = 3x^2 + x + 1$

c) $x^4 + 1 = 0$

b) $-x^3 + 2x^2 + 5x = 2 + x^2$

d) $5x^2 = 3$

Forma general d'una equació de segon grau

Tota equació de segon grau amb una incògnita es pot expressar de la forma següent:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

en què a , b i c són nombres reals i $a \neq 0$.

Aquesta expressió s'anomena **forma general de l'equació de segon grau**. Anomenem a el coeficient que multiplica x^2 , b el coeficient que multiplica x i c el terme sense x .

***Nota:** Si $a = 0$ no és una equació de segon grau.

Exercici: Indica els valors de a , b i c de les equacions de segon grau següents:

a) $2x^2 + 3x + 10 = 0 \rightarrow a = 2, b = 3, c = 10$

f) $x^2 + 2 = 0$

b) $x^2 - x - 3 = 0 \rightarrow a = 1, b = -1, c = -3$

g) $2x^2 - x = 0$

c) $3x^2 - 2x + 5 = 0$

h) $3x + 1 = 0$

d) $-x^2 - x - 2 = 0$

i) $2x^2 = 0$

e) $2 - x^2 + 5x = 0$

j) $5x^2 - 5 = 0$

Si una equació de segon grau no està expressada en la forma general, l'haurem de passar nosaltres a la forma general per poder resoldre-la. Per fer-ho, seguim els passos següents:

- Transposem els termes que calgui per tenir tots els termes en el primer membre i un 0 al segon membre.
- Reduïm els termes semblants, sumant els termes amb x^2 , els termes amb x i els nombres, per separat.

EQUACIONS DE SEGON GRAU

Exemple: Expressa en la forma general l'equació $x^2 + 2x - 2x^2 = x + 1 - 3$ i indica els valors de a , b i c .

- Passem tots els termes al primer membre:

$$x^2 + 2x - 2x^2 - x - 1 + 3 = 0$$

- Reduïm els termes semblants:

$$\boxed{-x^2 + x + 2 = 0} \rightarrow a = -1, b = 1, c = 2$$

Exercici 2: Expressa en la forma general les equacions de segon grau següents i indica els valors de a , b i c .

a) $5x^2 - 2x - x + 3 = 5 - 6x^2 - 4x$

b) $x^2 + 5x + 3 = 2x + 10 + 3x$

c) $8x^2 - 3x + 5 + x = 2x + 10 + 6x^2 + x + 2x^2$

Sol.: a) $11x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow a = 11, b = 1, c = -2$ b) $x^2 - 7 = 0 \rightarrow a = 1, b = 0, c = -7$

c) $5x + 5 = 0 \rightarrow$ Equació de primer grau.

Equacions de segon grau completes i incompletes

Una equació de segon grau expressada en forma general és **completa** si a , b i c són diferents de 0, és a dir, si té els tres termes.

Una equació de segon grau expressada en forma general és **incompleta** si $b = 0$ i/o $c = 0$, és a dir, si solament té dos termes o un terme.

Exercici: Indica si les equacions següents són completes o incompletes:

a) $x^2 + 3x + 1 = 0$

c) $x^2 + 2 = 0$

b) $x^2 + x = 0$

d) $2x^2 = 0$

EQUACIONS DE SEGON GRAU

Solució d'una equació de segon grau

Un nombre és solució d'una equació de segon grau si en substituir-lo per x es verifica la igualtat.

Exemple:

Les solucions de l'equació $x^2 - 25 = 0$ són 5 i -5, ja que
$$\begin{cases} 5^2 - 25 = 0 \\ (-5)^2 - 25 = 0 \end{cases}$$

Exercici: Digues si $x = 2$ i $x = -2$ són solució de les equacions següents:

a) $x^2 + 4x + 4 = 0$

b) $-x^2 + 4 = 0$

c) $x^2 - 2x = 0$

Resolució d'equacions de segon grau completes

Per resoldre una equació de segon grau completa, es fa servir la fórmula de l'equació de segon grau:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Exemples: Resol les equacions següents:

1. $x^2 + 5x + 6 = 0$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{-5+1}{2} = \frac{-4}{2} = \boxed{-2} \\ \frac{-5-1}{2} = \frac{-6}{2} = \boxed{-3} \end{cases} \quad \text{Té dues solucions.}$$

Prova:

$$\boxed{x = -2} \rightarrow (-2)^2 + 5 \cdot (-2) + 6 = 0 \rightarrow 4 - 10 + 6 = 0 \rightarrow 0 = 0$$

$$\boxed{x = -3} \rightarrow (-3)^2 + 5 \cdot (-3) + 6 = 0 \rightarrow 9 - 15 + 6 = 0 \rightarrow 0 = 0$$

EQUACIONS DE SEGON GRAU

2. $x^2 - 8x + 12 = 0$

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1} = \frac{+8 \pm \sqrt{64 - 48}}{2} = \frac{+8 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{+8 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{+8+4}{2} = \frac{12}{2} = \boxed{6} \\ \frac{+8-4}{2} = \frac{4}{2} = \boxed{2} \end{cases}$$

Prova:

$$\boxed{x=6} \rightarrow 6^2 - 8 \cdot 6 + 12 = 0 \rightarrow 36 - 48 + 12 = 0 \rightarrow 0 = 0$$

$$\boxed{x=2} \rightarrow 2^2 - 8 \cdot 2 + 12 = 0 \rightarrow 4 - 16 + 12 = 0 \rightarrow 0 = 0$$

Té dues
solucions.

3. $2x^2 + x - 3 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-1 \pm 5}{4} = \begin{cases} \frac{-1+5}{4} = \frac{4}{4} = \boxed{1} \\ \frac{-1-5}{4} = \frac{-6}{4} = \boxed{-\frac{3}{2}} \end{cases}$$

Prova:

$$\boxed{x=1} \rightarrow 2 \cdot 1^2 + 1 - 3 = 0 \rightarrow 2 + 1 - 3 = 0 \rightarrow 0 = 0$$

$$\boxed{x=-\frac{3}{2}} \rightarrow 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right) - 3 = 0 \rightarrow 2 \cdot \frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 3 = 0 \rightarrow \frac{18}{4} - \frac{6}{4} - \frac{12}{4} = \frac{18-18}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

Té dues
solucions.

4. $-3x^2 + 5x - 1 = 0$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-1)}}{2 \cdot (-3)} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 12}}{-6} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{-6} =$$

$$\begin{cases} = \frac{-5 + \sqrt{13}}{-6} = \boxed{\frac{5 - \sqrt{13}}{6}} \approx 0,23 \\ = \frac{-5 - \sqrt{13}}{-6} = \boxed{\frac{5 + \sqrt{13}}{6}} \approx 1,43 \end{cases}$$

Té dues
solucions
irracionals.

Solucions
aproximades

Solucions
exactes

5. $2x^2 + x + 3 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 24}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{-23}}{4} \notin \mathbb{R} \text{ No té cap solució real.}$$

EQUACIONS DE SEGON GRAU

6. $x^2 - 4x + 4 = 0$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{+4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = \frac{+4 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{+4 \pm 0}{2} = \begin{cases} \frac{+4+0}{2} = \boxed{2} \\ \frac{+4-0}{2} = \boxed{2} \end{cases}$$

Prova:

$$\boxed{x=2} \rightarrow 2^2 - 4 \cdot 2 + 4 = 0 \rightarrow 4 - 8 + 4 = 0 \rightarrow 0 = 0$$

Té una única solució.

Solució doble.

Exercici: Resol les equacions següents i fes-ne la prova:

a) $x^2 - 2x - 15 = 0$

(Sol.: $x = 5$ i $x = -3$)

b) $-x^2 + 7x - 10 = 0$

Sol.: $x = 5$ i $x = 2$

c) $x^2 - 12x + 36 = 0$

Sol.: $x = 6$

EQUACIONS DE SEGON GRAU

d) $x^2 - 2x + 3 = 0$

(No té solució)

Nombre de solucions d'una equació de segon grau completa.

Una equació de segon grau amb una incògnita pot tenir **una solució real, dues solucions reals o cap solució real.**

Per saber quantes solucions té una equació de segon grau completa sense haver-la de resoldre, es calcula el **discriminant** de l'equació, que és l'expressió que hi ha dintre de l'arrel quadrada de la fórmula de l'equació de segon grau. El discriminant es representa amb el símbol Δ :

$$\text{Discriminant} = \Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

- Si el discriminant és positiu $\rightarrow$ l'equació té **dues** solucions reals.
- Si el discriminant és negatiu $\rightarrow$ l'equació **no té solucions reals.**
- Si el discriminant és 0 $\rightarrow$ l'equació té **una solució real.**

Exemples: Digueu quantes solucions tenen les equacions següents sense calcular-les:

1. $x^2 - 3x + 1 = 0 \rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 9 - 4 = 5 > 0 \rightarrow$ Té **dues solucions reals.**

2. $x^2 + 3x + 3 = 0 \rightarrow \Delta = 3^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 9 - 12 = -3 < 0 \rightarrow$ **No té solució reals.**

3. $x^2 - 10x + 25 = 0 \rightarrow \Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 100 - 100 = 0 \rightarrow$ Té **una solució real.**

Exercici: Digueu quantes solucions tenen les equacions següents sense calcular-les:

a) $x^2 + 8x + 16 = 0 \rightarrow$

b) $x^2 + x + 10 = 0 \rightarrow$

c) $x^2 - 5x + 1 = 0 \rightarrow$

Sol.: a) Una solució. b) No té solucions reals. c) Dues solucions.

Resolució d'una equació de segon grau incompleta

Equació del tipus $ax^2 + c = 0$ ($b = 0$)

Per resoldre una equació del tipus $ax^2 + c = 0$, n'hi ha prou d'aïllar la incògnita. Vegem-ho en els exemples següents:

Exemples: Resol les equacions següents:

1. $x^2 - 25 = 0 \rightarrow x^2 = 25 \rightarrow x = \pm\sqrt{25} = \pm 5 \rightarrow \boxed{x = 5} \text{ i } \boxed{x = -5}$

Prova: $\begin{cases} x = 5 \rightarrow 5^2 - 25 = 0 \rightarrow 25 - 25 = 0 \rightarrow 0 = 0 \\ x = -5 \rightarrow (-5)^2 - 25 = 0 \rightarrow 25 - 25 = 0 \rightarrow 0 = 0 \end{cases}$

2. $x^2 + 25 = 0 \rightarrow x^2 = -25 \rightarrow x = \pm\sqrt{-25} \rightarrow \text{No té solucions reals.}$

3. $2x^2 - 32 = 0 \rightarrow 2x^2 = 32 \rightarrow x^2 = \frac{32}{2} = 16 \rightarrow x = \pm\sqrt{16} = \pm 4 \rightarrow \boxed{x = 4} \text{ i } \boxed{x = -4}$

Prova: $\begin{cases} x = 4 \rightarrow 2 \cdot 4^2 - 32 = 0 \rightarrow 2 \cdot 16 - 32 = 0 \rightarrow 32 - 32 = 0 \rightarrow 0 = 0 \\ x = -4 \rightarrow 2 \cdot (-4)^2 - 32 = 0 \rightarrow 2 \cdot 16 - 32 = 0 \rightarrow 32 - 32 = 0 \rightarrow 0 = 0 \end{cases}$

4. $4x^2 - 9 = 0 \rightarrow 4x^2 = 9 \rightarrow x^2 = \frac{9}{4} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} = \pm\frac{3}{2} \rightarrow \boxed{x = +\frac{3}{2}} \text{ i } \boxed{x = -\frac{3}{2}}$

Prova: $\begin{cases} x = \frac{3}{2} \rightarrow 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 9 = 0 \rightarrow 4 \cdot \frac{9}{4} - 9 = 0 \rightarrow 9 - 9 = 0 \rightarrow 0 = 0 \\ x = -\frac{3}{2} \rightarrow 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 9 = 0 \rightarrow 4 \cdot \frac{9}{4} - 9 = 0 \rightarrow 9 - 9 = 0 \rightarrow 0 = 0 \end{cases}$

5. $x^2 - 5 = 0 \rightarrow x^2 = 5 \rightarrow x = \pm\sqrt{5} = \pm 2,24 \rightarrow \boxed{x = +\sqrt{5} = 2,24} \text{ i } \boxed{x = -\sqrt{5} = -2,24}$

Prova: $\begin{cases} x = \sqrt{5} \rightarrow (\sqrt{5})^2 - 5 = 0 \rightarrow 5 - 5 = 0 \rightarrow 0 = 0 \\ x = -\sqrt{5} \rightarrow (\sqrt{-5})^2 - 5 = 0 \rightarrow 5 - 5 = 0 \rightarrow 0 = 0 \end{cases}$

Exercicis: Resol les equacions següents i fes-ne la prova:

a) $x^2 - 4 = 0 \rightarrow$

b) $x^2 + 1 = 0 \rightarrow$

c) $3x^2 - 27 = 0 \rightarrow$

d) $x^2 - 3 = 0 \rightarrow$

e) $16x^2 - 25 = 0 \rightarrow$

Sol.: a) ± 2 b) No té solució real c) ± 3 d) $\pm\sqrt{3}$ e) $\pm\frac{5}{4}$

EQUACIONS DE SEGON GRAU

Equació del tipus $ax^2 + bx = 0$ ($c = 0$)

Per resoldre una equació del tipus $ax^2 + bx = 0$, seguim els passos següents:

- Com que el factor x és a tots dos termes, traiem x factor comú:

$$x \cdot (ax + b) = 0$$

- Igualem a 0 cada factor, ja que perquè un producte de dos nombres sigui 0, necessàriament algun dels factors ha de ser 0.

$$x \cdot (ax + b) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \end{cases}$$

- Obtenim una solució directament, $x = 0$, i per calcular l'altra solució resolem l'equació de primer grau que en resulta.

Així, una equació d'aquest tipus sempre té dues solucions i una d'elles és 0.

Exemples: Resol les equacions següents:

1. $x^2 + 4x = 0 \rightarrow x \cdot (x + 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 4 = 0 \rightarrow x = -4 \end{cases} \rightarrow \boxed{x = 0} \text{ i } \boxed{x = -4} \text{ (dues solucions)}$

Prova:
$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow 0^2 + 4 \cdot 0 = 0 \rightarrow 0 = 0 \\ x = -4 \rightarrow (-4)^2 + 4 \cdot (-4) = 0 \\ \rightarrow 16 - 16 = 0 \rightarrow 0 = 0 \end{cases}$$

2. $4x^2 - 12x = 0 \rightarrow x \cdot (4x - 12) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4x - 12 = 0 \rightarrow x = 3 \end{cases} \rightarrow \boxed{x = 0} \text{ i } \boxed{x = 3} \text{ (dues solucions)}$

Prova:
$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow 4 \cdot 0^2 - 12 \cdot 0 = 0 \rightarrow 0 = 0 \\ x = 3 \rightarrow 4 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 = 36 - 36 = 0 \end{cases}$$

3. $5x^2 + x = 0 \rightarrow x \cdot (5x + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 5x + 1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{5} \end{cases} \rightarrow \boxed{x = 0} \text{ i } \boxed{x = -\frac{1}{5}} \text{ (dues solucions)}$

Prova:
$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow 5 \cdot 0^2 + 0 = 0 \rightarrow 0 = 0 \\ x = -\frac{1}{5} \rightarrow 5 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \left(-\frac{1}{5}\right) = 0 \\ \rightarrow 5 \cdot \frac{1}{25} - \frac{1}{5} = \frac{1}{5} - \frac{1}{5} = 0 \rightarrow 0 = 0 \end{cases}$$

EQUACIONS DE SEGON GRAU

Exercicis: Resol les equacions següents i fes-ne la prova:

a) $x^2 - 5x = 0$

b) $3x^2 - 9x = 0$

c) $2x^2 - x = 0$

d) $5x^2 + 6x = 0$

Sol.: a) $x=0$ i $x=5$ b) $x=0$ i $x=3$ c) $x=0$ i $x=\frac{1}{2}$ d) $x=0$ i $x=-\frac{6}{5}$

EXERCICIS: EQUACIONS DE SEGON GRAU UNA INCÒGNITA.

1. Indica quines de les equacions següents són de segon grau:

a) $x^2 + 3x + 1 = 0$

c) $x^2 + x^5 + 2x + 1 = x^2$

e) $x^2 + 4 = 0$

b) $x^3 + x^2 + 2x + 1 = 0$

d) $x + 2x + 1 = 0$

f) $x^4 + x^2 + 3 = 0$

2. Indica si els valors següents són solució de l'equació $x^2 - x - 2 = 0$:

a) $x = 0$

b) $x = 2$

c) $x = -2$

d) $x = -1$

3. Indica els valors de a, b i c:

a) $2x^2 + 3x + 1 = 0$

c) $x^2 + 3x - 10 = 0$

e) $x^2 + x = 0$

b) $-x^2 - 3x + 1 = 0$

d) $x^2 + 10 = 0$

f) $-5x^2 + x - 3 = 0$

4. Resol les equacions següents:

a) $x^2 + 4x + 3 = 0$

d) $x^2 - x - 2 = 0$

g) $2x^2 - 2x - 4 = 0$

b) $x^2 + 7x + 10 = 0$

e) $2x^2 + 2x - 4 = 0$

h) $-x^2 + 3x + 28 = 0$

c) $2x^2 + x - 1 = 0$

f) $16x^2 - 16x + 3 = 0$

i) $3x^2 - 6x + 1 = 0$

5. Resol les equacions següents:

a) $x^2 + 10x + 25 = 0$

c) $2x^2 + 2x + 3 = 0$

e) $x^2 - 6x + 9 = 0$

b) $x^2 + x + 5 = 0$

d) $-3x^2 - 2x - 10 = 0$

f) $x^2 + 2x + 1 = 0$

6. Calcula el discriminant de cada equació i digues si tenen una solució, dues solucions o cap solució.

a) $x^2 + x + 8 = 0$

c) $-3x^2 + x + 2 = 0$

e) $x^2 - 4x + 4 = 0$

b) $2x^2 + 14x + 20 = 0$

d) $-x^2 + 2x - 3 = 0$

f) $-x^2 - 12x - 36 = 0$

7. Resol les equacions següents:

a) $x^2 - 9 = 0$

f) $x^2 - 64 = 0$

k) $4x^2 - 25 = 0$

b) $x^2 + 9 = 0$

g) $x^2 + 64 = 0$

l) $x^2 - 3 = 0$

c) $-x^2 + 1 = 0$

h) $-3x^2 + 27 = 0$

m) $x^2 - 2 = 0$

d) $5x^2 - 125 = 0$

i) $9x^2 - 16 = 0$

n) $-2x^2 + 32 = 0$

e) $x^2 + 3 = 0$

j) $-x^2 - 6 = 0$

o) $2x^2 + 10 = 0$

8. Resol les equacions següents:

a) $x^2 - 2x = 0$

c) $x^2 + 2x = 0$

e) $x^2 - 6x = 0$

b) $3x^2 - 5x = 0$

d) $2x^2 - 10x = 0$

f) $2x^2 - 3x = 0$

9. Resol les equacions següents:

a) $x^2 - x - 2 = 0$

g) $x^2 + 16x + 64 = 0$

m) $-x^2 - 16x - 64 = 0$

b) $2x^2 + x = 0$

h) $x^2 + 1 = 0$

n) $x^2 - 8 = 0$

c) $-x^2 - 4x + 5 = 0$

i) $-5x^2 + 8 = 0$

o) $x^2 + x - 12 = 0$

d) $x^2 - x - 12 = 0$

j) $4x^2 - 12 = 0$

p) $x^2 - 10 = 0$

e) $2x^2 + x + 3 = 0$

k) $4x^2 - 3x = 0$

q) $x^2 - 20x + 100 = 0$

f) $x^2 - 3x + 10 = 0$

l) $x^2 + 16 = 0$

r) $5x^2 + 12x - 15 = 0$

SOLUCIONS: EQUACIONS DE SEGON GRAU AMB UNA INCÒGNITA.

1. a) i e)

2. b) i d) són solució

3.

a) $a = 2; b = 3; c = 1$

c) $a = 1; b = 3; c = -10$

e) $a = 1; b = 1; c = 0$

b) $a = -1; b = -3; c = 1$

d) $a = 1; b = 0; c = 10$

f) $a = -5; b = 1; c = -3$

4.

a) $x = -1$ i $x = -3$

d) $x = -1$ i $x = 2$

g) $x = -1$ i $x = 2$

b) $x = -2$ i $x = -5$

e) $x = 1$ i $x = -2$

h) $x = -4$ i $x = 7$

c) $x = -1$ i $x = \frac{1}{2}$

f) $x = \frac{3}{4}$ i $x = \frac{1}{4}$

i) $x = \frac{3+\sqrt{6}}{3}$ i $x = \frac{3-\sqrt{6}}{3}$

5.

a) $x = -5$ (una solució)

c) No té solucions reals

e) $x = 3$ (una solució)

b) No té solucions reals

d) No té solucions reals

f) $x = -1$ (una solució)

6.

a) Disc. = $-31 < 0 \rightarrow$ No té solucions reals

d) Disc. = $-8 < 0 \rightarrow$ No té solucions reals

b) Disc. = $36 > 0 \rightarrow$ Té dues solucions reals

e) Disc. = $0 \rightarrow$ Té una solució real

c) Disc. = $25 > 0 \rightarrow$ Té dues solucions reals

f) Disc. = $0 \rightarrow$ Té una solució real

7.

a) $x = +3$ i $x = -3$

f) $x = +8$ i $x = -8$

k) $x = +\frac{5}{2}$ i $x = -\frac{5}{2}$

b) No té solucions reals

g) No té solucions reals

l) $x = +\sqrt{3}$ i $x = -\sqrt{3}$

c) $x = +1$ i $x = -1$

h) $x = +3$ i $x = -3$

m) $x = +\sqrt{2}$ i $x = -\sqrt{2}$

d) $x = +5$ i $x = -5$

i) $x = +\frac{4}{3}$ i $x = -\frac{4}{3}$

n) $x = +4$ i $x = -4$

e) No té solucions reals

j) No té solucions reals

o) No té solucions reals

8.

a) $x = 0$ i $x = 2$

c) $x = 0$ i $x = -2$

e) $x = 0$ i $x = 6$

b) $x = 0$ i $x = \frac{5}{3}$

d) $x = 0$ i $x = 5$

f) $x = 0$ i $x = \frac{3}{2}$

9.

a) $x = -1$ i $x = 2$

g) $x = -8$

m) $x = -8$

b) $x = 0$ i $x = -\frac{1}{2}$

h) No té solucions reals

n) $x = +\sqrt{8}$ i $x = -\sqrt{8}$

c) $x = -5$ i $x = 1$

i) $x = +\sqrt{\frac{8}{5}}$ i $x = -\sqrt{\frac{8}{5}}$

o) $x = -4$ i $x = 3$

d) $x = 4$ i $x = -3$

j) $x = +\sqrt{3}$ i $x = -\sqrt{3}$

p) $x = +\sqrt{10}$ i $x = -\sqrt{10}$

e) No té solucions reals

k) $x = 0$ i $x = \frac{3}{4}$

q) $x = 10$

f) No té solucions reals

l) No té solucions reals

r) $x = \frac{-12 \pm \sqrt{444}}{10} = \frac{-6 \pm \sqrt{111}}{5} \approx \begin{cases} 0,91 \\ -3,31 \end{cases}$

SOLUCIONS: EQUACIONS DE SEGON GRAU AMB UNA INCÒGNITA.

Solucions dels exercicis de la teoria

Equacions de segon grau

a) i d)

Forma general d'una equació de segon grau

- c) $a = 3, b = -2, c = 5$ f) $a = 1, b = 0, c = 2$ i) $a = 2, b = 0, c = 0$
d) $a = -1, b = -1, c = -2$ g) $a = 2, b = -1, c = 0$ j) $a = 5, b = 0, c = -5$
e) $a = -1, b = 5, c = 2$ h) Equació de primer grau.

Equacions de segon grau completes i incompletes

Completes: a) Incompletes: b), c), d).

Solucions d'una equació de segon grau

- a) $x = -2$ sí, $x = 2$ no. b) $x = -2$ sí, $x = 2$ sí. c) $x = -2$ no, $x = 2$ sí.

5. EQUACIONS IRRACIONALS

Una equació és **irracional** quan la incògnita es troba sota el signe del radical.

Exemples:

1. $\sqrt{4x} + 3 = x$

2. $\sqrt{3x+1} - x = 1$

En aquest curs només estudiarem equacions irracionals amb un sol radical quadràtic.

Per **resoldre una equació irracional** amb un sol radical quadràtic, seguim els passos següents:

- Aïllem el radical (de manera que quedi sol en un membre).
- Eliminem el radical, elevant al quadrat els dos membres de l'equació* (ja que si dues expressions són iguals també ho seran els seus quadrats: si $a = b$, llavors $a^2 = b^2$).
- Resolem l'equació que en resulta, que ja no és irracional.
- Comprovem les solucions, atès que no totes les solucions de l'equació que resulta d'elevant al quadrat els dos membres han de ser necessàriament solucions de l'equació inicial:

Si $a^2 = b^2$ no sempre és cert que $a = b$ (ex. $3^2 = (-3)^2$ i $3 \neq -3$)

***Nota:** Recorda les fórmules dels productes notables:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

Exemples: Resol les equacions irracionals següents:

1. $\sqrt{4x} + 3 = x$

- Aïllem el radical:

$$\sqrt{4x} = x - 3$$

- Traiem el radical elevant al quadrat els dos membres de l'equació:

$$(\sqrt{4x})^2 = (x-3)^2 \rightarrow 4x = x^2 - 6x + 9 \rightarrow \boxed{x^2 - 10x + 9 = 0}$$

- Resolem l'equació que en resulta:

$$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{+10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \frac{+10 \pm 8}{2} = \begin{cases} \frac{+10+8}{2} = \frac{18}{2} = \boxed{9} \\ \frac{+10-8}{2} = \frac{2}{2} = \boxed{1} \end{cases}$$

- Comprovem les solucions:

$$\left. \begin{aligned} \boxed{x=9} &\rightarrow \sqrt{4 \cdot 9} + 3 = 9 \rightarrow 6 + 3 = 9 \rightarrow 9 = 9 \rightarrow \text{Sí que és solució de l'equació inicial.} \\ \boxed{x=4} &\rightarrow \sqrt{4 \cdot 1} + 3 = 1 \rightarrow 2 + 3 = 1 \rightarrow 5 \neq 1 \rightarrow \text{No és solució de l'equació inicial.} \end{aligned} \right\}$$

→ Solució: $\boxed{x=9}$

2. $\sqrt{3x+1} - x = 1$

- Aïllem el radical:

$$\sqrt{3x+1} = x+1$$

- Traiem el radical elevat al quadrat els dos membres de l'equació:

$$(\sqrt{3x+1})^2 = (x+1)^2 \rightarrow 3x+1 = x^2 + 2x+1 \rightarrow 0 = x^2 + 2x - 3x + 1 - 1 \rightarrow \boxed{x^2 - x = 0}$$

- Resolem l'equació que en resulta:

$$\boxed{x^2 - x = 0} \rightarrow x \cdot (x-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ x-1=0 \rightarrow \boxed{x=1} \end{cases}$$

- Comprovem les solucions:

$$\boxed{x=0} \rightarrow \sqrt{3 \cdot 0 + 1} - 0 = 1 \rightarrow \sqrt{1} - 0 = 1 \rightarrow 1 = 1 \rightarrow \text{Sí que és solució de l'equació inicial.}$$

$$\boxed{x=1} \rightarrow \sqrt{3 \cdot 1 + 1} - 1 = 1 \rightarrow \sqrt{4} - 1 = 1 \rightarrow 2 - 1 = 1 \rightarrow \text{Sí que és solució de l'equació inicial}$$

→ Solucions: $\boxed{x=0}$ i $\boxed{x=1}$

Exercicis: Resol les equacions irracionals següents:

a) $\sqrt{5x} = 10 - x$

Sol. $x=5$ ($x=20$ No)

b) $x + \sqrt{3x - 6} = 8$

Sol. $x = 5$ ($x = 14$ No)

c) $\sqrt{5x + 6} - x = 0$

Sol. $x = 6$ ($x = -1$ No)

6. EQUACIONS EXPONENCIALS I LOGARÍTMQUES

Equacions exponencials

Una equació exponencial és una equació en què la incògnita es troba en l'exponent.

Per resoldre una equació exponencial, hem d'intentar posar els dos membres com a potències de la mateixa base, de manera que puguem igualar els exponents.

Exemples: Resol les equacions exponencials següents:

1. $3^{5+x} = 9$

$$3^{5+x} = 3^2 \rightarrow 5+x = 2 \rightarrow \boxed{x = -3}$$

Prova: $3^{5-3} = 9 \rightarrow 3^2 = 9$

2. $3^{2x-5} = 3^{x+2}$

$$2x-5 = x+2 \rightarrow \boxed{x = 7}$$

Prova: $3^{2 \cdot 7 - 5} = 3^{7+2} \rightarrow 3^9 = 3^9$

3. $5^{3x+1} = 1$

$$5^{3x+1} = 5^0 \rightarrow 3x+1 = 0 \rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{3}}$$

Prova: $5^{3 \cdot (-\frac{1}{3}) + 1} = 1 \rightarrow 5^{-1+1} = 1 \rightarrow 5^0 = 1$

4. $5^{2x+1} = 125$

$$5^{2x+1} = 5^3 \rightarrow 2x+1 = 3 \rightarrow \boxed{x = 1}$$

Prova: $5^{2 \cdot 1 + 1} = 125 \rightarrow 5^3 = 125$

5. $2^{x^2+1} = 4^{x+2}$

$$2^{x^2+1} = (2^2)^{x+2} \rightarrow 2^{x^2+1} = 2^{2 \cdot (x+2)}$$

$$\rightarrow x^2+1 = 2(x+2) \rightarrow x^2+1 = 2x+4$$

$$\rightarrow \boxed{x^2 - 2x - 3 = 0} \rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 3} \\ \boxed{x = -1} \end{cases}$$

Prova:

$$\boxed{x = 3} \rightarrow 2^{3^2+1} = 4^{3+2} \rightarrow 2^{10} = 4^5 \rightarrow 1024 = 1024$$

$$\boxed{x = -1} \rightarrow 2^{(-1)^2+1} = 4^{-1+2} \rightarrow 2^2 = 4^1 \rightarrow 4 = 4$$

6. $4^{2x+1} = (0,5)^{3x+5}$

$$(2^2)^{2x+1} = (2^{-1})^{3x+5} \rightarrow 2^{4x+2} = 2^{-3x-5}$$

$$\rightarrow 4x+2 = -3x-5 \rightarrow \boxed{x = -1}$$

Prova: $4^{2 \cdot (-1) + 1} = (0,5)^{3 \cdot (-1) + 5} \rightarrow 4^{-1} = 0,5^2$

$$\rightarrow \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Exercicis: Resol les equacions exponencials següents:

a) $3^{5+x} = 27$

b) $2^{5+5x} = 8^{3x-1}$

Sol.: a) $x = -2$ b) $x = 2$

EQUACIONS EXPONENCIALS I LOGARÍTMQUES.

Moltes vegades, no podem posar els dos membres com a potències de la mateixa base.

Si tenim una equació exponencial del tipus $a^x = b$ i no podem posar els dos membres com a potències de la mateixa base, procedim de la manera següent:

- Apliquem logaritmes (en base 10 o neperians) als dos membres de l'equació:

$$\log a^x = \log b$$

- Apliquem la propietat dels logaritmes: $\log a^n = n \cdot \log a$:

$$\log a^x = \log b \rightarrow x \cdot \log a = \log b$$

- Aïllem la incògnita i calculem la solució aproximada amb la calculadora:

$$x = \frac{\log b}{\log a}$$

Farem el mateix si, en comptes de tenir la x en l'exponent, tenim una expressió on apareix la x .

Exemples: Resol les equacions exponencials següents:

1. $3^x = 10$

$$\log 3^x = \log 10$$

$$\rightarrow x \cdot \log 3 = \log 10 \rightarrow x = \frac{\log 10}{\log 3} = \frac{1}{\log 3} \approx 2,1$$

(Solució aproximada)

2. $5^{4x-1} = 8$

$$\log 5^{4x-1} = \log 8 \rightarrow (4x-1) \cdot \log 5 = \log 8$$

$$\rightarrow 4x-1 = \frac{\log 8}{\log 5} \rightarrow x = \frac{\frac{\log 8}{\log 5} + 1}{4} \approx 0,57$$

3. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 7$

$$\log \left(\frac{1}{2}\right)^x = \log 7 \rightarrow x \cdot \log \left(\frac{1}{2}\right) = \log 7$$

$$\rightarrow x \cdot (\cancel{\log 1} - \log 2) = \log 7 \rightarrow x = -\frac{\log 7}{\log 2}$$

$\approx -2,81$

4. $5^{\frac{4}{x}} = 3$

$$\log 5^{\frac{4}{x}} = \log 3 \rightarrow \frac{4}{x} \cdot \log 5 = \log 3$$

$$\rightarrow \frac{4}{x} = \frac{\log 3}{\log 5} \rightarrow 4 \cdot \log 5 = x \cdot \log 3$$

$$\rightarrow x = \frac{4 \cdot \log 5}{\log 3} \approx 5,86$$

Exercicis: Resol les equacions exponencials següents:

a) $8^x = 3$

b) $2^{3x+1} = 5$

c) $e^x = \frac{1}{2}$ (pren $\ln$)

d) $e^{\frac{1}{x}} = 5$ (pren $\ln$)

Sol.: a) $x \approx 0,53$

b) $x \approx 0,44$

c) $x = -\ln 2 \approx -0,69$

d) $x = \frac{1}{\ln 5} \approx 0,62$

Equacions logarítmiques

Una **equació logarítmica** és una equació en què la incògnita es troba en l'argument d'un logaritme.

Només estudiarem els casos següents:

Igualtat entre dos logaritmes de la mateixa base

Per resoldre una igualtat entre dos logaritmes de la mateixa base, seguim els passos següents:

- Igualem els arguments i resollem l'equació que en resulta.
- Comprovem si les solucions obtingudes verifiquen l'equació logarítmica, ja que és possible que en substituir una solució en l'equació inicial aparegui algun argument negatiu. En aquest cas, la solució no seria vàlida, atès que no existeix el logaritme d'un nombre negatiu.

EQUACIONS EXPONENCIALS I LOGARÍTMQUES.

Exemples: Resol les equacions logarítmiques següents:

1. $\log_2(x^2 - 3) = \log_2(2x)$

- Igualement els arguments i resollem l'equació que en resulta:

$$x^2 - 3 = 2x \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{2+4}{2} = \boxed{3} \\ \frac{2-4}{2} = \boxed{-1} \end{cases}$$

- Comprovem si les solucions verifiquen l'equació logarítmica:

$$\boxed{x=3} \rightarrow \log_2(3^2 - 3) = \log_2(2 \cdot 3) \rightarrow \log_2 6 = \log_2 6 \text{ Sí que és solució.}$$

$$\boxed{x=-1} \rightarrow \log_2((-1)^2 - 3) = \log_2(2 \cdot (-1)) \rightarrow \log_2(-2) = \log_2(-2) \rightarrow \text{No és solució, ja que } \log_2(-2) \nexists$$

La solució de l'equació de l'enunciat és $\boxed{x=3}$

2. $\ln(5x - 7) = \ln(x + 1)$

- Igualement els arguments i resollem l'equació que en resulta:

$$5x - 7 = x + 1 \rightarrow 4x = 8 \rightarrow \boxed{x=2}$$

- Comprovem si la solució verifica l'equació logarítmica:

$$\ln(5 \cdot 2 - 7) = \ln(2 + 1) \rightarrow \ln 3 = \ln 3$$

Exercicis: Resol les equacions logarítmiques següents:

a) $\log_5(x^2 - x) = \log_5 6$

b) $\log(x - 12) = \log(5x)$

Sol.: a) $x = 3$ i $x = -2$ b) No té solució

EQUACIONS EXPONENCIALS I LOGARÍTMQUES.

Igualtat entre un logaritme i un nombre

Per resoldre una igualtat entre un logaritme i un nombre, seguim els passos següents:

- Apliquem la definició de logaritme (la base elevada al logaritme és igual a l'argument) i resollem l'equació que en resulta.
- Comprovem si les solucions obtingudes verifiquen l'equació logarítmica.

Exemples: Resol les equacions logarítmiques següents:

1. $\log_5(3x + 1) = 2$

- Apliquem la definició de logaritme i resollem l'equació que en resulta:

$$5^2 = 3x + 1 \rightarrow 25 = 3x + 1 \rightarrow 24 = 3x \rightarrow \boxed{x = 8}$$

- Comprovem si les solucions obtingudes verifiquen l'equació logarítmica.

$$\log_5(3 \cdot 8 + 1) = 2 \rightarrow \log_5 25 = 2 \rightarrow 5^2 = 25 \quad \text{Sí que és solució.}$$

1. $\ln(4x + 5) = 0$

- Apliquem la definició de logaritme (la base elevada al logaritme és igual a l'argument):

$$e^0 = 4x + 5 \rightarrow 1 = 4x + 5 \rightarrow -4 = 4x \rightarrow \boxed{x = -1}$$

- Comprovem si les solucions obtingudes verifiquen l'equació logarítmica.

$$\ln(4 \cdot (-1) + 5) = 0 \rightarrow \ln 1 = 0 \quad \text{Sí que és solució.}$$

Exercicis: Resol les equacions logarítmiques següents:

a) $\ln x = 5$

b) $\log_5(x + 1) = 2$

Sol.: a) $x = e^5$ b) $x = 24$

SOLUCIONS: EQUACIONS EXPONENCIALS I LOGARÍTMQUES.

1. Resol les equacions exponencials següents:

a) $3^{x+1} = 81$

g) $10^x = 5$

b) $2^{x-2} = 128$

h) $e^x = 3$

c) $4^{x-6} = 16^{-x}$

i) $e^{3x+1} = 2$

d) $5^{2x-5} = 125^{\frac{x}{2}}$

j) $e^x = \frac{1}{4}$

e) $7^{4x-2} = 1$

k) $2^{5x-4} = 3$

f) $5^x = 2$

l) $4^{x+5} = 5$

2. Resol les equacions logarítmiques següents:

a) $\ln(x^2 - 5) = \ln(x - 3)$

f) $\ln(2x + 1) = 2$

b) $\log_3(x + 4) = \log_3(2x)$

g) $\log(5x) = 2$

c) $\log_5 x = 3$

h) $\log(x - 3) = 0$

d) $\log_3(x - 4) = 2$

i) $\log_8(2x) = 0$

e) $\log_2(4x + 20) = 5$

SOLUCIONS: EQUACIONS EXPONENCIALS I LOGARÍTMQUES.

1.

a) $x = 3$

g) $x = \log 5 \approx 0,7$

b) $x = 9$

h) $x = \ln 3 \approx 1,1$

c) $x = 2$

i) $x = \frac{\ln 2 - 1}{3} \approx -0,1$

d) $x = 10$

j) $x = -\ln 4 \approx -1,39$

e) $x = \frac{1}{2}$

k) $x = \frac{1}{5} \left(\frac{\ln 3}{\ln 2} + 4 \right) \approx 1,12$

f) $x = \frac{\ln 2}{\ln 5} \approx 0,43$

l) $\frac{\ln 5}{\ln 4} - 5 \approx -3,84$

2.

a) No té solució.

d) $x = 13$

g) $x = 20$

b) $x = 4$

e) $x = 3$

h) $x = 4$

c) $x = 125$

f) $x = \frac{e^2 - 1}{2} = 3,19$

i) $x = \frac{1}{2}$

8. INTERÈS SIMPLE I COMPOST

En aquest apartat utilitzarem la nomenclatura indicada en el quadre següent:

Nomenclatura:

r = taxa d'interès anual en tant per cent.

$i = r/100$ = taxa d'interès anual en tant per 1.

t = temps expressat en anys.

I = interessos produïts durant t anys.

C_0 = capital inicial.

C = capital final.

Interès simple

Un capital està invertit a **interès simple** quan els interessos produïts al final de cada període de temps es retiren i, per tant, no se sumen al capital inicial per generar més interessos.

Per calcular l'interès produït per un capital invertit a interès simple i el capital final obtingut, utilitzem les fórmules següents:

Fórmules:

$$I = C_0 \cdot i \cdot t$$

$$C = C_0 + I$$

Exemple:

En quina quantitat es transformaran 15.000 € invertits a un interès simple del 2,5% anual durant 8 anys? Quins interessos generarà aquesta operació?

$$I = 15.000 \cdot 0,025 \cdot 8 = 3.000 \text{ €} \rightarrow \text{Interessos que genera l'operació}$$

$$C = 15.000 + 3.000 = 18.000 \text{ €} \rightarrow \text{Capital final}$$

Es transformaran en 18.000 € i l'operació generarà 3.000 € d'interessos.

Exercicis:

1. Quin capital final s'obtindrà d'una imposició en una entitat financera de 1.250 € a un tipus d'interès simple del 2% anual durant dos anys?

INTERÈS SIMPLE I COMPOST

2. Quin tipus d'interès es necessita per duplicar en 8 anys un capital a interès simple i venciment anual?

Sol.: 1. 1.300 € 2. 25%

Interès compost

Un capital està invertit a **interès compost** si els interessos produïts al final de cada període de temps no es retiren, es reinverteixen, i per tant, se sumen al capital inicial per generar més interessos.

Per calcular l'interès produït per un capital invertit a interès compost i el capital final obtingut, utilitzem les fórmules següents:

Fórmules:

$$C = C_0 \cdot (1+i)^t$$

$$I = C - C_0$$

Exemple:

En quina quantitat es transformaran 15.000 € invertits a un interès compost del 2,5% anual durant 8 anys? Quins interessos generarà aquesta operació?

$$C = 15.000 \cdot 1,025^8 = 18.276,04 \text{ €} \rightarrow \text{Capital final}$$

$$I = 18.276,04 - 15.000 = 3.276,04 \text{ €} \rightarrow \text{Interessos que genera l'operació}$$

Es transformaran en 18.276,04 € i l'operació generarà 3.276 € d'interessos.

Exercicis:

1. Quin capital final s'obtindrà d'una imposició en una entitat financera de 1.250 € a un tipus d'interès compost del 2% anual durant dos anys?

INTERÈS SIMPLE I COMPOST

2. Quin tipus d'interès es necessita per duplicar en 8 anys un capital a interès compost i venciment anual?

3. Durant quants anys he d'invertir un capital a un tipus d'interès compost del 4% anual perquè es dupliqui?

Sol.: 1. 1.300,5 € 2. 9,05% 3. 17,67 anys

TEMA 3: POLINOMIS

1. Polinomis
2. Operacions amb polinomis
3. Teorema del residu
4. Arrels d'un polinomi
5. Factorització
6. Divisibilitat de polinomis
7. Fraccions algebraiques

POLINOMIS

1. POLINOMIS

Monomis

Un **monomi** és una expressió algebraica formada pel producte d'un nombre real, anomenat **coeficient**, i una o diverses variables (o indeterminades) elevades a un exponent natural o zero. La part del monomi formada per les variables i els seus exponents s'anomena **part literal**.

Exemples:

1. $2x^3y^2$

Coeficient: 2

Part literal: x^3y^2

Part literal: x^5z

2. $3ab$

Coeficient: 3

Part literal: ab

3. $5x^2$

Coeficient: 5

4. $3\pi x^5z$

Coeficient: 3π

Part literal: x^2

Estudiarem només monomis amb una sola variable o indeterminada (que normalment serà x).

Grau d'un monomi

El **gra**u d'un monomi amb una indeterminada és l'exponent al qual està elevada la variable.

Exemple: Indica el coeficient, la part literal i el grau del monomi $5x^3$:

Coeficient ← 5 x^3 → Grau
Part literal

Un nombre real a diferent de zero es considera un monomi de grau zero:

$$\begin{cases} a = ax^0 = a \cdot 1 & (x^0 = 1) \\ 3 = 3x^0 = 3 \cdot 1 \end{cases}$$

Exercici: Completa la taula:

Monomi	Coeficient	Part literal	Variable	Grau
$3y^5$				
$-\frac{10}{3}x^3$				
$3z$				
$-0,25p^8$				

POLINOMIS

Monomis semblants

Dos o més monomis són **semblants** si tenen la mateixa part literal.

Exemples:

1. $2x^2$, $5x^2$ i $-3x^2$ són semblants
2. $5x$ i $3x^2$ no són semblants
3. $3x$ i $2y$ no són semblants

Si treballem amb una sola variable o indeterminada, x , els monomis semblants són aquells que tenen el mateix grau.

Polinomis

Un **polinomi** és una expressió algebraica formada per la suma de diversos monomis no semblants.

Només estudiarem polinomis amb una indeterminada.

Els polinomis se solen representar amb una lletra majúscula i la indeterminada, x , entre parèntesis: $P(x)$, $Q(x)$, $A(x)$, etc.

Exemples:

- Són polinomis:

1. $P(x) = 8x^4 - 3x^3 + 2x + 10$

2. $Q(x) = -5x^5 - \frac{3}{2}x^4 - x^3 + 9x^2 - x - 6$

- No són polinomis:

3. $2x^{-2} + 5x - 3 \rightarrow$ l'exponent del primer terme és negatiu.

4. $\frac{3}{x} + 2x + 1 \rightarrow$ l'exponent del primer terme és negatiu.

5. $6x^3 - \sqrt{x} + 2x^2 + 7 \rightarrow$ l'exponent del segon terme és una fracció.

6. $5^x + 2x + 6 \rightarrow$ la indeterminada és en l'exponent.

Nota:

$$\frac{3}{x} = 3x^{-1}$$

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

Els monomis d'un polinomi s'anomenen també **termes** del polinomi.

El **grau d'un polinomi** és el més gran dels graus de tots els seus monomis.

El **terme independent** d'un polinomi és el monomi de grau 0, és a dir, el monomi format per un nombre real (sense variable).

Un **binomi** és un polinomi format per dos monomis no semblants (Exemple: $2x^3 + x$).

POLINOMIS

Un **trinomi** és un polinomi format per tres monomis no semblants (Exemple: $2x^3 + x + 1$).

Escrivim els termes dels polinomis ordenats de major a menor grau. Si un grau no apareix, es diu que el seu coeficient és 0 i que el polinomi és incomplet.

Exemple:

$x^6 + 3x^3 - 5x^2 + 2x + 9 \rightarrow$ és un polinomi incomplet (no apareixen els termes de grau 5 i 4), format per 5 termes, de grau 6 i de terme independent 9.

Grau $\leftarrow x^{\boxed{6}} + 3x^3 - 5x^2 + 2x + \boxed{9} \rightarrow$ Terme independent

En general, un polinomi en la indeterminada x és de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \text{ en}$$

què: $\begin{cases} n \text{ és el grau.} \\ a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \text{ són els coeficients.} \\ a_0 \text{ és el terme independent.} \end{cases}$

Exercicis: Completa la taula:

Polinomi	Grau	Terme independent	Nombre de termes	Complet o incomplet?	Coeficient del terme de grau 3
$P(x) = 5x^4 - 3x^3 + 2x + 10$					
$Q(x) = -5x^5 - \frac{3}{2}x^4 - x^3 + 9x^2 - 6$					
$R(x) = 4x^2 + x + 1$					
$S(x) = 5x^2 + 2x^5 + 9x$					
$T(x) = 3x - 2$					
$U(x) = x^3 - 4x^2 + x + 1$					

Valor numèric d'un polinomi

El valor numèric d'un polinomi $P(x)$ per a $x = a$ (on a és un nombre real) és el nombre que s'obté en substituir la variable x per a i fer les operacions. Es representa amb $P(a)$.

Exemples: Donat el polinomi:

$$P(x) = -3x^4 - 2x^3 - x^2 - 1$$

Calcula el valor numèric de $P(x)$ en $x = 2$ i $x = -2$, és a dir, calcula $P(2)$ i $P(-2)$.

$$P(2) = -3 \cdot 2^4 - 2 \cdot 2^3 - 2^2 - 1 = -3 \cdot 16 - 16 - 4 - 1 = \boxed{-69}$$

(*Nota: $-2^2 = -4 \neq (-2)^2 = +4$)

$$P(-2) = -3 \cdot (-2)^4 - 2 \cdot (-2)^3 - (-2)^2 - 1 = -3 \cdot 16 - 2 \cdot (-8) - (+4) - 1 = -48 + 16 - 4 - 1 = \boxed{-37}$$

Exercicis:

1. Donat el polinomi:

$$P(x) = -x^4 + 2x^3 - 5x^2 + x + 3$$

Calcula el valor numèric de $P(x)$ per a $x = 2$ i $x = -1$, és a dir, calcula $P(2)$ i $P(-1)$.

2. Calcula el valor numèric dels polinomis següents per a $x = 3$, $x = -1$ i $x = 0$:

a) $P(x) = 6x^3 - x^2 - 3$

b) $Q(x) = -3x^4 + 2x^3 + 7x^2 - x + 5$

POLINOMIS

c) $R(x) = 8$

d) $S(x) = x^3 - 1$

Sol:

1. $P(2) = -15$ i $P(-1) = -6$

2. a) $P(3) = 150$; $P(-1) = -10$ i $P(0) = -3$

c) $R(3) = 8$; $R(-1) = 8$ i $R(0) = 8$

b) $Q(3) = -124$; $Q(-1) = 8$ i $Q(0) = 5$

d) $S(3) = 26$; $S(-1) = -2$ i $S(0) = -1$

EXERCICIS: POLINOMIS

1. Indica quines de les següents expressions algebraiques són polinomis:

a) $7x^2 + 4,9x$

b) $4\sqrt{x^3} + x^2 - 5$

c) $\sqrt{2}x^2 + \pi x + 1$

d) $\frac{7}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$

e) $\frac{5}{x} + 3x^2 - 1$

f) $\frac{5x^3 + 1}{x - 1}$

2. Completa el quadre:

Polinomi	Grau	Terme independent	Nombre de termes o monomis	Complet o incomplet?	Coeficient del terme de grau 3
$P(x) = 5x^5 - x^3 + x + 9$					
$Q(x) = x^5 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 + x + 7$					
$R(x) = x^2 + 1$					
$S(x) = x^2 + x^4 - 5$					
$T(x) = x^3 + 3x^2 - 2x$					
$U(x) = -5x^3 + x^2 - x - 1$					

3. Calcula el valor numèric dels polinomis següents per a $x = 3$, $x = -2$ i $x = 0$:

a) $P(x) = x^4 - x^3 + 1$

b) $Q(x) = -3x^2 + x - 1$

c) $R(x) = x^3 - 3$

d) $S(x) = -2$

e) $T(x) = x^4 - 5x^3 - x^2 + 10$

SOLUCIONS: POLINOMIS

Solucions:

1. a) c) i d)

2. $P(x) \rightarrow 5; 9; 4$; incomplet; -1 // $Q(x) \rightarrow 5; 7; 6$; complet; $-2/3$ // $R(x) \rightarrow 2; 1; 2$; incomplet; 0 // $S(x) \rightarrow 4; -5; 3$; incomplet; 0 // $T(x) \rightarrow 3; 0; 3$; incomplet; 1 // $U(x) \rightarrow 3; -1; 4$; complet; -5 .

3. a) $P(3) = 55; P(-2) = 25$ i $P(0) = 1$

b) $Q(3) = -25; Q(-2) = -15$ i $Q(0) = -1$

c) $R(3) = 24; R(-2) = -11$ i $R(0) = -3$ d)

$S(3) = -2; S(-2) = -2$ i $S(0) = -2$

e) $T(3) = -53; T(-2) = 62$ i $T(0) = 10$

Solucions dels exercicis de la teoria:

Monomis

$3y^5 \rightarrow 3; y^5; y; 5$ // $-\frac{10}{3}x^3 \rightarrow -\frac{10}{3}; x^3; x; 3$ // $3z \rightarrow 3; z; z; 1$ // $-0,25p^8 \rightarrow -0,25; p^8;$

$p; 8$.

Polinomis

a) $P(x) \rightarrow 4; 10; 4$; incomplet; -3 // $Q(x) \rightarrow 5; -6; 5$; incomplet; -1 // $R(x) \rightarrow 2; 1; 3$; complet;

0 // $S(x) \rightarrow 5; 0; 3$; incomplet; 0 // $T(x) \rightarrow 1; -2; 2$; complet; 0 // $U(x) \rightarrow 3; 1; 4$; complet; 1 .

OPERACIONS AMB POLINOMIS

2. OPERACIONS AMB POLINOMIS

Suma i resta de polinomis

Suma i resta de monomis

Dos monomis es poden sumar o restar si són semblants.

Per **sumar o restar monomis**, sumem o restem els coeficients i deixem invariant la part literal:

$$ax^n + bx^n = (a+b)x^n$$

Exemple:

$$\boxed{2}x^3 + \boxed{5}x^3 = \boxed{7}x^3$$

Si hi ha coeficients amb signe negatiu, apliquem les regles de la suma i la resta de nombres enters.

Exemples:

1. $7x^3 - 5x^3 = 2x^3$

2. $x^2 - 3x^2 = -2x^2$

3. $-2x^6 - 8x^6 = -10x^6$

Exercici: Fes les sumes de monomis següents:

a) $7x^4 - 8x^4 =$

b) $-9x^5 + 5x^5 =$

c) $-10x^7 - x^7 =$

Suma de polinomis

Per **sumar dos polinomis**, sumem els seus termes semblants (del mateix grau).

Exemple: Suma els polinomis següents:

$$P(x) = 5x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x + 6$$

$$Q(x) = x^3 - 3x^2 - 5x - 3$$

$$P(x) + Q(x) = (5x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x + 6) + (x^3 - 3x^2 - 5x - 3) = \boxed{5x^4 - x^3 - 2x^2 - 13x + 3}$$

Exercici: Suma els polinomis següents:

$$P(x) = x^5 - x^4 - 9x^3 + 5x^2 - x - 4$$

$$Q(x) = x^6 - 3x^5 - x^4 + 3x^2 + x - 1$$

$$P(x) + Q(x) =$$

Sol.: $P(x) + Q(x) = x^6 - 2x^5 - 2x^4 - 9x^3 + 8x^2 - 5$

Resta de polinomis

Donats dos polinomis P i Q , per trobar el **polinomi resta** $P - Q$, sumem al polinomi P el polinomi $-Q$, que és el que s'obté en canviar de signe tots els termes de Q :
 $P - Q = P + (-Q)$.

OPERACIONS AMB POLINOMIS

Exemple: Efectua la resta $P(x) - Q(x)$:

$$P(x) = 5x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x + 6 \quad Q(x) = x^3 - 3x^2 - 5x - 3$$

$$\begin{aligned} P(x) - Q(x) &= (5x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x + 6) - (x^3 - 3x^2 - 5x - 3) = \\ &= 5x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x + 6 - x^3 + 3x^2 + 5x + 3 = \boxed{5x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 9} \end{aligned}$$

Exercici: Efectua la resta $P(x) - Q(x)$:

$$P(x) = x^5 - x^4 - 9x^3 + 5x^2 - x - 4 \quad Q(x) = x^6 - 3x^5 - x^4 + 3x^2 + x - 1$$

$$P(x) - Q(x) =$$

$$\text{Sol.: } P(x) - Q(x) = -x^6 + 4x^5 - 9x^3 + 2x^2 - 2x - 3$$

Multiplicació de polinomis

Multiplicació de monomis

Per multiplicar dos monomis, multipliquem els seus coeficients i sumem els exponents:

$$ax^n \cdot bx^m = (a \cdot b)x^{n+m}$$

Exemple:

$$\boxed{2}x^{\boxed{3}} \cdot \boxed{5}x^{\boxed{2}} = \boxed{10}x^{\boxed{5}}$$

Exemples:

$$(+7x^3) \cdot (-5x^2) = -35x^5$$

$$(+x^2) \cdot (-3x^2) = -3x^4$$

$$5x^3 \cdot 4 = 20x^3$$

$$(-2x^4) \cdot (-8x) = 16x^5$$

$$(-5x) \cdot (+3x) = -15x^2$$

$$3x^2 \cdot x = 3x^3$$

Exercici: Fes les multiplicacions de monomis següents:

$$\text{a) } (-7x^3) \cdot (-2x^3) =$$

$$\text{c) } (+2x^2) \cdot (-5x) =$$

$$\text{e) } 2x^4 \cdot 8x =$$

$$\text{b) } (-2x^5) \cdot (-6) =$$

$$\text{d) } -5x \cdot 3x^3 =$$

$$\text{f) } \frac{2}{3}x^2 \cdot (-9) =$$

Multiplicació de polinomis

Per multiplicar dos polinomis P i Q , multipliquem cada monomi de P per tots els de Q i simplifiquem el resultat (sumant els monomis semblants).

OPERACIONS AMB POLINOMIS

Exemple: Multiplica els polinomis següents:

$$P(x) = -2x^3 + x^2 + 6$$

$$Q(x) = -3x^2 - 5x - 3$$

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= (-2x^3 + x^2 + 6) \cdot (-3x^2 - 5x - 3) = \\ &= (-2x^3) \cdot (-3x^2) + (-2x^3) \cdot (-5x) + (-2x^3) \cdot (-3) + (x^2) \cdot (-3x^2) + (x^2) \cdot (-5x) + (x^2) \cdot (-3) + \\ &+ (+6) \cdot (-3x^2) + (+6) \cdot (-5x) + (+6) \cdot (-3) = \\ &= 6x^5 + 10x^4 + 6x^3 - 3x^4 - 5x^3 - 3x^2 - 18x^2 - 30x - 18 = \boxed{6x^5 + 7x^4 + x^3 - 21x^2 - 30x - 18} \end{aligned}$$

Exercici: Multiplica els polinomis següents:

$$P(x) = -x^4 + 5x^2 - 4$$

$$Q(x) = +3x^2 + x - 1$$

$$\text{Sol.: } -3x^6 - x^5 + 16x^4 + 5x^3 - 17x^2 - 4x + 4$$

Divisió de polinomis

Divisió de monomis

Per dividir dos monomis, dividim els seus coeficients i restem els exponents:

$$ax^n : bx^m = (a : b) x^{n-m}$$

Exemple:

$$\boxed{8}x^5 : \boxed{2}x^2 = \boxed{4}x^3$$

Per dividir dos monomis, cal que el grau del dividend sigui més gran que el grau del divisor ($n > m$); altrament, la resta dels exponents seria un nombre negatiu i el resultat no seria un monomi.

Si la divisió dels coeficients no és exacta, es deixa el resultat en forma de fracció irreductible (simplificada).

Exemples:

$$(+15x^3) : (-5x^2) = -3x$$

$$(+9x^2) : (-3x^2) = -3x^0 = -3$$

$$20x^3 : 4 = 5x^3$$

$$(-16x^4) : (-8x) = 2x^3$$

$$(-5x^5) : (+3x^3) = -\frac{5}{3}x^2$$

$$3x^2 : 2x = \frac{3}{2}x$$

Nota: $10x^2 : 2x^3 \rightarrow$ no es pot fer la divisió perquè $2 < 3$ i el resultat ($5x^{-1}$) no seria un monomi.

OPERACIONS AMB POLINOMIS

Exercici: Fes les divisions de monomis següents:

a) $(-10x^6) : (-2x^3) =$

c) $(+2x) : (-5x) =$

e) $-8x^5 : 4x =$

b) $(-6x^5) : (-2) =$

d) $-5x^4 : 3x^3 =$

f) $18x : (-9x^3) =$

Divisió de polinomis

Per **dividir un polinomi $P(x)$** (polinomi dividend) entre un altre **$D(x)$** (polinomi divisor), essent $\text{grau } P(x) > \text{grau } D(x)$, hem de trobar dos polinomis **$Q(x)$** (polinomi quocient) i **$R(x)$** (polinomi residu) que verifiquin que:

$$P(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x) \quad , \text{ amb grau } R(x) < \text{grau } D(x).$$

(Dividend = Quocient · divisor + residu)

En format de divisió ho escriuríem així:

$$\begin{array}{r|l} P(x) & D(x) \\ R(x) & Q(x) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Dividend} \\ \text{Residu} \end{array} \quad \begin{array}{r|l} & \\ & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Divisor} \\ \text{Quocient} \end{array}$$

Analogia amb nombres:

$$\begin{array}{r|l} 9 & 2 \\ 1 & 4 \end{array} \quad 1 < 2$$

Prova : $4 \cdot 2 + 1 = 9$

Per fer una divisió de dos polinomis, seguim els passos indicats en l'exemple següent:

Exemple: Fes la divisió següent: $(2x^3 - x^2 + 2) : (2x^2 + x)$

Escrivim els polinomis en forma de divisió ordenant els seus monomis de major a menor grau i deixant un espai en blanc per cada grau que no apareix del polinomi dividend .

$$\begin{array}{r|l} \underbrace{2x^3 - x^2}_{\text{dividend}} + 2 & \underbrace{2x^2 + x}_{\substack{\uparrow \\ \text{divisor}}} \end{array}$$

Dividim el primer terme del dividend pel primer terme del divisor. El resultat serà el primer terme del quocient:

$$2x^3 : 2x^2 = x$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - x^2 + 2 & \underline{2x^2 + x} \\ & x \end{array}$$

Multipliquem aquest primer terme del quocient per tots els termes del divisor i restem el resultat al dividend (col·locant els resultats del producte canviats de signe sota el dividend i fent la suma):

$$x \cdot (2x^2 + x) = 2x^3 + x^2$$

Canviem de signe per restar: $-2x^3 - x^2$

Sumem: $2x^3 - x^2 + 2 - 2x^3 - x^2 = -2x^2 + 2$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - x^2 + 2 & \underline{2x^2 + x} \\ -2x^3 - x^2 & x \\ \hline -2x^2 + 2 & \end{array}$$

OPERACIONS AMB POLINOMIS

Si el grau del residu obtingut en el pas anterior és més gran o igual que el grau del divisor, aquest residu passarà a ser el nou dividend. Repetim el procés fins que el grau del residu sigui menor que el del divisor. L'últim residu obtingut serà el residu de la divisió. Dividim: $-2x^2 : 2x^2 = -1$ Multipliquem: $-1 \cdot (2x^2 + x) = -2x^2 - x$ Canviem de signe: $+2x^2 + x$ Sumem: $-2x^2 + 2 + 2x^2 + x = x + 2$	$ \begin{array}{r} 2x^3 - x^2 + 2 \quad \quad 2x^2 + x \\ \underline{-2x^3 - x^2} \\ -2x^2 + 2 \\ \underline{+ 2x^2 + x} \\ x + 2 \end{array} $ Quocient Residu $gr(x+2) < gr(2x^2+x) \rightarrow$ S'ha acabat la divisió
<u>Fem la prova</u> comprovant que es verifica: Quocient · divisor + residu = Dividend	$(x-1) \cdot (2x^2 + x) + x + 2$ $= 2x^3 + x^2 - 2x^2 - x + x + 2 = \boxed{2x^3 - x^2 + 2}$

Exemples: Fes les divisions següents:

1. $(2x^3 + 3x^2 - 5x + 4) : (x^2 - 2x + 3)$

$$\begin{array}{r}
 2x^3 + 3x^2 - 5x + 4 \quad | \quad x^2 - 2x + 3 \\
 \underline{-2x^3 + 4x^2 - 6x} \\
 +7x^2 - 11x + 4 \\
 \underline{-7x^2 + 14x - 21} \\
 +3x - 17
 \end{array}$$

Així tenim que el quocient és $\boxed{Q(x) = 2x + 7}$

i el residu és $\boxed{R(x) = 3x - 17}$

Prova: Es verifica $2x^3 + 3x^2 - 5x + 4 = (x^2 - 2x + 3)(2x + 7) + 3x - 17$?

$$\begin{aligned}
 (x^2 - 2x + 3)(2x + 7) + 3x - 17 &= 2x^3 + 7x^2 - 4x^2 - 14x + 6x + 21 + 3x - 17 = \\
 &= \boxed{2x^3 + 3x^2 - 5x + 4}
 \end{aligned}$$

OPERACIONS AMB POLINOMIS

2. $(4x^4 - 3x^2 + 5) : (2x^2 - 3x)$

$$\begin{array}{r}
 4x^4 \qquad -3x^2 \qquad +5 \quad \overline{) 2x^2 - 3x} \\
 \underline{-4x^4 + 6x^3} \qquad \qquad \qquad \\
 +6x^3 - 3x^2 \qquad +5 \\
 \underline{-6x^3 + 9x^2} \qquad \qquad \qquad \\
 +6x^2 \qquad +5 \\
 \underline{-6x^2 + 9x} \qquad \qquad \qquad \\
 +9x +5
 \end{array}$$

Així tenim que el quocient és

$$Q(x) = 2x^2 + 3x + 3$$

i el residu és $R(x) = 9x + 5$

Prova: Es verifica $4x^4 - 3x^2 + 5 = (2x^2 + 3x + 3)(2x^2 - 3x) + 9x + 5$?

$$(2x^2 + 3x + 3)(2x^2 - 3x) + 9x + 5 = 4x^4 - 6x^3 + 6x^3 - 9x^2 + 6x^2 - 9x + 9x + 5 = 4x^4 - 3x^2 + 5$$

Exercici: Fes les divisions següents i les proves corresponents:

a) $(x^4 - 2x^2 + 6x) : (x^2 - x + 3)$

b) $(6x^3 - 2x^2 + 7) : (3x^2 + 2x)$

Sol.: a) $Q(x) = x^2 + x - 4; R(x) = -x + 12$ b) $Q(x) = 2x - 2; R(x) = 4x + 7$

OPERACIONS AMB POLINOMIS

Si el quocient dels coeficients no és un nombre enter treballem amb fraccions.

Exemple: Fes la divisió següent: $(2x^3 - 3x + 5) : (2x + 1)$

$$\begin{array}{r}
 2x^3 \quad -3x + 5 \quad | \quad 2x + 1 \\
 \underline{-2x^3 - x^2} \\
 / \quad -x^2 - 3x + 5 \\
 \quad x^2 + \frac{1}{2}x \\
 \quad \underline{ - \frac{5}{2}x + 5} \\
 \quad \quad \frac{5}{2}x + \frac{5}{2} \\
 \quad \underline{ - \frac{5}{2}x + \frac{5}{2}} \\
 \quad \quad \frac{25}{2} \\
 \quad \quad \underline{ - \frac{25}{2}} \\
 \quad \quad \frac{25}{4}
 \end{array}$$

Així tenim que el quocient és

$$Q(x) = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$$

i el residu és $R(x) = \frac{25}{4}$

Prova: Es verifica $2x^3 - 3x + 5 = \left(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}\right) \cdot (2x + 1) + \frac{25}{4}$?

$$\begin{aligned}
 \left(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}\right) \cdot (2x + 1) + \frac{25}{4} &= 2x^3 + x^2 - x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}x - \frac{5}{4} + \frac{25}{4} = 2x^3 - \frac{6}{2}x + \frac{20}{4} = \\
 &= \boxed{2x^3 - 3x + 5}
 \end{aligned}$$

Exercici: Fes les divisions següents i les proves corresponents:

a) $(x^2 - 5x + 1) : (3x - 5)$

b) $(3x^3 - x + 8) : (2x^2 + x)$

Sol.: a) $Q(x) = \frac{1}{3}x - \frac{10}{9}$; $R(x) = -\frac{41}{9}$

b) $Q(x) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}$; $R(x) = -\frac{1}{4}x + 8$

OPERACIONS AMB POLINOMIS

Regla de Ruffini

La regla de Ruffini és un procediment senzill per a dividir polinomis quan el divisor és del tipus $x - a$ o $x + a$, en què a és un nombre real.

Exemple: Podem utilitzar la regla de Ruffini en els casos següents?:

$(x^2 + 3x + 5):(x - 4) \rightarrow$ Sí, perquè el divisor és del tipus $x - a$ en què $a = 4$.

$(x^2 + 3x + 5):(x + 4) \rightarrow$ Sí, perquè el divisor és del tipus $x + a$ amb $a = 4$.

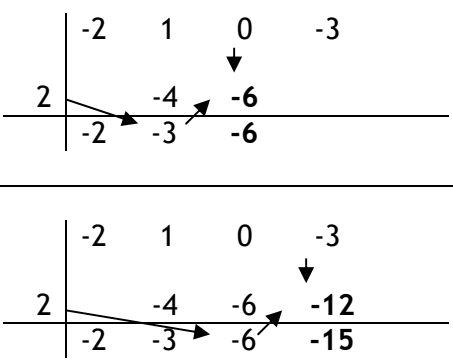
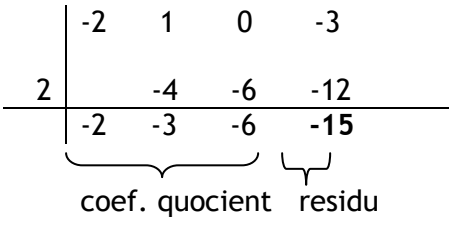
$(x^2 + 3x + 5):(x^2 - 4) \rightarrow$ No, perquè el divisor és del tipus $x^2 - a$.

Per aplicar la regla de Ruffini, seguim els passos indicats en l'exemple següent:

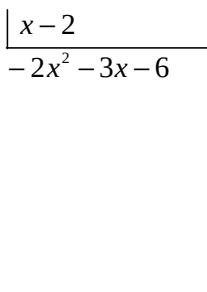
Exemple: Fes la divisió següent aplicant la regla de Ruffini: $(-2x^3 + x^2 - 3):(x - 2)$

Anotem els coeficients del polinomi dividend, ordenats de major a menor grau, i tenint en compte que si un grau no apareix el coeficient és 0. Els col·loquem com en l'exemple.	$\begin{array}{r rrrr} & -2 & 1 & 0 & -3 \\ \hline \end{array}$
A baix i a l'esquerra escrivim el terme independent del polinomi divisor canviat de signe: si el divisor és $x - 2$, escrivim 2. Si el polinomi divisor fos $x + 2$ escriuríem -2 .	$\begin{array}{r rrrr} & -2 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & \hline \end{array}$
Baixem el primer coeficient del dividend (en aquest exemple, -2).	$\begin{array}{r rrrr} & -2 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & \downarrow & & & \\ \hline & -2 & & & \end{array}$
Multipliquem aquest coeficient pel terme independent del divisor canviat de signe i escrivim el resultat a sota del següent coeficient del dividend: $2 \cdot (-2) = -4$	$\begin{array}{r rrrr} & -2 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & \swarrow & \nearrow & & \\ & -2 & -4 & & \hline \end{array}$
Sumem el segon coeficient del dividend al resultat del producte del pas anterior: $1 + (-4) = 1 - 4 = -3$	$\begin{array}{r rrrr} & -2 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & & \downarrow & & \\ & -2 & -4 & & \hline & -2 & -3 & & \end{array}$

OPERACIONS AMB POLINOMIS

Procedim de la mateixa manera per calcular la resta de resultats: $2 \cdot (-3) = -6 \quad 0 - 6 = -6$ $2 \cdot (-6) = -12 \quad -3 - 12 = -15$	
L'últim resultat obtingut és el residu de la divisió i els altres resultats són els coeficients del quocient de la divisió (el grau del quocient és un menys que el nombre de coeficients): $Q(x) = -2x^2 - 3x - 6 \quad R(x) = -15$ (3 coeficients → grau 2)	

Fem la divisió anterior sense aplicar la regla de Ruffini i comprovem que obtenim el mateix resultat:

$ \begin{array}{r} -2x^3 + x^2 \quad -3 \\ \underline{2x^3 - 4x^2} \\ -3x^2 -3 \\ \underline{+3x^2 - 6x} \\ -6x -3 \\ \underline{+6x -12} \\ -15 \end{array} $	$Q(x) = -2x^2 - 3x - 6 \quad R(x) = -15$ 
--	--

Nota: Quan apliquem la regla de Ruffini, el residu és sempre un nombre real, ja que el divisor, del tipus $x - a$ o $x + a$, és de grau 1 i el grau del residu ha de ser més petit que el del divisor. Per tant, el grau del residu ha de ser 0.

Exercici: Fes les divisions següents aplicant la regla de Ruffini i sense aplicar-la, i comprova que et surt el mateix resultat. Quin mètode t'és més senzill?

a) $(x^3 - 3x + 6) : (x - 5)$ b) $(x^5 + 2x^3 - x^2 - 10) : (x + 1)$

Sol.: a) $Q(x) = x^2 + 5x + 22 \quad R(x) = 116$

b) $Q(x) = x^4 - x^3 + 3x^2 - 4x + 4 \quad R(x) = -14$

OPERACIONS AMB POLINOMIS

Productes notables

Repassem els productes notables que varem estudiar en el tema 1 i que es fan servir molt per fer càlculs amb polinomis:

Quadrat de la suma

$$(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b) = a^2 + a \cdot b + b \cdot a + b^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

Quadrat de la resta

$$(a-b)^2 = (a-b) \cdot (a-b) = a^2 - a \cdot b - b \cdot a + b^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

Suma per diferència

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 + a \cdot b - b \cdot a - b^2 = a^2 - b^2 \quad (a-b \text{ s'anomena conjugat de } a+b)$$

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \\(a-b)^2 &= a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \\(a+b) \cdot (a-b) &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

Exemples: Desenvolupa:

1. $(2x+3)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$

2. $(2x-3)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9$

3. $(2x+3) \cdot (2x-3) = 4x^2 - 9$

4. $(5x^4 + x^3) \cdot (5x^4 - x^3) = (5x^4)^2 - (x^3)^2 = 25x^8 - x^6$

5. $(5x^4 + x^3)^2 = (5x^4)^2 + 2 \cdot 5x^4 \cdot x^3 + (x^3)^2 = 25x^8 + 10x^7 + x^6$

Exercicis: Desenvolupa:

a) $(1+3x)^2 =$

b) $(1-3x)^2 =$

c) $(1+3x)(1-3x) =$

d) $(x+5) \cdot (x-5) =$

OPERACIONS AMB POLINOMIS

e) $(4x - 6x^5)^2 =$

f) $(x^3 + 2x^2)^2 =$

g) $(7x^3 + x) \cdot (7x^3 - x) =$

h) $(7x^3 - x)^2 =$

i) $(2x + 3y^4)^2 =$

Solucions:

a) $9x^2 + 6x + 1$

b) $9x^2 - 6x + 1$

c) $-9x^2 + 1$

d) $x^2 - 25$

e) $36x^{10} - 48x^6 + 16x^2$

f) $x^6 + 4x^5 + 4x^4$

g) $49x^6 - x^2$

h) $49x^6 - 14x^4 + x^2$

i) $4x^2 + 12xy^4 + 9y^8$

EXERCICIS: OPERACIONS AMB POLINOMIS

1. Calcula les operacions següents:

a) $(5x^3 - 2x^2 + x - 4) + (3x^3 + 4x^2 - 10x + 9) =$

b) $(7x^5 - 2x^3 - x^2 - 6x + 8) + (-15x^5 - x^4 - 9x^2 + x - 1) =$

c) $(-2x^2 - x + 7) - (3x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 8) =$

d) $(6x^4 - x^2 + 5x + 1) - (5x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 2x - 5) =$

e) $(x^5 + 3x^4 - 2x^3 + x) - (2x^5 - 5x^3 + x^2 - 7x + 4) =$

2. Calcula els productes i les divisions de monomis següents:

a) $3x \cdot 3x^2 =$

b) $-\frac{1}{2}x \cdot \frac{4}{5}x^4 =$

c) $6x^2 \cdot (-5x) =$

d) $-2x^4 \cdot (-5) =$

e) $6x^2 : (-2x) =$

f) $-8x^7 : (-4x^5) =$

g) $-2x^4 : (-5x^4) =$

h) $x^3 : 5x^2 =$

3. Calcula els productes següents:

a) $(x^2 + x - 3) \cdot (x^3 - 1) =$

d) $(-x^3 + 7x - 1) \cdot (x^4 - x - 6) =$

b) $\left(x^3 + 2x^2 - \frac{1}{3}\right) \cdot (6x^2 + 3) =$

e) $(-x^2 + 2x - 3) \cdot (x^3 - 5x^2 + 8) =$

c) $(-2x^5 + x^4 - x^3 + 5x + 1) \cdot (7x^2 - x) =$

4. Efectua les divisions següents i comprova el resultat fent la prova:

a) $(6x^3 - 2x^2 + x + 4) : (2x^2) =$

d) $(x^7 - 3x^5 + 2x + 9) : (x^2 - x + 1) =$

b) $(-2x^5 + 8x^3 + 7x^2 - 4x + 2) : (x^2 - x + 1) =$

e) $(x^7 - 3x^5 + 2x + 9) : (x^4 - 5x + 1) =$

c) $(x^6 - 3x^3 + 5x^2 - x - 10) : (x^2 - 2x + 2) =$

5. Calcula el quocient i el residu de les divisions següents aplicant la regla de Ruffini. Després fes la divisió i comprova que et surti el mateix resultat:

a) $(x^5 + x^4 - 15x^3 + 5x^2 - 10) : (x + 5) =$

c) $(-3x^5 + 7x^3 - 2x^2 - 4) : (x + 1) =$

b) $(5x^6 - 2x^3 + x + 3) : (x - 1) =$

d) $(x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x) : (x - 3) =$

6. Fes les divisions següents. Si pots aplica la regla de Ruffini.

a) $(4x^5 - 2x^4 + 2x^3 + x^2 + 3) : (2x^3 - 3x^2 + x - 1) =$

d) $(x^4 - 2x^3 + 10) : (x - 4) =$

b) $(9x^4 - 6x^3 - 2x + 1) : (3x^3 - x - 4) =$

e) $(3x^2 + x + 10x^3 - 1) : (5x - 1) =$

c) $(x^5 - 8x^3 - 11x - 6) : (x + 3) =$

7. Desenvolupa les igualtats notables següents:

a) $(4x - 3y)^2 =$

d) $(3x - 2)^2 =$

g) $(n + 3m)(n - 3m) =$

b) $(2a + 3b)^2 =$

e) $(2x - 7)^2 =$

h) $(5 + 8x)(5 - 8x) =$

c) $(5x^3 + 3y^2)^2 =$

f) $(8x^2 + 2)^2 =$

i) $(6x - 1)(6x + 1) =$

SOLUCIONS: OPERACIONS AMB POLINOMIS

1.

- a) $8x^3 + 2x^2 - 9x + 5$ b) $-8x^5 - x^4 - 2x^3 - 10x^2 - 5x + 7$ c) $-3x^4 + 2x^3 - 2x - 1$
d) $x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 3x + 6$ e) $-x^5 + 3x^4 + 3x^3 - x^2 + 8x - 4$

2. a) $9x^3$ b) $-\frac{2}{5}x^5$ c) $-30x^3$ d) $10x^4$ e) $-3x$ f) $2x^2$ g) $\frac{2}{5}$ h) $\frac{1}{5}x$

3.

- a) $x^5 + x^4 - 3x^3 - x^2 - x + 3$ b) $6x^5 + 12x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 1$
c) $-14x^7 + 9x^6 - 8x^5 + x^4 + 35x^3 + 2x^2 - x$ d) $-x^7 + 7x^5 + 6x^3 - 7x^2 - 41x + 6$
e) $-x^5 + 7x^4 - 13x^3 + 7x^2 + 16x - 24$

4.

- a) $Q(x) = 3x - 1$; $R(x) = x + 4$
b) $Q(x) = -2x^3 - 2x^2 + 8x + 17$; $R(x) = 5x - 15$
c) $Q(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 3x - 5$; $R(x) = -5x$
d) $Q(x) = x^5 + x^4 - 3x^3 - 4x^2 - x + 3$; $R(x) = 6x + 6$
e) $Q(x) = x^3 - 3x + 5$; $R(x) = -x^3 - 15x^2 + 30x + 4$

5.

- a) $Q(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 20x + 100$; $R(x) = -510$
b) $Q(x) = 5x^5 + 5x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 3x + 4$; $R(x) = 7$
c) $Q(x) = -3x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 6x + 6$; $R(x) = -10$
d) $Q(x) = x^3 + 2x^2 + 9x + 25$; $R(x) = 75$

6.

- a) $Q(x) = 2x^2 + 2x + 3$; $R(x) = 10x^2 - x + 6$
b) $Q(x) = 3x - 2$; $R(x) = 3x^2 + 8x - 7$
c) $Q(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 - 3x - 2$; $R(x) = 0$ (*divisió exacta*)
d) $Q(x) = x^3 + 2x^2 + 8x + 32$; $R(x) = 138$
e) $Q(x) = 2x^2 + x + \frac{2}{5}$; $R(x) = -\frac{3}{5}$

7.

- a) $16x^2 - 24xy + 9y^2$ d) $9x^2 - 12x + 4$ g) $n^2 - 9m^2$
b) $4a^2 + 12ab + 9b^2$ e) $4x^2 - 28x + 49$ h) $25 - 64x^2$
c) $25x^6 + 30x^3y^2 + 9y^4$ f) $64x^4 + 32x^2 + 4$ i) $36x^2 - 1$

SOLUCIONS: OPERACIONS AMB POLINOMIS

Solucions dels exercicis de la teoria

Suma i resta de monomis

a) $-x^4$ b) $-4x^5$ c) $-11x^7$

Multipliació de monomis

a) $14x^6$ b) $12x^5$ c) $-10x^3$ d) $-15x^4$ e) $16x^5$ f) $-6x^2$

Divisió de monomis

a) $5x^3$ b) $3x^5$ c) $-\frac{2}{5}$ d) $-\frac{5}{3}x$ e) $-2x^4$ f) No

és un monomi.

TEOREMA DEL RESIDU

3. TEOREMA DEL RESIDU

El valor numèric d'un polinomi $P(x)$ per a $x = a$, $P(a)$, coincideix amb el residu de la divisió $P(x):(x-a)$.

$$\begin{array}{c} P(x) \\ R \end{array} \begin{array}{c} | \\ x-a \\ Q(x) \end{array} \longrightarrow \boxed{R = P(a)}$$

Aquest resultat rep el nom del **teorema del residu** i s'obté en substituir x per a en la igualtat $P(x) = Q(x) \cdot (x-a) + R$:

$$P(a) = Q(a) \cdot (a-a) + R = Q(a) \cdot 0 + R = R \rightarrow \boxed{P(a) = R}$$

Exemple: Considerem la divisió de l'exemple de l'apartat anterior, de residu -15:

$$(-2x^3 + x^2 - 3):(x-2) \begin{cases} P(x) = -2x^3 + x^2 - 3 \\ a = 2 \end{cases}$$

$\begin{array}{r} -2x^3 + x^2 \quad -3 \\ \underline{2x^3 - 4x^2} \\ -3x^2 -3 \\ \underline{+3x^2 - 6x} \\ -6x -3 \\ \underline{+6x -12} \\ -15 \end{array}$	<table style="border-collapse: collapse; margin: auto;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px 10px;">-2</td> <td style="padding: 5px 10px;">1</td> <td style="padding: 5px 10px;">0</td> <td style="padding: 5px 10px;">-3</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px 10px;">2</td> <td style="padding: 5px 10px;">-4</td> <td style="padding: 5px 10px;">-6</td> <td style="padding: 5px 10px;">-12</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px 10px;">-2</td> <td style="padding: 5px 10px;">-3</td> <td style="padding: 5px 10px;">-6</td> <td style="padding: 5px 10px;">-15</td> </tr> </table> coef. quocient residu	-2	1	0	-3	2	-4	-6	-12	-2	-3	-6	-15
-2	1	0	-3										
2	-4	-6	-12										
-2	-3	-6	-15										

Calculem $P(2)$ i comprovem que també és -15:

$$P(2) = -2 \cdot 2^3 + 2^2 - 3 = -2 \cdot 8 + 4 - 3 = -16 + 4 - 3 = \boxed{-15}$$

Així doncs, el teorema del residu permet calcular el valor numèric d'un polinomi usant la regla de Ruffini.

Exemple: Sigui $P(x) = x^3 + 2x^2 - 10$. Calcula $P(2)$ aplicant el teorema del residu i sense aplicar-lo, i comprova que et surt el mateix resultat:

- Calculem el quocient $P(x):(x-2)$ pel mètode de Ruffini:

	1	2	0	-10	$P(2) = \boxed{6}$
		2	8	16	
2					
	1	4	8	<u>6</u>	$= R = P(2)$

TEOREMA DEL RESIDU

- Calculem $P(2)$ i comprovem que és 6:

$$P(2) = 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 10 = 8 + 2 \cdot 4 - 10 = 8 + 8 - 10 = \boxed{6}$$

Exercici:

a) Sigui $P(x) = x^3 + 2x^2 - x + 5$. Calcula $P(-3)$ aplicant el teorema del residu i sense aplicar-lo, i comprova que et surt el mateix resultat. Que t'és més senzill?

(Sol.: -1)

b) Fes l'exercici 3 de l'apartat "*Polinomis*" (pàg 192) aplicant el teorema del residu i comprova que et surt el mateix resultat.

FACTORITZACIÓ DE POLINOMIS

4. ARRELS D'UN POLINOMI

Un nombre real a és una arrel del polinomi $P(x)$ si el valor numèric de P per a $x = a$ és zero, és a dir, si $P(a) = 0$.

Així, les arrels d'un polinomi són les solucions de l'equació que resulta d'igualar el polinomi a 0: $P(x) = 0$

Exemple: Digues si 2 i -1 són arrels del polinomi $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$.

- Calculem $P(2)$ i $P(-1)$:

$$P(2) = 2^3 - 2^2 - 4 \cdot 2 + 4 = 8 - 4 - 8 + 4 = 0 \rightarrow \underline{2 \text{ sí que és arrel}}, P(2) = 0$$

$$P(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 4 = -1 - 1 + 4 + 4 = 6 \rightarrow \underline{-1 \text{ no és arrel}},$$

$$P(-1) \neq 0$$

- També ho podem calcular per la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -4 & +4 \\ 2 & & 2 & 2 & -4 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \underline{0 = P(2)} \end{array}$$

2 és arrel

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -4 & +4 \\ -1 & & -1 & 2 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & -2 & \underline{6 = P(-1) \neq 0} \end{array}$$

-1 no és arrel

Nota: Normalment, resulta més senzill utilitzar la regla de Ruffini per esbrinar si un nombre és arrel d'un polinomi.

Exercici: Digues si 3 i -2 són arrels del polinomi anterior.

Sol.: 3 no és arrel i -2 sí que ho és.

FACTORITZACIÓ DE POLINOMIS

Càlcul de les arrels d'un polinomi

Calcular les arrels d'un polinomi $P(x)$ és resoldre l'equació $P(x) = 0$.

Polinomis de primer i segon grau

Si el polinomi és de grau 1 o de grau 2, hem de resoldre una equació de 1r o 2n grau.

Exemples: Calcula les arrels dels polinomis següents:

1. $P(x) = 5x - 1$

Resolem l'equació $5x - 1 = 0 \rightarrow 5x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{5} \rightarrow$ Té una sola arrel: $\frac{1}{5}$

2. $P(x) = x^2 + 3x - 10$ Resolem l'equació $x^2 + 3x - 10 = 0$

Apliquem la fórmula de l'equació de 2n grau:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2} = \begin{cases} \frac{-3 + 7}{2} = \frac{4}{2} = \boxed{2} \\ \frac{-3 - 7}{2} = \frac{-10}{2} = \boxed{-5} \end{cases}$$

$\rightarrow$ Té dues arrels: 2 i -5

Polinomis de grau superior a dos

No hi ha un mètode general per calcular totes les arrels d'un polinomi qualsevol de grau superior a 4 i la fórmula per calcular les arrels d'un polinomi de grau 3 o 4 és massa complicada i no forma part dels interessos d'aquest curs.

Tanmateix, sí que hi ha un mètode per calcular les arrels enteres (si en té) de qualsevol polinomi. Per fer-ho ens basem en les propietats següents:

- Si un polinomi té arrels enteres, aquestes són divisors del terme independent.
- Un polinomi pot tenir com a màxim tantes arrels reals com el seu grau (no totes necessàriament enteres)

Així, podem provar, usant la regla de Ruffini, quins divisors del terme independent són arrels.

FACTORITZACIÓ DE POLINOMIS

Exemple: Calcula les arrels enteres del polinomi $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$.

- Escrivim els divisors de 4 (terme independent), que seran les possibles arrels: $\pm 1; \pm 2; \pm 4$
- Anem comprovant si són arrels per la regla de Ruffini, començant pel divisor més petit:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -4 & 4 \\ 1 & & 1 & 0 & -4 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & \underline{0} = P(1) \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -4 & 4 \\ -1 & & -1 & 2 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & -2 & \underline{6} = P(-1) \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -4 & 4 \\ 2 & & 2 & 2 & -4 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \underline{0} = P(2) \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -4 & 4 \\ -2 & & -2 & 6 & -4 \\ \hline & 1 & -3 & 2 & \underline{0} = P(-2) \end{array}$$

Hem obtingut que les tres arrels de $P(x)$ són: 1, 2 i -2

Exercici: Calcula les arrels enteres del polinomi $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.

Sol.: -1, 2 i -3.

Aquest mètode no es fa servir perquè pot arribar a ser molt llarg (imagina que el terme independent té molts divisors) i només permet calcular arrels enteres.

Hi ha una manera més ràpida i eficaç de calcular les arrels enteres d'un polinomi de grau superior a dos (i en moltes ocasions permet calcular també arrels no enteres). Consisteix a factoritzar el polinomi, tal com s'explica en el punt següent.

FACTORITZACIÓ DE POLINOMIS

5. FACTORITZACIÓ DE POLINOMIS

Factoritzar un polinomi (o fer la seva descomposició factorial) és expressar-lo com a producte d'altres polinomis (factors) de grau més petit. Normalment, interessa que el grau dels factors sigui el més petit possible.

Exemple: La factorització del polinomi $x^3 - 7x^2 + 10x$ és $x \cdot (x - 2) \cdot (x - 5)$

$$x^3 - 7x^2 + 10x = x \cdot (x - 2) \cdot (x - 5)$$

Si fem el producte de la dreta obtenim el polinomi de l'esquerra:

$$x \cdot (x - 2) \cdot (x - 5) = (x^2 - 2x) \cdot (x - 5) = x^3 - 5x^2 - 2x^2 + 10x = \boxed{x^3 - 7x^2 + 10x}$$

Així, aquest polinomi de grau 3 es pot expressar com un producte de tres polinomis de primer grau.

Nota: El punt de multiplicació normalment s'omet:

$$\text{Així: } x \cdot (x - 2) \cdot (x - 5) = x(x - 2)(x - 5)$$

El concepte de factoritzar un polinomi és anàleg al de factoritzar un nombre (descompondre'l en producte de nombres primers. Exemple: $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$).

A continuació veurem diferents estratègies per factoritzar polinomis:

Estratègies per factoritzar polinomis

Buscar factors del tipus $x - a$

Si un nombre enter a és arrel d'un polinomi $P(x)$, aleshores $P(x)$ és divisible per $x - a$ (el residu de la divisió $P(x) : (x - a)$ és 0) i $x - a$ és un factor de la descomposició factorial.

Demostració:

Pel teorema del residu, si a és arrel de $P(x)$:

$$P(a) = 0 = R \rightarrow \text{residu de la divisió } P(x) : (x - a)$$

Si el residu de la divisió $P(x) : (x - a)$ és 0, la divisió és exacta i, per tant, $x - a$ és divisor de $P(x)$.

$$P(x) = (x - a) \cdot Q(x) + R = (x - a) \cdot Q(x) + 0 = \boxed{(x - a) \cdot Q(x)} \quad \text{en què } Q(x) \text{ és el}$$

polinomi quocient.

$\rightarrow x - a$ és un factor de la descomposició factorial.

FACTORITZACIÓ DE POLINOMIS

Utilitzem el mètode de Ruffini per calcular les arrels i cada vegada que trobem una arrel anem factoritzant:

$$\begin{array}{c|c} & \text{Coef. de } P(x) \\ \hline a & \\ \hline & \text{Coef. de } Q(x) \quad \underline{0} = R = P(a) \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{c|c} P(x) & x-a \\ \hline 0 & Q(x) \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} P(a) = 0 \rightarrow a \text{ és arrel} \\ R = 0 \rightarrow P(x) = (x-a) \cdot Q(x) + 0 = \\ \quad \quad \quad = \boxed{(x-a) \cdot Q(x)} \end{cases}$$

Per calcular l'arrel següent i continuar factoritzant, ho farem a partir del polinomi quocient $Q(x)$, de menor grau que $P(x)$ (grau $Q(x) = \text{grau } P(x) - 1$). D'aquesta manera, es va simplificant el procés.

Exemple: Factoritza el polinomi $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$.

- Escrivim els divisors de 4 (terme independent), que seran les possibles arrels: $\pm 1; \pm 2; \pm 4$
- Anem comprovant si són arrels per la regla de Ruffini, començant pel divisor més petit:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -4 & 4 \\ 1 & & 1 & 0 & -4 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & \underline{0} = P(1) \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{cases} P(1) = 0 \rightarrow x = 1 \text{ és arrel} \\ p(x) = (x-1)(x^2 + 4) \end{cases}$$

- Per continuar factoritzant, busquem les arrels del polinomi quocient $x^2 - 4$. Ho podem fer per la regla de Ruffini o resolent l'equació de segon grau (aquest segon mètode és més recomanable perquè és més ràpid i permet calcular arrels no enteres):

o Per la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 0 & -4 \\ -1 & & -1 & 1 \\ \hline & 1 & -1 & \underline{-3} \neq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 0 & -4 \\ 2 & & 2 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & \underline{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rr} & 1 & 2 \\ -2 & & -2 \\ \hline & 1 & \underline{0} \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{cases} P(-1) \neq 0 \rightarrow -1 \text{ no és arrel} \\ P(2) = 0 \rightarrow 2 \text{ és arrel} \\ P(-2) = 0 \rightarrow -2 \text{ és arrel} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \boxed{P(x) = (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x+2)}$$

FACTORITZACIÓ DE POLINOMIS

o Resolent l'equació de segon grau:

$$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$P(x) = (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x+2)$$

Prova: Per fer la prova, hem de fer el producte dels tres factors i comprovar que surt $P(x)$:

$$\begin{aligned} (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x+2) &= (x^2 - x - 2x + 2) \cdot (x+2) = (x^2 - 3x + 2) \cdot (x+2) \\ &= x^3 - 3x^2 + 2x + 2x^2 - 6x + 4 = x^3 - x^2 - 4x + 4 \end{aligned}$$

Ordre de multiplicitat d'una arrel

Si el factor $x - a$ es repeteix, en la factorització apareixerà en forma de potència $(x-a)^n$, en què n és el nombre de vegades que es repeteix. Aleshores, es diu que l'arrel a té ordre de multiplicitat n :

- Si $n = 1 \rightarrow$ es diu que l'arrel és simple o d'ordre de multiplicitat 1.
- Si $n = 2 \rightarrow$ es diu que l'arrel és doble o d'ordre de multiplicitat 2.
- Si $n = 3 \rightarrow$ es diu que l'arrel és triple o d'ordre de multiplicitat 3.

I així successivament.

Resoldre una equació de segon grau si el polinomi és de grau 2

Per factoritzar un polinomi de segon grau, no cal aplicar la regla de Ruffini.

És més recomanable calcular les arrels resolent l'equació de segon grau i després factoritzar. Això és més ràpid que aplicar la regla de Ruffini (perquè no hem d'anar provant divisors) i, a més, es calculen totes les arrels reals, enteres o no.

Per factoritzar un polinomi $P(x)$ de grau 2 seguim els passos següents:

- Resolem l'equació de segon grau que resulta d'igualar el polinomi a 0, $P(x) = 0$. Les solucions de l'equació són les arrels del polinomi.
- Si el polinomi té dues arrels a_1 i a_2 , $x - a_1$ i $x - a_2$ són divisors de $P(x)$ i la factorització serà:

$$P(x) = k(x - a_1) \cdot (x - a_2) \quad \text{on } K \text{ és el coeficient del terme de } 2n \text{ grau.}$$

FACTORITZACIÓ DE POLINOMIS

- Si el polinomi té una sola arrel, a_1 , es diu que l'arrel és doble (com si estigués repetida) o té ordre de multiplicitat 2, i la factorització quedarà així:

$$\boxed{P(x) = k(x - a_1) \cdot (x - a_1) = k(x - a_1)^2} \quad \text{on } K \text{ és el coeficient del terme de segon grau.}$$

- Si l'equació de segon grau no té solució, el polinomi no té cap arrel real i no es pot factoritzar.

Exemples: Factoritza els polinomis següents:

1. $P(x) = x^2 + 3x - 10$

Resolem l'equació $x^2 + 3x - 10 = 0$ aplicant la fórmula de l'equació de 2n grau:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2} = \begin{cases} \frac{-3 + 7}{2} = \frac{4}{2} = \boxed{2} \\ \frac{-3 - 7}{2} = \frac{-10}{2} = \boxed{-5} \end{cases}$$

→ Té dues arrels: **2 i -5** → $P(x) = (x - 2) \cdot (x - (-5)) = \boxed{(x - 2) \cdot (x + 5)}$ $k = 1$ (el coeficient de x^2 és 1)

Prova: $(x - 2) \cdot (x + 5) = x^2 + 5x - 2x - 10 = \boxed{x^2 + 3x - 10}$

2. $P(x) = 4x^2 - 4x + 1$ → Resolem l'equació $4x^2 - 4x + 1 = 0$:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{8} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{8} = \frac{4 \pm 0}{8} = \begin{cases} \frac{4 + 0}{8} = \frac{4}{8} = \boxed{\frac{1}{2}} \\ \frac{4 - 0}{8} = \frac{4}{8} = \boxed{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

→ Té una arrel doble: $\frac{1}{2}$ → $P(x) = 4 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) = \boxed{4 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}$ $k = 4$ (el coeficient de $4x^2$ és 4)

Nota: Per evitar que quedin fraccions en la factorització es pot escriure també d'aquesta manera:

$$P(x) = 4 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot 2 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) = (2x - 1) \cdot (2x - 1) = \boxed{(2x - 1)^2}$$

Prova: $4 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 4 \cdot \left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = 4 \cdot \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) = \boxed{4x^2 - 4x + 1}$

FACTORITZACIÓ DE POLINOMIS

Exercici: Factoritza el polinomi següent i fes-ne la prova:

a) $P(x) = 2x^2 + 4x - 6$

Sol.: $P(x) = 2(x+3)(x-1)$

Identificar productes notables

Quan un polinomi és el quadrat d'una suma, el quadrat d'una resta o una suma per diferència, i ho identifiquem, podem factoritzar-lo sense necessitat de fer cap càlcul.

Hem de fixar-nos si és de la forma $a^2 + 2ab + b^2$, $a^2 - 2ab + b^2$ o $a^2 - b^2$:

Exemples: Factoritza, identificant igualtats notables:

1. $x^2 + 8x + 16 = x^2 + 2 \cdot 4 \cdot x + 4^2 = (x+4)^2$ 2. $x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x+1) \cdot (x-1)$

3. $x^4 - 16 = (x^2)^2 - 4^2 = (x^2 + 4)(x^2 - 4) = (x^2 + 4)(x-2)(x+2)$

Exercicis: Factoritza, identificant igualtats notables:

a) $x^2 + 10x + 25 =$

b) $x^2 - 9 =$

Treure factor comú

Un nombre

Si el màxim comú divisor dels coeficients és diferent de 1, el traiem factor comú. Hem de fixar-nos si tots els coeficients tenen algun divisor comú i buscar el més gran. D'aquesta manera el polinomi que queda és més fàcil de factoritzar.

FACTORITZACIÓ DE POLINOMIS

Exemples: Treu factor comú. Fes l'exemple 2:

1. $5x^2 + 10x^2 + 15 = 5 \cdot (x^2 + 2x^2 + 3) \rightarrow m.c.d.(5, 10, 15) = 5$

2. $3x^3 + 9x^2 + 3x - 9 =$

Un factor del tipus x i x^n

Si un polinomi no té terme independent (el terme independent és 0) hem de treure factor comú x o x elevada a la mínima potència a què aparegui.

Després de treure factor comú, el polinomi que queda sí que tindrà terme independent diferent de 0 i podrem buscar els seus divisors per continuar factoritzant.

En aquests casos, x és un factor de la descomposició factorial i 0 és arrel del polinomi, ja que $x = x - 0$.

Si hem tret x^n factor comú, 0 és una arrel d'ordre de multiplicitat n .

Exemples: Treu factor comú:

1. $x^3 + x^2 + 8x = x \cdot (x^2 + x + 8) \rightarrow 0$ és una arrel simple

2. $x^5 - 25x^3 = x^3 \cdot (x^2 - 25) \rightarrow 0$ és una arrel triple

Exercicis: Treu factor comú:

a) $x^4 + x^3 + 8x^2 =$

b) $x^3 - 2x =$

Mètode general per factoritzar polinomis

Amb tot el que hem vist podem elaborar un mètode general per factoritzar polinomis de grau superior a 2 que tinguin alguna o algunes arrels enteres. Seguim els passos següents:

1. Traiem factor comú sempre que sigui possible:

- Si tots els coeficients són múltiples d'un mateix nombre, el traiem com factor comú (el $m.c.d.$ dels coeficients).
- Si el polinomi no té terme independent (té terme independent igual a 0) traiem factor comú x o x^n (n = la mínima potència a què apareix x). En aquest cas, ja tenim dos factors i una arrel és 0 (d'ordre de multiplicitat n).
 - o Si el polinomi que queda després de treure factor comú és de grau 1, s'ha acabat la factorització.

FACTORITZACIÓ DE POLINOMIS

- o Si és de grau 2, el factoritzem identificant una igualtat notable o resolent l'equació de segon grau.
 - o Si és de grau superior a 2, passem al pas 2.
 - Si el terme independent és diferent de 0, no podem treure factor comú. Fem el pas 2.
2. Busquem factors del tipus $x - a$:
- Escrivim els divisors del terme independent (possibles arrels enteres).
 - Calculem el valor numèric de cada divisor per la regla de Ruffini, començant pel divisor més petit i seguint un ordre, fins que trobem un divisor a que sigui arrel (valor numèric 0).
 - Si a és arrel, $P(x)$ és divisible per $x - a$. Factoritzem $P(x) \rightarrow P(x) = (x - a) \cdot Q(x)$
 - Si $Q(x)$ és de grau superior a 2, repetim el procés per a $Q(x)$ fins que el polinomi quocient sigui de grau 2 (passem al pas 3) o fins que ja no trobem més arrels (passem al pas 4). Hem de tenir en compte que:
 - o Si un divisor no és arrel de $P(x)$, tampoc és arrel de $Q(x)$. Per tant, no el tornem a provar.
 - o Si a també és divisor del terme independent de $Q(x)$, hem d'esbrinar si és arrel de $Q(x)$, perquè podria ser una arrel repetida (d'ordre de multiplicitat més gran que 1). És a dir, tornem a provar a amb $Q(x)$.
 - Si $Q(x)$ és de grau 2, fem el pas 3.
3. Quan arribem a un polinomi quocient de grau 2, factoritzem resolent l'equació de segon grau o identificant una igualtat notable.
4. Quan el polinomi quocient és de grau superior a 2 i no trobem més arrels enteres, ja no podem factoritzar més utilitzant aquest mètode. S'ha acabat la factorització.

La forma general de la descomposició factorial serà:

$$P(x) = (x - a_1)^{n_1} \cdot (x - a_2)^{n_2} \cdot \dots \cdot (x - a_k)^{n_k} \cdot Q(x)$$

FACTORITZACIÓ DE POLINOMIS

on

$$\begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_k \text{ són les arrels de } P(x) \\ n_1, n_2, \dots, n_k \text{ són els ordres de multiplicitat de les arrels. (si l'arrel és simple } n = 1) \\ Q(x) \text{ és l'últim polinomi que no hem pogut factoritzar. (Pot ser 1).} \end{cases}$$

Com ja hem dit, no tots els polinomis de grau superior a 2 es poden factoritzar utilitzant aquest mètode. Per poder factoritzar un polinomi de grau superior a 2 amb aquest mètode, és necessari que tingui alguna o algunes arrels enteres.

Vegem diversos exemples de factoritzacions:

Exemples: Factoritza els polinomis següents i calcula'n les arrels:

1. $P(x) = x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x - 6$

- Escrivim els divisors de -6 (terme independent), que seran les possibles arrels enteres:

$$\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6.$$

- Anem comprovant si són arrels per la regla de Ruffini, començant pel divisor més petit, i factoritzem quan trobem una arrel:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 3 & -3 & -11 & -6 \\ 1 & & 1 & 4 & 1 & 10 \\ \hline & 1 & 4 & 1 & 10 & \underline{4} = P(1) \end{array} \rightarrow \begin{cases} P(1) \neq 0 \rightarrow 1 \text{ no és arrel} \\ P(-1) = 0 \rightarrow \underline{-1} \text{ és arrel} \\ P(x) = (x+1) \cdot (x^3 + 2x^2 - 5x - 6) \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 3 & -3 & -11 & -6 \\ -1 & & -1 & -2 & 5 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & -5 & -6 & \underline{0} = P(-1) \end{array}$$

- Busquem ara arrels del polinomi quocient $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$. Ho continuem provant per la regla de Ruffini començant per -1, perquè podria tornar a ser arrel:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -5 & -6 \\ -1 & & -1 & -1 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & \underline{0} = Q(-1) \end{array} \rightarrow \begin{cases} Q(-1) = 0 \rightarrow -1 \text{ és arrel altre cop} \\ \rightarrow P(x) = (x+1) \cdot (x+1) \cdot (x^2 + x - 6) = \\ = (x+1)^2 \cdot (x^2 + x - 6) \end{cases}$$

- Com que l'últim polinomi quocient que ens ha sortit és de grau 2, resollem l'equació de segon grau: $x^2 + x - 6 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{-1+5}{2} = \frac{4}{2} = \boxed{2} \\ \frac{-1-5}{2} = \frac{-6}{2} = \boxed{-3} \end{cases}$$

FACTORITZACIÓ DE POLINOMIS

- Escrivim totes les arrels que hem calculat i la descomposició factorial:

$$\text{Arrels: } -1 \text{ (doble), } 2, -3. \quad P(x) = (x+1)^2 \cdot (x-2) \cdot (x+3)$$

- Fem la prova:

$$\begin{aligned} (x+1)^2 \cdot (x-2) \cdot (x+3) &= (x^2 + 2x + 1) \cdot (x-2) \cdot (x+3) = (x^3 + 2x^2 + x - 2x^2 - 4x - 2) \cdot (x+3) = \\ &= (x^3 - 3x - 2) \cdot (x+3) = x^4 - 3x^2 - 2x + 3x^3 - 9x - 6 = \boxed{x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x - 6} \end{aligned}$$

2. $P(x) = x^5 - 3x^3 - x^2 - 2x$

- Com que el terme independent és 0, traiem x factor comú:

$$P(x) = x \cdot (x^4 - 3x^2 - x - 2) \rightarrow \underline{0 \text{ és arrel}}$$

- Escrivim els divisors de -2 (terme independent de $x^4 - 3x^2 - x - 2$) : $\pm 1; \pm 2$
- Anem comprovant si són arrels per la regla de Ruffini, començant pel divisor més petit, i factoritzem quan trobem una arrel:

1	1	0	-3	-1	-2	
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1	1	-2	-3		
1	1					

FACTORITZACIÓ DE POLINOMIS

- Fem la prova:

$$P(x) = x \cdot (x-2) \cdot (x^3 + 2x^2 + x + 1) = (x^2 - 2x) \cdot (x^3 + 2x^2 + x + 1) \\ = x^5 + 2x^4 + x^3 + x^2 - 2x^4 - 4x^3 - 2x^2 - 2x = x^5 - 3x^3 - x^2 - 2x$$

3. $P(x) = 3x^4 - 3$

- Traiem factor comú 3: $3x^4 - 3 = 3 \cdot (x^4 - 1)$
- Escrivim els divisors de -1 (terme independent de $x^4 - 1$), que seran les possibles arrels enteres: ± 1
- Anem calculant les arrels del polinomi $x^4 - 1$ i factoritzant-lo utilitzant la regla de Ruffini:

1	1	0	0	0	-1
1		1	1	1	1
	1	1	1	1	<u>0</u> = P(1)

$$\rightarrow \begin{cases} P(1) = 0 \rightarrow \underline{1 \text{ és arrel}} \\ P(x) = 3 \cdot (x-1) \cdot (x^3 + x^2 + x + 1) \end{cases}$$

- Busquem ara les arrels del polinomi quotient $x^3 + x^2 + x + 1$. Ho continuem provant per la regla de Ruffini començant per 1, perquè podria tornar a ser arrel:

1	1	1	1	1
1		1	2	3
	1	2	3	<u>4</u> = Q(1) $\neq 0$

-1	1	1	1	1
-1		-1	0	-1
	1		0	1
				<u>0</u> = Q(-1)

$$\rightarrow \begin{cases} Q(1) \neq 0 \rightarrow 1 \text{ és arrel simple (no està repetida)} & Q(-1) = 0 \rightarrow \underline{-1 \text{ és arrel}} \\ P(x) = 3 \cdot (x-1) \cdot (x+1)(x^2 + 1) \end{cases}$$

- Com l'últim polinomi quotient que ens ha sortit és de grau 2, resollem l'equació de segon grau: $x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \notin R$ No té solucions reals

El polinomi no té més arrels reals i no es pot continuar factoritzant

- Escrivim totes les arrels que hem calculat i la descomposició factorial:

Arrels: 1 i -1 $P(x) = 3 \cdot (x-1) \cdot (x+1)(x^2 + 1)$

- Fem la prova:

$$3 \cdot (x-1) \cdot (x+1)(x^2 + 1) = 3 \cdot (x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1) = 3 \cdot (x^4 - 1) = \boxed{3x^4 - 3}$$

FACTORITZACIÓ DE POLINOMIS

4. $P(x) = x^5 + 6x^4 + 12x^3 + 8x^2$

- Com que el terme independent és 0, traiem x^2 factor comú:

$$P(x) = x^2 \cdot (x^3 + 6x^2 + 12x + 8) \rightarrow \underline{0 \text{ és arrel doble}}$$

- Escrivim els divisors de 8 (terme independent de $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$), que seran les possibles arrels enteres: $\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8$
- Anem comprovant si són arrels per la regla de Ruffini, començant pel divisor més petit, i factoritzem quan trobem una arrel:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 6 & 12 & 8 \\ 1 & & 1 & 7 & 19 \\ \hline & 1 & & 7 & 19 \\ & \underline{27} = P(1) \neq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 6 & 12 & 8 \\ -1 & & -1 & -5 & -7 \\ \hline & 1 & & 5 & 7 \\ & \underline{1} = P(-1) \neq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 6 & 12 & 8 \\ 2 & & 2 & 16 & 56 \\ \hline & 1 & 8 & 28 & \underline{64} = P(2) \neq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 6 & 12 & 8 \\ -2 & & -2 & -8 & -8 \\ \hline & 1 & 4 & 4 & \underline{0} = P(-2) \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{cases} P(1) \neq 0 \rightarrow 1 \text{ no és arrel; } P(-1) \neq 0 \rightarrow -1 \text{ no és arrel; } P(2) \neq 0 \rightarrow 2 \text{ no és arrel} \\ P(-2) = 0 \rightarrow \underline{-2 \text{ és arrel}} \rightarrow P(x) = x^2 \cdot (x+2) \cdot (x^2 + 4x + 4) \end{cases}$$

- Com que l'últim polinomi quotient que ens ha sortit és de grau 2, resollem l'equació de segon grau: $x^2 + 4x + 4 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{-4 \pm 0}{2} = \begin{cases} \frac{-4+0}{2} = \boxed{-2} \\ \frac{-4-0}{2} = \boxed{-2} \end{cases} \leftarrow \text{arrels}$$

- Escrivim totes les arrels que hem calculat i la descomposició factorial:

Arrels: 0 doble i -2 triple.

$$P(x) = x^2 \cdot (x+2)^3$$

- Fem la prova:

$$\begin{aligned} x^2 \cdot (x+2)^3 &= x^2 \cdot (x+2) \cdot (x+2)^2 = (x^3 + 2x^2) \cdot (x^2 + 4x + 4) = \\ &= x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 2x^4 + 8x^3 + 8x^2 = \boxed{x^5 + 6x^4 + 12x^3 + 8x^2} \end{aligned}$$

FACTORITZACIÓ DE POLINOMIS

5. $P(x) = 6x^3 + 7x^2 - 9x + 2$

- Escrivim els divisors de 2 (terme independent), que seran les possibles arrels enteres: $\pm 1; \pm 2$
- Anem comprovant si són arrels per la regla de Ruffini, començant pel divisor més petit, i factoritzem quan trobem una arrel:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & 7 & -9 & 2 \\ 1 & & 6 & 13 & 4 \\ \hline & 6 & 13 & 4 & \underline{6} = P(1) \neq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & 7 & -9 & 2 \\ -1 & & -6 & -1 & 10 \\ \hline & 6 & 1 & -10 & \underline{12} = P(-1) \neq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & 7 & -9 & 2 \\ 2 & & 12 & 38 & 58 \\ \hline & 6 & 19 & 29 & \underline{60} = P(2) \neq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & 7 & -9 & 2 \\ -2 & & -12 & 10 & -2 \\ \hline & 6 & -5 & 1 & \underline{0} = P(-2) \neq 0 \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{cases} P(1) \neq 0 \rightarrow 1 \text{ no és arrel; } P(-1) \neq 0 \rightarrow -1 \text{ no és arrel; } P(2) \neq 0 \rightarrow 2 \text{ no és arrel} \\ P(-2) = 0 \rightarrow \underline{-2 \text{ és arrel}} \rightarrow P(x) = (x+2) \cdot (6x^2 - 5x + 1) \end{cases}$$

- Com que l'últim polinomi quotient que ens ha sortit és de grau 2, resollem l'equació de segon grau: $6x^2 - 5x + 1 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1}}{2 \cdot 6} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{12} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{12} = \frac{5 \pm 1}{12} = \begin{cases} \frac{5+1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \\ \frac{5-1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \swarrow \text{arrels} \\ \searrow \end{array}$$

$K=6 \rightarrow$ coeficient del terme de segon grau ($6x^2$)

- Escrivim totes les arrels que hem calculat i la descomposició factorial:

$$\boxed{\text{Arrels: } -2, \frac{1}{2} \text{ i } \frac{1}{3}; P(x) = \underbrace{6}_{2 \cdot 3} \cdot (x+2) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right) = (x+2) \cdot (2x-1) \cdot (3x-1)}$$

- Fem la prova:

$$\begin{aligned} 6 \cdot (x+2) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right) &= 6 \cdot (x+2) \cdot \left(x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}\right) = 6 \cdot (x+2) \cdot \left(x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}\right) = \\ &= (x+2) \cdot (6x^2 - 5x + 1) = 6x^3 - 5x^2 + x + 12x^2 - 10x + 2 = \boxed{6x^3 + 7x^2 - 9x + 2} \end{aligned}$$

FACTORITZACIÓ DE POLINOMIS

6. $P(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 - 1$

- Escrivim els divisors d'1 (terme independent), que seran les possibles arrels enteres: ± 1
- Anem comprovant si són arrels per la regla de Ruffini, començant pel divisor més petit, i factoritzem quan trobem una arrel:

	1	-5	1	-1		1	-5	1	-1
1		1	-4	-3	-1		-1	6	-7
	1	-4	-3	<u>-4</u>		1	-6	7	<u>-8</u>
				$= P(1) \neq 0$					$= P(-1) \neq 0$

$\rightarrow \{P(1) \neq 0 \rightarrow 1 \text{ no és arrel}; P(-1) \neq 0 \rightarrow -1 \text{ no és arrel} \rightarrow P(x) \text{ no té arrels enteres}$

No podem factoritzar aquest polinomi utilitzant aquest mètode

Exercicis: Factoritza els polinomis següents i calcula'n les arrels:

- a) $P(x) = x^4 - x^3 - 34x^2 + 4x + 120$ (no cal que calculis tots els divisors de 120. Inicialment, calcula els divisors més petits i, si cap d'ells no surt arrel, continua calculant divisors.)

FACTORITZACIÓ DE POLINOMIS

b) $P(x) = x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 5x$

c) $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - 20x^2 + 27x + 18$

FACTORITZACIÓ DE POLINOMIS

d) $P(x) = x^3 - 1$

Sol.:

a) $(x-2) \cdot (x+2) \cdot (x+5) \cdot (x-6)$ (arrels : 2, -2, -5, 6)

b) $x \cdot (x-1)^2 \cdot (x+5)$ (arrels : 0, 1 doble, -5)

c) $2 \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot (x+3) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) = (x-2) \cdot (x-3) \cdot (x+3) \cdot (2x+1)$ (arrels : 2, 3, -3, $-\frac{1}{2}$)

d) $(x-1) \cdot (x^2 + x + 1)$ (arrels : 1)

Càlcul de les arrels d'un polinomi factoritzat

Quan un polinomi està factoritzat, és molt fàcil calcular-ne les arrels.

Per calcular les arrels d'un polinomi $P(x)$ factoritzat, seguim els passos següents:

- Igualem el polinomi a 0, ja que les seves arrels són les solucions de l'equació:
 $P(x) = 0$.
- Igualem a 0 cadascun dels factors, atès que si un producte de factors és 0, necessàriament algun factor és nul.
- Resolem cadascuna de les equacions que resulten d'igualar els factors a 0.

Moltes vegades no ens caldrà fer càlculs, ja que si $x-a$ és un divisor de $P(x)$ (un factor de la descomposició factorial), aleshores a és una arrel de $P(x)$:

$$P(x) = (x-a) \cdot Q(x) \rightarrow P(a) = (a-a) \cdot Q(x) = 0$$

FACTORITZACIÓ DE POLINOMIS

Exemples: Calcula les arrels dels polinomis següents:

$$\underline{1.} \ P(x) = x \cdot (x-5) \cdot (x+6) \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-5=0 \rightarrow x=5 \\ x+6=0 \rightarrow x=-6 \end{cases} \rightarrow \text{Les arrels són: } 0, 5 \text{ i } -6$$

En aquest exemple les arrels es dedueixen fàcilment i no seria necessari fer els càlculs.

$$\underline{2.} \ P(x) = 2x^3 \cdot (x+2) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot (x^2+5) \rightarrow \begin{cases} 2x^3=0 \rightarrow x=0 \\ x+2=0 \rightarrow x=-2 \\ x + \frac{1}{2}=0 \rightarrow x=-\frac{1}{2} \\ x^2+5=0 \rightarrow \text{No té solució} \end{cases}$$

→ Les arrels són: 0 (triple), -2 i $-\frac{1}{2}$

$$\underline{3.} \ P(x) = (x^2-2) \cdot (2x+5) \rightarrow \begin{cases} x^2-2=0 \rightarrow x=\pm\sqrt{2} \\ 2x+5=0 \rightarrow x=-\frac{5}{2} \end{cases} \rightarrow \text{Les arrels són: } \sqrt{2}, -\sqrt{2} \text{ i } -\frac{5}{2}$$

En aquest exemple el polinomi encara es pot factoritzar més:

$$P(x) = 2(x-\sqrt{2}) \cdot (x+\sqrt{2}) \left(x + \frac{5}{2}\right) \quad \text{o bé} \quad P(x) = (x-\sqrt{2}) \cdot (x+\sqrt{2}) (2x+5)$$

Exercicis: Calcula les arrels dels polinomis següents:

a) $P(x) = x^2 \cdot (x+10) \cdot (x-9)$

b) $P(x) = 2(x+1) \cdot \left(x - \frac{3}{4}\right) (x+5)^2$

c) $P(x) = (x+3) \cdot (3x-5) (x^2+x+1)$

EXERCICIS: ARRELS I FACTORITZACIÓ DE POLINOMIS

1. Indica si $x = 1$, $x = -1$, $x = 2$ i $x = 0$ són arrels dels polinomis següents:
 - a) $P(x) = x^2 + x - 6$
 - b) $P(x) = x^3 - 1$
 - c) $P(x) = x^3 - 8x^2 + 17x - 10$
 - d) $P(x) = x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x$
2. Calcula les arrels dels polinomis de primer i segon grau següents i factoritza'ls :
 - a) $P(x) = 5x + 25$
 - b) $P(x) = 4x - 5$
 - c) $P(x) = x^2 - 2x - 8$
 - d) $P(x) = 5x^2 - 10x - 15$
 - e) $P(x) = 3x^2 + x - 2$
 - f) $P(x) = 12x^2 - 19x + 4$
 - g) $P(x) = -x^2 + 81$
 - h) $P(x) = x^2 - 6x + 9$
 - i) $P(x) = x^2 + x + 3$
 - j) $P(x) = x^2 + 14x + 49$
3. Treu factor comú, calcula les arrels i factoritza:
 - a) $P(x) = x^4 - x^2$
 - b) $P(x) = x^3 + x$
 - c) $P(x) = 2x^2 - 10x$
 - d) $P(x) = x^4 - 4x^3 - 5x^2$
 - e) $P(x) = 5x^5 - 20x^4 + 20x^3$
 - f) $P(x) = 7x^4 - 7x$
4. Calcula les arrels dels polinomis següents i factoritza'ls:
 - a) $P(x) = x^3 - 4x^2 - 11x + 30$
 - b) $P(x) = 3x^3 - 18x^2 + 33x - 18$
 - c) $P(x) = x^3 + x - 10$
 - d) $P(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 25$
 - e) $P(x) = -x^4 - 3x^3 - 3x^2 - x$
 - f) $P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + 5x + 1$
 - g) $P(x) = 4x^3 - x^2 - 4x + 1$
 - h) $P(x) = x^3 + 2x^2 + 7x - 10$
 - i) $P(x) = x^6 + 2x^5 - 3x^4 - 4x^3 + 4x^2$
 - j) $P(x) = x^4 - 25x^2 + 60x - 36$
 - k) $P(x) = x^4 - 4x^2 - 45$
 - l) $P(x) = 2x^6 + 10x^5 - 8x^4 - 40x^3$
5. Calcula les arrels dels polinomis següents:
 - a) $P(x) = (x - 7) \cdot (5x - 3)$
 - b) $P(x) = x \cdot (x^2 - 4) \cdot (x + 1)$
 - c) $P(x) = 5(x + 3) \cdot \left(x - \frac{1}{5}\right) \cdot (x^2 + x + 5)$
 - d) $P(x) = x^3(x - 8)^2 \cdot (2x + 4)$
6. Troba el valor de k perquè:
 - a) $x = -1$ sigui arrel del polinomi $P(x) = x^3 - kx^2 + kx + 15$.
 - b) $x = 3$ sigui arrel del polinomi $P(x) = x^3 + kx^2 - 9x - 45$.
7. Sense fer cap divisió, contesta:
 - a) $P(x) = x^3 + 5x^2 - 9x - 45$ és múltiple de $x + 5$?
 - b) $x - 2$ és divisor del polinomi $P(x) = x^3 + 4$?

SOLUCIONS: ARRELS I FACTORITZACIÓ DE POLINOMIS

1.

	a)	b)	c)	d)
$x=1$	No	Sí	Sí	No
$x=-1$	No	No	No	Sí

	a)	b)	c)	d)
$x=2$	Sí	No	Sí	No
$x=0$	No	No	No	Sí

2.

a) Arrels: -5 ; $P(x) = 5x + 25 = 5(x + 5)$

b) Arrels: $\frac{5}{4}$; $P(x) = 4x - 5 = 4\left(x - \frac{5}{4}\right)$

c) Arrels: -2 i 4 ; $P(x) = (x + 2)(x - 4)$

d) Arrels: 3 i -1 ; $P(x) = 5(x - 3)(x + 1)$

e) Arrels: -1 i $\frac{2}{3}$; $P(x) = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)(x + 1) = (3x - 2)(x + 1)$

f) Arrels: $\frac{1}{4}$ i $\frac{4}{3}$; $P(x) = 12\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{4}{3}\right) = (4x - 1)(3x - 4)$

g) Arrels: 9 i -9 ; $P(x) = -(x - 9)(x + 9)$

h) Arrels: 3 (doble) ; $P(x) = (x - 3)^2$

i) No té arrels reals. No es pot factoritzar.

j) Arrels: -7 (doble) ; $P(x) = (x + 7)^2$

3.

a) Arrels: 0 (doble), 1 i -1; $P(x) = x^2(x - 1)(x + 1)$

b) Arrels: 0 ; $P(x) = x(x^2 + 1)$

e) Arrels: 0 (triple) i 2 (doble) ; $P(x) = 5x^3(x - 2)^2$

c) Arrels: 0 i 5; $P(x) = 2x(x - 5)$

f) Arrels: 0 i 1; $P(x) = 7x(x - 1)(x^2 + x + 1)$

d) Arrels: 0 (doble), -1 i 5 ; $P(x) = x^2(x + 1)(x - 5)$

SOLUCIONS: ARRELS I FACTORITZACIÓ DE POLINOMIS

4.

a) Arrels: 2, -3 i 5; $P(x) = (x-2)(x+3)(x-5)$

b) Arrels: 1, 2 i 3; $P(x) = 3(x-1)(x-2)(x-3)$

c) Arrels: 2; $P(x) = (x-2)(x^2 + 2x + 5)$

d) Arrels: -1 i 5 (doble); $P(x) = (x+1)(x-5)^2$

e) Arrels: 0 i -1 (triple); $P(x) = -x(x+1)^3$

f) No té arrels enteres

g) Arrels: $\frac{1}{4}$, 1 i -1; $P(x) = 4\left(x - \frac{1}{4}\right)(x+1)(x-1)$

h) Arrels: 1; $P(x) = (x-1)(x^2 + 3x + 10)$

i) Arrels: 0, 1 i -2 (dobles); $P(x) = x^2(x-1)^2(x+2)^2$

j) Arrels: 1, 2, -6 i 3; $P(x) = (x-3)(x-2)(x-1)(x+6)$

k) Arrels: 3 i -3; $P(x) = (x-3)(x+3)(x^2 + 5)$

l) Arrels: 0 (triple), 2, -2 i -5; $P(x) = 2x^3(x-2)(x+2)(x+5)$

5.

a) Arrels: 7 i $\frac{3}{5}$.

c) Arrels: -3 i $\frac{1}{5}$.

b) Arrels: 0, 2, -2 i -1.

d) Arrels: 0 (triple), 8 (doble) i -2.

6. a) $k = 7$ b) $k = 5$

7. Apliquem la propietat: “Un nombre enter a és arrel de $P(x)$ si i només si $P(x)$ és divisible per $x - a$ ”

a) Sí, perquè $P(-5) = 0$ i, per tant, -5 és arrel de $P(x)$.

b) No, perquè $P(2) \neq 0$ i, per tant, 2 no és arrel de $P(x)$.

Solucions dels exercicis de la teoria

Estratègies per factoritzar polinomis

Identificar igualtats notables

a) $(x+5)^2$ b) $(x+3)(x-3)$

Treure factor comú

2. $3(x^3 + 3x^2 + x - 3)$

a) $x^2(x^2 + x + 8)$ b) $x(x^2 - 2)$

Càlcul de les arrels d'un polinomi factoritzat

a) 0 (doble), -10, 9. b) -1, $\frac{3}{4}$, -5 (doble) c) -3, $\frac{5}{3}$.

6. DIVISIBILITAT DE POLINOMIS

Si el residu del quocient entre dos polinomis $P(x):D(x)$ és 0 (la divisió és exacta) direm que $P(x)$ és **múltiple** de $D(x)$ i $D(x)$ és **divisor** de $P(x)$:

$$\begin{array}{r|l} P(x) & D(x) \\ 0 & Q(x) \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} P(x) \text{ és múltiple de } D(x) \\ D(x) \text{ és divisor de } P(x) \end{array}$$

Quan factoritzem un polinomi $P(x)$, tots els factors són divisors de $P(x)$.

Mínim comú múltiple (m.c.m.) i màxim comú divisor (m.c.d.) de polinomis

El mínim comú múltiple (**m.c.m.**) de dos o més polinomis és el polinomi de menor grau que és múltiple comú de tots ells.

El màxim comú divisor (**m.c.d.**) de dos o més polinomis és el polinomi de major grau que és divisor comú de tots ells.

El mètode per calcular el **m.c.m.** i el **m.c.d.** de dos o més polinomis és molt semblant al que s'empra per calcular el **m.c.m.** i el **m.c.d.** de dos o més nombres. Seguim els passos següents:

- Factoritzem els polinomis.
- El mínim comú múltiple és el producte dels factores comuns i no comuns elevats a l'exponent més gran.
- El màxim comú divisor és el producte dels factores comuns elevats a l'exponent més petit. Si no tenen cap factor comú, el **m.c.d.** = 1.

Exemples: Calcula el **m.c.m.** i el **m.c.d.** dels polinomis següents ja factoritzats:

1. $P(x) = x \cdot (x+1)^3 \cdot (x+4)$ i $Q(x) = x^2 \cdot (x+1)^2 \cdot (x+5)$

$$\rightarrow \begin{cases} mcm(P(x), Q(x)) = x^2 \cdot (x+1)^3 \cdot (x+4) \cdot (x+5) \\ mcd(P(x), Q(x)) = x \cdot (x+1)^2 \end{cases}$$

2. $P(x) = (x+1)^3 \cdot (x+2)$ i $Q(x) = (x-1)^2 \cdot (x+2)$

$$\rightarrow \begin{cases} mcm(P(x), Q(x)) = (x+1)^3 \cdot (x+2) \cdot (x-1)^2 \\ mcd(P(x), Q(x)) = x+2 \end{cases}$$

DIVISIBILITAT DE POLINOMIS

Exercicis: Calcula el mcm i el mcd dels polinomis següents ja factoritzats:

a) $P(x) = x \cdot (x+1)^2 \cdot (x-1)$ i $Q(x) = x \cdot (x-1)^2$

b) $P(x) = x^3 \cdot (x+1)^2 \cdot (x+5)$, $M(x) = x^2 \cdot (x+1)$ i $Q(x) = x^2 \cdot (x+5)$

Sol.: a) $\begin{cases} mcm = x \cdot (x+1)^2 \cdot (x-1)^2 \\ mcd = x \cdot (x-1) \end{cases}$ b) $\begin{cases} mcm = x^3 \cdot (x+1)^2 \cdot (x+5) \\ mcd = x^2 \end{cases}$

7. FRACCIONS ALGEBRAIQUES

Una fracció algebraica és un quocient de dos polinomis $\frac{P(x)}{Q(x)}$ amb $Q(x) \neq 0$.

Treballem amb fraccions algebraiques de forma anàloga a com ho fem amb fraccions numèriques.

Fraccions equivalents

Dues fraccions algebraiques $\frac{P(x)}{Q(x)}$ i $\frac{M(x)}{N(x)}$ són **equivalents** si $P(x) \cdot N(x) = Q(x) \cdot M(x)$.

El criteri d'equivalència és el mateix que el de les fraccions numèriques.

Exemple: Indica si les fraccions següents són equivalents:

$$\frac{x+1}{x-4} \quad \text{i} \quad \frac{x^2-1}{x^2-5x+4}$$

Analogia amb fraccions numèriques:

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{6} \rightarrow 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$$

Són equivalents si $(x+1) \cdot (x^2-5x+4) = (x-4) \cdot (x^2-1)$:

$$(x+1) \cdot (x^2-5x+4) = x^3-5x^2+4x+x^2-5x+4 = \boxed{x^3-4x^2-x+4}$$

$$(x-4) \cdot (x^2-1) = x^3-x-4x^2+4 = \boxed{x^3-4x^2-x+4}$$

Com que els productes encreuats són iguals les fraccions són equivalents.

Quan multipliquem o dividim el numerador i el denominador d'una fracció algebraica pel mateix polinomi, obtenim una fracció equivalent a la primera. En el cas de la divisió, el polinomi pel qual dividim ha de ser divisor del numerador i del denominador, de manera que les divisions siguin exactes.

Fracció irreductible

Una fracció algebraica és irreductible si el numerador i el denominador no tenen cap divisor comú.

Si en factoritzar el numerador i el denominador d'una fracció algebraica veiem que no tenen cap factor comú, aleshores la fracció és irreductible.

FRACCIONS ALGEBRAIQUES

Simplificació de fraccions algebraiques

Simplificar una fracció algebraica és trobar la fracció algebraica irreductible equivalent.

Per simplificar una fracció algebraica, dividim el numerador i el denominador pel seu m.c.d.

A la pràctica, factoritzem els dos polinomis i simplifiquem els factors comuns:

Exemple: Simplifica la fracció algebraica $\frac{x^3 - x}{x^3 + 2x^2 + x}$ $\frac{x^3 - x}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{x \cdot (x+1) \cdot (x-1)}{x \cdot (x+1)^2} = \frac{\cancel{x} \cdot \cancel{(x+1)} \cdot (x-1)}{\cancel{x} \cdot \cancel{(x+1)} \cdot (x+1)} = \frac{x-1}{x+1}$ (és el mateix que dividir pel mcd = $x \cdot (x+1)$)	Analogia amb fraccions numèriques: $\frac{24}{30} = \frac{\cancel{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cancel{3}}{\cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot 5} = \frac{2 \cdot 2}{5} = \frac{4}{5}$
Exercici: Simplifica la fracció algebraica $\frac{x^3 + 2x^2 - 15x}{x^4 - 6x^3 + 9x^2}$ Sol.: $\frac{x+5}{x^2 - 3x}$	

Operacions amb fraccions algebraiques

Suma i resta de fraccions algebraiques

Per sumar i restar fraccions algebraiques amb el mateix denominador, sumem (o restem) els numeradors i deixem invariant el denominador. Finalment, simplifiquem el resultat obtingut si no és irreductible.

Si no tenen el mateix denominador, reduïm a denominador comú, és a dir, trobem fraccions equivalents (multiplicant el numerador i el denominador pel mateix polinomi) que tinguin entre elles el mateix denominador.

El **denominador comú** és el mínim comú múltiple dels denominadors.

Un cop tenen el mateix denominador, sumem o restem els numeradors i simplifiquem el resultat.

FRACCIONS ALGEBRAIQUES

Exemples:

1. Realitza l'operació: $\frac{x+2}{x^2-1} + \frac{x-3}{x^2-x}$

- Factoritzem els denominadors i en calculem el mcm:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - 1 = (x+1) \cdot (x-1) \\ x^2 - x = x \cdot (x-1) \end{array} \right\} mcm = x \cdot (x+1) \cdot (x-1) \rightarrow \text{aquest serà el denominador comú.}$$

- Reduïm a denominador comú, multiplicant el numerador i el denominador de la primera fracció per x i el numerador i el denominador de la segona fracció per $x+1$:

$$\frac{x+2}{x^2-1} + \frac{x-3}{x^2-x} = \frac{x+2}{(x+1) \cdot (x-1)} + \frac{x-3}{x \cdot (x-1)} = \frac{(x+2) \cdot x}{x \cdot (x+1) \cdot (x-1)} + \frac{(x-3) \cdot (x+1)}{x \cdot (x-1) \cdot (x+1)}$$

$\cdot x$ $\cdot (x+1)$

- Fem els productes dels numeradors i els sumem:

$$\frac{x^2 + 2x}{x \cdot (x+1) \cdot (x-1)} + \frac{x^2 - 2x - 3}{x \cdot (x-1) \cdot (x+1)} = \frac{2x^2 - 3}{x \cdot (x-1) \cdot (x+1)}$$

- Esbrinem si es pot simplificar el resultat:

En aquest cas, no es pot simplificar perquè si factoritzem el numerador veiem que no té cap factor comú amb el denominador.

$$2x^2 - 3 = 2 \cdot \left(x - \sqrt{\frac{3}{2}} \right) \cdot \left(x + \sqrt{\frac{3}{2}} \right)$$

Per fer aquest pas, no cal factoritzar si veiem fàcilment (com en aquest cas) que les arrels del denominador no ho són del numerador. En aquest exemple es veu ràpidament que ni 0, ni 1, ni -1 són arrels del numerador, per tant, no poden tenir cap factor comú.

2. Realitza l'operació: $\frac{x}{x^2-25} - \frac{1}{2x-10}$

***Nota:** recorda que per restar, canviem de signe tots els termes del numerador

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2-25} - \frac{1}{2x-10} &= \frac{x}{(x-5) \cdot (x+5)} - \frac{1}{2(x-5)} = \frac{2x}{2(x-5) \cdot (x+5)} - \frac{1 \cdot (x+5)}{2(x-5) \cdot (x+5)} = \\ &= \frac{2x}{2(x-5) \cdot (x+5)} - \frac{x+5}{2(x-5) \cdot (x+5)} = \frac{2x-x-5}{2(x-5) \cdot (x+5)} = \frac{\cancel{x}-5}{2(\cancel{x}-5) \cdot (x+5)} = \frac{1}{2(x+5)} \end{aligned}$$

El resultat es pot simplificar perquè $x - 5$ és un factor comú al numerador i el denominador.

FRACCIONS ALGEBRAIQUES

Exercicis: Realitza les operacions següents:

a) $\frac{x-1}{x^2+4x+4} + \frac{2x^2}{x^2-4} - \frac{x}{3(x+2)} =$

b) $\frac{2x-15}{x^2+5x} + \frac{x}{x+5} =$

Sol.: a) $\frac{5x^3+15x^2-5x+6}{3(x+2)^2(x-2)}$ b) $\frac{x-3}{x}$

Multiplicació de fraccions algebraiques

El **producte** de dues o més fraccions algebraiques és una altra fracció algebraica que té com a numerador el producte dels numeradors i com a denominador el producte dels denominadors:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{M(x)}{N(x)} = \frac{P(x) \cdot M(x)}{Q(x) \cdot N(x)}$$

És aconsellable factoritzar tots els polinomis, deixar indicats els productes i simplificar abans de fer-los.

FRACCIONS ALGEBRAIQUES

Exemple: Realitza l'operació següent:

$$\frac{x^3 + x}{x^2 - 1} \cdot \frac{x + 1}{x^2 - x} = \frac{x \cdot (x^2 + 1)}{(x + 1) \cdot (x - 1)} \cdot \frac{x + 1}{x \cdot (x - 1)} = \frac{\cancel{x} \cdot (x^2 + 1) \cdot \cancel{(x + 1)}}{(\cancel{x + 1}) \cdot (x - 1) \cdot \cancel{x} \cdot (x - 1)} = \frac{x^2 + 1}{(x - 1)^2}$$

Nota: Analogia amb fraccions numèriques:

$$\frac{4}{9} \cdot \frac{15}{16} = \frac{4 \cdot 15}{9 \cdot 16} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot 5}{\cancel{3} \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 2 \cdot 2} = \frac{5}{12}$$

Exercici: Realitza l'operació següent:

$$\frac{x^3 + 3x^2 - 18x}{x - 5} \cdot \frac{x^2 - 25}{x^3 - 3x^2} =$$

$$\text{Sol.: } \frac{x^2 + 11x + 30}{x}$$

Divisió de fraccions algebraiques

El quocient de dues fraccions algebraiques és una altra fracció que té com a numerador el producte del numerador de la primera fracció pel denominador de la segona i, com a denominador, el producte del denominador de la primera pel numerador de la segona. A la pràctica, diem que multipliquem en creu:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \div \frac{M(x)}{N(x)} = \frac{P(x) \cdot N(x)}{Q(x) \cdot M(x)}$$

Procedim de la mateixa manera que amb el producte: factoritzem i simplifiquem abans de multiplicar.

Exemple: Realitza l'operació següent:

$$\frac{x^2 + 5x}{x + 1} \div \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + 2x + 1} = \frac{x \cdot (x + 5)}{x + 1} \cdot \frac{(x + 5) \cdot (x - 2)}{(x + 1)^2} = \frac{x \cdot \cancel{(x + 5)} \cdot \cancel{(x + 1)} \cdot (x + 1)}{(\cancel{x + 1}) \cdot (x + 5) \cdot (x - 2)} = \frac{x^2 + x}{x - 2}$$

FRACCIONS ALGEBRAIQUES

Exercici: Realitza l'operació següent:

$$\frac{x^2 - 3x}{x - 4} : \frac{x^5 - 9x^3}{x - 4} =$$

Sol.: $\frac{1}{x^3 + 3x^2}$

EXERCICIS: FRACCIONS ALGEBRAIQUES

1. Simplifica les fraccions algebraiques següents:

a) $\frac{x^3+5x^2+8x+4}{x^2-4}$

e) $\frac{x^5+x^4}{x^4-x^2}$

i) $\frac{3x^2-12}{3x^2-3x-6}$

b) $\frac{x^3-1}{x^2-1}$

f) $\frac{x^3+x}{x^3-x}$

j) $\frac{5x^2-80}{5x+20}$

c) $\frac{x^3-5x^2-9x+45}{x^3+x^2-21x-45}$

g) $\frac{x^2-14x+49}{x^2-49}$

k) $\frac{x^3+x^2-30x}{x^4+2x^3-29x^2-30x}$

d) $\frac{x^2+9}{x^4-81}$

h) $\frac{x^3+3x}{x^2+3}$

l) $\frac{1-x}{x^2-1}$

2. Realitza les sumes i restes següents, i simplifica el resultat si és possible:

a) $\frac{5x+1}{x-2} + \frac{x^2+x-3}{x-2}$

f) $\frac{x+1}{x^3-1} + \frac{x-2}{x^2-1}$

b) $\frac{x^2-1}{3x+2} - \frac{3x^2-5x-10}{3x+2}$

g) $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1}$

c) $\frac{1}{x^2-1} - \frac{2}{x^2+2x-3}$

h) $\frac{2x}{x^2-16} + \frac{x+1}{3x+12}$

d) $\frac{1}{x+5} + \frac{1}{x-5}$

i) $\frac{2}{x} + \frac{5x}{x-3} - \frac{x-4}{x^2-9}$

e) $\frac{x-3}{x} + \frac{6}{x^2+2x} - \frac{x+1}{x+2}$

j) $\frac{x-2}{x^3-x} + \frac{x}{x^2-1}$

3. Realitza les multiplicacions i divisions següents, i simplifica el resultat si és possible:

a) $\frac{x-6}{x^2+3x+2} \cdot \frac{x^2+2x}{x^2-36}$

e) $\frac{x^3-5x^2}{x^3+3x^2-4x-12} : \frac{x-5}{x^3+4x^2+4x}$

b) $\frac{x^2-3x+2}{x^4-9x^2} \cdot \frac{x^2-3x}{x-1}$

f) $\frac{x^2-3x-4}{x^3+x^2-x-1} : \frac{x^3-2x^2-7x-4}{x^2-1}$

c) $\frac{2x^2+8x}{x^2-10x+25} \cdot \frac{x^2-25}{2x}$

g) $\frac{x^3}{8x-8} : \frac{x^2}{x^2-x}$

d) $\frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{2x}{x+2}} \cdot \frac{\frac{x-1}{1}}{\frac{x+2}{x}}$

h) $\frac{\frac{x}{x+3}}{x} : \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{x^2-9}{x^3+x^2}}$

SOLUCIONS: FRACCIONS ALGEBRAIQUES

1.

a) $\frac{x^2+3x+2}{x-2}$

e) $\frac{x^2}{x-1}$

i) $\frac{x+2}{x+1}$

b) $\frac{x^2+x+1}{x+1}$

f) $\frac{x^2+1}{x^2-1}$

j) $x-4$

c) $\frac{x-3}{x+3}$

g) $\frac{x-7}{x+7}$

k) $\frac{1}{x+1}$

d) $\frac{1}{x^2-9}$

h) x

l) $-\frac{1}{x+1}$

2.

a) $\frac{x^2+6x-2}{x-2}$

f) $\frac{x^3+x-1}{x^4+x^3-x-1}$

b) $\frac{-2x^2+5x+9}{3x+2}$

g) $\frac{2(x^2+1)}{x^2-1}$

c) $-\frac{1}{x^2+4x+3}$

h) $\frac{x-1}{3(x-4)}$

d) $\frac{2x}{x^2-25}$

i) $\frac{5x^3+16x^2+4x-18}{x^3-9x}$

e) $-\frac{2}{x+2}$

j) $\frac{x+2}{x^2+x}$

3.

a) $\frac{x}{x^2+7x+6}$

e) $\frac{x^4+2x^3}{x^2+x-6}$

b) $\frac{x-2}{x^2+3x}$

f) $\frac{1}{(x+1)^2}$

c) $\frac{x^2+9x+20}{x-5}$

g) $\frac{x^2}{8}$

d) $\frac{1}{2}$

h) 1