

Curs de preparació per a la prova
d'accés a cicles formatius de
grau superior

Matemàtiques

BLOC 2: **GEOMETRIA**

AUTORA: Alícia Espuig Bermell

Bloc 2: Geometria

Tema 4: Trigonometria..... 3

Tema 5: Vectors en el pla.....107

Tema 6: Nombres complexos...195

TEMA 4: TRIGONOMETRIA

1. Figures planes. Àrees.
2. Cossos geomètrics. Volums.
3. Trigonometria.
4. Escales.

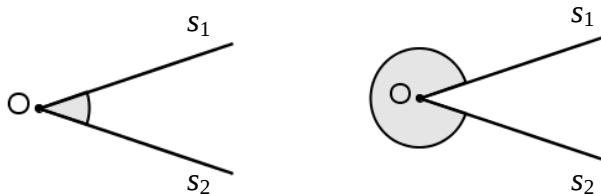
FIGURES PLANES

2. FIGURES PLANES

Angles

Dues semirectes del pla, s_1 i s_2 , d'origen comú O divideixen el pla en dues regions. Cadascuna d'aquestes regions s'anomena **angle**.

Així, un **angle** és una regió del pla limitada per dues semirectes d'origen comú.

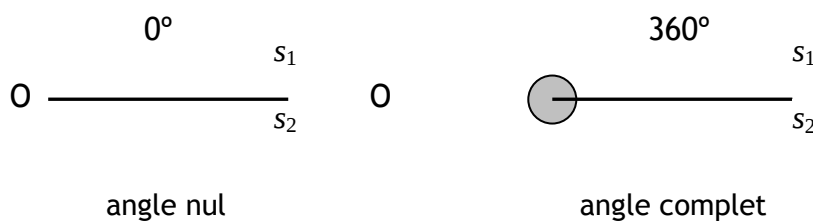


- s_1 i s_2 s'anomenen costats de l'angle.
- O s'anomena vèrtex de l'angle.

Mesura d'angles. Graus sexagesimals

Normalment, per mesurar angles, es fan servir els **graus sexagesimals** i els seus divisors, els **minuts** i els **segons**.

Quan les dues semirectes són coincidents (una sobre l'altra) formen un angle nul i un angle complet.



En el sistema sexagesimal un angle complet mesura 360° .

Es defineix:

1 grau sexagesimal = $1^\circ = \frac{1}{360}$ part d'un angle complet.

1 minut = $1' = \frac{1}{60}$ part d'un grau.

1 segon = $1'' = \frac{1}{60}$ part d'un minut.

$1^\circ = 60'$
 $1' = 60''$

La mesura d'un angle també s'anomena **amplitud** de l'angle.

FIGURES PLANES

Tipus d'angles

Angle recte: Angle que mesura 90° . És determinat per dues semirectes perpendiculars.

Angle agut: Angle més petit que un angle recte ($< 90^\circ$).

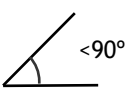
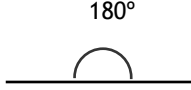
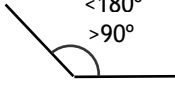
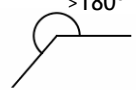
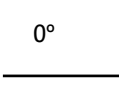
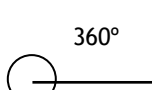
Angle pla: Angle que mesura 180° . És determinat per dues semirectes oposades.

Angle obtús: Angle més gran que un angle recte ($>90^\circ$) i més petit que l'angle pla ($<180^\circ$).

Angle còncav: Angle més gran que un angle pla ($>180^\circ$).

Angle nul: Angle que mesura 0° . És determinat per dues semirectes coincidents.

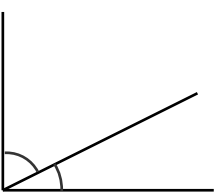
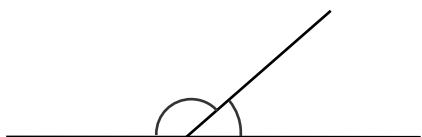
Angle complet: Angle que mesura 360° . És determinat per dues semirectes coincidents.

Angle recte	Angle agut	Angle pla	Angle obtús	Angle còncav	Angle nul	Angle complet
						

Angles complementaris i suplementaris

Dos angles són **complementaris** si la suma de les seves mesures és igual a 90° .

Dos angles són **suplementaris** si la suma de les seves mesures és igual a 180° .

Angles complementaris	Angles suplementaris
	

Polígons

Una **línia poligonal** és una línia formada per diversos segments rectilinis.

Un **polígon** és la porció del pla limitada per una línia poligonal tancada.

Línia poligonal



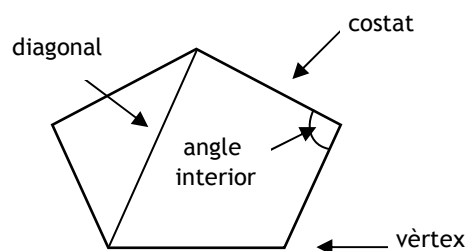
FIGURES PLANES

Elements d'un polígon:

Costats: Segments que limiten el polígon.

Vèrtexs: Punts d'unió dels costats.

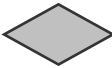
Angles interiors: Angles determinats per dos costats consecutius a l'interior del polígon.



Diagonal: Segment que uneix dos vèrtexs no consecutius.

Polígons regulars

Un polígon és **regular** si té tots els costats i angles iguals. Si no té tots els costats i angles iguals, es diu que el polígon és **irregular**.

Exemples			
Són regulars:	No són regulars:		
			
	(té els angles iguals, però els costats desiguals)	(té els costats iguals, però els angles desiguals)	(té costats i angles desiguals)

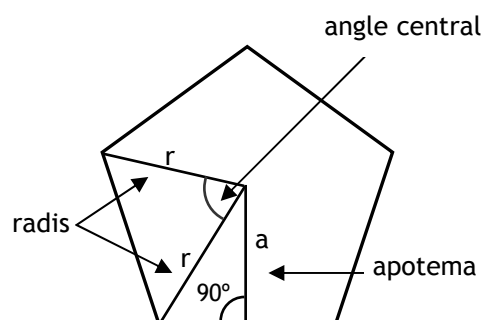
Elements d'un polígon regular

Centre: Punt equidistant de tots els vèrtexs.

Radi (r): Segment que uneix el centre del polígon amb un vèrtex.

Hi ha tants radis com vèrtexs.

Apotema (a): Segment traçat des del centre del polígon fins a un costat i que és perpendicular al costat.



Angle central: Angle determinat per dos radis consecutius.

$$\text{Mesura: } \frac{360^\circ}{\text{Nre. de costats}}$$

Perímetre i àrea d'un polígon

Anomenem **perímetre** d'un polígon la longitud del seu contorn, és a dir, la suma de les mides de tots els seus costats. El representarem amb la lletra **P**.

FIGURES PLANES

Anomenem àrea del polígon la mesura de la superfície (porció del pla) que ocupa. La representarem amb la lletra *A*.

Classificacions dels polígons

Hem vist que podem classificar els polígons en **regulars** i **irregulars**.

També els podem classificar:

Segons els angles

- **Polígon convex:** Polígon en què tots els angles interiors mesuren menys de 180°

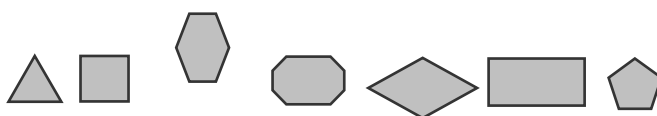
Si prolonguem un costat qualsevol d'un polígon convex, la prolongació no passa per l'interior del polígon.

- **Polígon còncav:** Polígon que té almenys un angle interior còncav (que mesura més de 180°).

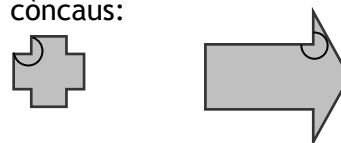
En un polígon còncav, almenys una prolongació d'un costat passa per l'interior del polígon.

Exemples:

Són convexos:



Són còncavs:



Segons el nombre de costats

- | | |
|---|--|
| - Triangle: Polígon que té 3 costats. | - Heptàgon: Polígon que té 7 costats. |
| - Quadrilàter: Polígon que té 4 costats. | - Octàgon: Polígon que té 8 costats. |
| - Pentàgon: Polígon que té 5 costats. | - Enneàgon: Polígon que té 9 costats. |
| - Hexàgon: Polígon que té 6 costats. | - Decàgon: Polígon que té 10 costats. |

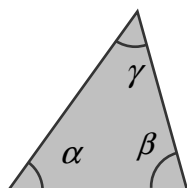
Triangles

Els triangles són polígons de tres costats.

FIGURES PLANES

Propietats dels triangles

- La suma dels angles interiors d'un triangle és 180°



$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Si dibuixes en un full un triangle, el retalles i en doblegues els vèrtexs, unint-los tots en un mateix punt, comprovaràs que els tres angles sumen 180° .

- La longitud d'un costat qualsevol és sempre més petita que la suma de les longituds dels altres dos costats.

Si hi hagués un costat més gran que dos, no es podria tancar el triangle, dibuix següent:



la suma dels altres tal com es veu en el

Classificació de triangles

Els triangles es poden classificar segons els costats i segons els angles:

Segons els costats

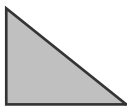
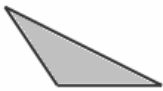
- **Triangle equilàter:** Triangle que té els tres costats iguals (de la mateixa longitud). També té els tres angles iguals (de 60°).
- **Triangle isòsceles:** Triangle que té dos costats iguals (de la mateixa longitud). També té dos angles iguals.
- **Triangle escalè:** Triangle que té els tres costats diferents (de diferent longitud). També té els tres angles diferents.

Triangle equilàter	Triangle isòsceles	Triangle escalè

FIGURES PLANES

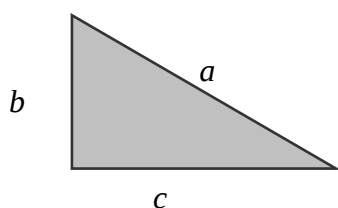
Segons els angles

- **Triangle acutangle:** Triangle que té els tres angles aguts.
- **Triangle rectangle:** Triangle que té un angle recte (90°). Els costats que formen l'angle recte s'anomenen catets i l'altre costat, l'oposat a l'angle recte, s'anomena hipotenusa.
- **Triangle obtusangle:** Triangle que té un angle obtús.

Triangle acutangle	Triangle rectangle	Triangle obtusangle
		

Teorema de Pitàgores

El **teorema de Pitàgores** estableix que en un triangle rectangle, el quadrat de la longitud hipotenusa és igual a la suma dels quadrats de les longituds dels catets.



$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$\text{hipotenusa}^2 = \text{catet}_1^2 + \text{catet}_2^2$$

Aïllant cadascun dels costats obtenim les fórmules següents:

$$\text{hipotenusa} = \sqrt{\text{catet}_1^2 + \text{catet}_2^2}$$

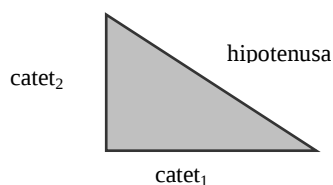
$$(a = \sqrt{b^2 + c^2})$$

$$\text{catet}_1 = \sqrt{\text{hipotenusa}^2 - \text{catet}_2^2}$$

$$(b^2 = a^2 - c^2 \rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2})$$

$$\text{catet}_2 = \sqrt{\text{hipotenusa}^2 - \text{catet}_1^2}$$

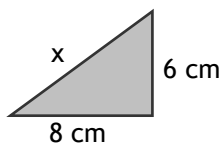
$$(c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2})$$



FIGURES PLANES

Exemples:

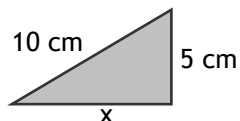
1. Calcula la hipotenusa d'un triangle rectangle els catets del qual mesuren 6 i 8 cm:



$$\text{hipotenusa} = \sqrt{\text{catet}_1^2 + \text{catet}_2^2}$$

$$x = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}$$

2. Sabem que la hipotenusa d'un triangle rectangle mesura 10 cm i que un dels seus catets mesura 5 cm. Quant mesura l'altre catet?

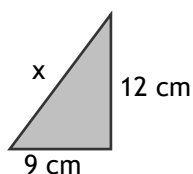


$$\text{catet}_1 = \sqrt{\text{hipotenusa}^2 - \text{catet}_2^2}$$

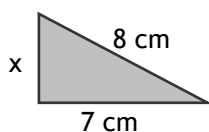
$$x = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{100 - 25} = \sqrt{75} = 8,66 \text{ cm}$$

Exercici: Calcula el valor de x:

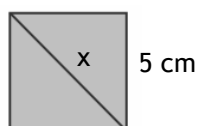
a)



b)



c)



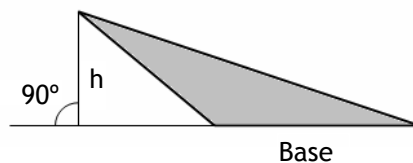
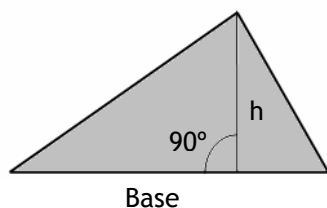
Sol.: a) $x = 15 \text{ cm}$ b) $x = 3,87 \text{ cm}$ c) $x = 7,07 \text{ cm}$

Altres d'un triangle

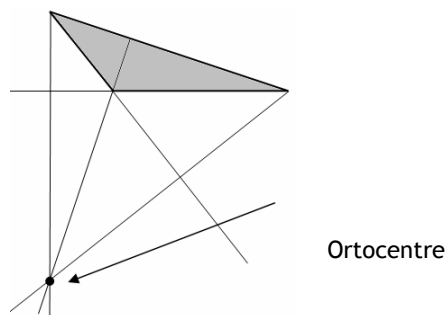
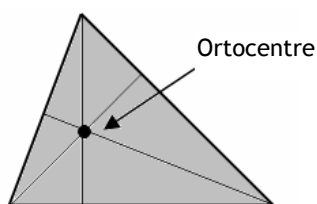
La **base** d'un triangle és qualsevol dels seus costats. Si hi ha un costat horitzontal, aquest se sol triar com a base. Es representa amb la lletra **b**.

L'**altura** d'un triangle respecte a una base donada és el segment perpendicular a la base traçat des del vèrtex oposat a la base fins a la base o la seva prolongació. Es representa amb la lletra **h**.

FIGURES PLANES



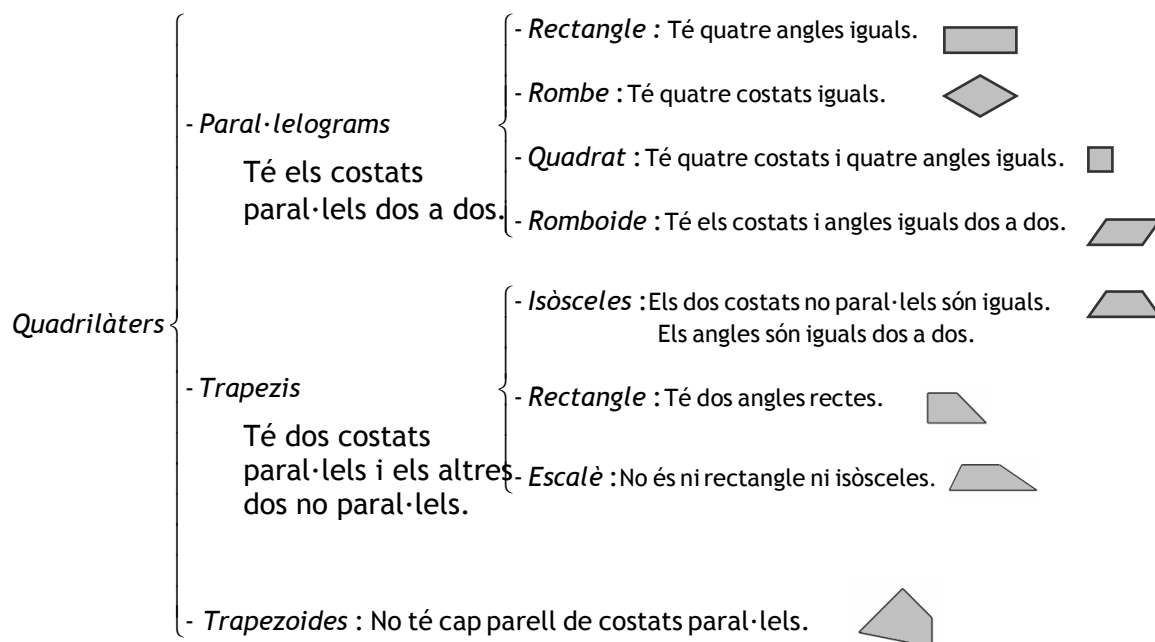
Un triangle té tres bases i tres altures. El punt d'intersecció de les tres altures (o les seves prolongacions) s'anomena **ortocentre**.



Quadrilàters

Els quadrilàters són polígons de quatre costats.

Classificació dels quadrilàters



Circumferència i cercle

Circumferència

Una circumferència és una corba plana i tancada els punts de la qual equidisten (són a la mateixa distància) d'un altre punt anomenat centre.

Elements d'una circumferència

Centre (O): Punt equidistant de tots els punts de la circumferència.

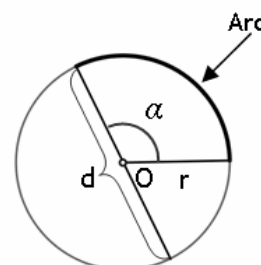
Radi (r): Qualsevol segment que uneix el centre amb un punt de la circumferència.

Hi ha infinits radis.

Diàmetre (d): Qualsevol segment que uneix dos punts de la circumferència passant pel centre. El diàmetre mesura el doble del radi ($d = 2r$).

Arc: Qualsevol porció de la circumferència. Cada arc és determinat per dos radis.

Angle central (α): Angle que té el vèrtex en el centre de la circumferència.



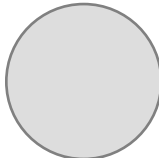
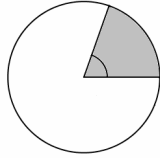
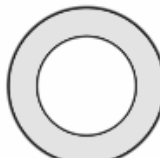
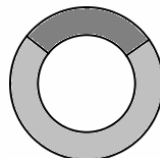
Cercle

Un cercle és la porció del pla limitada per una circumferència. Està format per la circumferència i l'interior de la circumferència. Així, la circumferència és el contorn del cercle. El radi, el diàmetre i el centre de la circumferència també ho són del cercle.

Un sector circular és la porció del cercle limitada per un arc i els radis que el determinen.

Una corona circular és la porció del pla compresa entre dues circumferències concèntriques (que tenen el mateix centre i radi diferent).

El trapezi circular és la porció de corona circular limitada per dos radis.

Cercle	Sector circular	Corona circular	Trapezi circular
			

FIGURES PLANES

Càlcul d'àrees

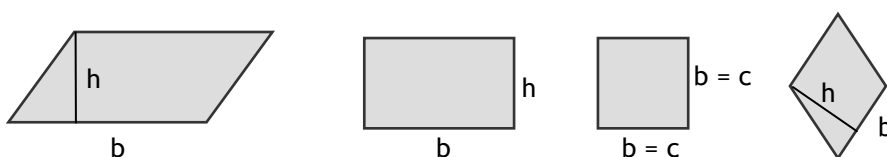
L'àrea d'una figura plana és la mesura de la superfície (porció del pla) que ocupa.

Nota: Per estudiar aquest apartat cal conèixer les unitats de mesura del **sistema mètric decimal** i els procediments per fer canvis d'unitats.

Base i altura d'un paral·lelogram

La **base**, ***b***, d'un paral·lelogram és qualsevol dels seus costats. Si hi ha dos costats horitzontals, se sol triar com a base el costat horitzontal inferior.

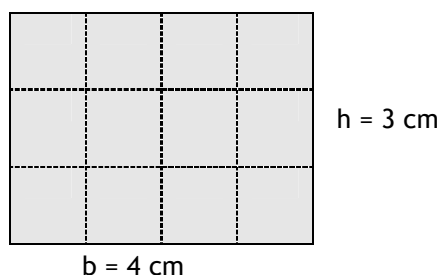
L'**altura**, ***h***, d'un paral·lelogram és un segment perpendicular a la base traçat des de la base fins del seu costat paral·lel.



En els rectangles i quadrats, la base i l'altura coincideixen amb dos costats.
En els quadrats, la base i l'altura mesuren el mateix: el costat (c).

Àrea del rectangle

Tal com es dedueix fàcilment en el dibuix següent, l'àrea del rectangle es calcula multiplicant la base (b) per l'altura (h):



$$A_{\text{rectangle}} = b \cdot h$$

En l'exemple de la figura:

$$A = 3 \cdot 4 = 12 \text{ cm}^2$$

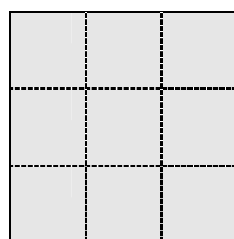
(Hi ha 12 quadrats d'1 cm^2 d'àrea).

Àrea del quadrat

L'àrea del quadrat es calcula igual que la del rectangle: multiplicant la base (b) per l'altura (h).

Com que la base i l'altura mesuren el mateix (la mida del costat), l'àrea es calcula multiplicant el costat per ell mateix (costat·costat), és a dir, elevant el costat al quadrat.

FIGURES PLANES



$$b = c = 3 \text{ cm}$$

$$h = c = 3 \text{ cm}$$

$$A_{\text{quadrat}} = b \cdot h = c^2$$

En l'exemple de la figura:

$$A = 3^2 = 9 \text{ cm}^2$$

Àrea del romboide

Fixem-nos en les figures següents. Si retallem el triangle gris del romboide (Figura 1) i el col·loquem a la dreta, obtenim un rectangle (Figura 2) amb la mateixa àrea i les mateixes mides de base i altura que el romboide inicial.



Figura 1

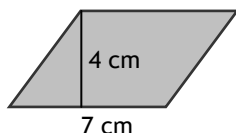


Figura 2

$$A_{\text{romboide}} = b \cdot h$$

Així, la fórmula per calcular l'àrea del romboide és la mateixa que la del rectangle.

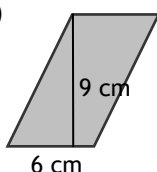
Exemple: Calcula l'àrea del paral·lelogram següent:



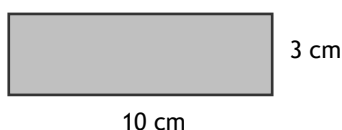
$$A = b \cdot h = 7 \cdot 4 = 28 \text{ cm}^2$$

Exercici: Calcula l'àrea dels paral·lelograms següents:

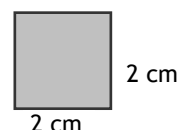
a)



b)



c)

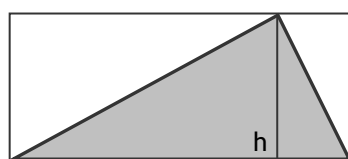


Sol.: a) 54 cm^2 b) 30 cm^2 c) 4 cm^2

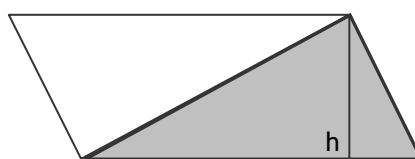
Àrea del triangle

Tal com podem veure en les figures següents, un triangle ocupa la meitat de superfície que un rectangle o un romboide amb la mateixes mides de base i altura:

FIGURES PLANES



b



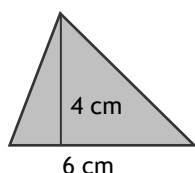
b

$$A_{\text{triangle}} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Aleshores, l'àrea del triangle és la meitat de l'àrea d'un rectangle o un romboide, és a dir, la meitat de la base per l'altura.

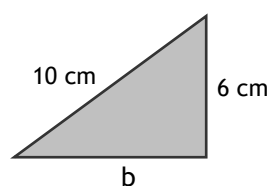
Exemples: Calcula l'àrea dels triangles següents:

1.



$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 4}{2} = \frac{24}{2} = 12 \text{ cm}^2$$

2.



La base i l'altura d'un triangle rectangle són els dos catets. En aquest cas, coneixem l'altura, però no coneixem la base. Haurem d'aplicar el teorema de Pitàgores per calcular la base:

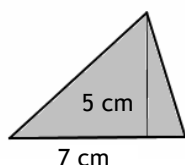
$$b = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8 \text{ cm}$$

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = \frac{48}{2} = 24 \text{ cm}^2$$

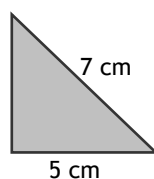
Exercici: Calcula l'àrea dels triangles següents:

Sol.: a) 17,5 cm² b) 12,25 cm²

a)



b)



Àrea del rombe

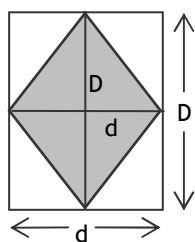
L'àrea del rombe es pot calcular utilitzant la fórmula de l'àrea del romboide.

Tanmateix, en moltes ocasions no coneixem les mides de la base i l'altura del rombe i sí que coneixem les mides de les seves diagonals.

Representem la **diagonal gran** amb la lletra **D** i la **diagonal petita** amb la lletra **d**.

FIGURES PLANES

Vegem com es calcula l'àrea del rombe a partir de les seves diagonals. En la figura següent veiem que l'àrea d'un rombe és la meitat de l'àrea d'un rectangle que té per base i altura les diagonals del rombe:

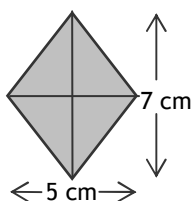


$$A_{\text{rombe}} = \frac{D \cdot d}{2}$$

Així, l'àrea del rombe és la meitat del producte de les seves diagonals.

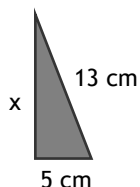
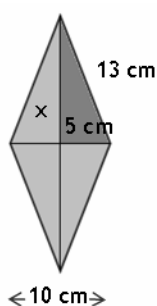
Exemples:

1. Calcula l'àrea d'un rombe les diagonals del qual mesuren 7 cm i 5 cm:



$$A = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{7 \cdot 5}{2} = \frac{35}{2} = 17,5 \text{ cm}^2$$

2. Calcula l'àrea d'un rombe de 13 cm de costat i 10 cm de diagonal menor:



- Apliquem el teorema de Pitàgores per calcular la ~~meitat diagonal major (x)~~:

$$x = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$$

- Calculem la diagonal major: $D = 2x = 2 \cdot 12 = 24 \text{ cm}$

- Calculem l'àrea: $A = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{10 \cdot 24}{2} = \frac{240}{2} = 120 \text{ cm}^2$

Exercicis:

1. Calcula l'àrea d'un rombe les diagonals del qual mesuren 10,5 cm i 3 cm:

FIGURES PLANES

2. Calcula l'àrea d'un rombe de 10 cm de costat i 16 cm de diagonal major:

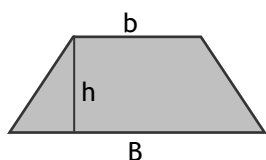
Sol.: 1. $A = 15,75 \text{ cm}^2$ 2. $A = 96 \text{ cm}^2$

Àrea del trapezi

Un trapezi té dos costats paral·lels i dos de no paral·lels. Els dos costats paral·lels s'anomenen **bases del trapezi**. La base major la designarem amb la lletra B i la menor, amb la lletra b .

L'**altura** del trapezi és qualsevol segment que uneix les dues bases i és perpendicular a aquestes.

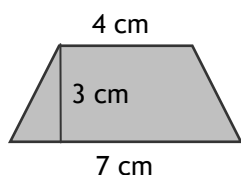
L'**àrea del trapezi** és la semisuma de les bases (la mitjana de les bases) multiplicada per l'altura.



$$A_{\text{trapezi}} = \frac{B+b}{2} \cdot h$$

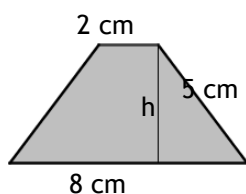
Exemples:

1. Calcula l'àrea del trapezi següent:



$$A = \frac{B+b}{2} \cdot h = \frac{7+4}{2} \cdot 3 = \frac{11}{2} \cdot 3 = 16,5 \text{ cm}^2$$

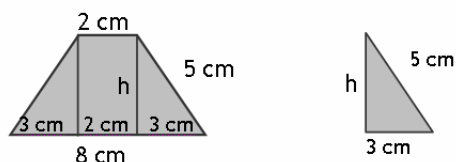
2. Calcula l'àrea del trapezi isòsceles següent:



FIGURES PLANES

Hem de calcular l'altura del trapezi.

Com que és un trapezi isòsceles, el podem dividir en un rectangle i dos triangles rectangles iguals:



Apliquem el teorema de Pitàgores per calcular l'altura, la qual és un catet d'aquests triangles rectangles:

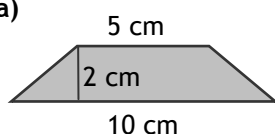
$$h = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4 \text{ cm}$$

- Una vegada calculada l'altura, ja podem aplicar la fórmula de l'àrea del trapezi:

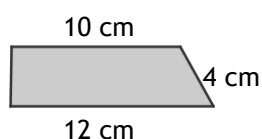
$$A = \frac{B+b}{2} \cdot h = \frac{8+2}{2} \cdot 4 = \frac{10}{2} \cdot 4 = 20 \text{ cm}^2$$

Exercici: Calcula l'àrea dels trapezis següents:

a)



b)



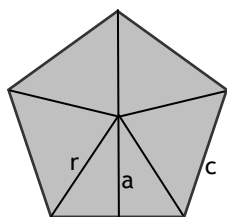
Sol.: a) $A = 15 \text{ cm}^2$ b) $A = 38,06 \text{ cm}^2$

Àrea d'un polígon regular

Si tracem tots els radis d'un polígon regular de n costats, el polígon queda dividit en n triangles iguals. La suma de les àrees d'aquests triangles serà l'àrea del polígon. Per tant, si calculem l'àrea d'un d'aquests triangles i la multipliquem per n (nombre de costats), obtindrem l'àrea del polígon.

La base de cada triangle coincideix amb el costat del polígon i l'altura coincideix amb l'apotema. Així l'àrea serà:

FIGURES PLANES

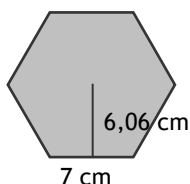


$$A_{\text{polígon regular}} = n \cdot \frac{c \cdot a}{2} = \frac{\overbrace{n \cdot c}^P \cdot a}{2} = \frac{P \cdot a}{2} \quad (n \cdot c \text{ és el perímetre})$$

$$A_{\text{polígon regular}} = \frac{P \cdot a}{2}$$

Exemples:

1. Calcula l'àrea d'un hexàgon regular de costat 7 cm i apotema 6,06 cm.



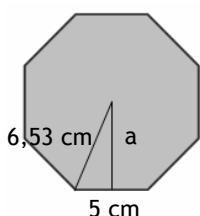
- Calculem el perímetre multiplicant el nombre de costats (6) per la longitud de cada costat (7 cm):

$$P = 6 \cdot 7 = 42 \text{ cm}$$

- Calculem l'àrea aplicant la fórmula de l'àrea del polígon regular:

$$A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{42 \cdot 6,06}{2} = 127,26 \text{ cm}^2$$

2. Calcula l'àrea d'un octàgon regular de costat 5 cm i radi 6,53 cm.



- Apliquem el teorema de Pitàgores per calcular l'apotema:

$$h = \sqrt{6,53^2 - 2,5^2} = \sqrt{36,3909} = 6,03 \text{ cm}$$

- Calculem el perímetre: $P = 8 \cdot 5 = 40 \text{ cm}$

- Calculem l'àrea aplicant la fórmula de l'àrea del polígon regular:

$$A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{40 \cdot 6,03}{2} = 120,6 \text{ cm}^2$$

FIGURES PLANES

Exercicis:

1. Calcula l'àrea d'un decàgon regular de costat 1 cm i apotema 1,54 cm.

2. Calcula l'àrea d'un pentàgon regular de costat 4 cm i radi 3,4 cm.

Sol.: 1. $A = 7,7 \text{ cm}^2$ 2. $A = 27,5 \text{ cm}^2$

Àrea i perímetre del cercle

Perímetre del cercle o longitud de la circumferència

El perímetre del cercle és la **longitud de la circumferència (L)**.

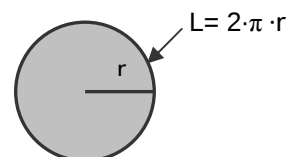
Si dividim la longitud d'una circumferència pel seu diàmetre, obtenim sempre el mateix nombre, independentment de la mida de la circumferència. Aquest nombre és el nombre π .

Així, la **longitud d'una circumferència** s'obté multiplicant el seu diàmetre (dues vegades el

$$\frac{l}{d} = \pi$$

radi) pel nombre π :

$$L = \pi \cdot d = 2 \cdot \pi \cdot r$$



Àrea del cercle

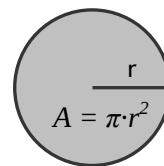
Si considerem el cercle com un polígon regular amb molts costats (infinitats costats), el seu radi seria l'apotema d'aquest polígon i la seva àrea seria:

$$A_{\text{polígon regular}} = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{\cancel{2} \cdot \pi \cdot r \cdot r}{\cancel{2}} = \pi \cdot r^2$$

FIGURES PLANES

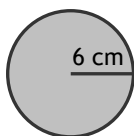
Així, l'àrea del cercle s'obté multiplicant π pel quadrat del radi:

$$A_{\text{cercle}} = \pi \cdot r^2$$



Exemples:

1. Calcula l'àrea i el perímetre d'un cercle de 6 cm de radi.



$$L = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot 6 = 37,7 \text{ cm}$$

$$A_{\text{cercle}} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 6^2 = \pi \cdot 36 = 113,1 \text{ cm}^2$$

Calcula el radi d'una circumferència de 10 m de longitud.

$$10 = 2 \cdot \pi \cdot r \rightarrow r = \frac{10}{2 \cdot \pi} = 1,59 \text{ m}$$

Exercicis:

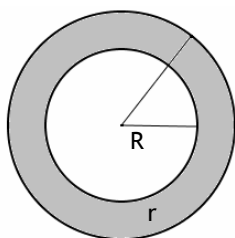
1. Calcula l'àrea i el perímetre d'un cercle de 2 cm de radi.

2. Calcula el radi d'un cercle de 10 cm² d'àrea.

Sol.: 1. $A = 12,57 \text{ cm}^2$ $L = 12,57 \text{ cm}$ 2. $r = 1,78 \text{ cm}$

Àrea de la corona circular

L'àrea de la corona circular és igual a l'àrea del cercle major menys l'àrea del cercle menor.

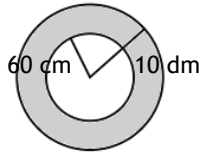


$$A_{\text{corona circular}} = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$

FIGURES PLANES

Exemple:

Calcula l'àrea de la corona circular compresa entre dues circumferències de radis 10 dm i 60 cm.



- Passem totes les mides a la mateixa unitat. Per exemple, a dm:
 $60 \text{ cm} = 6 \text{ dm}$

Exercici: Calcula l'àrea de la corona circular compresa entre dues circumferències de radis 5 cm i 10 mm.

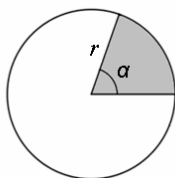
Sol.: $A = 75,4 \text{ cm}^2$

Àrea del sector circular

Sabem que l'àrea del sector circular d'1° d'amplitud és la 360a part de l'àrea de la circumferència:

$$A_{\text{sector circular } 1^\circ} = \frac{\pi \cdot r^2}{360}$$

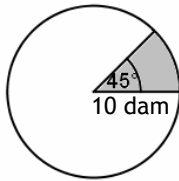
Per calcular l'àrea d'un sector circular d'amplitud α , multipliquem per α l'àrea del sector circular d'1° d'amplitud:



$$A_{\text{sector circular}} = \frac{\pi \cdot r^2}{360} \cdot \alpha$$

FIGURES PLANES

Exemple: Calcula l'àrea d'un sector circular de 45° en una circumferència de 10 dam de radi. Expressa-la en m^2 .



- Calculem l'àrea del sector circular aplicant la fórmula:

$$A_{\text{sector circular}} = \frac{\pi \cdot r^2}{360} \cdot \alpha = \frac{\pi \cdot 10^2}{360} \cdot 45 = 39,27 \text{ dam}^2$$

- Passem el resultat a m^2 :

Exercici: Calcula l'àrea d'un sector circular de 130° en una circumferència de 15 hm de radi. Expressa-la en m^2 .

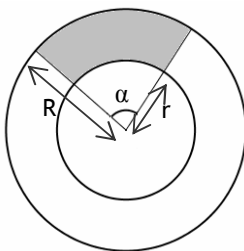
Sol.: $A = 2.552.544 \text{ m}^2$

Àrea del trapezi circular

Sabem que l'àrea d'un trapezi circular d' 1° d'amplitud és la 360a part de l'àrea d'una corona circular:

$$A_{\text{trapezi circular}} = \frac{\pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2}{360} = \frac{\pi \cdot (R^2 - r^2)}{360}$$

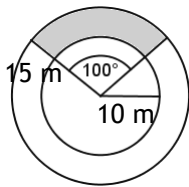
Per calcular l'àrea d'un trapezi circular d'amplitud α , multipliquem per α l'àrea del trapezi circular d' 1° d'amplitud:



$$A_{\text{trapezi circular}} = \frac{\pi \cdot (R^2 - r^2)}{360} \cdot \alpha$$

FIGURES PLANES

Exemple: Calcula l'àrea d'un trapezi circular de 100° d'amplitud en una corona circular de 10 m i 15 m de radis. Expressa-la en cm^2 .



Calculem l'àrea del trapezi circular aplicant la fórmula:

$$A_{\text{trapezi circular}} = \frac{\pi \cdot (R^2 - r^2)}{360} \cdot \alpha = \frac{\pi \cdot (15^2 - 10^2)}{360} \cdot 100 = 109,08 \text{ m}^2$$

- Passem el resultat a cm^2 : $109,08 \text{ m}^2 = 1.090.800 \text{ cm}^2$

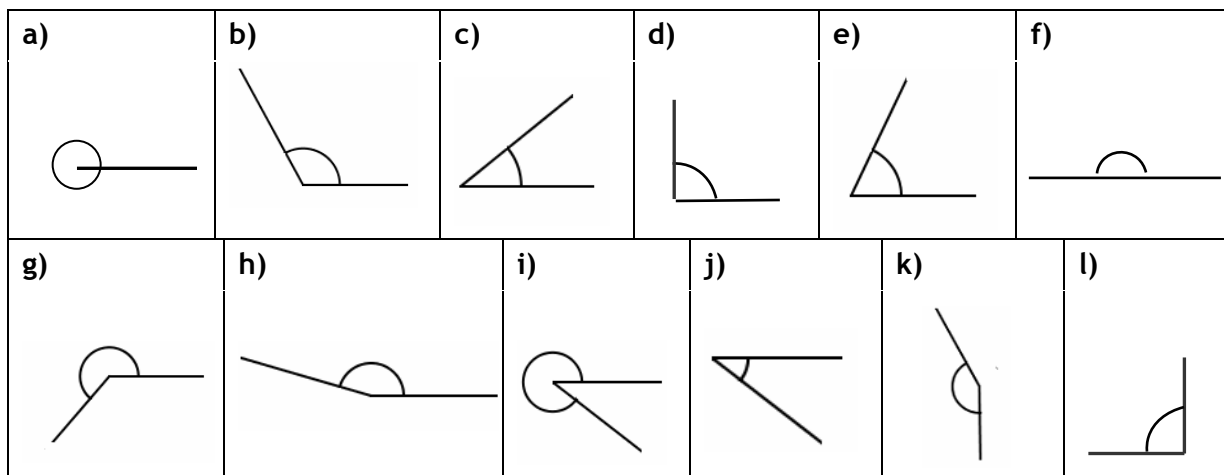
Exercici: Calcula l'àrea d'un trapezi circular de 300° d'amplitud en una corona circular de 12 dm i 2 m de radis. Expressa-la en cm^2 .

Sol.: $A = 67.020,64 \text{ cm}^2$

EXERCICIS: FIGURES PLANES

Figures planes

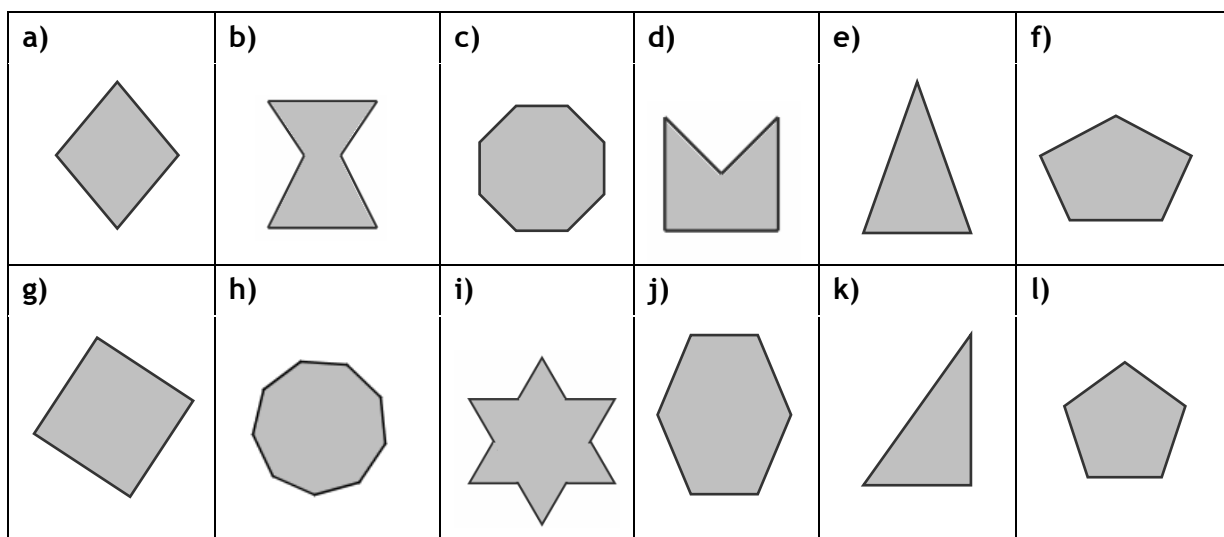
1. Classifica els angles següents:



2. Calcula l'angle suplementari i complementari dels angles següents:

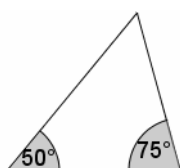
	a) 45°	b) 85°	c) 90°	d) 10°
Complementari				
Suplementari				

3. Indica si els polígons següents són còncaus o convexos, regulars o irregulars, i classifica'ls segons el nombre de costats:

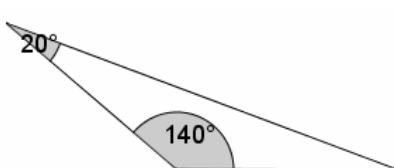


4. Calcula l'angle que falta:

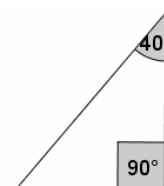
a)



b)



c)



EXERCICIS: FIGURES PLANES

5. Indica si podríem construir un triangle amb els costats a , b i c .

a) $a = 4$ cm

$b = 5$ cm

$c = 8$ cm

b) $a = 5$ cm

$b = 3$ cm

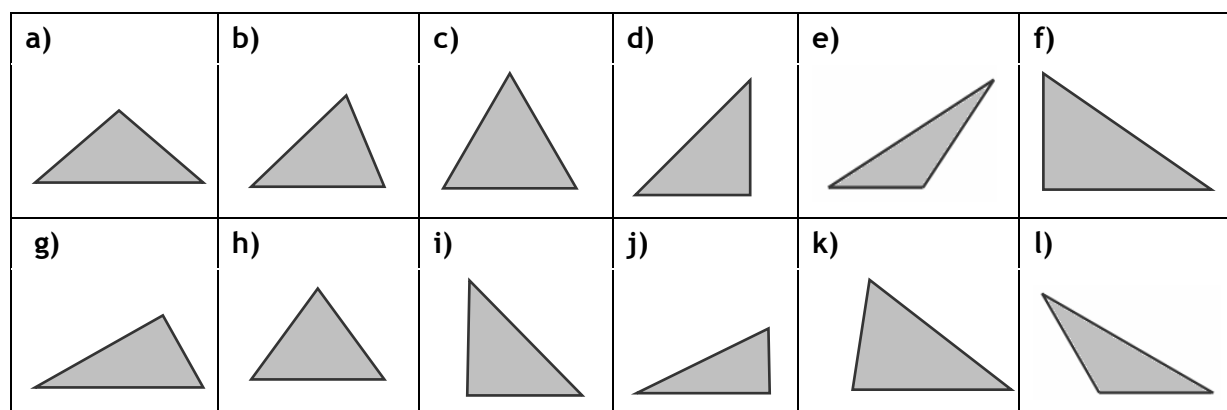
$c = 1$ cm

c) $a = 6$ cm

$b = 2$ cm

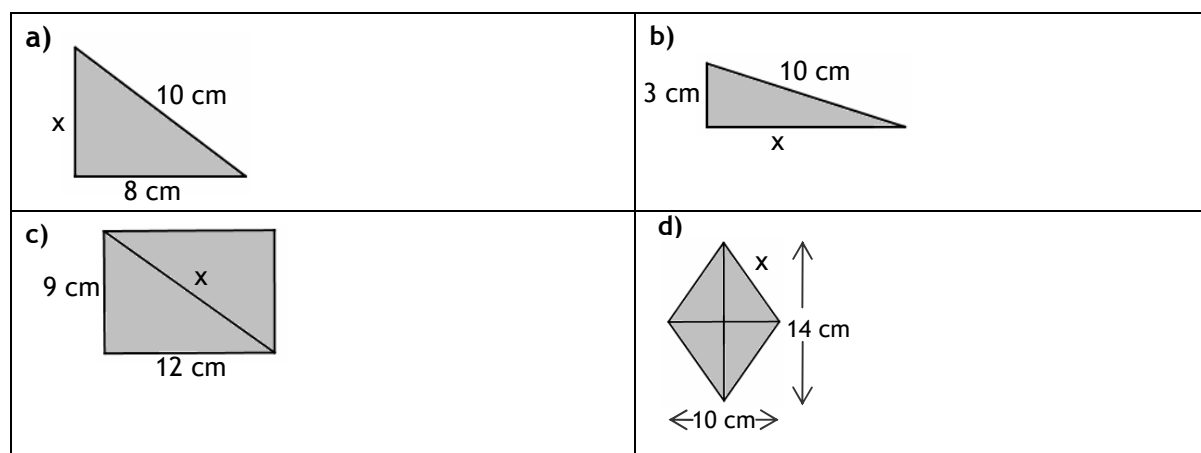
$c = 4$ cm

6. Classifica els triangles següents, segons els costats i segons els angles:

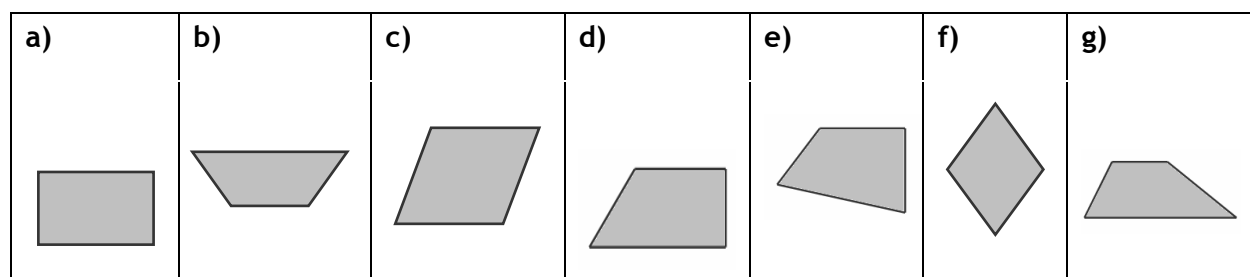


7. És possible dibuixar un triangle equilàter rectangle? I equilàter obtusangle? Raona la resposta.

8. Calcula el valor de x , aplicant el teorema de Pitàgores:



9. Classifica els quadrilàters següents:



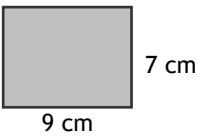
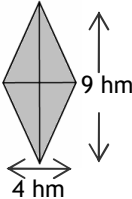
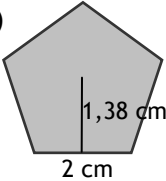
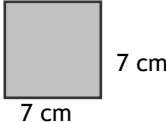
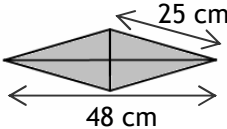
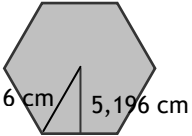
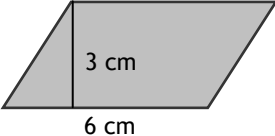
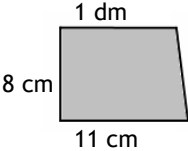
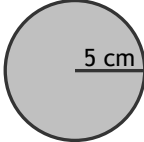
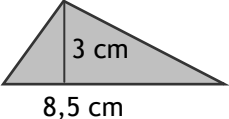
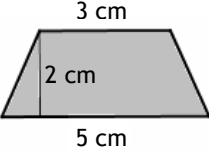
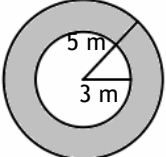
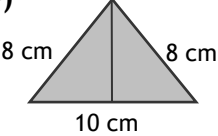
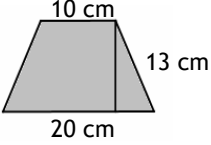
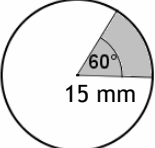
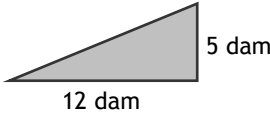
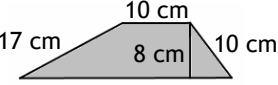
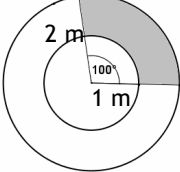
EXERCICIS: CÀLCUL D'ÀREES

Càlcul d'àrees

1. Calcula l'àrea, el perímetre i la diagonal d'un rectangle de 100 mm de base i 3 cm d'altura.
2. Calcula la base d'un rectangle de 12 m^2 d'àrea i 3 m d'altura.
3. Calcula l'àrea i el perímetre d'un quadrat de costat 8 hm.
4. Calcula el costat i la diagonal d'un quadrat d'àrea 36 cm^2 .
5. Calcula l'àrea d'un romboide de 15 cm de base i 2 dm d'altura.
6. Calcula l'altura d'un romboide de 10 m^2 d'àrea i 2 m de base.
7. Calcula l'àrea d'un triangle de 14 cm de base i 7 cm d'altura.
8. Calcula l'altura d'un triangle de 15 dm^2 d'àrea i 3 dm de base.
9. Calcula l'àrea i el perímetre d'un triangle isòsceles de costat desigual 6 cm i altura 4 cm.
10. El costat desigual d'un triangle isòsceles fa 6 cm i els costats iguals fan 8 cm. Troba'n l'àrea i el perímetre.
11. La hipotenusa d'un triangle rectangle fa 25 cm i un dels catets fa 7 cm. Calcula'n l'àrea i el perímetre.
12. Calcula l'àrea i el perímetre d'un triangle equilàter de 3 cm de costat.
13. Les dues diagonals d'un rombe fan 12 cm i 8 cm. Calcula'n l'àrea i el perímetre.
14. Calcula l'àrea d'un rombe de 15 cm de costat i 18 cm de diagonal menor.
15. Les bases d'un trapezi mesuren 9 dm i 140 cm, i l'altura mesura 5 dm. Calcula'n l'àrea.
16. Calcula l'àrea i el perímetre d'un trapezi isòsceles, sabent que els seus costats iguals mesuren 17 cm i les bases mesuren 10 cm i 26 cm.
17. Calcula l'àrea d'un enneàgon regular de 6 cm de costat i 8,24 cm d'apotema.
18. Calcula l'àrea d'un octàgon regular d'1 m de costat i 1,31 m de radi.
19. Calcula l'àrea i el perímetre d'un cercle de 14 cm de diàmetre.
20. Calcula el radi d'un cercle de 8 m de longitud.
21. Calcula l'àrea de la corona circular compresa entre dues circumferències de 4 km i 8 Km de radi.
22. Calcula l'àrea d'un sector circular de 30° en un cercle de 2 dm de radi.
23. Calcula l'àrea d'un trapezi circular de radis 9 cm i 5 cm i amplitud 120° .

EXERCICIS: CÀLCUL D'ÀREES

24. Calcula l'àrea de les figures següents:

a) 	g) 	m) 
b) 	h) 	n) 
c) 	i) 	o) 
d) 	j) 	p) 
e) 	k) 	q) 
f) 	l) 	r) 

SOLUCIONS: FIGURES PLANES

1.

a) complet	b) obtús	c) agut	d) recte	e) agut	f) pla
g) còncav	h) obtús	i) còncav	j) agut	k) obtús	l) recte

2.

	a) 45°	b) 85°	c) 90°	d) 10°
Complementari	45°	5°	0°	80°
Suplementari	135°	95°	90°	170°

3.

a) convex irregular quadrilàter	b) còncav irregular hexàgon	c) convex regular octàgon	d) còncav irregular pentàgon	e) convex irregular triangle	f) convex irregular pentàgon
g) convex regular quadrilàter	h) convex regular enneàgon	i) còncav irregular dodecàgon	j) convex irregular hexàgon	k) convex irregular triangle	l) convex regular pentàgon

4. a) 55° b) 20° c) 50°

5. a) Sí ($4 + 5 = 9 > 8$) b) No ($3 + 1 = 4 < 5$) c) No ($4 + 2 = 6 = 6$)

6.

a) isòsceles acutangle	b) escalè acutangle	c) equilàter acutangle	d) isòsceles rectangle	e) escalè obtusangle	f) escalè rectangle
g) escalè rectangle	h) isòsceles acutangle	i) isòsceles rectangle	j) escalè rectangle	k) escalè acutangle	l) isòsceles obtusangle

7. Tots els triangles equilàters són acutangles, ja que tenen tots tres angles iguals, de 60° ($180 : 3 = 60$). Aleshores, no podem dibuixar un triangle equilàter obtusangle o rectangle.

8. a) 6 cm b) 9,54 cm c) 15 cm d) 8,6 cm

9.

a) paral·lelogram rectangle	b) trapezi isòsceles	c) paral·lelogram romboide	d) trapezi rectangle	e) trapezoide	f) paral·lelogram rombe	g) trapezi escalè
-----------------------------	----------------------	----------------------------	----------------------	---------------	-------------------------	-------------------

Solucions: Càlcul d'àrees

1. $A = 30 \text{ cm}^2$ $P = 26 \text{ cm}$

$d = 10,44 \text{ cm}$

2. $b = 4 \text{ m}$

3. $A = 64 \text{ hm}^2$ $P = 32 \text{ hm}$

4. $c = 6 \text{ cm}$ $d = 8,49 \text{ cm}$

5. $A = 3 \text{ dm}^2$

6. $h = 5 \text{ m}$

7. $A = 49 \text{ cm}^2$

8. $h = 10 \text{ dm}$

9. $A = 12 \text{ cm}^2$ $P = 16 \text{ cm}$

10. $A = 22,26 \text{ cm}^2$ $P = 22 \text{ cm}$

11. $A = 84 \text{ cm}^2$ $P = 56 \text{ cm}$

12. $A = 3,9 \text{ cm}^2$ $P = 9 \text{ cm}$

13. $A = 48 \text{ cm}^2$ $P = 28,84 \text{ cm}$

14. $A = 216 \text{ cm}^2$ $P = 60 \text{ cm}$

15. $A = 57,5 \text{ dm}^2$

16. $A = 270 \text{ cm}^2$ $P = 70 \text{ cm}$

17. $A = 222,48 \text{ cm}^2$

18. $A = 4,84 \text{ m}^2$

19. $A = 153,94 \text{ cm}^2$ $P = 43,98 \text{ cm}$

20. $r = 1,27 \text{ cm}$

21. $A = 150,8 \text{ km}^2$

22. $A = 1,05 \text{ dm}^2$

23. $A = 58,64 \text{ cm}^2$

24.

a) $A = 63 \text{ cm}^2$

j) $A = 8 \text{ cm}^2$

b) $A = 49 \text{ cm}^2$

k) $A = 180 \text{ cm}^2$

c) $A = 18 \text{ cm}^2$

l) $A = 164 \text{ cm}^2$

d) $A = 12,75 \text{ cm}^2$

m) $A = 6,9 \text{ cm}^2$

e) $A = 31,2 \text{ cm}^2$

n) $A = 93,53 \text{ cm}^2$

f) $A = 30 \text{ dam}^2$

o) $A = 78,54 \text{ cm}^2$

g) $A = 18 \text{ hm}^2$

p) $A = 50,27 \text{ m}^2$

h) $A = 336 \text{ cm}^2$

q) $A = 117,81 \text{ mm}^2$

i) $A = 84 \text{ cm}^2$

r) $A = 2,62 \text{ m}^2$

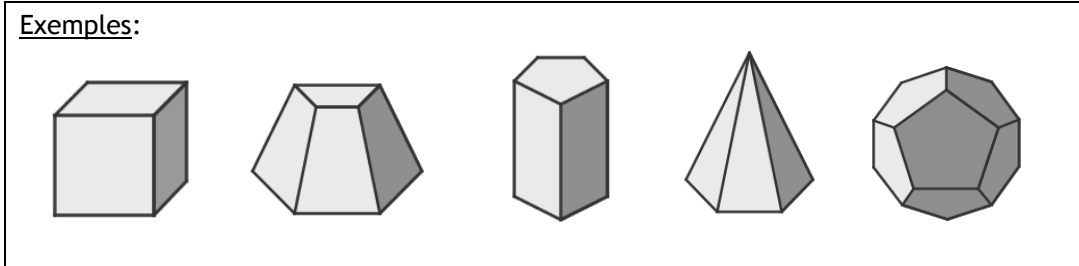
3. COSSOS GEOMÈTRICS

Un cos geomètric és la porció de l'espai tancada i limitada per figures geomètriques.

Poliedres

Un poliedre és un cos geomètric limitat per superfícies planes poligonals.

Exemples:

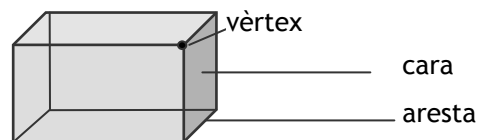


Elements d'un poliedre

Cares: Polígons que limiten el poliedre.

Arestes: Costats de les cares. Són línies d'intersecció de dues cares.

Vèrtexs: Vèrtexs de les cares. Són punts comuns a tres o més cares i arestes.



Angle diedre: Regió de l'espai limitada per dues cares.

Angle poliedre: Regió de l'espai limitada per tres o més cares que concorren en un mateix vèrtex.

Hi ha molts tipus de poliedres, però nosaltres només estudiarem els tres tipus següents: poliedres regulars, prismes i piràmides.

Poliedres regulars

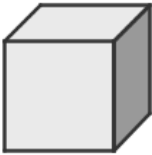
Un **poliedre regular** és un poliedre que compleix les condicions següents:

- Les seves cares són polígons regulars iguals.
- En cada vèrtex concorren el mateix nombre de cares i arestes.

Tots els angles dels poliedres regulars són iguals.

Només hi ha cinc poliedres regulars, coneguts també com a sòlids platònics, que són els que hi ha representats a la taula següent:

COSSOS GEOMÈTRICS

Poliedres regulars				
Tetraedre	Hexaedre o cub	Octaedre	Dodecaedre	Icosaedre
				
Cares: 4 triangles equilàters	Cares: 6 quadrats	Cares: 8 triangles equilàters	Cares: 12 pentàgons regulars	Cares: 20 triangles equilàters

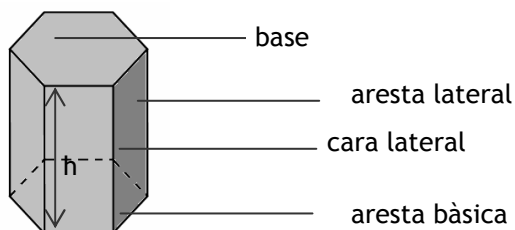
Prismes

Un **prisma** és un poliedre que compleix les condicions següents:

- Té dues cares iguals i paral·lels entre si, anomenades **bases**.
- La resta de cares, anomenades **cares laterals**, són paral·lelograms. El nombre de cares laterals coincideix amb el nombre de costats que tenen les bases.

L'**altura (h)** del prisma és la distància entre les bases (la longitud d'un segment que uneix les dues bases i és perpendicular a aquestes).

Les arestes de les bases s'anomenen **arestes bàsiques** i la resta s'anomenen **arestes laterals**.



Classificacions dels prismes

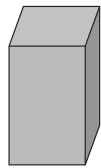
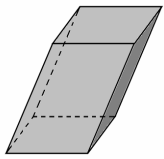
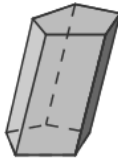
Hi ha diferents classificacions dels prismes, segons la inclinació del prisma i segons la forma de les bases.

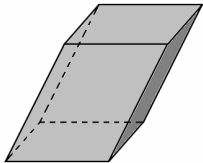
Segons la inclinació del prisma:

- **Prisma recte:** Prisma en el qual les cares laterals són rectangles perpendiculars a les bases.

COSSOS GEOMÈTRICS

- **Prisma oblic:** Prisma en el qual les cares laterals són romboïdes o rombes.

Prisma recte	Prismes oblics
	 

Un prisma en el qual totes les cares són paral·lelograms s'anomena paral·lelepípede: 	Un paral·lelepípede recte és un ortoedre (té forma de caixa). Totes les cares d'un ortoedre són rectangles: 
--	--

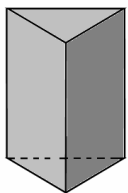
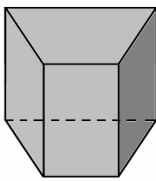
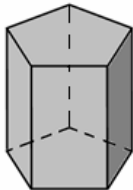
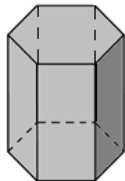
Segons el nombre de costats de les bases:

- **Prisma triangular:** Prisma en el qual les bases són triangles.
- **Prisma quadrangular:** Prisma en el qual les bases són quadrilàters.
- **Prisma pentagonal:** Prisma en el qual les bases són pentàgons.
- **Prisma hexagonal:** Prisma en el qual les bases són hexàgons.

Etc.

Segons si les bases són regulars o no:

- **Prisma regular:** Prisma recte amb bases regulars.
- **Prisma irregular:** Prisma no regular.

Prisma triangular Irregular*	Prisma quadrangular Irregular	Prisma pentagonal Regular	Prisma hexagonal Regular
			

* Suposant que la base és un triangle isòsceles (com que està en perspectiva podria ser equilàter).

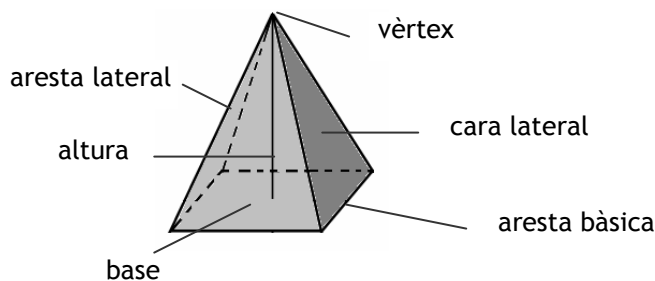
Piràmides

Una **piràmide** és un poliedre que compleix les condicions següents:

- Una de les cares és un polígon qualsevol, anomenat **base**.
- La resta de cares, anomenades **cares laterals**, són triangles amb un vèrtex comú, anomenat **vèrtex de la piràmide**. El nombre de cares laterals coincideix amb el nombre de costats que tenen les bases.

L'**altura (h)** de la piràmide és la distància entre la base i el vèrtex (la longitud d'un segment que uneix el vèrtex amb la base i és perpendicular a aquesta).

Les arestes de la base s'anomenen **arestes bàsiques** i la resta s'anomenen **arestes laterals**.



Classificacions de les piràmides

Les piràmides es classifiquen de la mateixa manera que els prismes.

Segons la inclinació de la piràmide:

- **Piràmide recta:** Piràmide en la qual totes les cares laterals són triangles isòsceles.
- **Piràmide obliqua:** Piràmide que no és recta.

Segons el nombre de costats de les bases:

- **Piràmide triangular:** Piràmide en la qual la base és un triangle.
- **Piràmide quadrangular:** Piràmide en la qual la base és un quadrilàter.
- **Piràmide pentagonal:** Piràmide en la qual la base és un pentàgon.
- **Piràmide hexagonal:** Piràmide en la qual la base és un hexàgon.

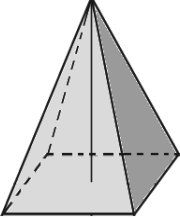
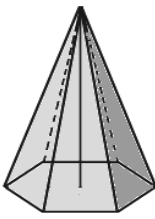
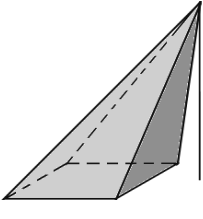
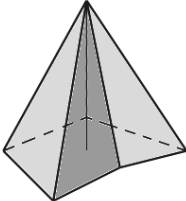
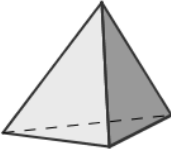
Etc.

Segons si la base és regular o no:

- **Piràmide regular:** Piràmide recta amb base regular.
- **Piràmide irregular:** Piràmide no regular.

COSSOS GEOMÈTRICS

Vegem uns quants exemples de piràmides:

Piràmide quadrangular Regular	Piràmide hexagonal Regular	Piràmide quadrangular Irregular obliqua	Piràmide pentagonal Irregular obliqua	Piràmide triangular Irregular* recta
				

* Suposant que la base és un triangle isòsceles (com que està en perspectiva podria ser equilàter).

Cossos de revolució

Un **cos rodó** és un cos geomètric que té alguna cara corba.

Els **cossos de revolució** són cossos geomètrics rodons generats per una figura plana que gira al voltant d'un eix. Els cossos de revolució que estudiarem nosaltres són el cilindre, el con i l'esfera.

El cilindre

El **cilindre** és el cos de revolució generat per un rectangle que gira al voltant d'un dels seus costats.

El con

El **con** és el cos de revolució generat per un triangle rectangle que gira al voltant d'un dels seus catets.

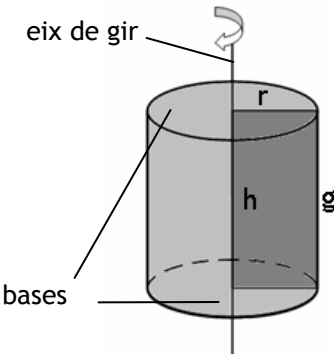
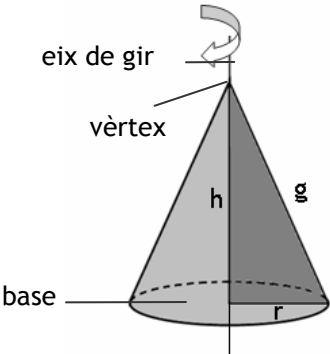
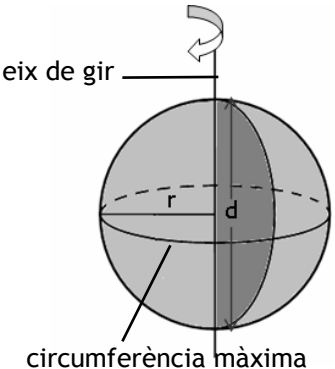
L'esfera

L'**esfera** és el cos de revolució generat per un semicercle que gira al voltant del seu diàmetre.

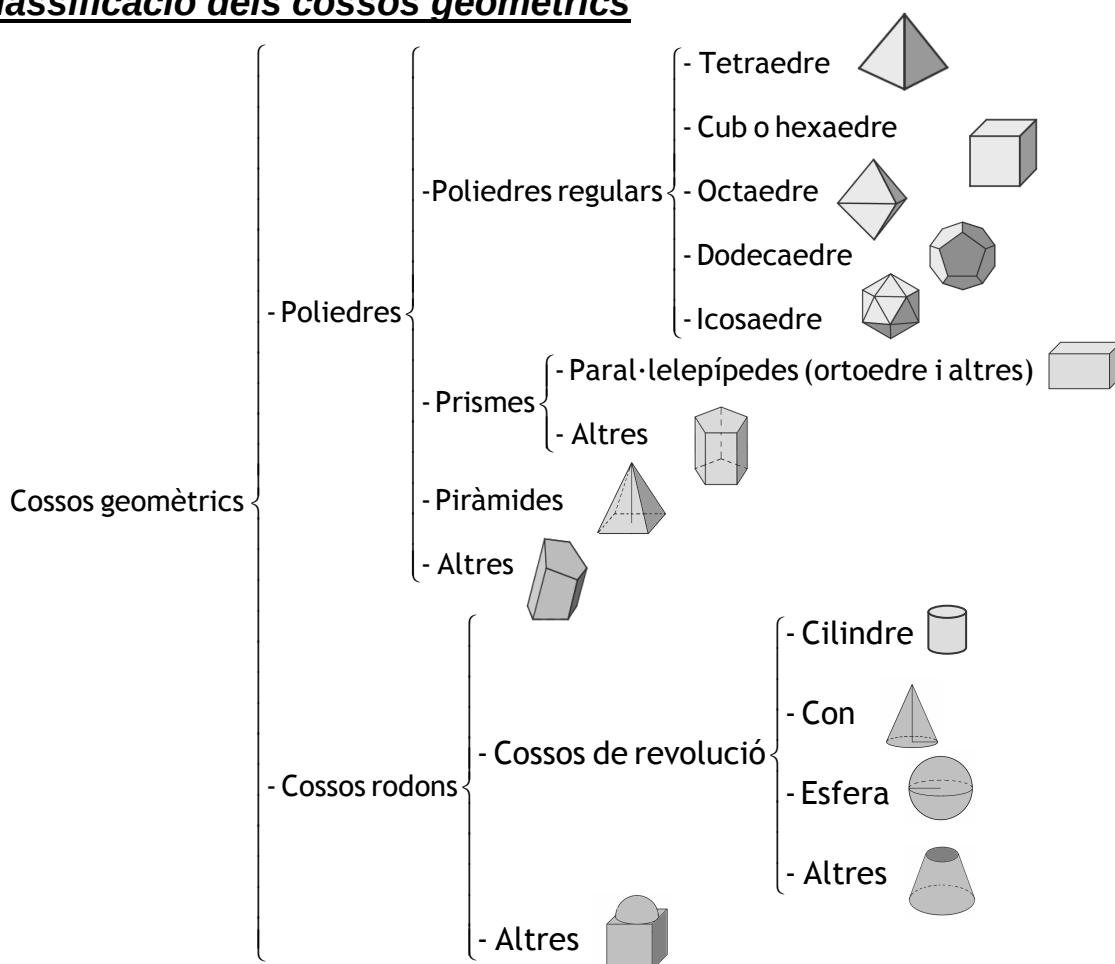
Tots els punts de la superfície de l'esfera equidisten d'un punt anomenat **centre**, que coincideix amb el centre del semicercle generador.

COSSOS GEOMÈTRICS

Elements dels cossos de revolució

Elements del cilindre	Elements del con	Elements de l'esfera
 $r = \text{radi}$ $g = \text{generatriu}$ $h = \text{altura}$	 $r = \text{radi}$ $g = \text{generatriu}$ $h = \text{altura}$	 $r = \text{radi}$ $d = \text{diàmetre}$

Classificació dels cossos geomètrics



COSSOS GEOMÈTRICS

Càlcul d'àrees i volums de cossos geomètrics

El volum d'un cos geomètric és la quantitat d'espai que ocupa.

L'àrea d'un cos geomètric és la suma de les àrees de les superfícies que el limiten.

Nota: Per estudiar aquest apartat cal conèixer les unitats de mesura del **sistema mètric decimal** i els procediments per fer canvis d'unitats.

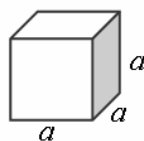
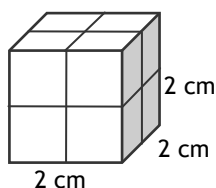
Només estudiarem l'àrea i el volum dels cubs, els ortoedres, els prismes, les piràmides i els cossos de revolució.

Àrea i volum d'un cub

Les cares d'un cub són sis quadrats iguals. Aleshores, **l'àrea d'un cub** s'obté multiplicant per sis l'àrea d'un d'aquests quadrats.

En la *figura 1* veiem que un cub de 2 cm d'aresta té un volum de $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \text{ cm}^3$ (conté 8 cubs petits d' 1 cm^3). En general, per calcular el **volum del cub**, elevem al cub la seva aresta.

Si anomenem a a l'aresta del cub:



$$A_{\text{cub}} = 6 \cdot a^2$$
$$V_{\text{cub}} = a^3$$

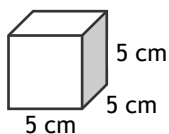
En l'exemple de la *figura 1*:

$$A = 6 \cdot 2^2 = 6 \cdot 4 = 24 \text{ cm}^2$$

$$V = 2^3 = 8$$

Figura 1

Exercici: Calcula l'àrea i el volum d'un cub d'aresta 5 cm:



$$\text{Sol.: } A = 150 \text{ cm}^2; V = 125 \text{ cm}^3$$

Àrea i volum d'un ortoedre

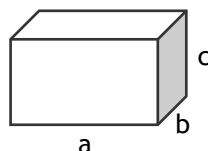
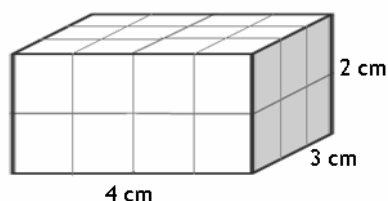
Un cub és un cas particular d'ortoedre. Per tant, el raonament per deduir les fórmules de l'àrea i el volum d'un ortoedre és anàleg al que hem usat per al cub.

Per calcular **l'àrea d'un ortoedre** calculem les àrees de les cares i les sumem (tenint en compte que les cares són iguals dos a dos).

COSSOS GEOMÈTRICS

En la *figura 2* veiem que un ortoedre d'arestes 4 cm, 3 cm i 2 cm té un volum de $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24 \text{ cm}^3$ (conté 24 cubs petits d' 1 cm^3). En general, per calcular el **volum de l'ortoedre**, multipliquem les longituds de les tres arestes.

Si anomenem ***a*, *b* i *c*** a les longituds de les arestes:



$$A_{\text{ortoedre}} = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c$$

$$V_{\text{ortoedre}} = a \cdot b \cdot c$$

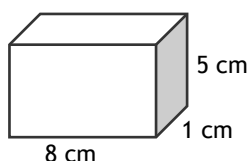
Figura 2

Exemple: Calcula l'àrea i el volum de l'ortoedre de la figura 2:

$$A = 2 \cdot 4 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 3 = 16 + 24 + 12 = 52 \text{ cm}^2$$

$$V = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24 \text{ cm}^3$$

Exercici: Calcula l'àrea i el volum d'un ortoedre d'arestes 8 cm, 5 cm i 1 cm:

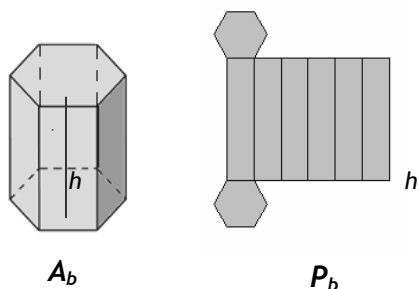


$$\text{Sol.: } A = 106 \text{ cm}^2; V = 40 \text{ cm}^3$$

Àrea i volum d'un prisma recte

L'àrea d'un prisma recte s'obté calculant l'àrea de les seves cares i sumant-les. Per fer-ho, es calcula l'àrea de la base, A_b , i l'àrea lateral (suma de les àrees de les cares laterals), A_l , per separat. Aquesta última coincideix amb l'àrea d'un rectangle, tal com veiem en el desenvolupament pla.

El **volum d'un prisma** s'obté multiplicant l'àrea de la base per l'altura.



Desenvolupament pla

$$A_{\text{prisma}} = 2 \cdot A_b + A_l = 2 \cdot A_b + P_b \cdot h$$

$$V_{\text{prisma}} = A_b \cdot h$$

$$A_b = \text{àrea de la base}$$

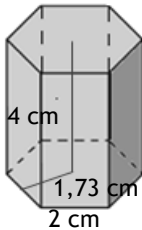
$$A_l = \text{àrea lateral}$$

$$P_b = \text{perímetre de la base}$$

COSSOS GEOMÈTRICS

Exemples:

1. Calcula l'àrea i el volum d'un prisma hexagonal regular de 4 cm d'altura, 2 cm d'aresta bàsica i 1,73 cm d'apotema de la base:



- Calculem l'àrea de la base, que és un hexàgon regular, i l'àrea lateral:

$$A_b = \frac{P_b \cdot a_b}{2} = \frac{12 \cdot 1,73}{2} = 10,38 \text{ cm}^2$$

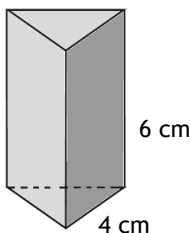
$$A_l = P_b \cdot h = 12 \cdot 4 = 48 \text{ cm}^2$$

- Calculem l'àrea i el volum del prisma aplicant les fórmules corresponents:

$$A_{\text{prisma}} = 2 \cdot A_b + A_l = 2 \cdot 10,38 + 48 = \boxed{68,76 \text{ cm}^2}$$

$$V_{\text{prisma}} = A_b \cdot h = 10,38 \cdot 4 = \boxed{41,52 \text{ cm}^3}$$

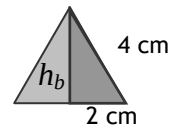
2. Calcula l'àrea i el volum d'un prisma triangular regular de 6 cm d'altura i 4 cm d'aresta bàsica.



- Calculem l'àrea de la base, que és un triangle equilàter. Prèviament, haurem de calcular l'altura de la base aplicant el teorema de Pitàgores:

$$h_b = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} = 3,46 \text{ cm}$$

$$A_b = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{4 \cdot 3,46}{2} = 6,92 \text{ cm}^2$$



- Calculem l'àrea lateral:

$$A_l = P_b \cdot h = 12 \cdot 6 = 72 \text{ cm}^2$$

- Calculem l'àrea i el volum del prisma aplicant les fórmules corresponents:

$$A_{\text{prisma}} = 2 \cdot A_b + A_l = 2 \cdot 6,92 + 72 = \boxed{85,84 \text{ cm}^2}$$

$$V_{\text{prisma}} = A_b \cdot h = 6,92 \cdot 6 = \boxed{41,52 \text{ cm}^3}$$

Exercicis:

1. Calcula l'àrea i el volum d'un prisma pentagonal regular de 25 cm d'altura, 3 cm d'aresta bàsica i 2,06 cm d'apotema de la base:

2. Calcula l'àrea i el volum d'un prisma octagonal regular de 20 m d'altura, 10 m d'aresta de la base i 13,07 m de radi de la base:

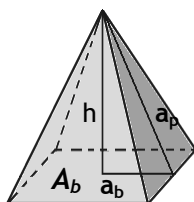
Sol.: 1. $A = 405,9 \text{ cm}^2$; $V = 386,25 \text{ cm}^3$ 2. $A = 2.566,4 \text{ m}^2$; $V = 9.664 \text{ m}^3$

Àrea i volum d'una piràmide regular

L'àrea d'una piràmide s'obté calculant l'àrea de les seves cares i sumant-les. Per fer-ho, es calcula l'àrea de la base, A_b , i l'àrea lateral (suma de les àrees de les cares laterals), A_l , per separat.

Calcularem només àrees de piràmides regulars, les cares de les quals són triangles isòscels iguals. Per calcular l'àrea lateral, calcularem l'àrea d'un d'aquests triangles i la multiplicarem pel nombre de triangles. En una piràmide regular, l'altura de les cares laterals s'anomena **apotema de la piràmide** (a_p).

El **volum d'una piràmide** és un terç de l'àrea de la base per l'altura (un terç del volum d'un prisma amb la mateixa base i altura que la piràmide).



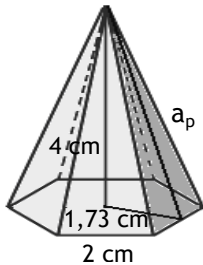
$$A_{\text{piràmide}} = A_b + A_l \qquad V_{\text{piràmide}} = \frac{A_b \cdot h}{3}$$

A_b = àrea de la base A_l = àrea lateral

COSSOS GEOMÈTRICS

Exemples:

1. Calcula l'àrea i el volum d'una piràmide hexagonal regular de 4 cm d'altura, 2 cm d'aresta bàsica i 1,73 cm d'apotema de la base:



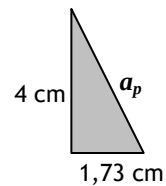
- Calculem l'àrea de la base, que és un hexàgon regular:

$$A_b = \frac{P_b \cdot a_b}{2} = \frac{12 \cdot 1,73}{2} = 10,38 \text{ cm}^2$$

- Calculem l'àrea lateral. Prèviament haurem de calcular l'apotema de la piràmide (altura dels triangles que formen les cares laterals), utilitzant el teorema de Pitàgores:

$$a_p = \sqrt{4^2 + 1,73^2} = 4,36 \text{ cm}$$

$$A_l = 6 \cdot A_{\text{triangle}} = 6 \cdot \frac{2 \cdot 4,36}{2} = 26,16 \text{ cm}^2$$

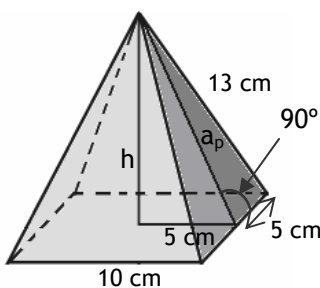


- Calculem l'àrea i el volum del prisma aplicant les fórmules corresponents:

$$A_{\text{piràmide}} = A_b + A_l = 10,38 + 26,16 = \boxed{36,54 \text{ cm}^2}$$

$$V_{\text{piràmide}} = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{10,38 \cdot 4}{3} = \boxed{13,84 \text{ cm}^3}$$

2. Calcula l'àrea i el volum d'una piràmide quadrangular regular de 10 cm d'aresta bàsica i 13 cm d'aresta lateral:



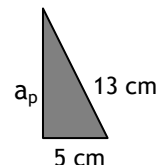
- Calculem l'àrea de la base, que és un quadrat:

$$A_b = 10^2 = 100 \text{ cm}^2$$

- Calculem l'àrea lateral. Prèviament haurem de calcular l'apotema de la piràmide (altura dels triangles que formen les cares laterals), utilitzant el teorema de Pitàgores:

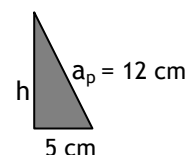
$$a_p = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$$

$$A_l = 4 \cdot A_{\text{triangle}} = 4 \cdot \frac{10 \cdot 12}{2} = 240 \text{ cm}^2$$



- Calculem l'altura de la piràmide aplicant el teorema de Pitàgores:

$$h = \sqrt{12^2 - 5^2} = \sqrt{119} = 10,91 \text{ cm}$$



COSSOS GEOMÈTRICS

- Calculem l'àrea i el volum del prisma aplicant les fórmules corresponents:

$$A_{\text{piràmide}} = A_b + A_l = 100 + 240 = \boxed{340 \text{ cm}^2}$$

$$V_{\text{piràmide}} = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{100 \cdot 10,91}{3} = \boxed{363,67 \text{ cm}^3}$$

Exercicis:

1. Calcula l'àrea i el volum d'una piràmide pentagonal regular de 25 cm d'altura, 3 cm d'aresta bàsica i 2,06 cm d'apotema de la base:
2. Calcula l'àrea i el volum d'una piràmide quadrangular regular de 13 cm d'aresta lateral i 10 cm d'aresta bàsica:

Sol.: 1. $A = 203,55 \text{ cm}^2$; $V = 128,75 \text{ cm}^3$ 2. $A = 340 \text{ cm}^2$; $V = 363,67 \text{ cm}^3$

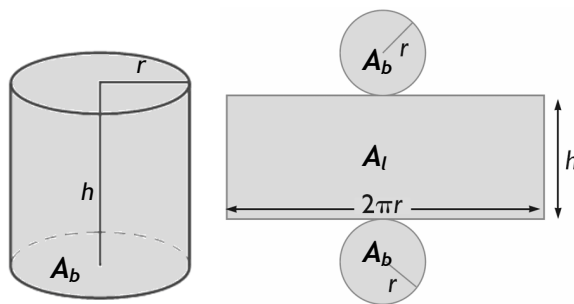
COSSOS GEOMÈTRICS

Àrea i volum d'un cilindre

Per calcular l'àrea d'un cilindre, es calcula l'àrea de la base, A_b , i l'àrea lateral, A_l , per separat.

Tal com veiem en el desenvolupament pla del cilindre, l'àrea lateral és l'àrea d'un rectangle de base $2\pi r$ (la longitud del cercle que fa de base del cilindre) i d'altura h (l'altura del cilindre).

El volum del cilindre és l'àrea de la base per l'altura (es calcula de la mateixa manera que el volum del prisma).

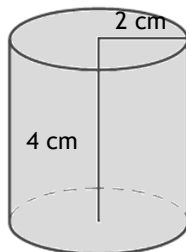


$$A_{\text{cilindre}} = 2 \cdot A_b + A_l = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

$$V_{\text{cilindre}} = A_b \cdot h$$

$$A_b = \text{àrea de la base} \quad A_l = \text{àrea lateral}$$

Exemple: Calcula l'àrea, el volum i la capacitat d'un cilindre de 4 cm d'altura i 2 cm de radi:



- Calculem l'àrea de la base i l'àrea lateral:

$$A_b = \pi r^2 = \pi \cdot 2^2 = \pi \cdot 4 = 12,57 \text{ cm}^2$$

$$A_l = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 4 = 50,26 \text{ cm}^2$$

- Calculem l'àrea i el volum del cilindre aplicant les fórmules corresponents:

$$A_{\text{cilindre}} = 2 \cdot A_b + A_l = 2 \cdot 12,57 + 50,26 = \boxed{75,4 \text{ cm}^2}$$

$$V_{\text{cilindre}} = A_b \cdot h = 12,57 \cdot 4 = \boxed{50,28 \text{ cm}^3 = 0,05 \text{ l}}$$

Exercici: Calcula l'àrea, el volum i la capacitat d'un cilindre de 20 cm de generatriu i 4 cm de radi.

$$\text{Sol.: } A = 603,19 \text{ cm}^2; \quad V = 1005,4 \text{ cm}^3 = 1,005 \text{ l}$$

COSSOS GEOMÈTRICS

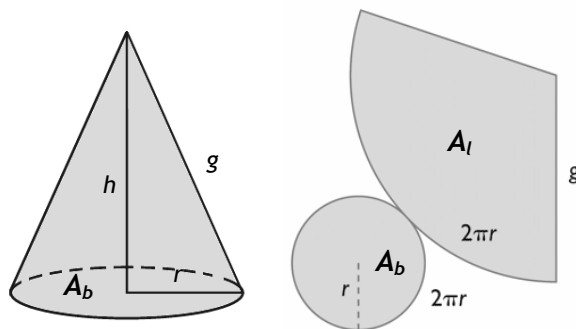
Àrea i volum d'un con

Per calcular l'àrea d'un con, es calcula l'àrea de la base, A_b , i l'àrea lateral, A_l , per separat.

Tal com veiem en el desenvolupament pla del con, l'àrea lateral és l'àrea d'un sector circular de radi g i longitud d'arc $2\pi r$. L'àrea d'aquest sector circular és equivalent a la d'un triangle de base $2\pi r$ i altura g .

$$A_l = \frac{2\pi r g}{2} = \pi r g$$

El volum del con és un terç de l'àrea de la base per l'altura (un terç de l'àrea del cilindre amb la mateixa base i altura que el con).



$$A_{\text{con}} = A_b + A_l = \pi r^2 + \pi r g$$

$$V_{\text{con}} = \frac{A_b \cdot h}{3}$$

$$A_b = \text{àrea de la base} \quad A_l = \text{àrea lateral}$$

Exemple: Calcula l'àrea i el volum d'un con de 4 cm d'altura i 2 cm de radi:

- Calculem l'àrea de la base:

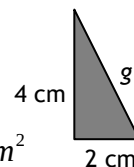
$$A_b = \pi r^2 = \pi \cdot 2^2 = \pi \cdot 4 = 12,57 \text{ cm}^2$$

- Calculem l'àrea lateral. Prèviament haurem de calcular la generatriu

aplicant el teorema de Pitàgores:

$$g = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 4,47 \text{ cm}$$

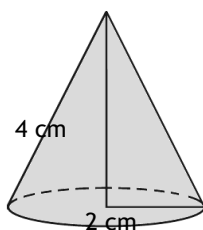
$$A_l = \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot 2 \cdot 4,47 = 28,09 \text{ cm}^2$$



- Calculem l'àrea i el volum del con aplicant les fórmules corresponents:

$$A_{\text{con}} = A_b + A_l = 12,57 + 28,09 = \boxed{40,66 \text{ cm}^2}$$

$$V_{\text{con}} = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{12,57 \cdot 4}{3} = \boxed{16,76 \text{ cm}^3}$$



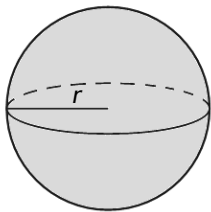
COSSOS GEOMÈTRICS

Exercici: Calcula l'àrea, el volum i la capacitat d'un con de 25 cm de generatriu i 7 cm de radi.

Sol.: $A = 703,72 \text{ cm}^2$; $V = 1231,52 \text{ cm}^3 = 1,23 \text{ l}$

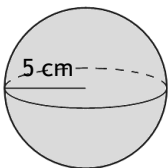
Àrea i volum d'una esfera

Les fórmules per calcular l'àrea i el volum de l'esfera són les següents:



$$A_{\text{esfera}} = 4\pi r^2$$
$$V_{\text{esfera}} = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$$

Exemple: Calcula l'àrea i el volum d'una esfera de 5 cm de radi:

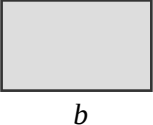
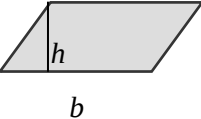
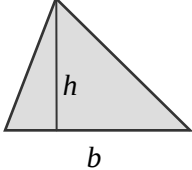
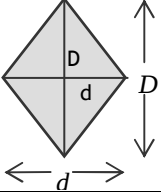
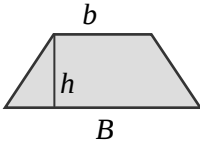
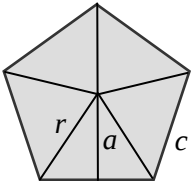
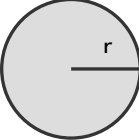
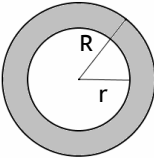
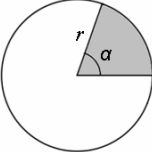
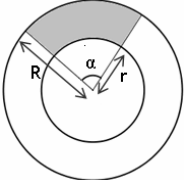


$$A_{\text{esfera}} = 4\pi r^2 = 4\pi 5^2 = \boxed{314,16 \text{ cm}^2}$$
$$V_{\text{esfera}} = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 5^3}{3} = \boxed{523,6 \text{ cm}^3}$$

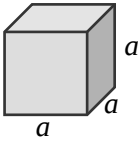
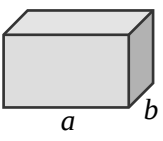
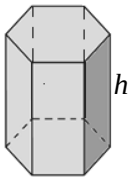
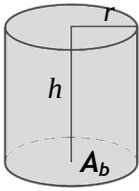
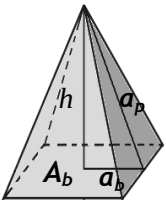
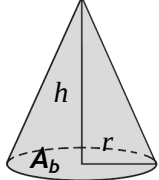
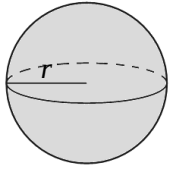
Exercici: Calcula l'àrea, el volum i la capacitat d'una esfera de 40 cm de diàmetre:

Sol.: $A = 5.026,55 \text{ cm}^2$; $V = 33.510,32 \text{ cm}^3 = 33,51 \text{ l}$

Taules d'àrees i volums

ÀREES DE FIGURES PLANES	
Rectangle  $A = b \cdot h$	Quadrat  $A = c^2$
Romboide  $A = b \cdot h$	Triangle  $A = \frac{b \cdot h}{2}$
Rombe  $A = \frac{D \cdot d}{2}$	Trapezi  $A = \frac{B+b}{2} \cdot h$
Polígon regular  $A = \frac{P \cdot a}{2}$ $P = n^{\circ} \text{ costats} \cdot c$	Cercle  $A = \pi \cdot r^2$ $L = 2 \cdot \pi \cdot r$
Corona circular  $A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$	Sector circular  $A = \frac{\pi \cdot r^2}{360} \cdot \alpha$
Trapezi circular  $A = \frac{\pi \cdot (R^2 - r^2)}{360} \cdot \alpha$	

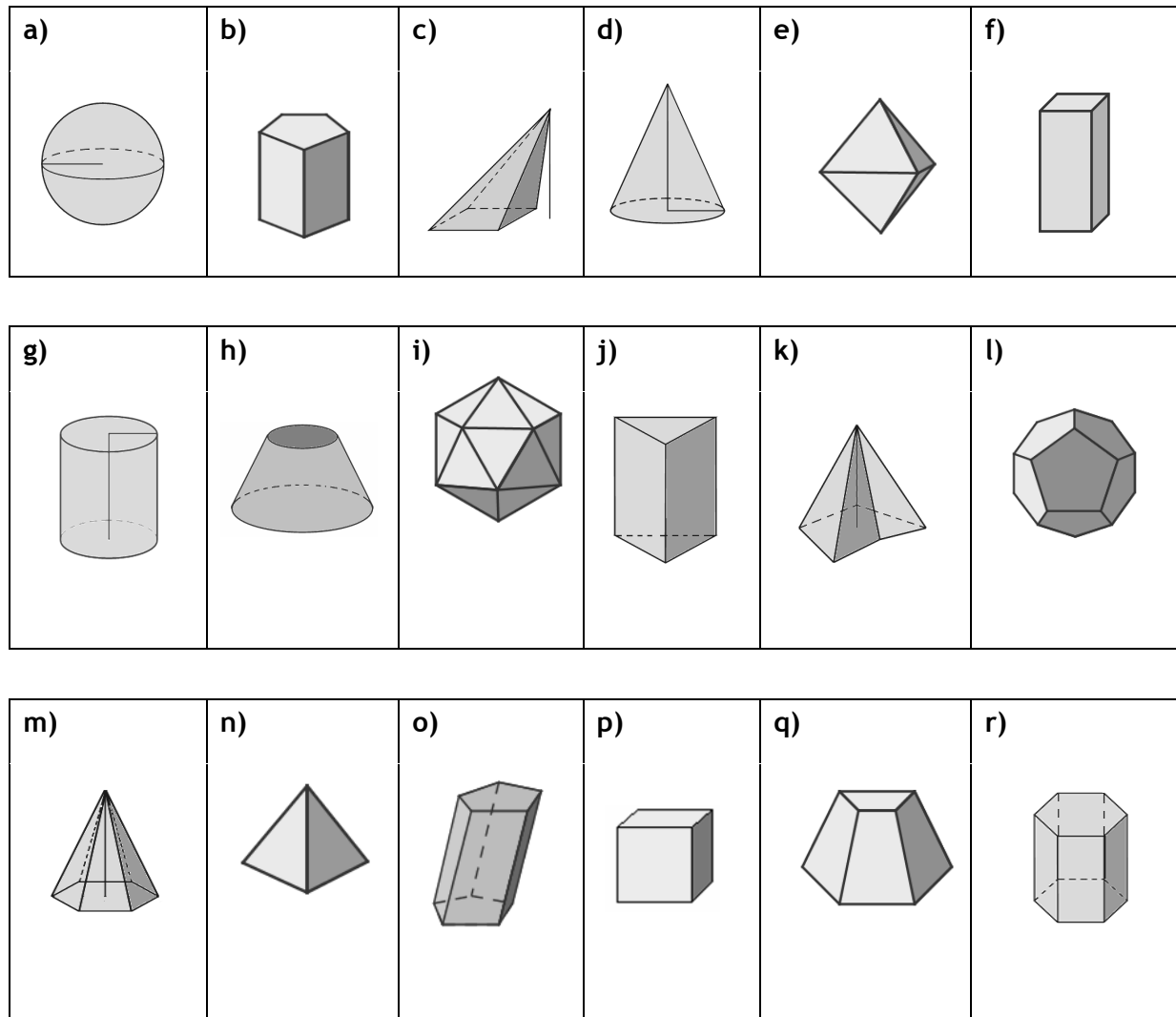
COSSOS GEOMÈTRICS

ÀREES i VOLUMS DE COSSOS GEOMÈTRICS	
Cub  $A = 6 \cdot a^2$ $V = a^3$	Ortoedre  $A = 2ab + 2ac + 2bc$ $V = a \cdot b \cdot c$
Prisma recte  $A = 2 \cdot A_b + A_l$ $V = A_b \cdot h$ $A_l = P_b \cdot h$	Cilindre  $A = 2 \cdot A_b + A_l$ $V = A_b \cdot h$ $\left(\begin{array}{l} A_b = \pi \cdot r^2 \\ A_l = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \end{array} \right)$
Piràmide  $A = A_b + A_l$ $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$	Con  $A = A_b + A_l$ $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$ $\left(\begin{array}{l} A_b = \pi \cdot r^2 \\ A_l = \pi \cdot r \cdot g \end{array} \right)$
Esfera  $A = 4\pi r^2$ $V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$	

EXERCICIS: COSSOS GEOMÈTRICS

Exercicis

1. Classifica els cossos geomètrics següents:



2. Calcula l'àrea i el volum d'un cub de 7 cm d'aresta.

3. Calcula l'àrea i el volum d'un ortoedre de dimensions: 3 cm, 4 cm i 7 cm.

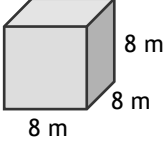
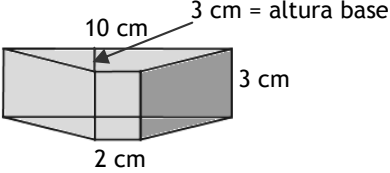
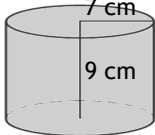
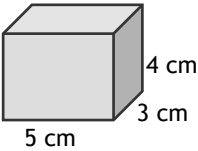
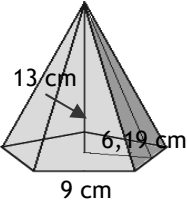
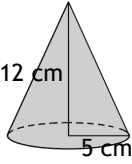
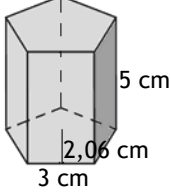
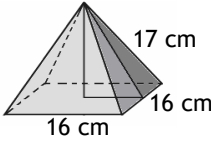
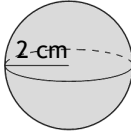
4. Troba l'àrea i el volum d'un prisma hexagonal regular de 5 cm d'aresta bàsica, 4,33 cm d'apotema de la base i 12 cm d'altura.

5. Calcula l'àrea i el volum d'un prisma regular triangular d'aresta bàsica 8 cm i altura 5 cm.

6. Troba l'àrea i el volum d'una piràmide octagonal regular de 8 dm d'aresta bàsica, 50 m d'altura i 9,66 dm d'apotema de la base.

EXERCICIS: COSSOS GEOMÈTRICS

7. Troba l'àrea i el volum d'una piràmide quadrangular regular d'aresta bàsica 6 cm i apotema 5 cm.
8. Calcula l'àrea i el volum d'una piràmide quadrangular regular d'aresta bàsica 12 cm i aresta lateral 10 cm.
9. Calcula l'àrea, el volum i la capacitat d'un cilindre de 7 cm de radi i 15 cm d'altura.
10. Calcula l'àrea i el volum d'un con de 8 m de radi i 15 m d'altura.
11. Calcula l'àrea i el volum d'una esfera de 8 cm de radi.
12. Calcula l'àrea i el volum dels cossos geomètrics següents:

a) 	d) 	g) 
b) 	e) 	h) 
c) 	f) 	i) 

EXERCICIS: COSSOS GEOMÈTRICS

Solucions

1.

a) Cos de revolució, esfera	b) Poliedre, prisma pentagonal regular	c) Poliedre, piràmide quadrangular obliqua	d) Cos de revolució, con	e) Poliedre regular, octaedre	f) Poliedre, prisma recte quadrangular, ortoedre
g) Cos de revolució, cilindre	h) Cos de revolució	i) Poliedre regular, icosaedre	j) Poliedre, prisma triangular recte	k) Piràmide pentagonal irregular obliqua	l) Poliedre regular, dodecaedre
m) Piràmide hexagonal recta	n) Poliedre regular, tetraedre	o) Prisma pentagonal oblicu	p) Poliedre regular, hexaedre o cub	q) Poliedre	r) Poliedre, prisma hexagonal

2. $A = 294 \text{ cm}^2$; $V = 343 \text{ cm}^3$

3. $A = 122 \text{ cm}^2$; $V = 84 \text{ cm}^3$

4. $A = 489,9 \text{ cm}^2$; $V = 779,4 \text{ cm}^3$

5. $A = 175,44 \text{ cm}^2$; $V = 138,6 \text{ cm}^3$

6. $A = 657,28 \text{ dm}^2$; $V = 515,2 \text{ dm}^3$

7. $A = 96 \text{ cm}^2$; $V = 48 \text{ cm}^3$

8. $A = 336 \text{ cm}^2$; $V = 253,92 \text{ cm}^3$

9. $A = 967,61 \text{ cm}^2$; $V = 2309,1 \text{ cm}^3 = 2,31 \text{ l}$

10. $A = 628,32 \text{ m}^2$; $V = 1005,3 \text{ m}^3$

11. $A = 804,25 \text{ cm}^2$; $V = 2144,66 \text{ cm}^3$

12.

a) $A = 384 \text{ m}^2$; $V = 512 \text{ m}^3$

b) $A = 94 \text{ cm}^2$; $V = 60 \text{ cm}^3$

c) $A = 105,9 \text{ cm}^2$; $V = 77,25 \text{ cm}^3$

d) $A = 102 \text{ cm}^2$; $V = 54 \text{ cm}^3$

e) $A = 463,28 \text{ cm}^2$; $V = 603,55 \text{ cm}^3$

f) $A = 736 \text{ cm}^2$; $V = 1.082,88 \text{ cm}^3$

g) $A = 703,72 \text{ cm}^2$; $V = 1.385,46 \text{ cm}^3$

h) $A = 282,74 \text{ cm}^2$; $V = 314,2 \text{ cm}^3$

i) $A = 50,27 \text{ cm}^2$; $V = 33,51 \text{ cm}^3$

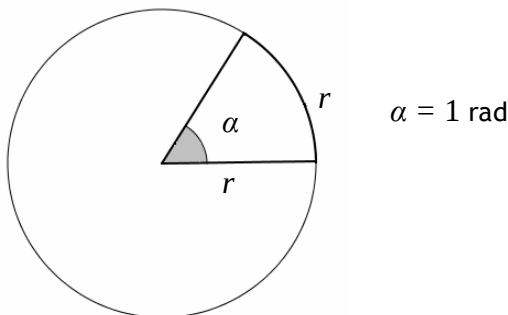
4. TRIGONOMETRIA

Mesura d'angles. Graus sexagesimals i radians

Ja hem vist que, habitualment, s'utilitzen els graus sexagesimals per mesurar angles. Però, en trigonometria també es fa servir una altra unitat anomenada **radian**, que és la unitat de mesura d'angles del Sistema Internacional.

Radians

Quan l'angle central α d'una circumferència abasta un arc de longitud igual al radi de la circumferència, direm que α mesura un **radian (rad)**. L'amplitud del radian és sempre la mateixa, independentment del radi de la circumferència.



Canvi de graus sexagesimals a radians i viceversa

Com que la longitud d'una circumferència és $2\pi r$, aquesta conté 2π vegades la longitud del radi. Aleshores, una circumferència conté 2π radians i, a la vegada, 360° :

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad}$$

$$\rightarrow \pi \text{ rad} = 180^\circ$$

$$\rightarrow 1 \text{ rad} = \frac{360}{2\pi} = 57^\circ 17' 44,81''$$

Per passar de graus a radians i viceversa, apliquem una regla de tres, utilitzant l'equivalència anterior:

Exemples:

1. Expressa en radians l'angle $\alpha = 30^\circ$.

$$360^\circ \longrightarrow 2\pi \text{ rad}$$

$$30^\circ \longrightarrow x \text{ rad}$$

$$x = \frac{2\pi \cdot 30}{360} = \frac{60\pi}{360} = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

També podem fer la regla de tres així:

$$180^\circ \longrightarrow \pi \text{ rad}$$

TRIGONOMETRIA

Nota: Els radians se solen expressar en funció de π (com que π és un nombre irracional, no el podem expressar de manera exacta i no se sol substituir).

Per tant, quan passem de graus a radians, deixem el resultat en funció de π i simplifiquem la fracció sempre que sigui possible.

2. Expressa en graus sexagesimals l'angle $\alpha = 3$ rad.

$$\begin{array}{lcl} 2\pi \text{ rad} & \longrightarrow & 360^\circ \\ 3 \text{ rad} & \longrightarrow & x^\circ \end{array} \quad x = \frac{3 \cdot 360^\circ}{2\pi} = 171,89^\circ$$

3. Expressa en graus sexagesimals l'angle $\alpha = \frac{\pi}{4}$ rad.

Si els radians estan expressats en funció de π , no cal aplicar una regla de tres, només cal substituir π per 180° .

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} = \frac{180}{4} = 45^\circ$$

Exercicis: Passa de graus a radians o viceversa.

a) $\alpha = 70^\circ$	b) $\alpha = 1,25$ rad	c) $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ rad
Sol.: a) $\alpha = \frac{7\pi}{18}$ b) $\alpha = 71,62^\circ$ c) $\alpha = 270^\circ$		

Forma complexa i incomplexa en el sistema sexagesimal

Per expressar un angle en graus sexagesimals, ho podem fer en **forma complexa** (expressant els graus, minuts i segons) o en **forma incomplexa** (expressant els graus com un nombre decimal).

TRIGONOMETRIA

Per passar d'una forma a l'altra, és convenient fer servir la calculadora, amb la tecla:

° ' ''

Exemple:

1. Expressa els angles següents en forma complexa, fent servir la teva calculadora, i apunta't com es fa:

a) $50,5^\circ =$

b) $30,46^\circ =$

2. Expressa els angles següents en forma incomplexa, fent servir la teva calculadora, i apunta't com es fa:

a) $30^\circ 15' =$

b) $80^\circ 45' 10'' =$

c) $34^\circ 40'' =$

Exercici: Passa de forma incomplexa a complexa i viceversa, fent servir la calculadora:

a) $35,84^\circ =$

b) $5,3^\circ =$

c) $120,54^\circ =$

d) $225,90^\circ =$

e) $35,57^\circ =$

f) $32^\circ 22' 49'' =$

g) $115^\circ 4' 13'' =$

h) $45^\circ 25' 7'' =$

i) $86^\circ 45'' =$

j) $12^\circ 21' =$

Sol.:

Exemples:

1. a) $50^\circ 30'$ b) $30^\circ 27' 36''$

2. a) $30,25^\circ$ b) $80,753$ c) $34,01$

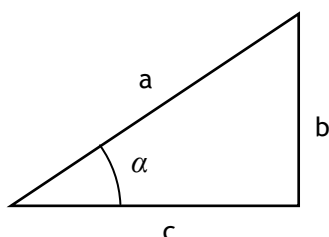
Exercici:

a) $35^\circ 50' 24''$ b) $5^\circ 18'$ c) $120^\circ 32' 24''$ d) $225^\circ 54'$ e) $35^\circ 34' 12''$

f) $32,38^\circ$ g) $115,07^\circ$ h) $45,42^\circ$ i) $86,01^\circ$ j) $12,35^\circ$

Raons trigonomètriques d'un angle agut

Donat un triangle rectangle amb un angle agut α , definim les **raons trigonomètriques** de l'angle α , $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$, de la manera següent:



$$\sin \alpha = \frac{\text{catet oposat}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a} \quad (\text{sinus de } \alpha)$$

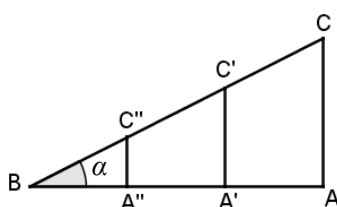
$$\cos \alpha = \frac{\text{catet contigu}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a} \quad (\text{cosinus de } \alpha)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{catet oposat}}{\text{catet contigu}} = \frac{b}{c} \quad (\text{tangent de } \alpha)$$

Com que els catets són més petits que la hipotenusa:

$$0 \leq \sin \alpha \leq 1 \quad \text{i} \quad 0 \leq \cos \alpha \leq 1$$

Donat un angle α , les seves raons trigonomètriques són sempre les mateixes, independentment del triangle que dibuixem. Podem dibuixar molts triangles rectangles amb un angle igual a α , però tots seran semblants entre ells i, per tant, les raons entre els seus costats seran les mateixes:



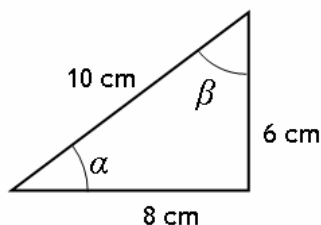
$$\sin \alpha = \frac{CA}{BC} = \frac{C'A'}{B'C'} = \frac{C''A''}{B''C''}$$

$$\cos \alpha = \frac{BA}{BC} = \frac{B'A'}{B'C'} = \frac{B''A''}{B''C''}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{CA}{BA} = \frac{C'A'}{B'A'} = \frac{C''A''}{B''A''}$$

Exemples:

1. Calcula les raons trigonomètriques dels angles α i β del triangle següent:



$$\sin \alpha = \frac{6}{10} = 0,6$$

$$\cos \alpha = \frac{8}{10} = 0,8$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{6}{8} = 0,75$$

$$\sin \beta = \frac{8}{10} = 0,8$$

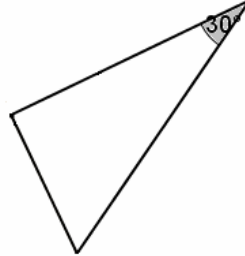
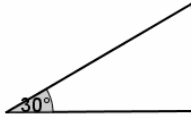
$$\cos \beta = \frac{6}{10} = 0,6$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{8}{6} = 1,3\bar{3}$$

Observa que:

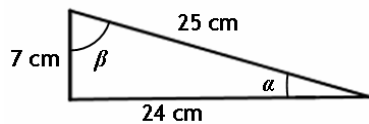
- α i β són complementaris: $\alpha + \beta = 90^\circ$
- $\sin \alpha = \cos \beta$, $\sin \beta = \cos \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha = 1 / \operatorname{tg} \beta$

2. Calcula les raons trigonomètriques de 30° a partir dels triangles rectangles següents i comprova que et surt el mateix resultat en tots dos casos. Fes servir el regle per mesurar els costats.



Sol.: $\sin 30^\circ = 0,5$; $\cos 30^\circ = 0,866$; $\operatorname{tg} 30^\circ = 0,577$

Exercici: Calcula les raons trigonomètriques dels angles α i β del triangle següent:



Sol.:

$$\sin \alpha = 0,28 \quad \cos \alpha = 0,96 \quad \operatorname{tg} \alpha = 0,29; \quad \sin \beta = 0,96 \quad \cos \beta = 0,28 \quad \operatorname{tg} \beta = 3,43$$

TRIGONOMETRIA

Ús de la calculadora

Les raons trigonomètriques d'un angle agut es poden calcular utilitzant la calculadora científica, amb les tecles:

sin

cos

tan

Exemple:

Calcula les raons trigonomètriques de 60° utilitzant la teva calculadora i apunta't com es fa:

$$\sin 60^\circ =$$

$$\cos 60^\circ =$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ =$$

$$\text{Sol.: } \sin 60^\circ = 0,866 ; \quad \cos 60^\circ = 0,5 ; \quad \operatorname{tg} 60^\circ = 1,73$$

Exercici:

Calcula les raons trigonomètriques següents utilitzant la calculadora. Arrodoneix el resultat a tres xifres decimals:

$$\text{a) } \sin 45^\circ =$$

$$\text{d) } \sin 32^\circ =$$

$$\text{g) } \sin 10,3^\circ =$$

$$\text{b) } \cos 45^\circ =$$

$$\text{e) } \cos 15^\circ =$$

$$\text{h) } \cos 80^\circ 5'' =$$

$$\text{c) } \operatorname{tg} 45^\circ =$$

$$\text{f) } \operatorname{tg} 24^\circ =$$

$$\text{i) } \operatorname{tg} 75^\circ 25' 30'' =$$

$$\text{Sol.: a) } 0,707 \quad \text{b) } 0,707 \quad \text{c) } 1 \quad \text{d) } 0,530 \quad \text{e) } 0,966 \quad \text{f) } 0,445 \quad \text{g) } 0,179 \quad \text{h) } 0,174 \\ \text{i) } 3,846$$

També podem fer el càlcul invers: donades les raons trigonomètriques d'un angle agut, calcular aquest angle. Per fer-ho, utilitzem les tecles: $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ i $\tan^{-1}$.

TRIGONOMETRIA

Exemple: Calcula l'angle α , utilitzant la calculadora, i apunta't com es fa:

a) $\sin \alpha = 0,9659225826$ $\alpha =$

b) $\cos \alpha = 0,5$ $\alpha =$

c) $\operatorname{tg} \alpha = 1,5$ $\alpha =$

Sol.: a) $\alpha = 75^\circ$ b) $\alpha = 60^\circ$ c) $\alpha = 56,31^\circ$

Exercici: Calcula l'angle α utilitzant la calculadora i expressa'l de manera complexa:

a) $\sin \alpha = 0,70710678$ $\alpha =$

b) $\cos \alpha = 0,25$ $\alpha =$

c) $\operatorname{tg} \alpha = 0,5$ $\alpha =$

d) $\cos \alpha = 1,5$ $\alpha =$

e) $\sin \alpha = 0,6$ $\alpha =$

f) $\cos \alpha = 0,95$ $\alpha =$

g) $\operatorname{tg} \alpha = 1$ $\alpha =$

h) $\sin \alpha = 2$ $\alpha =$

Sol.:

a) 45° b) $75^\circ 31' 20,96''$ c) $26^\circ 33' 54,18''$ d) $\nexists$

e) $36^\circ 52' 11,63''$ f) $18^\circ 11' 41,54''$ g) 45° h) $\nexists$

Raons trigonomètriques inverses

Encara que aquest curs no les utilitzarem, convé saber que existeixen tres raons trigonomètriques més, que són les inverses de les que ja hem vist:

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \quad (\text{secant de } \alpha); \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} \quad (\text{cosecant de } \alpha); \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \quad (\text{cotangent de } \alpha)$$

TRIGONOMETRIA

Raons trigonomètriques de 30°, 45° i 60°

El quadre següent mostra l'expressió exacta de les raons trigonomètriques de 30°, 45° i 60°:

	sin	cos	tg
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Resolució de triangles rectangles

Resoldre un triangle consisteix a determinar tots els seus elements (costats i angles). Mitjançant la trigonometria podem resoldre un triangle rectangle si coneixem dos dels seus elements, un dels quals, almenys, ha de ser un costat*.

*NOTA: Si coneixem només els tres angles, no podem determinar els costats, ja que hi ha infinits triangles, tots semblants entre ells, amb els mateixos angles.

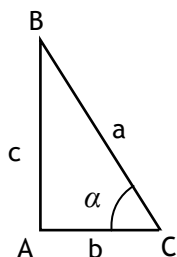
Exemple: Els angles d'aquests dos triangles mesuren el mateix, però els costats, no.



El quadre següent mostra les fórmules utilitzades per resoldre triangles rectangles. La nomenclatura utilitzada normalment és la presentada en el triangle del quadre: els angles es representen amb les lletres majúscules A (angle recte), B i C (angles aguts), i els costats es representen amb les lletres minúscules a (hipotenusa), b i c (catets oposats als angles B i C , respectivament).

TRIGONOMETRIA

Fórmules:



$$\sin \alpha = \frac{\text{catet oposat}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$
$$\cos \alpha = \frac{\text{catet contigu}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{catet oposat}}{\text{catet contigu}} = \frac{c}{b}$$

$$A + B + C = 180^\circ$$

$$\text{si } A = 90^\circ \rightarrow B + C = 90^\circ$$

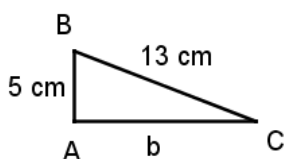
$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (\text{teorema de Pitàgores})$$

Estudiem els diferents casos en els exemples següents.

Nota: A vegades hi ha més d'una manera d'obtenir un element, però és preferible utilitzar les dades que ens dona el problema, sempre que sigui possible, que les que ja hem calculat nosaltres (que podrien ser equivocades).

Exemples:

1. Coneixem la hipotenusa i un catet



- Calculem **b**, aplicant el teorema de Pitàgores:

$$b = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = \boxed{12 \text{ cm}}$$

- Calculem **B**:

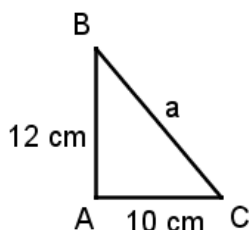
Usarem $\cos B$, ja que el cosinus és la raó trigonomètrica que relaciona les dues dades conegudes (hipotenusa i catet contigu a B) amb la desconeguda (B).

$$\cos B = \frac{5}{13} = 0,38 \rightarrow \boxed{B = 67,38^\circ}$$

- Calculem **C**:

$$C = 90^\circ - B \rightarrow C = 90^\circ - 67,38^\circ = 22,62^\circ \rightarrow \boxed{C = 22,62^\circ}$$

2. Coneixem els dos catets



- Calculem **a**, aplicant el teorema de Pitàgores:

$$a = \sqrt{12^2 + 10^2} = \sqrt{144 + 100} = \sqrt{244} = \boxed{15,62 \text{ cm}}$$

TRIGONOMETRIA

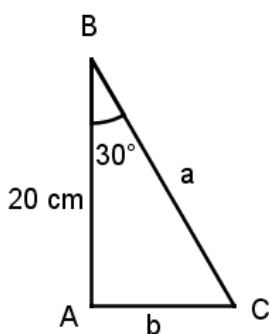
- Calculem B:

Usarem tg B, ja que la tangent és la raó trigonomètrica que relaciona les dues dades conegudes (catet oposat i catet contigu a B) amb la desconeguda (B).

$$\operatorname{tg} B = \frac{10}{12} = 0,8\bar{3} \rightarrow \boxed{B = 39,81}$$

- Calculem C: $C = 90^\circ - B \rightarrow C = 90^\circ - 39,81^\circ = 50,19^\circ \rightarrow \boxed{C = 50,19^\circ}$

3. Coneixem un catet i un angle agut



- Calculem C: $C = 90^\circ - B \rightarrow C = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ \rightarrow \boxed{C = 60^\circ}$

- Calculem a:

Usarem cos B, ja que el cosinus és la raó trigonomètrica que relaciona les dues dades conegudes (B i catet contigu a B) amb la desconeguda (hipotenusa).

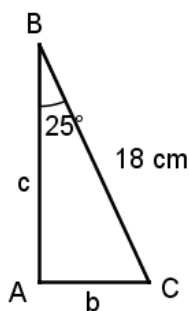
$$\cos 30^\circ = \frac{20}{a} \rightarrow a = \frac{20}{\cos 30^\circ} = 23,1 \text{ cm} \rightarrow \boxed{a = 23,1 \text{ cm}}$$

Nota: Si el catet conegut fos l'oposat a l'angle conegut, usaríem el sinus, com en l'exercici c).

- Calculem b: (usarem tg B)

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{b}{20} \rightarrow b = 20 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 11,55 \rightarrow \boxed{b = 11,55}$$

4. Coneixem la hipotenusa i un angle agut



- Calculem C: $C = 90^\circ - B \rightarrow C = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ \rightarrow \boxed{C = 65^\circ}$

- Calculem b:

Usarem sin B, ja que el sinus és la raó trigonomètrica que relaciona les dues dades conegudes (B i la hipotenusa) amb la desconeguda (catet oposat).

$$\sin 25^\circ = \frac{b}{18} \rightarrow b = 18 \cdot \sin 25^\circ = 7,6 \text{ m} \rightarrow \boxed{b = 7,6 \text{ m}}$$

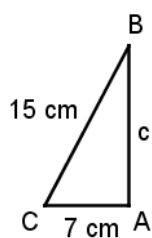
- Calculem c: (usarem cos B)

$$\cos 25^\circ = \frac{c}{18} \rightarrow c = 18 \cdot \cos 25^\circ = 16,31 \rightarrow c = 16,31 \text{ cm}$$

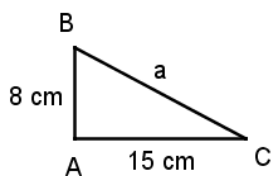
TRIGONOMETRIA

Exercicis: Resol els triangles rectangles següents:

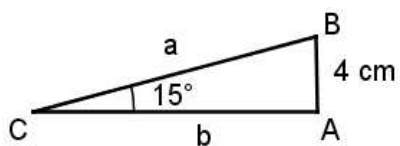
a)



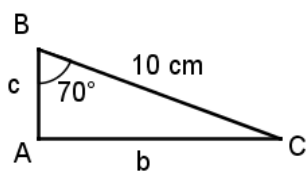
b)



c)



d)



Sol.: a) $C = 62,18^\circ$; $B = 27,82^\circ$; $c = 13,27$ cm

b) $C = 28,07^\circ$; $B = 61,93^\circ$; $a = 17$ cm

c) $B = 75^\circ$; $b = 14,93$ cm; $a = 15,45$ cm

d) $C = 20^\circ$; $b = 9,4$ cm; $c = 3,42$ cm

TRIGONOMETRIA

Problemes en què s'aplica la resolució de triangles rectangles

Vegem exemples de problemes que es resolen utilitzant la trigonometria, en particular, la resolució de triangles rectangles.

Exemples:

- 1.** Situats a 10 m del peu d'un arbre, veiem el seu extrem superior sota un angle de 70° (angle que forma la visual amb l'horitzontal, també conegut com a angle d'elevació). Calcula l'alçada de l'arbre.

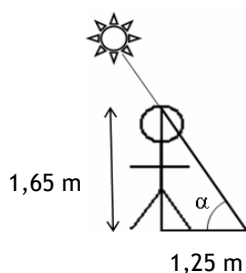


La raó trigonomètrica que relaciona les dades conegudes (un angle i el catet contigu) i la desconeguda (el catet oposat) és la tangent:

$$\operatorname{tg} 70^\circ = \frac{x}{10} \rightarrow x = 10 \cdot \operatorname{tg} 70^\circ = \boxed{27,47 \text{ m}}$$

L'alçada de l'arbre és **27,47 m**

- 2.** Calcula l'angle d'elevació del Sol sobre l'horitzó quan una persona que fa 1,65 m d'alçada projecta una ombra de 1,25 m.

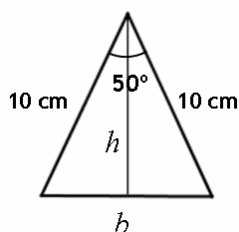


La raó trigonomètrica que relaciona les dades conegudes (els dos catets) i la desconeguda (un angle) és la tangent:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1,65}{1,25} = 1,32 \rightarrow \alpha = \boxed{52,85^\circ}$$

La inclinació del Sol és de **52,85°** sobre l'horitzó

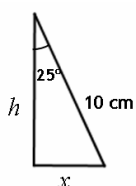
- 3.** Els dos costats iguals d'un triangle isòsceles mesuren 10 m i formen un angle de 50° . Calcula l'altre costat i l'àrea del triangle.



L'altura corresponent a l'angle diferent divideix un triangle isòsceles en dos triangles rectangles iguals.

- Calculem l'altura del triangle (h) utilitzant el cosinus:

$$\cos 25^\circ = \frac{h}{10} \rightarrow h = 10 \cdot \cos 25^\circ = \boxed{9,06 \text{ m}}$$



- Calculem x (la meitat de la base del triangle), usant el sinus:

$$\sin 25^\circ = \frac{x}{10} \rightarrow x = 10 \cdot \sin 25^\circ = \boxed{4,23 \text{ m}}$$

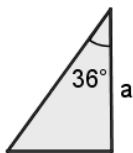
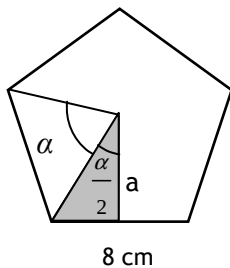
TRIGONOMETRIA

- Calculem la base (costat desigual) $b = 2x$: $b = 2 \cdot 4,23 = \boxed{8,46 \text{ m}}$

- Calculem l'àrea del triangle: $A = \frac{8,46 \cdot 9,06}{2} = 38,32 \text{ m}^2$

El costat desigual fa **8,46 m** i l'àrea fa **38,32 m²**

4. Calcula l'àrea d'un pentàgon regular de 8 cm de costat.



Per calcular l'àrea, prèviament hem de calcular l'apotema. Per fer-ho, utilitzem el triangle rectangle gris del dibuix, del qual coneixem un catet (la meitat del costat) i podem conèixer un angle (la meitat de l'angle central).

- Calculem l'angle central α :

$$\alpha = \frac{360}{\text{Nre. costats}} = \frac{360}{5} = 72^\circ \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 36^\circ$$

- Calculem l'apotema:

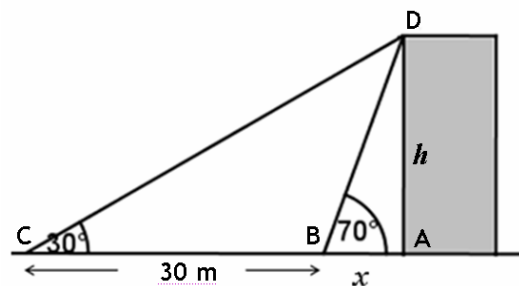
$$\operatorname{tg} 36 = \frac{4}{a} \rightarrow a = \frac{4}{\operatorname{tg} 36} = \boxed{5,51 \text{ cm}}$$

- Calculem l'àrea:

$$A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{40 \cdot 5,51}{2} = \boxed{110,2 \text{ cm}^2}$$

L'àrea fa **110,2 cm²**

5. Observem el punt més alt d'un edifici sota un angle de 70°. Si ens allunyem 30 m, l'observem sota un angle de 30°. Quina altura fa l'edifici?



En aquest esquema hi ha dos triangles rectangles: el triangle ABD i el triangle ACD.

Utilitzant un sol triangle rectangle no podem resoldre el problema, atès que no tenim prou dades.

Haurem de plantejar un sistema de dues equacions amb dues incògnites (h i x), utilitzant

TRIGONOMETRIA

un triangle rectangle per a cada equació.

La raó trigonomètrica que farem servir és la tangent, ja que les dades desconegudes són els catets.

- Plantegem el sistema i el resollem per igualació:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 70^\circ = \frac{h}{x} & \xrightarrow{\text{aïllem } h} \boxed{h = x \cdot \operatorname{tg} 70^\circ}^* \\ \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{h}{x+30} & \xrightarrow{\text{aïllem } h} h = (x+30) \cdot \operatorname{tg} 30^\circ \end{cases} \rightarrow \text{Igualem:}$$

$$x \cdot \operatorname{tg} 70^\circ = (x+30) \cdot \operatorname{tg} 30^\circ$$

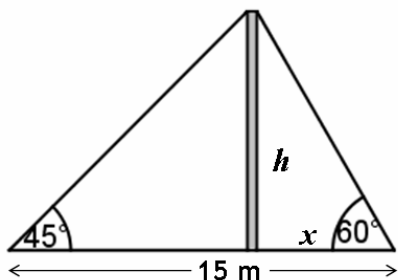
- Resolem l'equació per calcular x:

$$\begin{aligned} x \cdot \operatorname{tg} 70^\circ &= (x+30) \cdot \operatorname{tg} 30^\circ \rightarrow x \cdot \operatorname{tg} 70^\circ = x \cdot \operatorname{tg} 30^\circ + 30 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ \rightarrow x \cdot \operatorname{tg} 70^\circ - x \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 30 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ \\ \rightarrow x \cdot (\operatorname{tg} 70^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ) &= 30 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ \rightarrow x = \frac{30 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ}{\operatorname{tg} 70^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ} \end{aligned}$$

- Substituïm* per calcular h:

$$h = x \cdot \operatorname{tg} 70^\circ \rightarrow \frac{30 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ}{\operatorname{tg} 70^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ} \cdot \operatorname{tg} 70^\circ = \frac{30 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 70^\circ}{\operatorname{tg} 70^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ} \rightarrow h = \frac{30 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 70^\circ}{\operatorname{tg} 70^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ} = 21,93 \text{ m}$$

6. Un pal està subjectat per dos cables, tal com indica la figura. Calcula l'altura del pal:



- Plantegem el sistema i el resollem per igualació:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{h}{x} & \xrightarrow{\text{aïllem } h} \boxed{h = x \cdot \operatorname{tg} 60^\circ}^* \\ \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{h}{15-x} & \xrightarrow{\text{aïllem } h} h = (15-x) \cdot \operatorname{tg} 45^\circ \end{cases}$$

$$\rightarrow \text{Igualem: } x \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = (15-x) \cdot \operatorname{tg} 45^\circ$$

- Resolem l'equació per calcular x:

$$\begin{aligned} x \cdot \operatorname{tg} 60^\circ &= (15-x) \cdot \operatorname{tg} 45^\circ \rightarrow x \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 15 \cdot \operatorname{tg} 45^\circ - x \cdot \operatorname{tg} 45^\circ \rightarrow x \cdot \operatorname{tg} 60^\circ + x \cdot \operatorname{tg} 45^\circ = 15 \cdot \operatorname{tg} 45^\circ \\ \rightarrow x \cdot (\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ) &= 15 \cdot \operatorname{tg} 45^\circ \rightarrow \boxed{x = \frac{15 \cdot \operatorname{tg} 45^\circ}{\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ}} \end{aligned}$$

- Substituïm* per calcular h:

TRIGONOMETRIA

$$h = x \cdot \operatorname{tg} 60 = \frac{15 \cdot \operatorname{tg} 45}{\operatorname{tg} 60 + \operatorname{tg} 45} \cdot \operatorname{tg} 60 = \frac{15 \cdot \operatorname{tg} 45 \cdot \operatorname{tg} 60}{\operatorname{tg} 60 + \operatorname{tg} 45} \rightarrow h = \frac{15 \cdot \operatorname{tg} 45 \cdot \operatorname{tg} 60}{\operatorname{tg} 60 + \operatorname{tg} 45} = \frac{15 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1} = 9,51 \text{ m}$$

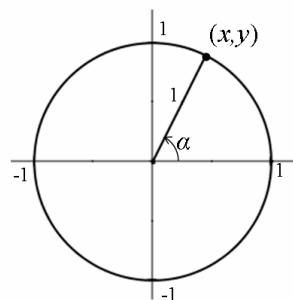
Raons trigonomètriques d'un angle qualsevol

Circumferència goniomètrica

Una circumferència goniomètrica o trigonomètrica és una circumferència de radi 1 centrada en l'origen de coordenades que s'utilitza per representar angles i les seves raons trigonomètriques.

Els angles que es representen tenen les característiques següents:

- Són angles centrals (amb el vèrtex al centre de la circumferència).
- Tenen un costat sobre la part positiva de l'eix 0X.
- Es mesuren en sentit directe (sentit contrari al de les agulles del rellotge) des de l'eix 0X.



A cada angle li correspon un punt (x,y) de la circumferència.

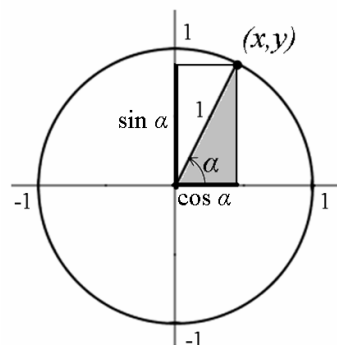
Definició de les raons trigonomètriques a partir de la circumferència goniomètrica

Podem definir les raons trigonomètriques d'un angle qualsevol utilitzant la circumferència goniomètrica.

Sinus i cosinus

El **cosinus i sinus de α** es defineixen com les coordenades (x,y) del punt que correspon a l'angle α:

$$(x, y) = (\cos \alpha, \sin \alpha) \rightarrow \begin{cases} x = \cos \alpha \\ y = \sin \alpha \end{cases}$$



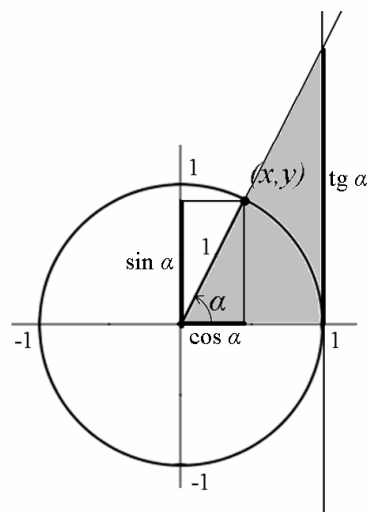
Si calculem el sinus i cosinus de α a partir del triangle gris de la figura de la dreta, d'hipotenusa 1, obtenim el mateix resultat:

$$\sin \alpha = \frac{\text{catet oposat}}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{1} = y \qquad \cos \alpha = \frac{\text{catet contigu}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{1} = x$$

Tangent

La **tangent** es defineix com el quocient del sinus entre el cosinus:

$$tg \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$



Gràficament, la podem representar en la circumferència goniomètrica tal com s'indica en la figura de la dreta. La tangent és la longitud del segment que uneix el punt (1,0) amb el punt d'intersecció entre la recta perpendicular a l'eix OX que passa pel punt (1,0) i la prolongació del costat de l'angle que no es troba sobre l'eix OX.

Si calculem la tangent de α a partir del triangle rectangle gris de la figura, obtenim el mateix resultat:

$$tg \alpha = \frac{\text{catet oposat}}{\text{catet contigu}} = \frac{\text{catet oposat}}{1} = \text{catet oposat}$$

Representació de les raons trigonomètriques d'angles situats en diferents quadrants

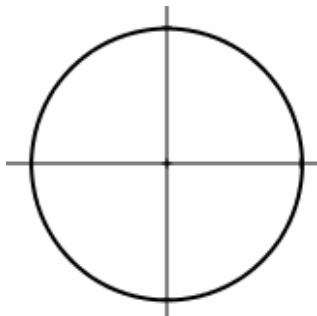
Primer quadrant	Segon quadrant	Tercer quadrant	Quart quadrant
Diagrama del primer quadrant. Un angle α s'indica a partir de l'eix OX. El cosinus $\cos \alpha$ és la projecció sobre l'eix horitzontal, i el sinus $\sin \alpha$ és la projecció sobre l'eix vertical. La tangent $tg \alpha$ és el segment de la recta tangent al cercle al punt (1,0) que s'interseja amb la prolongació del costat de l'angle α.	Diagrama del segon quadrant. Un angle α s'indica a partir de l'eix OX. El cosinus $\cos \alpha$ és la projecció sobre l'eix horitzontal, i el sinus $\sin \alpha$ és la projecció sobre l'eix vertical. La tangent $tg \alpha$ és el segment de la recta tangent al cercle al punt (-1,0) que s'interseja amb la prolongació del costat de l'angle α.	Diagrama del tercer quadrant. Un angle α s'indica a partir de l'eix OX. El cosinus $\cos \alpha$ és la projecció sobre l'eix horitzontal, i el sinus $\sin \alpha$ és la projecció sobre l'eix vertical. La tangent $tg \alpha$ és el segment de la recta tangent al cercle al punt (-1,0) que s'interseja amb la prolongació del costat de l'angle α.	Diagrama del quart quadrant. Un angle α s'indica a partir de l'eix OX. El cosinus $\cos \alpha$ és la projecció sobre l'eix horitzontal, i el sinus $\sin \alpha$ és la projecció sobre l'eix vertical. La tangent $tg \alpha$ és el segment de la recta tangent al cercle al punt (1,0) que s'interseja amb la prolongació del costat de l'angle α.

TRIGONOMETRIA

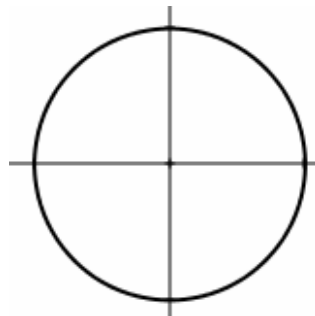
Nota: Si el segment que representa la tangent queda situat en el quart quadrant, significa que la tangent és negativa.

Exercicis: Representa en la circumferència goniomètrica els angles següents i les seves raons trigonomètriques:

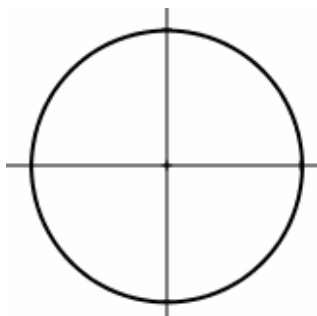
a) 45°



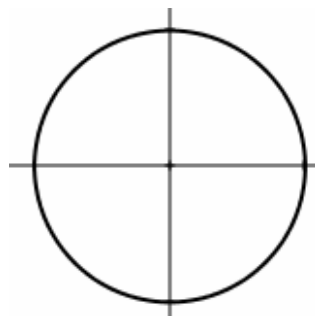
b) 150°



c) 200°



d) 300°



Propietats de les raons trigonomètriques d'un angle qualsevol

De les representacions de l'apartat anterior, en podem deduir les propietats següents:

- El sinus i el cosinus prenen valors entre -1 i 1:

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1$$

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1$$

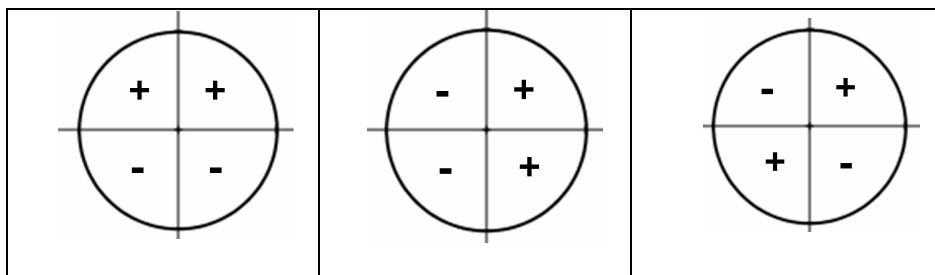
- El signe de les raons trigonomètriques va variant en funció del quadrant en què es troba situat l'angle, tal com es mostra en l'esquema següent:

$\sin \alpha$

$\cos \alpha$

$\operatorname{tg} \alpha$

TRIGONOMETRIA



- Les raons trigonomètriques de 0° , 90° , 180° i 270° són:

	0°	90°	180°	270°
$\sin \alpha$	0	1	0	-1
$\cos \alpha$	1	0	-1	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\nexists^*$	0	$\nexists^*$

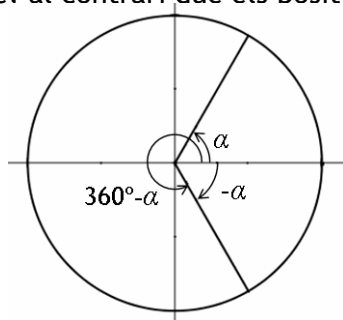
Nota: La tangent de 90° i 180° no es pot calcular, atès que el cosinus d'aquests dos angles és igual a 0 i no podem dividir per 0:

$$\operatorname{tg} 90^\circ = \frac{\sin 90^\circ}{\cos 90^\circ} = \frac{1}{0} \nexists \quad \operatorname{tg} 270^\circ = \frac{\sin 270^\circ}{\cos 270^\circ} = \frac{-1}{0} \nexists$$

Gràficament, tampoc es pot representar, perquè la prolongació del costat de l'angle és paral·lela a la recta perpendicular a l'eix OX i que passa per $(1,0)$.

Angles negatius

Es considera que els angles negatius són els mesurats en el sentit de les agulles del rellotge. al contrari que els positius. Un angle negatiu $-\alpha$ és equivalent a $360^\circ - \alpha$.



$$-\alpha = 360 - \alpha$$

Nota:

α i $-\alpha$ s'anomenen angles oposats.

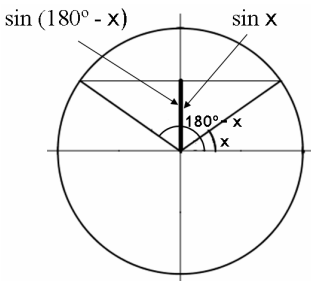
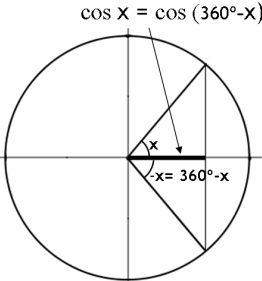
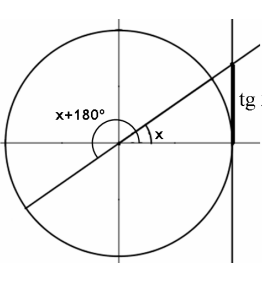
Càlcul de l'angle a partir de la raó trigonomètrica

TRIGONOMETRIA

En l'apartat *Raons trigonomètriques d'un angle agut* hem vist que, utilitzant la calculadora (amb les tecles $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ i $\tan^{-1}$), podem calcular un angle agut coneixent una de les seves raons trigonomètriques.

Tanmateix, ara hem vist que hi pot haver dos angles que tinguin la mateixa raó trigonomètrica. La calculadora només ens dóna una solució. L'altra solució possible l'haurem de calcular nosaltres utilitzant les relacions de l'apartat anterior (o deduint-les amb la circumferència goniomètrica). Vegem-ho:

Suposem que coneixem una raó trigonomètrica de α i x és la solució que ens dóna la calculadora.

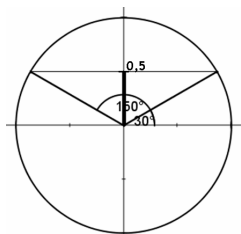
Coneixem $\sin \alpha$	Coneixem $\cos \alpha$	Coneixem $\tan \alpha$
 $\sin(180^\circ - x)$ $\sin x$	 $\cos x = \cos(360^\circ - x)$	 $\tan x = \tan(x + 180^\circ)$
Els angles <u>suplementaris</u> tenen el <u>mateix sinus</u>: $\alpha = \begin{cases} x \\ 180^\circ - x \end{cases}$	Els angles <u>oposats</u> tenen el <u>mateix cosinus</u>: $\alpha = \begin{cases} x \\ -x = 360^\circ - x \end{cases}$	Els angles que <u>es diferencien en 180°</u> tenen la <u>mateixa tangent</u>: $\alpha = \begin{cases} x \\ x + 180^\circ \end{cases}$

TRIGONOMETRIA

Exemples: Calcula i dibuixa els angles α , compresos entre 0° i 360° , que verifiquen la condició:

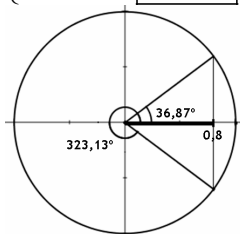
a) $\sin \alpha = 0,5$

$$\alpha = \begin{cases} 30^\circ & (\text{solució calculadora}) \\ 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ \end{cases}$$



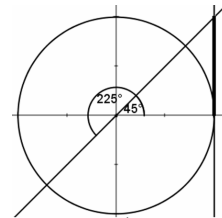
b) $\cos \alpha = 0,8$

$$\alpha = \begin{cases} 36,87^\circ & (\text{solució calculadora}) \\ -36,87^\circ = 323,13^\circ \end{cases}$$



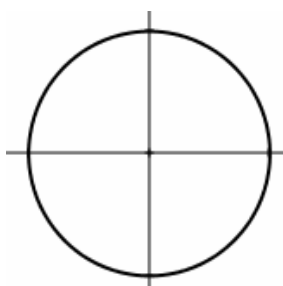
c) $\tan \alpha = 1$

$$\alpha = \begin{cases} 45^\circ & (\text{solució calculadora}) \\ 180^\circ + 45^\circ = 225^\circ \end{cases}$$

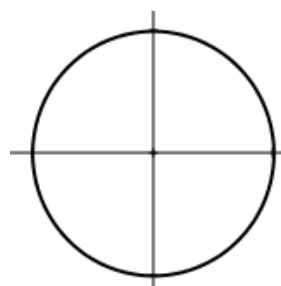


Exercici: Calcula i dibuixa els angles α , compresos entre 0° i 360° , que verifiquen la condició:

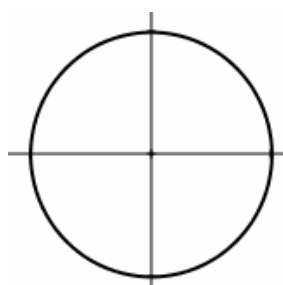
a) $\sin \alpha = 0,75$



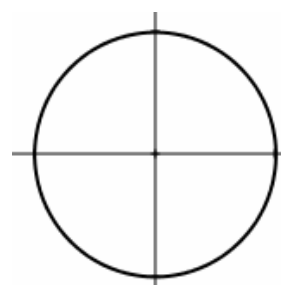
b) $\cos \alpha = 0,5$



c) $\tan \alpha = -1$



d) $\sin \alpha = -0,5$



Sol.: a) $48,59^\circ$ i $131,41^\circ$ b) 60° i 300° c) 135° i 315° d) 210° i 330°

TRIGONOMETRIA

Així, quan calculem l'angle a partir de la raó trigonomètrica, hi ha dues solucions (dos angles amb la mateixa raó), excepte en els casos següents:

$$\sin \alpha = 1 \rightarrow \alpha = 90^\circ \text{ (solució única)}$$

$$\cos \alpha = 1 \rightarrow \alpha = 0^\circ \text{ (solució única)}$$

$$\sin \alpha = -1 \rightarrow \alpha = 270^\circ \text{ (solució única)}$$

$$\cos \alpha = -1 \rightarrow \alpha = 180^\circ \text{ (solució única)}$$

Angles que mesuren més de 360°

Quan un angle α és més gran que 360°, s'interpreta que ha donat una o diverses voltes completes a la circumferència. Les raons trigonomètriques de α seran les mateixes que les de l'angle que queda després de fer les voltes completes (aquest angle és el residu de la divisió $\alpha : 360$).

Exemples:

1. Calcula l'angle comprès entre 0° i 360° que té les mateixes raons trigonomètriques que l'angle donat:

$$\text{a) } 500^\circ \rightarrow 500 = 360 + 140 \rightarrow \begin{cases} \sin 500^\circ = \sin 140^\circ = 0,64 \\ \cos 500^\circ = \cos 140^\circ = -0,77 \\ \operatorname{tg} 500^\circ = \operatorname{tg} 140^\circ = -0,84 \end{cases} \quad \text{L'angle demanat és } 140^\circ$$

$$\text{b) } 2450^\circ \rightarrow 2450^* = 6 \cdot 360 + 290 \rightarrow \begin{cases} \sin 2450^\circ = \sin 290^\circ = -0,94 \\ \cos 2450^\circ = \cos 290^\circ = 0,34 \\ \operatorname{tg} 2450^\circ = \operatorname{tg} 290^\circ = -2,75 \end{cases} \quad \text{L'angle demanat és } 290^\circ$$

$$\begin{array}{r} 2450 \overline{) 360} \\ 290 \quad 6 \end{array}$$

2. Troba tots els angles més petits que 900° que compleixin que $\sin \alpha = 0,5$.

Si calculem amb la calculadora l'angle que té per sinus 0,5, ens dona 30°. La calculadora sempre dona l'angle entre 0° i 360°. La resta els calcularem sumant 360° (voltes completes) les vegades que calgui:

$$\sin \alpha = 0,5 \rightarrow \begin{cases} \alpha = 30^\circ + 360^\circ \cdot k \\ \alpha = 150^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\rightarrow \alpha \text{ pot prendre els valors següents: } \begin{cases} 30^\circ; 30^\circ + 360^\circ = 390^\circ; 30^\circ + 360^\circ \cdot 2 = 750^\circ \\ 150^\circ; 150^\circ + 360^\circ = 510^\circ; 150^\circ + 360^\circ \cdot 2 = 870^\circ \end{cases}$$

TRIGONOMETRIA

Exercicis:

1. Calcula l'angle comprès entre 0° i 360° que té les mateixes raons trigonomètriques que 1300° .

2. Troba tots els angles més petits que 1000° que compleixin que $\cos \alpha = 0,5$.

Sol.: 1. 220° 2. 60° ; 420° ; 780° ; 300° ; 660°

TRIGONOMETRIA

Relacions fonamentals entre les raons trigonomètriques d'un mateix angle

Les raons trigonomètriques d'un angle verifiquen certes relacions, que permeten trobar el valor d'una raó a partir del valor d'una altra. Les més importants són:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

- Fórmula fonamental de la trigonometria:

Nota: Les potències de les raons trigonomètriques s'escriuen amb l'exponent abans de l'angle, de manera que no calgui escriure els parèntesis:

$$(\sin \alpha)^2 = \sin^2 \alpha.$$

La fórmula fonamental de la trigonometria permet calcular el valor del sinus d'un angle conegut el seu cosinus (sense calculadora) o viceversa. Si aïllem el sinus i el cosinus, obtenim:

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \quad \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

- Fórmula que relaciona la tangent amb el sinus i el cosinus:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Amb les dues relacions que hem vist, podem calcular dues raons trigonomètriques d'un angle, coneixent-ne la tercera:

Exemples: Resol els exercicis següents utilitzant les relacions entre les raons trigonomètriques:

1. Troba les raons trigonomètriques dels dos angles compresos entre 0° i 360° de sinus $-0,6$:

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - (-0,6)^2} = \pm 0,8 \rightarrow \begin{cases} \boxed{\cos \alpha = 0,8} \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{-0,6}{0,8} = -0,75 \rightarrow \boxed{\operatorname{tg} \alpha = -0,75} \\ \boxed{\cos \beta = -0,8} \rightarrow \operatorname{tg} \beta = \frac{-0,6}{-0,8} = 0,75 \rightarrow \boxed{\operatorname{tg} \beta = 0,75} \end{cases}$$

TRIGONOMETRIA

2. Calcula $\sin \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$, sabent que $\cos \alpha = 0,8$ i que α és un angle agut:

$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - 0,8^2} = \pm \sqrt{0,36} = \pm 0,6 \rightarrow$ Com que α és agut triem la solució positiva.

$$\sin \alpha = \boxed{0,6} \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{0,6}{0,8} = \boxed{0,75}$$

2. Calcula les raons trigonomètriques d'un angle α del segon quadrant, sabent que $\operatorname{tg} \alpha = -1$:

Resolem per substitució el sistema següent:

$$\begin{cases} -1 = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} & \xrightarrow{\text{Aïllem } \sin \alpha} \boxed{\sin \alpha = -\cos \alpha}^* \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 & \xrightarrow{\text{Substituïm } \sin \alpha} (-\cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases}$$

$$(-\cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow 2 \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} = \pm 0,707$$

Com que α és un angle del segon quadrant, $\cos \alpha$ és negatiu $\rightarrow \boxed{\cos \alpha = \frac{-\sqrt{2}}{2}}$

Calculem $\sin \alpha$ *: $\sin \alpha = -\cos \alpha \rightarrow \boxed{\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}}$

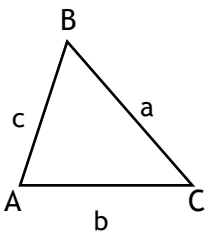
Exercici: Calcula les raons trigonomètriques d'un angle α del tercer quadrant sabent que $\sin \alpha = -0,5$

$$\text{Sol.: } \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -0,866; \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0,577$$

TRIGONOMETRIA

Resolució de triangles no rectangles

Per resoldre triangles no rectangles, utilitzem el **teorema del sinus** i el **del cosinus**, que estan enunciats en el quadre següent, i la propietat que estableix que els angles interiors d'un triangle sumen 180° .

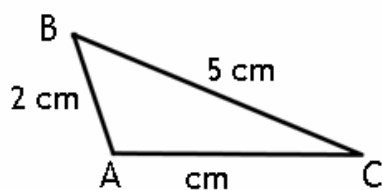
Fórmules:	Teorema del sinus : $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$
	Teorema del cosinus : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$
	La suma dels angles d'un triangle és 180° : $A + B + C = 180^\circ$

Recordem que resoldre un triangle consisteix a determinar tots els seus elements (costats i angles). La trigonometria ens permet resoldre un triangle si coneixem tres dels seus elements, un dels quals, almenys, ha de ser un costat.

Estudiem els diferents casos en els exemples següents.

Exemples:

1. Coneixem els tres costats: $a = 5 \text{ cm}$; $b = 4 \text{ cm}$; $c = 2 \text{ cm}$



Si té solució, és única.

Calculem **A**, aplicant el teorema del cosinus:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \rightarrow 5^2 = 4^2 + 2^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2 \cos A \rightarrow 25 = 20 - 16 \cos A$$

$$\rightarrow \cos A = \frac{20 - 25}{16} = -0.3125 \rightarrow \boxed{A = 108,21^\circ}$$

TRIGONOMETRIA

- Calculem **B**, aplicant el teorema del sinus (també podríem tornar a aplicar el teorema del cosinus):

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \rightarrow \frac{5}{\sin 108,21^\circ} = \frac{4}{\sin B} \rightarrow 5 \cdot \sin B = 4 \cdot \sin 108,21^\circ$$

$$\rightarrow \sin B = \frac{4 \cdot \sin 108,21^\circ}{5} = 0,76 \rightarrow B = \begin{cases} 49,46^\circ \\ 130,54^\circ \rightarrow \text{solució no factible} \end{cases}$$

- Calculem **C**, aplicant que la suma dels angles d'un triangle és 180° :

$$C = 180^\circ - B - A \rightarrow C = 180^\circ - 108,21^\circ - 49,46^\circ = 22,33^\circ \rightarrow \boxed{C = 22,33^\circ}$$

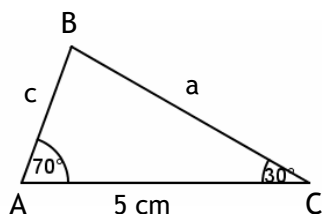
Nota: Si el resultat de la suma dels dos costats més petits és més petit que el costat gran, no es pot construir el triangle i en aplicar el teorema del cosinus sortirà que no té solució:

Exemple:

$$\begin{cases} a = 2 \text{ cm} \\ b = 6 \text{ cm} \\ c = 3 \text{ cm} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \rightarrow 2^2 = 6^2 + 3^2 - 2 \cdot 6 \cdot 3 \cos A \rightarrow 4 = 45 - 36 \cos A \\ \cos A = \frac{45 - 4}{36} = 1,14 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{no existeix un angle tal que el seu cosinus sigui } 1,14 \\ \text{ja que } -1 < \cos \alpha < 1 \end{cases}$$

$$2 + 3 = 5 < 6$$

2. Coneixem dos angles i un costat: $A = 70^\circ$; $C = 30^\circ$; $b = 5 \text{ cm}$

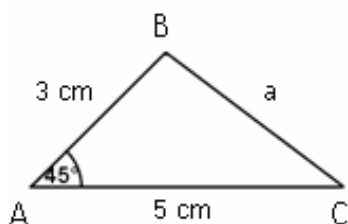


- Calculem **B** : $B = 180^\circ - C - A = 180^\circ - 70^\circ - 30^\circ = 80^\circ$
- Calculem **a** i **c** aplicant el teorema del sinus:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \rightarrow \frac{a}{\sin 70^\circ} = \frac{5}{\sin 80^\circ} = \frac{c}{\sin 30^\circ}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a = \frac{5 \cdot \sin 70^\circ}{\sin 80^\circ} = 4,77 \text{ cm} \rightarrow \boxed{a = 4,77 \text{ cm}} \\ c = \frac{5 \cdot \sin 30^\circ}{\sin 80^\circ} = 2,54 \text{ cm} \rightarrow \boxed{c = 2,54 \text{ cm}} \end{cases}$$

3. Coneixem dos costats i l'angle comprès $A = 45^\circ$; $c = 3 \text{ cm}$; $b = 5 \text{ cm}$



- Calculem a aplicant el teorema del cosinus:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \rightarrow a^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cos 45^\circ$$

$$a = \sqrt{34 - 30 \cdot \cos 45} = 3,57586 \text{ cm} \rightarrow a = 3,58 \text{ cm}$$

- Calculem B aplicant el teorema del sinus:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \rightarrow \frac{3,58}{\sin 45^\circ} = \frac{5}{\sin B} \rightarrow$$

$$\sin B = \frac{5 \cdot \sin 45^\circ}{3,57586} = 0,988722686 \rightarrow B = \begin{cases} 81,39^\circ \\ 180^\circ - 81,39^\circ = 98,61^\circ \end{cases} ?$$

- Calculem C aplicant el teorema del sinus per veure quina de les dues solucions de B és possible:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \rightarrow \frac{3,57586}{\sin 45^\circ} = \frac{3}{\sin C} \rightarrow \sin C = \frac{3 \cdot \sin 45^\circ}{3,57586} = 0,593233611$$

$$\rightarrow C = \begin{cases} 36,39^\circ \text{ solució factible} \\ 180 - 36,39 = 143,61^\circ \rightarrow \text{Aquesta solució no és possible} \\ \text{ja que } 143,66^\circ + 45^\circ > 180 \end{cases}$$

- Tornem a calcular B aplicant que la suma dels angles d'un triangle és 180° :

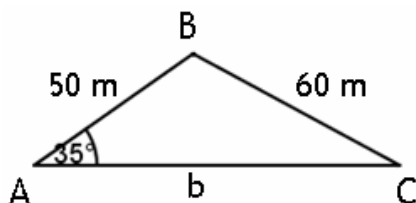
$$B = 180^\circ - 45^\circ - 36,39^\circ = 98,61^\circ \rightarrow B = 98,61^\circ$$

TRIGONOMETRIA

4. Coneixem dos costats i un angle oposat a un d'ells (no comprès)

(pot tenir una solució, dues solucions o cap solució)

a) $A = 35^\circ$; $a = 60$ cm; $c = 50$ cm



TÉ SOLUCIÓ
ÚNICA

- Calculem C aplicant el teorema del sinus:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \rightarrow \frac{60}{\sin 35^\circ} = \frac{50}{\sin C} \rightarrow \sin C = \frac{50 \cdot \sin 35^\circ}{60} = 0,477980363$$

$$\rightarrow C = \begin{cases} 28,55^\circ \text{ única solució factible} \\ 180 - 28,55 = 151,45^\circ \rightarrow \text{Aquesta solució no és possible} \\ \text{ja que } 151,45^\circ + 35^\circ > 180^\circ \end{cases}$$

- Calculem B (aplicant que la suma dels angles d'un triangle és 180°):

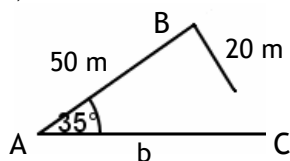
$$B = 180^\circ - 35^\circ - 28,55^\circ = 116,45^\circ \rightarrow B = 116,45^\circ$$

- Calculem b aplicant el teorema del sinus:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \rightarrow \frac{60}{\sin 35^\circ} = \frac{b}{\sin 116,45^\circ} \rightarrow b = \frac{60 \cdot \sin 116,45^\circ}{\sin 35^\circ} = 93,66 \text{ m}$$

$$\rightarrow b = 93,66 \text{ m}$$

b) $A = 35^\circ$; $a = 20$ cm; $c = 50$ cm



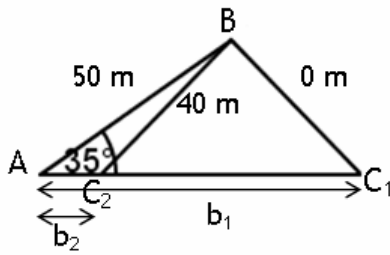
Calculem C aplicant el teorema del sinus:

NO TÉ
SOLUCIÓ

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \rightarrow \frac{20}{\sin 35^\circ} = \frac{50}{\sin C} \rightarrow \sin C = \frac{50 \cdot \sin 35^\circ}{20} = 1,43 \rightarrow \text{No té solució (sin C > 1)}$$

TRIGONOMETRIA

c) $A = 35^\circ$; $a = 40$ cm; $c = 50$ cm



- Calculem C aplicant el teorema del sinus:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \rightarrow \frac{40}{\sin 35^\circ} = \frac{50}{\sin C} \rightarrow \sin C = \frac{50 \cdot \sin 35^\circ}{40} = 0,716970545$$

$$\rightarrow C = \begin{cases} C_1 = 45,8^\circ \\ C_2 = 180 - 45,8 = 134,2^\circ \rightarrow 134,2 + 35 < 180^\circ \rightarrow C_2 = 134,2^\circ \end{cases}$$

$\rightarrow$ Hi ha dues solucions

- Calculem B_1 i B_2 (aplicant que la suma dels angles d'un triangle és 180°):

$$B_1 = 180^\circ - 35^\circ - 45,8^\circ = 99,2^\circ \rightarrow B_1 = 99,2^\circ$$

$$B_2 = 180^\circ - 35^\circ - 134,2^\circ = 10,8^\circ \rightarrow B_2 = 10,8^\circ$$

- Calculem b_1 i b_2 aplicant el teorema del sinus:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b_1}{\sin B_1} \rightarrow \frac{40}{\sin 35^\circ} = \frac{b_1}{\sin 99,2^\circ} \rightarrow b_1 = \frac{40 \cdot \sin 99,2^\circ}{\sin 35^\circ} = 68,84 \text{ m} \rightarrow b_1 = 68,84 \text{ m}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b_2}{\sin B_2} \rightarrow \frac{40}{\sin 35^\circ} = \frac{b_2}{\sin 10,8^\circ} \rightarrow b_2 = \frac{40 \cdot \sin 10,8^\circ}{\sin 35^\circ} = 13,07 \text{ m} \rightarrow b_2 = 13,07 \text{ m}$$

TÉ DUES SOLUCIONS

$$C_1 = 45,8^\circ \quad B_1 = 99,2^\circ \quad b_1 = 68,84 \text{ m}$$

$$C_2 = 134,2^\circ \quad B_2 = 10,8^\circ \quad b_2 = 13,07 \text{ m}$$

TRIGONOMETRIA

Exercici: Resol els triangles següents (dibuixa triangles esquemàtics, sense mantenir les proporcions reals):

a) $a = 3 \text{ cm}$; $b = 8 \text{ cm}$; $c = 7 \text{ cm}$

b) $A = 60^\circ$; $C = 40^\circ$; $b = 10 \text{ cm}$

TRIGONOMETRIA

c) $A = 75^\circ$; $c = 7$ cm; $b = 8$ cm

d) $A = 40^\circ$; $a = 10$ cm; $b = 9$ cm

e) $A = 40^\circ$; $a = 5$ cm; $b = 9$ cm

TRIGONOMETRIA

f) $A = 40^\circ$; $a = 6$ cm; $b = 9$ cm

Sol.:

a) $A = 21,79^\circ$; $B = 98,21^\circ$; $C = 60^\circ$

d) $B = 35,35^\circ$; $C = 104,65^\circ$; $c = 15,05$ cm

b) $B = 80^\circ$; $c = 6,53$ cm; $a = 8,79$ cm

e) No té solució

c) $B = 57,47^\circ$; $C = 47,53^\circ$; $a = 9,17$ cm

f) $B_1 = 74,62^\circ$; $C_1 = 65,38^\circ$; $c_1 = 8,49$ cm

$B_2 = 105,38^\circ$; $C_2 = 34,62^\circ$; $c_2 = 5,3$ cm

EXERCICIS: MESURA D'ANGLES

1. Expressa en radians (en forma de fracció i en funció de π):

- | | | | |
|---------------|----------------|----------------|----------------|
| a) 15° | g) 105° | m) 195° | s) 285° |
| b) 30° | h) 120° | n) 210° | t) 300° |
| c) 45° | i) 135° | o) 225° | u) 315° |
| d) 60° | j) 150° | p) 240° | v) 330° |
| e) 75° | k) 165° | q) 255° | w) 345° |
| f) 90° | l) 180° | r) 270° | x) 360° |

2. Expressa en radians (en forma de fracció i en funció de π):

- | | | | |
|---------------|---------------|---------------|--------------|
| a) 73° | b) 38° | c) 21° | d) 7° |
|---------------|---------------|---------------|--------------|

3. Expressa en graus:

- | | | | |
|-------------|-------------------------|--------------------------|-------------------------|
| a) 4 rad | d) $1,5\pi$ rad | g) $\frac{5\pi}{3}$ rad | j) $\frac{\pi}{7}$ rad |
| b) 2,53 rad | e) $\frac{4\pi}{5}$ rad | h) $\frac{5\pi}{18}$ rad | k) $\frac{3\pi}{4}$ rad |
| c) 1,25 rad | f) $\frac{\pi}{8}$ rad | i) $\frac{\pi}{12}$ rad | l) $\frac{7\pi}{6}$ rad |

4. Expressa en graus, minuts i segons:

- | | | | |
|------------------|--------------------|------------------|--------------------|
| a) $25,32^\circ$ | c) $95,56^\circ$ | e) $40,01^\circ$ | g) $325,003^\circ$ |
| b) $8,3^\circ$ | d) $247,925^\circ$ | f) $130,5^\circ$ | h) $125,124^\circ$ |

5. Passa a forma incomplexa:

- | | | | |
|------------------------|--------------------------|-------------------------|---------------------|
| a) $12^\circ 52' 45''$ | c) $8^\circ 30''$ | e) $50^\circ 25' 10''$ | g) $332^\circ 25''$ |
| b) $15^\circ 45'$ | d) $10^\circ 50' 35,3''$ | f) $120^\circ 40' 13''$ | h) $86^\circ 30'$ |

6. Realitza les operacions següents utilitzant la calculadora:

- | | |
|--|--|
| a) $12^\circ 52' 45'' + 81^\circ 35' 40''$ | b) $50^\circ 25' 10'' - 12^\circ 20' 40''$ |
|--|--|

SOLUCIONS: MESURA D'ANGLES

1.

a) $15^\circ = \frac{\pi}{12} \text{ rad}$

g) $105^\circ = \frac{7\pi}{12} \text{ rad}$

m) $195^\circ = \frac{13\pi}{12} \text{ rad}$

s) $285^\circ = \frac{19\pi}{12} \text{ rad}$

b) $30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$

h) $120^\circ = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$

n) $210^\circ = \frac{7\pi}{6} \text{ rad}$

t) $300^\circ = \frac{5\pi}{3} \text{ rad}$

c) $45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$

i) $135^\circ = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$

o) $225^\circ = \frac{5\pi}{4} \text{ rad}$

u) $315^\circ = \frac{7\pi}{4} \text{ rad}$

d) $60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$

j) $150^\circ = \frac{5\pi}{6} \text{ rad}$

p) $240^\circ = \frac{4\pi}{3} \text{ rad}$

v) $330^\circ = \frac{11\pi}{6} \text{ rad}$

e) $75^\circ = \frac{5\pi}{12} \text{ rad}$

k) $165^\circ = \frac{11\pi}{12} \text{ rad}$

q) $255^\circ = \frac{17\pi}{12} \text{ rad}$

w) $345^\circ = \frac{23\pi}{12} \text{ rad}$

f) $90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$

l) $180^\circ = \pi \text{ rad}$

r) $270^\circ = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$

x) $360^\circ = 2\pi$

2.

a) $\frac{73\pi}{180}$

b) $\frac{19\pi}{90}$

c) $\frac{7\pi}{60}$

d) $\frac{7\pi}{180}$

3.

a) $229,18^\circ$

d) 270°

g) 300°

j) $25,71^\circ$

b) $144,96^\circ$

e) 144°

h) 50°

k) 135°

c) $71,62^\circ$

f) $22,5^\circ$

i) 15°

l) 210°

4.

a) $25^\circ 19' 12''$

c) $95^\circ 33' 36''$

e) $40^\circ 0' 36''$

g) $325^\circ 0' 10,8''$

b) $8^\circ 18'$

d) $247^\circ 55' 30''$

f) $130^\circ 30'$

h) $125^\circ 7' 26,4''$

5.

a) $12,88^\circ$

c) $8,0083^\circ$

e) $50,42^\circ$

g) $332,007^\circ$

b) $15,75^\circ$

d) $10,84^\circ$

f) $120,67^\circ$

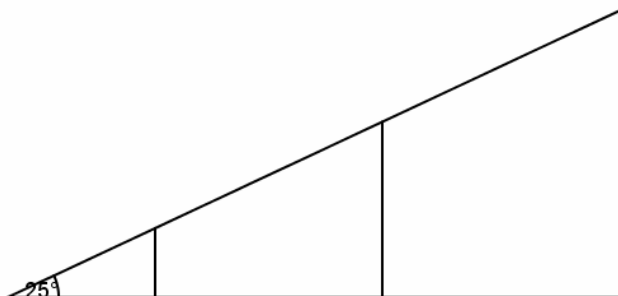
h) $86,5^\circ$

6. a) $94^\circ 28' 25''$

b) $38^\circ 4' 30''$

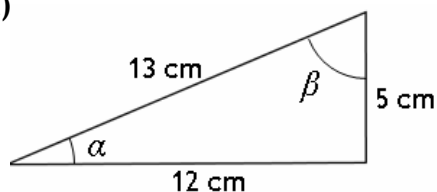
EXERCICIS: RAONS TRIGONOMÈTRIQUES D'UN ANGLE AGUT

1. Calcula les raons trigonomètriques de 25° utilitzant els tres triangles rectangles i comprova que et surt el mateix resultat (mesura els costats dels triangles amb el regle).

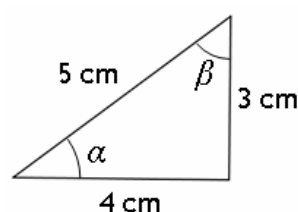


2. Calcula les raons trigonomètriques dels angles α i β :

a)

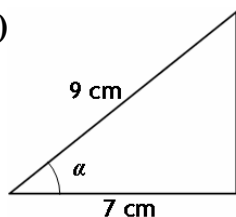


b)

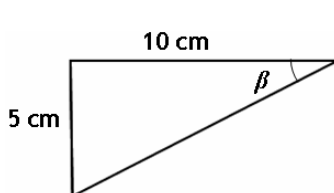


3. Troba les raons trigonomètriques dels angles assenyalats:

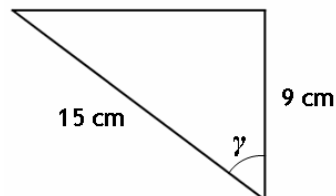
a)



b)



c)



4. Calcula les raons trigonomètriques següents utilitzant la calculadora. Arrodoneix els resultats a les mil·lèsimes:

a) $\sin 15^\circ =$

d) $\sin 82^\circ =$

g) $\sin 18,5^\circ =$

b) $\cos 38^\circ =$

e) $\cos 76^\circ =$

h) $\cos 70^\circ 57' 25'' =$

c) $\operatorname{tg} 25^\circ =$

f) $\operatorname{tg} 59^\circ =$

i) $\operatorname{tg} 75^\circ 50'' =$

5. Amb l'ajuda de la calculadora, calcula el valor d'un angle α , més petit o igual que 90° , que tingui la raó trigonomètrica que s'indica.

a) $\sin \alpha = 0,93969262$

d) $\sin \alpha = 0,68199836$

g) $\cos \alpha = 0,819152044$

b) $\cos \alpha = 0,9$

e) $\cos \alpha = 5$

h) $\sin \alpha = 1$

c) $\operatorname{tg} \alpha = 1,191753593$

f) $\operatorname{tg} \alpha = 2$

i) $\operatorname{tg} \alpha = 0,3$

SOLUCIONS: RAONS TRIGONOMÈTRIQUES D'UN ANGLE AGUT

Solucions: raons trigonomètriques d'un angle agut

1. El resultat sortirà aproximat, ja que mesurant amb el regle no podem ésser molt precisos.

$$\sin 25^\circ = 0,42$$

$$\cos 25^\circ = 0,91$$

$$\operatorname{tg} 25^\circ = 0,47$$

2. a)

$$\sin \alpha = 0,385$$

$$\cos \alpha = 0,923$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 0,41\widehat{6}$$

$$\sin \beta = 0,923$$

$$\cos \beta = 0,385$$

$$\operatorname{tg} \beta = 2,4$$

- b)

$$\sin \alpha = 0,6$$

$$\cos \alpha = 0,8$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 0,75$$

$$\sin \beta = 0,8$$

$$\cos \beta = 0,6$$

$$\operatorname{tg} \beta = 1,3\widehat{3}$$

3. a) $\sin \alpha = 0,63$ $\cos \alpha = 0,7\widehat{7}$ $\operatorname{tg} \alpha = 0,81$

b) $\sin \beta = 0,45$ $\cos \beta = 0,89$ $\operatorname{tg} \beta = 0,5$

c) $\sin \gamma = 0,8$ $\cos \gamma = 0,6$ $\operatorname{tg} \gamma = 1,3\widehat{3}$

4. a) 0,259 d) 0,990 g) 0,317

b) 0,788 e) 0,242 h) 0,326

c) 0,466 = f) 1,664 = i) 3,736

5. a) $\alpha = 70^\circ$ d) $\alpha = 43^\circ$ g) $\alpha = 35^\circ$

b) $\alpha = 25,84^\circ$ e) $\nexists$ h) $\alpha = 90^\circ$

c) $\alpha = 50^\circ$ f) $\alpha = 63,43^\circ$ i) $\alpha = 16,7^\circ$

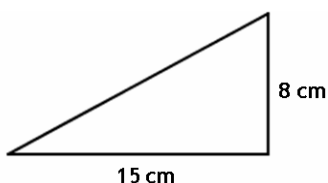
EXERCICIS: RESOLUCIÓ DE TRIANGLES RECTANGLES

1. En els triangles següents, calcula el valor de l'angle desconegut:

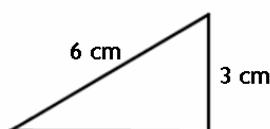
	A	B	C
Triangle 1	58°		25°
Triangle 2		32°	86°
Triangle 3	$110^\circ 63' 22''$	$50^\circ 27' 61''$	

2. Resol els triangles rectangles següents:

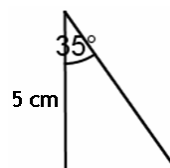
a)



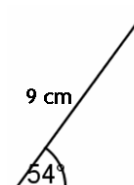
b)



c)



d)



3. Resol els triangles rectangles següents:

a) $a = 41 \text{ cm}$ $b = 40 \text{ cm}$

g) $B = 38^\circ 25' 40''$ $a = 8,25 \text{ cm}$

b) $C = 75^\circ$ $a = 4 \text{ cm}$

h) $C = 42^\circ 31'$ $b = 125 \text{ cm}$

c) $B = 45^\circ$ $b = 2,5 \text{ cm}$

i) $B = \frac{2\pi}{5} \text{ rad}$ $c = 125 \text{ cm}$

d) $b = 7 \text{ cm}$ $c = 24 \text{ cm}$

j) $C = \frac{\pi}{12} \text{ rad}$ $c = 10 \text{ cm}$

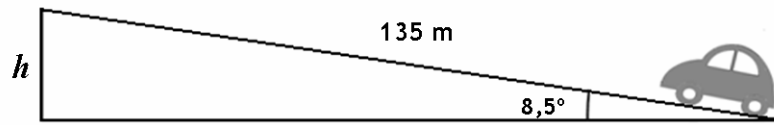
e) $a = 11 \text{ cm}$ $b = 6 \text{ cm}$

f) $b = 40 \text{ cm}$ $c = 40 \text{ cm}$

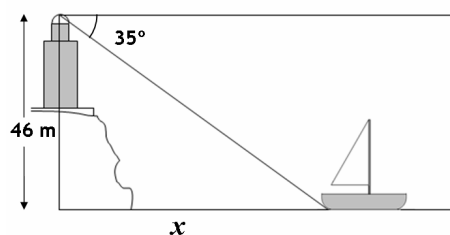
4. Calcula els catets d'un triangle rectangle isòsceles d'hipotenusa 12 cm.
5. Calcula l'alçada d'un campanar si a 10 m de la seva base observem el punt més alt sota un angle de 65° (angle que formen la visual amb l'horitzontal, també conegut com a angle d'elevació).
6. Calcula l'altura a què arriba una escala de 4 m recolzada en una paret i formant un angle amb el terra de 60° .
7. Un tram recte de carretera de 150 m salva un desnivell de 25 metres. Calcula l'angle d'inclinació de la carretera.

EXERCICIS: RESOLUCIÓ DE TRIANGLES RECTANGLES

8. Un cotxe puja per una carretera que té un pendent de $8,5^\circ$. Quants metres haurà pujat en vertical (h) quan hagi recorregut 135 m?



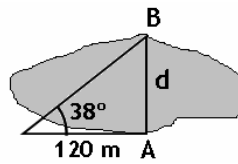
9. Una excursionista ha baixat des del cim d'una muntanya fins a un coll en línia recta. Si sabem que ha descendit 125 m en vertical i que el pendent del tram que ha baixat és de 20° , quina distància ha recorregut?
10. L'ombra d'un edifici és de 10 m quan l'angle d'elevació del Sol (angle que formen els raigs solars amb el terra) és de 70° . Calcula l'altura de l'edifici.
11. Quin és l'angle d'elevació del sol en el moment que l'ombra d'un pal mesura el doble que la seva altura?
12. Una nena està fent volar un estel amb un cordill de 50 m. El cordill, que està totalment estirat, té una inclinació respecte a l'horitzontal de 45° . Si sabem que la mà amb què la nena fa volar l'estel es troba a 1,1 m d'alçada, a quina alçada es troba l'estel?
13. Des d'un far, que es troba a 46 m sobre el nivell del mar, es veu un vaixell sota un angle de 35° (angle que forma la visual amb l'horitzontal, també conegut com a angle de depressió). A quina distància de la vertical del far (x) es troba el vaixell?



14. Quan un avió vola sobre una ciutat A, l'angle de depressió (mesurat des de l'avió) d'una altra ciutat B és de 22° . Calcula l'altitud a què vola l'avió i la distància de l'avió a la ciutat B, sabent que la distància en línia recta entre les dues ciutats és de 19 km.

EXERCICIS: RESOLUCIÓ DE TRIANGLES RECTANGLES

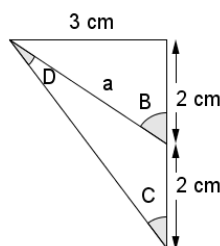
15. Ens trobem en el punt A, a la vora d'un llac, i volem trobar la distància, d , del punt A al punt B. Calcula d a partir de les mesures indicades en el dibuix.



16. Calcula l'àrea i el perímetre d'un triangle isòsceles de costat desigual 12 cm i angle desigual 30° .
17. Calcula l'àrea d'un triangle isòsceles si els costats iguals fan 7 cm i els angles iguals fan 74° .
18. L'angle desigual d'un triangle isòsceles mesura 44° i l'altura del triangle fa 6 cm. Calcula els costats del triangle.
19. Un trípod de les potes del qual mesuren 50 cm s'obre de manera que l'angle que formen cada parell de potes és el mateix. Calcula aquest angle, sabent que la distància que separa cada parell de peus és de 30 cm.
20. Obrim un compàs de manera que els seus braços, els quals mesuren 15 cm, formen un angle de 35° . Calcula la distància que separa les puntes del compàs.
21. Calcula els angles d'un rombe les diagonals del qual fan 20 cm i 16 cm.
22. Calcula l'àrea d'un rombe, si el costat mesura 17 cm i un dels seus angles interns és de 38° .
23. Calcula l'àrea d'un hexàgon regular de 2 m de costat.
24. Calcula l'àrea d'un octàgon regular de 5 cm de radi.
25. Calcula l'àrea i el perímetre d'un decàgon regular inscrit en un cercle de 13 cm de radi.

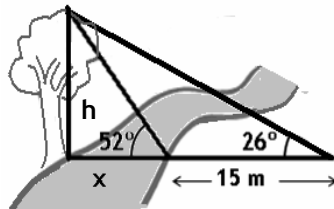
26. Amb les dades de la figura, calcula:

- a) a
- b) B
- c) C
- d) D

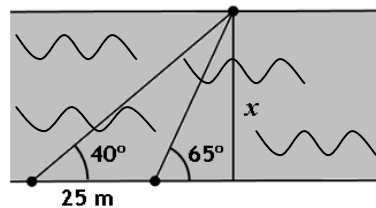


EXERCICIS: RESOLUCIÓ DE TRIANGLES RECTANGLES

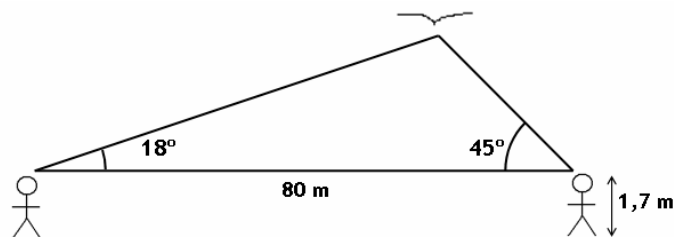
27. Per conèixer l'amplària d'un riu (x) i l'alçada d'un arbre (h) que es troba a la riba oposada procedim de la manera següent: ens situem enfront de l'arbre i mesurem l'angle d'elevació de la seva part més alta (52°). Ens allunyem 15 m en direcció perpendicular a la vora del riu i tornem a mesurar l'angle d'elevació (26°). Quant mesuren l'amplària del riu i l'alçada de l'arbre?



28. Des de la riba d'un riu, veiem un punt situat a l'altra riba sota un angle de 65° (angle que forma la visual amb la riba del riu on ens trobem). Ens allunyem 25 m per la vora del riu i observem el mateix punt sota un angle de 40° . Calcula l'amplada (x) del riu.



29. A quina altura vola l'ocell?



30. Una antena està subjectada al terra per dos cables que formen amb l'antena angles de 28° i 50° . La distància entre els punts de subjecció dels cables al terra (alineats amb el peu de l'antena) és de 100 m. Calcula l'altura de l'antena.
31. L'angle sota el qual es veu la torre d'un far des d'un vaixell mesura 40° . Quan el vaixell s'apropa 150 m, aquest angle és de 55° . Calcula l'altura de la torre del far sobre el nivell del mar.

EXERCICIS: RESOLUCIÓ DE TRIANGLES RECTANGLES

32. Un avió vola entre dues ciutats, A i B (en el seu pla vertical), que disten 27 km. Els angles d'elevació de l'avió des de A i B (angles que formen les visuals de l'avió respecte de l'horitzontal) són de 30° i 45° , respectivament. Calcula a quina altitud vola l'avió i a quina distància es troba l'avió de cada ciutat.
33. L'angle sota el qual veiem el cim d'una muntanya des d'un punt situat al nivell del mar és de 27° . Si caminem 2.000 m en línia recta i en direcció cap a la muntanya, encara ens trobem al nivell del mar i l'angle sota el qual veiem el cim és de 48° . Calcula l'altitud de la muntanya.

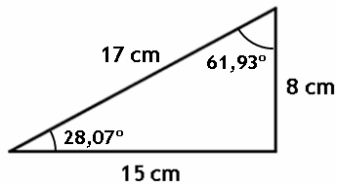
SOLUCIONS: RESOLUCIÓ DE TRIANGLES RECTANGLES

Solucions: resolució de triangles rectangles

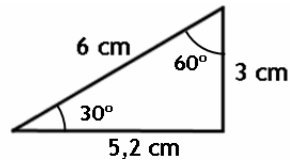
1. Triangle 1: $B = 97^\circ$; triangle 2: $A = 62^\circ$; triangle 3: $C = 18^\circ 28' 37''$

2.

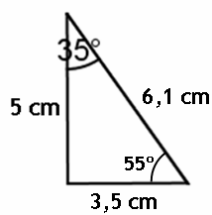
a)



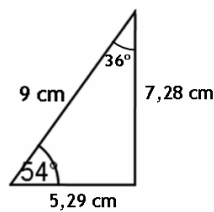
b)



c)



d)



3.

a) $C = 12,68^\circ$ $B = 77,32^\circ$ $c = 9$ cm

b) $B = 15^\circ$ $b = 1,04$ cm $c = 3,86$ cm

c) $C = 45^\circ$ $a = 3,54$ cm $c = 2,5$ cm

d) $C = 16,26^\circ$ $B = 73,74^\circ$ $a = 25$ cm

i) $C = 18^\circ$ $a = 404,51$ cm $b = 384,71$ cm

e) $C = 56,94^\circ$ $B = 33,06^\circ$ $c = 9,22$ cm

f) $C = 45^\circ$ $B = 45^\circ$ $a = 56,57$
cm

g) $C = 51^\circ 34' 20''$ $b = 6,46$ cm $c = 5,13$ cm

h) $B = 47^\circ 29'$ $a = 169,59$ cm $c =$
114,61 cm

j) $B = 75^\circ$ $b = 37,32$ cm $a = 38,64$ cm

SOLUCIONS: RESOLUCIÓ DE TRIANGLES RECTANGLES

4. 8,49 m
5. 21,45 m
6. 3,46 m
7. $\alpha = 9,6^\circ$
8. $h = 19,95$ m
9. 365,48 m
10. 27,47 m
11. $26,57^\circ$
12. 36,46 m
13. 65,69 m
14. Altitud = 7676,5 m;
Distància a B = 20,5 km
15. $d = 93,75$ m
16. $A = 134,34 \text{ cm}^2$; $P = 58,36$ cm
17. $A = 12,99 \text{ cm}^2$
18. Costats iguals: 6,47 cm;
Costat desigual = 4,85 cm
19. $34,92^\circ$
20. 9,02 cm
21. $77,32^\circ$ i $102,68^\circ$
22. $A = 177,73 \text{ cm}^2$
23. $A = 10,38 \text{ m}^2$
24. $A = 70,78 \text{ cm}^2$
25. $A = 496,5 \text{ cm}^2$; $P = 80,34$ cm
26. $a = 3,61$; $B = 56,31^\circ$;
 $C = 36,87^\circ$; $D = 19,44^\circ$
27. Amplària riu = 9,23 m
Altura arbre = 11,82 m
28. 34,46 m
29. 21,32 m
30. 36,77 m
31. 305,16 m
32. Altitud = 9882,69 m
 $d_A = 19,76$ km $d_B = 13,97$ km
33. 1882,87 m

EXERCICIS: RAONS TRIGONOMÈTRIQUES D'UN ANGLE QUALSEVOL

1. Representa en la circumferència trigonomètrica els angles següents i les seves raons trigonomètriques:

a) 34°

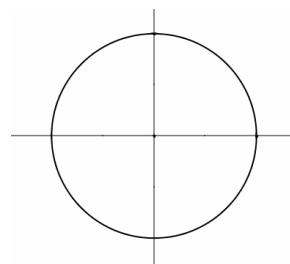
b) 120°

c) 240°

d) 345°

2. Representa els angles 0° , 90° , 180° i 270° en la circumferència trigonomètrica i completa el quadre següent (sense utilitzar la calculadora):

	0°	90°	180°	270°
$\sin \alpha$				
$\cos \alpha$				
$\operatorname{tg} \alpha$				



3. Calcula l'angle comprès entre 0° i 360° que té les mateixes raons trigonomètriques que l'angle donat.

a) 1300°

b) 5321°

c) 435°

4. Troba tots els angles més petits que 1500° que compleixen que $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. Calcula i dibuixa els angles α , compresos entre 0° i 360° , que verifiquen la condició següent. Comprova el resultat amb la calculadora:

a) $\sin \alpha = 0,9$

b) $\cos \alpha = 0,25$

c) $\operatorname{tg} \alpha = -1,5$

d) $\cos \alpha = -0,5$

e) $\sin \alpha = -1$

6. Calcula i dibuixa les raons trigonomètriques d'un angle α que compleix les condicions següents, utilitzant les relacions entre les raons trigonomètriques. Comprova el resultat amb la calculadora:

a) És del segon quadrant i $\operatorname{tg} \alpha = -2$

c) És del segon quadrant i $\sin \alpha = 0,8$

b) És del tercer quadrant i $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$

d) És del quart quadrant i $\operatorname{tg} \alpha = -1$

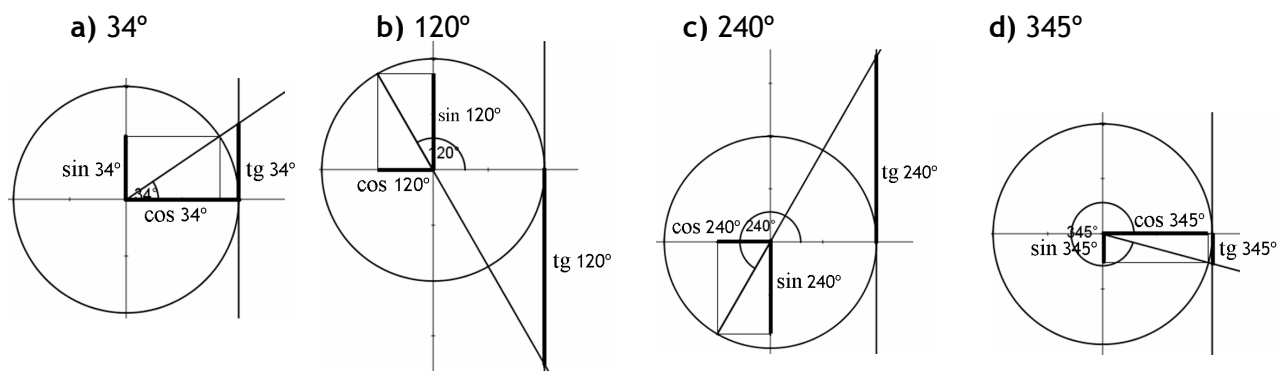
EXERCICIS: RAONS TRIGONOMÈTRIQUES D'UN ANGLE QUALSEVOL

7. Indica en quins quadrants es troba cada angle, a partir de les raons trigonomètriques donades:

angle	cosinus	sinus	tangent	quadrant
α	0,82		-0,7	
β	-0,67	0,74		
γ		0,42	0,47	
δ	-0,77		0,84	

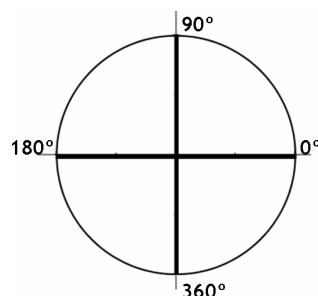
SOLUCIONS: RAONS TRIGONOMÈTRIQUES D'UN ANGLE QUALSEVOL

1.



2.

	0°	90°	180°	270°
$\sin \alpha$	0	1	0	-1
$\cos \alpha$	1	0	-1	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\nexists^*$	0	$\nexists^*$



3. a) 220° b) 281° c) 75°

4. 45° ; 405° ; 765° ; 1125° ; 1485° ; 315° ; 675° ; 1035° i 1395°

5.

a) $64,16^\circ$ i $115,84^\circ$ b) $75,52^\circ$ i $284,48^\circ$ c) $123,69^\circ$ i $303,69^\circ$ d) 120° i 240° e) 270°

6. a) $\cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$; $\sin \alpha = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ c) $\cos \alpha = -0,6$; $\operatorname{tg} \alpha = 1,3$

b) $\cos \alpha = -\sqrt{\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$ d)

$\cos \alpha = +\sqrt{\frac{1}{2}} = +\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin \alpha = -\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

7. $\alpha \rightarrow$ quart quadrant; $\beta \rightarrow$ segon quadrant; $\gamma \rightarrow$ primer quadrant; $\delta \rightarrow$ tercer quadrant

EXERCICIS: RESOLUCIÓ DE TRIANGLES NO RECTANGLES

Exercicis: resolució de triangles no rectangles

1. Resol els triangles següents:

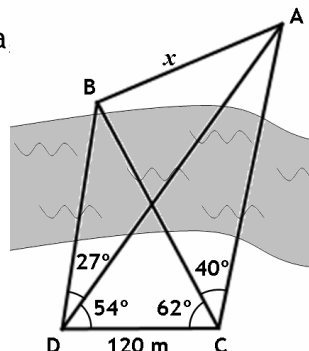
- | | | | | | |
|-----------------|----------------|----------------|-----------------|----------------|------------------|
| a) $a = 10$ cm | $b = 6$ cm | $c = 7$ cm | k) $c = 13$ cm | $b = 15$ cm | $C = 55^\circ$ |
| b) $a = 5$ cm | $b = 9$ cm | $c = 2$ cm | l) $c = 5$ cm | $A = 27^\circ$ | $B = 38^\circ$ |
| c) $a = 5$ cm | $A = 10^\circ$ | $B = 20^\circ$ | m) $b = 51$ cm | $a = 42$ cm | $B = 23^\circ$ |
| d) $a = 12$ cm | $b = 10$ cm | $C = 23^\circ$ | n) $a = 13$ cm | $b = 12$ cm | $c = 5$ cm |
| e) $a = 8$ cm | $b = 5$ cm | $A = 37^\circ$ | o) $c = 12$ cm | $a = 16$ cm | $C = 56^\circ$ |
| f) $a = 12$ cm | $b = 13$ cm | $A = 80^\circ$ | p) $a = 9,4$ cm | $c = 14,7$ cm | $B = 25,8^\circ$ |
| g) $a = 6$ cm | $b = 7$ cm | $A = 52^\circ$ | q) $a = 26$ cm | $c = 15$ cm | $A = 36^\circ$ |
| h) $b = 60$ cm | $C = 30^\circ$ | $B = 50^\circ$ | r) $b = 80$ m | $A = 63^\circ$ | $C = 71^\circ$ |
| i) $a = 8,5$ cm | $b = 3,9$ cm | $c = 5,1$ cm | s) $a = 17$ cm | $b = 25$ cm | $c = 15$ cm |
| j) $c = 8$ cm | $b = 15$ cm | $A = 53^\circ$ | t) $a = 11$ cm | $b = 18$ cm | $C = 65^\circ$ |

2. Quan l'angle d'elevació del Sol sobre l'horitzó augmenta de 60° a 75° , l'ombra d'un edifici s'acurta 5 m. Calcula l'altura de l'edifici.

3. Dos vaixells surten d'un mateix punt seguint direccions diferents que formen un angle de 54° . Si els dos vaixells naveguen en línia recta, quina distància els separarà quan un vaixell hagi recorregut 400 km i l'altre n'hagi recorregut 650?

4. Dos costats adjacents d'un paral·lelogram formen un angle de 70° , i mesuren 27 cm i 31 cm. Calcula les dues diagonals del paral·lelogram, sabent que els angles interiors d'un paral·lelogram sumen 360° .

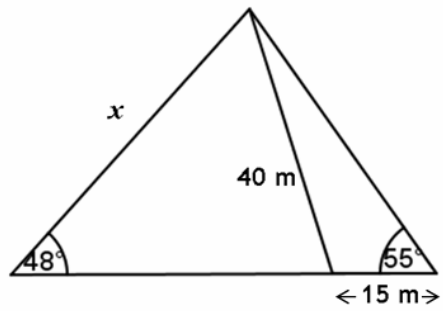
5. Estem en una riba del riu (punt C del dibuix) i volem saber la distància entre dos punts, A i B, inaccessibles, que són a l'altra riba. Fem les mesures indicades en el dibuix. Calcula la distància.



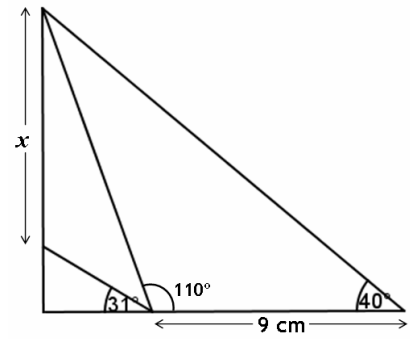
EXERCICIS: RESOLUCIÓ DE TRIANGLES NO RECTANGLES

6. Calcula el valor de x :

a)



b)



SOLUCIONS: RESOLUCIÓ DE TRIANGLES NO RECTANGLES

1.

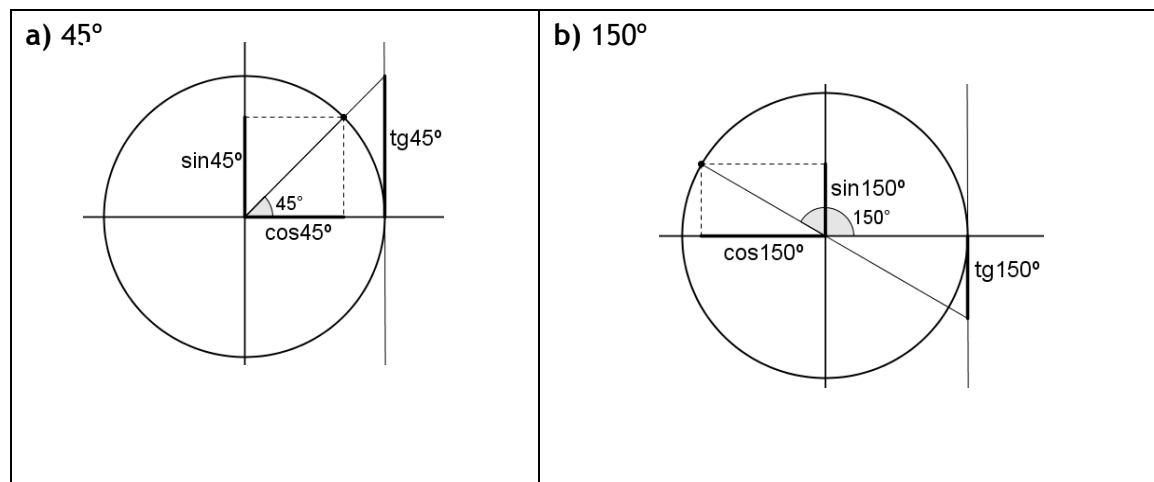
- | | |
|--|---|
| a) $A = 100,29^\circ$ $B = 36,18^\circ$ $A = 43,53^\circ$ | k) $a_1 = 12,85 \text{ cm}$ $A_1 = 54,06^\circ$ $B_1 = 70,94^\circ$ |
| b) No té solució | $a_2 = 4,36 \text{ cm}$ $A_2 = 15,94^\circ$ $B_2 = 109,06^\circ$ |
| c) $c = 14,4 \text{ cm}$ $b = 9,85 \text{ cm}$ $C = 150^\circ$ | l) $a = 2,5 \text{ cm}$ $b = 3,4 \text{ cm}$ $C = 115^\circ$ |
| d) $c = 4,8 \text{ cm}$ $A = 102,58^\circ$ $B = 54,42^\circ$ | m) $c = 86,95 \text{ cm}$ $A = 18,77^\circ$ $C = 138,23^\circ$ |
| e) $c = 11,41 \text{ cm}$ $B = 22,09^\circ$ $C = 120,91^\circ$ | n) $A = 90^\circ$ $B = 67,38^\circ$ $C = 22,62^\circ$ |
| f) No té solució | o) No té solució |
| g) $c_1 = 6,67 \text{ cm}$ $B_1 = 66,83^\circ$ $C_1 = 61,17^\circ$ | p) $b = 7,46 \text{ cm}$ $A = 33,26^\circ$ $C = 120,94^\circ$ |
| $c_2 = 1,95 \text{ cm}$ $B_2 = 113,17^\circ$ $C_2 = 14,83^\circ$ | q) $b = 36,59 \text{ cm}$ $B = 124,18^\circ$ $C = 19,82^\circ$ |
| h) $c = 39,16 \text{ cm}$ $a = 77,13 \text{ cm}$ $A = 100^\circ$ | r) $a = 99,09 \text{ m}$ $c = 105,15 \text{ m}$ $B = 46^\circ$ |
| i) $A = 141,26^\circ$ $B = 16,69^\circ$ $C = 22,05^\circ$ | s) $A = 41,58^\circ$ $B = 102,58^\circ$ $C = 35,84^\circ$ |
| j) $a = 12,02 \text{ cm}$ $B = 94,9^\circ$ $C = 32,10^\circ$ | t) $c = 16,66 \text{ cm}$ $A = 36,75^\circ$ $B = 78,25^\circ$ |

2. 16,16 m 3. 526,17 km 4. 33,43 cm i 47,57 cm 5. 154,07 m

6. a) 51,44 m b) 8,49 cm

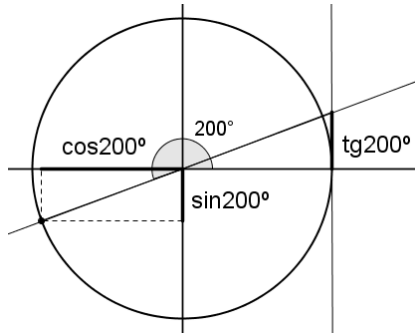
Solucions dels exercicis de la teoria

Representació de les raons trigonomètriques d'angles situats en diferents quadrants

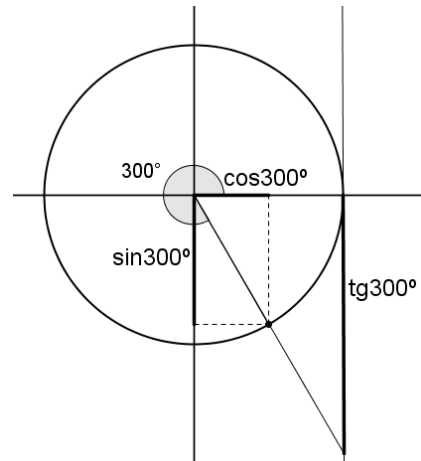


SOLUCIONS: RESOLUCIÓ DE TRIANGLES NO RECTANGLES

c) 200°



d) 300°



5. ESCALES

Les figures **semblants** són figures amb la mateixa forma, però de mides diferents. Així, si dues figures són semblants, les seves mesures mantenen la mateixa proporció; una és una ampliació o reducció de l'altra.

Quan un objecte no el podem representar a mida real perquè és massa gran, dibuixem o construïm una figura semblant a l'objecte real o a una de les seves vistes (planta, alçat o perfil). Aquest és el cas dels **plànols**, **els mapes** i **les maquetes**, que són representacions de la realitat a mida reduïda (en el cas dels plànols i mapes, es representa la planta).

L'**escala** d'un plànol, un mapa o una maqueta és la raó entre les distàncies o longituds de la representació i les de la realitat.

$$\text{Escala} = \frac{\text{longitud en la representació}}{\text{longitud en la realitat}}$$

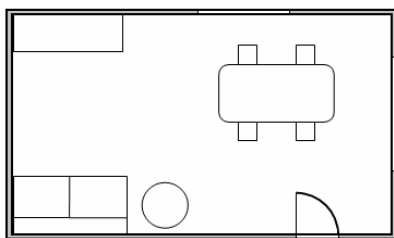
L'escala se sol expressar amb la forma $\boxed{1 : x}$, que significa que:

- Una unitat de longitud de la representació equival a x unitats de longitud de la realitat (l'escala és independent de la unitat que triem). Així:
 - o Un cm de la representació equival a x cm de la realitat
 - o Un mm de la representació equival a x mm de la realitat
 - o Un m de la representació equival a x m de la realitat
 - ⋮
- La realitat és x vegades més gran que la representació.

ESCALES

Exemple:

El plànol següent representa una habitació a escala 1:150. Calcula les mides reals de l'habitació:



Cada cm sobre el plànol equival a 150 cm = 1,5 m en la realitat.

Les mides de l'habitació sobre el plànol són:

Llargada: 5 cm Amplada: 2,9 cm

Calculem les mides reals de l'habitació en cm, multiplicant les del plànol per 150, i després les passem a metres (també podem multiplicar-les per 1,5 per obtenir-les directament en metres):

Llargada: $5 \cdot 150 = 750 \text{ cm} = 7,5 \text{ m}$

Amplada: $2,9 \cdot 150 = 435 \text{ cm} = 4,35 \text{ m}$

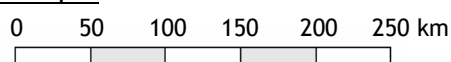
Àrea: $7,5 \cdot 4,35 = 32,63 \text{ m}^2$

Exercici: Calcula les mides reals d'una habitació rectangular que, sobre un plànol a escala 1:225, mesura 4,5 cm d'amplada i 8,2 cm de llargada.

Escala gràfica

L'escala gràfica és una línia graduada on s'indica la longitud corresponent en la realitat de cada graduació. Vegem-ne un exemple:

Exemple:



Cada graduació mesura 1 cm. Per tant, cada cm sobre plànol o mapa equival a 50 km de la realitat.

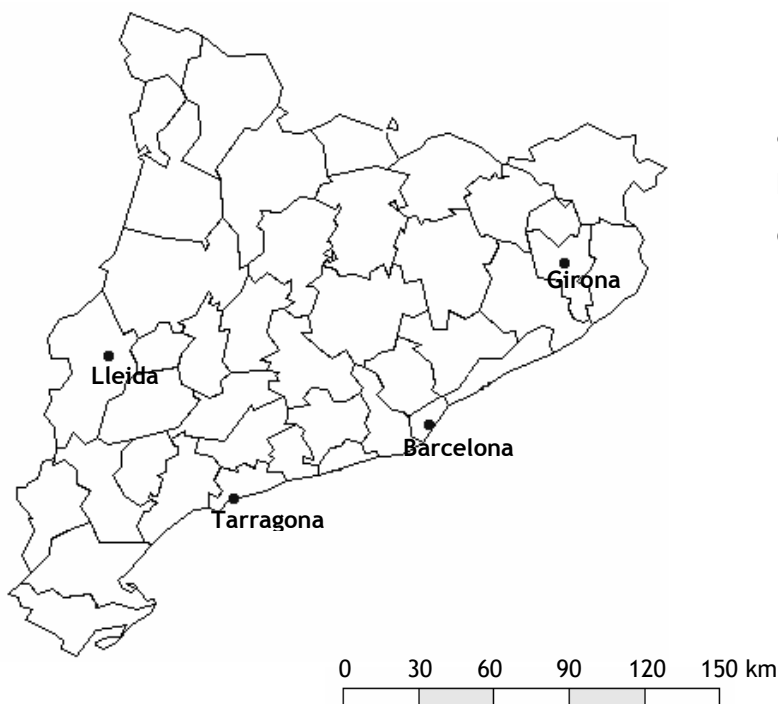
EXERCICIS: ESCALES

1. Calcula l'àrea útil del pis representat en el plànol següent i l'àrea de cada habitació:



Escala 1:110

2. Hem fet una maqueta d'un avió a escala 1:250. Si la llargada de la maqueta fa 24 cm, quina és la llargada real de l'avió?
3. Quina és la distància real entre dos punts que sobre un mapa a escala 1:40.000 disten 5 cm?
4. En un mapa de carreteres a escala 1:500.000, la distància en línia recta entre dues ciutats fa 7,8 cm. Quina és la distància real?
5. Utilitzant el mapa següent, calcula la distància real en línia recta entre:



- a) Barcelona i Girona
b) Barcelona i Tarragona
c) Barcelona i Lleida

SOLUCIONS: ESCALES

1. $A_{\text{pis}} = 64,6 \text{ m}^2$; $A_{\text{menjador}} = 25,9 \text{ m}^2$; $A_{\text{cuina}} = 8,9 \text{ m}^2$; $A_{\text{bany}} = 6,4 \text{ m}^2$;
 $A_{\text{dormitori 1}} = 12,8 \text{ m}^2$; $A_{\text{dormitori 2}} = 9,5 \text{ m}^2$.
2. 60 m
3. 2 km
4. 39 km
5. a) 83 km b) 83 km c) 130 km

TEMA 5: VECTORS EN EL PLA

1. Vectors en el pla.
2. Rectes en el pla.

VECTORS EN EL PLA

1. VECTORS EN EL PLA

Quan treballem en dues dimensions (en la pissarra, en un paper, en plànols i mapes, en les vistes d'una figura, etc.), es diu que treballem en **el pla**.

Si treballem en tres dimensions, es diu que treballem en **l'espai**.

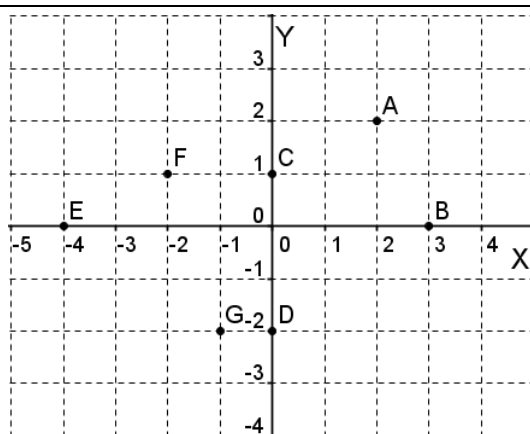
En aquest tema, estudiarem vectors i rectes en dues dimensions, és a dir, en el pla.

Punts del pla

El pla està format per un conjunt infinit de punts.

Recordem que, en un **sistema de coordenades cartesianes**, la posició de cada punt del pla és determinada per dues coordenades (x,y), anomenades abscissa (x) i ordenada (y).

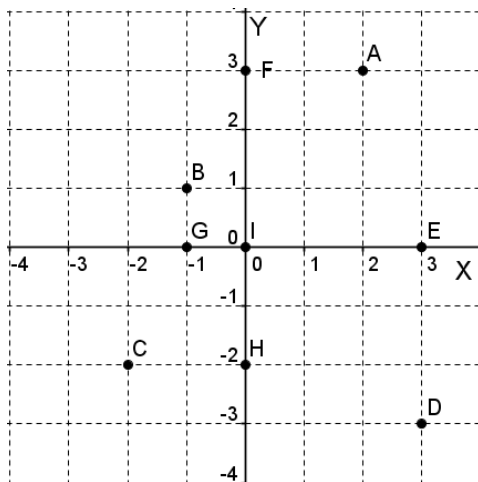
Exemple: Escriu les coordenades dels punts representats en els eixos de coordenades següents:



A(2,2)
B(3,0)
C(0,1)
D(0,-2)
E(-4,0)
F(-2,1)
G(-1,-2)

Exercicis:

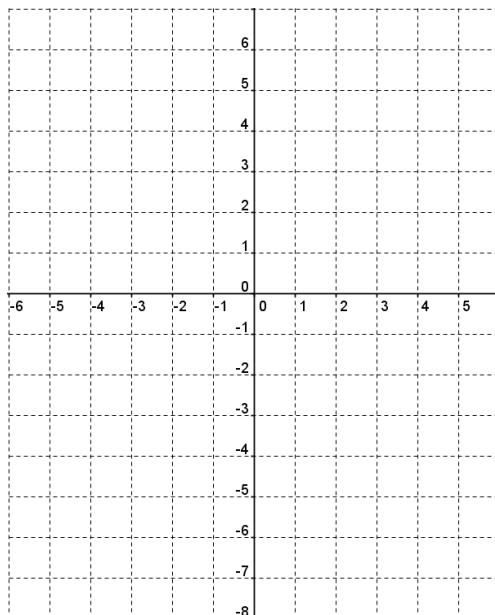
1. Escriu les coordenades dels punts següents:



VECTORS EN EL PLA

2. Representa els punts donats en uns eixos de coordenades:

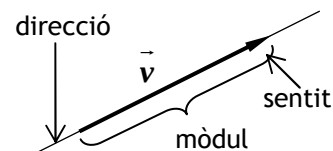
$A(1,5)$; $B(4,3)$; $C(0,6)$; $D(-5,2)$; $E(-1,3)$; $F(-4,0)$; $G(-3,-7)$; $H(-1,-5)$; $I(0,-3)$; $J(5,-1)$; $K(2,-4)$; $L(1,0)$; $O(0,0)$.



Definició de vector

Un **vector lliure** ($\vec{v}$) és un segment orientat (una fletxa) determinat pels elements següents:

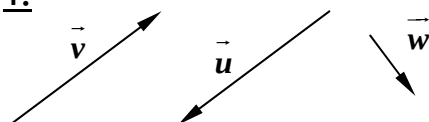
- El seu **mòdul** ($|\vec{v}|$): la longitud del segment.
- La seva **direcció**: la de la recta sobre la qual es troba.
- El seu **sentit**: el que indica la fletxa (cada direcció té dos sentits).



Els vectors lliures es representen per lletres minúscules amb una fletxa a sobre ($\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}, \vec{a} \dots$).

Exemples:

1.



Mòdul: $|\vec{v}| = |\vec{u}| = 2,5 \text{ cm}$; $|\vec{w}| = 1 \text{ cm}$

Direcció i sentit:

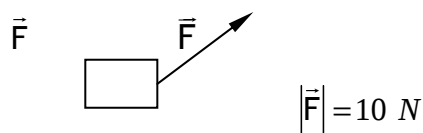
$\vec{v}$ i $\vec{u}$ tenen la mateixa direcció (la de la recta que forma $36,9^\circ$ amb l'horitzontal) i sentits oposats.

$\vec{w}$ està sobre una recta que forma $53,1^\circ$ amb l'horitzontal.

VECTORS EN EL PLA

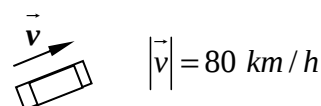
2. Hi ha magnituds físiques (com ara la velocitat, la força, l'acceleració, etc.) que no queden ben determinades donant únicament un nombre, cal donar-ne també la direcció i el sentit. Per representar aquestes magnituds, anomenades **magnituds vectorials**, es fan servir vectors. El vector ens informa de la intensitat (mòdul), la direcció i el sentit de la magnitud. Vegem-ne dos exemples:

a) Sobre un objecte s'aplica una força



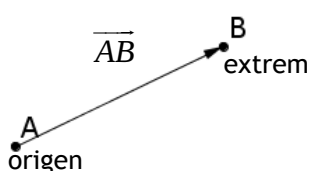
El vector força ens indica la intensitat de la força (mòdul del vector = 10 Newtons), la direcció i el sentit en què s'aplica la força.

b) Un cotxe va a una velocitat $\vec{v}$



El vector velocitat ens indica la velocitat (mòdul del vector = 80 km/h) i la direcció i el sentit del moviment.

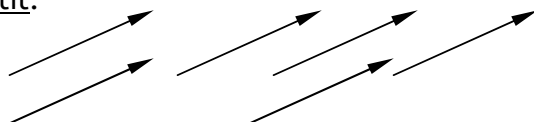
Quan un vector uneix dos punts A i B del pla, anant de A a B (amb la punta de la fletxa en B), s'anomena **vector fix d'origen A i extrem B**. Es representa amb $\overrightarrow{AB}$.



- El mòdul del vector $\overrightarrow{AB}$ és la longitud del segment AB.
- La direcció de $\overrightarrow{AB}$ és la de la recta que passa per A i B.
- $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BA}$ tenen la mateixa direcció i sentits oposats.

Vectors equipol·lents (o equivalents)

Dos o més vectors fixos són **equipol·lents** si tenen el mateix mòdul, la mateixa direcció i el mateix sentit.



Tots els vectors fixos equipol·lents a un vector donat representen el mateix **vector lliure**, independentment d'on estiguin situats. Hi ha infinits vectors equipol·lents a un vector donat, i s'obtenen movent aquest vector paral·lelament en el pla.

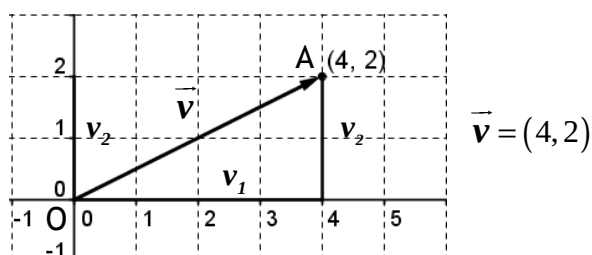
Components d'un vector

Els components cartesianes (o coordenades cartesianes) d'un vector lliure $\vec{v}$ són les coordenades de l'extrem del vector, quan situem l'origen del vector en l'origen de coordenades (O) d'uns eixos cartesianes. Coincideixen amb les projeccions ortogonals del vector sobre els eixos de coordenades.

A partir d'ara, quan parlem dels components d'un vector, ens referirem als components cartesianes.

Escrivim els components d'un vector $\vec{v}$ de la manera següent: $\vec{v} = (v_1, v_2)$.

Exemple:

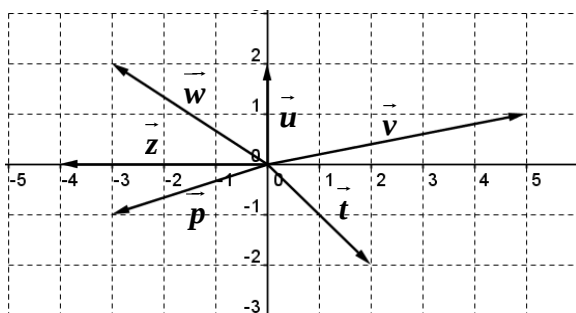


Nota:

El vector $\vec{OA}$, que té per origen l'origen de coordenades i per extrem el punt A, s'anomena **vector de posició del punt A**.

Els components de $\vec{OA}$ coincideixen amb les coordenades del punt A.

Exercici: Escribe els components dels vectors següents:



$\vec{v} =$

$\vec{z} =$

$\vec{u} =$

$\vec{p} =$

$\vec{w} =$

$\vec{t} =$

Nota: Els vectors horitzontals i verticals tenen un component igual a zero.

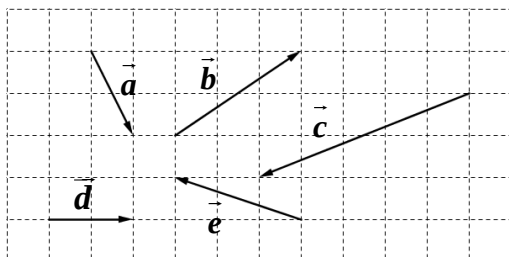
També podem interpretar els components d'un vector $\vec{v}$ com els moviments, en la direcció dels eixos, per anar del punt origen al punt extrem del vector:

o $v_1 \rightarrow$ moviment en la direcció de l'eix OX $\left\{ \begin{array}{l} \text{- positiu cap a la dreta} \\ \text{- negatiu cap a l'esquerra} \end{array} \right.$

VECTORS EN EL PLA

o $v_2 \rightarrow$ moviment en la direcció de l'eix OY $\left\{ \begin{array}{l} \text{- positiu cap amunt} \\ \text{- negatiu cap avall} \end{array} \right.$

Exemples:



$\vec{a} = (1, -2) \rightarrow 1$ cap a la dreta, 2 cap avall.

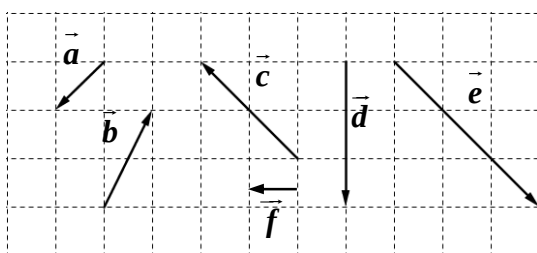
$\vec{b} = (3, 2) \rightarrow 3$ cap a la dreta, 2 cap amunt.

$\vec{c} = (-5, -2) \rightarrow 5$ cap a l'esquerra, 2 cap avall.

$\vec{d} = (2, 0) \rightarrow 2$ cap a la dreta.

$\vec{e} = (-3, 1) \rightarrow 3$ cap a l'esquerra, 1 cap amunt.

Exercici: Escribe els components dels vectors següents:



$\vec{a} =$

$\vec{b} =$

$\vec{c} =$

$\vec{d} =$

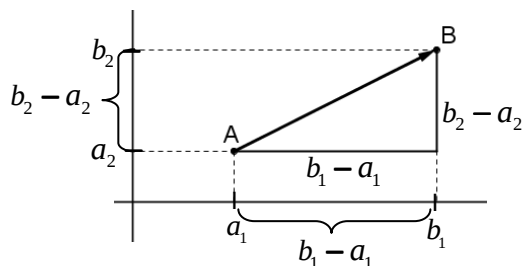
$\vec{e} =$

$\vec{f} =$

Càlcul dels components d'un vector fix

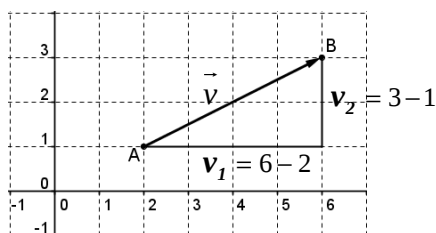
Els components del vector $\overrightarrow{AB}$ es calculen restant a les coordenades de l'extrem B les coordenades de l'origen A :

$$\left. \begin{array}{l} A(a_1, a_2) \\ B(b_1, b_2) \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)} \\ \text{(extrem - origen)}$$



Exemples:

1. Donats els punts $A(2,1)$ i $B(6,3)$, calcula els components del vector $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.



$$\left. \begin{array}{l} A(2,1) \\ B(6,3) \end{array} \right\} \rightarrow \vec{v} = \overrightarrow{AB} = (6 - 2, 3 - 1) = (4, 2) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (4, 2)$$

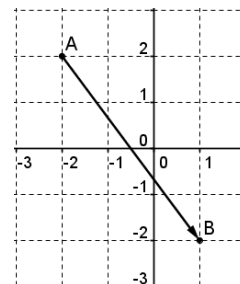
VECTORS EN EL PLA

2. Calcula l'extrem del vector $\overrightarrow{AB} = (3, -4)$, sabent que l'origen és el punt $A(-2, 2)$.

Comprova-ho gràficament:

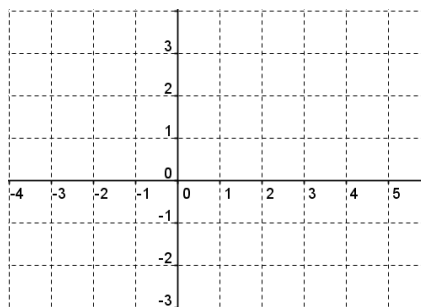
$$\left. \begin{array}{l} A(-2, 2) \\ B(x, y) \end{array} \right\} \rightarrow \overrightarrow{AB} = (3, -4) = (x - (-2), y - 2) = (x + 2, y - 2)$$

$$\rightarrow \begin{cases} 3 = x + 2 \rightarrow x = 3 - 2 = 1 \rightarrow x = 1 \\ -4 = y - 2 \rightarrow y = -4 + 2 = -2 \rightarrow y = -2 \end{cases} \rightarrow B(1, -2)$$



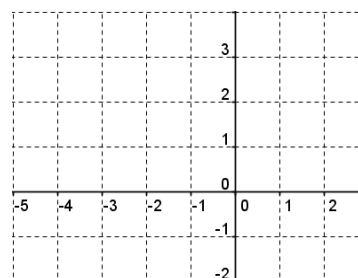
Exercicis:

1. Donats els punts $A(1, 1)$, $B(6, 3)$, $C(-1, 3)$, $D(-3, 1)$, $E(3, 1)$, $F(4, -2)$, $G(-1, -2)$, $H(-3, -2)$; calcula, analíticament, els components dels vectors: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{GH}$. Comprova-ho gràficament.



2. Calcula l'origen del vector $\overrightarrow{AB} = (3, -4)$, sabent que l'extrem és el punt $B(-2, 2)$.

Comprova-ho gràficament:



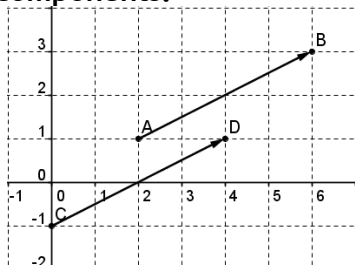
Sol.: 1. $\overrightarrow{AB} = (5, 2)$; $\overrightarrow{CD} = (-2, -2)$; $\overrightarrow{EF} = (1, -3)$; $\overrightarrow{GH} = (-2, 0)$ **2.** $A(-5, 6)$

VECTORS EN EL PLA

Dos vectores fijos equipol·lents tenen els mateixos components:

Exemples:

- 1.** Comprova que els dos vectors equipol·lents del gràfic següent tenen els mateixos components:



$$\left. \begin{array}{l} A(2,1) \\ B(6,3) \end{array} \right\} \rightarrow \overrightarrow{AB} = (6-2, 3-1) = (4, 2) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (4, 2)$$

$$\left. \begin{array}{l} C(0,-1) \\ D(4,1) \end{array} \right\} \rightarrow \overrightarrow{CD} = (4-0, 1-(-1)) = (4, 2) \rightarrow \overrightarrow{CD} = (4, 2)$$

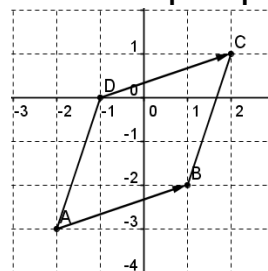
- 2.** Donats els punts $A(-2,-3)$, $B(1,-2)$ i $C(2,1)$, troba les coordenades d'un quart punt D , sabent que $ABCD$ és un paral·lelogram.

Perquè $ABCD$ sigui un paral·lelogram $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$:

$$\left. \begin{array}{l} A(-2,-3) \\ B(1,-2) \end{array} \right\} \rightarrow \overrightarrow{AB} = (1-(-2), -2-(-3)) = (3, 1)$$

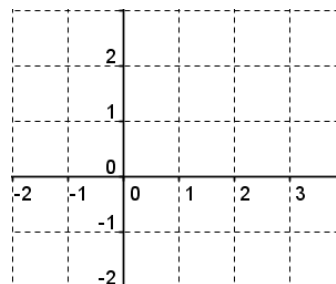
$$\left. \begin{array}{l} D(x, y) \\ C(2, 1) \end{array} \right\} \rightarrow \overrightarrow{DC} = (2-x, 1-y)$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \rightarrow (3, 1) = (2-x, 1-y) \rightarrow \begin{cases} 3 = 2-x \rightarrow x = 2-3 = -1 \rightarrow x = -1 \\ 1 = 1-y \rightarrow y = 1-1 = 0 \rightarrow y = 0 \end{cases} \rightarrow D(-1, 0)$$



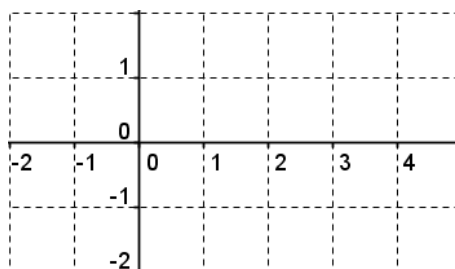
Exercicis:

- 1.** Donats els punts $A(-1,0)$, $B(1,2)$, $C(1,-1)$ i $D(3,1)$, comprova analíticament i gràficament que $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ són equipol·lents.



VECTORS EN EL PLA

2. Donats els punts $A(-1,-1)$, $B(1,1)$ i $C(4,1)$, troba, analíticament, les coordenades d'un quart punt D, sabent que ABCD és un paral·lelogram. Comprova-ho gràficament.



Sol.: 1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = (2, 2)$ 2. $D(2, -1)$

Càlcul del mòdul d'un vector a partir dels seus components

En la *figura 1*, veiem que el mòdul d'un vector és la longitud de la hipotenusa d'un triangle rectangle que té per catets els components del vector. Aleshores, per calcular el mòdul d'un vector coneguts els seus components, apliquem el teorema de Pitàgores.

$$\vec{v} = (v_1, v_2) \rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

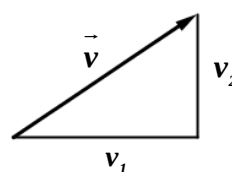


figura 1

Exemple: Calcula el mòdul del vector $\vec{v} = (-5, 3)$.

$$\vec{v} = (-5, 3) \rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{(-5)^2 + 3^2} = \sqrt{34}$$

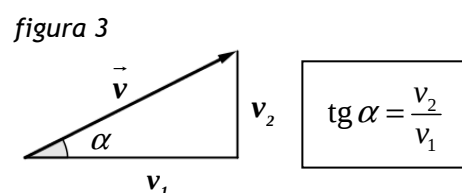
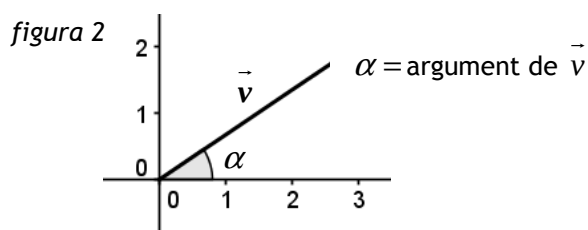
Exercici: Calcula el mòdul del vector $\vec{v} = (-1, 8)$

Sol.: $\sqrt{65}$

Argument d'un vector

L'argument α d'un vector lliure $\vec{v}$ és l'angle que forma el vector amb la part positiva de l'eix OX, quan situem l'origen del vector en l'origen de coordenades (figura 2). Mesurem l'angle en sentit directe o positiu (sentit contrari al de les agulles del rellotge), des de l'eix OX.

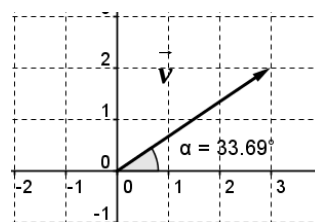
Tal com podem observar en la figura 3, per calcular l'argument α d'un vector a partir dels seus components, utilitzem la fórmula de la tangent de α .



Exemple: Calcula l'argument dels vectors $\vec{v} = (3,2)$ i $\vec{w} = (-3,3)$.

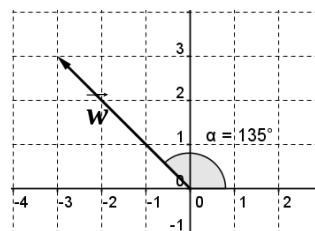
$$\vec{v} = (3,2) \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{v_2}{v_1} = \frac{2}{3} = 0,6$$

$$\rightarrow \alpha = \begin{cases} 33,69^\circ \\ 33,69^\circ + 180 = 213,69 \end{cases}$$



$$\vec{w} = (-3,3) \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{v_2}{v_1} = \frac{3}{-3} = -1$$

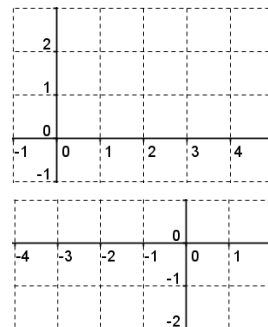
$$\rightarrow \alpha = \begin{cases} -45^\circ = 315^\circ \\ -45^\circ + 180^\circ = 135^\circ \end{cases}$$



Nota: Recordem que hi ha dos angles, α i $\alpha + 180^\circ$, que tenen la mateixa tangent. Per saber quin dels dos angles és el que busquem, hem de representar gràficament el vector i el seu argument.

VECTORS EN EL PLA

Exercici: Calcula l'argument dels vectors $\vec{v} = (2,2)$ i $\vec{w} = (-3,-1)$. Representa'ls gràficament.



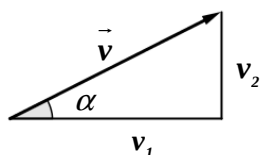
Sol.: 45° i $198,43^\circ$

Forma polar d'un vector

Un vector lliure $\vec{v}$ pot venir determinat pel seu mòdul i el seu argument α . En aquests casos, s'expressa en la **forma polar**, que és del tipus:

$$\boxed{|\vec{v}|_\alpha} \rightarrow \text{Forma polar de } \vec{v}$$

Per calcular els components d'un vector a partir de la seva forma polar, utilitzem la trigonometria, tal com s'indica a continuació:



$$\cos \alpha = \frac{v_1}{|\vec{v}|} \rightarrow v_1 = |\vec{v}| \cdot \cos \alpha \quad \sin \alpha = \frac{v_2}{|\vec{v}|} \rightarrow v_2 = |\vec{v}| \cdot \sin \alpha$$

Exemple: Calcula els components del vector $\vec{v} = 5_{30^\circ}$

$$\vec{v} = (5 \cos 30^\circ, 5 \sin 30^\circ) = \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2} \right) \approx (4'33, 2'5)$$

Exercici: Calcula els components del vector $\vec{v} = 2_{225^\circ}$

Sol.: $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \approx (-1'41, -1'41)$

Operacions amb vectors

Podem operar amb vectors gràficament (dibuixant-los) o analíticament (operant amb components).

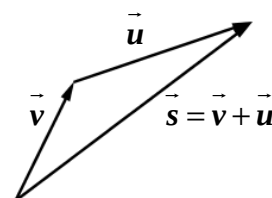
Suma de vectors

Gràficament

Quan col·loquem un vector a continuació d'un altre (l'origen d'un d'ells en l'extrem de l'altre), el vector que va de l'origen del primer a l'extrem del segon és el vector suma d'aquests dos vectors.

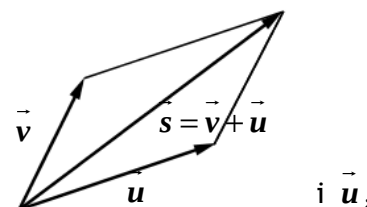
Així, per sumar dos vectors, $\vec{v}$ i $\vec{u}$, gràficament, procedim de la manera següent:

- Col·loquem l'origen del vector $\vec{u}$ en l'extrem del vector $\vec{v}$.
- Dibuixem el vector suma $\vec{s} = \vec{v} + \vec{u}$, que és el vector que té per origen l'origen de $\vec{v}$ i per extrem l'extrem de $\vec{u}$.



Regla del paral·lelogram

Si dibuixem els vectors $\vec{v}$ i $\vec{u}$ amb origen en un punt comú i completem el paral·lelogram que té per costats consecutius $\vec{v}$ i $\vec{u}$, el vector suma $\vec{s} = \vec{v} + \vec{u}$ és el vector que té el mateix origen que $\vec{v}$ i coincideix amb una diagonal del paral·lelogram.



Analíticament

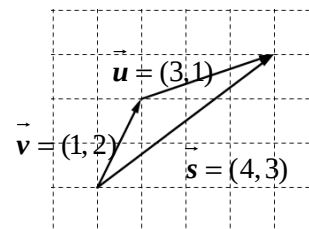
Per sumar dos vectors, $\vec{v}$ i $\vec{u}$, amb components, se sumen els components de la manera següent:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} = (v_1, v_2) \\ \vec{u} = (u_1, u_2) \end{array} \right\} \rightarrow \vec{s} = \vec{v} + \vec{u} = \boxed{(v_1, v_2) + (u_1, u_2) = (v_1 + u_1, v_2 + u_2)}$$

VECTORS EN EL PLA

Exemple: Donats els vectors $\vec{v} = (1,2)$ i $\vec{u} = (3,1)$, calcula $\vec{v} + \vec{u}$, analíticament i gràficament. Comprova que et surt el mateix resultat.

$$\vec{s} = \vec{v} + \vec{u} = (1,2) + (3,1) = (1+3, 2+1) = \boxed{(4,3)}$$



Exercici: Donats els vectors $\vec{v} = (4,-1)$ i $\vec{u} = (-1,-2)$, calcula $\vec{v} + \vec{u}$, analíticament i gràficament. Comprova que et surt el mateix resultat.



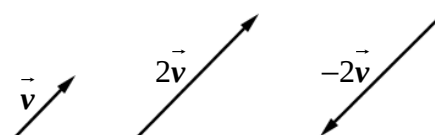
Sol.: (3,-3)

Multiplicació d'un vector per un nombre real

Gràficament

Donat un vector $\vec{v}$ i un nombre real k , el **vector producte de k per $\vec{v}$** , $k \cdot \vec{v}$, és un altre vector que té el mòdul, la direcció i el sentit següents:

- Mòdul: el mòdul de $\vec{v}$ multiplicat per $|k|$.
- Direcció: la mateixa que $\vec{v}$.
- Sentit:
 - el mateix sentit que $\vec{v}$, si k és positiu.
 - sentit oposat al de $\vec{v}$, si k és negatiu.



Es representa amb $k\vec{v}$ (s'omet el punt que fa de signe de multiplicar).

Analíticament

Els components de $k\vec{v}$ s'obtenen multiplicant per k els components de $\vec{v}$:

$$\vec{v} = (v_1, v_2) \rightarrow k\vec{v} = \boxed{k(v_1, v_2) = (k \cdot v_1, k \cdot v_2)}$$

VECTORS EN EL PLA

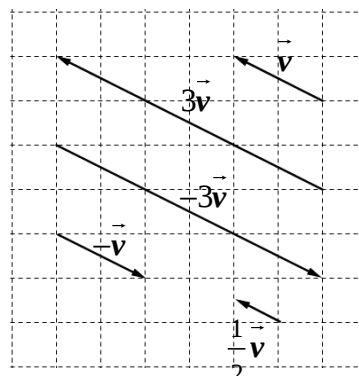
Exemple: Donat el vector $\vec{v} = (-2, 1)$, calcula $3\vec{v}$, $-3\vec{v}$, $\frac{1}{2}\vec{v}$ i $-\vec{v}$. Fes-ho analíticament i gràficament i comprova que et surt el mateix resultat.

$$3\vec{v} = 3 \cdot (-2, 1) = (3 \cdot (-2), 3 \cdot 1) = (-6, 3) \rightarrow \boxed{3\vec{v} = (-6, 3)}$$

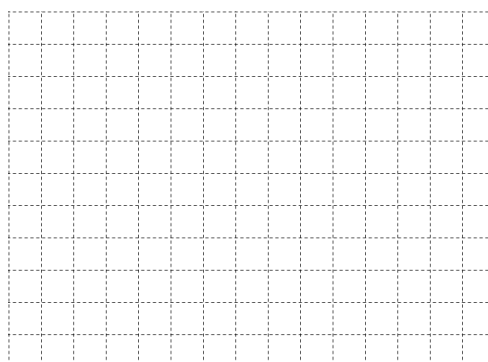
$$-3\vec{v} = -3 \cdot (-2, 1) = (-3 \cdot (-2), -3 \cdot 1) = (6, -3) \rightarrow \boxed{-3\vec{v} = (6, -3)}$$

$$\frac{1}{2}\vec{v} = \frac{1}{2} \cdot (-2, 1) = \left(\frac{1}{2} \cdot (-2), \frac{1}{2} \cdot 1\right) = \left(-1, \frac{1}{2}\right) \rightarrow \boxed{\frac{1}{2}\vec{v} = \left(-1, \frac{1}{2}\right)}$$

$$-\vec{v} = -1 \cdot (-2, 1) = (-1 \cdot (-2), -1 \cdot 1) = (2, -1) \rightarrow \boxed{-\vec{v} = (2, -1)}$$



Exercici: Donat el vector $\vec{v} = (4, -2)$, calcula $2\vec{v}$, $-3\vec{v}$, $-\frac{1}{4}\vec{v}$ i $-\vec{v}$, analíticament i gràficament.



Sol.: (8, -4); (-12, 6); (-1, 1/2); (-4, 2)

Nota: El vector $-\vec{v}$ s'anomena **vector oposat** a $\vec{v}$ i té: el mateix mòdul que $\vec{v}$, la mateixa direcció que $\vec{v}$ i el sentit contrari al de $\vec{v}$.

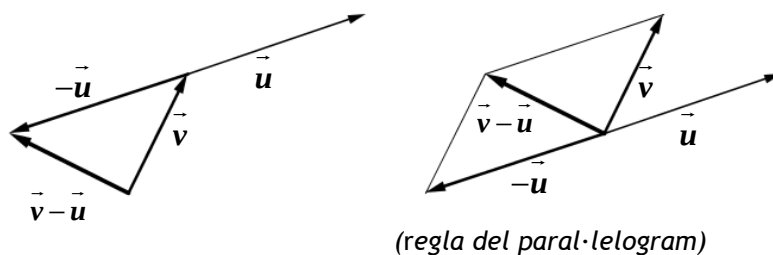
Resta de vectors

Gràficament

Per fer la resta de dos vectors $\vec{v} - \vec{u}$, sumem al vector $\vec{v}$ l'oposat del vector $\vec{u}$:

$$\boxed{\vec{v} - \vec{u} = \vec{v} + (-\vec{u})}$$

Gràficament, construïm el vector $-\vec{u}$ i el sumem al vector $\vec{v}$. Ho podem fer dibuixant un vector a continuació de l'altre o utilitzant la regla del paral·lelogram:



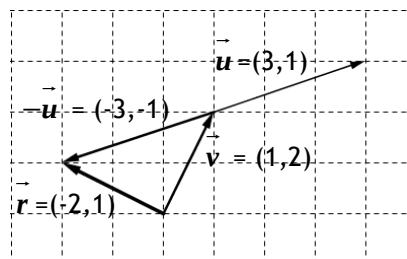
Analíticament

Per restar dos vectors amb components, es resten els components de la manera següent:

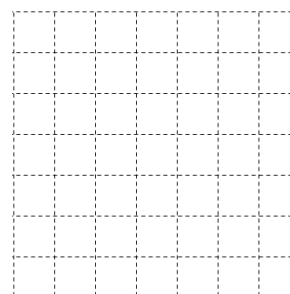
$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} = (v_1, v_2) \\ \vec{u} = (u_1, u_2) \end{array} \right\} \rightarrow \vec{s} = \vec{v} - \vec{u} = \boxed{(v_1, v_2) - (u_1, u_2) = (v_1 - u_1, v_2 - u_2)}$$

Exemple: Donats els vectors $\vec{v} = (1, 2)$ i $\vec{u} = (3, 1)$, calcula $\vec{v} - \vec{u}$, analíticament i gràficament. Comprova que et surt el mateix resultat.

$$\vec{r} = \vec{v} - \vec{u} = (1, 2) - (3, 1) = (1 - 3, 2 - 1) = \boxed{(-2, 1)}$$



Exercici: Donats els vectors $\vec{v} = (4, -3)$ i $\vec{u} = (-1, -2)$, calcula $\vec{v} - \vec{u}$, analíticament i gràficament. Comprova que et surt el mateix resultat.



Sol.: (5-1)

VECTORS EN EL PLA

Combinació lineal de dos vectors

Anomenem **combinació lineal de dos vectors** $\vec{v}$ i $\vec{w}$ una expressió del tipus:

$\boxed{k_1 \vec{v} + k_2 \vec{u}}$ on k_1 i k_2 són dos nombres reals.

Gràficament

Per **realitzar gràficament la combinació lineal** $k_1 \vec{v} + k_2 \vec{u}$, dibuixem els vectors $k_1 \cdot \vec{v}$ i $k_2 \cdot \vec{u}$ (un a continuació de l'altre o amb l'origen en un punt comú, si volem utilitzar la regla del paral·lelogram) i els sumem.

Analíticament

Per **fer la combinació lineal en components**, fem primer els productes i després la suma. També podem fer la combinació lineal dels components directament:

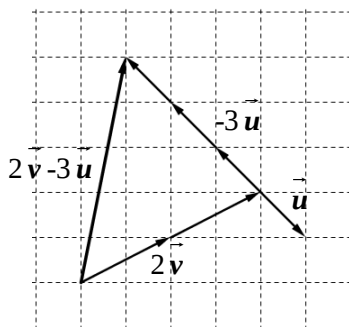
$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} = (v_1, v_2) \\ \vec{u} = (u_1, u_2) \end{array} \right\} \rightarrow k_1 \vec{v} + k_2 \vec{u} = (k_1 \cdot v_1, k_1 \cdot v_2) + (k_2 \cdot u_1, k_2 \cdot u_2) = \boxed{(k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot u_1, k_1 v_2 + k_2 \cdot u_2)}$$

Exemple: Donats els vectors $\vec{v} = (2, 1)$ i $\vec{u} = (1, -1)$, calcula $2\vec{v} - 3\vec{u}$ analíticament i gràficament i comprova que et surt el mateix resultat.

$$2\vec{v} - 3\vec{u} = 2 \cdot (2, 1) - 3 \cdot (1, -1) = (4, 2) + (-3, 3) = (4 - 3, 2 + 3) = \boxed{(1, 5)}$$

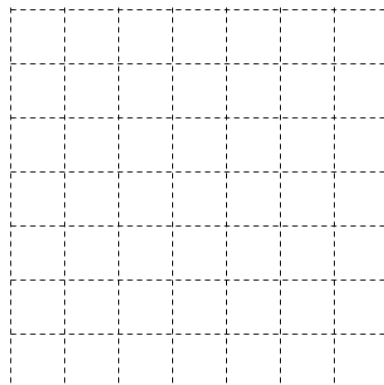
O bé, fent directament la combinació lineal dels components:

$$2\vec{v} - 3\vec{u} = 2 \cdot (2, 1) - 3 \cdot (1, -1) = (2 \cdot 2 - 3 \cdot 1, 2 \cdot 1 - 3 \cdot (-1)) = (4 - 3, 2 + 3) = \boxed{(1, 5)}$$



VECTORS EN EL PLA

Exercici: Donats els vectors $\vec{v} = (-3, 1)$ i $\vec{u} = (-1, 2)$, calcula $-\vec{v} + 2\vec{u}$ analíticament i gràficament i comprova que et surt el mateix resultat.



Sol.: (1,3)

Operacions combinades

Vegem exemples de com es realitzen, analíticament, operacions combinades amb vectors:

Exemple: Donats els vectors $\vec{v} = (-1, 5)$, $\vec{u} = (-6, -3)$ i $\vec{w} = (1, 4)$, calcula:

a) $2\vec{v} - 5\vec{u}$

b) $-\vec{v} - \frac{2}{3}\vec{u} + 3\vec{w}$

c) $\vec{w} - 2 \cdot (\vec{v} - \vec{u})$

$$\text{a) } 2\vec{v} - 5\vec{u} = 2 \cdot (-1, 5) - 5 \cdot (-6, -3) = (-2, 10) + (30, 15) = (-2 + 30, 10 + 15) = \boxed{(28, 25)}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } -\vec{v} - \frac{2}{3}\vec{u} + 3\vec{w} &= -(-1, 5) - \frac{2}{3} \cdot (-6, -3) + 3 \cdot (1, 4) = (1, -5) + (4, 2) + (3, 12) = \\ &= (1 + 4 + 3, -5 + 2 + 12) = \boxed{(8, 9)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \vec{w} - 2 \cdot (\vec{v} - \vec{u}) &= (1, 4) - 2 \cdot ((-1, 5) - (-6, -3)) = (1, 4) - 2 \cdot (-1 + 6, 5 + 3) = (1, 4) - 2 \cdot (5, 8) = \\ &= (1, 4) + (-10, -16) = (1 - 10, 4 - 16) = \boxed{(-9, -12)} \end{aligned}$$

VECTORS EN EL PLA

Exercici: Donats els vectors $\vec{v} = (2, -4)$, $\vec{u} = (-1, 6)$ i $\vec{w} = (-3, -4)$, calcula:

a) $3\vec{v} - 2\vec{u} =$

b) $\frac{5}{2}\vec{v} - \vec{u} - 4\vec{w} =$

c) $2\vec{u} - (\vec{v} - \vec{w}) =$

Sol.: a) (8, -24) b) (18, 0) c) (-7, 12)

Vectors paral·lels o proporcionals

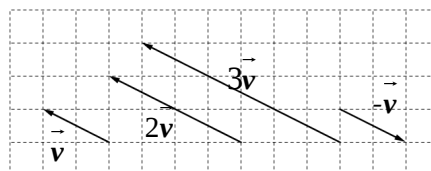
Diem que dos vectors són **paral·lels o proporcionals** quan tenen la mateixa direcció.



Per **calcular un vector paral·lel a un vector donat $\vec{v}$** , només cal multiplicar $\vec{v}$ per un nombre k qualsevol, ja que $\vec{v}$ i $k\vec{v}$ tenen la mateixa direcció (quan multipliquem un vector per un nombre es manté la direcció):

Exemple: Donat el vector $\vec{v} = (-2, 1)$, troba tres vectors paral·lels a $\vec{v}$.

- Multipliquem $\vec{v}$ per 2: $2\vec{v} = 2 \cdot (-2, 1) = \boxed{(-4, 2)}$
- Multipliquem $\vec{v}$ per 3: $3\vec{v} = 3 \cdot (-2, 1) = \boxed{(-6, 3)}$
- Multipliquem $\vec{v}$ per -1: $-\vec{v} = -1 \cdot (-2, 1) = \boxed{(2, -1)}$



VECTORS EN EL PLA

Exercici: Donat el vector $\vec{v} = (-2, 3)$, troba tres vectors paral·lels a $\vec{v}$.

Sol.: Infinites. Per exemple: $(-4, 6)$; $(-6, 9)$; $(2, -3)$

De la mateixa manera, dos vectors $\vec{v}$ i $\vec{u}$ són paral·lels si existeix un nombre real k que verifiqui que $\vec{v} = k\vec{u}$.

Així, si dos vectors $\vec{v} = (v_1, v_2)$ i $\vec{u} = (u_1, u_2)$ són paral·lels:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} = (v_1, v_2) \\ \vec{u} = (u_1, u_2) \\ \text{paral·lels} \end{array} \right\} \rightarrow \vec{v} = k\vec{u} \rightarrow (v_1, v_2) = k \cdot (u_1, u_2) \rightarrow (v_1, v_2) = (k \cdot u_1, k \cdot u_2)$$

$$\rightarrow \begin{cases} v_1 = k \cdot u_1 \\ v_2 = k \cdot u_2 \end{cases} \rightarrow \boxed{k = \frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2}}$$

Per tant, dos vectors són paral·lels si el quocient dels seus primers components és igual al quocient dels seus segons components, és a dir, si els seus components són proporcionals.

Quan dos vectors són paral·lels, diem també que són **linealment dependents**. Si no són paral·lels, diem que són **linealment independents**.

Exemple: Esbrina si els parells de vectors següents són paral·lels:

a) $\vec{v} = (-6, 2)$ i $\vec{u} = (-9, 3)$

$$\frac{-6}{-9} = \frac{2}{3} = 0,6 \rightarrow \text{són paral·lels}$$

b) $\vec{w} = (-10, -8)$ i $\vec{z} = (5, -4)$

$$\frac{-10}{5} = -2 \neq \frac{-8}{-4} = 2 \rightarrow \text{no són paral·lels}$$

Exercici: Esbrina si els parells de vectors següents són paral·lels:

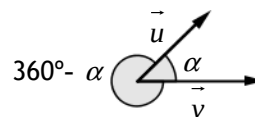
a) $\vec{v} = (-10, 5)$ i $\vec{u} = (4, -2)$

b) $\vec{w} = (-2, 5)$ i $\vec{z} = (3, -8)$

Sol.: a) són paral·lels b) no són paral·lels

Producte escalar de dos vectors

Si fem coincidir els orígens de dos vectors lliures $\vec{v}$ i $\vec{u}$, observem que formen dos angles, α i $360^\circ - \alpha$. Definim l'angle que formen dos vectors $\vec{v}$ i $\vec{u}$ com el més petit d'aquests dos angles.



S'anomena **producte escalar de dos vectors** $\vec{v}$ i $\vec{u}$, i es

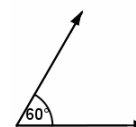
representa amb $\vec{v} \cdot \vec{u}$, el nombre real que s'obté de fer les operacions següents:

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos \alpha$$

on α és l'angle que formen els dos vectors (per mesurar α es fan coincidir els orígens dels vectors)

Exemple: Calcula el producte escalar de dos vectors $\vec{v}$ i $\vec{u}$ sabent que formen un angle de 60° i que els seus mòduls són: $|\vec{v}|=5$ i $|\vec{u}|=8$.

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos \alpha = 5 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ = \boxed{20}$$



Exercici: Calcula el producte escalar de dos vectors $\vec{v}$ i $\vec{u}$ sabent que formen un angle de 35° i que els seus mòduls són: $|\vec{v}|=3$ i $|\vec{u}|=4$.

Sol.: 9,83

Càlcul del producte escalar amb components

Normalment, no coneixem l'angle que formen dos vectors, però sí que coneixem els seus components. El producte escalar de dos vectors $\vec{v}$ i $\vec{u}$ es pot calcular amb components de la manera següent:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} = (v_1, v_2) \\ \vec{u} = (u_1, u_2) \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{\vec{v} \cdot \vec{u} = v_1 \cdot u_1 + v_2 \cdot u_2}$$

Exemple: Calcula el producte escalar dels vectors $\vec{v} = (-6, 9)$ i $\vec{u} = (2, -4)$.

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = (-6, 9) \cdot (2, -4) = -6 \cdot 2 + 9 \cdot (-4) = -12 - 36 = \boxed{-48}$$

VECTORS EN EL PLA

Exercici: Calcula el producte escalar dels vectors $\vec{v} = (-1, -3)$ i $\vec{u} = (4, -1)$.

Sol.: -1

Càlcul de l'angle que formen dos vectors

Per calcular l'angle α que formen dos vectors, aïllem $\cos \alpha$ de la fórmula del producte escalar i substituïm $\vec{v} \cdot \vec{u}$ per l'expressió que calcula el producte escalar amb components. Una vegada obtingut $\cos \alpha$, podem calcular α utilitzant la tecla $\cos^{-1}$ de la calculadora (la calculadora ens dóna la més petita de les dues solucions possibles, que és la que ens interessa).

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{v_1 \cdot u_1 + v_2 \cdot u_2}{|\vec{v}| \cdot |\vec{u}|}$$

Exemple: Calcula l'angle que formen els vectors $\vec{v} = (-1, 3)$ i $\vec{u} = (2, 3)$.

$$\cos \alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{v_1 \cdot u_1 + v_2 \cdot u_2}{|\vec{v}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{-1 \cdot 2 + 3 \cdot 3}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{7}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{13}} = \frac{7}{\sqrt{130}} \rightarrow \alpha = 52,13^\circ$$

Exercici: Calcula l'angle que formen els vectors $\vec{v} = (2, -5)$ i $\vec{u} = (-3, 4)$.

Sol.: $\alpha = 164,93^\circ$

Vectors perpendiculars o ortogonals

Dos vectors, $\vec{v}$ i $\vec{u}$, són perpendiculars o ortogonals si formen un angle recte. Es representa amb $\vec{v} \perp \vec{u}$.

VECTORS EN EL PLA

Com que $\cos 90^\circ = 0$, si dos vectors són perpendiculars, el seu producte escalar és igual a 0:

$$\text{Si } \vec{v} \perp \vec{u} \rightarrow \vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos \alpha = |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos 90^\circ = |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cdot 0 = 0 \rightarrow \boxed{\vec{v} \cdot \vec{u} = 0}$$

D'altra banda, si el producte escalar de dos vectors no nuls és 0, aleshores $\cos \alpha = 0$ i, per tant, $\alpha = 90^\circ$ i els vectors són perpendiculars:

$$\text{Si } \vec{v} \cdot \vec{u} = 0 \rightarrow |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos \alpha = 0 \rightarrow \cos \alpha = 0 \rightarrow \alpha = 90^\circ \rightarrow \boxed{\vec{v} \perp \vec{u}}$$

Exemple: Esbrina si els parells de vectors següents són perpendiculars:

a) $\vec{v} = (-3, 5)$ i $\vec{u} = (15, 9)$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = (-3, 5) \cdot (15, 9) = -3 \cdot 15 + 5 \cdot 9 = -45 + 45 = \boxed{0} \rightarrow \text{són perpendiculars}$$

b) $\vec{w} = (-4, 2)$ i $\vec{z} = (3, 4)$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = (-4, 2) \cdot (3, 4) = -4 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = -12 + 8 = \boxed{-4} \neq 0 \rightarrow \text{no són perpendiculars}$$

Exercici: Esbrina si els parells de vectors següents són perpendiculars:

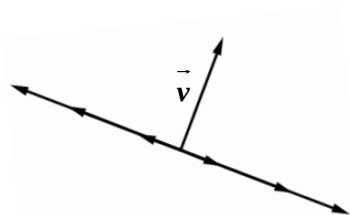
a) $\vec{v} = (2, -7)$ i $\vec{u} = (-1, 4)$

b) $\vec{w} = (-1, 6)$ i $\vec{z} = (6, 1)$.

Sol.: a) no b) sí

Càlcul de vectors perpendiculars a un vector donat

Hi ha infinits vectors perpendiculars a un vector donat.



En la figura de l'esquerra veiem sis vectors perpendiculars a un vector $\vec{v}$. De la mateixa

VECTORS EN EL PLA

Tanmateix, en el pla, només hi ha dos vectors perpendiculars a $\vec{v}$ i que tenen el mateix mòdul que $\vec{v}$.

Si $\vec{v} = (a, b)$, els vectors $(-b, a)$ i $(b, -a)$ són vectors perpendiculars a $\vec{v}$ i amb el mateix mòdul que $\vec{v}$:

$$\begin{array}{l} (a, b) \perp (-b, a) \\ (a, b) \perp (b, -a) \end{array} \quad |(a, b)| = |(-b, a)| = |(b, -a)|$$

Demostració:

$$(a, b) \cdot (-b, a) = a \cdot (-b) + b \cdot a = -a \cdot b + b \cdot a = 0 \rightarrow (a, b) \perp (-b, a)$$

$$(a, b) \cdot (b, -a) = a \cdot b + b \cdot (-a) = a \cdot b - b \cdot a = 0 \rightarrow (a, b) \perp (b, -a)$$

$$|(b, -a)| = \sqrt{b^2 + (-a)^2} = \sqrt{b^2 + a^2} = |(a, b)| \quad |(-b, a)| = \sqrt{(-b)^2 + a^2} = \sqrt{b^2 + a^2} = |(a, b)|$$

Exemple:

$$\text{Si } \vec{v} = (1, 2) \rightarrow \begin{cases} (-2, 1) \\ (2, -1) \end{cases} \text{ són perpendiculars a } \vec{v} = (1, 2)$$

Comprovació:

$$(1, 2) \cdot (-2, 1) = -2 + 2 = 0 \rightarrow (1, 2) \perp (-2, 1)$$

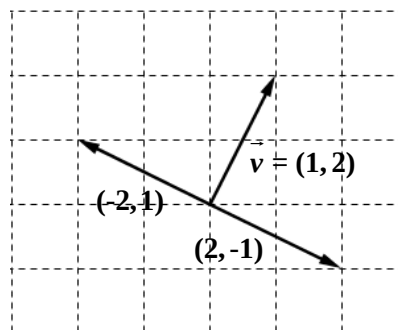
$$(1, 2) \cdot (2, -1) = 2 - 2 = 0 \rightarrow (1, 2) \perp (2, -1)$$

Calculem els seus mòduls:

$$|(1, 2)| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$|(-2, 1)| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$|(2, -1)| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$



Si el vector $\vec{u}$ és perpendicular a $\vec{v}$, qualsevol vector paral·lel a $\vec{u}$ també és perpendicular a $\vec{v}$:

$$\text{Si } \vec{v} \perp \vec{u} \rightarrow \vec{v} \perp \alpha \vec{u}$$

Així, per calcular un vector perpendicular a un vector del pla $\vec{v}$, hem d'invertir els components de $\vec{v}$ i canviar-ne un de signe. Si volem calcular més vectors perpendiculars, només hem de trobar vectors paral·lels a l'obtingut:

$$(a, b) \perp \alpha (-b, a)$$

VECTORS EN EL PLA

Exemple: Calcula cinc vectors perpendiculars al vector $\vec{v} = (-3, 5)$.

Els vectors següents són perpendiculars a $\vec{v}$:

$(5, 3)$; $(-5, -3)$; $(10, 6)$; $(15, 9)$; $(20, 12)$

Exercici: Calcula cinc vectors perpendiculars al vector $\vec{v} = (4, 3)$. Ho pots comprovar gràficament.

Aplicacions geomètriques dels vectors

Els vectors són molt útils per resoldre molts problemes geomètrics. Vegem-ne uns quants exemples:

Punt mitjà d'un segment

El punt mitjà, M , d'un segment AB és el punt que divideix el segment en dos segments de la mateixa longitud.

Fent servir vectors, es dedueix que cada coordenada del punt M és la semisuma de les coordenades corresponents dels punts A i B :

$$\left. \begin{array}{l} A(a_1, a_2) \\ B(b_1, b_2) \end{array} \right\} \rightarrow M \left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2} \right)$$



Demostració:

Si dibuixem els vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AM}$, observem que $\overrightarrow{AB} = 2 \cdot \overrightarrow{AM}$.

D'aquesta expressió podem aïllar les coordenades de M per expressar-les en funció de les coordenades de A i B :



$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = 2 \cdot \overrightarrow{AM} \\ A(a_1, a_2), B(b_1, b_2), M(x, y) \end{array} \right\} \rightarrow (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = 2 \cdot (x - a_1, y - a_2) \rightarrow \begin{cases} b_1 - a_1 = 2 \cdot (x - a_1) \\ b_2 - a_2 = 2 \cdot (y - a_2) \end{cases}$$

VECTORS EN EL PLA

$$\rightarrow \begin{cases} b_1 - a_1 = 2x - 2a_1 \rightarrow 2x = b_1 - a_1 + 2a_1 = b_1 + a_1 \rightarrow x = \frac{b_1 + a_1}{2} \\ b_2 - a_2 = 2y - 2a_2 \rightarrow 2y = b_2 - a_2 + 2a_2 = b_2 + a_2 \rightarrow y = \frac{b_2 + a_2}{2} \end{cases} \rightarrow M\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$$

Exemple: Calcula el punt mitjà del segment d'extrems $A(2,5)$ i $B(4,2)$.

$$M\left(\frac{2+4}{2}, \frac{5+2}{2}\right) \rightarrow M\left(\frac{6}{2}, \frac{7}{2}\right) \rightarrow M\left(3, \frac{7}{2}\right)$$

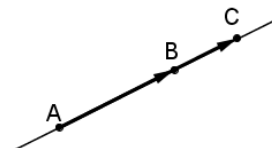
Exercici: Calcula el punt mitjà del segment d'extrems $A(1,-5)$ i $B(-8,-3)$.

$$\text{Sol.: } M\left(-\frac{7}{2}, -4\right)$$

Punts alineats

Diem que tres punts estan alineats quan pertanyen a una mateixa recta.

Des d'una perspectiva vectorial, **tres punts estan alineats** si, i només si, els vectors que uneixen aquests punts són paral·lels.



Així, per saber si tres punts A , B i C estan alineats, n'hi haurà prou de comprovar si els vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ (o altre parell de vectors que uneixin aquests punts) són paral·lels.

Exemple: Indica si els punts $A(2,5)$, $B(4,2)$ i $C(6,-1)$ estan alineats.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (4-2, 2-5) = (2, -3) \\ \overrightarrow{AC} = (6-2, -1-5) = (4, -6) \end{array} \right\} \rightarrow \frac{2}{4} = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2} \rightarrow \overrightarrow{AB} \text{ i } \overrightarrow{AC} \text{ són paral·lels} \rightarrow A, B \text{ i } C \text{ estan alineats.}$$

Exercici: Indica si els punts $A(1,3)$, $B(-1,2)$ i $C(8,4)$ estan alineats. Pots comprovar-ho gràficament.

Sol.: No estan alineats

VECTORS EN EL PLA

Divisió d'un segment en n parts iguals

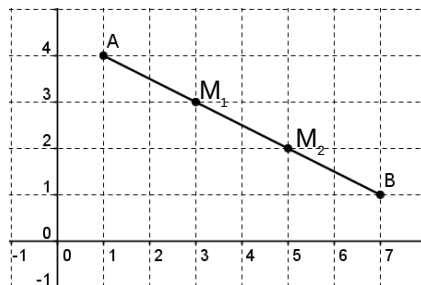
Per calcular els punts que divideixen un segment en n (un nombre natural) parts iguals, procedim com s'indica en els exemples següents:

Exemples:

1. Donats els punts $A(1,4)$ i $B(7,1)$, calcula les coordenades dels punts que divideixen el segment AB en tres parts iguals.

- Calculem $M_1(x,y)$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM_1} &= \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} \rightarrow (x-1, y-4) = \frac{1}{3}(6, -3) = (2, -1) \\ \rightarrow \begin{cases} x-1=2 \rightarrow x=2+1 \rightarrow x=3 \\ y-4=-1 \rightarrow y=-1+4 \rightarrow y=3 \end{cases} &\rightarrow \boxed{M_1(3,3)}\end{aligned}$$



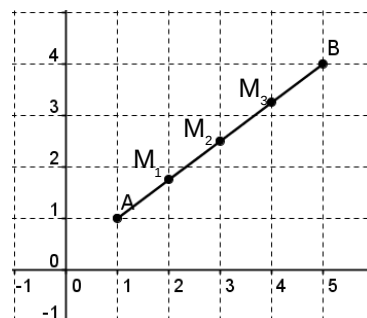
- Calculem $M_2(x,y)$:

$$\overrightarrow{AM_2} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} \rightarrow (x-1, y-4) = \frac{2}{3}(6, -3) = (4, -2) \rightarrow \begin{cases} x-1=4 \rightarrow x=5 \\ y-4=-2 \rightarrow y=2 \end{cases} \rightarrow \boxed{M_2(5,2)}$$

2. Donats els punts $A(1,1)$ i $B(5,4)$, calcula les coordenades dels punts que divideixen el segment AB en quatre parts iguals.

- Calculem $M_1(x,y)$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM_1} &= \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} \rightarrow (x-1, y-1) = \frac{1}{4}(4, 3) = \left(1, \frac{3}{4}\right) \\ \rightarrow \begin{cases} x-1=1 \rightarrow x=2 \\ y-1=\frac{3}{4} \rightarrow y=\frac{7}{4} \end{cases} &\rightarrow M_1\left(2, \frac{7}{4}\right)\end{aligned}$$



- Calculem $M_2(x,y)$:

$$\overrightarrow{AM_2} = \frac{2}{4} \overrightarrow{AB} \rightarrow (x-1, y-1) = \frac{1}{2}(4, 3) = \left(2, \frac{3}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} x-1=2 \rightarrow x=3 \\ y-1=\frac{3}{2} \rightarrow y=\frac{5}{2} \end{cases} \rightarrow M_2\left(3, \frac{5}{2}\right)$$

- Calculem $M_3(x,y)$:

$$\overrightarrow{AM_3} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AB} \rightarrow (x-1, y-1) = \frac{3}{4}(4, 3) = \left(3, \frac{9}{4}\right) \rightarrow \begin{cases} x-1=3 \rightarrow x=4 \\ y-1=\frac{9}{4} \rightarrow y=\frac{13}{4} \end{cases} \rightarrow M_3\left(4, \frac{13}{4}\right)$$

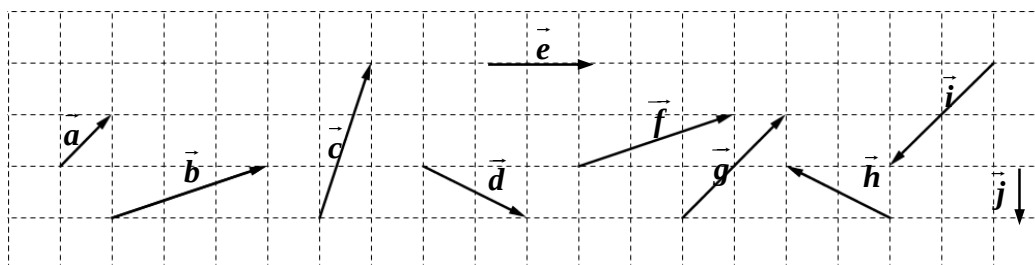
Exercici: Donats els punts $A(2,-1)$ i $B(4,2)$, calcula les coordenades dels punts que divideixen el segment AB en tres parts iguals.

Sol.: $M_1\left(\frac{8}{3}, 0\right); M_2\left(\frac{10}{3}, 1\right)$

EXERCICIS: VECTORS EN EL PLA

Nota: És aconsellable fer la comprovació gràfica dels exercicis, sempre que sigui possible, encara que l'enunciat no ho demani.

1. Indica dos vectors de la figura que:
 - a) Siguin equipol·lents.
 - b) Tinguin la mateixa direcció i el mateix mòdul, però el sentit diferent.
 - c) Tinguin la mateixa direcció, però el sentit i el mòdul diferents.
 - d) Tinguin la mateixa direcció i el mateix sentit, però el mòdul diferent.
 - e) Tinguin el mateix mòdul, però la direcció diferent.
 - f) Tinguin un component nul.



2. Calcula els components i el mòdul dels vectors de l'exercici 1.
3. Representa gràficament els vectors lliures següents:
 $\vec{v} = (-4, 3)$; $\vec{u} = (-5, 0)$; $\vec{w} = (-2, -3)$; $\vec{z} = (0, -2)$; $\vec{p} = (4, -1)$.
4. Donats els punts $A(3,1)$, $B(-5,1)$, $C(-4,-2)$, $D(0,-3)$; calcula, analíticament, els components i el mòdul dels vectors següents:
 - a) $\overrightarrow{AB}$
 - b) $\overrightarrow{BA}$
 - c) $\overrightarrow{BC}$
 - d) $\overrightarrow{CB}$
 - e) $\overrightarrow{CD}$
 - f) $\overrightarrow{AD}$
5. Calcula l'extrem del vector $\overrightarrow{AB} = (-2, 8)$, sabent que l'origen és el punt $A(1, -3)$.
6. Calcula l'origen del vector $\overrightarrow{AB} = (3, -4)$, sabent que l'extrem és el punt $B(0, -1)$.
7. Donats els punts $A(3,0)$, $B(2,3)$, $C(-2,1)$, $D(7,2)$; esbrina, analíticament, si els vectors següents són equipol·lents:
 - a) $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$
 - b) $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{DB}$

EXERCICIS: VECTORS EN EL PLA

8. Donats els punts $A(-3,-1)$, $B(0,5)$, $C(-7,4)$; troba les coordenades d'un quart punt D , sabent que $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ són equipol·lents.
9. Donats els punts $A(-2,-1)$, $B(1,1)$, $C(2,0)$; troba les coordenades d'un quart punt D , sabent que $ABCD$ és un paral·lelogram. Calcula el perímetre d'aquest paral·lelogram.
10. Les coordenades del punt B són el triple de les del punt A . Sabent que $\overrightarrow{AB} = (8,12)$, calcula les coordenades dels punts A i B .
11. Les coordenades del punt A són el doble de les del punt B . Sabent que $\overrightarrow{AB} = (-2,5)$, calcula les coordenades dels punts A i B .
12. Donats els vectors $\vec{v} = (-1,3)$, $\vec{u} = (2,-1)$ i $\vec{w} = (0,4)$, calcula analíticament i gràficament:

a) $\vec{v} + \vec{u}$	c) $\vec{v} - \vec{w}$	e) $3\vec{u}$	g) $-2\vec{u}$	i)
$2\vec{v} + 3\vec{u}$				
b) $\vec{u} + \vec{w}$	d) $\vec{v} - \vec{u}$	f) $-\vec{v}$	h) $\frac{1}{2}\vec{w}$	j)
$\vec{w} - 2\vec{v}$				
13. Donats els vectors $\vec{v} = (7,-4)$, $\vec{u} = (-5,-2)$ i $\vec{w} = (-6,0)$, calcula analíticament:

a) $5\vec{v} - 2\vec{u}$	b) $3\vec{v} - \frac{2}{3}\vec{w}$	c) $-\vec{w} - 3 \cdot (\vec{u} - \vec{v})$	d)
$-3\vec{u} + 5\vec{v} + \vec{w}$			
14. Troba quatre vectors paral·lels al vector $\vec{v} = (-5,4)$.
15. Esbrina si els vectors següents són paral·lels:

a) $\vec{v} = (10,-20)$ i $\vec{u} = (-2,4)$	b) $\vec{w} = (-2,-5)$ i $\vec{z} = (3,7)$
--	--
16. Calcula el producte escalar de dos vectors $\vec{v}$ i $\vec{u}$, sabent que formen un angle de 17° i que els seus mòduls són: $|\vec{v}| = 7$ i $|\vec{u}| = 12$.

EXERCICIS: VECTORS EN EL PLA

17. Calcula el producte escalar de dos vectors $\vec{v}$ i $\vec{u}$, sabent que formen un angle de 120° i que els seus mòduls són: $|\vec{v}| = 11$ i $|\vec{u}| = 4$.

18. Donats els vectors $\vec{v} = (7, -4)$, $\vec{u} = (-5, -2)$ i $\vec{w} = (-6, 0)$, calcula analíticament:

a) $\vec{v} \cdot \vec{u}$

b) $\vec{v} \cdot \vec{w}$

c) $\vec{w} \cdot \vec{u}$

19. Calcula l'angle que formen els vectors següents:

a) $\vec{v} = (-5, -2)$ i $\vec{u} = (5, -1)$

b) $\vec{w} = (7, 3)$ i $\vec{z} = (4, -1)$

20. Calcula l'angle que formen els vectors següents i extreu conclusions amb relació a la seva direcció i sentit:

a) $\vec{v} = (5, 2)$ i $\vec{u} = (10, 4)$

b) $\vec{w} = (-3, 15)$ i $\vec{z} = (2, -10)$

21. Esbrina si els parells de vectors següents són perpendiculars:

a) $\vec{v} = (3, 4)$ i $\vec{u} = (-5, 4)$

b) $\vec{w} = (-3, 4)$ i $\vec{z} = (8, 6)$

22. Calcula dos vectors perpendiculars al vector donat que tinguin el mateix mòdul que aquest:

a) $\vec{v} = (8, 9)$

b) $\vec{u} = (-1, 4)$

c) $\vec{z} = (-2, -10)$

23. Calcula cinc vectors perpendiculars al vector $\vec{v} = (-3, -2)$.

24. Calcula el punt mitjà del segment d'extrems:

a) $A(-2, -5)$ i $B(4, -3)$.

b) $A(5, -6)$ i $B(4, -4)$.

25. Indica si els punts donats estan alineats:

a) $A(-2, 1)$, $B(-1, -1)$ i $C(1, 0)$.

b) $A(-2, 1)$, $B(1, 2)$ i $C(4, 3)$.

26. Donats els punts $A(-3, -1)$ i $B(3, 2)$, calcula les coordenades dels punts que divideixen el segment AB en:

a) tres parts iguals

b) quatre parts iguals

SOLUCIONS: VECTORS EN EL PLA

Solucions

1. a) $\vec{b} \perp \vec{f}$ b) $\vec{g} \perp \vec{i}; \vec{d} \perp \vec{h}$ c) $\vec{a} \perp \vec{i}$ d) $\vec{a} \perp \vec{g}$ e) $\vec{c} \perp \vec{b}; \vec{c} \perp \vec{f}$
f) $\vec{e} \perp \vec{j}$

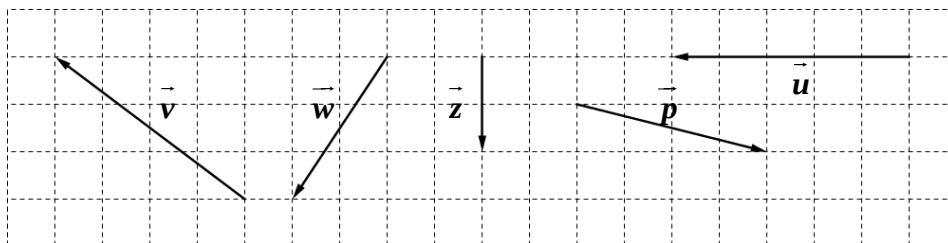
2.

$$\begin{array}{lllll} \vec{a} = (1,1) & \vec{c} = (1,3) & \vec{e} = (2,0) & \vec{g} = (2,2) & \vec{i} = (-2,-2) \\ \vec{b} = (3,1) & \vec{d} = (2,-1) & \vec{f} = (3,1) & \vec{h} = (-2,1) & \vec{j} = (0,-1) \end{array}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2}; |\vec{b}| = \sqrt{10}; |\vec{c}| = \sqrt{10}; |\vec{d}| = \sqrt{5}; |\vec{e}| = 2; |\vec{f}| = \sqrt{10}; |\vec{g}| = \sqrt{8};$$

$$|\vec{h}| = \sqrt{5}; |\vec{i}| = \sqrt{8}; |\vec{j}| = 1.$$

3.



4. a) $\vec{AB} = (-8,0); |\vec{AB}| = 8$ d) $\vec{CB} = (-1,3); |\vec{CB}| = \sqrt{10}$
b) $\vec{BA} = (8,0); |\vec{BA}| = 8$ e) $\vec{CD} = (4,-1); |\vec{CD}| = \sqrt{17}$
c) $\vec{BC} = (1,-3); |\vec{BC}| = \sqrt{10}$ f) $\vec{AD} = (-3,-4); |\vec{AD}| = 5$

5. B(-1,5)

8. D(-4,10)

6. A(-3,3)

9. D(-1,-2)

7. a) No són equipol·lents.

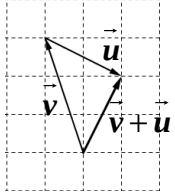
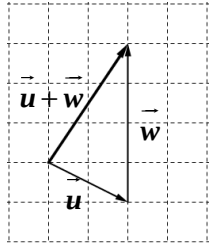
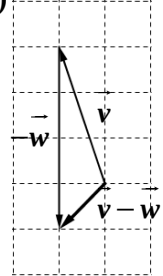
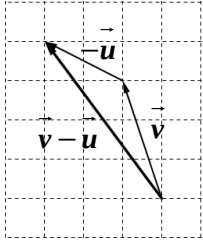
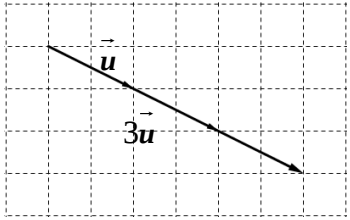
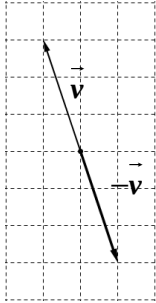
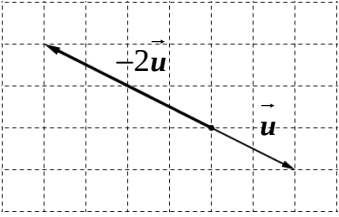
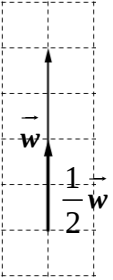
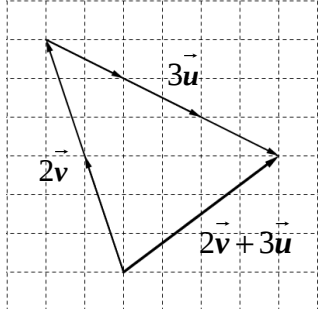
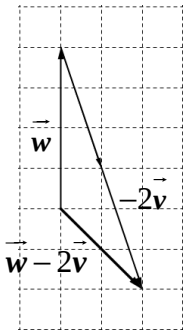
10. A(4,6) i B(12,18)

b) Són equipol·lents.

11. A(4,-10) i B(2,-5)

SOLUCIONS: VECTORS EN EL PLA

12. a) (1, 2) c) (-1, -1) e) (6, -3) g) (-4, 2) i) (4, 3)
- b) (2, 3) d) (-3, 4) f) (1, -3) h) (0, 2) j) (2, -2)

a) 	b) 	c) 
d) 	e) 	f) 
g) 	h) 	i) 
j) 		

SOLUCIONS: VECTORS EN EL PLA

13. a) $(45, -16)$

b) $(25, -12)$

c) $(42, -6)$

d) $(44, -14)$

14. Infinites solucions. Per exemple:

$(5, -4)$, $(-10, 8)$, $(-15, 12)$, $(-20, 16)$.

15. a) Són paral·lels.

b) No són paral·lels.

16. 80,33

17. -22

18. a) -27

b) -42

c) 30

19. a) $146,89^\circ$ a) $37,23^\circ$

20. a) $0^\circ \rightarrow$ tenen la mateixa direcció i el mateix sentit.

b) $180^\circ \rightarrow$ tenen la mateixa direcció i el sentit oposat

21. a) No són perpendiculars.

b) Són perpendiculars.

22. a) $(-9, 8)$ i $(9, -8)$

b) $(-4, -1)$ i $(4, 1)$

c) $(10, -2)$ i $(-10, 2)$

23. Infinites solucions. Per exemple:

$(-2, 3)$, $(4, -6)$, $(6, -9)$, $(8, -12)$,
 $(10, -15)$.

24. a) $M(1, -4)$

b) $M\left(\frac{9}{2}, -5\right)$

25. a) No estan alineats.

b) Estan alineats.

26. a) $M_1(-1, 0)$; $M_2(1, 1)$

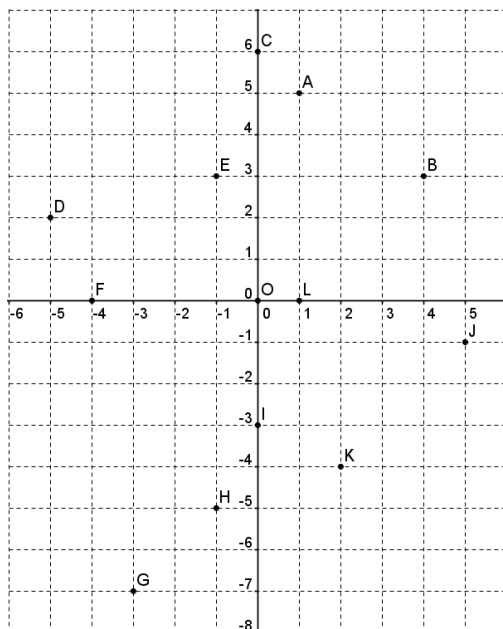
$M_1\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$; $M_2\left(0, \frac{1}{2}\right)$;
b) $M_3\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right)$

Solucions dels exercicis de la teoria

Punts del pla

1. A(2,3); B(-1,1); C(-2,-2); D(3,-3);
E(3,0); F(0,3); G(-1,0); H(0,-2);
I(0,0).

2.



Components d'un vector

$$\vec{v} = (5, 1)$$

$$\vec{z} = (-4, 0)$$

$$\vec{u} = (0, 2)$$

$$\vec{p} = (-3, -1)$$

$$\vec{w} = (-3, 2)$$

$$\vec{t} = (2, -2)$$

$$\vec{a} = (-1, -1)$$

$$\vec{d} = (0, -3)$$

$$\vec{b} = (1, 2)$$

$$\vec{e} = (3, -3)$$

$$\vec{c} = (-2, 2)$$

$$\vec{f} = (-1, 0)$$

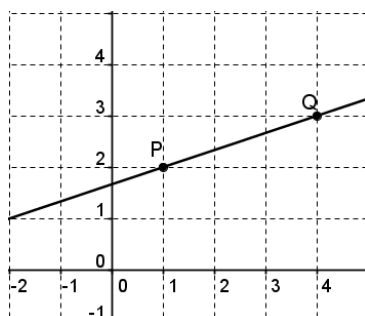
2. RECTES EN EL PLA

Determinació de rectes

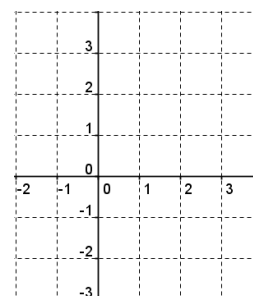
Una recta ve determinada per:

- Dos punts.

Exemple: Dibuixa la recta que passa pels punts P(1,2) i Q(4,3):



Exercici: Dibuixa la recta que passa pels punts A(3,-2) i B(0,2):



- Un punt i una direcció, la qual pot venir donada per:

- o Un **vector** que té la mateixa direcció que la recta, anomenat **vector director**.

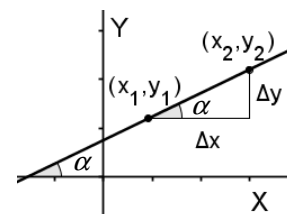
(Una recta té infinits vectors directors, ja que hi ha infinits vectors amb la mateixa direcció)

- o L'**angle** d'inclinació de la recta respecte l'eix OX.

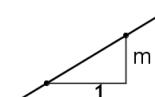
- o El **pendent** de la recta.

El **pendent** m d'una recta es defineix com la tangent de l'angle que forma la recta amb l'eix OX. Si la recta és obliqua, talla l'eix OX i el divideix en dues parts. Per calcular el pendent, prenem l'angle que forma la recta amb la part dreta de l'eix OX, mesurat en sentit directe des de l'eix OX.

Donats dos punts qualssevol de la recta, el pendent és el quocient de l'increment (variació) de l'ordenada (Δy) entre l'increment de l'abscissa (Δx). Així, el pendent indica la variació de l'ordenada quan l'abscissa s'incrementa en una unitat:



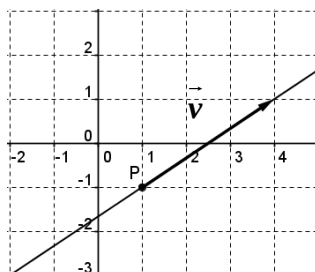
$$m = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{increment de l'ordenada}}{\text{increment de l'abscissa}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



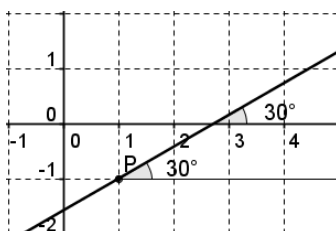
RECTES EN EL PLA

Exemple: Dibuixa la recta que passa pel punt $P(1,-1)$ i que:

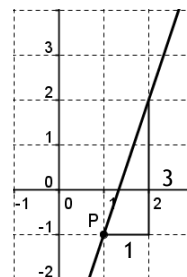
a) té per vector director $\vec{v} = (3,2)$



b) forma un angle de 30° amb la part positiva de l'eix OX.

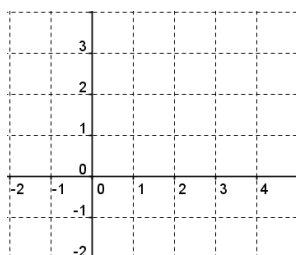


c) el seu pendent és $m = 3$

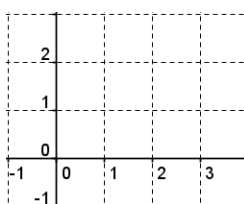


Exercici: Dibuixa la recta que passa pel punt $P(2,1)$ i que:

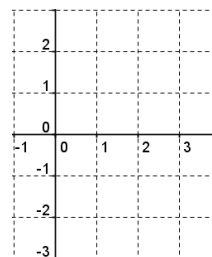
a) té per vector director $\vec{v} = (-2,1)$



b) forma un angle de 45° amb la part positiva de l'eix OX.



c) el seu pendent és $m = -2$



Equacions de la recta

Una equació de la recta és una igualtat que verifiquen tots els punts (x,y) de la recta, i només aquests.

L'equació de la recta ens permet calcular qualsevol punt de la recta i discernir si un punt hi pertany o no, ja que els punts que no pertanyen a la recta no verifiquen la seva equació.

Hi ha diferents equacions d'una mateixa recta, totes elles equivalents.

Equació vectorial

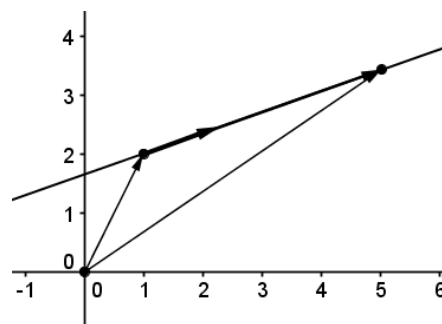
Hem vist que un punt i un vector determinen una recta.

Donat un punt $P(p_1, p_2)$ de la recta i un **vector director** $\vec{v} = (v_1, v_2)$, volem trobar una fórmula que relacioni qualsevol punt de la recta $X(x, y)$ amb P i $\vec{v}$.

De la figura de la dreta deduïm que:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PX}$$

Com que $\overrightarrow{PX}$ té la mateixa direcció que $\vec{v}$, existeix un nombre real k que verifica que $\overrightarrow{PX} = k\vec{v}$. Si substituïm en la igualtat anterior $\overrightarrow{PX}$ per $k\vec{v}$ obtenim **l'equació vectorial de la recta**:



$$\boxed{\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + k\vec{v}} \rightarrow \text{Equació vectorial de la recta}$$

$\overrightarrow{OX}$ i $\overrightarrow{OP}$ són els vectors de posició dels punts X i P . Recordem que els components del vector de posició d'un punt coincideixen amb les coordenades del punt. Per tant:

$$\overrightarrow{OX} = (x, y) \quad \text{i} \quad \overrightarrow{OP} = (p_1, p_2)$$

Si expressem l'equació vectorial de la recta en components, obtenim:

$$\boxed{(x, y) = (p_1, p_2) + k(v_1, v_2)} \rightarrow \text{Equació vectorial de la recta}$$

(en components)

Cada valor de k determina un punt de la recta.

Exemples:

1. Donada la recta r que passa pel punt $P(-3, 1)$ i que té per vector director $\vec{v} = (1, 2)$:

a) Determina l'equació vectorial de la recta r .

$$r: (x, y) = (p_1, p_2) + k(v_1, v_2) \rightarrow \boxed{r: (x, y) = (-3, 1) + k(1, 2)}$$

RECTES EN EL PLA

b) Calcula tres punts que pertanyin a la recta r .

$$k = 0 \rightarrow P(-3, 1)$$

$$k = 1 \rightarrow (x, y) = (-3, 1) + 1 \cdot (1, 2) = (-3 + 1, 1 + 2) = (-2, 3)$$

$$k = 2 \rightarrow (x, y) = (-3, 1) + 2 \cdot (1, 2) = (-3 + 2, 1 + 4) = (-1, 5)$$

c) Esbrina si els punts $A(-1, 1)$ i $B(-4, -1)$ pertanyen a la recta r .

Un punt pertany a la recta si verifica l'equació de la recta, és a dir, si en substituir-lo per (x, y) existeix un nombre real k que verifica la igualtat:

$$\begin{aligned} \text{Si } A(-1, 1) \in r &\rightarrow (-1, 1) = (-3, 1) + k(1, 2) \rightarrow (-1, 1) - (-3, 1) = k(1, 2) \\ &\rightarrow (2, 0) = k(1, 2) = (k, 2k) \rightarrow \begin{cases} 2 = k \\ 0 = 2k \rightarrow k = 0 \end{cases} \rightarrow \nexists k \end{aligned}$$

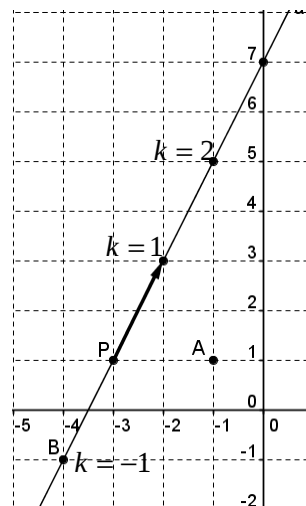
El punt A no pertany a la recta, ja que k no pot prendre dos valors diferents, no pot ser igual a 2 i a 0 a la vegada.

$$\begin{aligned} \text{Si } B(-4, -1) \in r &\rightarrow (-4, -1) = (-3, 1) + k(1, 2) \rightarrow (-4, -1) - (-3, 1) = k(1, 2) \\ &\rightarrow (-1, -2) = k(1, 2) = (k, 2k) \rightarrow \begin{cases} -1 = k \\ -2 = 2k \rightarrow k = -1 \end{cases} \rightarrow \exists k = -1 \end{aligned}$$

El punt B sí que pertany a la recta, ja que existeix un valor real $k = -1$ que verifica la igualtat.

2. Donada la recta $r : (x, y) = (-8, -3) + k(7, -2)$, troba'n un punt i un vector director.

$$P(-8, -3) \text{ i } \vec{v} = (7, -2)$$

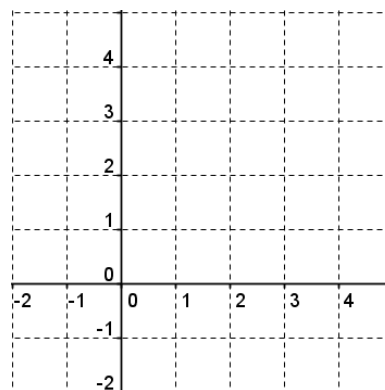


Exercici:

1. Donada la recta r que passa pel punt $P(2, 1)$ i que té per vector director $\vec{v} = (1, -1)$:

a) Determina l'equació vectorial de la recta r .

b) Calcula tres punts que pertanyin a la recta r .



c) Esbrina si els punts $A(1,1)$ i $B(0,3)$ pertanyen a la recta r .

d) Representa gràficament la recta r i els punts dels apartats b) i c).

2. Donada la recta $r: (x, y) = (1, -6) + k(-5, 3)$, troba'n un punt i un vector director.

A partir de l'equació vectorial de la recta es dedueixen les altres equacions.

Equacions paramètriques

Si fem les operacions indicades en l'equació vectorial de la recta, en components, obtenim les **equacions paramètriques de la recta**:

$$(x, y) = (p_1, p_2) + k(v_1, v_2) \rightarrow \boxed{\begin{cases} x = p_1 + kv_1 \\ y = p_2 + kv_2 \end{cases}} \rightarrow \text{Equacions paramètriques de la recta}$$

Exemples:

1. Donada la recta r que passa pel punt $P(5, -4)$ i que té per vector director $\vec{v} = (-3, 2)$:

a) Determina les equacions paramètriques de la recta r .

$$r: \begin{cases} x = p_1 + kv_1 \\ y = p_2 + kv_2 \end{cases} \rightarrow \boxed{r: \begin{cases} x = 5 - 3k \\ y = -4 + 2k \end{cases}}$$

b) Calcula tres punts que pertanyin a la recta r .

$$k = 0 \rightarrow \boxed{P(5, -4)}$$

$$k = 1 \rightarrow \begin{cases} x = 5 - 3 \cdot 1 = 2 \\ y = -4 + 2 \cdot 1 = -2 \end{cases} \rightarrow \boxed{(2, -2)}; \quad k = 2 \rightarrow \begin{cases} x = 5 - 3 \cdot 2 = -1 \\ y = -4 + 2 \cdot 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{(-1, 0)}$$

c) Esbrina si els punts $A(1, -1)$ i $B(-10, 6)$ pertanyen a la recta r .

$$\text{Si } A(1, -1) \in r \rightarrow \begin{cases} 1 = 5 - 3k \rightarrow 1 - 5 = -3k \rightarrow -4 = -3k \rightarrow k = \frac{4}{3} \\ -1 = -4 + 2k \rightarrow -1 + 4 = 2k \rightarrow 3 = 2k \rightarrow k = \frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow \nexists k$$

El punt A no pertany a la recta, ja que k no pot prendre dos valors diferents (k no pot ser igual a $4/3$ i a $3/2$ a la vegada).

$$\text{Si } B(-10, 6) \in r \rightarrow \begin{cases} -10 = 5 - 3k \rightarrow -10 - 5 = -3k \rightarrow -15 = -3k \rightarrow k = 5 \\ 6 = -4 + 2k \rightarrow 6 + 4 = 2k \rightarrow 10 = 2k \rightarrow k = 5 \end{cases} \rightarrow \exists \boxed{k=5}$$

El punt B sí que pertany a la recta, ja que existeix un valor real $k = 5$ que verifica la igualtat.

2. Troba un punt i un vector director de les rectes següents:

$$\text{a) } r: \begin{cases} x = 2 - 4k \\ y = 5 + 3k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P(2, 5) \\ \vec{v} = (-4, 3) \end{cases} \quad \text{b) } r: \begin{cases} x = 1 - k \\ y = k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P(1, 0) \\ \vec{v} = (-1, 1) \end{cases}$$

Exercici:

1. Donada la recta r que passa pel punt $P(-1, 3)$ i que té per vector director

$$\vec{v} = (-5, -1):$$

a) Determina les equacions paramètriques de la recta r .

b) Calcula tres punts que pertanyin a la recta r .

c) Esbrina si els punts $A(-1, 1)$ i $B(9, 5)$ pertanyen a la recta r .

2. Troba un punt i un vector director de les rectes següents:

a) $r: \begin{cases} x = -3 - 2k \\ y = 7 + 6k \end{cases}$

b) $s: \begin{cases} x = 1 - k \\ y = 5 \end{cases}$

Equació contínua

Si aïllem el paràmetre k de les equacions paramètriques i igulem les dues expressions obtingudes, trobem l'**equació contínua de la recta**:

$$\begin{cases} x = p_1 + kv_1 \rightarrow k = \frac{x - p_1}{v_1} \\ y = p_2 + kv_2 \rightarrow k = \frac{y - p_2}{v_2} \end{cases} \rightarrow \boxed{\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2}} \rightarrow \text{Equació contínua de la recta}$$

Aquesta equació no s'utilitza si $v_1 = 0$ o $v_2 = 0$, ja que no es pot dividir per 0.

Exemples:

1. Donada la recta r que passa pel punt $P(-3,4)$ i que té per vector director $\vec{v} = (6, -1)$:

a) Determina l'equació contínua de la recta r .

$$\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2} \rightarrow \frac{x - (-3)}{6} = \frac{y - 4}{-1} \rightarrow \boxed{\frac{x + 3}{6} = \frac{y - 4}{-1}}$$

b) Calcula tres punts que pertanyin a la recta r .

Per calcular punts de la recta r , substituïm una coordenada, x o y , per valors reals qualssevol i calculem l'altra coordenada. Si no volem treballar amb fraccions, intentem substituir x per valors que facin que el quocient del primer membre sigui un nombre enter, o y per valors que facin que el quocient del segon membre sigui un nombre enter:

$$x = -3 \rightarrow \frac{-3 + 3}{6} = \frac{y - 4}{-1} \rightarrow 0 = \frac{y - 4}{-1} \rightarrow y = 4 \rightarrow \boxed{P(-3, 4)}$$

$$x = 3 \rightarrow \frac{3 + 3}{6} = \frac{y - 4}{-1} \rightarrow 1 = \frac{y - 4}{-1} \rightarrow -1 = y - 4 \rightarrow -1 + 4 = y \rightarrow y = 3 \rightarrow \boxed{(3, 3)}$$

$$y = 1 \rightarrow \frac{x + 3}{6} = \frac{1 - 4}{-1} \rightarrow \frac{x + 3}{6} = 3 \rightarrow x + 3 = 18 \rightarrow x = 15 \rightarrow \boxed{(15, 1)}$$

c) Esbrina si els punts $A(-1,1)$ i $B(-15,6)$ pertanyen a la recta r .

$$\text{Si } A(-1,1) \in r \rightarrow \frac{-1+3}{6} = \frac{1-4}{-1} \rightarrow \frac{2}{6} = \frac{-3}{-1} \rightarrow \frac{1}{3} = 3 \rightarrow \text{Fals: } \frac{1}{3} \neq 3$$

El punt A no pertany a la recta, ja que en substituir les coordenades de A per x i y no es verifica la igualtat.

$$\text{Si } B(-15,6) \in r \rightarrow \frac{-15+3}{6} = \frac{6-4}{-1} \rightarrow \frac{-12}{6} = \frac{2}{-1} \rightarrow \boxed{-2 = -2} \rightarrow \text{Cert}$$

El punt B sí que pertany a la recta, ja que en substituir les coordenades de B per x i y es verifica la igualtat.

2. Troba un punt i un vector director de les rectes següents:

a) $r: \frac{x-2}{5} = \frac{y+3}{-2} \rightarrow P(2,-3) \text{ i } \vec{v} = (5,-2)$

b) $s: \frac{x}{2} = y+1 \rightarrow P(0,-1) \text{ i } \vec{v} = (2,1)$

* Dividim per 2 el numerador i el denominador del primer membre. Multipliquem per -1 el numerador i el denominador del segon membre.

c) $*t: \frac{2x-1}{4} = \frac{-y+3}{2} \rightarrow \frac{x-\frac{1}{2}}{2} = \frac{y-3}{-2} \rightarrow P\left(\frac{1}{2}, 3\right) \text{ i } \vec{v} = (2,-2)$

Exercici:

1. Donada la recta r que passa pel punt $P(8,-7)$ i que té per vector director $\vec{v} = (-3,-5)$:

a) Determina l'equació contínua de la recta r .

b) Calcula tres punts que pertanyin a la recta r .

c) Esbrina si els punts $A(-1,1)$ i $B(14,3)$ pertanyen a la recta r .

2. Troba un punt i un vector director de les rectes següents:

a) $r: \frac{x+5}{9} = \frac{y-1}{-11}$

b) $s: x-4=y$

c) $r: \frac{-x-13}{2} = \frac{-3y+2}{9}$

Equació general o implícita

Si traiem denominadors en l'equació contínua de la recta (multiplicant en creu) i agrupem tots els termes en un membre, obtenim l'**equació general de la recta**:

$$\begin{aligned} \frac{x-p_1}{v_1} &= \frac{y-p_2}{v_2} \rightarrow v_2(x-p_1) = v_1(y-p_2) \rightarrow v_2x - v_2p_1 = v_1y - v_1p_2 \\ &\rightarrow v_2x - v_2p_1 - v_1y + v_1p_2 = 0 \rightarrow \underbrace{v_2x}_A - \underbrace{v_1y}_B - \underbrace{v_2p_1 + v_1p_2}_C = 0 \end{aligned}$$

Així, l'equació general de la recta és del tipus:

$$\boxed{Ax + By + C = 0} \rightarrow \text{Equació general de la recta}$$

on A , B i C són nombres reals i $(A, B) = (v_2, -v_1)$

Vector director i característic

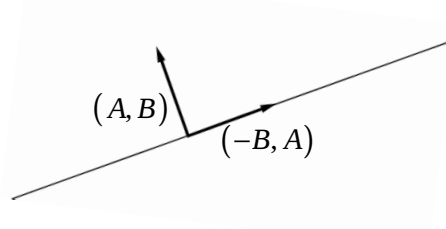
Com que $A = v_2$ i $B = -v_1$, un **vector director** de la recta és:

$$\boxed{\vec{v} = (-B, A)}.$$

El vector (A, B) és perpendicular al vector director $(-B, A)$ i, per tant, a la recta.

S'anomena **vector característic** de la recta (o **vector normal** a la recta):

$(A, B) \perp (-B, A)$
vector vector



Exemples:

1. Donada la recta r que passa pel punt $P(2, -7)$ i que té per vector director $\vec{v} = (3, -4)$:

a) Determina l'equació general de la recta r .

Hi ha dues maneres de calcular l'equació general:

- A partir de l'equació contínua:

$$\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2} \rightarrow \frac{x - 2}{3} = \frac{y - (-7)}{-4} \rightarrow \frac{x - 2}{3} = \frac{y + 7}{-4} \quad \text{equació contínua}$$

$$\frac{x - 2}{3} = \frac{y + 7}{-4} \rightarrow -4(x - 2) = 3(y + 7) \rightarrow -4x + 8 = 3y + 21 \rightarrow$$

$$\rightarrow -4x - 3y + 8 - 21 = 0 \rightarrow \boxed{r: -4x - 3y - 13 = 0}$$

- Substituint A per v_2 i B per $-v_1$ i calculant C (fent que P verifiqui l'equació):

$$Ax + By + C = 0 \text{ on } (A, B) = (v_2, -v_1) = (-4, -3) \rightarrow -4x - 3y + C = 0$$

$$P(2, -7) \rightarrow -4 \cdot 2 - 3 \cdot (-7) + C = 0 \rightarrow -8 + 21 + C = 0 \rightarrow C = -13 \rightarrow \boxed{-4x - 3y - 13 = 0}$$

Nota: Podem multiplicar els dos membres de l'equació per -1 , perquè els termes siguin positius, i l'equació obtinguda és equivalent:

$$-4x - 3y - 13 = 0 \rightarrow \boxed{r: 4x + 3y + 13 = 0}$$

b) Calcula tres punts que pertanyin a la recta r .

Per calcular punts de la recta r , substituïm una coordenada, x o y , per valors reals qualssevol i calculem l'altra coordenada.

$$x = 2 \rightarrow 4 \cdot 2 + 3y + 13 = 0 \rightarrow 3y + 21 = 0 \rightarrow y = \frac{-21}{3} = -7 \rightarrow \boxed{P(2, -7)}$$

$$y = 1 \rightarrow 4x + 3 \cdot 1 + 13 = 0 \rightarrow 4x + 16 = 0 \rightarrow x = \frac{-16}{4} = -4 \rightarrow \boxed{(-4, 1)}$$

$$x = -1 \rightarrow 4 \cdot (-1) + 3y + 13 = 0 \rightarrow 3y + 9 = 0 \rightarrow y = \frac{-9}{3} = -3 \rightarrow \boxed{(-1, -3)}$$

c) Esbrina si els punts $A(-7, 5)$ i $B(3, -4)$ pertanyen a la recta r .

Si $A(-7, 5) \in r \rightarrow 4 \cdot (-7) + 3 \cdot 5 + 13 = 0 \rightarrow -28 + 15 + 13 = 0 \rightarrow \boxed{0 = 0}$ Cert

El punt A sí que pertany a la recta, ja que en substituir les coordenades de A per x i y es verifica la igualtat.

Si $B(3, -4) \in r \rightarrow 4 \cdot 3 + 3 \cdot (-4) + 13 = 0 \rightarrow 12 - 12 + 13 = 0 \rightarrow 13 = 0$ Fals : $13 \neq 0$

El punt B no pertany a la recta, ja que en substituir les coordenades de B per x i y no es verifica la igualtat.

2. Donada la recta $r : 5x - 3y + 10 = 0$, troba'n un punt i un vector director.

$$(A, B) = (5, -3) \rightarrow \vec{v} = (-B, A) = (3, 5) \rightarrow \boxed{\vec{v} = (3, 5)} \rightarrow \text{Vector director}$$

$$x = -2 \rightarrow 5 \cdot (-2) - 3y + 10 = 0 \rightarrow -3y = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow \boxed{P(-2, 0)}$$

Exercici:

1. Donada la recta r que passa pel punt $P(0, -7)$ i que té per vector director $\vec{v} = (1, -2)$:

a) Determina l'equació general de la recta r .

b) Calcula tres punts que pertanyin a la recta r .

c) Esbrina si els punts $A(-6, 5)$ i $B(1, 3)$ pertanyen a la recta r .

2. Donada la recta $r : x + 2y - 1 = 0$, troba'n un punt i un vector director.

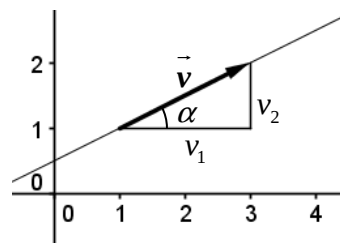
Equació punt-pendent

Si en l'equació contínua de la recta aïllem $y - p_2$, obtenim l'equació punt-pendent de la recta:

$$\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2} \rightarrow y - p_2 = \frac{v_2 \cdot (x - p_1)}{v_1} = \frac{v_2}{v_1} (x - p_1)$$

Com s'observa en la figura de la dreta:

$$\boxed{\frac{v_2}{v_1} = \operatorname{tg} \alpha = m \quad (\text{pendent de la recta})}$$



Així, l'equació punt-pendent queda:

$$y - p_2 = m \cdot (x - p_1) \rightarrow \text{Equació punt-pendent de la recta}$$

Aquesta equació s'utilitza quan es coneix un punt i el pendent de la recta.

Càlcul del vector director a partir del pendent

Suposem que coneixem el pendent m d'una recta i volem calcular-ne un vector director

$$\vec{v} = (v_1, v_2).$$

$$\frac{v_2}{v_1} = m$$

Els components del vector, v_1 i v_2 , han de verificar la fórmula:

Hi ha infinits vectors directors d'una recta i, per tant, infinites solucions (infinits parells de nombres el quocient dels quals és m). Podem triar, per exemple, el vector

$$\vec{v} = (1, m), \text{ ja que } \frac{m}{1} = m.$$

Si m és una fracció, $m = \frac{a}{b}$, aleshores $\vec{v} = (b, a)$:

$$m = \frac{a}{b} \rightarrow \vec{v} = (b, a)$$

Exemples:

1. Determina l'equació punt-pendent de la recta r de pendent 4 i que passa pel punt $P(2, -3)$.

$$y - p_2 = m \cdot (x - p_1) \rightarrow r: y + 3 = 4(x - 2)$$

2. Troba un punt, el pendent i un vector director de les rectes següents:

$$\text{a) } r: y - 1 = -2(x + 2) \rightarrow P(-2, 1); \quad m = -2; \quad \vec{v} = (1, m) = (1, -2).$$

$$\text{b) } s: y + 2 = \frac{2}{5}(x - 4) \rightarrow P(4, -2); \quad m = \frac{2}{5}; \quad \vec{v} = (5, 2).$$

Exercici:

1. Determina l'equació punt-pendent de la recta r de pendent -3 i que passa pel punt $P(-5, 2)$.

2. Troba un punt, el pendent i un vector director de les rectes següents:

a) $r: y+6=-(x-1)$

b) $s: y-1=\frac{4}{3}(x-2)$

Equació explícita

Si aïllem la y de l'equació punt-pendent o de l'equació general i operem, obtenim l'equació explícita de la recta:

$$y - p_2 = m \cdot (x - p_1) \rightarrow y = m \cdot (x - p_1) + p_2 = mx - \underbrace{mp_1}_{n} + p_2$$

Així, l'equació explícita de la recta és del tipus:

$y = mx + n$

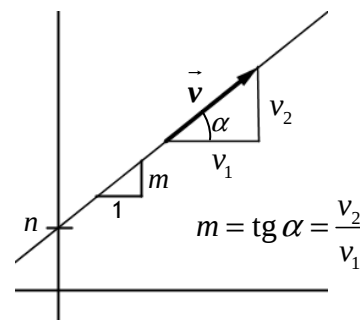
→ Equació explícita de la recta

(m = pendent, n = punt de tall eix OY)

Si donem a x el valor zero:

$$x = 0 \rightarrow y = m \cdot 0 + n \rightarrow y = n \rightarrow (0, n) \text{ pertany a la recta}$$

El punt $(0, n)$ pertany a l'eix OY. Aleshores, n és l'ordenada en l'origen o el punt de tall amb l'eix OY.



Exemples:

1. Donada la recta r que passa pel punt $P(5,-2)$ i que té per vector director

$$\vec{v} = (-2,6):$$

a) Determina el pendent de la recta.

$$m = \frac{v_2}{v_1} = \frac{6}{-2} = -3 \rightarrow \boxed{m = -3}$$

b) Determina l'equació explícita de la recta r .

Hi ha dues maneres de calcular l'equació explícita:

- A partir de l'equació punt-pendent:

$$y - p_2 = m \cdot (x - p_1) \rightarrow y + 2 = -3(x - 5) \rightarrow \text{Equació punt-pendent}$$

$$\rightarrow y = -3(x - 5) - 2 \rightarrow y = -3x + 15 - 2 = -3x + 13 \rightarrow \boxed{r: y = -3x + 13}$$

- A partir de l'expressió de l'equació explícita, substituint m per -3 i calculant n (fent que P verifiqui l'equació):

$$\left. \begin{array}{l} y = mx + n \rightarrow y = -3x + n \\ P(5, -2) \rightarrow -2 = -3 \cdot 5 + n \rightarrow -2 + 15 = n \rightarrow \boxed{n = 13} \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{y = -3x + 13}$$

c) Calcula tres punts que pertanyin a la recta r .

Per calcular punts de la recta r , substituïm x per valors reals qualssevol i calculem y :

$$x = 1 \rightarrow y = -3 \cdot 1 + 13 = 10 \rightarrow y = 10 \rightarrow \boxed{(1, 10)};$$

$$x = 2 \rightarrow y = -3 \cdot 2 + 13 = 7 \rightarrow y = 7 \rightarrow \boxed{(2, 7)}$$

$$x = -1 \rightarrow y = -3 \cdot (-1) + 13 = 16 \rightarrow y = 16 \rightarrow \boxed{(-1, 16)}$$

d) Esbrina si els punts $A(4, 1)$ i $B(3, -4)$ pertanyen a la recta r .

$$\text{Si } A(4, 1) \in r \rightarrow 1 = -3 \cdot 4 + 13 \rightarrow \boxed{1 = 1} \text{ Cert}$$

El punt A sí que pertany a la recta, ja que en substituir les coordenades de A per x i y es verifica la igualtat.

$$\text{Si } B(3, -4) \in r \rightarrow -4 = -3 \cdot 3 + 13 \rightarrow -4 = 4 \text{ Fals: } -4 \neq 4$$

El punt B no pertany a la recta, ja que en substituir les coordenades de B per x i y no es verifica la igualtat.

2. Donada la recta $r : y = x - 8$, troba'n el punt de tall amb l'eix OY, el pendent i un vector director.

Punt de tall eix OY: $(0, -8)$; $m = 1$; $\vec{v} = (1, m) = (1, 1)$

Exercici:

1. Donada la recta r que passa pel punt $P(-2, 2)$ i que té per vector director $\vec{v} = (-2, -4)$:

a) Determina el pendent de la recta r .

b) Determina l'equació explícita de la recta r .

c) Calcula tres punts que pertanyin a la recta r .

d) Esbrina si els punts $A(4, 1)$ i $B(-3, 0)$ pertanyen a la recta r .

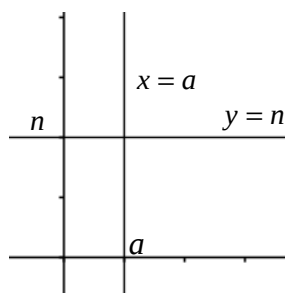
2. Donada la recta $r : y = 5x - 2$, troba'n el punt de tall amb l'eix OY, el pendent i un vector director.

RECTES EN EL PLA

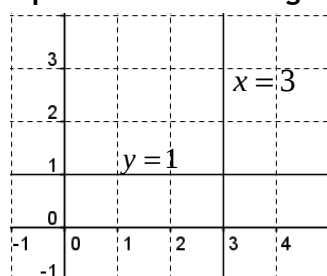
Rectes verticals i horitzontals

El quadre següent resumeix les característiques de les rectes horitzontals i verticals:

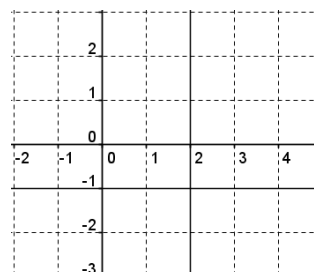
	Recta horitzontal	Recta vertical
Equació	$y = n$, on n és un nombre real (tots els punts de la recta tenen la mateixa ordenada; y és constant)	$x = a$, on a és un nombre real (tots els punts de la recta tenen la mateixa abscissa; x és constant)
Vector director	$(v_1, 0)$	$(0, v_2)$
Pendent	$m = 0 \quad \left(\operatorname{tg} 0^\circ = \frac{0}{v_1} = 0 \right)$	No existeix $\left(\nexists \operatorname{tg} 90^\circ = \frac{v_2}{0} \right)$



Exemple: Determina l'equació de les rectes representades en el gràfic:



Exercici: Determina l'equació de les rectes representades en el gràfic:



Resum de les equacions de la recta

Nom	Equació		Exemple:
	$\begin{cases} \text{Punt : } P(p_1, p_2) \rightarrow \\ \text{Vector director : } \vec{v}(v_1, v_2) \end{cases}$		$P(2, -3); \vec{v} = (-1, 5)$
Equació vectorial	$(x, y) = (p_1, p_2) + k(v_1, v_2)$		$(x, y) = (2, -3) + k(-1, 5)$
Equacions paramètriques	$\begin{cases} x = p_1 + kv_1 \\ y = p_2 + kv_2 \end{cases}$		$\begin{cases} x = 2 - k \\ y = -3 + 5k \end{cases}$
Equació contínua	$\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2}$		$\frac{x - 2}{-1} = \frac{y + 3}{5}$
Equació general	$Ax + By + C = 0$ $(A, B) = (v_2, -v_1) \rightarrow \vec{v} = (-B, A)$		$5x + y - 7 = 0$
Equació punt-pendent	$y - p_2 = m \cdot (x - p_1)$	$m = \frac{v_2}{v_1}; \vec{v} = (1, m)$	$y + 3 = -5 \cdot (x - 2)$
Equació explícita	$y = mx + n$		$y = -5x + 7$

Exemple: Escriu les diferents equacions de la recta que passa pel punt $P(-4, 7)$ i que té com a vector director el vector $\vec{v} = (2, -1)$.

Equació vectorial: $(x, y) = (-4, 7) + k(2, -1)$

Equacions paramètriques: $\begin{cases} x = -4 + 2k \\ y = 7 - k \end{cases}$

Equació contínua: $\frac{x + 4}{2} = \frac{y - 7}{-1}$

Equació general:

$$\frac{x + 4}{2} = \frac{y - 7}{-1} \rightarrow -(x + 4) = 2(y - 7) \rightarrow -x - 4 = 2y - 14 \rightarrow -x - 2y + 10 = 0$$

Equació punt-pendent: $m = \frac{v_2}{v_1} = -\frac{1}{2} \rightarrow y - 7 = -\frac{1}{2} \cdot (x + 4)$

Equació explícita:

$$y - 7 = -\frac{1}{2} \cdot (x + 4) \rightarrow y - 7 = -\frac{1}{2}x - 2 \rightarrow y = -\frac{1}{2}x - 2 + 7 \rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{2}x + 5}$$

Exercici: Escriu les diferents equacions de la recta que passa pel punt $P(-1,1)$ i que té com a vector director el vector $\vec{v} = (-2,6)$.

Recta determinada per dos punts

Sigui r la recta que passa per dos punts donats $A(a_1, a_2)$ i $B(b_1, b_2)$. Aleshores, el vector que uneix els dos punts és un vector director de r :

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) \rightarrow \text{Vector director de la recta } r.$$

A partir d'un dels dos punts i del vector director, podem trobar qualsevol equació de la recta:

Recta determinada per $A(a_1, a_2)$ i $B(b_1, b_2)$ = Recta determinada per $A(a_1, a_2)$ i

Exemple: Escriu l'equació contínua de la recta que passa pels punts $A(3, -6)$ i $B(2, 4)$.

- Calculem un vector director de la recta: $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (2 - 3, 4 - (-6)) = (-1, 10) \rightarrow \boxed{\vec{v} = (-1, 10)}$$

- Donat un punt $A(3, -6)$ i un vector director $\vec{v} = (-1, 10)$, calculem l'equació contínua:

$$\text{Equació contínua: } \boxed{\frac{x-3}{-1} = \frac{y+6}{10}}$$

Exercici: Escriu l'equació contínua de la recta que passa pels punts $A(0, 3)$ i $B(-3, 7)$.

$$\text{Sol.: } \frac{x}{-3} = \frac{y-3}{4}$$

RECTES EN EL PLA

Alineació de punts

Ja hem vist que, utilitzant vectors, podem esbrinar si tres punts estan alineats.

També ho podem fer calculant l'equació de la recta que uneix dos d'aquests punts i comprovant si el tercer punt pertany a aquesta recta.

Exemple: Esbrina si els punts $A(3,-6)$, $B(2,4)$ i $C(1,5)$ estan alineats.

En l'exemple anterior hem calculat l'equació de la recta r que uneix els punts A i B:

$$\text{Recta que passa per A i B: } r: \frac{x-3}{-1} = \frac{y+6}{10}$$

Vegem si el punt C pertany a la recta r :

$$\frac{1-3}{-1} = \frac{5+6}{10} \rightarrow \frac{-2}{-1} = \frac{11}{10} \rightarrow 2 = \frac{11}{10} \quad \text{Fals: } 2 \neq \frac{11}{10}$$

El punt C no pertany a la recta r . Llavors, els punts A, B i C no estan alineats.

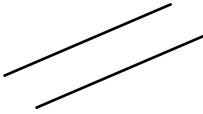
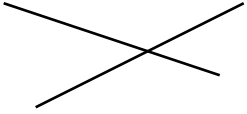
Exercici: Esbrina si els punts $A(3,1)$, $B(5,3)$ i $C(-1,-3)$ estan alineats.

Sol.: Sí que estan alineats

Posició relativa de dues rectes

Dues rectes en el pla poden ser:

- **Secants:** tenen diferents direccions i un punt comú.
- **Paral·leles:** tenen la mateixa direcció i cap punt comú.
- **Coincidents:** tenen la mateixa direcció i tots els punts comuns.

Paral·leles	Coincidents	Secants o incidents
		

RECTES EN EL PLA

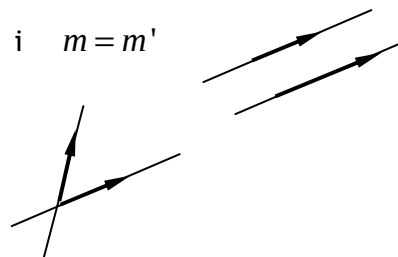
Si dues rectes són paral·leles o coincidents, tenen el mateix pendent i els seus vectors directores són iguals o paral·lels. Els seus vectors característics (perpendiculars) també són paral·lels.

Si dues rectes són secants, els seus pendents són diferents i els seus vectors directores tenen direccions diferents (no són paral·lels). Els seus vectors característics tampoc són paral·lels.

Així, donades dues rectes r i s , que tenen per vectors directores $\vec{v} = (v_1, v_2)$ i $\vec{u} = (u_1, u_2)$, respectivament, i els seus pendents són m i m' , respectivament:

- Si r i s són paral·leles o coincidents $\rightarrow \frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2}$ i $m = m'$

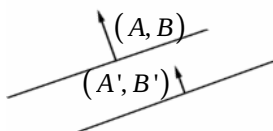
- Si r i s són secants $\rightarrow \frac{v_1}{u_1} \neq \frac{v_2}{u_2}$ i $m \neq m'$



Si les equacions generals de r i s són $r: Ax + By + C = 0$ i $s: A'x + B'y + C' = 0$:

- Si r i s són paral·leles o coincidents $\rightarrow (A, B)$ i (A', B') són paral·lels $\rightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$

- Si r i s són secants $\rightarrow (A, B)$ i (A', B') no són paral·lels $\rightarrow \frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$



Si dues rectes són coincidentes, les seves equacions són equivalents (expressen la mateixa recta) i, per tant, els coeficients de les seves equacions generals són proporcionals (obtenim una equació multiplicant els dos membres de l'altra equació per un nombre):

- Si r i s són coincidentes $\rightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$

- Si r i s són paral·leles $\rightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$

Determinació de la posició relativa de dues rectes a partir de les seves equacions

A partir de les seves equacions vectorials, paramètriques o contínues

Per esbrinar la posició relativa de les rectes r i s , a partir de les seves equacions vectorials, paramètriques o contínues, procedim de la manera següent:

- Calculem un punt i un vector director de cada recta:

$$r \rightarrow P(p_1, p_2); \vec{v}(v_1, v_2) \quad s \rightarrow Q(q_1, q_2); \vec{u}(u_1, u_2)$$

- Esbrinem si els vectors directors són paral·lels:

- o Si $\frac{v_1}{u_1} \neq \frac{v_2}{u_2}$, les rectes són secants.

- o Si $\frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2} \rightarrow$ les rectes són paral·leles o coincidents.

- Si els vectors són paral·lels, les rectes, o bé tenen tots els punts en comú (coincidentes), o no tenen cap punt en comú (paral·leles). Per esbrinar si són paral·leles o coincidents, serà suficient comprovar si un punt d'una recta pertany a l'altra:

- o Si $P \in s$, les rectes són coincidentes.

- o Si $P \notin s$, les rectes són paral·leles.

A partir de les seves equacions explícites

Volem esbrinar la posició relativa de les rectes r i s , a partir de les seves equacions explícites:

$$r: y = mx + n \quad i \quad s: y = m'x + n'$$

- Comparem els pendents i les ordenades en l'origen:

- o Si $m \neq m'$, les rectes són secants.

- o Si $m = m'$ i $n \neq n'$, les rectes són paral·leles.

- o Si $m = m'$ i $n = n'$, les rectes són coincidentes.

RECTES EN EL PLA

A partir de les seves equacions generals

Volem esbrinar la posició relativa de les rectes r i s , a partir de les seves equacions generals:

$$r: Ax + By + C = 0 \text{ i } s: A'x + B'y + C' = 0$$

- Comprovem si els coeficients són proporcionals:

- o Si $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$, les rectes són secants.
- o Si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$, les rectes són paral·leles.
- o Si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$ les rectes són coincidentes.

Quadre resum

Donades les rectes:

$$r: \begin{cases} \text{Punt: } P(p_1, p_2) \\ \text{Vector director: } \vec{v}(v_1, v_2) \\ \text{Pendent: } m \\ \text{Equació explícita: } y = mx + n \\ \text{Equació general: } Ax + By + C = 0 \end{cases} \quad s: \begin{cases} \text{Punt: } Q(q_1, q_2) \\ \text{Vector director: } \vec{u}(u_1, u_2) \\ \text{Pendent: } m' \\ \text{Equació explícita: } y = m'x + n' \\ \text{Equació general: } A'x + B'y + C' = 0 \end{cases}$$

Posició relativa	Vectors directors	Punts en comú	Equació explícita	Equació general
Secants	No paral·lels: $\frac{v_1}{u_1} \neq \frac{v_2}{u_2}$	Un punt comú.	$m \neq m'$	$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$
Paral·leles	Iguals o paral·lels: $\frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2}$	Cap punt comú. $P \notin s; Q \notin r$	$m = m'$ $n \neq n'$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$
Coincidentes	Iguals o paral·lels: $\frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2}$	Tots els punts comuns. $P \in s; Q \in r$	$m = m'$ $n = n'$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$

Determinació de la posició relativa resolent un sistema d'equacions

Una altra manera de determinar la posició relativa de dues rectes consisteix a resoldre el sistema format per les seves equacions, ja que les solucions del sistema són punts comuns a les dues rectes:

- Si el sistema és **compatible determinat** (té una solució), les rectes són **secants** (tenen un punt en comú).
- Si el sistema és **compatible indeterminat** (té infinites solucions), les rectes són **coincidentes** (tenen tots els punts en comú).
- Si el sistema és **incompatible** (no té solució), les rectes són **paral·leles** (no tenen cap punt en comú).

Exemple: Esbrina la posició relativa dels parells de rectes següents:

a) $r: \frac{x-4}{3} = \frac{y+2}{-6}$ i $s: x-1 = \frac{y+1}{-2}$

- Calculem un punt i un vector director de cada recta:

$$r: \begin{cases} \text{Punt: } P(4, -2) \\ \text{Vector director: } \vec{v}(3, -6) \end{cases} \quad s: \begin{cases} \text{Punt: } Q(1, -1) \\ \text{Vector director: } \vec{u}(1, -2) \end{cases}$$

- Esbrinem si els vectors directors són paral·lels:

$$\frac{3}{1} = \frac{-6}{-2} = 3 \rightarrow \text{són paral·leles o coincidents}$$

- Esbrinem si el punt P pertany a la recta s:

$$\text{Si } P(4, -2) \in s \rightarrow 4-1 = \frac{-2+1}{-2} \rightarrow 3 = \frac{1}{2} \text{ Fals: } 3 \neq \frac{1}{2} \rightarrow \underline{\text{r i s són paral·leles}}$$

b) $r: y = 3x + 1$ i $s: y = 2x + 1$

Els pendents són diferents: $3 \neq 2 \rightarrow \underline{\text{r i s són secants}}$

c) $r: 3x - y + 4 = 0$ i $s: -9x + 3y - 12 = 0$

$$\frac{3}{-9} = \frac{-1}{3} = \frac{4}{-12} = -\frac{1}{3} \rightarrow \underline{\text{r i s són coincidents}}$$

Exercici: Esbrina la posició relativa dels parells de rectes següents:

a) $r: 5x - 10y + 2 = 0$ i $s: x - 2y + 1 = 0$

b) $r: 2x - 3y + 5 = 0$ i $s: x - 2y + 1 = 0$

c) $r: 4x - 6y + 10 = 0$ i $s: 2x - 3y + 5 = 0$

d) $r: y = 3x + 1$ i $s: y = 3x - 1$

e) $r: y = 3x + 1$ i $s: y = -3x - 1$

f) $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-5}{6}$ i $s: \frac{x+2}{3} = \frac{y+4}{9}$

Sol.: a) paral·leles b) secants c) coincidents
d) paral·leles e) secants f) coincidents

Punt d'intersecció o de tall de dues rectes secants

Si dues rectes són secants, tenen un punt comú, és a dir, es tallen en un punt. Aquest punt s'anomena **punt d'intersecció o de tall de les rectes**.

Aquest punt verifica les equacions de les dues rectes, ja que pertany a totes dues.

Per tant, per calcular les coordenades del punt d'intersecció, resollem el sistema format per les equacions de les rectes.

Per resoldre el sistema, és convenient tenir les equacions generals o explícites de les rectes. Si tenim altres formes d'equació de la recta, operem per passar-les a equacions generals.

Exemple: Calcula el punt d'intersecció de les rectes següents:

a) $r: x - y + 1 = 0$ i $s: x - 2y + 3 = 0$

Resolem el sistema per reducció:

$$\begin{array}{rcl} *x - y = -1 & \xrightarrow{\cdot(-1)} & -x + y = 1 \\ x - 2y = -3 & & x - 2y = -3 \\ \hline & & -y = -2 \rightarrow y = 2 \end{array} \rightarrow *x - 2 = -1 \rightarrow x = -1 + 2 = 1 \rightarrow x = 1$$

El punt d'intersecció és

$(1, 2)$

b) $r: y = 3x + 1$ i $s: y = 2x + 1$

Resolem el sistema per igualació:

$$\begin{array}{l} 3x + 1 = 2x + 1 \rightarrow 3x - 2x = 1 - 1 \rightarrow x = 0 \\ y = 3 \cdot 0 + 1 = 1 \rightarrow y = 1 \end{array}$$

$\rightarrow$

El punt d'intersecció és

$(0, 1)$

Exercici: Calcula el punt d'intersecció de les rectes següents:

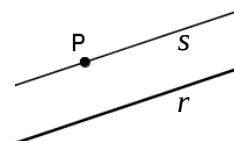
a) $r: 5x + 4y + 2 = 0$ i $s: x - 3y - 11 = 0$

b) $r: y = x - 10$ i $s: y = -2x + 2$

Sol.: a) $(2, -3)$ b) $(4, -6)$

Equació d'una recta paral·lela a una recta donada

Suposem que volem calcular l'equació d'una recta s que passa per un punt donat $P(p_1, p_2)$ i que és paral·lela a una recta donada r .



Les rectes r i s tenen la mateixa direcció i, per tant, el mateix vector director, el mateix pendent i el mateix vector característic.

Així, la recta s ve determinada pel punt P i la direcció de r (el vector director de r , el vector característic de r o pel pendent de r):

- Si $r: \frac{x-q_1}{v_1} = \frac{y-q_2}{v_2} \rightarrow s: \frac{x-p_1}{v_1} = \frac{y-p_2}{v_2}$
- Si $r: Ax + By + C = 0 \rightarrow s: Ax + By + C' = 0$ (calculem C' fent que P verifiqui l'equació)
- Si $r: y = mx + n \rightarrow s: y = mx + n'$ (calculem n' fent que P verifiqui l'equació)

Exemple: Troba l'equació de la recta s que passa pel punt $P(5, -2)$ i que és paral·lela a la recta donada r :

$$\text{a) } r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{-3} \rightarrow \boxed{s: \frac{x-5}{2} = \frac{y+2}{-3}}$$

$$\text{b) } r: 2x - y + 1 = 0 \rightarrow \boxed{s: 2x - y - 12 = 0}$$

$$\left. \begin{array}{l} s: 2x - y + C = 0 \\ P(5, -2) \in s \end{array} \right\} \rightarrow 2 \cdot 5 - (-2) + C = 0 \rightarrow 10 + 2 + C = 0 \rightarrow \boxed{C = -12}$$

$$\text{c) } r: y = -4x + 3 \rightarrow \boxed{s: y = -4x + 18}$$

$$\left. \begin{array}{l} s: y = -4x + n \\ P(5, -2) \in s \end{array} \right\} \rightarrow -2 = -4 \cdot 5 + n \rightarrow -2 = -20 + n \rightarrow n = -2 + 20 \rightarrow \boxed{n = 18}$$

Exercici: Troba l'equació de la recta s que passa pel punt $P(-1, -3)$ i que és paral·lela a la recta donada r :

a) $r: \frac{x-5}{-1} = \frac{y+4}{8}$

b) $r: x-7y-10=0$

c) $r: y=-x+5$

Sol.: a) $\frac{x+1}{-1} = \frac{y+3}{8}$ b) $x-7y-20=0$ c) $y=-x-4$

Punts de tall amb els eixos

Els eixos de coordenades són dues rectes, una recta horitzontal (eix OX) i una de vertical (eix OY). Les seves equacions són:

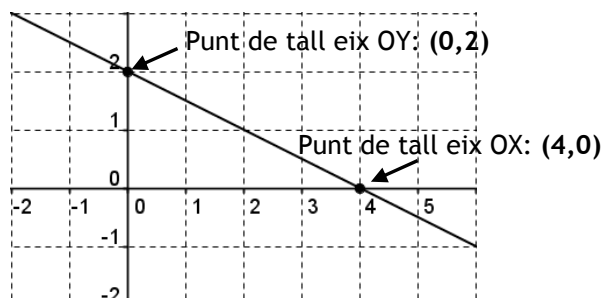
$y=0 \rightarrow$ Equació de l'eix OX (qualsevol punt de l'eix de les abscisses té l'ordenada igual a 0)

$x=0 \rightarrow$ Equació de l'eix OY (qualsevol punt de l'eix de les ordenades té l'abscissa igual a 0)

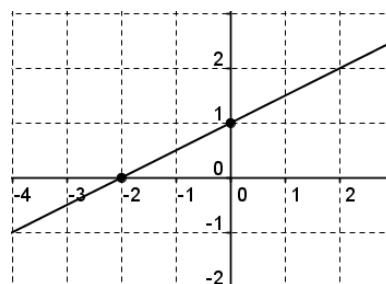
RECTES EN EL PLA

Una recta que no és ni horitzontal ni vertical tallarà els eixos de coordenades per dos punts (un punt de tall per cada eix).

Exemple: Indica les coordenades dels punts de tall amb els eixos de la recta següent:



Exercici: Indica les coordenades dels punts de tall amb els eixos de la recta següent:



Càlcul dels punts de tall amb els eixos

Per calcular el punt de tall d'una recta r amb un eix de coordenades, resollem el sistema format per l'equació de r i l'equació de l'eix.

Punt de tall amb l'eix OX

El punt de tall de la recta r amb l'eix OX és el punt de r que té l'ordenada igual a 0.

Per calcular-lo, substituïm y per 0 ($y = 0$) en l'equació de la recta i calculem x :

$$\text{Resolem el sistema: } \begin{cases} r: Ax + By + C \rightarrow \text{equació de } r \\ y = 0 \rightarrow \text{equació de l'eix OX} \end{cases}$$

Punt de tall amb l'eix OY

El punt de tall de la recta r amb l'eix OY és el punt de r que té l'abscissa igual a 0. Per calcular-lo, substituïm x per 0 ($x = 0$) en l'equació de la recta i calculem y :

$$\text{Resolem el sistema: } \begin{cases} r: Ax + By + C \rightarrow \text{equació de } r \\ x = 0 \rightarrow \text{equació de l'eix OY} \end{cases}$$

Exemple: Calcula els punts de tall amb els eixos de la recta $r: 2x - y + 4 = 0$:

Punt de tall amb l'eix OX:

$$\begin{aligned} \begin{cases} r: 2x - y + 4 = 0 \\ y = 0 \end{cases} &\rightarrow 2x - 0 + 4 = 0 \\ &\rightarrow 2x + 4 = 0 \rightarrow x = -\frac{4}{2} = -2 \rightarrow \boxed{(-2, 0)} \end{aligned}$$

Punt de tall amb l'eix OY:

$$\begin{aligned} \begin{cases} r: 2x - y + 4 = 0 \\ x = 0 \end{cases} &\rightarrow 2 \cdot 0 - y + 4 = 0 \\ &\rightarrow -y + 4 = 0 \rightarrow y = 4 \rightarrow \boxed{(0, 4)} \end{aligned}$$

RECTES EN EL PLA

Exercici: Calcula els punts de tall amb els eixos de la recta $r: 5x - 2y + 10 = 0$:

Sol.: (-2,0); (0,5)

Perpendicularitat de rectes

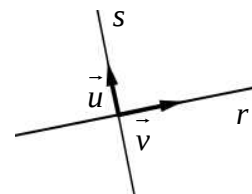
Dues rectes són **perpendiculars** si, i només si, els seus vectors directores són perpendiculars (el seu producte escalar és igual a zero).

Donades dues rectes r i s que tenen per vectors directores

$$\vec{v} = (v_1, v_2) \text{ i } \vec{u} = (u_1, u_2),$$

respectivament:

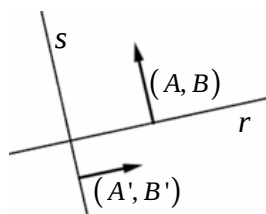
$$r \perp s \leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{u} \leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{u} = 0$$



Els seus vectors característics també són perpendiculars:

$$\begin{cases} r: Ax + By + C = 0 \\ s: A'x + B'y + C' = 0 \end{cases} \rightarrow r \perp s \leftrightarrow (A, B) \perp (A', B') \leftrightarrow (A, B) \cdot (A', B') = 0$$

Per saber si dues rectes són perpendiculars, n'hi ha prou de comprovar si els seus vectors directores o característics ho són.



RECTES EN EL PLA

Exemple: Esbrina si les rectes següents són perpendiculars:

a) $r: \frac{x-4}{3} = \frac{y+2}{-1}$ i $s: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{6} \rightarrow$ Els vectors directores són

$$\vec{v} = (3, -1) \text{ i } \vec{u} = (2, 6)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = (3, -1) \cdot (2, 6) = 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 6 = 6 - 6 = 0 \rightarrow \text{Són perpendiculars}$$

b) $r: x - y + 1 = 0$ i $s: x - 2y + 3 = 0$

$$(A, B) \cdot (A', B') = (1, -1) \cdot (1, -2) = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) = 1 + 2 = 3 \neq 0 \rightarrow \text{No són perpendiculars}$$

Exercici: Esbrina si les rectes següents són perpendiculars:

a) $r: \frac{x-4}{4} = \frac{y+2}{-3}$ i $s: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3}$

b) $r: 2x - 4y + 1 = 0$ i $s: 2x + y + 3 = 0$

Sol.: a) no b) sí

Pendents de rectes perpendiculars

Donades dues rectes r i s , de pendents m i m' , respectivament:

$$r \perp s \Leftrightarrow m' = -\frac{1}{m}$$

Demostració:

Els vectors directores de r i s són: $\vec{v} = (1, m)$ i $\vec{u} = (1, m')$

El producte escalar de $\vec{v}$ i $\vec{u}$ és: $(1, m) \cdot (1, m') = 1 \cdot 1 + m \cdot m' = 1 + m \cdot m'$

Les rectes seran perpendiculars si, i només si, $1 + m \cdot m' = 0$

$$r \perp s \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 1 + m \cdot m' = 0 \Leftrightarrow m \cdot m' = -1 \Leftrightarrow m' = -\frac{1}{m}$$

Exemple: Esbrina si les rectes següents són perpendiculars:

a) $r: y = 2x + 1$ i $s: y = -\frac{1}{2}x + 1$

$m = 2; m' = -\frac{1}{2} \rightarrow m' = -\frac{1}{m} \rightarrow$ Són perpendiculars

b) $r: y = 3x + 1$ i $s: y = \frac{1}{3}x + 1$

$m = 3; m' = \frac{1}{3} \rightarrow m' \neq -\frac{1}{m} \rightarrow$ No són perpendiculars

Exercici: Esbrina si les rectes següents són perpendiculars:

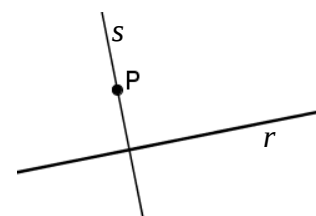
a) $r: y = x + 1$ i $s: y = -x - 5$

b) $r: y = 3x + 1$ i $s: y = -3x + 1$

Sol.: a) sí b) no

Equació d'una recta perpendicular a una recta donada

Suposem que volem calcular l'equació d'una recta s que passa per un punt donat $P(p_1, p_2)$ i que és perpendicular a una recta donada r .



Per determinar l'equació de la recta s , prenem el punt P i un vector director ortogonal al de r , o un vector característic ortogonal al de r , o el pendent igual a la inversa del pendent de r canviada de signe:

- Si (v_1, v_2) és un vector director de $r \rightarrow (-v_2, v_1)$ i $(v_2, -v_1)$ són vectors directores de s .
- Si (A, B) és un vector característic de $r \rightarrow (-B, A)$ i $(B, -A)$ són vectors característics de s .
- Si m és el pendent de $r \rightarrow -\frac{1}{m}$ és el pendent de s .

RECTES EN EL PLA

Així, obtenim que:

- Si $r: \frac{x-q_1}{v_1} = \frac{y-q_2}{v_2} \rightarrow s: \frac{x-p_1}{-v_2} = \frac{y-p_2}{v_1}$
- Si $r: Ax + By + C = 0 \rightarrow s: -Bx + Ay + C' = 0$ (calculem C' fent que P verifiqui l'equació)
- Si $r: y = mx + n \rightarrow s: y = -\frac{1}{m}x + n'$ (calculem n' fent que P verifiqui l'equació)

Exemple: Calcula l'equació de la recta s que passa pel punt $P(5, -2)$ i que és perpendicular a la recta donada r :

a) $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{-3} \rightarrow s: \frac{x-5}{3} = \frac{y+2}{2}$

b) $r: 2x - y + 1 = 0 \rightarrow s: x + 2y - 1 = 0$

$$\left. \begin{array}{l} s: x + 2y + C = 0 \\ P(5, -2) \in s \end{array} \right\} \rightarrow 5 + 2 \cdot (-2) + C = 0 \rightarrow 1 + C = 0 \rightarrow \boxed{C = -1}$$

c) $r: y = -4x + 3 \rightarrow s: y = \frac{1}{4}x - \frac{13}{4}$

$$\left. \begin{array}{l} s: y = \frac{1}{4}x + n \\ P(5, -2) \in s \end{array} \right\} \rightarrow -2 = \frac{1}{4} \cdot 5 + n \rightarrow -2 - \frac{5}{4} = n \rightarrow \boxed{n = -\frac{13}{4}}$$

Exercici: Calcula l'equació de la recta s que passa pel punt $P(-1, -3)$ i que és perpendicular a la recta r :

a) $r: \frac{x-5}{-1} = \frac{y+4}{8}$

b) $r: x - 7y - 10 = 0$

RECTES EN EL PLA

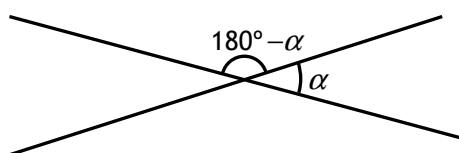
$$\text{c) } r: y = 2x + 5$$

$$\text{Sol.: a) } \frac{x+1}{-8} = \frac{y+3}{-1} \quad \text{b) } 7x + y + 10 = 0 \quad \text{c) } y = -\frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$$

Angle que formen dues rectes

Dues rectes secants formen quatre angles iguals dos a dos. Els angles diferents són suplementaris.

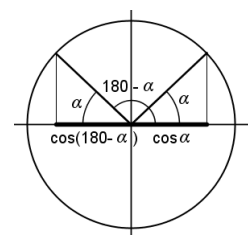
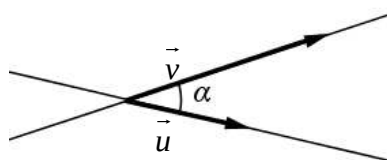
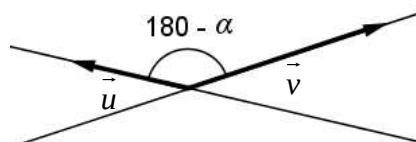
Anomenem **angle que formen dues rectes**, α , el menor dels angles que determinen.



Si les dues rectes són perpendiculars, $\alpha = 90^\circ$.

Si no són perpendiculars, $\alpha < 90^\circ$, és a dir, és un angle agut. Per tant, $\cos \alpha > 0$.

L'angle que formen els vectors directors de les rectes pot ser α o $180^\circ - \alpha$ (depenent dels sentits dels vectors directors). Però els cosinus d'aquests angles només es diferencien en el signe, atès que $\cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$:



Així, el cosinus de l'angle que formen dues rectes és el valor absolut del cosinus de l'angle que formen els seus vectors directors.

Si β és l'angle que formen els vectors directors, $\vec{v}$ i $\vec{u}$, de les rectes r i s , i α és l'angle que formen r i s :

$$\cos \alpha = |\cos \beta| = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{u}|}{|\vec{v}| |\vec{u}|} = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{u}|}{|\vec{v}| |\vec{u}|} \rightarrow$$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{u}|}{|\vec{v}| |\vec{u}|}$$

Prenem el valor absolut perquè $\cos \alpha$ sigui positiu i α sigui l'angle agut.

Exemple: Calcula l'angle que formen les rectes següents:

a) $r: \frac{x-4}{3} = \frac{y+2}{1}$ i $s: y = -4x + 3$

Els vectors directors són $\vec{v} = (3, 1)$ i $\vec{u} = (1, -4)$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{|(3, 1) \cdot (1, -4)|}{|(3, 1)| \cdot |(1, -4)|} = \frac{|3 \cdot 1 + 1 \cdot (-4)|}{\sqrt{3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-4)^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{170}} \rightarrow \boxed{\alpha = 85,6^\circ}$$

b) $r: x - y + 1 = 0$ i $s: x - 2y + 3 = 0$

Els vectors directors són $\vec{v} = (1, 1)$ i $\vec{u} = (2, 1)$

$$\cos \alpha = \frac{|(-B, A) \cdot (-B', A')|}{|(-B, A)| \cdot |(-B', A')|} = \frac{|(1, 1) \cdot (2, 1)|}{|(1, 1)| \cdot |(2, 1)|} = \frac{|1 \cdot 2 + 1 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \rightarrow \boxed{\alpha = 18,43^\circ}$$

Exercici: Calcula l'angle que formen les rectes següents:

a) $r: \frac{x-4}{3} = \frac{y+2}{2}$ i $s: y = -x + 3$

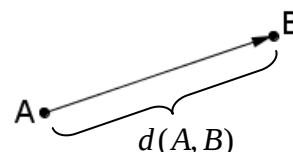
b) $r: x + 7y + 1 = 0$ i $s: 6x - 5y + 3 = 0$

Sol.: a) $\alpha = 78,69^\circ$ b) $\alpha = 58,32^\circ$

Distàncies**Distància entre dos punts**

La distància entre dos punts A i B del pla és la longitud del segment de recta que els uneix i coincideix amb el mòdul dels vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BA}$. Es r

$$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$$



Exemple: Calcula la distància entre els punts A(-2,5) i B(-3,4):

- Calculem els components del vector $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB} = (-3 - (-2), 4 - 5) = (-1, -1)$
- Calculem el mòdul del vector $\overrightarrow{AB}$:

$$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

Exercici: Calcula la distància entre els punts A(1,-3) i B(-3,7).

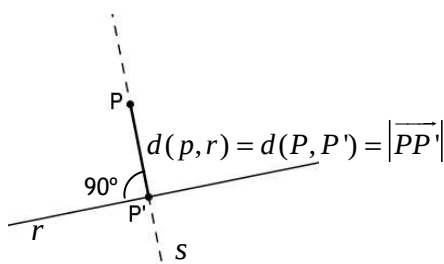
Sol.: $\sqrt{116}$

Distància d'un punt a una recta

La distància d'un punt P a una recta r és la menor de les distàncies entre P i els punts de r.

Es representa amb $d(P, r)$:

- Si P és un punt que pertany a la recta r, aleshores $d(P, r) = 0$.
- Si P és un punt exterior a la recta r, la distància entre P i r és la longitud del segment que uneix el punt P i un punt de r i és perpendicular a r.



El punt P' és el punt d'intersecció de r i la recta s (representada en línia discontinua) perpendicular a r que passa per P. Aquest punt s'anomena projecció ortogonal de P sobre r.

RECTES EN EL PLA

Per calcular la distància d'un punt $P(p_1, p_2)$ a una recta r d'equació general $r: Ax + By + C = 0$, apliquem la fórmula següent:

$$d(P, r) = \frac{|A \cdot p_1 + B \cdot p_2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Exemple:

1. Calcula la distància del punt $P(-2, 5)$ a la recta $r: 2x - y + 11 = 0$.

$$d(P, r) = \frac{|2 \cdot (-2) - 1 \cdot 5 + 11|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

2. Calcula l'àrea del triangle de vèrtexs els punts $A(1, 1)$, $B(5, 2)$ i $C(3, 4)$.

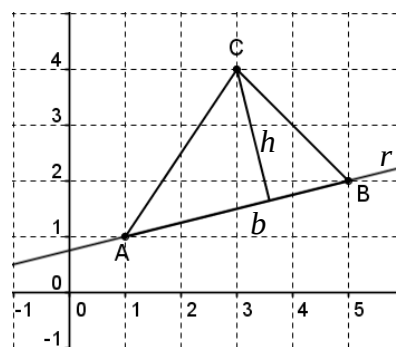
Recordem que la fórmula de l'àrea del triangle és:

$$A_{\text{triangle}} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Aleshores, per calcular l'àrea del triangle, necessitem calcular la longitud de la base, b , i la de l'altura, h .

Si prenem com a base el costat AB i anomenem r la recta que passa per A i B , tenim que:

$$b = |\overline{AB}| \quad h = d(C, r)$$



- Calculem b :

$$\overline{AB} = (5-1, 2-1) = (4, 1) \rightarrow b = |\overline{AB}| = |(4, 1)| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$$

- Calculem r :

$$\begin{aligned} \vec{v} = \overline{AB} = (4, 1) &\rightarrow (A, B) = (1, -4) \rightarrow r: x - 4y + C = 0 \\ A(1, 1) \in r &\rightarrow 1 - 4 \cdot 1 + C = 0 \rightarrow -3 + C = 0 \rightarrow C = 3 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \vec{v} = \overline{AB} = (4, 1) &\rightarrow (A, B) = (1, -4) \rightarrow r: x - 4y + C = 0 \\ A(1, 1) \in r &\rightarrow 1 - 4 \cdot 1 + C = 0 \rightarrow -3 + C = 0 \rightarrow C = 3 \end{aligned}} \right\} \rightarrow r: x - 4y + 3 = 0$$

- Calculem h i l'àrea:

$$h = d(C, r) = \frac{|3 - 4 \cdot 4 + 3|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2}} = \frac{|-10|}{\sqrt{17}} = \frac{10}{\sqrt{17}} \rightarrow A_{\text{triangle}} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{17} \cdot \frac{10}{\sqrt{17}}}{2} = 5$$

Exercici:

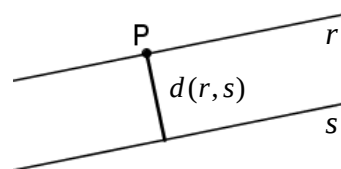
a) Calcula la distància del punt $P(-2,3)$ a la recta $r: 8x - 3y - 5 = 0$.

b) Calcula l'àrea del triangle de vèrtexs $A(-1,-2)$, $B(4,1)$ i $C(1,2)$.

Sol.: a) $\frac{30\sqrt{73}}{73}$ b) $A = 7$

Distància entre dues rectes

La distància entre dues rectes r i s és la menor de les distàncies entre els punts de r i els de s . Es representa amb $d(r,s)$.



- Si les rectes són secants o coincidents, aleshores $d(r,s) = 0$.
- Si les rectes són paral·leles, la distància entre r i s és igual a la distància entre un punt qualsevol d'una de les rectes i l'altra recta.

RECTES EN EL PLA

Així, per calcular la distància entre dues rectes paral·leles r i s , prenem un punt P de la recta r i calculem $d(P,s)$, o prenem un punt Q de la recta s i calculem $d(Q,r)$.

Exemple: Calcula la distància entre les rectes següents:

a) $r: x - 5y - 8 = 0$ i $s: -x + 2y + 3 = 0$

- Esbrinem si les rectes són paral·leles: $\frac{1}{-1} \neq \frac{-5}{2} \rightarrow$ No són paral·leles $\rightarrow d(r,s) = 0$

b) $r: 2x - 4y - 8 = 0$ i $s: -x + 2y + 3 = 0$

- Esbrinem si les rectes són paral·leles: $\frac{2}{-1} = \frac{-4}{2} \neq \frac{-8}{3} \rightarrow$ són paral·leles

- Calculem les coordenades d'un punt P de la recta r :

$$x = 0 \rightarrow 2 \cdot 0 - 4y - 8 = 0 \rightarrow -4y = 8 \rightarrow y = -2 \rightarrow \boxed{P(0, -2)}$$

- Calculem la distància entre P i s :

$$d(r,s) = d(P,s) = \frac{|-0 + 2 \cdot (-2) + 3|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \boxed{\frac{\sqrt{5}}{5}}$$

Exercici: Calcula la distància entre les rectes següents:

a) $r: \frac{x+4}{3} = \frac{y-2}{1}$ i $s: 2x - 6y + 3 = 0$

b) $r: 2x - 6y - 10 = 0$ i $s: -x + 3y + 3 = 0$

c) $r: x - y - 8 = 0$ i $s: 5x + 2y + 3 = 0$

Sol.: a) $\frac{17}{\sqrt{40}} = \frac{17\sqrt{10}}{20}$ b) $\frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$ c) 0

EXERCICIS: RECTES EN EL PLA

1. Dibuixa en uns eixos cartesianes la recta determinada per:
 - a) Els punts $A(-2,-1)$ i $B(2,3)$.
 - b) El punt $P(4,3)$ i el vector director $\vec{v}=(-3,-1)$.
 - c) El punt $P(-1,2)$ i l'angle que forma l'eix OX $\alpha=135^\circ$.
 - d) El punt $P(1,1)$ i el pendent $m=2$.
 - e) El punt $P(-4,1)$ i el pendent $m=\frac{2}{3}$.
 - f) El punt $P(-3,2)$ i el pendent $m=-1$.
2. Donada la recta r que passa pel punt $P(-5,-3)$ i que té per vector director $\vec{v}=(6,4)$:
 - a) Determina l'equació vectorial i les equacions paramètriques de la recta r .
 - b) Troba tres punts que pertanyin a la recta r .
 - c) Esbrina si els punts $A(-11,-7)$ i $B(2,-1)$ pertanyen a la recta r .
3. Donada la recta r que passa pel punt $P(4,-3)$ i que té per vector director $\vec{v}=(-2,7)$:
 - a) Determina l'equació contínua de la recta r .
 - b) Troba tres punts que pertanyin a la recta r .
 - c) Esbrina si els punts $A(8,-7)$ i $B(0,11)$ pertanyen a la recta r .
4. Donada la recta r que passa pel punt $P(-2,3)$ i que té per vector director $\vec{v}=(-1,4)$:
 - a) Determina l'equació general de la recta r .
 - b) Troba tres punts que pertanyin a la recta r .
 - c) Esbrina si els punts $A(-5,15)$ i $B(4,3)$ pertanyen a la recta r .
5. Troba l'equació general de la recta que passa pel punt P i que té per vector director $\vec{v}$, en els casos següents:
 - a) $P(4,3)$ i $\vec{v}=(-3,-1)$
 - b) $P(10,-2)$ i $\vec{v}=(-2,9)$
 - c) $P(-5,1)$ i $\vec{v}=(1,-1)$

EXERCICIS: RECTES EN EL PLA

6. Troba l'equació punt-pendent de la recta de pendent m i que passa pel punt P , en els casos següents:

a) $P(3,-4)$ i $m = 1$

b) $P(-2,-8)$ i $m = -5$

c) $P(3,4)$ i $m = \frac{2}{3}$

7. Donada la recta r que passa pel punt $P(7,-9)$ i que té per vector director $\vec{v} = (-2,4)$:

a) Determina l'equació explícita de la recta r .

b) Troba tres punts que pertanyin a la recta r .

c) Esbrina si els punts $A(5,-15)$ i $B(4,-3)$ pertanyen a la recta r .

8. Troba l'equació explícita de la recta que passa pel punt P i que té per vector director $\vec{v}$, en els casos següents:

a) $P(1,-1)$ i $\vec{v} = (4,3)$

b) $P(3,-2)$ i $\vec{v} = (-2,-8)$

c) $P(5,12)$ i $\vec{v} = (-1,0)$

9. Escriu les diferents equacions de la recta que passa pel punt $P(-5,3)$ i que té com a vector director el vector $\vec{v} = (-2,2)$.

10. Escriu les diferents equacions de la recta que passa pel punt $P(3,-8)$ i que té com a vector director el vector $\vec{v} = (5,2)$.

11. Troba un punt i un vector director de cadascuna de les rectes següents:

a) $(x,y) = (-10,-4) + k(-9,7)$

e) $\begin{cases} x = 2 - 8k \\ y = 3 + 6k \end{cases}$

i) $\begin{cases} x = -7 - k \\ y = 11 + k \end{cases}$

b) $\frac{x-15}{-1} = \frac{y+2}{6}$

f) $x-5 = \frac{y+4}{12}$

j) $\frac{-x-5}{-1} = \frac{4y+4}{8}$

c) $2x-5y+3=0$

g) $x+3y+1=0$

k) $-2x-y-12=0$

d) $y = -5x+10$

h) $y = -\frac{3}{2}x-2$

l) $y = x+4$

12. Troba el pendent de les rectes anteriors.

13. Troba l'equació contínua de la recta que passa pels punts $A(-1,4)$ i $B(-3,5)$.

14. Troba l'equació general de la recta que passa pels punts $A(1,-3)$ i $B(1,2)$.

EXERCICIS: RECTES EN EL PLA

15. Troba l'equació explícita de la recta que passa pels punts $A(-4,-3)$ i $B(-7,0)$.

16. Indica si els punts següents estan alineats:

a) $A(-1,-1)$, $B(2,1)$ i $C(8,5)$.

b) $D(-1,2)$, $E(0,0)$ i $F(2,-2)$.

17. Esbrina la posició relativa dels parells de rectes següents:

a) $r: 6x - 15y + 1 = 0$ i $s: -10x + 25y + 1 = 0$

b) $r: 2x - 10y + 8 = 0$ i $s: x + 5y + 4 = 0$

c) $r: y = 2x + 3$ i $s: y = 2x + 1$

d) $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{4}$ i $s: \frac{x-2}{-3} = \frac{y+4}{-12}$

e) $r: 2x + 6y + 4 = 0$ i $s: -3x - 9y - 6 = 0$

f) $r: y = x + 1$ i $s: y = -x + 1$

g) $r: y = 3x + \frac{1}{2}$ i $s: 6x - 2y + 1 = 0$

h) $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{4}$ i $s: 2x - y + 5 = 0$

18. Calcula el punt d'intersecció de les rectes secants de l'exercici anterior.

19. Calcula els punts de tall amb els eixos de les rectes:

a) $r: 2x - y + 8 = 0$

b) $s: -3x + 2y + 6 = 0$

c) $t: y = 5x + 3$

20. Troba l'equació de la recta paral·lela a la recta r i que passa pel punt P , en els casos següents:

a) $\begin{cases} r: 4x - 5y + 3 = 0 \\ P(-3, 5) \end{cases}$

b) $\begin{cases} r: \frac{x+5}{-2} = \frac{y+1}{-3} \\ P(4, -10) \end{cases}$

c) $\begin{cases} r: y = -5x + 3 \\ P(-1, 1) \end{cases}$

EXERCICIS: RECTES EN EL PLA

21. Indica si els parells de rectes següents són perpendiculars:

a) $r: x-5y+1=0$ i $s: 10x+2y-3=0$

b) $r: y=2x+4$ i $s: y=-\frac{1}{2}x+8$

c) $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{4}$ i $s: \frac{x-2}{4} = \frac{y+4}{-1}$

d) $r: x+y+4=0$ i $s: -x-y-1=0$

e) $r: y=x+1$ i $s: y=-x-2$

f) $r: \frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{7}$ i $s: 7x+3y+5=0$

22. Troba l'equació de la recta perpendicular a la recta r i que passa pel punt P , en els casos següents:

a) $\begin{cases} r: 4x-5y+3=0 \\ P(-3,5) \end{cases}$

b) $\begin{cases} r: \frac{x+5}{-2} = \frac{y+1}{-3} \\ P(4,-10) \end{cases}$

c) $\begin{cases} r: y=-5x+3 \\ P(-1,1) \end{cases}$

23. Donats els punts $A(-3,-3)$, $B(-1,0)$ i $C(2,-2)$, troba:

a) L'equació de la recta r que passa per A i B .

b) L'equació de la recta paral·lela a r i que passa per C .

c) L'equació de la recta perpendicular a r i que passa per C .

24. Calcula el valor de a perquè les rectes $r: 3x+ay+4=0$ i $s: 4x-2y-1=0$ siguin:

a) paral·leles

b) perpendiculars

25. Calcula l'angle que formen les rectes següents:

a) $r: x-y+1=0$ i $s: 7x+2y-3=0$

b) $r: y=-3x+4$ i $s: y=-x+1$

c) $r: 2x+y+4=0$ i $s: -3x+2y-1=0$

d) $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-5}{3}$ i $s: \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2}$

EXERCICIS: RECTES EN EL PLA

26. Calcula la distància entre els parells de punts següents:

a) $A(-1, -1)$ i $B(2, 3)$

b) $C(-2, 2)$ i $D(0, 5)$

27. Calcula la distància entre el punt P i la recta r , en els casos següents:

a) $\begin{cases} r: 4x - 5y + 3 = 0 \\ P(-3, 5) \end{cases}$

b) $\begin{cases} r: \frac{x+5}{-4} = \frac{y+1}{-3} \\ P(4, 5) \end{cases}$

c) $\begin{cases} r: y = -5x + 3 \\ P(-1, 1) \end{cases}$

28. Calcula la distància entre els parells de rectes següents:

a) $r: 2x - 3y + 1 = 0$ i $s: 4x - 6y - 3 = 0$

b) $r: y = -2x + 5$ i $s: 2x + y + 10 = 0$

c) $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{4}$ i $s: \frac{x-2}{2} = \frac{y+4}{-1}$

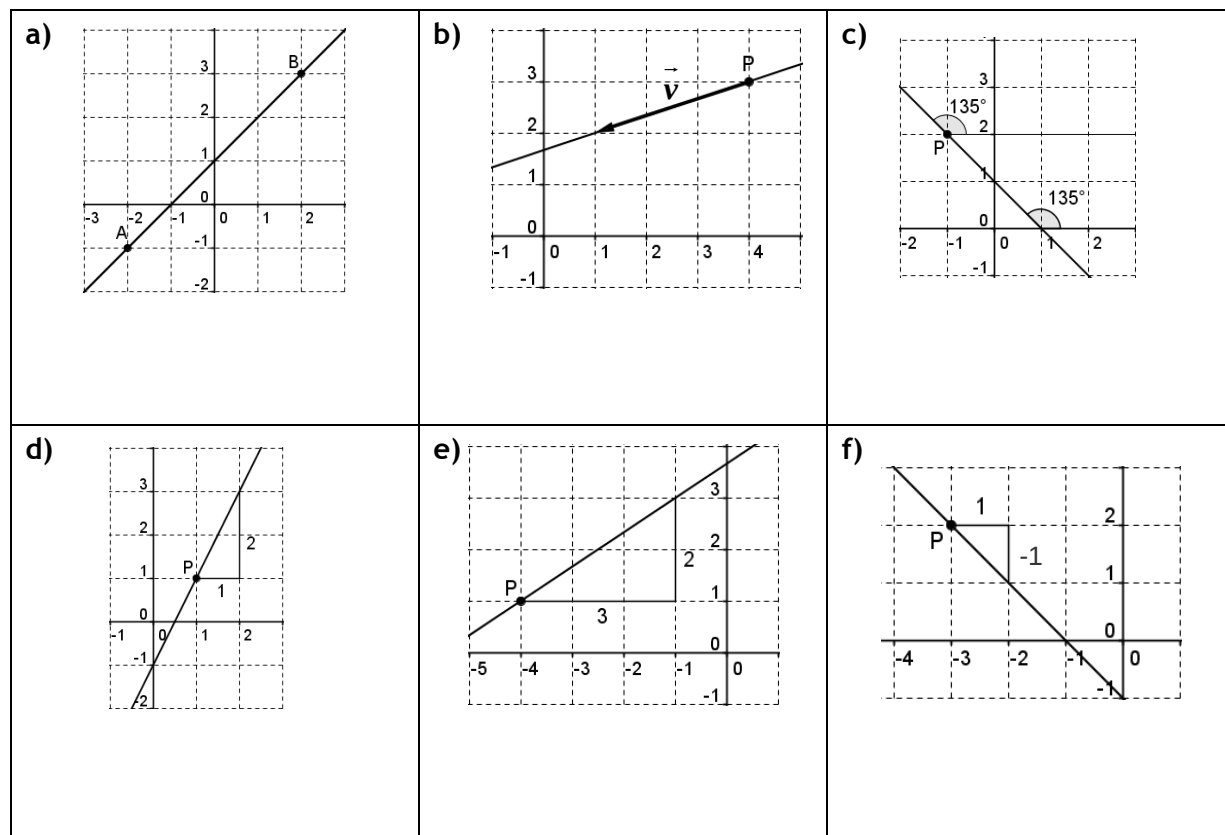
d) $r: y = x + 1$ i $s: y = x - 2$

29. Calcula l'àrea d'un triangle de vèrtexs $A(-3, -1)$, $B(3, 0)$ i $C(1, -2)$.

SOLUCIONS: RECTES EN EL PLA

Solucions

1.



2. a) Equació vectorial: $r: (x, y) = (-5, -3) + k(6, 4)$.

$$\text{Equacions paramètriques: } r: \begin{cases} x = -5 + 6k \\ y = -3 + 4k \end{cases}$$

b) Té infinites solucions. Per exemple:

$$k = 0 \rightarrow (-5, -3); \quad k = 1 \rightarrow (1, 1); \quad k = 2 \rightarrow (7, 5).$$

c) El punt **A** sí que pertany a la recta i el punt **B** no pertany a la recta.

3. a) $\frac{x-4}{-2} = \frac{y+3}{7}$

b) Té infinites solucions. Per exemple: $(6, -10)$; $(2, 4)$; $(-2, 18)$.

c) El punt **A** no pertany a la recta i el punt **B** sí que pertany a la recta.

4. a) $4x + y + 5 = 0$

b) Té infinites solucions. Per exemple: $(0, -5)$; $(1, -9)$; $(-1, -1)$.

SOLUCIONS: RECTES EN EL PLA

c) El punt **A** sí que pertany a la recta i el punt **B** no pertany a la recta.

5. a) $x - 3y + 5 = 0$

b) $9x + 2y - 86 = 0$

c) $x + y + 4 = 0$

6. a) $y + 4 = x - 3$

b) $y + 8 = -5(x + 2)$

c) $y - 4 = \frac{2}{3}(x - 3)$

7. a) $y = -2x + 5$

b) Té infinites solucions. Per exemple: $(0, 5)$; $(1, 3)$; $(2, 1)$.

c) El punt **A** no pertany a la recta i el punt **B** sí que pertany a la recta.

8. a) $y = \frac{3}{4}x - \frac{7}{4}$

b) $y = 4x - 14$

c) $y = 12$

9. Equació vectorial: $(x, y) = (-5, 3) + k(-2, 2)$

Equacions paramètriques:
$$\begin{cases} x = -5 - 2k \\ y = 3 + 2k \end{cases}$$

Equació contínua: $\frac{x+5}{-2} = \frac{y-3}{2}$

Equació general:
$$\begin{aligned} 2x + 2y + 4 &= 0 \\ \rightarrow x + y + 2 &= 0 \end{aligned}$$

Equació explícita: $y = -x - 2$

Equació punt-pendent: $y - 3 = -(x + 5)$

10. Equació vectorial: $(x, y) = (3, -8) + k(5, 2)$

Equacions paramètriques:
$$\begin{cases} x = 3 + 5k \\ y = -8 + 2k \end{cases}$$

Equació contínua: $\frac{x-3}{5} = \frac{y+8}{2}$

Equació general: $-2x + 5y + 46 = 0$

Equació explícita: $y = \frac{2}{5}x - \frac{46}{5}$

Equació punt-pendent: $y + 8 = \frac{2}{5}(x - 3)$

SOLUCIONS: RECTES EN EL PLA

11. a) $P(-10, -4); \vec{v} = (-9, 7)$ g) $P(-1, 0); \vec{v} = (-3, 1)$

b) $P(15, -2); \vec{v} = (-1, 6)$ h) $P(0, -2); \vec{v} = (2, -3)$

c) $P(1, 1); \vec{v} = (5, 2)$ i) $P(-7, 11); \vec{v} = (-1, 1)$

d) $P(0, 10); \vec{v} = (1, -5)$ j) $P(-5, -1); \vec{v} = (1, 2)$

e) $P(2, 3); \vec{v} = (-8, 6)$ k) $P(0, -12); \vec{v} = (1, -2)$

f) $P(5, -4); \vec{v} = (1, 12)$ l) $P(0, 4); \vec{v} = (1, 1)$

12. a) $-\frac{7}{9}$ b) -6 c) $\frac{2}{5}$ d) -5 e) $-\frac{3}{4}$ f) 12

g) $-\frac{1}{3}$ h) $-\frac{3}{2}$ i) -1 j) 2 k) -2 l) 1

13. $\frac{x+1}{-2} = \frac{y-4}{1}$

14. $x-1=0$

15. $y = -x - 7$

16. a) Sí que estan alineats b) No estan alineats

17. a) Paral·leles c) Paral·leles e) Coincidents g) Coincidents
b) Secants d) Paral·leles f) Secants h) Secants

18. b) $(-4, 0)$ f) $(0, 1)$ h) $(2, 9)$

19. a) $(-4, 0)$ i $(0, 8)$ b) $(2, 0)$ i $(0, -3)$ c) $\left(-\frac{3}{5}, 0\right)$ i $(0, 3)$

20. a) $4x - 5y + 37 = 0$ b) $\frac{x-4}{-2} = \frac{y+10}{-3}$ c) $y = -5x - 4$

21. a) sí b) sí c) sí d) no e) sí f) no

22. a) $5x + 4y - 5 = 0$ b) $\frac{x-4}{3} = \frac{y+10}{-2}$ c) $y = \frac{1}{5}x + \frac{6}{5}$

23. a) $-3x + 2y - 3 = 0$ b) $-3x + 2y + 10 = 0$ c) $2x + 3y + 2 = 0$

SOLUCIONES: RECTES EN EL PLA

24. a) $a = -\frac{3}{2}$

b) $a = 6$

25. a) $\alpha = 60,95^\circ$

b) $\alpha = 26,57^\circ$

c) $\alpha = 60,26^\circ$

d) $\alpha = 90^\circ$

26. a) $d(A, B) = 5$

b) $d(C, D) = \sqrt{13}$

27. a) $d(P, r) = \frac{34\sqrt{41}}{41}$

b) $d(P, r) = \frac{3}{5}$

c) $d(P, r) = \frac{7\sqrt{26}}{26}$

28. a) $d(r, s) = \frac{5}{\sqrt{52}} = \frac{5\sqrt{13}}{26}$

b) $d(r, s) = \frac{15}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}$

c) $d(r, s) = 0$

d)

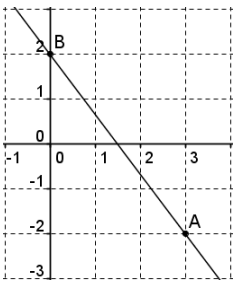
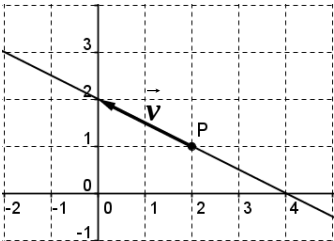
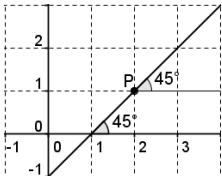
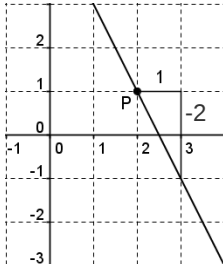
$$d(r, s) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

29. 5

SOLUCIONS: RECTES EN EL PLA

Solucions dels exercicis de la teoria

Determinació de rectes

Recta determinada per dos punts	Recta determinada per un punt i una direcció		
	a) 	b) 	c) 

Equacions de la recta

Equació vectorial

1.

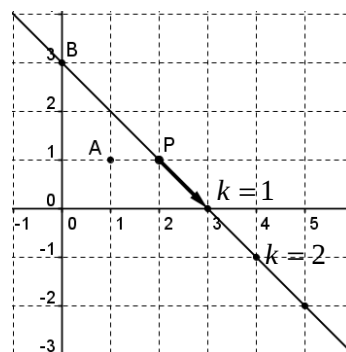
a) $r: (x, y) = (2, 1) + k(1, -1)$

b) Té infinites solucions. Per exemple:

$k = 0 \rightarrow (2, 1); k = 1 \rightarrow (3, 0); k = 2 \rightarrow (4, -1).$

c) El punt A no pertany a la recta

El punt B sí que pertany a la recta.



2. $P(1, -6); \vec{v} = (-5, 3)$

Equacions paramètriques

1.

a) $r: \begin{cases} x = -1 - 5k \\ y = 3 - k \end{cases}$

b) Té infinites solucions. Per exemple:

$k = 0 \rightarrow (-1, 3); k = 1 \rightarrow (-6, 2); k = 2 \rightarrow (-11, 1).$

c) El punt A no pertany a la recta i el punt B sí que pertany a la recta.

2. a) $P(-3, 7); \vec{v} = (-2, 6)$ b) $P(1, 5); \vec{v} = (-1, 0)$

SOLUCIONS: RECTES EN EL PLA

Equació contínua

1.

a) $\frac{x-8}{-3} = \frac{y+7}{-5}$

b) Té infinites solucions. Per exemple: $(8, -7)$; $(-1, -22)$; $(2, -17)$.

c) El punt **A** no pertany a la recta i el punt **B** sí que pertany a la recta.

2. a) $P(-5, 1)$; $\vec{v} = (9, -11)$

b) $P(4, 0)$; $\vec{v} = (1, 1)$

c) $P\left(-13, \frac{2}{3}\right)$; $\vec{v} = (-2, -3)$

Equació general

1.

a) $2x + y + 7 = 0$

b) Té infinites solucions. Per exemple: $(1, -7)$; $(2, -11)$; $(-1, -5)$.

c) El punt **A** sí que pertany a la recta i el punt **B** no pertany a la recta.

2. $P(1, 0)$; $\vec{v} = (-2, 1)$

Equació punt-pendent

1. $y - 2 = -3(x + 5)$

2. a) $P(1, -6)$; $m = -1$; $\vec{v} = (1, -1)$ b) $P(2, 1)$; $m = \frac{4}{3}$; $\vec{v} = (3, 4)$

Equació explícita

1.

a) $m = 2$

b) $y = 2x + 6$

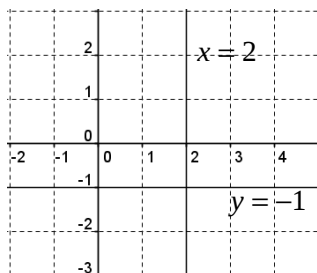
c) Té infinites solucions. Per exemple: $(0, 6)$; $(1, 8)$; $(2, 10)$.

d) El punt **A** no pertany a la recta i el punt **B** sí que pertany a la recta.

2. Punt de tall eix OY: $(0, -2)$; $m = 5$; $\vec{v} = (1, 5)$.

SOLUCIONS: RECTES EN EL PLA

Rectes horitzontals i verticals



Resum de les equacions de la recta

Equació vectorial: $(x, y) = (-1, 1) + k(-2, 6)$

Equacions paramètriques:
$$\begin{cases} x = -1 - 2k \\ y = 1 + 6k \end{cases}$$

Equació contínua: $\frac{x+1}{-2} = \frac{y-1}{6}$

Equació general: $6x + 2y + 4 = 0 \rightarrow 3x + y + 2 = 0$

Equació explícita: $y = -3x - 2$

Equació punt-pendent: $y - 1 = -3(x + 1)$

TEMA 6: NOMBRES COMPLEXOS

1. El conjunt dels nombres complexos.
2. Operacions amb nombres complexos.

1. EL CONJUNT DELS NOMBRES COMPLEXOS

Necessitat dels nombres complexos

En el conjunt dels nombres reals $\mathbb{R}$ no podem calcular les arrels d'índex parells dels nombres negatius. Per tal de poder-les calcular, s'amplia aquest conjunt. El nou conjunt s'anomena **conjunt dels nombres complexos**, i es representa amb $\mathbb{C}$.

Així, les equacions de segon grau que no tenen solució en $\mathbb{R}$ sí que en tenen en el conjunt $\mathbb{C}$.

Exemples:

$$\underline{1.} \sqrt{-2} \notin \mathbb{R} \qquad \underline{2.} x^2 + 2 = 0 \rightarrow \text{No té solució en } \mathbb{R}$$

Aquest conjunt té moltes aplicacions dintre de les matemàtiques. Nosaltres veurem només algunes definicions i resultats bàsics sobre aquest nou conjunt de nombres.

Construcció dels nombres complexos

Es defineix la **unitat imaginària** com $\sqrt{-1}$. Es representa amb i :

$$i = \sqrt{-1} \rightarrow i^2 = -1$$

Un **nombre complex** és un nombre de la forma $a + bi$, on a i b són dos nombres reals.

L'expressió $a + bi$ és la **forma binòmica** d'un nombre complex: a s'anomena **part real** i b , **part imaginària**.

$$z = \underbrace{a}_{\text{Part real}} + \underbrace{bi}_{\text{Part imaginària}} \rightarrow \text{forma binòmica d'un nombre complex} \quad \begin{cases} \text{Si } b = 0, z \text{ és un nombre real} \\ \text{Si } a = 0, z \text{ és un nombre imaginari} \end{cases}$$

Exemples:

$$\underline{1.} \quad 5 + 2i \rightarrow \begin{cases} \text{Part real} = 5 \\ \text{Part imaginària} = 2 \end{cases} \qquad \underline{2.} \quad -3 - i \rightarrow \begin{cases} \text{Part real} = -3 \\ \text{Part imaginària} = -1 \end{cases}$$

OPERACIONS AMB NOMBRES COMPLEXOS

$$\underline{3.} \quad 2i \rightarrow \begin{cases} \text{Part real} = 0 \\ \text{Part imaginària} = 2 \end{cases} \rightarrow \text{Nombre imaginari}$$

$$\underline{4.} \quad 4 \rightarrow \begin{cases} \text{Part real} = 4 \\ \text{Part imaginària} = 0 \end{cases} \rightarrow \text{Nombre real}$$

Vegem exemples de resolució d'equacions de segon grau en el conjunt dels nombres complexos:

Exemple: Resol les equacions següents en el conjunt dels nombres complexos:

$$\text{a) } x^2 + 2 = 0 \rightarrow x^2 = -2 \rightarrow x = \pm\sqrt{-2} = \pm\sqrt{2} \cdot \sqrt{-1} = \pm\sqrt{2}i = \begin{cases} \sqrt{2}i \\ -\sqrt{2}i \end{cases}$$

$$\text{b) } x^2 - 6x + 34 = 0 \rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 34}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{-100}}{2} = \frac{6 \pm 10i}{2} = 3 \pm 5i = \begin{cases} 3+5i \\ 3-5i \end{cases}$$

Exercici: Resol les equacions següents en el conjunt dels nombres complexos:

$$\text{a) } x^2 + 4 = 0$$

$$\text{b) } x^2 + 4x + 13 = 0$$

Sol.: a) $2i$; $-2i$ b) $-2+3i$; $-2-3i$

Representació gràfica de nombres complexos

Un nombre complex es pot representar en un sistema d'eixos cartesianes en què l'eix horitzontal s'anomena **eix real** i l'eix vertical s'anomena **eix imaginari**. El pla definit per aquests eixos rep el nom de **pla complex**.

El nombre complex $a + bi$ es representa amb el punt (a, b) , anomenat **afix** del nombre complex.

OPERACIONS AMB NOMBRES COMPLEXOS

Exemple: Representa els afixos dels nombres complexos següents:

$$z_1 = 3 + 2i$$

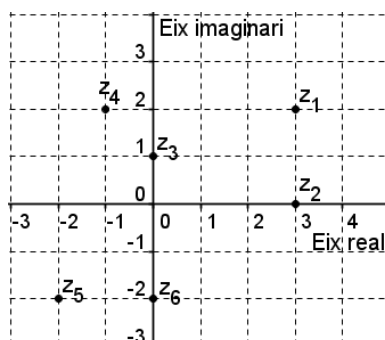
$$z_2 = 3$$

$$z_3 = i$$

$$z_4 = -1 + 2i$$

$$z_5 = -2 - 2i$$

$$z_6 = -2i$$



Exercici: Representa els afixos dels nombres complexos següents:

$$z_1 = 1 - 3i$$

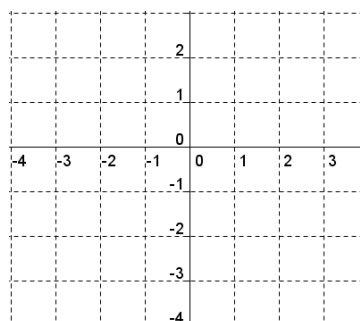
$$z_4 = -3 + 3i$$

$$z_2 = 2i$$

$$z_5 = -1 - 2i$$

$$z_3 = -i$$

$$z_6 = -3$$



Igualtat de nombres complexos

Dos nombres complexos $z = a + bi$ i $z' = a' + b'i$ són **iguals** si, i només si, les seves parts reals i imaginàries són iguals:

$$z = z' \leftrightarrow a = a' \text{ i } b = b'$$

Oposat i conjugat d'un nombre complex

L'**oposat** d'un nombre complex $z = a + bi$ és el nombre $-z = -a - bi$

El **conjugat** d'un nombre complex $z = a + bi$ és el nombre $\bar{z} = a - bi$.

Exemple: Calcula l'oposat i el conjugat de $z = -5 + 2i$.

$$\text{Oposat: } -z = 5 - 2i$$

$$\text{Conjugat: } \bar{z} = -5 - 2i$$

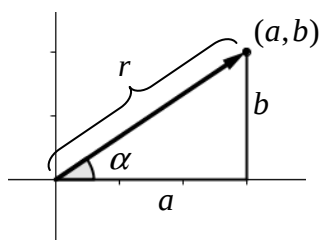
Exercici: Calcula l'oposat i el conjugat de $z = 4 - i$.

OPERACIONS AMB NOMBRES COMPLEXOS

Quan una equació de segon grau no té solució en el conjunt dels nombres reals, les solucions en el conjunt $\mathbb{C}$ són dos nombres complexos conjugats entre ells (un és conjugat de l'altre). Vegeu els exemples i l'exercici de l'apartat *Construcció dels nombres complexos*.

Forma polar d'un nombre complex

La **forma polar** d'un nombre complex $z = a + bi$ és la forma polar del vector de posició del seu afix, és a dir, la forma polar del vector (a, b) .



$$z = r_{\alpha} \rightarrow \begin{cases} r = |(a, b)| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \alpha \text{ angle que forma el vector } (a, b) \text{ amb la part positiva de l'eix real :} \\ \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} \end{cases}$$

Per passar de forma polar a forma binòmica apliquem la trigonometria:

$$\cos \alpha = \frac{a}{r} \rightarrow \boxed{a = r \cdot \cos \alpha}$$

$$\sin \alpha = \frac{b}{r} \rightarrow \boxed{b = r \cdot \sin \alpha}$$

Exemples:

1. Escriu el nombre complex $z = -5 + 2i$ en forma polar.

$$r = \sqrt{(-5)^2 + 2^2} = \sqrt{29}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{-5} = -0,4 \rightarrow \alpha = \begin{cases} -21,8^\circ \\ -21,8^\circ + 180^\circ = \boxed{158,2^\circ} \end{cases} \rightarrow \boxed{z = \sqrt{29}_{158,2^\circ}}$$

(z es troba en el segon quadrant)

2. Escriu el nombre complex $z = 8_{60^\circ}$ en forma binòmica.

$$a = 8 \cdot \cos 60^\circ = 4$$

$$b = 8 \cdot \sin 60^\circ = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \approx 6,93 \rightarrow \boxed{z = 4 + 4\sqrt{3}i}$$

OPERACIONS AMB NOMBRES COMPLEXOS

Exercicis:

1. Escribe los números complejos siguientes en forma polar:

a) $-2 + 2i$

b) -3

c) $2i$

2. Escribe los números complejos siguientes en forma binómica:

a) 7_{150°

b) 6_{180°

Sol.: 1. a) $\sqrt{8}_{135^\circ} = 2\sqrt{2}_{135^\circ}$ **b)** 3_{180° **c)** 2_{90° **2. a)** $-\frac{7\sqrt{3}}{2} + \frac{7}{2}i$ **b)** -6

2. OPERACIONS AMB NOMBRES COMPLEXOS

Suma i resta de nombres complexos

Per sumar i restar nombres complexos en forma binòmica, sumem i restem per separat les seves parts reals i imaginàries.

Donats dos nombres complexos $z = a + bi$ i $z' = a' + b'i$:

$$z + z' = (a + a') + (b + b')i$$

$$z - z' = (a - a') + (b - b')i$$

Exemple: Donats els nombres complexos $z = 3 + 4i$ i $z' = -2 + 5i$, calcula $z + z'$ i $z - z'$.

$$z + z' = (3 + 4i) + (-2 + 5i) = (3 + (-2)) + (4 + 5)i = \boxed{1 + 9i}$$

$$z - z' = (3 + 4i) - (-2 + 5i) = (3 - (-2)) + (4 - 5)i = \boxed{5 - i}$$

Exercici: Donats els nombres complexos $z = -1 + 7i$ i $z' = 3 - 6i$, calcula $z + z'$ i $z - z'$.

Sol.: $z + z' = 2 + i$; $z - z' = -4 + 13i$

Multiplicació de nombres complexos

En forma binòmica

Per multiplicar dos nombres complexos en forma binòmica, multipliquem cada sumand del primer nombre pels sumands del segon (propietat distributiva de la multiplicació respecte de la suma), tenint en compte que $i^2 = -1$.

Donats dos nombres complexos $z = a + bi$ i $z' = a' + b'i$:

$$z \cdot z' = (a + bi) \cdot (a' + b'i) = aa' + ab'i + ba'i + bb'i^2 = (aa' - bb') + (ab' + ba')i$$

OPERACIONS AMB NOMBRES COMPLEXOS

Exemple: Donats els nombres complexos $z = 3 + 4i$ i $z' = -2 + 5i$, calcula:

a) $z \cdot z' = (3 + 4i) \cdot (-2 + 5i) = 3 \cdot (-2) + 3 \cdot 5i + 4 \cdot (-2)i + (4 \cdot 5)i^2 = -6 + 15i - 8i - 20 = \boxed{-26 + 7i}$

b) $3z = 3 \cdot (3 + 4i) = 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4i = \boxed{9 + 12i}$ (el producte d'un nombre real per un nombre complex és un cas particular del producte de dos nombres complexos, en què un d'ells és real)

c) $3z + 2z' = 3 \cdot (3 + 4i) + 2 \cdot (-2 + 5i) = 9 + 12i - 4 + 10i = \boxed{5 + 22i}$

Exercici: Donats els nombres complexos $z = -1 + 7i$ i $z' = 3 - 6i$, calcula:

a) $z \cdot z' =$

b) $3z + 2z' =$

Sol.: a) $39 + 27i$ b) $3 + 9i$

En forma polar

Per multiplicar dos nombres complexos en forma polar, multipliquem els seus mòduls i sumem els seus arguments.

Donats dos nombres complexos $z = r_{\alpha}$ i $z' = r'_{\beta}$:

$$z \cdot z' = (r \cdot r')_{\alpha + \beta}$$

Exemple: Donats els nombres complexos $z = 3_{40^\circ}$ i $z' = 2_{25^\circ}$, calcula $z \cdot z'$.

$$z \cdot z' = 3_{40^\circ} \cdot 2_{25^\circ} = (3 \cdot 2)_{40^\circ + 25^\circ} = \boxed{6_{65^\circ}}$$

OPERACIONS AMB NOMBRES COMPLEXOS

Exercici: Donats els nombres complexos $z = 12_{120^\circ}$ i $z' = 3_{32^\circ}$, calcula $z \cdot z'$.

Sol.: 36_{152°

Divisió de nombres complexos

En forma binòmica

Per dividir nombres complexos en forma binòmica, els expressem en forma de fracció i multipliquem el numerador i el denominador pel conjugat del denominador.

Donats dos nombres complexos $z = a + bi$ i $z' = a' + b'i$:

$$\begin{aligned}\frac{a + bi}{a' + b'i} &= \frac{(a + bi) \cdot (a' - b'i)}{(a' + b'i) \cdot (a' - b'i)} = \frac{aa' + ab'i + ba'i + bb'i^2}{a'^2 - b'^2 i^2} = \frac{(aa' - bb') + (ab' + ba')i}{a'^2 + b'^2} = \\ &= \left[\frac{(aa' - bb')}{a'^2 + b'^2} + \frac{(ab' + ba')}{a'^2 + b'^2} i \right]\end{aligned}$$

Exemple: Donats els nombres complexos $z = 3 + 4i$ i $z' = -2 + 5i$, calcula $z \div z'$.

$$\begin{aligned}z \div z' &= \frac{z}{z'} = \frac{3 + 4i}{-2 + 5i} = \frac{(3 + 4i) \cdot (-2 - 5i)}{(-2 + 5i) \cdot (-2 - 5i)} = \frac{3 \cdot (-2) + 3 \cdot (-5i) + 4i \cdot (-2) + 4i \cdot (-5i)}{(-2)^2 + 5^2} \\ &= \frac{-6 - 15i - 8i - 20i^2}{29} = \frac{-6 - 15i - 8i + 20}{29} = \frac{14 - 23i}{29} = \left[\frac{14}{29} - \frac{23}{29}i \right]\end{aligned}$$

Exercici: Donats els nombres complexos $z = -1 + 7i$ i $z' = 3 - 6i$, calcula $z \div z'$.

Sol.: $-1 + \frac{1}{3}i$

OPERACIONS AMB NOMBRES COMPLEXOS

En forma polar

Per dividir dos nombres complexos en forma polar, dividim els seus mòduls i restem els seus arguments.

Donats dos nombres complexos $z = r_{\alpha}$ i $z' = r'_{\beta}$:

$$z : z' = (r : r')_{\alpha - \beta}$$

Exemple: Donats els nombres complexos $z = 3_{40^\circ}$ i $z' = 2_{25^\circ}$, calcula $z : z'$.

$$z : z' = 3_{40^\circ} : 2_{25^\circ} = \left(\frac{3}{2}\right)_{40^\circ - 25^\circ} = \left(\frac{3}{2}\right)_{15^\circ}$$

Exercici: Donats els nombres complexos $z = 12_{120^\circ}$ i $z' = 3_{32^\circ}$, calcula $z : z'$.

Sol.: 4_{88°

Potències de nombres complexos

Potències de la unitat imaginària

Vegem el valor de les primeres potències de la unitat imaginària i :

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = -(-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = i$$

Així, les potències de i prenen només els valors i , -1 , $-i$ i 1 , els quals es van repetint successivament en cicles de quatre. Cada quatre potències de i el resultat és 1 ($i^4 = 1$).

Per tant, $i^n = i^r$, on r és el residu de la divisió $n : 4$.

OPERACIONS AMB NOMBRES COMPLEXOS

Exemple: Calcula:

a) $i^{14} \rightarrow i^{14} = \underbrace{i^4 \cdot i^4 \cdot i^4}_{\text{tres vegades}} \cdot i^2 = i^{\boxed{2}} = \boxed{-1}$

$$\begin{array}{r} 14 \quad | \quad 4 \\ \hline 2 \quad 3 \end{array} \rightarrow 3 \text{ vegades } i^4$$

b) $i^{55} \rightarrow i^{55} = \underbrace{i^4 \cdot \dots \cdot i^4}_{13 \text{ vegades}} \cdot i^3 = i^{\boxed{3}} = \boxed{-i}$

$$\begin{array}{r} 55 \quad | \quad 4 \\ \hline 3 \quad 13 \end{array} \rightarrow 13 \text{ vegades } i^4$$

Exercici: Calcula:

a) i^{21}

b) i^{120}

Sol.: a) i b) 1

Potències de nombres complexos en forma binòmica

Per calcular $(a + bi)^n$, hem de multiplicar $a + bi$ per ell mateix n vegades.

Exemple: Calcula $(3 + 2i)^3$.

$$\begin{aligned} (3 + 2i)^3 &= (3 + 2i)^2 \cdot (3 + 2i) = (9 + 2 \cdot 3 \cdot 2i + (2i)^2) \cdot (3 + 2i) = (9 + 12i - 4) \cdot (3 + 2i) = \\ &= (5 + 12i) \cdot (3 + 2i) = 5 \cdot 3 + 5 \cdot 2i + 12 \cdot 3i + 12 \cdot 2i^2 = 15 + 10i + 36i - 24 = \boxed{-9 + 46i} \end{aligned}$$

Exercici: Calcula $(1 - 5i)^3$.

Sol.: $-74 + 110i$

OPERACIONS AMB NOMBRES COMPLEXOS

Potències de nombres complexos en forma polar

Calcular potències en forma polar és més senzill que fer-ho en forma binòmica. Vegem-ho:

$$(r_\alpha)^n = \underbrace{r_\alpha \cdot \dots \cdot r_\alpha}_{n \text{ vegades}} = \underbrace{(r \cdot \dots \cdot r)}_{n \text{ vegades}} \underbrace{\alpha + \dots + \alpha}_{n \text{ vegades}} = r^n r_{n \cdot \alpha}$$

Per elevar a n un nombre complex en forma polar, elevem el seu mòdul a n i multipliquem el seu argument per n :

$$(r_\alpha)^n = (r^n)_{n \cdot \alpha}$$

Exemple: Calcula $(3_{40^\circ})^3$ i $(4_{200^\circ})^5$.

$$(3_{40^\circ})^3 = (3^3)_{3 \cdot 40} = \boxed{27_{120^\circ}}$$

$$(4_{200^\circ})^5 = (4^5)_{5 \cdot 200} = 1024_{1000^\circ} = \boxed{1024_{280^\circ}}$$

Exercici: Calcula $(5_{35^\circ})^4$ i $(2_{153^\circ})^7$.

Sol.: 625_{140° ; 128_{351°

Radicació de nombres complexos

Calcularem les arrels de nombres complexos en forma polar, perquè és més senzill.

Una arrel n -èsima d'un nombre complex r_α és un nombre complex r'_β que verifica

$$(r'_\beta)^n = r_\alpha.$$

$$\sqrt[n]{r_\alpha} = r'_\beta \quad \Leftrightarrow \quad (r'_\beta)^n = r_\alpha$$

Tot nombre complex diferent de zero té n arrels n -èsimes, que tenen el mateix mòdul i diferents arguments. Vegem com es calculen:

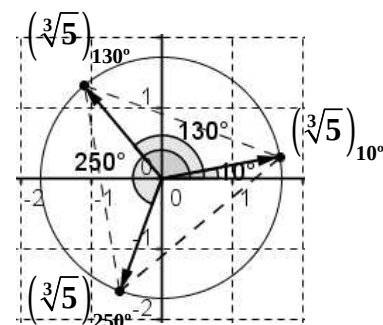
$$(r'_\beta)^n = r_\alpha \rightarrow \left[(r')^n \right]_{n \cdot \beta} = r_\alpha \rightarrow \begin{cases} (r')^n = r \rightarrow \boxed{r' = \sqrt[n]{r}} \\ n \cdot \beta = \alpha + 360^\circ k \rightarrow \boxed{\beta = \frac{\alpha + 360^\circ k}{n}} \text{ on } k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \end{cases}$$

OPERACIONS AMB NOMBRES COMPLEXOS

Exemples

1. Calcula $\sqrt[3]{5}_{30^\circ}$

$$\sqrt[3]{5}_{30^\circ} = \left(\sqrt[3]{5}\right)_{\frac{30^\circ+360^\circ k}{3}} \rightarrow \begin{cases} k=0 \rightarrow \left(\sqrt[3]{5}\right)_{\frac{30^\circ}{3}} = \boxed{\left(\sqrt[3]{5}\right)_{10^\circ}} \\ k=1 \rightarrow \left(\sqrt[3]{5}\right)_{\frac{30^\circ+360^\circ \cdot 1}{3}} = \boxed{\left(\sqrt[3]{5}\right)_{130^\circ}} \\ k=2 \rightarrow \left(\sqrt[3]{5}\right)_{\frac{30^\circ+360^\circ \cdot 2}{3}} = \boxed{\left(\sqrt[3]{5}\right)_{250^\circ}} \end{cases}$$



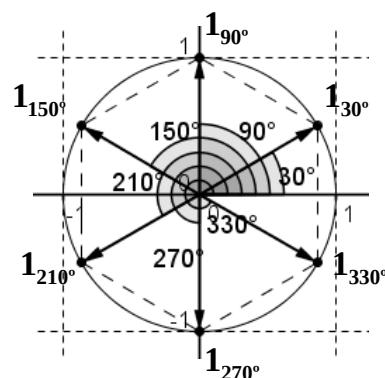
Prova:

$$\left(\left(\sqrt[3]{5}\right)_{10^\circ}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{5}\right)_{3 \cdot 10^\circ} = \boxed{5_{30^\circ}}; \quad \left(\left(\sqrt[3]{5}\right)_{130^\circ}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{5}\right)_{3 \cdot 130^\circ} = 5_{390^\circ} = \boxed{5_{30^\circ}};$$

$$\left(\left(\sqrt[3]{5}\right)_{250^\circ}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{5}\right)_{3 \cdot 250^\circ} = 5_{750^\circ} = \boxed{5_{30^\circ}}$$

2. Calcula $\sqrt[6]{-1} = \sqrt[6]{1}_{180^\circ}$

$$\sqrt[6]{1}_{180^\circ} = \left(\sqrt[6]{1}\right)_{\frac{180^\circ+360^\circ k}{6}} \rightarrow \begin{cases} k=0 \rightarrow 1_{\frac{180^\circ}{6}} = \boxed{1_{30^\circ}} \\ k=1 \rightarrow 1_{\frac{180^\circ+360^\circ \cdot 1}{6}} = \boxed{1_{90^\circ}} \\ k=2 \rightarrow 1_{\frac{180^\circ+360^\circ \cdot 2}{6}} = \boxed{1_{150^\circ}} \\ k=3 \rightarrow 1_{\frac{180^\circ+360^\circ \cdot 3}{6}} = \boxed{1_{210^\circ}} \\ k=4 \rightarrow 1_{\frac{180^\circ+360^\circ \cdot 4}{6}} = \boxed{1_{270^\circ}} \\ k=5 \rightarrow 1_{\frac{180^\circ+360^\circ \cdot 5}{6}} = \boxed{1_{330^\circ}} \end{cases}$$



Prova:

$$\left(1_{30^\circ}\right)^6 = 1^6_{6 \cdot 30^\circ} = \boxed{1_{180^\circ}}; \quad \left(1_{90^\circ}\right)^6 = 1^6_{6 \cdot 90^\circ} = 1_{540^\circ} = \boxed{1_{180^\circ}}; \quad \left(1_{150^\circ}\right)^6 = 1^6_{6 \cdot 150^\circ} = 1_{900^\circ} = \boxed{1_{180^\circ}}$$

$$\left(1_{210^\circ}\right)^6 = 1^6_{6 \cdot 210^\circ} = 1_{1.260^\circ} = \boxed{1_{180^\circ}}; \quad \left(1_{270^\circ}\right)^6 = 1^6_{6 \cdot 270^\circ} = 1_{1.620^\circ} = \boxed{1_{180^\circ}};$$

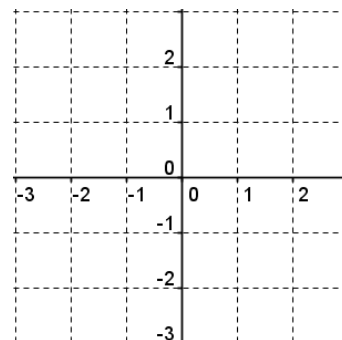
$$\left(1_{330^\circ}\right)^6 = 1^6_{6 \cdot 330^\circ} = 1_{1.980^\circ} = \boxed{1_{180^\circ}}$$

OPERACIONS AMB NOMBRES COMPLEXOS

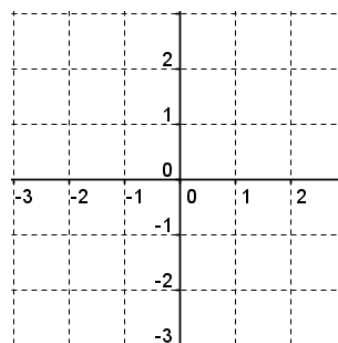
En la representació gràfica podem observar que, els afixos de les arrels n -èsimes (per a $n > 2$) d'un nombre complex són els vèrtexs d'un polígon regular de n costats, inscrit en una circumferència de radi igual al mòdul de les arrels.

Exercicis:

a) Calcula $\sqrt[3]{27}_{90^\circ}$. Representa les solucions gràficament i fes-ne la prova.



b) Calcula les arrels cinques de 32 i representa-les gràficament.



Sol.: a) 3_{30° ; 3_{150° ; $3_{270^\circ} = -3i$ **b)** 2_{0° ; 2_{72° ; 2_{144° ; 2_{216° ; 2_{288°

EXERCICIS: NOMBRES COMPLEXOS

Exercicis

1. Indica la part real i la part imaginària dels nombres complexos següents:

- a) $-3+5i$ b) $3+i$ c) $-2-i$ d) $-5i$ e) -10

2. Indica quin nombre complex de l'exercici anterior és real i quin és imaginari.

3. Calcula, en el conjunt dels nombres complexos, les arrels quadrades dels nombres següents:

- a) -25 b) -3 c) -49 d) $-\frac{9}{16}$ e) $-\frac{1}{4}$ f) -5

4. Resol les equacions de segon grau següents, en el conjunt dels nombres complexos:

- | | | |
|---------------|-------------------|-------------------|
| a) $x^2+9=0$ | e) $-5x^2-3=0$ | i) $x^2+x+1=0$ |
| b) $x^2+1=0$ | f) $x^2-2x+2=0$ | j) $2x^2-x+1=0$ |
| c) $x^2+3=0$ | g) $x^2+10x+29=0$ | k) $x^2+14x+50=0$ |
| d) $2x^2+8=0$ | h) $8x^2-4x+5=0$ | l) $x^2-x+8=0$ |

5. Representa gràficament, en uns eixos cartesianes, els afixos dels nombres complexos següents:

$$z_1 = -1+3i \quad z_2 = -3-2i \quad z_3 = -4 \quad z_4 = 5i \quad z_5 = -3i \quad z_6 = 2-i \quad z_7 = 4+i$$

6. Calcula l'oposat i el conjugat dels nombres complexos següents:

- a) $4+2i$ b) $6-i$ c) $-5i$ d) 4 e) $-1+i$ f) $-7-9i$

7. Expressa els nombres complexos següents en forma polar:

- a) $4+3i$ b) $-4-3i$ c) $1-i$ d) $-2+3i$ e) 5 f) -3 g) $2i$
h) $-2i$

8. Expressa els nombres complexos següents en forma binòmica:

- a) 9_{25° b) 1_{45° c) 3_{42° d) 7_{0° e) 7_{90° f) 7_{180°
g) 7_{270°

EXERCICIS: NOMBRES COMPLEXOS

9. Donats els nombres complexos

$$z_1 = 1 + 3i \quad z_2 = -5 + 4i \quad z_3 = -3 - i \quad z_4 = 2i$$

Calcula:

- | | | | | |
|----------------|----------------|--------------------|----------------|---------------|
| a) $z_1 + z_2$ | e) $z_1 - z_2$ | i) $z_1 \cdot z_2$ | m) $z_1 : z_2$ | q) z_1^2 |
| b) $z_1 + z_3$ | f) $z_1 - z_3$ | j) $z_1 \cdot z_3$ | n) $z_1 : z_3$ | r) z_2^3 |
| c) $z_2 + z_3$ | g) $z_2 - z_3$ | k) $z_2 \cdot z_3$ | o) $z_2 : z_3$ | s) z_4^3 |
| d) $z_1 + z_4$ | h) $z_1 - z_4$ | l) $z_1 \cdot z_4$ | p) $z_1 : z_4$ | t) z_4^{10} |

10. Donats els nombres complexos

$$z_1 = 2_{60^\circ} \quad z_2 = 5_{30^\circ} \quad z_3 = 1_{150^\circ}$$

Calcula:

- | | | | | | |
|--------------------|--------------------|----------------|------------|--------------------|--------------------|
| a) $z_1 \cdot z_2$ | c) $z_2 \cdot z_3$ | e) $z_1 : z_3$ | g) z_1^3 | i) z_3^5 | k) $\sqrt{z_2}$ |
| b) $z_1 \cdot z_3$ | d) $z_1 : z_2$ | f) $z_2 : z_3$ | h) z_2^2 | j) $\sqrt[4]{z_1}$ | l) $\sqrt[6]{z_3}$ |

Soluciones

	a)	b)	c)	d)	e)
Part real	-3	3	-2	0	-10
Part imaginària	5	1	-1	-5	0

3. a) $5i; -5i$ b) $\sqrt{3}i; -\sqrt{3}i$ c) $7i; -7i$ d) $\frac{3}{4}i; -\frac{3}{4}i$ e) $\frac{1}{2}i; -\frac{1}{2}i$ f) $\sqrt{5}i; -\sqrt{5}i$

a) $3i; -3i$. **e)** $\sqrt{\frac{3}{5}}i; -\sqrt{\frac{3}{5}}i$. **i)** $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

b) $i; -i$. **f)** $1+i; 1-i$. **j)** $\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4}i; \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4}i$.

c) $\sqrt{3}i; -\sqrt{3}i$. **g)** $-5+2i; -5-2i$. **k)** $-7+i; -7-i$.

d) $2i; -2i$. **h)** $\frac{1}{4} + \frac{3}{4}i; \frac{1}{4} - \frac{3}{4}i$. **l)** $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{31}}{2}i; \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{31}}{2}i$.

Diagrama de lazo en el plano complejo. El eje horizontal es el eje real (Eix real) y el eje vertical es el eje imaginari (Eix imaginari). Se muestran los polos z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 y los ceros z_6, z_7 .

a) Oposat: $-4-2i$ Conjugat: $4-2i$	d) Oposat: -4 Conjugat: 4
b) Oposat: $-6+i$ Conjugat: $6+i$	e) Oposat: $1-i$ Conjugat: $-1-i$
c) Oposat: $5i$ Conjugat: $5i$	f) Oposat: $7+9i$ Conjugat: $-7+9i$

7. a) $5_{36,87^\circ}$ b) $5_{216,87^\circ}$ c) $\sqrt{2}_{315^\circ}$ d) $\sqrt{13}_{123,69^\circ}$ e) 5_{0° f) 3_{180° g) 2_{90°
h) 2_{270°

SOLUCIONS: NOMBRES COMPLEXOS

8. a) $8,16+3,8i$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ c) $2,23+2,01i$ d) 7 e) $7i$ f) -7
 g) $-7i$

9.

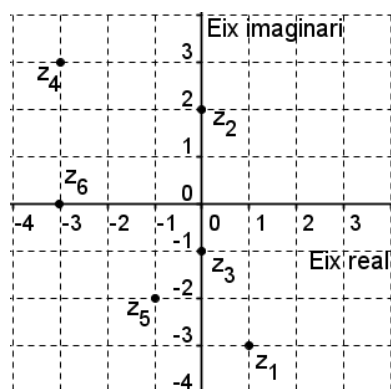
a) $-4+7i$	g) $-2+5i$	m) $\frac{7}{41}-\frac{19}{41}i$	q) $-8+6i$
b) $-2+2i$	h) $1+i$		r) $115+236i$
c) $-8+3i$	i) $-17-11i$	n) $-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$	s) $-8i$
d) $1+5i$	j) $-10i$	o) $\frac{11}{10}-\frac{17}{10}i$	t) -1024
e) $6-i$	k) $19-7i$		
f) $4+4i$	l) $-6+2i$	p) $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$	

10.

a) $10_{90^\circ} = 10i$	c) $5_{180^\circ} = -5$	e) $2_{270^\circ} = -2i$	g) $8_{180^\circ} = -8$
b) 2_{210°	d) $\left(\frac{2}{5}\right)_{30^\circ}$	f) 5_{240°	h) 25_{60°
i) 1_{30°		k) $\sqrt{5}_{15^\circ}; \sqrt{5}_{195^\circ}$	
j) $\sqrt[4]{2}_{15^\circ}; \sqrt[4]{2}_{105^\circ}; \sqrt[4]{2}_{195^\circ}; \sqrt[4]{2}_{285^\circ}$		l) $1_{25^\circ}; 1_{85^\circ}; 1_{145^\circ}; 1_{205^\circ}; 1_{265^\circ}; 1_{325^\circ}$	

Solucions dels exercicis de la teoria

Representació gràfica de nombres complexos



Oposat i conjugat d'un nombre complex

Oposat: $-z = -4+i$

Conjugat: $\bar{z} = 4+i$