

Curs de preparació per a la prova
d'accés a cicles formatius de
grau superior

Matemàtiques

BLOC 3:

FUNCIONS I GRÀFICS

AUTORA: Alícia Espuig Bermell

Bloc 3: Funcions i gràfics

Tema 7: Funcions.....3

Tema 8: Derivades...73

TEMA 7: FUNCIONS

1. Funcions.
2. Límits de funcions.
3. Continuitat de funcions.

1. FUNCIONS

Concepte de funció

Una **magnitud** és una qualitat que pot ser mesurada (com ara la massa, l'alçada, la temperatura, el preu, el temps, la longitud, la superfície, el volum, la velocitat...). Si una magnitud no és constant, s'anomena **variable**.

Una **funció** és un tipus de relació de dependència entre dues variables.

Aquesta relació de dependència pot ser una fórmula, un text, una gràfica o una taula, que ens permet calcular el valor d'una magnitud determinada, anomenada **variable dependent**, a partir del valor d'una altra magnitud, anomenada **variable independent**. La variable independent se sol representar amb la lletra x i la variable dependent se sol representar amb la lletra y (tot i que també es poden utilitzar altres lletres):

x = variable independent y = variable dependent
--

No totes les relacions de dependència són funcions. Una relació de dependència és una **funció** si a cada valor de la variable independent (x) li correspon, com a màxim, un únic valor de la variable dependent (y). Aleshores, diem que **y és funció de x** i escrivim **$y = f(x)$** .

Si x i y prenen valors reals, direm que la **funció és real de variable real**.

En aquest tema, quan parlem d'una funció ens estarem referint a una funció real de variable real.

Formes d'expressar una funció

Tal com hem dit, una funció es pot expressar com:

- Un text.
- Una fórmula, anomenada **expressió algebraica** de la funció (no totes les funcions admeten expressió algebraica).
- Una taula de valors (encara que no aporta una informació completa de la funció).
- Una gràfica.

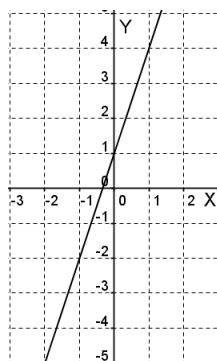
EXERCICIS: FUNCIONS

Exemple: Vegem una mateixa funció expressada de diferents maneres:

- **Text:** Funció que a cada nombre real li fa correspondre *el seu triple més una unitat*.
- **Expressió algebraica:** $y = 3x + 1$ (també es pot escriure $f(x) = 3x + 1$)
- **Taula de valors:**

x	-2	-1	0	1	2
y	-5	-2	1	4	7

- **Gràfica:**



La gràfica d'aquesta funció és una *recta*.

Cada punt (x,y) de la recta verifica la relació de dependència $y = 3x + 1$.

Donat un valor qualsevol de x, podem veure en la gràfica quin valor de y li correspon.

Exercicis: Troba les altres formes d'expressar les funcions següents:

a) Funció que a cada nombre real li fa correspondre *el seu quadrat*.

b) $f(x) = x^3 - 1$

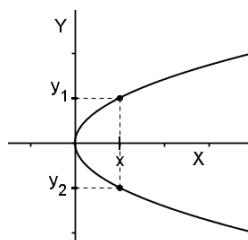
EXERCICIS: FUNCIONS

Gràfiques que no corresponen a funcions

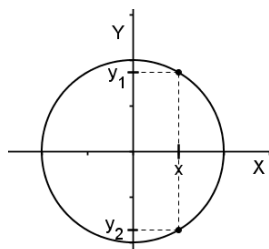
Vegem dos exemples de gràfiques que no corresponen a una funció, perquè no verifiquen la condició que a cada valor de x li correspon, com a màxim, un únic valor de y .

Exemples:

1.



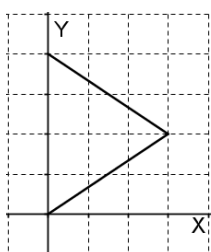
2.



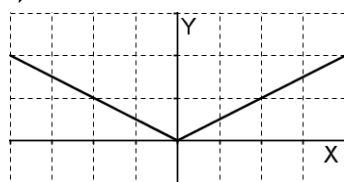
No són funcions perquè a alguns valors de x li corresponen dos valors de y .

Exercici: Indica quines de les gràfiques següents corresponen a una funció:

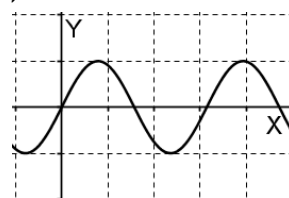
a)



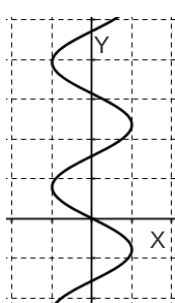
b)



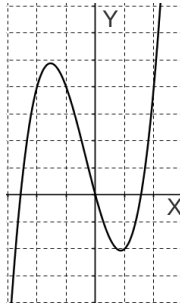
c)



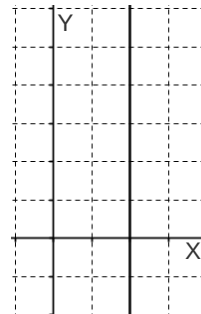
d)



e)



f)



Exemples de funcions

Vegem alguns exemples de funcions en la vida quotidiana.

EXERCICIS: FUNCIONS

Exemples:

1. Una companyia de telefonia mòbil ens ofereix tres tipus de tarifes per fer trucades nacionals:

- **Tarifa A:** Es factura 1 € per l'establiment de trucada i 50 cèntims per minut.
- **Tarifa B:** No es factura per l'establiment de trucada, però es factura 1 € per minut.
- **Tarifa C:** Es facturen 5 € per cada trucada nacional.

En les tarifes A i B es factura per fracció de minut (es cobra la duració exacta de la trucada).

Per a cada cas, fes un estudi de la funció que relaciona el cost d'una trucada amb la seva durada. Quina tarifa ens interessa més si normalment fem trucades d'un minut? I si les fem de cinc minuts? I si fem trucades llargues de més de 10 minuts?

- Identifiquem la variable independent i la dependent:

x = variable independent = minuts que dura la trucada

y = variable dependent = preu en €

El preu depèn de la durada de la trucada.

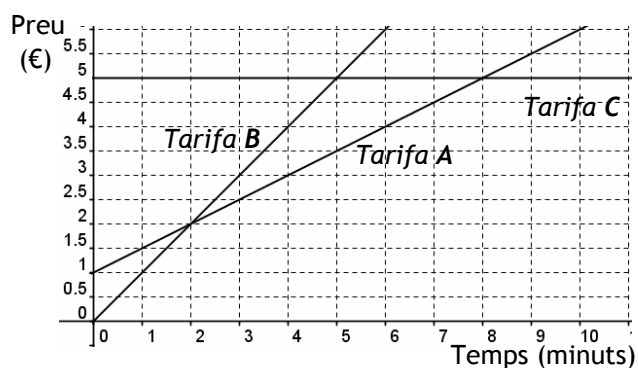
- Elaborem una taula de valors, deduïm l'expressió algebraica i fem la representació gràfica:

Taules de valors i expressions algebraiques

Tarifa A		Tarifa B		Tarifa C	
x	y	x	y	x	y
0	1	0	0	0	5
1	1,50	1	1	1	5
2	2	2	2	2	5
2	2,50	2	3	2	5
3	3	3	4	3	5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
4	1+0,5·10 = 6	4	10	4	5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
10	1+0,5· x	10	x	10	5
x		x		x	
$y = 1 + 0,5x$		$y = x$		$y = 5$	

EXERCICIS: FUNCIONS

Representacions gràfiques



- Per fer trucades d'un minut: ens interessa la *tarifa B*.
- Per fer trucades de cinc minuts: ens interessa la *tarifa A*.
- Per fer trucades de més de deu minuts: ens interessa la *tarifa C*

Tarifa A: És una *funció afí* (té per gràfic una recta que no passa per l'origen).

Tarifa B: És una *funció lineal* (té per gràfic una recta que passa per l'origen)

Tarifa C: És una *funció constant* (té per gràfic una recta horitzontal).

2. Estudia la funció que ens permet calcular l'àrea d'un quadrat conegut el seu costat.

- Identifiquem la variable independent i la dependent:

x = variable independent = longitud del costat en cm

y = variable dependent = àrea en cm^2

L'àrea depèn de la longitud del costat.

- Elaborem una taula de valors, deduïm l'expressió algebraica i fem la representació gràfica:

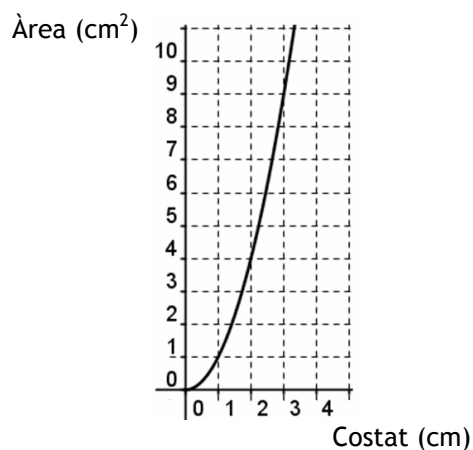
EXERCICIS: FUNCIONS

Taula de valors

x	y
0	0
1	1
2	4
3	9
⋮	⋮
⋮	x^2
x	

Expressió algebraica: $y = x^2$

Representació gràfica



És una *funció quadràtica* (té per

3. La tarifa de preus d'un aparcament és la següent: 1,5 € per la primera hora o fracció més 1 € per cada hora o fracció a partir de la primera hora, amb un màxim diari (fins a 24 hores) de 12,5 €.

Fes un estudi de la funció que relaciona el preu de l'aparcament amb el temps.

- Identifiquem la variable independent i la dependent:

x = variable independent = temps en hores

y = variable dependent = preu en €

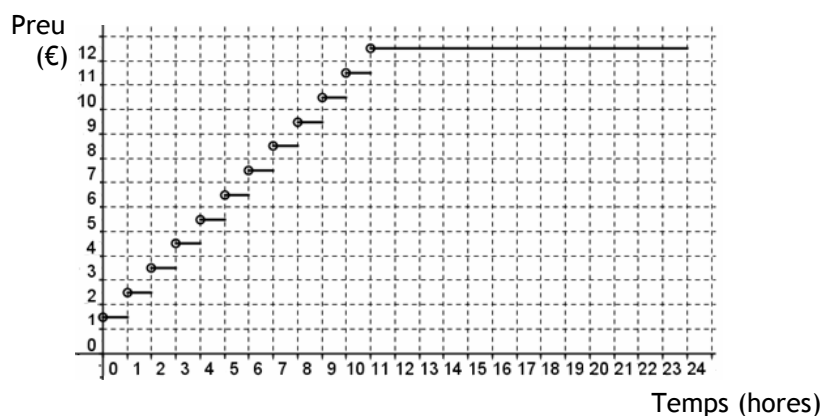
El preu depèn del temps

- Elaborem una taula de valors, deduïm l'expressió algebraica i fem la representació gràfica:

Taula de valors

x	y
(0,1]	1,5
(1,2]	2,5
(2,3]	3,5
⋮	⋮
⋮	11,5
(10,11]	12,5
(11,24]	12,5

Representació gràfica



EXERCICIS: FUNCIONS

Expressió algebraica:

$$y = \begin{cases} 1,5 & \text{si } x \in (0,1] \\ 2,5 & \text{si } x \in (1,2] \\ \vdots & \\ 11,5 & \text{si } x \in (10,11] \\ 12,5 & \text{si } x \in (11,24] \end{cases}$$

És una *funció definida a trossos*

Exercicis: Completa:

a) Un grup d'alumnes vol anar d'excursió a la neu. Llogar un autobús de seixanta places per fer aquesta excursió costa 600 €. Volem saber quant hauria de pagar cada alumne/a pel concepte de transport, en funció del nombre d'alumnes que hi vagin.

Fes un estudi de la funció del cost del transport per alumne segons el nombre d'alumnes.

- Identifiquem la variable independent i la dependent:

x = variable independent =

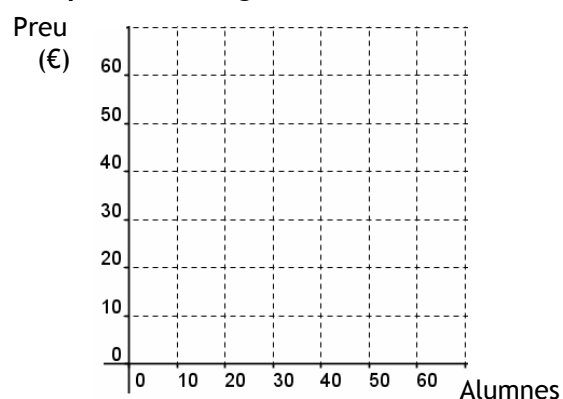
y = variable dependent =

- Elaborem una taula de valors, deduïm l'expressió algebraica i fem la representació gràfica:

Taula de valors

x	y
10	
20	
30	
40	
50	
60	
x	

Representació gràfica



Expressió algebraica:

EXERCICIS: FUNCIONS

- b) En un laboratori es vol fer un cultiu d'un bacteri que cada hora es divideix en dos bacteris. Es comença el cultiu amb un sol bacteri. Quants bacteris hi haurà al cap de dues hores? I al cap de tres? I al cap de deu? I al cap de 24?

Fes un estudi de la funció que ens permet calcular el nombre de bacteris en funció del temps transcorregut.

- Identifiquem la variable independent i la dependent:

x = variable independent =

y = variable dependent =

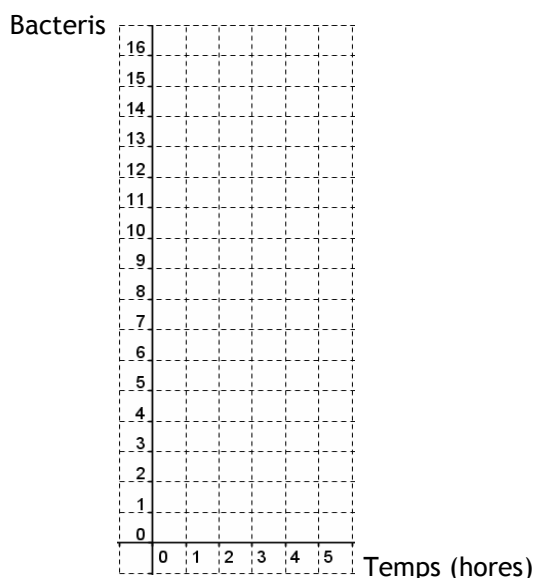
- Elaborem una taula de valors, deduïm l'expressió algebraica i fem la representació gràfica:

Taula de valors

x	y
1	
2	
3	
4	
5	
6	
x	
10	
24	

Expressió algebraica:

Representació gràfica



Imatges i antiimatges

Si $y = f(x)$, diem que y és la imatge de x per f i que x és l'antiimatge de y per f .

Per la definició de funció, cada valor de x té, com a màxim, una sola imatge.

Tanmateix, un valor de y pot tenir més d'una antiimatge.

EXERCICIS: FUNCIONS

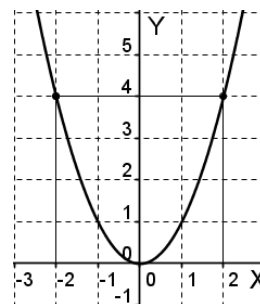
Exemples: Vegem, a partir de la taula de valors de dues funcions, exemples d'imatges i antiimatges:

1. $f(x) = 2x + 1$

x	y	
-2	-3	→ -3 és la imatge de -2 i -2 és l'antiimatge de -3 → S'escriu: $f(-2) = -3$ i $f^{-1}(-3) = -2$
-1	-1	→ -1 és la imatge de -1 i -1 és l'antiimatge de -1 → S'escriu: $f(-1) = -1$ i $f^{-1}(-1) = -1$
0	1	→ 1 és la imatge de 0 i 0 és l'antiimatge de 1 → S'escriu: $f(0) = 1$ i $f^{-1}(1) = 0$
1	3	→ 3 és la imatge de 1 i 1 és l'antiimatge de 3 → S'escriu: $f(1) = 3$ i $f^{-1}(3) = 1$
2	5	→ 5 és la imatge de 2 i 2 és l'antiimatge de 5 → S'escriu: $f(2) = 5$ i $f^{-1}(5) = 2$

2. $f(x) = x^2$

x	y	
-2	4	Tots els valors positius tenen dues antiimatges per f :
-1	1	- Les antiimatges de 4 són -2 i 2
0	0	→ s'escriu $f^{-1}(4) = \{-2, 2\}$
1	1	- Les antiimatges de 1 són 1 i -1
2	4	→ s'escriu $f^{-1}(1) = \{-1, 1\}$



Per calcular la imatge d'un valor de x , substituïm aquest valor per x en l'expressió algebraica de la funció i fem els càlculs corresponents.

Per calcular l'antiimatge d'un valor de y , substituïm aquest valor per y en l'expressió algebraica de la funció i aïllem x .

Exemples:

1. Donada la funció $f(x) = 3x + 5$, calcula la imatge de 2 i l'antiimatge de -1:

- Imatge de 2: $f(2) = 3 \cdot 2 + 5 = 11 \rightarrow f(2) = 11$ La imatge de 2 és 11.

- Antiimatge de -1: $-1 = 3x + 5 \rightarrow -1 - 5 = 3x \rightarrow x = \frac{-6}{3} = -2 \rightarrow f^{-1}(-1) = -2$

L'antiimatge de -1 és -2.

EXERCICIS: FUNCIONS

2. Donada la funció $f(x) = x^2 + 5$, calcula la imatge de 3 i totes les antiimatges de 9:

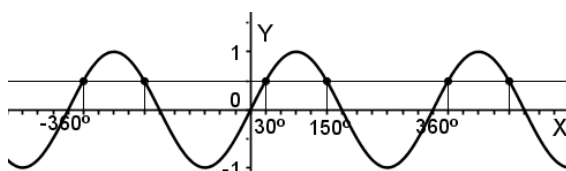
- Imatge de 3: $f(3) = 3^2 + 5 = 14 \rightarrow f(3) = 14$ La imatge de 3 és 14.

- Antiimatges de 9: $9 = x^2 + 5 \rightarrow 9 - 5 = x^2 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \rightarrow f^{-1}(9) = \{-2, 2\}$

Les antiimatges de 9 són -2 i 2.

3. Donada la funció $f(x) = \sin x$, calcula les antiimatges de 0,5.

$0,5 = \sin x \rightarrow x = \begin{cases} 30^\circ + 360^\circ k & k \in \mathbb{Z} \\ 150^\circ + 360^\circ k & k \in \mathbb{Z} \end{cases} \rightarrow 0,5 \text{ té infinites antiimatges per } f.$
 $\rightarrow f^{-1}(0,5) = \{30^\circ + 360k, 150^\circ + 360k / k \in \mathbb{Z}\}$

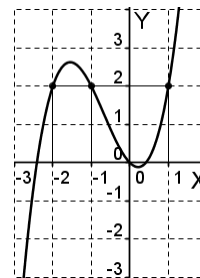


4. Donada la funció $f(x) = x^3 + 2x^2 - x$, calcula les antiimatges de 2.

$$2 = x^3 + 2x^2 - x \rightarrow 0 = x^3 + 2x^2 - x - 2$$

Resolem l'equació de grau 3 aplicant la regla de Ruffini i obtenim: $x = -2, x = -1, x = 1$.

$$\rightarrow f^{-1}(2) = \{-2, -1, 1\}$$



Exercici:

a) Donada la funció $f(x) = -5x - 1$, calcula la imatge de 3 i l'antiimatge de 9.

EXERCICIS: FUNCIONS

b) Donada la funció $f(x) = x^2 + x - 1$, calcula la imatge de -1 i les antiimatges de 5.

Sol.: a) $f(3) = -16$ $f^{-1}(9) = -2$ b) $f(-1) = -1$ $f^{-1}(5) = \{-3, 2\}$

Domini i recorregut

Domini

El **domini** d'una funció f és el conjunt de valors de la variable independent x que tenen imatge per f (valors per als quals podem calcular la imatge en $\mathbb{R}$). Es representa amb $\text{Dom } f$ o D_f .

$$x \in \text{Dom } f \Leftrightarrow f(x) \in \mathbb{R}$$

Si un nombre real a pertany al domini de f , diem que f està definida en $x = a$, o per a $x = a$, o en el punt $x = a$. Així, també diem que el domini d'una funció és el conjunt de valors per als quals la funció està definida.

Exemples: Calcula el domini de les funcions següents:

1. $f(x) = 3x + 5 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R}$ Tots els valors reals tenen imatge. Es pot calcular la imatge per f de qualsevol nombre real.
2. $f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$ Tots els valors reals, excepte el 0, tenen imatge. No es pot calcular la imatge de 0, atès que $\nexists \frac{1}{0}$.
3. $f(x) = \sqrt{x} \rightarrow \text{Dom } f = [0, +\infty)$ Tots els valors reals positius i el 0 tenen imatge. L'arrel quadrada d'un nombre negatiu no és un nombre real, per tant, els nombres negatius no tenen imatge per f i, per tant, no pertanyen al domini de f .

EXERCICIS: FUNCIONS

Exercici: Calcula el domini de les funcions següents:

a) $f(x) = 2x^2 + 5x - 10$

b) $f(x) = \frac{1}{x-3}$

c) $f(x) = \sqrt{x-1}$

Sol.: a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$ b) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{3\}$ c) $\text{Dom } f = [1, +\infty)$

Recorregut

El **recorregut** o **rang** d'una funció f és el conjunt format per totes les imatges de la funció, és a dir, el conjunt dels valors de la variable dependent y que són imatges de valors de la variable independent x . Es representa amb **Im** f .

$$y \in \text{Im } f \leftrightarrow y = f(a) \text{ amb } a \in \text{Dom } f$$

Exemples: Calcula el recorregut de les funcions següents:

1. $f(x) = 3x \rightarrow \text{Im } f = \mathbb{R}$ Tots els valors reals tenen antiimatge per f .

2. $f(x) = x^2 \rightarrow \text{Im } f = [0, +\infty)$ El quadrat d'un nombre sempre és positiu o zero. Així, les imatges d'aquesta funció són els nombres positius i el 0. Els nombres negatius no tenen antiimatge per f .

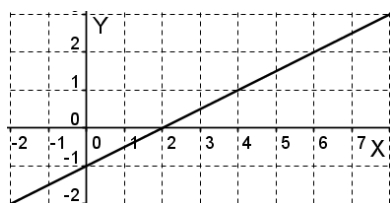
Càlcul del domini i el recorregut d'una funció a partir de la seva gràfica

És fàcil trobar el domini i el recorregut d'una funció a partir de la seva gràfica. Vegem-ne uns exemples:

EXERCICIS: FUNCIONS

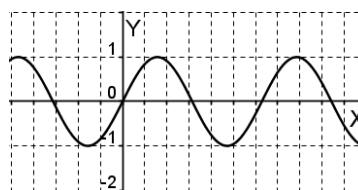
Exemples: Calcula el domini i el recorregut de les funcions següents:

1.



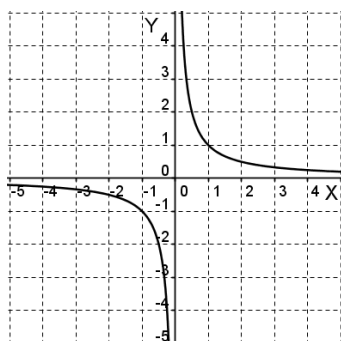
$$\text{Dom } f = \mathbb{R} \quad \text{i} \quad \text{Im } f = \mathbb{R}$$

2.



$$\text{Dom } f = \mathbb{R} \quad \text{i} \quad \text{Im } f = [-1, 1]$$

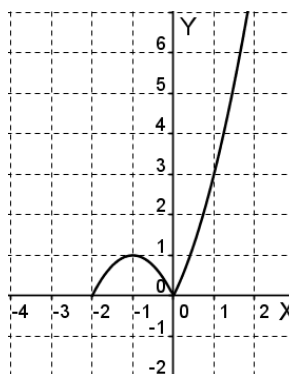
3.



$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\text{Im } f = \mathbb{R} - \{0\}$$

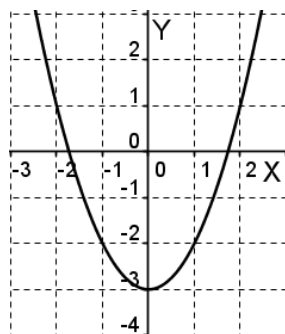
4.



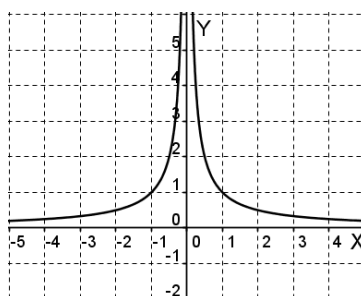
$$\text{Dom } f = [-2, +\infty) \quad \text{Im } f = [0, +\infty)$$

Exercicis: Calcula el domini i el recorregut de les funcions següents:

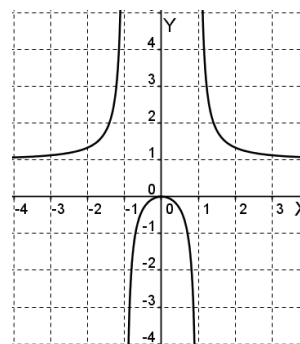
a)



b)



c)



EXERCICIS: FUNCIONS

Tipus de funcions

Funcions que tenen per gràfica una recta

Funció lineal

La funció lineal té per gràfica una recta obliqua que passa per l'origen de coordenades (pel punt (0,0)). La seva expressió algebraica és del tipus:

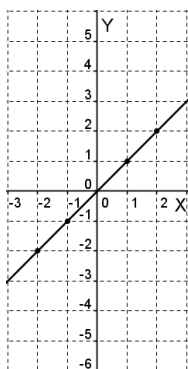
$f(x) = mx$ en què m és un nombre real diferent de 0 anomenat **pendent** de la recta.

Exemples: (Utilitzarem la notació $y = f(x)$)

1. $y = x$

x	y
-2	-2
-1	-1
0	0
1	1
2	2

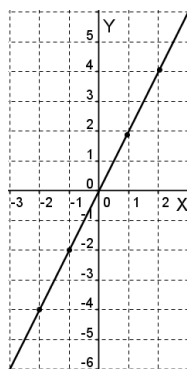
$$m = 1$$



2. $y = 2x$

x	y
-2	-4
-1	-2
0	0
1	2
2	4

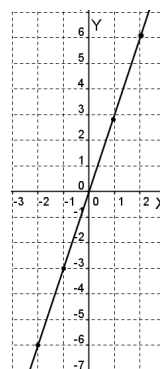
$$m = 2$$



3. $y = 3x$

x	y
-2	-6
-1	-3
0	0
1	3
2	6

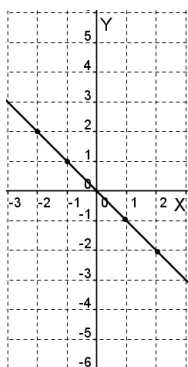
$$m = 3$$



4. $y = -x$

x	y
-2	2
-1	1
0	0
1	-1
2	-2

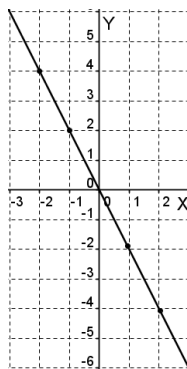
$$m = -1$$



5. $y = -2x$

x	y
-2	4
-1	2
0	0
1	-2
2	-4

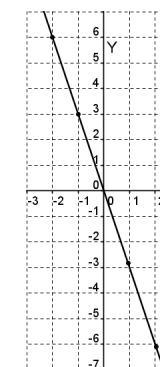
$$m = -2$$



6. $y = -3x$

x	y
-2	6
-1	3
0	0
1	-3
2	-6

$$m = -3$$



Dels exemples anteriors es dedueix que el **pendent de la recta (m)** ens dóna informació relativa a la inclinació de la recta:

EXERCICIS: FUNCIONS

- El signe de m determina si la recta és creixent o decreixent:
 - o Si $m > 0$ (+) la recta és **creixent** (quan augmenta el valor de x , augmenta el valor de y): 
 - o Si $m < 0$ (-) la recta és **decreixent** (quan augmenta el valor de x , disminueix el valor de y): 
- Com més gran és $|m|$ més gran és la inclinació de la recta (més s'aproxima a la vertical).

Funció afí

La funció afí té per gràfica una recta obliqua. La seva expressió algebraica és del tipus:

$$f(x) = mx + n \quad \text{en què } m \text{ i } n \text{ són nombres reals amb } m \neq 0$$

m s'anomena **pendent de la recta** i n s'anomena **ordenada en l'origen**

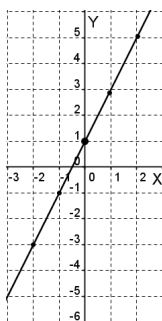
La funció lineal és un cas particular de funció afí, en què $n = 0$.

Exemples: (Utilitzarem la notació $y = f(x)$)

1. $y = 2x + 1$

x	y
-2	-3
-1	-1
0	1
1	3
2	5

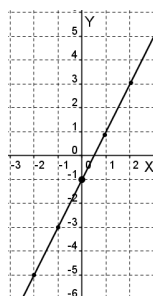
$$m = 2 \text{ i } n = 1$$



2. $y = 2x - 1$

x	y
-2	-5
-1	-3
0	-1
1	1
2	3

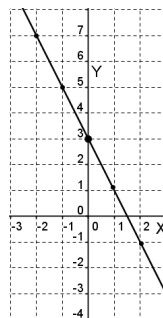
$$m = 2 \text{ i } n = -1$$



3. $y = -2x + 3$

x	y
-2	7
-1	5
0	3
1	1
2	-1

$$m = -2 \text{ i } n = 3$$



Dels exemples anteriors es dedueix que l'ordenada en l'origen indica per on talla la recta l'eix OY:

$$\text{Punt de tall amb l'eix OY} = (0, n)$$

EXERCICIS: FUNCIONS

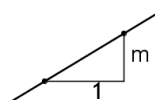
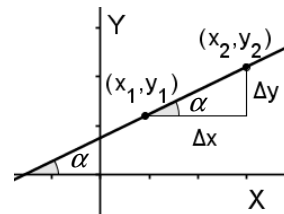
Pendent de la recta

El pendent m d'una recta es defineix com la tangent de l'angle que forma la recta amb l'eix OX . Si la recta és obliqua, talla l'eix OX i el divideix en dues parts. Per calcular el pendent, prenem l'angle que forma la recta amb la part dreta de l'eix OX , mesurat en sentit directe des de l'eix OX .

Donats dos punts qualssevol de la recta, el pendent és el quocient de l'increment (variació) de l'ordenada (Δy)

entre l'increment de l'abscissa (Δx). Així, el pendent indica l'increment de l'ordenada quan l'abscissa s'incrementa en una unitat:

$$m = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{increment de l'ordenada}}{\text{increment de l'abscissa}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Funció constant

La funció constant té per gràfica una recta horitzontal. El seu pendent és nul, ja que l'angle que forma amb l'eix OX és 0 ($\operatorname{tg} 0 = 0$). La seva expressió algebraica és del tipus:

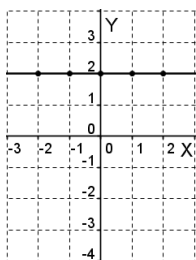
$$f(x) = n$$

en què n és un nombre real anomenat **ordenada en l'origen**.

Exemples:

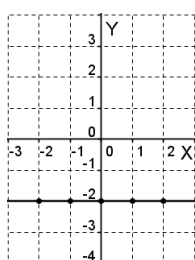
1. $y = 2$

x	y
-2	2
-1	2
0	2
1	2
2	2



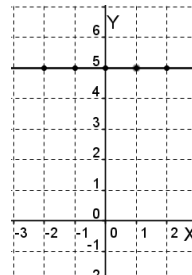
2. $y = -2$

x	y
-2	-2
-1	-2
0	-2
1	-2
2	-2



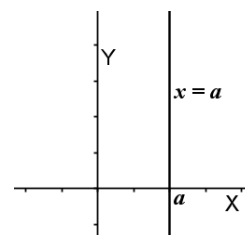
3. $y = 5$

x	y
-2	5
-1	5
0	5
1	5
2	5



Rectes verticals

Una recta vertical no correspon a la gràfica d'una funció, ja que a un mateix valor de x li corresponen infinits valors de y . L'expressió algebraica d'una recta vertical és del tipus $x = a$, en què a és un nombre real.



EXERCICIS: FUNCIONS

Funcions quadràtiques

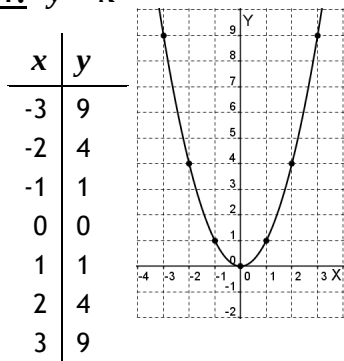
Una funció quadràtica té per gràfica una paràbola. La seva expressió algebraica és del tipus:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

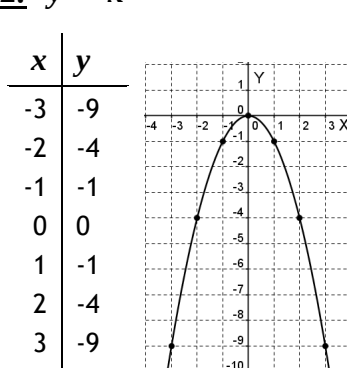
en què **a**, **b** i **c** són nombres reals i $a \neq 0$.

Exemples:

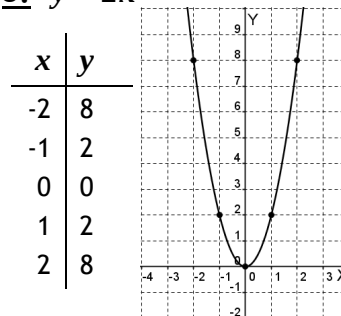
1. $y = x^2$



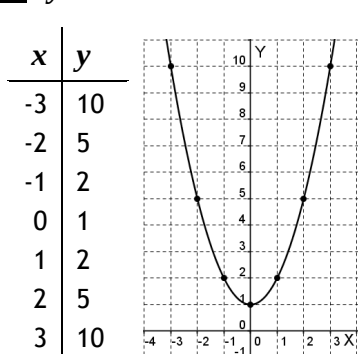
2. $y = -x^2$



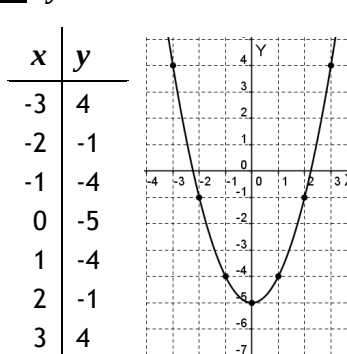
3. $y = 2x^2$



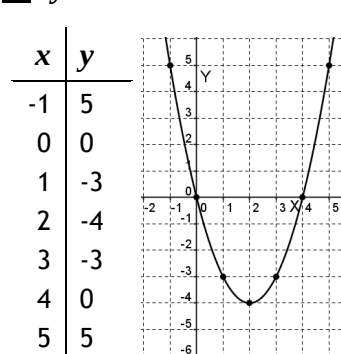
3. $y = x^2 + 1$



4. $y = x^2 - 5$



5. $y = x^2 - 4x$



Dels exemples anteriors podem deduir que:

- El **coeficient a** ens dona informació relativa a l'obertura de la paràbola:
 - o El **signe de a** ens indica si la paràbola està oberta cap amunt o cap avall:

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } a > 0 \text{ (+)} \rightarrow \text{ la paràbola és oberta cap amunt (còncava): } \cup \\ \text{Si } a < 0 \text{ (-)} \rightarrow \text{ la paràbola és oberta cap avall (convexa): } \cap \end{array} \right.$
 - o Com més gran és $|a|$ més tancada és la paràbola.

EXERCICIS: FUNCIONS

- El coeficient c indica per on talla la paràbola l'eix OY:

$$\text{Punt de tall eix OY} = (0, c)$$

Normalment, per representar gràficament la majoria de funcions, no n'hi ha prou d'elaborar una taula de valors. En el tema següent estudiarem com representar gràficament funcions.

Funcions polinòmiques

Una funció polinòmica és una funció que té per expressió algebraica un polinomi.

$$f(x) = P(x) \quad \text{en què } P(x) \text{ és un polinomi.}$$

Les funcions que tenen per gràfica una recta i les funcions quadràtiques són casos particulars de funcions polinòmiques.

Exemples:

1. $f(x) = 4 \rightarrow$ Funció polinòmica de grau 0 (funció constant).
2. $f(x) = 3x \rightarrow$ Funció polinòmica de grau 1 (funció lineal).
3. $f(x) = 3x + 1 \rightarrow$ Funció polinòmica de grau 1 (funció afí).
4. $f(x) = x^2 - 5x + 8 \rightarrow$ Funció polinòmica de grau 2 (funció quadràtica).
5. $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4x - 1 \rightarrow$ Funció polinòmica de grau 3.
6. $f(x) = x^4 - x^3 + 7x^2 - 2x - 2 \rightarrow$ Funció polinòmica de grau 4.

Domini d'una funció polinòmica

El domini d'una funció polinòmica és el conjunt dels nombres reals, ja que és possible calcular la imatge de qualsevol nombre real per un polinomi:

$$\text{Dom } f = R$$

Funcions racionals

Una funció racional és una funció que té per expressió algebraica un quocient de polinomis.

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad \text{en què } P(x) \text{ i } Q(x) \text{ són polinomis i } Q(x) \neq 0.$$

EXERCICIS: FUNCIONS

Exemples:

$$\underline{1.} \quad f(x) = \frac{x^2 + 3x - 10}{2x - 6}$$

$$\underline{2.} \quad f(x) = \frac{3x^3 - 2x^2 - 1}{x^2 - 4}$$

Les funcions polinòmiques són casos particulars de funcions racionals, amb $Q(x) = 1$.

Domini d'una funció racional

En una funció racional, podem calcular la imatge de qualsevol nombre real, excepte d'aquells que anul·lin el denominador, ja que no es pot dividir per zero.

Així doncs, el **domini d'una funció racional** és el conjunt de nombres reals que no anul·len el denominador:

$$\text{Dom } f = R - \{x \in R / Q(x) = 0\}$$

Exemples: Calcula el domini de les funcions racionals següents:

$$\underline{1.} \quad f(x) = \frac{x^2 + 3x - 10}{2x - 6}$$

- Resolem l'equació que resulta d'igualar a 0 el denominador, per calcular els valors que no pertanyen al domini de la funció:

$$2x - 6 = 0 \rightarrow 2x = 6 \rightarrow x = \frac{6}{2} = 3 \rightarrow \boxed{x = 3} \rightarrow \boxed{\text{Dom } f = R - \{3\}}$$

$$\underline{2.} \quad f(x) = \frac{3x^3 - 2x^2 - 1}{x^2 - 4}$$

- Resolem l'equació que resulta d'igualar a 0 el denominador, per calcular els valors que no pertanyen al domini de la funció:

$$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \rightarrow \boxed{x = 2} \text{ i } \boxed{x = -2} \rightarrow \boxed{\text{Dom } f = R - \{-2, 2\}}$$

$$\underline{3.} \quad f(x) = \frac{3x^3 - 2x^2 - 1}{x^2 + 4}$$

- Resolem l'equació que resulta d'igualar a 0 el denominador, per calcular els valors que no pertanyen al domini de la funció:

$$x^2 + 4 = 0 \rightarrow x^2 = -4 \rightarrow x = \pm\sqrt{-4} \notin R \rightarrow \boxed{\text{Dom } f = R}$$

El denominador no s'anul·la per a cap valor real, per tant, el domini és el conjunt dels nombres reals.

EXERCICIS: FUNCIONS

Exercicis: Calcula el domini de les funcions racionals següents:

a) $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 10}{3x + 1}$

b) $f(x) = \frac{3x^3 - 2x^2 - 1}{x^2 - 2x - 3}$

c) $f(x) = \frac{3x - 5}{x^3 - 4x^2 + x + 6}$

Sol.: a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}\right\}$ b) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$ c) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 2, 3\}$

Funcions irracionals

Una **funció irracional** és una funció en què, en la seva expressió algebraica, la variable independent (x) es troba sota un signe de radical. Estudiarem només les funcions irracionals l'expressió algebraica de les quals sigui del tipus:

$$f(x) = \sqrt[n]{g(x)} \quad \text{en què } g(x) \text{ és una funció racional.}$$

Exemples:

1. $f(x) = \sqrt{3x - 6}$

2. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 3x - 10}$

3. $f(x) = \sqrt[4]{\frac{x}{x+1}}$

EXERCICIS: FUNCIONS

Domini d'una funció irracional

Donada una funció irracional del tipus $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$, en què $g(x)$ és racional:

- Si n és parell, el domini de f és el conjunt de valors reals de x per als quals el radicand de l'arrel, $q(x)$, és un nombre real positiu o zero:

$$\text{Dom } f = \{x \in R / g(x) \geq 0\}$$

- Si n és **imparell**, l'arrel es pot calcular sempre que el radicand sigui un nombre real, encara que sigui negatiu, i per tant, el domini de f coincideix amb el de g :

$$\text{Dom } f = \text{Dom } g$$

Exemples: Calcula el domini de les funcions irracionals següents:

1. $f(x) = \sqrt{x} \rightarrow \boxed{\text{Dom } f = [0, +\infty)}$

En R , només podem calcular l'arrel quadrada d'un nombre positiu o zero. L'arrel quadrada d'un nombre negatiu no és un nombre real.

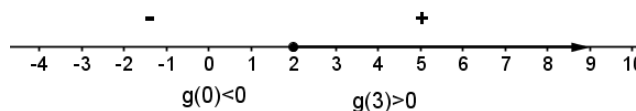
2. $f(x) = \sqrt{3x-6}$

- Hem d'esbrinar per a quins valors de x la funció $g(x) = 3x - 6$ és positiva o zero.

- o Resolem l'equació que resulta d'igualar a zero la funció $q(x) = 3x - 6$.

$$3x - 6 = 0 \rightarrow 3x = 6 \rightarrow x = \frac{6}{3} = 2 \rightarrow \boxed{x = 2}$$

- o En $x=2$ la funció $g(x)$ canvia de signe. Estudiem el signe de $g(x)$ a l'esquerra i a la dreta de 2 (calculant la imatge per g d'un nombre més petit que 2 i la d'un nombre més gran que 2).



- El domini de f són tots els nombres reals més grans o iguals que 2:

$$\boxed{\text{Dom } f = [2, +\infty)}$$

EXERCICIS: FUNCIONS

3. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 3x - 10} \rightarrow \boxed{\text{Dom } f = \mathbb{R}}$

Com que l'índex de l'arrel és imparell, el domini de f coincideix amb el del radicand (recordem que en $\mathbb{R}$ es pot calcular l'arrel cúbica de qualsevol nombre real). Atès que el radicand és un polinomi, el domini de f és el conjunt dels nombres reals.

Exercicis: Calcula el domini de les funcions racionals següents:

a) $f(x) = \sqrt[4]{5-x}$ b) $f(x) = \sqrt[5]{x-8}$ c) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{x+3}}$

Sol.: a) $\text{Dom } f = (-\infty, 5]$ b) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$ c) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-3\}$

Funcions definides a trossos

Diem que una funció està definida a trossos si la seva expressió algebraica no és sempre la mateixa, sinó que varia en funció del valor de la variable independent.

Per calcular el domini d'una funció definida a trossos, hem de trobar el domini de cadascuna de les expressions algebraiques que la determinen. Per fer-ho, hem de tenir en compte en quin interval està definida cada expressió.

Exemples: Representa gràficament les funcions següents i calcula $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ i $\text{Dom } f$ per a cada cas:

1. $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 1 \\ -x^2 + 4x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

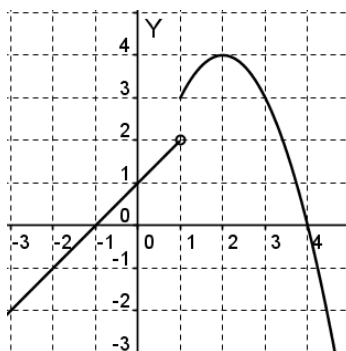
$$f(-1) = -1 + 1 = 0$$

$$f(0) = 0 + 1 = 1$$

$$f(1) = -1^2 + 4 \cdot 1 = 3$$

$$f(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 = 4$$

$$f(3) = -3^2 + 4 \cdot 3 = 3$$



Qualsevol valor de x
té imatge real:

$$\text{Dom } f = \mathbb{R}$$

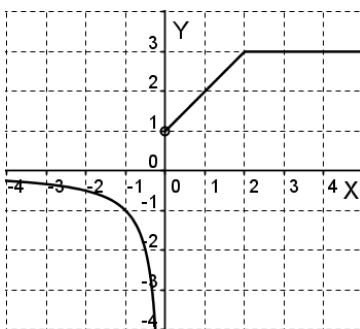
EXERCICIS: FUNCIONS

2.
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \leq 0 \\ x+3 & \text{si } 0 < x < 2 \\ 5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$f(-1) = \frac{1}{-1} = -1 \quad f(2) = 5$$

$$f(0) = \frac{1}{0} \nexists \quad f(3) = 5$$

$$f(1) = 1+3 = 4$$



Qualsevol valor de x té imatge real, excepte el zero, ja que el zero no pertany al domini de

$\frac{1}{x}$, que és l'expressió de la funció en $x = 0$:

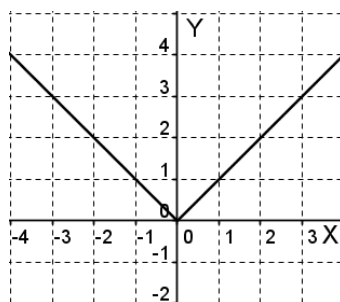
$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$$

3.
$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(-1) = -(-1) = 1 \quad f(2) = 2$$

$$f(0) = 0 \quad f(3) = 3$$

$$f(1) = 1$$



La funció valor absolut és una funció definida a trossos.

Qualsevol valor de x té imatge real:

$$\text{Dom } f = \mathbb{R}$$

Exercici: Donada la funció $f(x) = \begin{cases} 2x-5 & \text{si } x \leq 3 \\ \frac{1}{x^3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$, calcula $f(1)$, $f(3)$ i $f(5)$ i $\text{Dom } f$.

Sol.: $f(1) = -3$, $f(3) = 1$, $f(5) = \frac{1}{125}$ i $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

Funcions exponencials

Una funció exponencial és una funció l'expressió algebraica de la qual és del tipus:

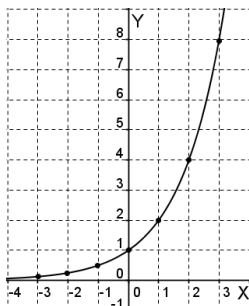
$$f(x) = a^x \quad \text{en què } a \text{ és un nombre real positiu diferent de 1 } (a \in \mathbb{R}^+ \text{ i } a \neq 1).$$

EXERCICIS: FUNCIONS

Exemples:

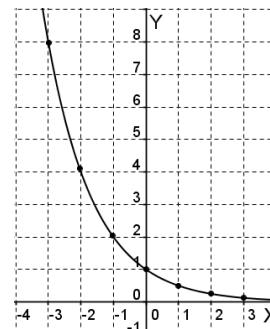
1. $f(x) = 2^x$

x	y
-3	$\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,125$
-2	$\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0,25$
-1	$\frac{1}{2} = 0,5$
0	1
1	2
2	$2^2 = 4$
3	$2^3 = 8$



2. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x (= 0.5^x = 2^{-x})$

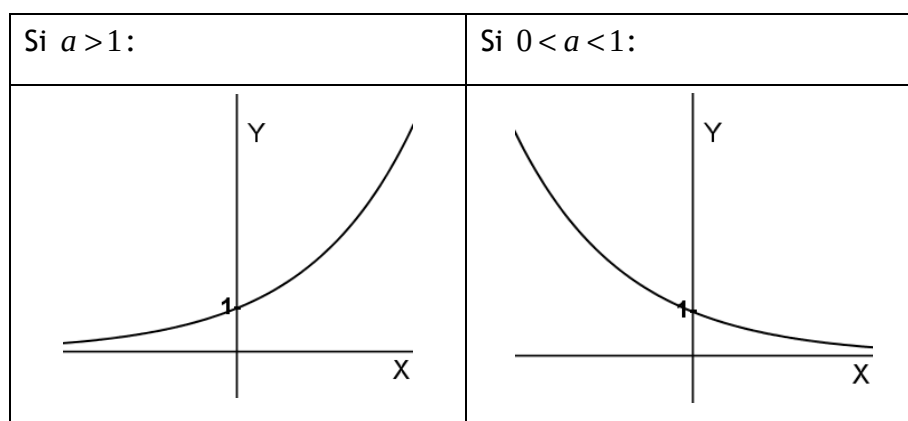
x	y
-3	$2^3 = 8$
-2	$2^2 = 4$
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2} = 0,5$
2	$\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0,25$
3	$\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,125$



Les funcions exponencials presenten les característiques següents:

- El seu domini és el conjunt dels nombres reals: $\text{Dom } f = \mathbb{R}$
- El seu recorregut és el conjunt dels nombres reals positius, ja que si $a > 0$, aleshores $a^x > 0$: $\text{Im } f = \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$
- El punt de tall amb l'eix OY és (0,1) per a totes les funcions exponencials: $f(0) = a^0 = 1$
- El gràfic de la funció s'aproxima indefinidament a l'eix OX, però no el talla mai.
 - o Si $a > 1$, el gràfic de la funció s'acosta a l'eix OX a mesura que disminueix el valor de x .
 - o Si $0 < a < 1$, el gràfic de la funció s'acosta a l'eix OX a mesura que augmenta el valor de x .
- Si $a > 1$, la funció és creixent (quan augmenta el valor de x , augmenta el valor de y). Si $0 < a < 1$, la funció és decreixent (quan augmenta el valor de x , disminueix el valor de y).
- El gràfic de la funció exponencial és del tipus:

EXERCICIS: FUNCIONS



Operacions amb funcions

Funció suma

Donades dues funcions, f i g , la **funció suma** $f + g$ és una altra funció que es defineix com:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

Exemples: Calcula l'expressió algebraica i el domini de la funció suma $f + g$ per a cada cas:

1. $f(x) = x$ i $g(x) = 5x^2$

$$\rightarrow (f + g)(x) = f(x) + g(x) = \boxed{x + 5x^2}; \text{ Dom}(f + g) = \mathbb{R}$$

2. $f(x) = 2x^2$ i $g(x) = \frac{1}{x+1}$

$$\rightarrow (f + g)(x) = f(x) + g(x) = \boxed{2x^2 + \frac{1}{x+1}}; \text{ Dom}(f + g) = \mathbb{R} - \{-1\}$$

Funció resta

Donades dues funcions, f i g , la **funció resta** $f - g$ és una altra funció que es defineix com:

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

EXERCICIS: FUNCIONS

Exemples: Calcula l'expressió algebraica i el domini de la funció resta $f - g$ per a cada cas:

1. $f(x) = x$ i $g(x) = 5x^2$

$$\rightarrow (f - g)(x) = f(x) - g(x) = \boxed{x - 5x^2}; \text{Dom}(f - g) = \mathbb{R}$$

2. $f(x) = 2x^2$ i $g(x) = \frac{1}{x+1}$

$$\rightarrow (f - g)(x) = f(x) - g(x) = \boxed{2x^2 - \frac{1}{x+1}}; \text{Dom}(f - g) = \mathbb{R} - \{-1\}$$

Funció producte

Donades dues funcions, f i g , la funció **producte** $f \cdot g$ és una altra funció que es defineix com:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Exemples: Calcula l'expressió algebraica i el domini de la funció producte $f \cdot g$ per a cada cas:

1. $f(x) = x$ i $g(x) = 5x^2$

$$\rightarrow (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = x \cdot 5x^2 = \boxed{5x^3}; \text{Dom}(f \cdot g) = \mathbb{R}$$

2. $f(x) = 2x^2$ i $g(x) = \frac{1}{x+1}$

$$\rightarrow (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = 2x^2 \cdot \frac{1}{x+1} = \boxed{\frac{2x^2}{x+1}}; \text{Dom}(f \cdot g) = \mathbb{R} - \{-1\}$$

Funció quocient

Donades dues funcions, f i g , la funció **quocient** $\frac{f}{g}$ és una altra funció que es defineix

com:

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

EXERCICIS: FUNCIONS

Exemples: Calcula l'expressió algebraica i el domini de la funció quocient $\frac{f}{g}$

per a cada cas:

1. $f(x) = x$ i $g(x) = 5x^2$

$$\rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{5x^2} = \boxed{\frac{1}{5x}}; \text{Dom}(f \cdot g) = R - \{0\}$$

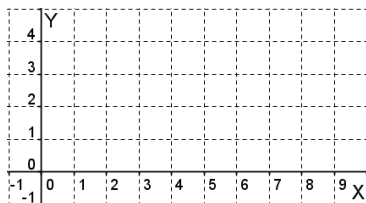
2. $f(x) = 2x^2$ i $g(x) = \frac{1}{x+1}$

$$\rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x^2}{\frac{1}{x+1}} = 2x^2 \cdot (x+1) = \boxed{2x^3 + 2x^2}; \text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = R$$

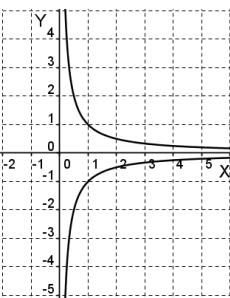
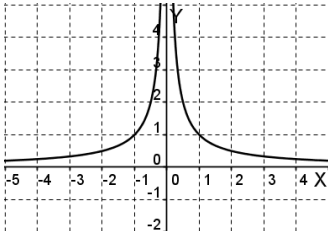
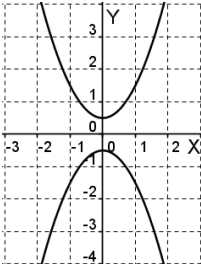
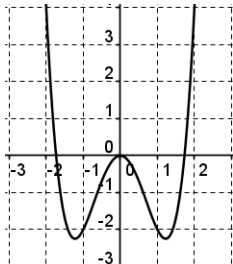
EXERCICIS: FUNCIONS

Exercicis

1. Completa el quadre:

Text										
Expressió algebraica	$y = \sqrt{x}$									
Taula de valors i gràfica	x	y								
	0									
	1									
	4									
	9									

2. Indica quines de les gràfiques següents corresponen a una funció:

a) 	b) 
c) 	d) 

3. Calcula $f(2)$, $f(0)$ i $f(-2)$ per a cada cas:

a) $f(x) = x^3 - 2x + 8$

b) $f(x) = \frac{-x^2 + 2}{x - 1}$

4. Calcula $f^{-1}(13)$ per a cada cas:

a) $f(x) = 5x - 2$

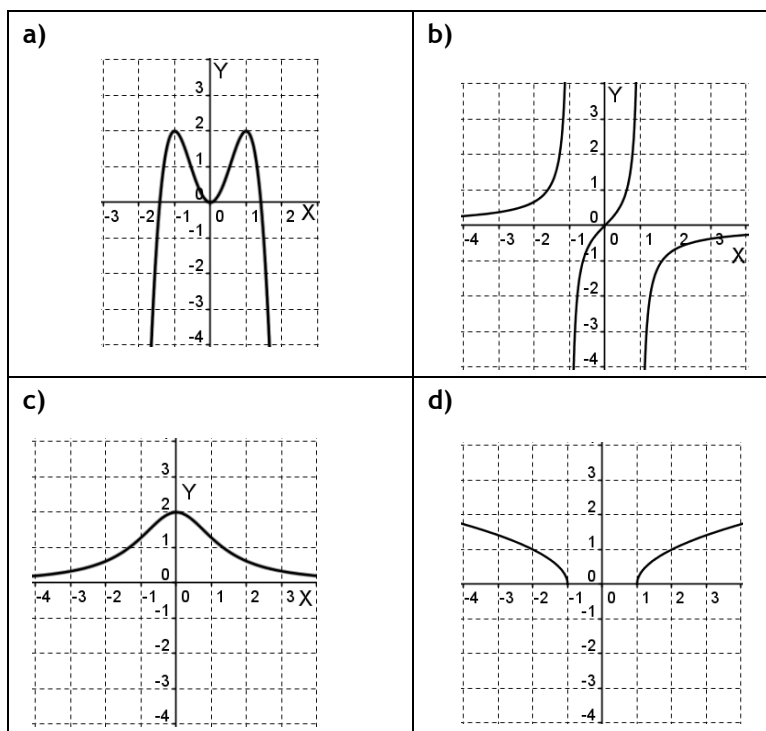
b) $f(x) = x^2 - 3$

c) $f(x) = \frac{-4x + 6}{x + 7}$

EXERCICIS: FUNCIONS

5. Donada la funció $f(x) = \frac{x+2}{3x+3}$, calcula la imatge i l'antiimatge de $\frac{2}{5}$.

6. Troba el domini i el recorregut de les funcions següents:



7. Calcula el domini de les funcions següents:

a) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x + 1$

b) $f(x) = \frac{3x-1}{x-2}$

c) $f(x) = \frac{1}{3x-1}$

d) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$

e) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

f) $f(x) = \frac{1}{x^2+3x-10}$

g) $f(x) = \frac{1}{x^3-x^2-9x+9}$

h) $f(x) = \frac{1}{x^2-5x}$

i) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & \text{si } x \leq 0 \\ 2x^2-3x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

j) $f(x) = \begin{cases} x-5 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{x^2-4} & \text{si } -1 \leq x < 5 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$

k) $f(x) = \sqrt{5x-15}$

l) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{5x-15}}$

m) $f(x) = \sqrt[4]{2-x}$

n) $f(x) = \frac{3x^2-x}{\sqrt[4]{2-x}}$

o)

$f(x) = \sqrt[3]{x-7}$

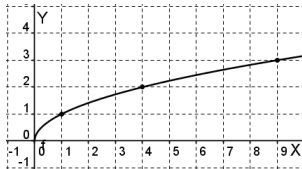
p)

$f(x) = \frac{-5}{\sqrt[3]{x-7}}$

SOLUCIONS: FUNCIONS

Solucions

1.

Text	Funció que a cada nombre real li fa correspondre <i>la seva arrel quadrada</i> .										
Expressió algebraica	$y = \sqrt{x}$										
Taula de valors i gràfica	<table> <tr> <th>x</th><th>y</th></tr> <tr> <td>0</td><td>0</td></tr> <tr> <td>1</td><td>1</td></tr> <tr> <td>4</td><td>2</td></tr> <tr> <td>9</td><td>3</td></tr> </table> 	x	y	0	0	1	1	4	2	9	3
x	y										
0	0										
1	1										
4	2										
9	3										

2. b) i d)

3. a) $f(2)=12$, $f(0)=8$ i $f(-2)=4$ b) $f(2)=-2$, $f(0)=-2$ i $f(-2)=\frac{2}{3}$

4. a) 3 b) $\{-4, 4\}$ c) -5

5. $f\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{4}{7}$, $f^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)=4$

6. a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$ $\text{Im } f = (-\infty, 2]$ c) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$ $\text{Im } f = (0, 2]$

b) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ $\text{Im } f = \mathbb{R}$ d)

$\text{Dom } f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ $\text{Im } f = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$

7.

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$ g) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-3, 1, 3\}$ l) $\text{Dom } f = (3, +\infty)$

b) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{2\}$ h) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0, 5\}$ m) $\text{Dom } f = (-\infty, 2]$

c) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$ i) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1\}$ n) $\text{Dom } f = (-\infty, 2)$

d) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ j) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{2\}$ o) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

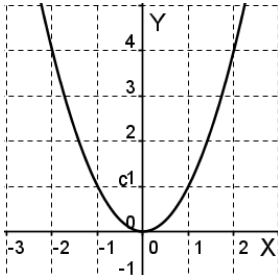
e) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$ k) $\text{Dom } f = [3, +\infty)$ p) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{7\}$

f) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-5, 2\}$

SOLUCIONS: FUNCIONS

Solucions dels exercicis de la teoria

Formes d'expressar una funció

a)	Text	Funció que a cada nombre real li fa correspondre <i>el seu quadrat</i>																				
	Expressió algebraica	$y = x^2$																				
	Taula de valors i gràfica	<table><tr><td>x</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td></td><td>2</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>y</td><td>4</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>4</td></tr></table> cc	x	-2	-1	0	1		2				y	4	1	0	1	4				
x	-2	-1	0	1																		
	2																					
y	4	1	0	1	4																	
b)	Text	Funció que a cada nombre real li fa correspondre <i>el seu cub menys una unitat</i> .																				
	Expressió algebraica	$y = x^3 - 1$																				
	Taula de valors i gràfica	<table><tr><td>x</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td></td><td>2</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>y</td><td>-9</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td></tr><tr><td></td><td>7</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	x	-2	-1	0	1		2				y	-9	-2	-1	0		7			
x	-2	-1	0	1																		
	2																					
y	-9	-2	-1	0																		
	7																					

Gràfiques que no corresponen a funcions

Corresponen a una funció les gràfiques dels apartats b), c) i e).

SOLUCIONS: FUNCIONS

Exemples de funcions

a)

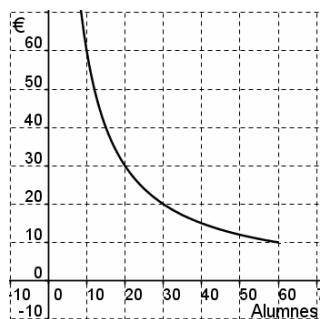
x = nombre d'alumnes

y = cost per alumne

Expressió algebraica:

$$y = \frac{600}{x}$$

x	10	20	30	40	50	60
y	60	30	20	15	12	10



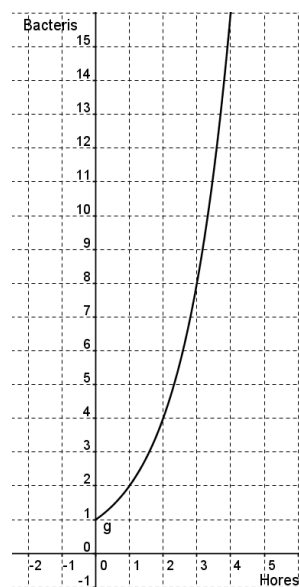
b)

x = hores

y = nombre de bacteris

Expressió algebraica:

$$y = 2^x$$



x	1	2	3	4	5	6	10	24
y	2	4	8	16	32	64	1.024	16.777.216

CC

Càlcul del domini i el recorregut d'una funció a partir de la seva gràfica

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$ i $\text{Im } f = [-3, +\infty)$

b) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$ i $\text{Im } f = (0, +\infty)$

c) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ i $\text{Im } f = (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$

2. LÍMITS DE FUNCIONS

El càlcul de límits serveix per estudiar el comportament d'una funció al voltant d'un punt a (quan la x s'aproxima a un nombre real a) o en l'infinit (quan la x es fa indefinidament gran o indefinidament petita).

Concepte de límit

Límit d'una funció en un punt

Sigui a un nombre real i f una funció definida al voltant de $x=a$, però no necessàriament definida en $x=a$ (a pot no pertànyer al domini de f).

Per estudiar el comportament de la funció al voltant de a , prenem valors de x que s'aproximen a a i calculem les seves imatges.

Ens podem aproximar a a per l'esquerra, és a dir, prenent valors de x que s'aproximen cada cop més a a i que són més petits que a . En aquest cas, es diu que x **tendeix a a per l'esquerra** i s'escriu: $x \rightarrow a^-$.

O ens podem aproximar a a per la dreta, és a dir, prenent valors de x que s'aproximen cada cop més a a i que són més grans que a . En aquest cas, es diu que x **tendeix a a per la dreta** i s'escriu: $x \rightarrow a^+$.

Límits laterals

Un nombre real L és el límit de la funció $f(x)$ quan x **tendeix a a per l'esquerra** si quan prenem valors de x que s'aproximen a a per l'esquerra, les seves imatges s'aproximen a L , de manera que $f(x)$ es pot apropar a L tant com vulguem, prenent valors de x suficientment propers a a .

S'escriu:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

Diem que quan x **tendeix a a per l'esquerra** ($x \rightarrow a^-$), $f(x)$ **tendeix a L** ($f(x) \rightarrow L$).

Un nombre real L és el límit d'una funció $f(x)$ quan x **tendeix a a per la dreta** si quan prenem valors de x que s'aproximen a a per la dreta, les seves imatges s'aproximen a L , de manera que $f(x)$ es pot apropar a L tant com vulguem, prenent valors de x suficientment propers a a .

LÍMITS DE FUNCIONS

S'escriu:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

Diem que quan x tendeix a a per la dreta
($x \rightarrow a^+$), $f(x)$ tendeix a L ($f(x) \rightarrow L$).

El límit d'una funció $f(x)$ quan x tendeix a a per l'esquerra és infinit (menys infinit) si quan prenem valors de x que s'aproximen a a per l'esquerra, les seves imatges es fan cada cop més grans (cada cop més petites), de manera que $f(x)$ es pot fer tan gran (petita) com vulguem, prenent valors de x suficientment propers a a .

S'escriu:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

Diem que quan x tendeix a a per l'esquerra
($x \rightarrow a^-$), $f(x)$ tendeix a $+\infty$ (o $-\infty$)
($f(x) \rightarrow +\infty$ o $f(x) \rightarrow -\infty$).

El límit d'una funció $f(x)$ quan x tendeix a a per la dreta és infinit (menys infinit) si quan prenem valors de x que s'aproximen a a per la dreta, les seves imatges es fan cada cop més grans (cada cop més petites), de manera que $f(x)$ es pot fer tan gran (petita) com vulguem, prenent valors de x suficientment propers a a .

S'escriu:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

Diem que quan x tendeix a a per la dreta
($x \rightarrow a^+$), $f(x)$ tendeix a $+\infty$ (o $-\infty$)
($f(x) \rightarrow +\infty$ o $f(x) \rightarrow -\infty$).

Els límits de la funció f quan x tendeix a a per la dreta i per l'esquerra reben el nom de **límits laterals de f en $x = a$** :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \quad \rightarrow \quad \text{Límits laterals de } f \text{ quan en } x = a$$

Límit d'una funció en un punt

Un nombre real L és el límit d'una funció $f(x)$ quan x tendeix a a si quan prenem valors de x que s'aproximen a a , tant per l'esquerra com per la dreta, les seves imatges s'aproximen a L , de manera que $f(x)$ es pot apropar a L tant com vulguem, prenent valors de x suficientment propers a a .

S'escriu:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Diem que quan x tendeix a a ($x \rightarrow a$), $f(x)$
tendeix a L ($f(x) \rightarrow L$).

LÍMITS DE FUNCIONS

El límit d'una funció $f(x)$ quan x tendeix a a és infinit (menys infinit) si quan prenem valors de x que s'aproximen a a , tant per l'esquerra com per la dreta, les seves imatges es fan cada cop més grans (cada cop més petites).

S'escriu:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \text{ o } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

Diem que quan x tendeix a a ($x \rightarrow a$), $f(x)$ tendeix a $+\infty$ (o $-\infty$) ($f(x) \rightarrow +\infty$ o $f(x) \rightarrow -\infty$).

Relació entre els límits laterals i el límit d'una funció en un punt

Diem que el límit d'una funció en un punt existeix si, i només si, els límits laterals de la funció en aquest punt coincideixen i el seu valor és un nombre real.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \in \mathbb{R} \leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \in \mathbb{R}$$

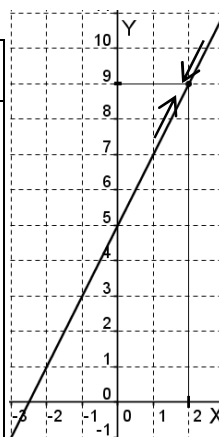
Si els dos límits laterals no coincideixen o són infinit, diem que no existeix el límit de la funció en el punt donat i escrivim $\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Tanmateix, si els dos límits laterals són infinit amb el mateix signe, encara que diem que no existeix el límit, escrivim: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ o $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Exemples: Calcula els límits següents, fent les taules de valors corresponents:

1. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ on $f(x) = 2x + 5$

x	$f(x)$
1,9	8,8
1,99	8,98
1,999	8,998
1,9999	8,9998
$\vdots$	$\vdots$
$x \rightarrow 2^-$	$f(x) \rightarrow 9^-$

x	$f(x)$
2,1	9,2
2,01	9,02
2,001	9,002
2,0001	9,0002
$\vdots$	$\vdots$
$x \rightarrow 2^+$	$f(x) \rightarrow 9^+$



Com més s'aproxima x a 2, tant per l'esquerra com per la dreta, més s'aproxima $f(x)$ a 9.

Fixa't que $2 \in \text{Dom } f$ i $f(2) = 9$.

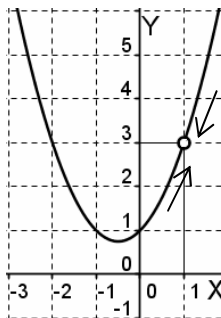
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 9 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 9$$

LÍMITS DE FUNCIONS

2. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ on $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$

x	f(x)
0,9	2,71
0,99	2,9701
0,999	2,997
0,9999	2,9997
$\vdots$	$\vdots$
$x \rightarrow 1^-$	$f(x) \rightarrow 3^-$

x	f(x)
1,1	3,31
1,01	3,0301
1,001	3,003
1,0001	3,0003
$\vdots$	$\vdots$
$x \rightarrow 1^+$	$f(x) \rightarrow 3^+$



Com més s'aproxima x a 1, tant per l'esquerra com per la dreta, més s'aproxima $f(x)$ a 3.

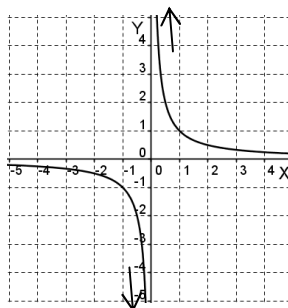
Fixa't que $1 \notin \text{Dom } f$, ja que $f(1) = \frac{0}{0} \nexists$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3 \rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3}$$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ on $f(x) = \frac{1}{x}$

x	f(x)
-0,1	-10
-0,01	-100
-0,001	-1000
-0,001	-10.000
$\vdots$	$\vdots$
$x \rightarrow 0^-$	$f(x) \rightarrow -\infty$

x	f(x)
0,1	10
0,01	100
0,001	1000
0,001	10.000
$\vdots$	$\vdots$
$x \rightarrow 0^+$	$f(x) \rightarrow +\infty$



Fixa't que $0 \notin \text{Dom } f$, ja que $f(0) = \frac{1}{0} \nexists$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \rightarrow \boxed{\nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)}$$

Nota: Quan el denominador d'un quocient es fa petit, el resultat del quocient es fa gran en valor absolut:

$$\frac{1}{1} = 1; \frac{1}{0,5} = 2; \frac{1}{0,25} = 4 \dots$$

Com més s'aproxima x a 0 per l'esquerra, més petita es fa $f(x)$.

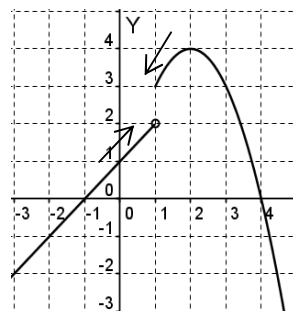
Com més s'aproxima x a 0 per la dreta, més gran es fa $f(x)$.

LÍMITS DE FUNCIONS

4. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ on $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 1 \\ -x^2 + 4x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

x	f(x)
0,9	1,9
0,99	1,99
0,999	1,999
0,9999	1,9999
$\vdots$	$\vdots$
$x \rightarrow 1^-$	$f(x) \rightarrow 2^-$

x	f(x)
1,1	3,19
1,01	3,0199
1,001	3,002
1,0001	3,0002
$\vdots$	$\vdots$
$x \rightarrow 1^+$	$f(x) \rightarrow 3^+$



Quan x s'aproxima a 1 per l'esquerra, $f(x)$ s'aproxima a 2.

Quan x s'aproxima a 1 per la dreta, $f(x)$ s'aproxima a 3.

Fixa't que
 $1 \in \text{Dom } f$ i
 $f(1) = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3 \rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

Els límits laterals no coincideixen; aleshores, no existeix el límit de $f(x)$ quan x tendeix a 1.

Exercicis: Calcula els límits següents, fent les taules de valors corresponents:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ en què $f(x) = \frac{1}{x^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ en què $f(x) = \begin{cases} x+5 & \text{si } x < -1 \\ 2x^2 + 2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

Sol.: a) $+\infty$ b) 4

LÍMITS DE FUNCIONS

Límit d'una funció en l'infinit

Estudiar el comportament d'una funció en l'infinit consisteix a esbrinar què li passa a la funció (a què tendeix) quan la x es fa indefinidament gran o indefinidament petita.

Per fer-ho, prenem valors de x cada cop més grans (direm que x tendeix a més infinit i ho escriurem: $x \rightarrow +\infty$) o cada cop més petits (direm que x tendeix a menys infinit i ho escriurem: $x \rightarrow -\infty$) i calculem les seves imatges.

Un nombre real L és el límit d'una funció $f(x)$ quan x tendeix a infinit (menys infinit) si quan prenem valors de x cada cop més grans (petits), les seves imatges s'aproximen a L , de manera que $f(x)$ es pot apropar a L tant com vulguem, prenent valors de x suficientment grans (petits) de x .

S'escriu:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \text{ o } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

Diem que quan x tendeix a més infinit (menys infinit) ($x \rightarrow +\infty$ o $x \rightarrow -\infty$), $f(x)$ tendeix a L ($f(x) \rightarrow L$).

El límit d'una funció $f(x)$ quan x tendeix a més infinit (menys infinit) és més infinit si quan prenem valors de x cada cop més grans (petits), les seves imatges es fan cada cop més grans, de manera que $f(x)$ es pot fer tan gran com vulguem, prenent valors de x suficientment grans (petits) de x .

S'escriu:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ o } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

Diem que quan x tendeix a més infinit (menys infinit) ($x \rightarrow +\infty$ o $x \rightarrow -\infty$), $f(x)$ tendeix a $+\infty$ ($f(x) \rightarrow +\infty$).

El límit d'una funció $f(x)$ quan x tendeix a més infinit (menys infinit) és menys infinit si quan prenem valors de x cada cop més grans (petits), les seves imatges es fan cada cop més petites, de manera que $f(x)$ es pot fer tan petita com vulguem, prenent valors de x suficientment grans (petits) de x .

S'escriu:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \text{ o } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Diem que quan x tendeix a més infinit (menys infinit) ($x \rightarrow +\infty$ o $x \rightarrow -\infty$), $f(x)$ tendeix a $-\infty$ ($f(x) \rightarrow -\infty$).

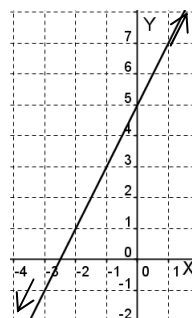
LÍMITS DE FUNCIONS

Exemples: Calcula els límits següents, fent les taules de valors corresponents:

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ on $f(x) = 2x + 5$

x	$f(x)$
10	25
100	205
1.000	2005
10.000	20.005
$\vdots$	$\vdots$
$x \rightarrow +\infty$	$f(x) \rightarrow +\infty$

x	$f(x)$
-10	-15
-100	-195
-1.000	-1.995
-	-1.995
10.000	-19.995
$\vdots$	$\vdots$
$x \rightarrow -\infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$



Quan x pren valors cada cop més grans, $f(x)$ es fa cada cop més gran.

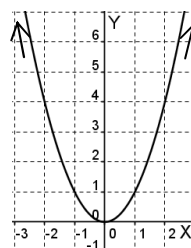
Quan x pren valors cada cop més petits, $f(x)$ es fa cada cop més petita.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ i } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ on $f(x) = x^2$

x	$f(x)$
10	100
100	10.000
1.000	1.000.000
10.000	100.000.000
$\vdots$	$\vdots$
$x \rightarrow +\infty$	$f(x) \rightarrow +\infty$

x	$f(x)$
-10	100
-100	10.000
-1.000	1.000.000
-10.000	100.000.000
$\vdots$	$\vdots$
$x \rightarrow -\infty$	$f(x) \rightarrow +\infty$



Quan x pren valors cada cop més grans, $f(x)$ es fa cada cop més gran.

Quan x pren valors cada cop més petits, $f(x)$ es fa cada cop més gran.

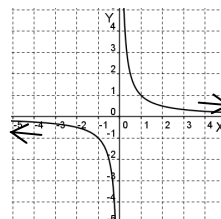
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ i } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

LÍMITS DE FUNCIONS

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ on $f(x) = \frac{1}{x}$

x	f(x)
10	0,1
100	0,01
1.000	0,001
10.000	0,0001
$\vdots$	$\vdots$
$x \rightarrow +\infty$	$f(x) \rightarrow 0^+$

x	f(x)
-10	-0,1
-100	-0,01
-1.000	-0,001
-10.000	-0,0001
$\vdots$	$\vdots$
$x \rightarrow -\infty$	$f(x) \rightarrow 0^-$



Quan x pren valors cada cop més grans, $f(x)$ s'aproxima a 0.

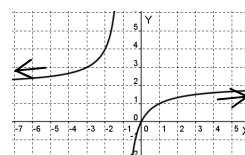
Quan x pren valors cada cop més petits, $f(x)$ s'aproxima a 0.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ on $f(x) = \frac{2x}{x+1}$

x	f(x)
10	1,8181...
100	1,98
1.000	1,998
10.000	1,9998
$\vdots$	$\vdots$
$x \rightarrow +\infty$	$f(x) \rightarrow 2^-$

x	f(x)
-10	2,222...
-100	2,0202...
-1.000	2,002
-10.000	2,0002
$\vdots$	$\vdots$
$x \rightarrow -\infty$	$f(x) \rightarrow 2^+$



Quan x pren valors cada cop més grans, $f(x)$ s'aproxima a 2.

Quan x pren valors cada cop més petits, $f(x)$ s'aproxima a 2.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

Exercicis: Calcula els límits següents, fent les taules de valors corresponents:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ en què $f(x) = x^2 - x$

LÍMITS DE FUNCIONS

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ i } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \text{ en què } f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

Sol.: a) $+\infty$; $+\infty$ b) 0; 0

Càlcul del límit d'una funció en un punt

Fins ara, hem calculat límits a partir de taules de valors. Però existeixen procediments pràctics que ens permeten calcular aquests límits de manera més ràpida. A continuació veurem aquests procediments.

Com a regla general, **per buscar el límit d'una funció $f(x)$ quan x tendeix a a , substituïm x per a en l'expressió algebraica de la funció i fem els càlculs indicats.** Si el resultat és un nombre real, aquest és el límit de la funció.

Quan el resultat no és un nombre real, haurem d'aplicar altres tècniques.

Vegem-ho per a cada tipus de funció en particular.

Polinomis

Apliquem la regla general:

$$\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a)$$

Exemples:

$$\underline{1.} \quad \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 2x - 1) = 3^2 + 2 \cdot 3 - 1 = \boxed{14}$$

$$\underline{2.} \quad \lim_{x \rightarrow -2} (x^3 + 2) = (-2)^3 + 2 = -8 + 2 = \boxed{-6}$$

Funcions racionals: $\frac{p(x)}{q(x)}$

Apliquem la regla general i ens podem trobar tres casos:

LÍMITS DE FUNCIONS

- Que el resultat sigui un nombre real: $\frac{p(a)}{q(a)} \in \mathbf{R} \rightarrow$ aquest és el límit

$$\left(\text{ex.: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+5}{3x+2} = \frac{7}{8} \right)$$

- Que el denominador s'anul·li: cas $\frac{k}{0}$ (amb $k \neq 0$)

- Que s'anul·lin el numerador i el denominador: Cas d'indeterminació $\frac{0}{0}$

Nota:

Una indeterminació és una expressió que no té un valor determinat; no sempre val el mateix.

Vegem com resolem els dos últims casos:

- Cas $\frac{k}{0}$ (amb $k \neq 0$)

El resultat del límit és ∞ $\left(\frac{k}{\rightarrow 0} \rightarrow \infty \right)$; però haurem de calcular els límits laterals per esbrinar el signe de ∞ (el símbol ∞ significa que pot ser $+\infty$ o $-\infty$).

Exemples:

$$\underline{1.} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{x-2} = \frac{3}{0} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{x-2} = \frac{3}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{x-2} = \frac{3}{0^+} = +\infty \end{cases}$$

$$\rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{x-2}$$

$$\underline{2.} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{1}{0} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{cases}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{(x-1)^2} = +\infty$$

Exercici: Calcula el límit següent:

Sol.: $1^- : +\infty$, $1^+ : -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{1-x^2} =$$

LÍMITS DE FUNCIONS

- Cas d'indeterminació $\frac{0}{0}$

Hem de resoldre la indeterminació simplificant la fracció algebraica i tornant a calcular el límit:

Exemples:

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+3)}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{x+1} = \frac{4}{2} = \boxed{2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 2x + 1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+3)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{x-1} = \frac{4}{0} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+3}{x-1} = \frac{4}{0^-} = \boxed{-\infty} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+3}{x-1} = \frac{4}{0^+} = \boxed{+\infty} \end{cases}$$

Exercicis: Calcula els límits següents:

a) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 5x} =$

b) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 25}{x^2 + 10x + 25} =$

Sol.: a) 2 b) $-5^- : +\infty, -5^+ : -\infty$.

Funcions definides a trossos

Per calcular el límit d'una funció definida a trossos en un punt en què la funció canvia d'expressió algebraica, hem de calcular els límits laterals.

Si la funció no canvia d'expressió en el punt en què hem de calcular el límit, procedim com en el cas d'una funció no definida a trossos. +

LÍMITS DE FUNCIONS

Exemple: Estudieu els límits de $f(x)$ quan: $x \rightarrow -2$, $x \rightarrow 1$, $x \rightarrow -1$ i $x \rightarrow 3$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} & \text{si } x < -1 \\ 2 & \text{si } -1 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 7 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+1}{x-1} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 2 = 2$$

$x \rightarrow -1$ → Com que en $x = -1$ l'expressió algebraica de la funció canvia (l'expressió a la dreta de -1 és diferent que a l'esquerra de -1), hem de calcular els límits laterals:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+1}{x-1} = \frac{0}{-2} = 0 \quad \neq \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} 2 = 2$$

Els límits laterals no coincideixen, aleshores no existeix el límit en $x = -1$:

$$\nexists \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$$

$x \rightarrow 3$ → Com que en $x = 3$ l'expressió algebraica de la funció canvia (l'expressió a la dreta de 3 és diferent que a l'esquerra de 3), hem de calcular els límits laterals:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 2 = 2 \quad = \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 7) = 3^2 - 7 = 2 \rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$$

Com que els límits laterals coincideixen, existeix el límit en $x = 3$ i el seu valor és 2.

Exercici: Estudia els límits de la funció següent quan: $x \rightarrow 0$, $x \rightarrow 1$, $x \rightarrow 2$, $x \rightarrow 5$ i $x \rightarrow 10$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 1 \\ x & \text{si } 1 \leq x \leq 5 \\ x^2 - x & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

Sol.: $x \rightarrow 0^-$: $-\infty$; $x \rightarrow 0^+$: $+\infty$; $x \rightarrow 1$: 1; $x \rightarrow 2$: 2; $x \rightarrow 5$: $\nexists$; $x \rightarrow 10$: 90

Quan cal calcular límits laterals?

D'acord amb el que hem vist, hem de calcular límits laterals en dos casos:

- Cas $\frac{k}{0}$
- En una funció definida a trossos quan l'expressió algebraica de la funció canvia en el punt on hem de calcular el límit.

LÍMITS DE FUNCIONS

Càlcul del límit d'una funció en l'infinit

Polinomis

El límit d'un polinomi quan la x tendeix a més infinit o menys infinit sempre és més infinit o menys infinit:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \infty \text{ (el símbol } \infty \text{ significa } +\infty \text{ o } -\infty)$$

Només haurem d'esbrinar el signe de l'infinit.

Quan la x tendeix a més infinit o menys infinit, el terme de grau més gran del polinomi s'aproxima cap a més infinit o menys infinit més ràpidament que els altres termes i, per tant, serà el terme que marcarà la tendència de la funció. Per a valors molt grans o molt petits de la x , el valor dels altres termes és menyspreable respecte al valor del terme de grau màxim.

Exemple: Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2x)$, estudiant la tendència de cada terme:

Si $x \rightarrow +\infty$, aleshores $x^2 \rightarrow +\infty$, $2x \rightarrow +\infty$ i $x^2 - 2x \rightarrow \infty - \infty$ (indeterminació). Vegem com es resol aquesta indeterminació en la taula de valors següent:

x	x^2	$2x$	$x^2 - 2x$
1	1	2	-1
10	100	20	80
100	10.000	200	9.800
1.000	1.000.000	2.000	1.800.000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x \rightarrow +\infty$	$\rightarrow +\infty$	$\rightarrow +\infty$	$\rightarrow +\infty$

Fixa't que x^2 tendeix cap a més infinit més ràpidament que $2x$. Per tant, la diferència entre els dos termes, $x^2 - 2x$, tendeix cap a més infinit (aquesta diferència creix a mesura que x es fa gran). El terme de potència màxima marca la tendència de la funció:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

Així doncs, el límit d'un polinomi quan x tendeix a infinit o menys infinit coincideix amb el límit del terme de grau més gran del polinomi quan x tendeix a infinit o menys infinit:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} a_n x^n}$$

LÍMITS DE FUNCIONS

Exemples: Calcula els límits següents:

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 + 2x - 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 = \boxed{+\infty}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^2 + 2x - 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^2 = \boxed{+\infty}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} (-5x^3 + x^2 + 6) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -5x^3 = \boxed{-\infty}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -\infty} (-5x^3 + x^2 + 6) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -5x^3 = \boxed{+\infty}$$

Exercicis: Calcula els límits següents:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 2x^3 + 3x - 9) =$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 + x^2 + 5) =$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - 2x^3 + 3x - 9) =$$

$$f) \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 + x^2 + 5) =$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^4 - 2x^3 + 3x - 9) =$$

$$g) \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^3 + x^2 + 5) =$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^4 - 2x^3 + 3x - 9) =$$

$$h) \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + x^2 + 5) =$$

Sol.: a) $+\infty$ b) $+\infty$ c) $-\infty$ d) $-\infty$ e) $+\infty$ f) $-\infty$ g) $-\infty$ h) $+\infty$

Funcions racionals: $\frac{p(x)}{q(x)}$

Quan calculem el límit en l'infinit d'una funció racional, ens trobem davant del cas d'indeterminació $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\infty}{\infty} \quad (\text{indeterminació})$$

Com que el límit en l'infinit d'un polinomi és el límit en l'infinit del terme de grau més gran del polinomi, el límit en l'infinit d'un quocient de dos polinomis serà el límit en l'infinit del quocient dels termes de grau més gran dels dos polinomis.

$$\left. \begin{array}{l} P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \\ Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0 \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}}$$

LÍMITS DE FUNCIONS

Exemples: Calcula els límits següents:

$$\underline{1.} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 2x}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x = \boxed{+\infty}$$

$$\underline{2.} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 2x}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x = \boxed{-\infty}$$

$$\underline{3.} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 5x}{2x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = \boxed{0}$$

$$\underline{4.} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 5x}{2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Exercicis: Calcula els límits següents:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^5 + 2x^3 - x + 6}{-2x^2 + x + 10} =$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 2}{x + 1} =$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 2}{x^2 + 1} =$$

Sol.: a) $-\infty$ b) 1 c) 0

A partir dels exemples i exercicis anteriors, podem deduir la regla següent, la qual és molt útil per calcular ràpidament el límit en l'infinit d'una funció racional.

Regla:

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ i $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \begin{cases} \infty \text{ (+}\infty \text{ o -}\infty) & \text{si } gr P(x) > gr Q(x) \rightarrow \text{S'ha d'estudiar el signe en cada cas.} \\ 0 & \text{si } gr P(x) < gr Q(x) \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{si } gr P(x) = gr Q(x) \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{on } a_n \text{ i } b_m \text{ són els coeficients dels termes} \\ \text{de grau màxim de } P(x) \text{ i } Q(x). \end{array} \right.$$

LÍMITS DE FUNCIONS

Exemples: Calcula els límits següents, aplicant la regla que acabem de veure:

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 2}{x^2 + 5x} = \frac{-\infty}{+\infty} = \boxed{-\infty}$ (el grau del numerador és més gran que el del denominador)

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 4}{2x^3 - 1} = \boxed{0}$ (el grau del numerador és més petit que el del denominador)

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^5 + 5x}{x^5 + x - 1} = \frac{3}{1} = \boxed{3}$ (el grau del numerador és igual que el del denominador)

Exercicis: Calcula els límits següents, aplicant la regla que acabem de veure:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - x^3 + 3x + 6}{-2x^2 + x + 10} =$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 2}{2x^2 + 1} =$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + 2}{3x + 1} =$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 2}{3x + 1} =$

Sol.: a) -2 b) $-\frac{1}{3}$ c) 0 d) $+\infty$

Asímtotes

Una asímtota horitzontal és una recta horitzontal a la qual s'aproxima la gràfica de la funció quan x tendeix a infinit o menys infinit.

Quan el límit de la funció $f(x)$ en més infinit o menys infinit és un nombre real k , es diu que $y = k$ és una asímtota horitzontal de f :

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = k$ i/o $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = k \rightarrow \boxed{y = k}$ és una asímtota horitzontal de f .

Els polinomis no tenen asímtotes horitzontals, ja que $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \infty$.

Una funció racional té asímtotes horitzontals si el grau del numerador és menor o igual que el del denominador.

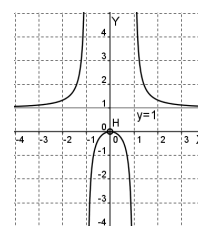
Exemple: Troba les asímtotes horitzontals de la funció $f(x) = \frac{x^3}{x^3 - x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3 - x} = 1$$

$\rightarrow \boxed{y = 1}$ és una asímtota horitzontal de f per la dreta.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^3 - x} = 1 \rightarrow \boxed{y = 1}$$
 és una asímtota horitzontal de f per l'esquerra.

Es diu que és una asímtota horitzontal per ambdós costats.



LÍMITS DE FUNCIONS

Una **asímtota vertical** és una recta vertical a la qual s'aproxima la gràfica de la funció quan x tendeix a un nombre real a (per la dreta o per l'esquerra) i $f(x)$ tendeix a més infinit o menys infinit.

Quan algun límit lateral de la funció $f(x)$ en $x = a$ és més infinit o menys infinit, es diu que $x = a$ és una asímtota vertical de f :

Si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$ i/o $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty \rightarrow \boxed{x = a}$ és una asímtota vertical de f .

Els polinomis no tenen asímtotes verticals, ja que $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a)$.

Si una funció racional té asímtotes verticals, aquestes es troben en valors de x que fan que s'anul·li el denominador. Però no hi ha, necessàriament, una asímtota vertical en cada valor de x que anul·la el denominador. Haurem de calcular el límit en cadascun d'aquests valors per comprovar si hi ha asímtota vertical.

Exemples:

1. Troba les asímtotes verticals de la funció $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$

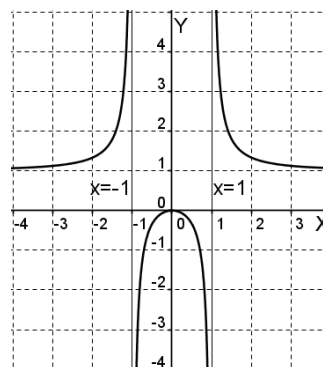
- Calculem els valors que anul·len el denominador (resolent l'equació que resulta d'igualar el denominador a 0) en els quals hi haurà les possibles asímtotes verticals:

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{1} \rightarrow \boxed{x=1} \text{ i } \boxed{x=-1}$$

- Calculem els límits de la funció quan $x \rightarrow 1$ i $x \rightarrow -1$ per veure si $x=1$ i $x=-1$ són asímtotes verticals:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \frac{1}{0} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \frac{1}{0} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty \end{cases}$$



$\boxed{x=1}$ i $\boxed{x=-1}$ són asímtotes verticals d'aquesta funció.

LÍMITS DE FUNCIONS

2. Troba les asímptotes verticals de la funció $f(x) = \frac{x}{x^2 - 3x}$

- Calculem els valors que anul·len el denominador (resolent l'equació que resulta d'igualar el denominador a 0) en els quals hi haurà les possibles asímptotes verticals:

$$x^2 - 3x = 0 \rightarrow x(x - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 3 = 0 \rightarrow \boxed{x = 3} \end{cases}$$

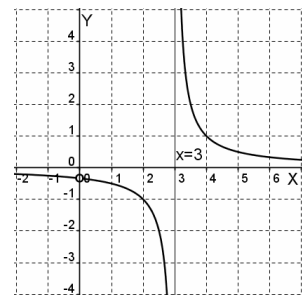
- Calculem els límits de la funció quan $x \rightarrow 0$ i $x \rightarrow 3$ per veure si $x = 0$ i $x = 3$ són asímptotes verticals:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 - 3x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{-3} = \boxed{-\frac{1}{3}}$$

$\rightarrow x = 0$ no és una asímptota d'aquesta funció

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x^2 - 3x} = \frac{3}{0} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x}{x(x-3)} = \frac{3}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x}{x(x-3)} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{cases}$$

$\boxed{x = 3}$ és una asímptota vertical d'aquesta funció.



Exercicis: Calcula les asímptotes horitzontals i verticals (si n'hi ha) de les funcions següents:

a) $f(x) = \frac{1}{x-5}$

b) $f(x) = \frac{x^2 + 4x}{x^2 + 2x - 8}$

c) $f(x) = \frac{-5x^2 + 2x - 3}{x^2 + 9}$

d) $f(x) = \frac{x^3}{x + 4}$

Sol.: a) Hi ha una asímptota horitzontal en $y = 0$ i una asímptota vertical en $x = 5$.

b) Hi ha una asímptota horitzontal en $y = 1$ i una asímptota vertical en $x = -4$.

c) Hi ha una asímptota horitzontal en $y = -5$. No té asímptotes verticals.

d) No té asímptotes horitzontals. Té una asímptota vertical en $x = -4$.

EXERCICIS: LÍMITS DE FUNCIONS

1. Calcula els límits següents:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 + 5x + 1) =$	d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^3 - 4x^2 + 3x} =$	g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^3 - 4x^2 + 3x} =$
b) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^3 - 4x^2 + 3x} =$	e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x + 1}{x^2 - 1} =$	h) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{-2}{x^2 + 5x} =$
c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^3 + 3x^2 + 3x + 2} =$	f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4}{x - 2} =$	i) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 10x + 25}{x^2 - 25} =$

2. Calcula els límits següents:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 + x + 1) =$	c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^3 + 5x^2 - x + 1) =$	e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^4 + 1) =$
b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 + x + 1) =$	d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^3 + 5x^2 - x + 1) =$	f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^4 + 1) =$

3. Calcula els límits següents:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x + 1}{x^2 + 3} =$	i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 2}{x^3 - 1} =$
b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 2x}{x + 1} =$	j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 + 1}{x^3 - 1} =$
c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 5x + 4}{x^5 + 3x^3 - 7x} =$	k) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 + 1}{x^3 - 1} =$
d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 5x + 4}{x^5 + 3x^3 - 7x} =$	l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} =$
e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - 4x^2 - 5}{4x^3 + 5x - 7} =$	m) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} =$
f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2 + 7x + 8}{-5x^2 + 1} =$	n) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} =$
g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{x^3 + 2x^2 + 1} =$	o) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 + 4x - 10x^3}{1 - 3x} =$
h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4}{x^3 + 2x^2 + 1} =$	p) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{6x^3 + 2x^2 + 3} =$

EXERCICIS: LÍMITS DE FUNCIONS

4. Calcula el límit de f quan:

$x \rightarrow 0, x \rightarrow -1, x \rightarrow 1, x \rightarrow 2, x \rightarrow 3, x \rightarrow 5, x \rightarrow 6, x \rightarrow 10, x \rightarrow 12 :$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x^2-1} & \text{si } x \leq 2 \\ 2x-3 & \text{si } 2 < x \leq 5 \\ \frac{10}{x-5} & \text{si } 5 < x \leq 10 \\ x+8 & \text{si } x > 10 \end{cases}$$

SOLUCIONS: LÍMITS DE FUNCIONS

1.

a) 23

d) $\frac{4}{3}$

g) $\begin{cases} -\infty & (x \rightarrow 1^-) \\ +\infty & (x \rightarrow 1^+) \end{cases}$

b) 0

e) $\frac{7}{3}$

h) $\begin{cases} -\infty & (x \rightarrow -5^-) \\ +\infty & (x \rightarrow -5^+) \end{cases}$

c) 1

f) $\begin{cases} -\infty & (x \rightarrow 2^-) \\ +\infty & (x \rightarrow 2^+) \end{cases}$

i) 0

2.

a) $+\infty$

c) $+\infty$

e) $-\infty$

b) $+\infty$

d) $-\infty$

f) $-\infty$

3.

a) 2

i) 0

b) $+\infty$

j) $+\infty$

c) 0

k) $-\infty$

d) 0

l) 0

e) $\frac{3}{4}$

m) 0

f) $\frac{3}{5}$

n) 0

g) 0

o) $+\infty$

h) 0

p) $+\infty$

4.

$x \rightarrow 0$	$x \rightarrow -1$	$x \rightarrow 1$	$x \rightarrow 2$	$x \rightarrow 3$	$x \rightarrow 5$
-1	$-\frac{1}{2}$	$\begin{cases} -\infty & (x \rightarrow 1^-) \\ +\infty & (x \rightarrow 1^+) \end{cases}$	1	3	$\nexists \begin{cases} 7 & (x \rightarrow 5^-) \\ +\infty & (x \rightarrow 5^+) \end{cases}$

$x \rightarrow 6$	$x \rightarrow 10$	$x \rightarrow 12$
10	$\nexists \begin{cases} 2 & (x \rightarrow 10^-) \\ 18 & (x \rightarrow 10^+) \end{cases}$	20

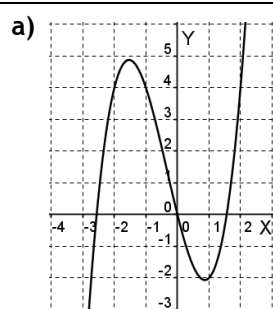
CONTINUÏTAT DE FUNCIONS

3. CONTINUÏTAT DE FUNCIONS

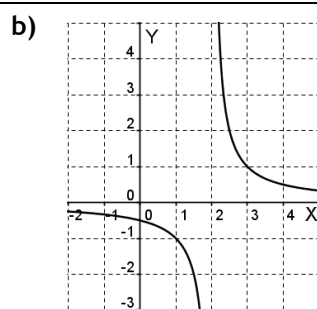
Continuïtat d'una funció

Una funció és contínua si la podem dibuixar sense aixecar el llapis del paper. En els punts on sigui necessari aixecar el llapis del paper serà discontinua.

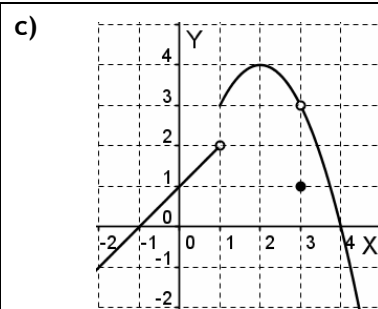
Exemples:



Funció contínua en $\mathbb{R}$



Funció discontinua en $x = 2$



Funció discontinua en $x = 1$ i en $x = 3$

Formalment, diem que una funció és contínua en el punt d'abscissa $x = a$ si verifica les tres condicions següents:

- La funció està definida en $x = a$, és a dir, $f(a) \in \mathbb{R}$:

$$a \in \text{Dom } f$$

- Existeix el límit de la funció quan $x \rightarrow a$:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \in \mathbb{R}$$

- El límit de la funció quan $x \rightarrow a$ coincideix amb $f(a)$:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L = f(a)$$

Es diu que una funció és contínua en un interval si és contínua per a tots els punts d'aquest interval.

Si una funció no és contínua en un punt $x = a$, diem que és discontinua en $x = a$ o que hi ha una discontinuïtat en $x = a$.

CONTINUÏTAT DE FUNCIONS

Tipus de discontinuïtats

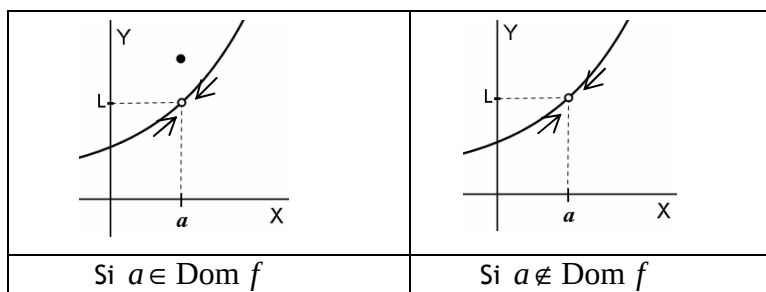
Discontinuitat evitable

Una funció té una **discontinuitat evitable** en $x = a$ quan existeix el límit de la funció en aquest punt però no coincideix amb $f(a)$. Pot ser que $f(a)$ sigui un nombre real diferent del límit o que $f(a)$ no existeixi.

Així doncs, quan hi ha una discontinuitat evitable es verifica la segona condició de continuïtat però no la tercera. La primera es pot verificar o no.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq f(a)$$

Gràficament és del tipus:



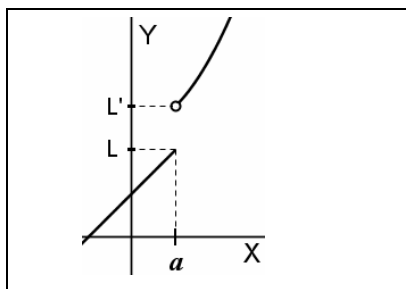
Discontinuitat de salt

Una funció té una **discontinuitat de salt** en $x = a$ quan existeixen els límits laterals de la funció en $x = a$ però no coincideixen (són dos nombres reals diferents).

Així doncs, quan hi ha una discontinuitat de salt no es verifica la segona condició de continuïtat i, per tant, tampoc es verifica la tercera condició. La primera condició es pot verificar o no.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \neq L' = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Gràficament és del tipus:



CONTINUÏTAT DE FUNCIONS

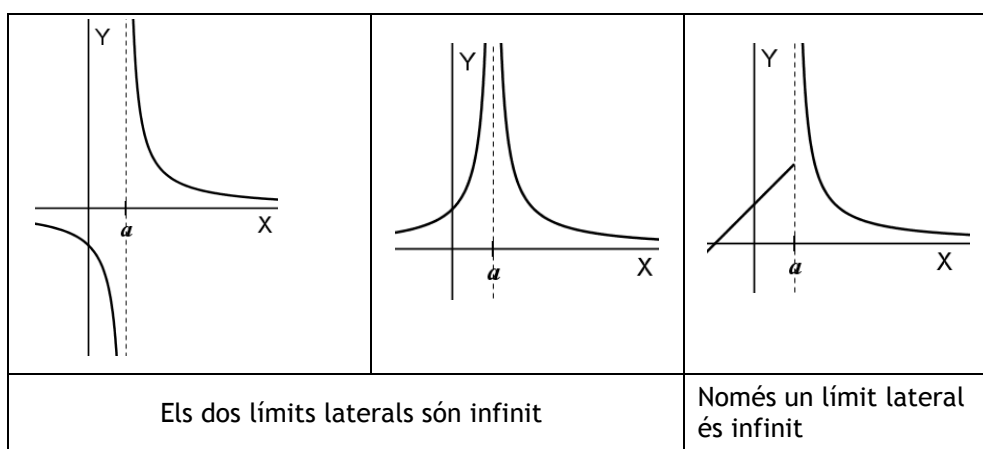
Discontinuitat asimptòtica

Una funció té una **discontinuitat asimptòtica** en $x = a$ quan almenys un dels límits laterals en $x = a$ és infinit.

Així doncs, quan hi ha una discontinuitat asimptòtica no es verifica la segona condició de continuïtat i, per tant, tampoc es verifica la tercera condició. La primera condició es pot verificar o no.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty \text{ i/o } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$$

Gràficament, hi ha una asymptota vertical en $x = a$:



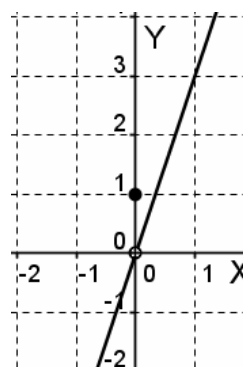
Exemples:

1. Estudia la continuïtat de la funció $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ en $x = 0$.

Comprovem si es verifiquen les tres condicions de continuïtat per a $x = 0$:

- $f(0) = 1 \rightarrow 0 \in \text{Dom } f$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$
- $\exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \neq f(0) = 1$

Hi ha una **discontinuitat evitable** en $x = 0$



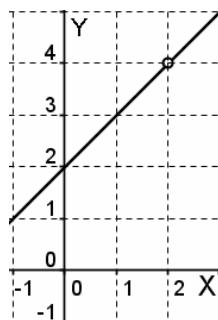
CONTINUÏTAT DE FUNCIONS

2. Estudia la continuïtat de la funció $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ en $x = 2$.

Comprovem si es verifiquen les tres condicions de continuïtat per a $x = 2$:

- $f(2) = \frac{0}{0} \nexists \rightarrow 2 \notin \text{Dom } f$
- $\exists \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} x+2 = \boxed{4}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4 \neq f(2)$

Hi ha una **discontinuitat evitable** en $x = 2$



Nota:

Evitem la discontinuitat definint una nova funció de la manera següent:

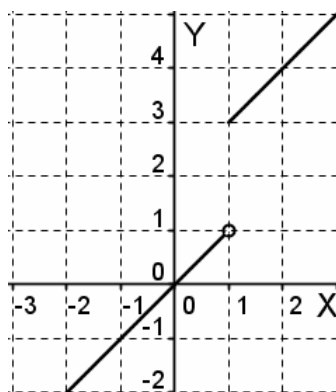
$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

3. Estudia la continuïtat de la funció $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ x + 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ en $x = 1$.

Comprovem si es verifiquen les tres condicions de continuïtat per a $x = 1$:

- $f(1) = 1 + 2 = 3 \rightarrow 1 \in \text{Dom } f$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \boxed{1} \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 + 2 = \boxed{3} \rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
- Si no es compleix la segona condició, no es pot complir la tercera.

Hi ha una **discontinuitat de salt** en $x = 1$.



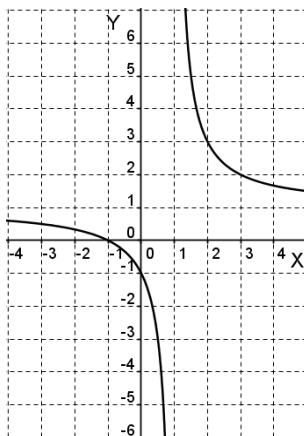
CONTINUÏTAT DE FUNCIONS

4. Estudia la continuïtat de la funció $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ en $x = 1$.

Comprovem si es verifiquen les tres condicions de continuïtat per a $x = 1$:

- $f(1) = \frac{2}{0} \nrightarrow 1 \notin \text{Dom } f$
- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{2}{0} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty \end{cases}$
- No es pot verificar la tercera condició, perquè no es verifiquen les dues primeres.

Hi ha una **discontinuitat asimptòtica** en $x = 1 \rightarrow x = 1$ és una asymptota vertical.

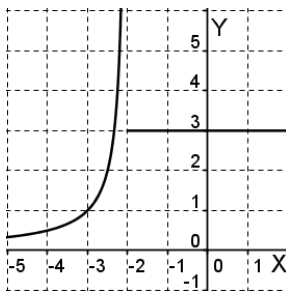


5. Estudia la continuïtat de la funció $f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x+2} & \text{si } x < -2 \\ 3 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$ en $x = -2$.

Comprovem si es verifiquen les tres condicions de continuïtat per a $x = -2$:

- $f(-2) = 3 \rightarrow -2 \in \text{Dom } f$
- $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 3 \rightarrow \nrightarrow \lim_{x \rightarrow -2} f(x)$
- Si no es compleix la segona condició, no es pot complir la tercera.

Hi ha una **discontinuitat asimptòtica** en $x = -2 \rightarrow x = -2$ és una asymptota vertical.



CONTINUÏTAT DE FUNCIONS

Exercicis:

a) Estudia la continuïtat de la funció $f(x) = \frac{x-5}{x^2-25}$ en $x = 5$ i $x = -5$.

b) Estudia la continuïtat de la funció $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x < 1 \\ x+1 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 2x-1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ en $x = -1$, $x = 1$ i $x = 2$.

Sol.:

a) En $x = 5$ hi ha una discontinuïtat evitable. En $x = -5$ hi ha una discontinuïtat asimptòtica.

b) En $x = 1$ hi ha una discontinuïtat de salt. En $x = 2$ i $x = -1$ és contínua.

CONTINUÏTAT DE FUNCIONS

Estudi de la continuïtat d'una funció

Per estudiar la continuïtat d'una funció, estudiem la continuïtat en els punts on la funció pot ser discontinua. Aquests punts són:

- Punts que no pertanyen al domini. En una funció racional són aquells que anul·len el denominador.
- Punts on canvia l'expressió algebraica d'una funció definida a trossos.

Per a cadascun d'aquests punts comprovem si es verifiquen les tres condicions de continuïtat.

Exemple: Estudia la continuïtat de la funció següent:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-9}{x^2+6x} & \text{si } x < -1 \rightarrow \text{s'anul·la el denominador en } \begin{cases} x=0 > -1 \\ \boxed{x=-6} < -1 \end{cases} \\ \frac{x^2-2x+5}{x+5} & \text{si } -1 \leq x \leq 3 \rightarrow \text{s'anul·la el denominador en } x=-5 < -1 \\ \frac{3x+1}{x-1} & \text{si } x > 3 \rightarrow \text{s'anul·la el denominador en } x=1 < 3 \end{cases}$$

L'únic valor de x que no pertany al domini de la funció és

$$\boxed{x=-6} \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-6\} :$$

- En $x=0$ s'anul·la el denominador de la primera expressió, però l'expressió algebraica de la funció en $x=0$ és la segona. Per tant, $f(0)=1 \rightarrow 0 \in \text{Dom } f$.
- En $x=-5$ s'anul·la el denominador de la segona expressió, però l'expressió algebraica de la funció en $x=-5$ és la primera. Per tant, $f(-5) = \frac{14}{5} \rightarrow -5 \in \text{Dom } f$.
- En $x=1$ s'anul·la el denominador de la tercera expressió, però l'expressió algebraica de la funció en $x=1$ és la segona. Per tant, $f(1) = \frac{2}{3} \rightarrow 1 \in \text{Dom } f$.

Així doncs, estudiarem la continuïtat de la funció en $\boxed{x=-6}$ (perquè no pertany al domini) i en $\boxed{x=-1}$ i $\boxed{x=3}$ perquè són punts on canvia l'expressió algebraica de la funció. En la resta de punts, la funció és contínua.

CONTINUÏTAT DE FUNCIONS

- En $x = -6$:

Comprovem si es verifiquen les tres condicions de continuïtat per a $x = -6$:

- $f(-6) = \frac{-15}{0} \nexists \rightarrow -6 \notin \text{Dom } f$
- $\lim_{x \rightarrow -6} f(x) = \frac{-15}{0} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -6^-} f(x) = \frac{-15}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -6^+} f(x) = \frac{-15}{0^-} = +\infty \end{cases}$
- No es pot verificar la tercera condició, perquè no es verifiquen les dues primeres.

Hi ha una **discontinuitat asimptòtica** en $x = -6 \rightarrow x = -6$ és una asímptota vertical.

- En $x = -1$:

Comprovem si es verifiquen les tres condicions de continuïtat per a $x = -1$:

- $f(-1) = \frac{(-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 5}{-1 + 5} = \frac{8}{4} = \boxed{2} \rightarrow -1 \in \text{Dom } f$
- $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{-1 - 9}{(-1)^2 + 6 \cdot (-1)} = \frac{-10}{-5} = \boxed{2}$;
- $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{(-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 5}{-1 + 5} = \frac{8}{4} = \boxed{2} \rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \boxed{2}$
- $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \boxed{2} = f(-1)$

La funció és contínua en $x = -1$

- En $x = 3$:

Comprovem si es verifiquen les tres condicions de continuïtat per a $x = 3$:

- $f(3) = \frac{3^2 - 2 \cdot 3 + 5}{3 + 5} = \frac{8}{8} = \boxed{1} \rightarrow 3 \in \text{Dom } f$
- $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \frac{3^2 - 2 \cdot 3 + 5}{3 + 5} = \frac{8}{8} = \boxed{1}$; $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \frac{3 \cdot 3 + 1}{3 - 1} = \frac{10}{2} = \boxed{5} \rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$
- No es pot verificar la tercera condició, perquè no es verifiquen les dues primeres.

Hi ha una **discontinuitat de salt** en $x = 3$

CONTINUÏTAT DE FUNCIONS

Exercici: Estudia la continuïtat de la funció següent:

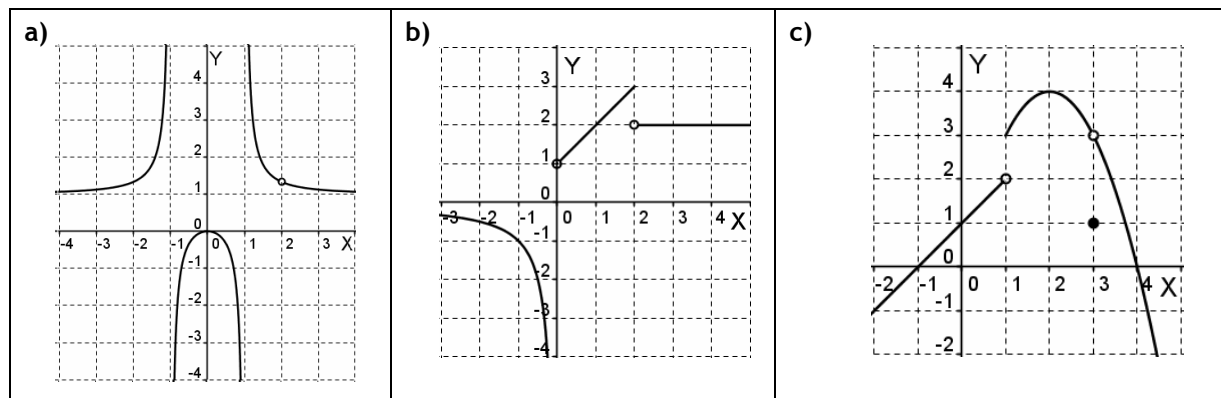
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x^2-1} & \text{si } x < 1 \\ 5x & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \\ \frac{x^2+4}{x-2} & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

Sol.: Hi ha una discontinuïtat evitable en $x = -1$, una discontinuïtat asimptòtica en $x = 1$ i una discontinuïtat de salt en $x = 4$. A la resta de punts, la funció és contínua.

EXERCICIS: CONTINUÏTAT DE FUNCIONS

Exercicis

1. A partir de la gràfica, determina i classifica els punts de discontinuïtat de les funcions següents:



2. Estudia la continuïtat de les funcions següents en el punt indicat:

a) $f(x) = \frac{x^2}{x-7}$ en $x = 7$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq -1 \\ -3x-2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$ en $x = -1$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ en $x = 0$

d) $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x+3}$ en $x = -3$

e) $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x < 5 \\ 3x & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$ en $x = 5$

f) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & \text{si } x \neq 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \end{cases}$ en $x = 3$

3. Estudia la continuïtat de $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-3x-10}$.

EXERCICIS: CONTINUÏTAT DE FUNCIONS

4. Estudia la continuïtat de les funcions següents:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x^2-1} & \text{si } x \leq 2 \\ 2x-3 & \text{si } 2 < x \leq 5 \\ \frac{10}{x-5} & \text{si } 5 < x \leq 10 \\ x+8 & \text{si } x > 10 \end{cases}$$

$$\text{b) } g(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{x^2+6x+9} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^2-1}{x-1} & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ 3x-3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

5. Calcula el valor de k perquè la funció següent sigui contínua en $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} 5x+k & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{x+4}{x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

SOLUCIONS: CONTINUÏTAT DE FUNCIONS

Solucions

1.

- a) Hi ha una discontinuïtat asimptòtica en $x = -1$ i en $x = 1$. Hi ha una discontinuïtat evitable en $x = 2$.
- b) Hi ha una discontinuïtat asimptòtica en $x = 0$ i una discontinuïtat de salt en $x = 2$.
- c) Hi ha una discontinuïtat de salt en $x = 1$ i una discontinuïtat evitable en $x = 3$.

2.

- a) Hi ha una discontinuïtat asimptòtica en $x = 7$.
- b) La funció és contínua en $x = -1$.
- c) Hi ha una discontinuïtat asimptòtica en $x = 0$.
- d) Hi ha una discontinuïtat evitable en $x = -3$.
- e) Hi ha una discontinuïtat de salt en $x = 5$.
- f) La funció és contínua en $x = 3$.

3. Hi ha una discontinuïtat asimptòtica en $x = 5$ i una discontinuïtat evitable en $x = -2$.
Per a la resta de valors reals, la funció és contínua.

4. a)

Hi ha una discontinuïtat evitable en $x = -1$.

Hi ha una discontinuïtat asimptòtica en $x = 1$.

La funció és contínua en $x = 2$.

Hi ha una discontinuïtat asimptòtica en $x = 5$.

Hi ha una discontinuïtat de salt en $x = 10$.

Per a la resta de valors reals, la funció és contínua.

SOLUCIONS: CONTINUÏTAT DE FUNCIONS

b)

Hi ha una discontinuïtat asimptòtica en $x = -3$.

Hi ha una discontinuïtat de salt en $x = 0$.

Hi ha una discontinuïtat evitable en $x = 1$.

La funció és contínua en $x = 2$.

Per a la resta de valors reals, la funció és contínua.

5. $k = -7$.

TEMA 8: DERIVADES

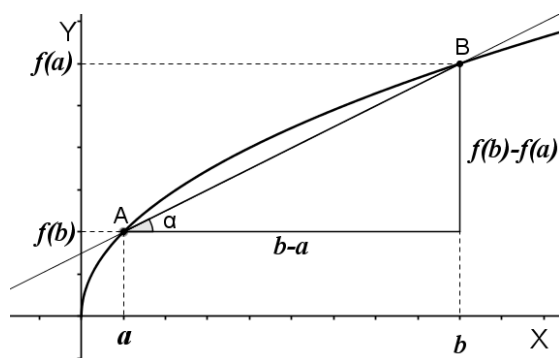
1. Derivades.
2. Aplicacions de les derivades.

DERIVADES

1. DERIVADES

Taxa de variació mitjana

La taxa de variació mitjana d'una funció $y = f(x)$ en l'interval $[a, b]$ es defineix com el quocient entre la variació de f (increment de y) i la de x (increment de x) en l'interval $[a, b]$ (ens indica la variació de y respecte de x). Es representa amb $TVM_{[a,b]}$.



$$TVM_{[a,b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

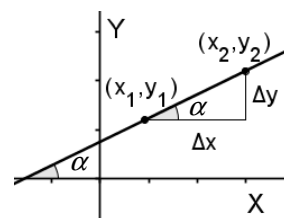
La taxa de variació mitjana de f en l'interval $[a, b]$ coincideix amb el pendent de la recta que uneix els punts $A(a, f(a))$ i $B(b, f(b))$, m_{AB} , i mesura l'increment mitjà de y quan x s'incrementa una unitat, entre A i B. Així, a l'hora d'interpretar el resultat de la $TVM_{[a,b]}$, hem de tenir en compte que és un valor mitjà.

$$TVM_{[a,b]} = m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha$$

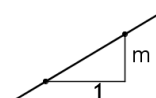
Nota: Recordem la definició de **pendent de la recta**:

El **pendent m** d'una recta es defineix com la tangent de l'angle que forma la recta amb l'eix OX. Si la recta és obliqua, talla l'eix OX i el divideix en dues parts. Per calcular el pendent, prenem l'angle que forma la recta amb la part dreta de l'eix OX, mesurat en sentit directe des de l'eix OX.

Donats dos punts qualssevol de la recta, el pendent és el quocient de l'increment (variació) de l'ordenada (Δy) entre l'increment de l'abscissa (Δx). Així, el pendent indica l'increment de l'ordenada quan l'abscissa s'incrementa en una unitat:



$$m = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{increment de l'ordenada}}{\text{increment de l'abscissa}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Exemples:

1. Durant un cert dia, les temperatures a la ciutat de Girona van ser les següents:

Hora	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Tª en °C	9	10	12	13	16	17	18	20	23	23	22	21	19	17	16

Quina és la taxa de variació mitjana de la temperatura entre les 7h i les 17h?

$$y = T^a \text{ en } ^\circ\text{C} \quad x = \text{Hores} \quad TVM_{[7,17]} = \frac{f(17) - f(7)}{17 - 7} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{22 - 9}{17 - 7} = \frac{13}{10} = \boxed{1,3^\circ\text{C/h}}$$

Aquest resultat significa que, de mitjana, la temperatura ha augmentat 1,3°C cada hora entre les 7 h i les 17 h. Aquest és l'augment mitjà per hora, no l'augment real. En realitat, hi ha hores que ha augmentat 1°C, altres que ha augmentat 2°C i altres que ha augmentat 3°C.

2. Un mòbil segueix una trajectòria rectilínia. La funció que ens dona la posició del mòbil (mesurada en metres) en funció del temps (mesurat en segons) és:

$$f(t) = t^2 - 2t + 1 \quad \begin{cases} y = f(t) = \text{Posició del mòbil respecte de l'origen} \\ t = \text{Temps en segons} \end{cases}$$

Calcula la velocitat mitjana, v_m , del mòbil entre $t = 1\text{ s}$ i $t = 3\text{ s}$.

La velocitat mitjana entre 1 i 3 segons coincideix amb la $TVM_{[1,3]}$:

$$v_m = TVM_{[1,3]} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{4 - 0}{2} = \frac{4}{2} = \boxed{2 \text{ m/s}}$$

El mòbil passa de la posició 0 m a la posició 4 m en 2 s, és a dir, recorre 4 m en 2 s. Per tant, la velocitat mitjana del mòbil en aquest interval de temps és de 2 m/s. Recorre, de mitjana, 2 metres cada segon. Això no vol dir que la velocitat del mòbil en aquest període de temps sigui sempre de 2 m/s; aquest és només un valor mitjà.

DERIVADES

3. Donada la funció $f(x) = x^2$, calcula:

a) La $TVM_{[0,1]}$

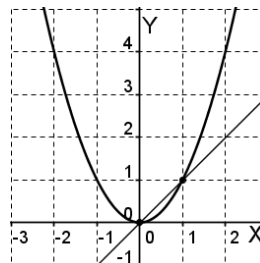
b) La $TVM_{[1,2]}$

c) La $TVM_{[-2,0]}$

d) La $TVM_{[-1,1]}$

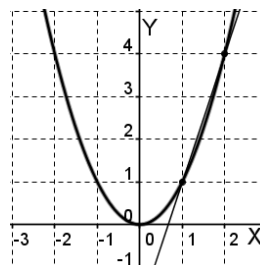
$$a) TVM_{[0,1]} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{1 - 0}{1} = \boxed{1}$$

En l'interval $[0,1]$, el valor de la funció augmenta, de mitjana, una unitat per cada unitat que augmenta x .



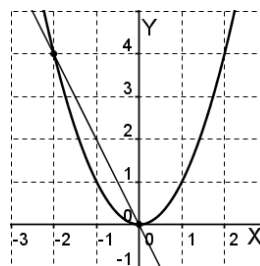
$$b) TVM_{[1,2]} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{4 - 1}{1} = \boxed{3}$$

En l'interval $[1,2]$, el valor de la funció augmenta, de mitjana, tres unitats per cada unitat que augmenta x .



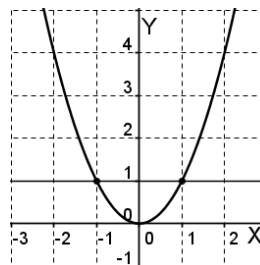
$$c) TVM_{[-2,0]} = \frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \frac{0 - 4}{2} = \boxed{-2}$$

En l'interval $[-2,0]$, el valor de la funció disminueix, de mitjana, dues unitats per cada unitat que augmenta x .



$$d) TVM_{[-1,1]} = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{1 - 1}{2} = \boxed{0}$$

La variació mitjana de la funció entre -1 i 1 és 0, però això no vol dir que el creixement sigui nul en tot aquest interval. De fet, la funció decreix entre -1 i 0 i creix entre 0 i 1.



DERIVADES

Exercici: Donada la funció $f(x) = x^2 - 2x - 1$, calcula la taxa de variació mitjana de f en els intervals $[1,3]$ i $[-1,0]$.

Sol.: $TVM_{[1,3]} = 2$ i $TVM_{[-1,0]} = -3$

Derivada d'una funció en un punt

Hem vist que la taxa de variació mitjana és un valor mitjà que ens informa de com varia globalment una funció en un interval, però no ens dóna informació de com varia la funció en un punt determinat.

A vegades ens interessa conèixer la variació de la funció en un punt. Per això, introduïm el concepte de taxa de variació instantània o derivada d'una funció en un punt.

Si una funció representa la posició d'un mòbil en funció del temps, la taxa de variació mitjana d'aquesta funció en un interval és la velocitat mitjana del mòbil en aquest interval i la taxa de variació instantània o derivada en un punt és la velocitat instantània del mòbil en un moment determinat. A vegades és més útil conèixer la velocitat instantània que la velocitat mitjana.

Exemples:

- 1.** Per estudiar les causes d'un accident d'un vehicle (un cotxe, un avió, un tren, etc.), és important saber la velocitat instantània en el moment de l'accident, no la velocitat mitjana del trajecte. Per això, les caixes negres dels avions enregistren velocitats instantànies.
- 2.** En el llançament d'un coet espacial és molt important calcular la velocitat instantània en diferents moments clau, com en el moment del l'inici del llançament. En aquest cas, la velocitat mitjana dóna poca informació.
- 3.** En moltes ocasions, és important conèixer en quin punt o punts canvia el creixement d'una funció (passa de ser creixent a ser decreixent o viceversa). Per això hem de conèixer com varia la funció en cada punt.

DERIVADES

Per calcular la derivada d'una funció f en un punt d'abscissa $x = a$, podem calcular la **TVM** en intervals del tipus $[a, x]$ o $[x, a]$, amb la x cada vegada més propera a a . Com més s'aproxima x a a , més petit és l'interval i més s'aproxima la **TVM** a la derivada. Així, la derivada de f en $x = a$ és el límit d'aquestes **TVM** quan $x \rightarrow a$ (fem l'interval infinitament petit, perquè s'aproximi a un punt).

Exemple: Vegem a què s'aproxima la taxa de variació mitjana de la funció

$f(x) = x^2 + 1$ en l'interval $[2, x]$ quan $x \rightarrow 2$:

$$TVM_{[2,2.5]} = \frac{f(2.5) - f(2)}{2.5 - 2} = \frac{7.25 - 5}{0.5} = \frac{2.25}{0.5} = \boxed{4.5}$$

$$TVM_{[2,2.1]} = \frac{f(2.1) - f(2)}{2.1 - 2} = \frac{5.41 - 5}{0.1} = \frac{0.41}{0.1} = \boxed{4.1}$$

$$TVM_{[2,2.01]} = \frac{f(2.01) - f(2)}{2.01 - 2} = \frac{5.0401 - 5}{0.01} = \frac{0.0401}{0.01} = \boxed{4.01}$$

La taxa de variació mitjana s'aproxima a 4.

La derivada d'una funció f en el punt d'abscissa $x = a$ es representa amb $f'(a)$ i es defineix com el límit següent:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Si fem $x - a = h$:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \rightarrow \text{Derivada de } f \text{ en } x = a$$

Si aquest límit existeix, es diu que la funció és derivable en $x = a$ i si no existeix, es diu que no es derivable en $x = a$.

Exemple: Calcula la derivada de la funció $f(x) = x^2 + 1$ en $x = 2$:

$$f(2+h) = (2+h)^2 + 1 = 4 + 4h + h^2 + 1 = h^2 + 4h + 5$$

$$f(2) = 2^2 + 1 = 5$$

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 4h + 5 - 5}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h + 4}{1} = \boxed{4}$$

En valors de x propers a 2, el valor de la funció augmenta 4 vegades el que augmenta x .

DERIVADES

Exercici: Calcula la derivada de la funció $f(x) = 3x + 4$ en $x = 5$:

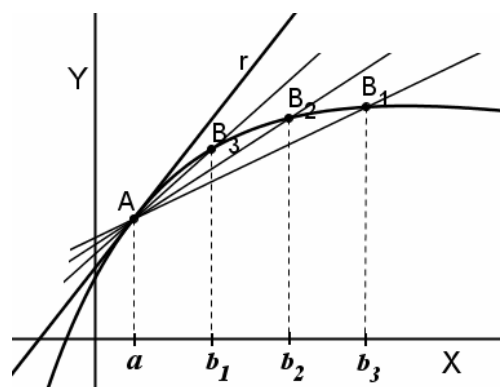
Sol.: 3

Interpretació geomètrica de la derivada d'una funció en un punt

Recordem que la $TVM_{[a,b]}$ coincideix amb el pendent de la recta que passa per $A(a, f(a))$ i $B(b, f(b))$:

$$TVM_{[a,b]} = m_{AB}$$

Tal com veiem en la figura de la dreta, a mesura que B s'apropa a A, la recta que passa per A i B s'apropa a la recta r tangent a la corba en el punt A.



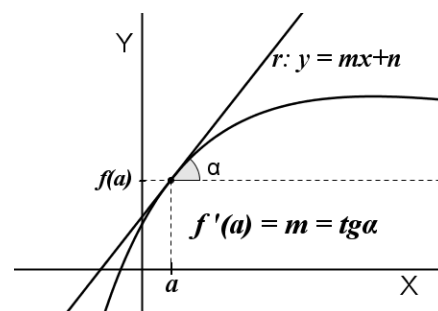
Per tant, m_{AB} tendeix al pendent de r (que representarem amb m) quan B s'apropa a A.

Com que la $TVM_{[a,b]}$ tendeix a la derivada de la funció en $x = a$, quan $b \rightarrow a$, deduïm que la derivada de la funció en $x = a$ és igual a m .

La derivada d'una funció f en el punt d'abscissa $x = a$ coincideix amb el pendent de la recta tangent a la gràfica de f en el punt $(a, f(a))$:

$$f'(a) = m$$

amb m = pendent de la recta tangent a f en el punt $(a, f(a))$.



DERIVADES

Nota:

Una funció és derivable en $x = a$ si la seva gràfica admet recta tangent en aquest punt.

Funció derivada

La funció derivada d'una funció f (o derivada d'una funció f) és una altra funció que a cada valor de x li fa correspondre el valor de la derivada de f en aquest punt. Es representa amb $f'(x)$.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Coneixent la funció derivada de f , podem calcular fàcilment la derivada de f en un punt qualsevol d'abscissa $x = a$. Només caldrà substituir x per a en l'expressió algebraica de la funció derivada.

Exemple: Troba la funció derivada de la funció $f(x) = x^2 + 1$ i calcula $f'(2)$ i $f'(-5)$.

$$f(x+h) = (x+h)^2 + 1 = x^2 + 2xh + h^2 + 1$$

$$f(x) = x^2 + 1$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 1 - (x^2 + 1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 + \cancel{1} - \cancel{x^2} - \cancel{1}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x\cancel{h} + h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x + h}{1} = \boxed{2x}$$

$$f'(x) = 2x \rightarrow \begin{cases} f'(2) = 2 \cdot 2 = \boxed{4} \\ f'(-5) = 2 \cdot (-5) = \boxed{-10} \end{cases}$$

Exercici: Troba la funció derivada de la funció $f(x) = 3x + 4$ i calcula $f'(2)$ i $f'(-5)$.

Sol.: $f'(x) = 3$, $f'(2) = 3$, $f'(-5) = 3$

DERIVADES

Càlcul de derivades

Calcular les funcions derivades aplicant la definició de derivada, com hem fet en l'exemple i l'exercici anteriors, pot ser llarg i complicat. Tanmateix, a partir de la definició de derivada s'obtenen unes regles de derivació pràctiques que permeten calcular la funció derivada fàcilment.

A continuació veurem algunes d'aquestes regles de derivació.

Derivada de la funció constant

$$f(x) = k \rightarrow f'(x) = 0$$

La funció constant ni creix ni decreix, per tant, té derivada igual a zero.

Exemples: Calcula la derivada de les funcions següents:

1. $f(x) = 5 \rightarrow f'(x) = \boxed{0}$

2. $f(x) = \frac{3}{5} \rightarrow f'(x) = \boxed{0}$

3. $f(x) = \sqrt{3} \rightarrow f'(x) = \boxed{0}$

4. $f(x) = \pi \rightarrow f'(x) = \boxed{0}$

Exercici: Calcula la derivada de les funcions següents:

a) $f(x) = -8$

b) $f(x) = -3\sqrt{2}$

Derivada de la funció $f(x) = x$

$$f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1$$

Derivada de la funció $f(x) = x^p$

$$f(x) = x^p \rightarrow f'(x) = p \cdot x^{p-1} \quad \text{amb } p \in \mathbb{Q}$$

Exemples: Calcula la derivada de les funcions següents:

1. $f(x) = x^2 \rightarrow f'(x) = \boxed{2x}$

2. $f(x) = x^3 \rightarrow f'(x) = \boxed{3x^2}$

3. $f(x) = x^5 \rightarrow f'(x) = \boxed{5x^4}$

4. $f(x) = x^{10} \rightarrow f'(x) = \boxed{10x^9}$

DERIVADES

També podem aplicar la mateixa regla si l'exponent és negatiu o fraccionari:

$$\underline{5.} \quad f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f(x) = x^{-1} \rightarrow f'(x) = -x^{-2} = \boxed{-\frac{1}{x^2}}$$

$$\underline{6.} \quad f(x) = \frac{1}{x^2} \rightarrow f(x) = x^{-2} \rightarrow f'(x) = -2x^{-3} = \boxed{-\frac{2}{x^3}}$$

$$\underline{7.} \quad f(x) = \sqrt{x} \rightarrow f(x) = x^{\frac{1}{2}} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

$$\underline{8.} \quad f(x) = \sqrt[3]{x^5} \rightarrow f(x) = x^{\frac{5}{3}} \rightarrow f'(x) = \frac{5}{3} x^{\frac{5}{3}-1} = \frac{5}{3} x^{\frac{2}{3}} = \boxed{\frac{5}{3} \sqrt[3]{x^2}}$$

$$\underline{9.} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow f(x) = x^{-\frac{1}{2}} \rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} = \boxed{-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}}$$

Exercicis: Calcula la derivada de les funcions següents:

a) $f(x) = x^7$

b) $f(x) = x^9$

c) $f(x) = \frac{1}{x^3}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

e) $f(x) = \sqrt{x^3}$

f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

Derivada de la funció exponencial

$$\boxed{f(x) = a^x \rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a} \quad \text{amb } a \in \mathbb{R}^+ \text{ i } a \neq 1$$

Vegem la derivada del cas particular de funció exponencial en què $a = e$:

$$f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x \cdot \ln e = e^x \cdot 1 = \boxed{e^x}$$

$$\boxed{f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x}$$

DERIVADES

Exemples: Calcula la derivada de les funcions següents:

1. $f(x) = 5^x \rightarrow f'(x) = \boxed{5^x \cdot \ln 5}$

2. $f(x) = 2^x \rightarrow f'(x) = \boxed{2^x \cdot \ln 2}$

Exercicis: Calcula la derivada de les funcions següents:

a) $f(x) = 8^x$

b) $f(x) = 10^x$

Derivada del producte d'una constant per una funció

$$f(x) = k \cdot g(x) \rightarrow f'(x) = k \cdot g'(x)$$

Exemples: Calcula la derivada de les funcions següents:

1. $f(x) = 5x \rightarrow f'(x) = 5 \cdot 1 = \boxed{5}$

2.

$f(x) = 6x^2 \rightarrow f'(x) = 6 \cdot 2x = \boxed{12x}$

3. $f(x) = -5x^4 \rightarrow f'(x) = -5 \cdot 4x^3 = \boxed{-20x^3}$

4. $f(x) = \frac{x^3}{5} \rightarrow f'(x) = \boxed{\frac{3x^2}{5}}$

5. $f(x) = \frac{3}{x} \rightarrow f(x) = 3x^{-1} \rightarrow f'(x) = -3x^{-2} = \boxed{-\frac{3}{x^2}}$

6. $f(x) = 5\sqrt{x} \rightarrow f(x) = 5x^{\frac{1}{2}} \rightarrow f'(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{5}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{5}{2x^{\frac{1}{2}}} = \boxed{\frac{5}{2\sqrt{x}}}$

Exercicis: Calcula la derivada de les funcions següents:

a) $f(x) = 9x^8$

b) $f(x) = -3x^5$

c) $f(x) = \frac{3}{4}x^3$

DERIVADES

$$\text{e) } f(x) = \frac{7}{4x^2}$$

$$\text{d) } f(x) = -10\sqrt[5]{x}$$

Derivada de la suma de funciones

La derivada de la suma de diversas funciones es la suma de las derivadas d'aquestes funciones:

$$f(x) = g(x) + h(x) + \dots + t(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x) + \dots + t'(x)$$

Exemples: Calcula la derivada de les funcions següents:

$$\underline{1.} \quad f(x) = 5x^3 + 2x^2 - 8x + 10 \rightarrow f'(x) = \boxed{15x^2 + 4x - 8}$$

$$\underline{2.} \quad f(x) = -x^4 + \sqrt{2}x^3 - \frac{6}{x^3} + 1 \rightarrow f'(x) = \boxed{-4x^3 + 3\sqrt{2}x^2 + \frac{18}{x^4}}$$

Exercicis: Calcula la derivada de les funcions següents:

$$\text{a) } f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 5$$

$$\text{b) } f(x) = 5x^3 + 2x + 5$$

$$\text{c) } f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$$

$$\text{d) } f(x) = 4^x + 2x^3 + \pi x$$

Derivada del producte de dues funcions

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

Exemples: Calcula la derivada de les funcions següents:

$$\underline{1.} \quad f(x) = x \cdot 5^x \rightarrow f'(x) = 1 \cdot 5^x + x \cdot 5^x \ln 5 = \boxed{5^x + x \cdot 5^x \ln 5}$$

DERIVADES

2. $f(x) = (2x+1) \cdot (3x^2 - 5)$

$$\rightarrow f'(x) = 2 \cdot (3x^2 - 5) + (2x+1) \cdot 6x = 6x^2 - 10 + 12x^2 + 6x = \boxed{18x^2 + 6x - 10}$$

Nota: En l'exemple 2, es pot fer primer el producte i després derivar el polinomi resultant. Aquest procediment sol ser més senzill que derivar directament el producte de dos polinomis.

Exercicis: Calcula la derivada de les funcions següents:

a) $f(x) = 7x^3 \cdot e^x$

b) $f(x) = (x+1) \cdot (3x^4 + x - 3)$

Derivada del quocient de dues funcions

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$$

Exemples: Calcula la derivada de les funcions següents:

1. $f(x) = \frac{x}{5^x} \rightarrow f'(x) = \frac{1 \cdot \cancel{5^x} - x \cdot \cancel{5^x} \ln 5}{(5^x)^{\cancel{x}}} = \boxed{\frac{1 - x \cdot \ln 5}{5^x}}$

2. $f(x) = \frac{2x+1}{3x^2-5}$

$$\rightarrow f'(x) = \frac{2 \cdot (3x^2 - 5) - (2x+1) \cdot 6x}{(3x^2 - 5)^2} = \frac{6x^2 - 10 - 12x^2 - 6x}{(3x^2 - 5)^2} = \boxed{\frac{-6x^2 - 6x - 10}{(3x^2 - 5)^2}}$$

DERIVADES

Exercicis: Calcula la derivada de les funcions següents:

a) $f(x) = \frac{7x^3}{e^x}$

b) $f(x) = \frac{x+1}{3x^4 + x - 3}$

Derivada de la funció $f(x) = [g(x)]^p$

$$f(x) = [g(x)]^p \rightarrow f'(x) = p \cdot [g(x)]^{p-1} \cdot g'(x) \quad \text{amb } p \in \mathbb{Q}$$

Exemples: Calcula la derivada de les funcions següents:

1. $f(x) = (2x+1)^2 \rightarrow f'(x) = 2(2x+1) \cdot 2 = \boxed{4(2x+1)}$

2. $f(x) = (3x^3 + 4x^2 + 1)^5 \rightarrow f'(x) = 5(3x^3 + 4x^2 + 1)^4 \cdot (9x^2 + 8x)$

També podem aplicar la mateixa regla si l'exponent és negatiu o fraccionari:

3. $f(x) = \frac{1}{5x^2 + 4} \rightarrow f(x) = (5x^2 + 4)^{-1}$

$$\rightarrow f'(x) = -(5x^2 + 4)^{-2} \cdot 10x = \boxed{\frac{-10x}{(5x^2 + 4)^2}}$$

4. $f(x) = \sqrt{4x^3 + 2x^2 - x - 3} \rightarrow f(x) = (4x^3 + 2x^2 - x - 3)^{\frac{1}{2}}$

$$\rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}(4x^3 + 2x^2 - x - 3)^{-\frac{1}{2}} \cdot (12x^2 + 4x - 1) = \boxed{\frac{12x^2 + 4x - 1}{2\sqrt{4x^3 + 2x^2 - x - 3}}}$$

DERIVADES

Exercicis: Calcula la derivada de les funcions següents:

a) $f(x) = (x^5 + 2x^2 + x - 10)^8$

b) $f(x) = \sqrt[3]{(3x^2 - x + 1)^4}$

c) $f(x) = \frac{1}{(x+5)^2}$

d) $f(x) = \frac{1}{6x^3 - 2x}$

Derivada de la funció $f(x) = a^{g(x)}$

$$f(x) = a^{g(x)} \rightarrow f'(x) = a^{g(x)} \cdot g'(x) \cdot \ln a \quad \text{amb } a \in \mathbb{R}^+ \text{ i } a \neq 1$$

Exemples: Calcula la derivada de les funcions següents:

1. $f(x) = 2^{5x} \rightarrow f'(x) = 2^{5x} \cdot 5 \cdot \ln 2$

2.

$$f(x) = e^{(3x^3 + 4x^2 + 1)} \rightarrow f'(x) = e^{(3x^3 + 4x^2 + 1)} \cdot (9x^2 + 8x) = (9x^2 + 8x) \cdot e^{(3x^3 + 4x^2 + 1)}$$

Exercicis: Calcula la derivada de les funcions següents:

a) $f(x) = 8^{(x^5 + 2x^2 + x - 10)}$

DERIVADES

$$\text{b) } f(x) = e^{2x^5}$$

Taules de derivades

En les taules següents, resumim les regles de derivació que hem vist:

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
x	1
x^p	px^{p-1}
a^x	$a^x \cdot \ln a$
e^x	e^x

$f(x)$	$f'(x)$
$k \cdot g(x)$	$k \cdot g'(x)$
$g(x) + h(x)$	$g'(x) + h'(x)$
$g(x) \cdot h(x)$	$g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$
$\frac{g(x)}{h(x)}$	$\frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$
$[g(x)]^p$	$p \cdot [g(x)]^{p-1} \cdot g'(x)$
$a^{g(x)}$	$a^{g(x)} \cdot g'(x) \cdot \ln a$

EXERCICIS: DERIVADES

1. Donada la funció $f(x) = x^2 - 4x + 1$, calcula les taxes de variació mitjana següents i interpreta el resultat:

a) $TVM_{[-1,2]}$

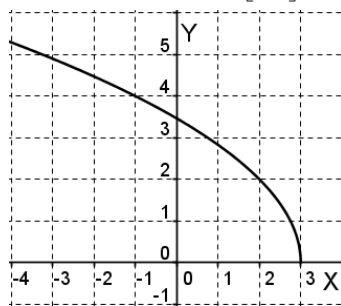
b) $TVM_{[0,3]}$

c) $TVM_{[2,4]}$

2. Un mòbil segueix una trajectòria rectilínia. La funció que ens dona la posició del mòbil (mesurada en metres) en funció del temps (mesurat en segons) és $f(t) = t^2 - 5t + 7$.

Calcula la velocitat mitjana (v_m) del mòbil entre 3 segons i 4 segons i entre 4 segons i 5 segons. En quin tram va més de pressa?

3. A partir de la gràfica, calcula la $TVM_{[-1,3]}$ de la funció següent:



4. Donada la funció $f(x) = x^2$, calcula $f'(3)$ aplicant la definició de derivada.

5. Troba la derivada de les funcions següents:

a) $f(x) = -3$

g) $f(x) = 5e^x$

b) $f(x) = \frac{1}{x^6}$

h) $f(x) = -3x$

c) $f(x) = \sqrt{x^5}$

i) $f(x) = -8x^5$

d) $f(x) = \sqrt[5]{x}$

j) $f(x) = \frac{-5}{x}$

e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x}}$

k) $f(x) = 9x^2 - 2x + 1$

EXERCICIS: DERIVADES

f) $f(x) = 9^x$

l) $f(x) = x^5 - 4x^3 + 2x^2 - 5$

m) $f(x) = \sqrt{3}x^3 - \frac{1}{x}$

t) $f(x) = (5x - 2)^3$

n) $f(x) = (x - 2)(x^2 + 5)$

u) $f(x) = (7x^4 - x^3 + 2)^5$

o) $f(x) = xe^x$

v) $f(x) = \sqrt{3x^2 + 2x + 1}$

p) $f(x) = 5x^2 8^x$

w) $f(x) = \sqrt[3]{(2x + 1)^5}$

q) $f(x) = \frac{x}{e^x}$

x) $f(x) = \frac{1}{(x^3 + 1)^3}$

r) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3}$

y) $f(x) = 5^{(x^2 + 2x + 1)}$

s) $f(x) = \frac{x}{x + 2}$

z) $f(x) = e^{(x^2 + 1)}$

6. Donada la funció $f(x) = 3x^3 + x^2 - 4x + 1$, calcula:

a) $f'(0)$ i $f'(-1)$.

b) El pendent m de la recta tangent a la gràfica de f en el punt d'abscissa $x = 1$.

Solucions

1. a) -3

El valor de la funció disminueix, de mitjana, 3 unitats per cada unitat que augmenta la x .

b) -1

El valor de la funció disminueix, de mitjana, 1 unitat per cada unitat que augmenta la x .

c) 2

El valor de la funció augmenta, de mitjana, 2 unitats per cada unitat que augmenta la x .

2. La velocitat mitjana entre 3 segons i 4 segons és de 2 m/s.

La velocitat mitjana entre 4 segons i 5 segons és de 4 m/s.

El mòbil va més de pressa en el segon tram.

3. $TVM_{[-1,3]} = -1$.

4. $f'(3) = 6$.

5.

a) $f'(x) = 0$

g) $f'(x) = 5e^x$

b) $f'(x) = -\frac{6}{x^7}$

h) $f'(x) = -3$

c) $f'(x) = \frac{5}{2}\sqrt{x^3}$

i) $f'(x) = -40x^4$

d) $f'(x) = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$

j) $f'(x) = \frac{5}{x^2}$

e) $f'(x) = -\frac{1}{5\sqrt[5]{x^6}}$

k) $f'(x) = 18x - 2$

f) $f'(x) = 9^x \ln 9$

l) $f'(x) = 5x^4 - 12x^2 + 4x$

SOLUCIONS: DERIVADES

m) $f'(x) = 3\sqrt{3x^2} + \frac{1}{x^2}$

t) $f'(x) = 15(5x-2)^2$

n) $f'(x) = 3x^2 - 4x + 5$

u) $f'(x) = 5(7x^4 - x^3 + 2)^4 (28x^3 - 3x^2)$

o) $f'(x) = (1+x)e^x$

v) $f'(x) = \frac{3x+1}{\sqrt{3x^2+2x+1}}$

p) $f'(x) = 10x8^x + 5x^28^x \ln 8$

w) $f'(x) = \frac{10}{3} \sqrt[3]{(2x+1)^2}$

q) $f'(x) = \frac{1-x}{e^x}$

x) $f'(x) = \frac{-9x^2}{(x^3+1)^4}$

r) $f'(x) = \frac{-x^2-3}{x^4}$

y) $f'(x) = (2x+2)5^{(x^2+2x+1)} \ln 5$

s) $f'(x) = \frac{2}{(x+2)^2}$

z) $f'(x) = 2xe^{(x^2+1)}$

6.

a) $f'(0) = -4$ i $f'(-1) = 3$.

b) $m = 7$.

Solucions dels exercicis de la teoria

Derivada de la funció constant

a) $f'(x) = 0$

b) $f'(x) = 0$

Derivada de la funció $f(x) = x^p$

a) $f'(x) = 7x^6$

b) $f'(x) = 9x^8$

c) $f'(x) = -\frac{3}{x^4}$

d) $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

e) $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

f) $f'(x) = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}$

Derivada de la funció exponencial

a) $f'(x) = 8^x \ln 8$

b) $f'(x) = 10^x \ln 10$

SOLUCIONS: DERIVADES

Derivada del producte d'una constant per una funció

- a) $f'(x) = 72x^7$ b) $f'(x) = -15x^4$ c) $f'(x) = \frac{9}{4}x^2$
- d) $f'(x) = -\frac{2}{\sqrt[5]{x^4}}$ e) $f'(x) = -\frac{7}{2x^3}$

Derivada de la suma de funcions

- a) $f'(x) = 3x^2 - 4x - 3$ b) $f'(x) = 15x^2 + 2$
- c) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$ d) $f'(x) = 4^x \ln 4 + 6x^2 + \pi$

Derivada del producte de dues funcions

- a) $f'(x) = (7x^3 + 21x^2) \cdot e^x$ b) $f'(x) = 15x^4 + 12x^3 + 2x - 2$

Derivada del quocient de dues funcions

- a) $f'(x) = \frac{-7x^3 + 21x^2}{e^x}$ b) $f'(x) = \frac{-9x^4 - 12x^3 - 4}{(3x^4 + x - 3)^2}$

Derivada de la funció $f(x) = [g(x)]^p$

- a) $f'(x) = 8(x^5 + 2x^2 + x - 10)^7 (5x^4 + 4x + 1)$ b) $f'(x) = \frac{4}{3}(6x - 1)\sqrt[3]{3x^2 - x + 1}$
- c) $f'(x) = -\frac{2}{(x+5)^3}$ d) $f'(x) = \frac{-18x^2 + 2}{(6x^3 - 2x)^2}$

Derivada de la funció $f(x) = a^{g(x)}$

- a) $f'(x) = (5x^4 + 4x + 1)8^{(x^5 + 2x^2 + x - 10)} \ln 8$ b) $f'(x) = 10x^4 e^{2x^5}$

2. APLICACIONS DE LES DERIVADES

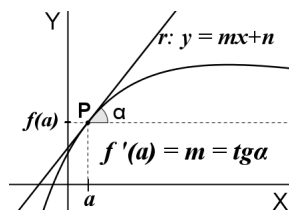
Càlcul de l'equació de la recta tangent a una corba en un punt

Recordem la interpretació geomètrica de la derivada d'una funció en un punt:

La derivada d'una funció f en el punt P d'abscissa $x = a$ coincideix amb el pendent de la recta tangent a la gràfica de f en el punt $P(a, f(a))$:

$$f'(a) = m$$

amb m = pendent de la recta tangent a f en el punt $P(a, f(a))$.



Recordem també que l'equació punt-pendent d'una recta de pendent m i que passa pel punt $P(p_1, p_2)$ és: $y - p_2 = m \cdot (x - p_1)$.

Per calcular l'equació de la recta tangent a la gràfica d'una funció donada $f(x)$ en un punt P d'abscissa $x = a$, procedim de la manera següent:

- Calculem el pendent de la recta, m , que és igual a $f'(a)$: $m = f'(a)$
 - Calculem $f'(x)$.
 - Calculem $f'(a)$, substituint x per a en $f'(x)$.
- Calculem les coordenades del punt P , del qual coneixem l'abscissa $x = a$. Aquest punt, anomenat també punt de tangència, és un punt comú de la recta i de la gràfica de $f(x)$. Aleshores, l'ordenada del punt és igual a $f(a)$: $P(a, f(a))$.
- Escrivim l'equació punt-pendent de la recta de pendent $m = f'(a)$ i que passa per $P(a, f(a))$:

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

- Aïllem y per calcular l'equació explícita de la recta, que és del tipus: $y = mx + n$

Exemple: Calcula l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció

$$f(x) = x^2 - 2x - 1 \text{ en el punt d'abscissa } x = 2.$$

- Calculem el pendent de la recta, m , que és igual a $f'(2)$:

$$f'(x) = 2x - 2 \rightarrow f'(2) = 2 \cdot 2 - 2 = 2 \rightarrow m = f'(2) = 2$$

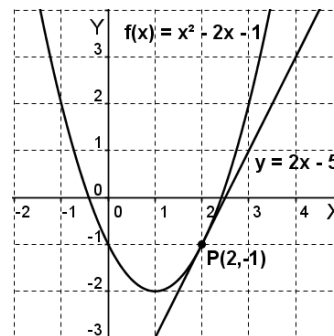
APLICACIONS DE LES DERIVADES

- Calculem les coordenades del punt P

$$P(2, f(2)); f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 - 1 = \boxed{-1} \rightarrow \boxed{P(2, -1)}$$

- Escrivim l'equació punt-pendent de la recta i aïllem y

$$y - \underbrace{(-1)}_{+1} = 2 \cdot (x - 2) \rightarrow y = 2x - 4 - 1 \rightarrow \boxed{y = 2x - 5}$$



Exercici: Calcula l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció

$$f(x) = x^3 + 4x^2 + 10x + 10 \text{ en el punt d'abscissa } x = -1.$$

Sol.: $y = 5x + 8$

Estudi del creixement i decreixement d'una funció

Creixement, decreixement i extrems relatius

Una funció f és **creixent** en un interval si en aquest interval quan augmenta el valor de x també augmenta el de $f(x)$, és a dir, si per a tot parell de valors x_1 i x_2 de l'interval es compleix que:

$$\text{Si } x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Una funció és **creixent** en un punt d'abscissa $x = a$ si és creixent al voltant d'aquest punt, és a dir, si existeix un interval del tipus $(a - h, a + h)$, amb $h \in \mathbb{R}$, en el qual la funció és creixent.

APLICACIONS DE LES DERIVADES

Una funció f és **decreixent en un interval** si en aquest interval quan augmenta el valor de x disminueix el valor de $f(x)$, és a dir, si per a tot parell de valors x_1 i x_2 de l'interval es compleix que:

$$\text{Si } x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Una funció és **decreixent en un punt d'abscissa $x=a$** si és decreixent al voltant d'aquest punt, és a dir, si existeix un interval del tipus $(a-h, a+h)$, amb $h \in \mathbb{R}$, en el qual la funció és decreixent.

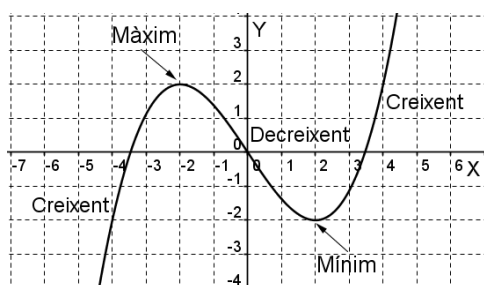
Una funció contínua i derivable en $x=a$ té un **màxim relatiu en $x=a$** si en aquest punt la funció passa de ser creixent a ser decreixent.

Una funció contínua i derivable en $x=a$ té un **mínim relatiu en $x=a$** si en aquest punt la funció passa de ser decreixent a ser creixent.

Els màxims i mínims relatius s'anomenen també **extrems relatius**.

Una funció té un **màxim (mínim) absolut en $x=a$** si $f(a)$ és la més gran (petita) de totes les imatges de la funció.

Exemple: A partir de la gràfica, estudia els intervals de creixement i decreixement i els extrems relatius de la funció següent:



- En l'interval $(-\infty, -2)$ la funció és creixent.
- La funció té un màxim relatiu en $x = -2$.
- En l'interval $(-2, 2)$ la funció és decreixent.
- La funció té un mínim relatiu en $x = 2$.
- En l'interval $(2, +\infty)$ la funció és creixent.

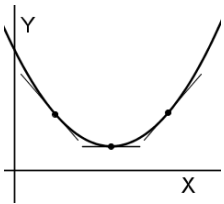
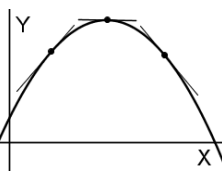
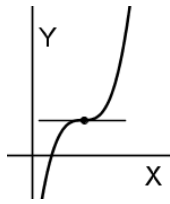
Concavitat, convexitat i punts d'inflexió

Una funció és **còncava** en un interval si la recta tangent a la seva gràfica en un punt qualsevol d'aquest interval se situa per sota de la gràfica, al voltant del punt de tangència.

APLICACIONS DE LES DERIVADES

Una funció és **convexa** en un interval si la recta tangent a la seva gràfica en un punt qualsevol d'aquest interval se situa per sobre de la gràfica, al voltant del punt de tangència.

Una funció té un **punt d'inflexió** en el punt d'abscissa $x = a$, si en aquest punt la funció passa de ser còncava a ser convexa o viceversa.

<u>Exemples:</u>		
Còncava	Convexa	Punt d'inflexió
		

Relació de la derivada amb el creixement, el decreixement i els punts estacionaris

Recordem que la derivada d'una funció en un punt és el pendent de la recta tangent a la gràfica de la funció en aquest punt i que el pendent d'una recta ens dona informació sobre el creixement d'aquesta recta. El signe del pendent ens indica si la recta és creixent o decreixent:

- Si el pendent és positiu, la recta és creixent: $m > 0 \rightarrow$ recta creixent.
- Si el pendent és negatiu, la recta és decreixent: $m < 0 \rightarrow$ recta decreixent.

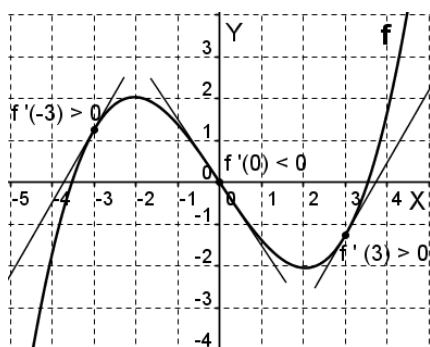
Si la recta tangent a una funció en un punt és creixent, la funció és creixent en aquest punt. Anàlogament, si la recta tangent és decreixent, la funció serà decreixent.

Així doncs, la derivada d'una funció en un punt ens dona informació sobre el creixement de la funció en aquest punt. El signe de la derivada ens indica si la funció és creixent o decreixent:

- Si $f'(a) > 0 \rightarrow f$ és creixent en $x = a$.
- Si $f'(a) < 0 \rightarrow f$ és decreixent en $x = a$.

APLICACIONS DE LES DERIVADES

Exemple:



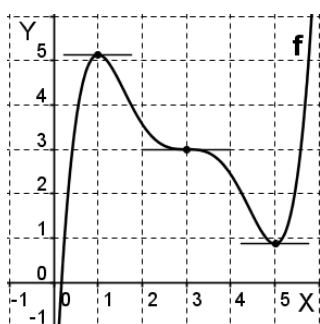
- $f'(-3) > 0 \rightarrow f$ és creixent en $x = -3$.
- $f'(0) < 0 \rightarrow f$ és decreixent en $x = 0$.
- $f'(3) > 0 \rightarrow f$ és creixent en $x = 3$.

Si la derivada de la funció en un punt d'abscissa $x = a$ és igual a zero (recta tangent horitzontal), aleshores la funció pot tenir un extrem relatiu o un punt d'inflexió en $x = a$ (la funció ni creix ni decreix en aquest punt):

Si $f'(a) = 0 \rightarrow f$ té un extrem relatiu o un punt d'inflexió en $x = a$.

Els punts en els quals la derivada és igual a zero s'anomenen **punts estacionaris**. Així, els punts estacionaris poden ser extrems relatius o punts d'inflexió.

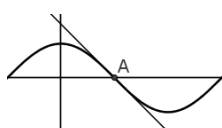
Exemple:



- $f'(1) = 0 \rightarrow f$ té un màxim relatiu en $x = 1$.
- $f'(3) = 0 \rightarrow f$ té un punt d'inflexió en $x = 3$.
- $f'(5) = 0 \rightarrow f$ té un mínim relatiu en $x = 5$.

Nota: No tots els punts d'inflexió tenen tangent horitzontal. Vegem exemples de punts d'inflexió de tangent no horitzontal:

a)



b)



APLICACIONS DE LES DERIVADES

Estudi del creixement, el decreixement i els punts estacionaris d'una funció

Per estudiar el creixement, el decreixement i els punts estacionaris d'una funció donada $f(x)$, procedim de la manera següent:

- Calculem $f'(x)$.
- Resolem l'equació $f'(x) = 0$, per calcular les abscisses dels punts estacionaris.
- Calculem els punts de discontinuïtat de $f(x)$, en els quals també pot canviar el creixement de la funció.
- Estudiem el signe de $f'(x)$ a l'esquerra i a la dreta de cada punt estacionari i dels punts de discontinuïtat, per determinar els intervals de creixement i decreixement i esbrinar si els punts estacionaris són màxims, mínims o punts d'inflexió. Per fer-ho, serà convenient factoritzar $f(x)$ i elaborar un quadre, tal com veurem en els exemples.
- Calculem l'ordenada dels punts estacionaris.

Exemples:

1. Estudia el creixement, el decreixement i els punts estacionaris de la funció

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1.$$

- Calculem $f'(x)$:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

- Resolem l'equació $f'(x) = 0$, per calcular les abscisses dels punts estacionaris:

$$3x^2 - 12x + 9 = 0 \rightarrow 3(x^2 - 4x + 3) = 0 \rightarrow \boxed{x=1} \text{ i } \boxed{x=3}$$

Possibles màxims, mínims o punts d'inflexió.

- Calculem els punts de discontinuïtat de $f(x)$:

$f(x)$ és un polinomi, per tant, és una funció contínua en $\mathbb{R}$.

- Estudiem el signe de $f'(x)$:

o Factoritzem $f'(x)$: $f'(x) = 3(x-1)(x-3)$

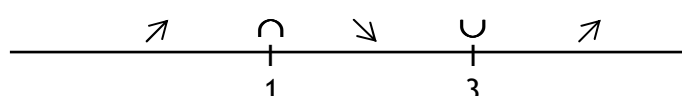
APLICACIONS DE LES DERIVADES

- o Elaborem un quadre per calcular el signe de $f'(x)$ en els intervals en què queda dividit el domini pels punts estacionaris i els punts de discontinuïtat. El signe de f' en cadascun d'aquests intervals coincideix amb el signe de f'' en qualsevol punt de l'interval:

Intervals	3	$x-1$	$x-3$	f'	f
$(-\infty, 1)$	+	-	-	+	Creixent
$(1, 3)$	+	+	-	-	Decreixent
$(3, +\infty)$	+	+	+	+	Creixent

→ Hi ha un màxim en $x = 1$

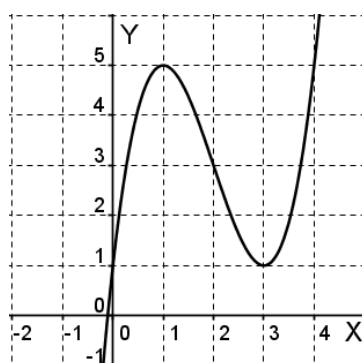
→ Hi ha un mínim en $x = 3$



- Calculem l'ordenada dels punts estacionaris:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

$$\rightarrow \begin{cases} f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 + 1 = 5 \rightarrow \text{Màxim: } (1, 5) \\ f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 + 1 = 1 \rightarrow \text{Mínim: } (3, 1) \end{cases}$$



2. Estudia el creixement, el decreixement i els punts estacionaris de la funció

$$f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2.$$

- Calculem $f'(x)$:

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x$$

- Resolem l'equació $f'(x) = 0$, per calcular les abscisses dels punts estacionaris:

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x = 0$$

$$\rightarrow 12x(x^2 - 2x + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} 12x = 0 \rightarrow x = 0 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow x = 1 \end{cases} \rightarrow \text{Possibles màxims, mínims o punts d'inflexió.}$$

APLICACIONS DE LES DERIVADES

- Calculem els punts de discontinuïtat de $f(x)$:

$f(x)$ és un polinomi, per tant, és una funció contínua en $\mathbb{R}$.

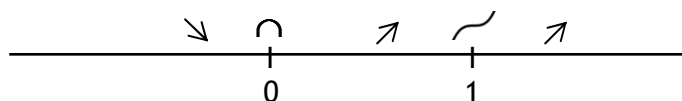
- Estudiem el signe de $f'(x)$:

- o Factoritzem $f'(x)$: $f'(x) = 12x(x-1)^2$
- o Elaborem un quadre per calcular el signe de $f'(x)$ en els intervals en què queda dividit el domini pels punts estacionaris i els punts de discontinuïtat:

Intervals	$12x$	$(x-1)^2$	f'	f
$(-\infty, 0)$	-	+	-	Decreixent
$(0, 1)$	+	+	+	Creixent
$(1, +\infty)$	+	+	+	Creixent

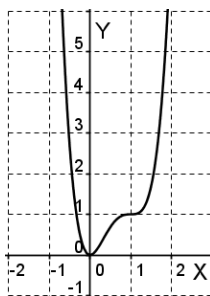
→ Hi ha un mínim en $x = 0$

→ Hi ha un punt d'inflexió en $x = 1$



- Calculem l'ordenada dels punts estacionaris:

$$f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 \rightarrow \begin{cases} f(0) = 3 \cdot 0^4 - 8 \cdot 0^3 + 6 \cdot 0^2 = 0 \rightarrow \text{Mínim: } (0, 0) \\ f(1) = 3 \cdot 1^4 - 8 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 = 1 \rightarrow \text{P. d'inflexió: } (1, 1) \end{cases}$$



3. Estudia el creixement, el decreixement i els punts estacionaris de la funció

$$f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

- Calculem $f'(x)$ i resollem l'equació $f'(x) = 0$

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \rightarrow f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}; \quad -\frac{2}{x^3} = 0 \text{ no té solució, } f'(x) \text{ no s'anul·la mai.}$$

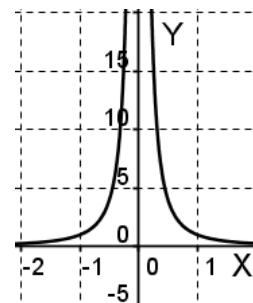
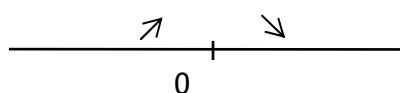
APLICACIONS DE LES DERIVADES

- Calculem els punts de discontinuïtat de $f(x)$:

El denominador de l'expressió algebraica de la funció s'anul·la quan $x = 0$. Per tant, la funció és discontinua en $x = 0$: $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$.

- Estudiem el signe de $f'(x)$:

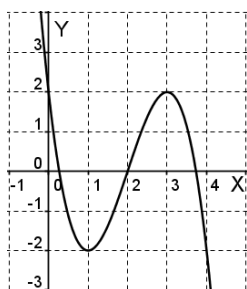
Intervals	-2	x^3	f'	f
$(-\infty, 0)$	-	-	+	Creixent
$(0, +\infty)$	-	+	-	Decreixent



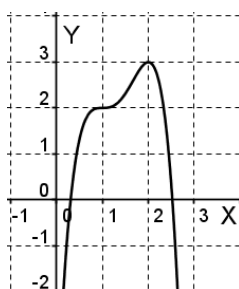
Exercicis:

1. Determina els intervals de creixement i decreixement i els extrems relatius de les funcions següents:

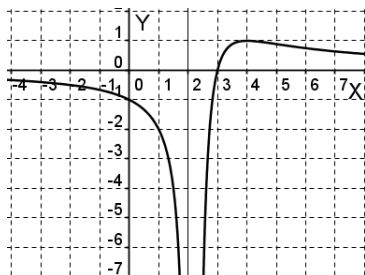
a)



b)



c)



2. Estudia el creixement, el decreixement i els punts estacionaris de les funcions següents:

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$

Sol.:

1. a) Creixent: $(1, 3)$; decreixent: $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$. Mínim: $(1, -2)$; màxim: $(3, 2)$.

b) Creixent: $(-\infty, 2)$; decreixent: $(2, +\infty)$. Punt d'inflexió: $(1, 2)$; màxim: $(2, 3)$.

c) Creixent: $(2, 4)$; decreixent: $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$. Màxim: $(4, 1)$.

2. a) Creixent: $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$; decreixent: $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$.

Mínims: $(-2, -4)$ i $(2, -4)$; màxim: $(0, 0)$.

b) Decreixent en $\mathbb{R}$. No té punts estacionaris.

Representació gràfica de funcions

A continuació estudiarem com fer la representació gràfica de funcions senzilles.

Per **representar gràficament una funció**, seguim els passos següents:

- Determinem el domini de la funció.
- Calculem les asímtotes:

o Asímtotes horitzontals:

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = k$ i/o $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = k \rightarrow \boxed{y = k}$ és una asímtota horitzontal de f .

o Asímtotes verticals:

Si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$ i/o $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty \rightarrow \boxed{x = a}$ és una asímtota vertical de f .

- Calculem els punts de tall amb els eixos:
 - o Tall o talls amb l'eix OX:
 - Són del tipus $(b, 0) \rightarrow \boxed{y = 0}$ (l'ordenada dels punts de l'eix OX és 0)
 - Resolem l'equació $f(x) = 0$ per calcular x .
 - o Tall amb l'eix OY:
 - És del tipus $(0, a) \rightarrow \boxed{x = 0}$ (l'abscissa dels punts de l'eix OY és 0)
 - Substituïm x per 0 i calculem y .
- Estudiem el creixement, el decreixement i els punts estacionaris.
- Fem un esbós de la gràfica de la funció a partir de les dades que hem obtingut.

Exemples:

1. Representa gràficament la funció $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$.

- Determinem el domini de la funció:

$f(x)$ és un polinomi, per tant $\text{Dom } f = \mathbb{R}$.

- Calculem les asímtotes:

No té asímtotes (els polinomis no tenen asímtotes).

APLICACIONS DE LES DERIVADES

- Calculem els punts de tall amb els eixos:

- o Tall eix OX:

$$y = 0 \rightarrow \frac{1}{4}x^3 - 3x = 0 \rightarrow x \cdot \left(\frac{1}{4}x^2 - 3\right) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \frac{1}{4}x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{12} \approx \pm 3,46 \end{cases}$$

$\rightarrow (0,0), (-\sqrt{12},0) \text{ i } (+\sqrt{12},0)$ són els punts de tall amb l'eix OX.

- o Tall eix OY:

$$x = 0 \rightarrow y = f(0) = \frac{1}{4} \cdot 0^3 - 3 \cdot 0 = 0 \rightarrow (0,0) \text{ és el punt de tall amb l'eix OY.}$$

- Estudiem el creixement, el decreixement i els punts estacionaris:

- o Calculem $f'(x)$: $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3$

- o Resolem l'equació $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{3 \cdot 4}{3} = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases} \text{ Punts}$$

estacionaris

- o Calculem els punts de discontinuïtat de $f(x)$:

$f(x)$ és un polinomi, per tant, és una funció contínua en R.

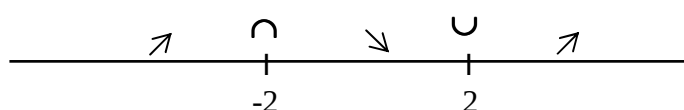
- o Estudiem el signe de $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3 = \frac{3}{4}(x-2)(x+2)$$

Intervals	$x-2$	$x+2$	f'	f
$(-\infty, -2)$	-	-	+	Creixent
$(-2, 2)$	-	+	-	Decreixent
$(2, +\infty)$	+	+	+	Creixent

$\rightarrow$ Hi ha un màxim en $x = -2$

$\rightarrow$ Hi ha un mínim en $x = 2$

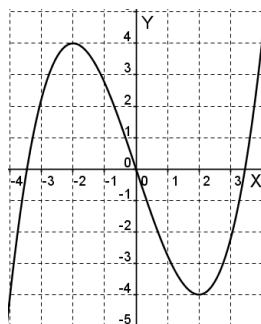


APLICACIONS DE LES DERIVADES

- o Calculem l'ordenada dels punts estacionaris:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x \rightarrow \begin{cases} f(-2) = \frac{1}{4}(-2)^3 - 3 \cdot (-2) = -\frac{8}{4} + 6 = -2 + 6 = \boxed{4} \rightarrow \text{Màxim: } \boxed{(-2, 4)} \\ f(2) = \frac{1}{4} \cdot 2^3 - 3 \cdot 2 = \frac{8}{4} - 6 = 2 - 6 = \boxed{-4} \rightarrow \text{Mínim: } \boxed{(2, -4)} \end{cases}$$

- Fem un esbós de la gràfica de la funció a partir de les dades que hem obtingut:



2. Representa gràficament la funció $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$.

- Calculem el domini de la funció:

El denominador de l'expressió algebraica de la funció s'anul·la quan $x = 2$ i

$$x = -2: \quad \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}.$$

- Calculem les asímtotes:

- o Asímtotes horitzontals:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 - 4} = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2 - 4} = 0^+ \end{aligned} \right\} \rightarrow \boxed{y = 0} \text{ és una asímtota horitzontal de } f.$$

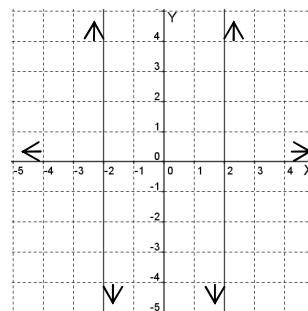
- o Asímtotes verticals:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2 - 4} = \frac{1}{0} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x^2 - 4} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x^2 - 4} = +\infty \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{x = 2} \text{ és una asímtota vertical.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x^2 - 4} = \frac{1}{0} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{x^2 - 4} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{x^2 - 4} = -\infty \end{cases}$$

$\rightarrow \boxed{x = -2}$ és una asímptota vertical.



- Calculem els punts de tall amb els eixos:

o Tall eix OX:

$$y = 0 \rightarrow \frac{1}{x^2 - 4} = 0^* \leftrightarrow 1 = 0 \rightarrow \text{no té solució } (1 \neq 0), \text{ aleshores no talla l'eix OX.}$$

o Tall eix OY:

$$x = 0 \rightarrow y = f(0) = \frac{1}{0^2 - 4} = -\frac{1}{4} \rightarrow \boxed{\left(0, -\frac{1}{4}\right)} \text{ és el punt de tall amb l'eix OY.}$$

***Nota:** Perquè una fracció s'anul·li, el seu numerador ha de ser igual a 0:

$$\frac{a}{b} = 0 \leftrightarrow a = 0 \text{ i } b \neq 0$$

- Estudiem el creixement, el decreixement i els punts estacionaris:

o Calculem $f'(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4} = (x^2 - 4)^{-1} \rightarrow f'(x) = -(x^2 - 4)^{-2} \cdot 2x = \frac{-2x}{(x^2 - 4)^2}$$

o Resolem l'equació $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 - 4)^2} = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow \boxed{x = 0} \text{ Punt estacionari.}$$

o Calculem els punts de discontinuïtat:

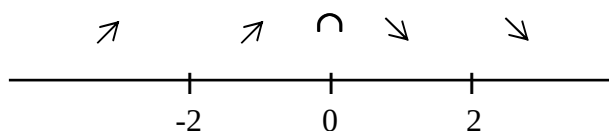
$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 2\} \rightarrow f(x) \text{ és discontinua en } x = -2 \text{ i } x = 2.$$

APLICACIONS DE LES DERIVADES

o Estudiem el signe de $f'(x)$:

Intervals	$-2x$	$(x^2 - 4)^2$	f'	f
$(-\infty, -2)$	+	+	+	Creixent
$(-2, 0)$	+	+	+	Creixent
$(0, 2)$	-	+	-	Decreixent
$(2, +\infty)$	-	+	-	Decreixent

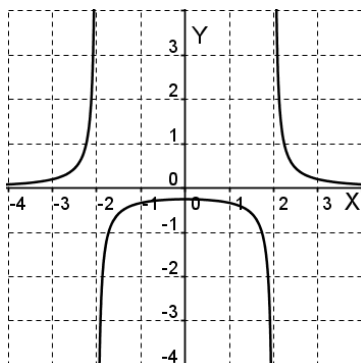
→ Hi ha un màxim en $x = 0$



o Calculem l'ordenada del punt estacionari:

$$f(0) = \frac{1}{0^2 - 4} = -\frac{1}{4} \rightarrow \text{Màxim: } \left(0, -\frac{1}{4}\right)$$

- Fem un esbós de la gràfica de la funció a partir de les dades que hem obtingut:



Exercicis: Representa gràficament la funció $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3$.

Optimització

A la vida real hi ha moltes situacions en què cal optimitzar (maximitzar o minimitzar) una funció, és a dir, calcular el valor de la variable independent que fa que el valor de la funció sigui òptim (màxim o mínim).

Per **resoldre un problema d'optimització**, seguim els passos següents:

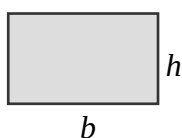
- Troblem l'expressió algebraica de la funció que cal optimitzar i l'escrivim en funció d'una sola variable.
- Calculem el domini de la funció en el context del problema.
- Calculem els extrems relatius de la funció.
- Expressem adequadament la solució i analitzem si és correcta en el context del problema. Comprovem que el màxim o mínim relatiu que hem trobat també és el màxim o mínim absolut del problema, ja que és possible que no sigui així.

Exemples:

1. Tenim 40 metres de tela metàl·lica per construir un tancat rectangular per al bestiar. Calcula les dimensions del rectangle perquè l'àrea del tancat sigui màxima.

De tots els rectangles de 40 m de perímetre, cal trobar el d'àrea màxima.

- Troblem l'expressió algebraica de la funció que cal optimitzar i l'escrivim en funció d'una sola variable.



$A = b \cdot h$ és la funció que cal maximitzar. Depèn de dues variables.

Expressem la funció àrea en funció d'una sola variable, sabent que el perímetre fa 40 m:

$$\left. \begin{array}{l} A = b \cdot h \\ P = 2b + 2h = 40 \rightarrow b + h = 20 \rightarrow h = 20 - b \end{array} \right\}^* \rightarrow A = b \cdot (20 - b) = -b^2 + 20b$$

$$\boxed{A(b) = -b^2 + 20b} \rightarrow \text{Funció que cal maximitzar.}$$

APLICACIONS DE LES DERIVADES

- Calculem el domini de la funció en el context del problema:

$\text{Dom } f = (0, 20)$ (cada costat mesura més de 0 m i menys de 20 m)

- Calculem els extrems relatius de la funció:

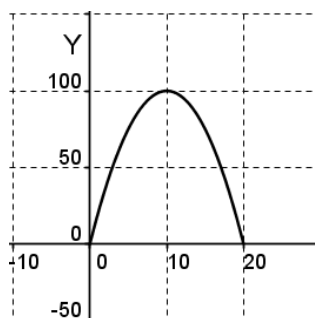
$$A'(b) = -2b + 20 = 0 \rightarrow -2b = -20 \rightarrow b = \frac{-20}{-2} = \boxed{10}$$

Comprovem que és un màxim:

Intervals	$-2b + 20$	f'	f
$(0, 10)$	+	+	Creixent
$(10, 20)$	-	-	Decreixent

→ Hi ha un màxim en $b = 10$

Calculem h quan $b = 10$: $^*h = 20 - b = 20 - 10 = \boxed{10}$



- Expressem adequadament la solució i analitzem si és correcta en el context del problema:

El rectangle d'àrea màxima és el quadrat (el qual és un cas particular de rectangle) de 10 metres de costat. La solució és coherent amb l'enunciat i, com que no hi ha més extrems relatius, $b = 10$ és el màxim absolut (es pot veure fàcilment en el gràfic).

El tancat ha de fer 10 m x 10 m perquè la seva àrea sigui màxima.

2. Els costos mensuals d'una empresa que fabrica un determinat producte vénen donats per la funció següent (en euros):

$f(x) = x^2 - 240x + 30.000$, en què x és el nombre d'unitats fabricades en un mes.

Calcula el nombre d'unitats que s'han de fabricar en un mes perquè els costos mensuals siguin mínims. Indica quins seran aquests costos mínims.

- Troblem l'expressió algebraica de la funció que cal optimitzar i l'escrivim en funció d'una sola variable.

L'enunciat del problema ens dona la funció que cal maximitzar:

$$f(x) = x^2 - 240x + 30.000$$

- Calculem el domini de la funció en el context del problema:

$$\text{Dom } f = [0, +\infty)$$

- Calculem els extrems relatius de la funció:

$$f'(x) = 2x - 240 = 0 \rightarrow 2x = 240 \rightarrow x = \frac{240}{2} = 120$$

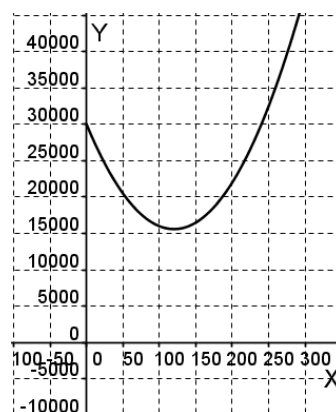
Comprovem que és un mínim:

Intervals	$2x - 240$	f'	f
$(0, 120)$	-	-	Decreixent
$(120, +\infty)$	+	+	Creixent

→ Hi ha un mínim en $x = 120$

Calculem els costos mínims:

$$f(120) = 120^2 - 240 \cdot 120 + 30.000 = 15.600 \text{ €}$$



- Expressem adequadament la solució i analitzem si és correcta en el context del problema:

La solució és coherent amb l'enunciat i, com que no hi ha més extrems relatius, $x = 120$ és el mínim absolut (es pot veure fàcilment en el gràfic).

S'han de fabricar 120 unitats en un mes perquè els costos mensuals siguin mínims. Aquests costos mínims seran de 15.600 €.

APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

Exercici: Troba dos nombres positius que sumin 14 i que el seu producte sigui màxim.

Sol.: Els dos nombres són 7 i 7

EXERCICIS: APLICACIONS DE LES DERIVADES

1. Calcula l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x) = x^2 - 5x$ en el punt d'abscissa $x = 3$.
2. Calcula l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 7$ en el punt d'abscissa $x = -1$.
3. Calcula l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x) = e^x$ en el punt d'abscissa $x = 0$.
4. Calcula el punt en què la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x) = x^2 + 3x + 4$ és paral·lela a la recta $y = -x + 5$.
5. Calcula el punt en què la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x) = 3x^2 - 5x + 9$ forma un angle de 45° amb la part positiva de l'eix OX.
6. Estudia el creixement, el decreixement i els punts estacionaris de les funcions següents:
 - a) $f(x) = -x^3 + 3x^2$
 - b) $f(x) = x^3$
 - c) $f(x) = 3x^4 - 4x^3$
 - d) $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$
7. Calcula els punts de tall amb els eixos de les funcions següents:
 - a) $f(x) = x^2 + 3x - 10$
 - c) $f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$
 - e) $f(x) = \frac{x-5}{x^2}$
 - b) $f(x) = x^3 + x^2$
 - d) $f(x) = \frac{1}{x}$
 - f) $f(x) = \frac{x^2 - 49}{x - 1}$
8. Representa gràficament les funcions següents:
 - a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$
 - c) $f(x) = -x^3 + 3x - 2$
 - e) $f(x) = \frac{-2}{x^2 - 1}$
 - b) $f(x) = -2x^4 + 4x^2$
 - d) $f(x) = x^3 + 1$
 - f) $f(x) = \frac{9}{x^2 - 9}$

EXERCICIS: APLICACIONS DE LES DERIVADES

9. Representa gràficament una funció que tingui, alhora, les característiques següents:
- a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{2\}$
 - b) $\text{Im } f = (-\infty, 1)$
 - c) $x = 2$ és una asímptota vertical de f .
 - d) $y = 0$ és una asímptota horitzontal de f .
 - e) Té l'únic màxim relatiu en $x = 4$; és una asímptota vertical de f .
 - f) No té mínims relatius.
10. Troba dos nombres positius que sumin 12 i que el producte d'un d'ells pel cub de l'altre sigui màxim.
11. A l'abril, un pagès cull 100 kg de maduixes. En aquell moment, les maduixes es venen a un euro el quilo. Tanmateix, cada dia que passa, el preu de les maduixes augmenta en cinc cèntims per quilo. D'altra banda, cada dia que passa es fa malbé un quilo de maduixes. Quants dies ha d'esperar el pagès per vendre les maduixes si vol obtenir el benefici màxim?

SOLUCIONS: APLICACIONS DE LES DERIVADES

Solucions

1. $y = x - 9$ 2. $y = 3x + 11$ 3. $y = x + 1$ 4. $P(-2, 2)$ 5. $P(1, 7)$

6. a) Creixent: $(0, 2)$; decreixent: $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$. Mínim: $(0, 0)$; màxim: $(2, 4)$.

b) Creixent en $\mathbb{R}$. Punt d'inflexió: $(0, 0)$.

c) Creixent: $(1, +\infty)$; decreixent: $(-\infty, 1)$. Punt d'inflexió: $(0, 0)$; mínim: $(1, -1)$.

d) Creixent: $(-\infty, 2)$; decreixent: $(2, +\infty)$. No té punts estacionaris.

7. a) Talls amb l'eix OX: $(2, 0)$ i $(-5, 0)$. Talls amb l'eix OY: $(0, -10)$.

b) Talls amb l'eix OX: $(0, 0)$ i $(-1, 0)$. Talls amb l'eix OY: $(0, 0)$.

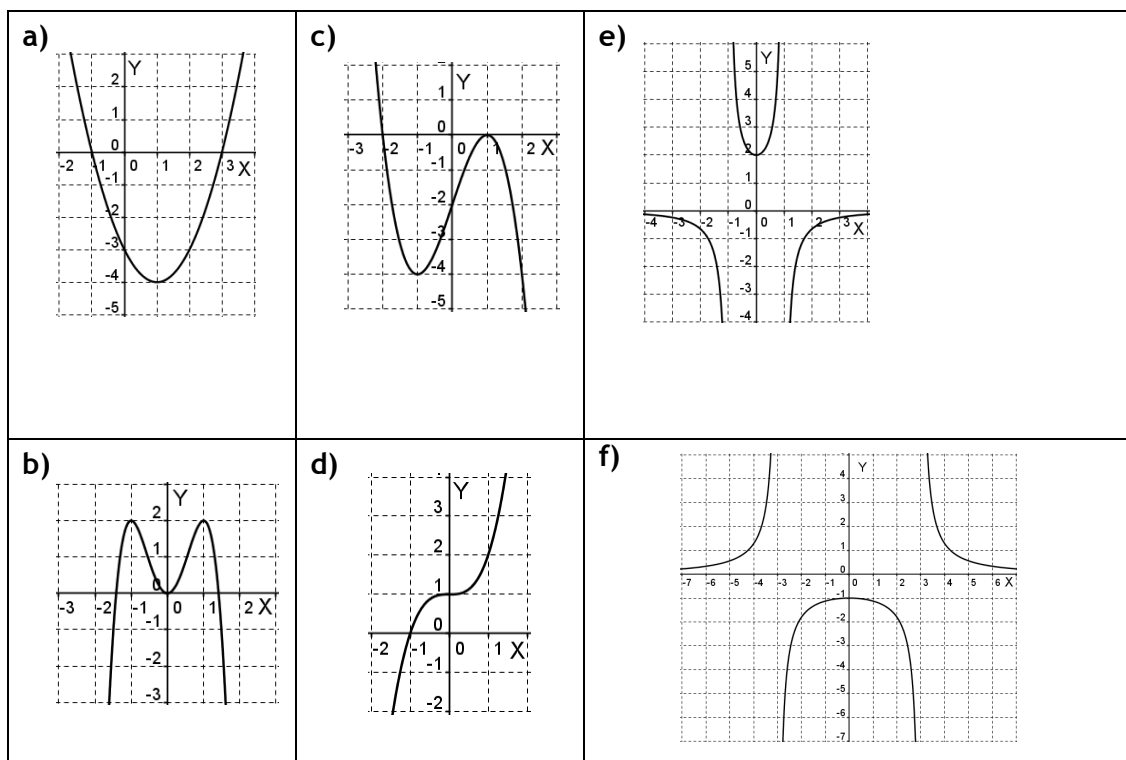
c) Talls amb l'eix OX: $(-1, 0)$, $(-3, 0)$ i $(1, 0)$. Talls amb l'eix OY: $(0, -3)$.

d) No talla els eixos.

e) Talls amb l'eix OX: $(5, 0)$. Talls amb l'eix OY: no talla l'eix OY.

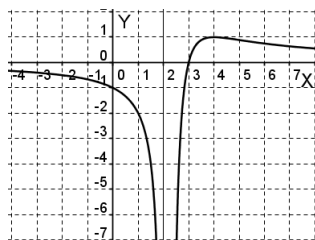
f) Talls amb l'eix OX: $(7, 0)$ i $(-7, 0)$. Talls amb l'eix OY: $(0, 49)$.

8.



SOLUCIONS: APLICACIONS DE LES DERIVADES

9. N'hi ha diverses. Un exemple possible és el següent:



10. Els dos nombres són el 3 i el 9.

El producte de 3 pel cub de 9 és màxim.

11. Ha d'esperar quaranta dies per obtenir el benefici màxim.

Solució de l'exercici de a teoria de representació gràfica de funcions:

