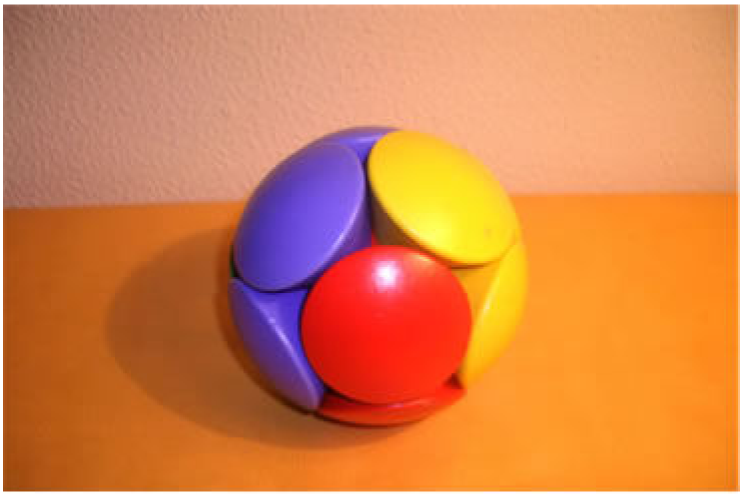
TÍTOL: DEL VOLUM DE L'ESFERA A LA SUPERFÍCIE DE L'ESFERA

CLASSIFICACIÓ:

GE	MD SCMD	4 ESO	A / G / T15	CO	0

DESCRIPCIÓ DEL MATERIAL: Bola de fusta de colors, amb un nucli metàl·lic, composta per cons que, en els seus vèrtexs tenen un imant que els manté units al nucli central de la bola. Fent una petita força poden separar-se els cons. Les imatges de l'apartat següent són molt aclaridores.

IMATGES:



CONTINGUTS: Esferes i cons. Superfície i volum d'una esfera. Volum d'un con. Maneig algebraic. Raonament a partir d'un suport visual.

PROPOSTA D'APLICACIÓ DIDÀCTICA: L'objectiu d'aquesta activitat consisteix a demostrar la fórmula de la superfície d'una esfera suposant conegudes les fórmules del volum d'una esfera i del volum d'un con (vegi's la fitxa F66). Per claredat aquí ho explicarem amb un cert formalisme que després el professorat podrà emprar en la mesura que ho cregui adequat a les característiques del seu alumnat.

Es tracta de descompondre l'esfera en petits quasi-cons (no són ben bé cons per què la base no és ben plana). Quants més quasi-cons tinguem, més petits seran i més propers seran a un con que té com altura el radi de l'esfera. Observem que aquí hi apareixeria de manera natural la noció de límit que donaria consistència formal a la demostració però que surt dels propòsits d'aquesta activitat.

El volum de cada con és una tercera part de l'àrea de la seva base per l'altura. Suposem que A_k és l'àrea de la base del con k-èsim. Tindrem que el volum del con k-èsim serà: $\frac{1}{3}\cdot A_k \cdot r$. Per altra part el volum de l'esfera és $\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3$. Tenint en compte que el volum de tota l'esfera és igual, en el límit, a la suma dels volums dels cons en què es descompon, podrem escriure:

$$\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3 = \sum_k \frac{1}{3}\cdot A_k \cdot r = \frac{1}{3}\cdot r \sum_k A_k$$

Però $\sum_k A_k$ representa la suma de les bases de tots els cons que, en el límit, serà tota la superfície de l'esfera S. Així tindrem: $\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3 = \frac{1}{3}\cdot r\cdot S$. Aïllant S haurem arribat a la fórmula que busquem: $S = 4\cdot\pi\cdot r^2$.

A classe els sumatoris solen ser una mica impressionants. Poden substituir-se per sumes emprant punts suspensius:

$$\sum_k \frac{1}{3}\cdot A_k \cdot r = \frac{1}{3}\cdot A_1 \cdot r + \frac{1}{3}\cdot A_2 \cdot r + \frac{1}{3}\cdot A_3 \cdot r + ...$$

CONNEXIONS: Raonament visual i raonament algebraic. Introducció a la idea de límit.

ALTRES COMENTARIS: Observem que, en aquest cas, el material actua com a suport d'un procés deductiu que cal desenvolupar, d'una manera més o menys formal, amb eines algebraiques i/o analítiques. Vàrem descobrir aquest material a la secció de joguines d'IKEA. Aquest recurs forma part d'un trajecte didàctic que nosaltres hem anomenat "*GR de les figures rodones*" (GR de "*Gran Recorregut*") i representa el tram deductiu que va des del volum de l'esfera i el volum del con (que aquí suposem coneguts) fins a la superfície de l'esfera. No es tracta estrictament d'una demostració malgrat que, afegint-hi certs detalls analítics, pràcticament podríem considerar-la com a tal. En tot cas es tracta d'un raonament plausible per arribar a un resultat que, si bé és emprat a l'educació secundària, no se sol aportar cap explicació del seu origen. La tècnica que emprem ens recorda molt a la que, en la fitxa F40, hem emprat per deduir la fórmula de l'àrea d'un cercle a partir de la longitud de la circumferència. No observem cap risc especial en aquest material llevat del pes de la bola que fa aconsellable certa precaució en el maneig.