

Recursos materials i activitats experimentals en l'educació matemàtica a secundària

Anton Aubanell Pou
IES Sa Palomera, Blanes

Supervisor: Claudi Alsina Català
Universitat Politècnica de Catalunya

Memòria de la llicència d'estudi retribuïda corresponent al
curs 2005-2006 en l'especialitat de Matemàtiques

Índex

0. Índex	2
1. Introducció	4
1.1. Consideracions inicials	4
1.2. Antecedents del tema objecte de l'estudi.	6
1.3. Explicació del tema	8
1.4. Objectius i resultats proposats	9
2. Treball dut a terme	11
2.1. Pla de treball	11
2.2. Metodologia emprada.	11
2.3. Descripció de l'estudi	12
2.4. Descripció dels recursos utilitzats.	14
3. Un marc general: competència matemàtica i iniciatives de canvi	15
4. Aspectes generals sobre RMAE ¹	20
4.1. Distinció entre material, recurs i activitat experimental	21
4.2. <i>Cicle vital</i> d'un recurs	22
4.3. Polivalència dels recursos materials	22
4.4. Professorat, alumnat i materials: creences i estils	24
4.5. Complementarietat amb altres aspectes metodològics	26
5. El laboratori de matemàtiques	29
6. Una proposta de protocol d'activitats experimentals en matemàtiques	36
7. Incorporació de les activitats experimentals en l'avaluació de l'alumnat.	41
8. Indicadors de qualitat i avaluació de RMAE	48
8.1. Indicadors de qualitat.	49
8.2. Avaluació a partir de la pràctica docent	56
9. Una classificació de RMAE.	60

¹ Emprarem l'acrònim RMAE per referir-nos a l'expressió "*Recursos Materials i Activitats Experimentals*".

9.1. Definicions i fronteres.	61
9.2. Classificació respecte del material i el seu maneig.	62
9.3. Classificació respecte de l'origen.	62
9.4. Classificació respecte de la gestió de l'aula	63
9.5. Classificació respecte de l'eficiència.	65
9.6. Classificació respecte de la intenció	65
10. Catàleg de RMAE, guions, enregistraments i informes.	68
10.1. Catàleg de RMAE: Estructura i ordenació de les fitxes.	68
10.2. Mostra de guions: estructura i ordenació	73
10.3. Enregistraments en vídeo.	74
10.4. Informes sobre col·leccions de materials	75
10.5. Quadre resum de fitxes de RMAE amb indicació de guions i enregistraments	75
11. Un recobriment del currículum de secundària a través de RMAE	81
12. Competències bàsiques i recursos materials	82
13. Difusió del treball	87
14. Conclusió final.	89
15. Relació dels materials continguts en els annexos.	92
Annex A: Catàleg de RMAE	
Annex B: Mostra de guions	
Annex C: Enregistraments en vídeo	
Annex D: Informes de col·leccions de materials	
Annex E: Recobriment del currículum a través d'activitats experimentals	
Annex F: Disc compacte on s'integren els materials anteriors	
16. Bibliografia comentada	93

1. Introducció

1.1. Consideracions inicials

El present treball tracta d'explorar, de manera sistemàtica, la incorporació dels recursos materials i les activitats experimentals a la classe de matemàtiques en l'àmbit de l'educació secundària obligatòria i el batxillerat. No es tracta d'un exercici aïllat que comença i acaba en si mateix sinó que, per un costat, es justifica i configura a partir d'un procés anterior del qual és la continuació natural tot recollint un cert bagatge d'experiències didàctiques i, per l'altre, té vocació de ser una eina aplicable a la posterior pràctica docent.

La totalitat del treball es compon d'aquesta memòria i de sis annexos. La memòria presenta els aspectes teòrics generals del tema i vincula tots els materials dels annexos. Els capítols 1 i 2 de la memòria descriuen els aspectes generals i les condicions de realització del treball. La resta de capítols constitueixen el cos de l'estudi i s'ordenen de major a menor generalitat si bé som conscients que altres ordres serien possibles donat l'ampli camp que es cobreix en conjunt. Els sis annexos comprenen el cos de propostes concretes que constitueixen alguns dels objectius del treball:

- Un catàleg de cent una fitxes de recursos materials i activitats experimentals. Malgrat l'abundància de fitxes es té la impressió que els recursos materials formen una conjunt extraordinàriament ampli que resulta força inabastable.
- Una mostra de vint guions.
- Enregistraments en vídeo. Estan inclosos en un DVD editat pel Departament d'Educació.
- Un conjunt de sis informes sobre col·leccions de materials.
- Una proposta de recobriment del currículum de l'educació secundària obligatòria i de batxillerat a través d'activitats experimentals.
- Un disc compacte que integra els materials anteriors.

A fi d'agilitzar la lectura d'aquest treball, com ja s'ha indicat, per fer referència a l'expressió "*recursos materials i activitats experimentals*" escriurem únicament *RMAE*.

Donat l'interès descriptiu de les fitxes i dels informes s'ha optat per incloure-hi una bona quantitat d'imatges (fotografies, esquemes o dibuixos).

Pel que fa a les referències i citacions bibliogràfiques hem seguit les recomanacions del Servei de Llengua Catalana de la Universitat de Barcelona². Tanmateix creiem que hem de fer tres observacions:

- Totes les referències bibliogràfiques que apareixen a la bibliografia final són emprades en algun moment dins del text sigui en els capítols generals, sigui en fitxes concretes.
- En la bibliografia cada referència va acompanyada d'un breu comentari.

² *Proposta de representació de referències i citacions bibliogràfiques*. Barcelona: Universitat de Barcelona, Servei de Llengua Catalana, 1991.

- Per raons de coherència lingüística hem optat per traduir al català totes les citacions que apareguin en el text malgrat que l'original pugui estar en un altre idioma.

La citació de recursos electrònics s'ha fet seguint les recomanacions de l'article "*Com citar recursos electrònics*" d'Assumpció Estivill i Cristóbal Urbano de la Facultat de Biblioteconomia i Documentació de la Universitat de Barcelona.

S'ha intentat emprar sempre un llenguatge no discriminatori entre gèneres. En aquest sentit s'han procurat seguir les recomanacions de la Secretaria de Política Lingüística i de l'Institut Català de la Dona³.

Al llarg del present treball he comptat amb la col·laboració de moltes persones a les quals desitjo expressar el meu agraïment:

A l'Adolf Almató, en David Barba, la Carme Burgués, l'Oriol Busquets, la Maria Antònia Canals, la Pietat Casadevall, la Mònica Estalayo, la Sílvia Margelí, la Verónica Navarro, en David Obrador, en José Rey Cano, en Josep Rey Nadal, la Pili Royo, en Rafael Torelló, en José Antonio Yébenes per les seves idees i la seva col·laboració.

A l'Abraham de la Fuente i en Jaume Agudé pel seu ajut en els enregistraments.

Al professorat i a l'equip directiu de l'IES Sa Palomera i, molt especialment, als companys i companyes del Departament de Matemàtiques amb els quals, des de fa anys, anem acaronant i fent créixer la idea que és possible un enfocament experimental de les matemàtiques a secundària. He comptat molt especialment amb l'ajut de l'Estefania, en Ioan, en Javier, la Laura, la Marisa i en Matías a l'hora de realitzar algunes experiències de laboratori i els enregistraments en vídeo.

A l'alumnat de l'IES Sa Palomera de Blanes i de l'assignatura de Didàctica de les Matemàtiques de la Facultat de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona. La col·laboració i les idees de tots ells i totes elles estan presents en aquest estudi.

Al grup de treball de Matemàtiques de Secundària de l'ICE de la Universitat de Girona per la seva disponibilitat a l'hora de comentar i provar materials i per les idees que m'han ofert.

A la Subdirecció General de Formació Permanent i Recursos Pedagògics del Departament d'Educació i Universitats i molt especialment a l'Ana Rodet i en Xavier Yáñez en els quals sempre he trobat un eficient recolzament.

Vull expressar el meu agraïment al professor Claudi Alsina. El treball proper i directe amb en Claudi és tot un privilegi. Coneixia prou bé la seva creativitat i el seu bast coneixement. Ara admiro també la seva disponibilitat i el seu tracte exquisidament amable en el guiatge de la nostra recerca en la qual m'ha fet descobrir meravellosos

³ *Marcar les diferències: la representació de dones i homes a la llengua*. Secretaria de Política Lingüística, Institut Català de la Dona, 2005.

paisatges didàctics. Aquest fet, per si sol, ha convertit el nostre treball en una experiència professional i humana tan fecunda com gratificant.

Finalment vull fer constar el meu agraïment a la Maria Isabel, l'Anton, la Clara i els meus pares que sempre han estat disposats a recolzar la meua feina.

1.2. Antecedents del tema objecte de l'estudi

Aquest treball s'emmarca en una línia didàctica que atorga molt de valor al suport directe dels objectes concrets i de les activitats pràctiques dins dels processos de formació, consolidació i aplicació de les idees matemàtiques. No es tracta d'una idea nouvinguda sinó que entronca amb una sòlida tradició de pensament didàctic i, en la línia de compromís amb l'experiència real, avui és àmpliament compartida per la majoria dels agents que intervenen en l'educació matemàtica (des del professorat dels centres a la didàctica universitària) malgrat que potser ens cal reconèixer que encara queda molt camí per fer respecte a la seva completa incorporació a les aules. El present treball voldria fer una aportació en aquest camí.

Amb el propòsit de descriure el marc on s'ubica el nostre estudi, a continuació es presenta i es comenta una petita selecció de textos breus però molt significatius que constitueixen referents indiscutibles.

És obligat que la primera d'aquestes cites arribi de la mà del professor Pere Puig Adam que, en el seu llibre *El material didàctic matemàtic actual*, afirma: "...per a l'educador matemàtic, que no perd la perspectiva dels processos inicials d'abstracció, aquest material és molt més: representa quelcom substancial amb la seva funció educativa. Aquest material, estructurat en forma de models, té no sols la funció de traduir ocasionalment idees matemàtiques, sinó també d'originar-les, de suggerir-les. Hem d'estudiar la manera pedagògicament més encertada d'aconseguir-ho i també els materials més dúctils per a la seva realització." Això està escrit a l'any 1958!

George Pólya, en un article titulat "*Sobre aprendre, ensenyar i aprendre a ensenyar*", després de citar la frase de Kant "*Tot coneixement humà comença amb intuïcions, continua amb concepcions, i finalitza amb idees*" (I. Kant: *Crítica de la Raó Pura*), en proposa la següent lectura didàctica: "*L'aprenentatge comença amb acció i percepció, continua amb paraules i conceptes, i ha de finalitzar amb hàbits mentals desitjables. (...) "acció i percepció" us ha de suggerir manipular i veure coses concretes com pedres, o pomes, o reglets Cuisenaire; o regle i compàs; o instruments en un laboratori*".

En aquest marc no pot faltar l'obra àmplia i profunda d'Emma Castelnuovo, molt vinculada a l'ús de materials, ni el testimoni de les seves paraules compromeses socialment: "*La construcció de la matemàtica a partir del concret i de la realitat destaca clarament les qualitats de la fantasia, la intuïció, la voluntat dels alumnes immigrants que cada cop en major nombre, afortunadament arriben els nostres països*" (Castelnuovo, E.: Conferència pronunciada el 10 de maig de 2000 amb motiu de la celebració del centenari del naixement de Pere Puig Adam).

L'informe Cockcroft, precursor en tants aspectes, dedica tot el seu capítol 12 "*Mitjans per a l'ensenyament de les matemàtiques*" (apartats del 602 al 617) a posar èmfasi en la necessitat de disposar d'equips de pràctiques i, fins i tot, d'aules específiques: "*604: En canvi, en l'escola secundària les matemàtiques han d'ensenyar-se en aules especials degudament equipades i la disponibilitat d'aquestes facilita la realització de*

pràctiques adequades...” i “612: Les escoles secundàries han de disposar, així mateix, del corresponent equip de pràctiques.”

Els *Principis i Estàndars per a l'Educació Matemàtica* del National Council of Teachers of Mathematics estan plens d'experiències pràctiques per realitzar a classe i, fins i tot en el CD-ROM que porten adjunt amb exemples de recursos, hi ha filmacions d'activitats d'aquest tipus. Voldria fer notar que, en un vídeo d'una pràctica d'estimació de quantitats i volums (chap4/4.6/part2.htm), apareix un alumne amb síndrome de Down que està treballant en equip i que també fa les seves aportacions a la tasca conjunta. Aquest fet, subratllat pels propis autors, és il·lustratiu de la capacitat integradora que tenen aquest tipus d'activitats.

El recentment desaparegut Miguel de Guzmán, en l'article *Tendencias actuales en Educación Matemática*, assenyala com una tendència general el continu recolzament en la intuïció directa del concret i el suport permanent en la realitat i afirma: *“Si la matemàtica és una ciència que participa molt més del que fins ara es pensava del caràcter d'empírica, sobretot en la seva invenció, que és molt més interessant que la seva construcció formal, és necessari que la immersió en ella es realitzi tenint en compte molt més intensament l'experiència i la manipulació dels objectes dels quals sorgeix”.*

En aquesta línia haurem d'admetre que la manera com es treballin els continguts a classe no és gens irrellevant i que la incorporació decidida i coherent de metodologies pràctiques en l'educació matemàtica permetrà transmetre als alumnes, de manera implícita, una idea més experimental i propera del saber matemàtic. Tal volta aquest pot ser un bon camí per ajudar-nos a fer estimar les matemàtiques. En paraules del professor Claudi Alsina: *“Estimar les matemàtiques no és una lliçó d'un dia, no és una matèria psico-pedagògica, no és un curset especial. Estimar les matemàtiques és el valor afegit de fer matemàtiques jugant amb els sentiments nobles: combinar el cap i el cor. I fer-ho cada dia. Dit d'una manera més contundent: és tan important el “que” facin de matemàtiques com el “com” ho facin”* (Claudi Alsina: *Fer estimar les matemàtiques*. Conferència d'inauguració del cicle itinerant de conferències organitzat pel Departament d'Educació de la Generalitat de Catalunya el curs 2001-2002).

Aquest marc quedaria incomplet si no ens referíssim als treballs que fan aportacions i propostes en el terreny dels materials i les activitats experimentals concretes. A casa nostra, cal citar l'obra de Maria Antònia Canals, de Carme Burgués, de Josep Maria Fortuny, de Joaquim Giménez, entre d'altres. A tall d'exemple, em permeto destacar les magnífiques idees que s'aporten en el llibre *Materiales para construir la geometría* de Claudi Alsina, Carme Burgués i Josep M. Fortuny. Així com el llibre *Fer matemàtiques* de Roser Codina, Jesús Enfedaque, Pere Mumbrú i Lluís Segarra.

Voldria acabar aquest repàs transcrivint unes frases procedents del llibre *Math Made Visual. Creating images for understanding Mathematics* de Claudi Alsina i de Roger B. Nelsen. Es tracta d'un magnífic text que és tota una referència en el camp de la visualització aplicada a l'educació matemàtica. A les pàgines 126 i 127 s'assenyalen quatre importants contribucions que els materials manipulables poden fer a la classe de matemàtiques:

“Els materials manipulables poden obrir finestres a solucions creatives que són impossible usant eines tradicionals.

(...)

Les imatges i els materials manipulables poden ser necessaris si el problema en qüestió requereix una solució pràctica explícita.

(...)

Els materials manipulables poden facilitar el pensament visual i representar un pas més important que la realització de representacions planes o de càlculs formals.

(...)

Les imatges i els materials manipulables poden ser l'únic camí factible per mostrar exemples o solucions de problemes plans o espacials."

1.3. Explicació del tema

Són diversos els indicadors que, en educació matemàtica, conviden a avançar cap a metodologies més directament compromeses amb l'adquisició de competències vinculades a les capacitats d'exploració, de descoberta, d'aplicació, de visualització... en contextos tan propers com sigui possible a la realitat o a situacions tangibles. És suficient observar els ítems sobre els quals s'aplica l'avaluació del *Programme for International Student Assessment* (PISA, 2003) o les nostres competències bàsiques per veure-hi aquest compromís. La progressiva incorporació a les classes de matemàtiques d'experiències pràctiques amb objectes concrets ofereix un camp molt fecund de possibilitats en aquesta direcció. A l'apartat anterior ja hem citat veus ben notables que s'expressaven en aquest sentit.

La forta tendència formalista que va caracteritzar la matemàtica superior durant una part de la segona meitat del segle passat va produir un reflex escolar en la mateixa direcció. Amb la millor intenció d'educar l'abstracció es va prescindir d'una manera tal volta massa rotunda d'aquells aspectes més vinculats a l'experiència concreta i a la intuïció que ja estaven força presents a l'escola abans d'aquest període.

Recuperat un enfocament més aplicat de la matemàtica i, sobretot, impulsada per la necessitat de comunicar eficaçment i d'oferir als alumnes un bon nivell de competència social, la matemàtica escolar va incorporant, cada cop més, el sentit del concret. No es tracta, naturalment, de prescindir dels necessaris aspectes d'abstracció tan característics de les matemàtiques, sinó de dimensionar-los en la seva justa mesura i de concedir la importància que es mereixen a la intuïció, la visualització, l'experiència pràctica o l'aplicació. En aquesta línia se situen les metodologies didàctiques que tenen fortament en compte les TIC i els materials experimentals.

Des de fa més de deu cursos el Departament de Matemàtiques del meu centre i jo mateix hem anat recollint, construint, acumulant abundant material manipulatiu per treballar entorn d'un enfocament més experimental de l'educació matemàtica a secundària. Amb aquest objectiu ens va semblar important poder disposar d'un espai específic que pogués fer la funció d'un laboratori o taller de matemàtiques. El curs passat ja se'ns va assignar un laboratori que compartim amb geologia i vàrem intensificar la posada en pràctica d'aquest tipus de recursos. Va ser a partir d'aquest moment que vàrem veure cada cop més clar que, per anar forjant un enfocament més experimental de la nostra matèria, no n'hi havia prou de tenir abundants materials, ni de disposar d'un laboratori, ni de posar-hi molt d'entusiasme sinó que calia contemplar una visió global i sistemàtica de la presència dels RMAE, estudiar les condicions metodològiques del seu ús, catalogar d'alguna manera un bon ventall de recursos i posar de manifest els avantatges que, com a complement d'altres activitats de caire més abstracte i formal, pot aportar la seva incorporació a la dinàmica docent per a la presentació, consolidació i aplicació d'idees matemàtiques. Sembla fonamental generar un catàleg de RMAE, amb guions de pràctiques en alguns casos i establir instruments globals que donin unitat i coherència al conjunt. Així apareix la necessitat de definir un cert protocol de pràctiques que representi un model aplicable, de manera homogènia, a tots els recursos, de proposar un bloc de consideracions

metodològiques per portar-los a classe i d'establir un sistema d'indicadors per avaluar, de forma sistemàtica, les activitats experimentals que es van portant a terme. Quan la pràctica docent va fent descobrir que aquest tipus d'activitats poden fer molt bones aportacions a classe és quan sorgeix la qüestió de si és possible establir un *mapa global* d'activitats pràctiques associades al currículum. Allò que va començar com una simple utilització d'alguns materials acaba plantejant temes que van molt més enllà. El present treball va néixer de la voluntat de proposar algunes respostes a aquestes qüestions.

1.4. Objectius i resultats proposats

A partir del plantejament que s'acaba de descriure sembla clar que el present treball ha de tractar dos tipus d'aspectes:

A. Aspectes generals que ajudin a dibuixar un marc d'utilització dels RMAE a les classes de matemàtiques. En aquest sentit ens hem proposat els següents objectius:

- Establir un *protocol d'activitats experimentals en matemàtiques* que sigui aplicable a qualsevol activitat experimental i que contempli aquells aspectes que convindrà tenir en compte abans de portar l'activitat a classe, durant la realització de l'activitat amb l'alumnat i després de l'activitat.
- Establir *indicadors i eines d'avaluació* de les activitats experimentals com elements de regulació dels aprenentatges de l'alumnat.
- Establir *critèris d'avaluació* dels propis recursos associants a la seva capacitat de motivació, de visualització, de comunicació, de transferència i a les facilitats d'ús docent.
- Dissenyar un *recobriment del currículum de secundària a través d'activitats experimentals*. A partir de la distribució curricular establerta en el Decret 179/2002, de 25 de juny, per a l'ESO i en el Decret 182/2002, de 25 de juny, per al batxillerat, a cada bloc de continguts s'assignen RMAE que puguin ser útils per a treballar-los a classe. Aquesta és una peça fonamental per tal de donar unitat a l'estudi, creant una línia d'on *pengin* totes les activitats, i per anar dibuixant una metodologia experimental global, sòlida i coherent.

B. Aspectes específics que formulin propostes de RMAE concrets. En aquest sentit, que constitueix el cos central del present treball, ens hem proposat el següent objectiu: Elaborar un *catàleg de recursos materials i activitats experimentals* per portar a terme en les classes de matemàtiques. Aquest catàleg estarà format per fitxes on, per un costat es descriurà el material o l'activitat i, per l'altre, s'indicaran aspectes metodològics específics que puguin facilitar la seva utilització a classe. Algunes d'aquestes fitxes inclouran *fotografies* i, per algunes activitats concretes, s'adjuntaran petits enregistraments en *vídeo*. Per a una mostra d'aquests RMAE, es proposaran *guions* que puguin ajudar a portar-los a classe.

Més enllà dels objectius que s'acaben de detallar i que estaven previstos en el projecte inicial hem elaborat tres eines que no es contemplaven en el projecte inicial i que s'han manifestat com a molt importants pel propòsit de sistematització dels RMAE al qual respon aquest treball:

- Una *proposta de classificació de RMAE*. Aquests recursos formen un món molt extens i divers que és difícil d'abastar i de classificar en unes poques categories, les fronteres són molt borroses i no sempre la pertinença a un grup o a un altre és prou clara. Tanmateix, malgrat aquestes dificultats, pensem que la classificació que proposem, per si mateixa, és força aclaridora. En la presentació d'aquesta classificació anirem associant a cada categoria alguns recursos que puguin il·lustrar-la.
- Una *exploració de col·leccions de materials*: GAMAR de Girona, Facultat de Formació del Professorat de la Universitat de Barcelona, col·lecció particular del professor Adolf Almató, col·lecció particular del professor Claudi Alsina, ADRE - Espai Jordi Esteve de la Universitat Autònoma de Barcelona i exposició Atractor de Lisboa. S'ha elaborat un informe de cadascuna d'elles.
- Un estudi de la *relació entre competències bàsiques i RMAE*. El plantejament dels temes didàctics des del punt de vista competencial aporta, entre altres, dues idees molt interessants: la integració dels continguts específics dins d'esquemes més generals i la seva aplicació contextualitzada. Ens ha semblat interessant fer una exploració de les aportacions que poden fer els RMAE en aquest camp.

Com a conclusió conjunta d'aquest treball, es pretén aportar una visió global i sistemàtica de la presència dels materials i de les activitats experimentals a l'educació matemàtica a secundària, estudiar les condicions metodològiques del seu ús i posar de manifest els avantatges que, com a complement d'altres activitats de caire més abstracte i formal, pot representar la seva incorporació a la dinàmica docent per a la presentació, consolidació i aplicació d'idees matemàtiques.

2. Treball dut a terme

2.1. Pla de treball

El treball s'ha elaborat en quatre fases que, com es comentarà, no han correspost a l'ordre cronològic:

Fase 1: Identificació, exploració, recollida... d'objectes i recursos materials concrets i catalogació i elaboració de documentació didàctica específica corresponent a aquests objectes.

Fase 2: Recollida d'informació i elaboració de documentació didàctica general: protocol de pràctiques, indicadors d'avaluació, recobriment experimental del currículum...

Fase 3: Elaboració del treball final en suport paper i suport CD-ROM.

Fase 4: Col·laboració en accions de difusió, algunes proposades pel propi Departament d'Educació i Universitats.

La primera fase i la segona fase s'han desenvolupat simultàniament i la quarta fase que, en el projecte de treball contemplàvem com la darrera, s'ha avançat perquè el propi Departament d'Educació i Universitats va demanar que es fessin dues conferències en un determinat moment i tres en un altre així com un article pel BIAIX. Aquest fet, que es detallarà al capítol tretzè, ens ha portat a un avançament de la fase quatre.

Els enregistraments en vídeo han requerit una planificació especial per què s'han fet directament a classe amb alumnes d'ESO i batxillerat de l'IES Sa Palomera de Blanes. Finalment aquest aspecte ha adquirit més rellevància per què el Departament d'Educació i Universitats editarà un DVD que contindrà l'enregistrament d'una de les conferències esmentades a l'apartat anterior i amb més d'una vintena d'aquests enregistraments a classe referents a materials específics.

Al llarg del curs, cada dues o tres setmanes, hem tingut reunions de supervisió amb el professor Claudi Alsina. En cada reunió hem revisat junts els materials elaborats des de la reunió anterior i, si calia, fèiem correccions, re-enfocaments, simplificacions, concrecions o ampliacions. Així mateix, quan ha calgut, el professor Claudi Alsina m'ha suggerit línies d'avenç o m'ha indicat aspectes que caldria desenvolupar. També hem experimentat amb materials concrets que hem aportat un o l'altre: exploració de les seves possibilitats didàctiques, els camps temàtics que poden treballar-s'hi, els avantatges i les dificultats de la seva manipulació, les petites històries que els envolten, etc.

2.2. Metodologia emprada

El treball que hem realitzat comprèn tres tipus d'actuacions que han requerit tres metodologies diferents:

- Metodologia en actuacions sobre objectes i recursos concrets. A part dels materials propis o del meu centre hem explorat altres col·leccions de materials. Hem intentat conèixer el màxim nombre de materials i entrar en contacte amb professorat que els utilitza. El treball en aquest sentit ens ha portat a fer

nombroses visites, a prendre moltes fotografies i a aprendre de moltes observacions que ens han fet. Ha estat una de les experiències més satisfactòries de l'estudi realitzat.

- Metodologia en l'elaboració de documentació didàctica específica. A partir de l'exploració de cada recurs concret s'han anat elaborant fitxes descriptives de RMAE el conjunt de les quals formen el catàleg que ens havíem proposat de construir. La primera labor va ser establir un format adequat per a aquestes fitxes que fos al mateix temps prou informatiu i prou àgil de maneig. En les fitxes s'hi inclouen propostes d'activitats que, en alguns casos, són molt extenses. Això ha substituït una mica la necessitat de guions, malgrat que se'n presenta una mostra. En aquest apartat cal incloure-hi també els enregistraments d'activitats concretes a classe portats a terme a l'IES Sa Palomera de Blanes i els informes que s'han elaborat de cadascuna de les col·leccions de materials visitades. Ha estat la part més extensa del treball i ha requerit una abundant consulta bibliogràfica. Així mateix s'han recollit forces idees i experiències docents tant pròpies com d'altres companys i companyes.
- Metodologia en l'elaboració de documentació didàctica general. Aquest apartat ha requerit abundant consulta bibliogràfica i la recollida d'opinions i experiències de professorat de matemàtiques. També hem cercat informació en altres àrees curriculars que ja tenen una tradició pràctica més arrelada. En tot cas, en aquest apartat, s'observa molt clarament que el resultat final no sorgeix tan sols de recollir informacions sinó sobretot d'un procés de reflexió que s'ha allargat durant tot el curs i que ha tingut etapes de maduració diferents. Determinats aspectes que en aquesta memòria es presenten en la seva configuració final tenen al darrera un camí que, a vegades, ha anat en la direcció de la complexitat, però també altres vegades, en la direcció de la simplificació.

En tots els casos s'ha intentat fer propostes creatives i innovadores però també concretes, articulades i no retòriques, fugint de generalitzacions excessives. Així mateix, s'ha procurat que siguin sòlides i rigoroses des del punt de vista matemàtic. S'ha posat doncs molta atenció en els continguts matemàtics evitant la injustificada trivialització que, de vegades, es produeix amb aquest tipus de recursos.

2.3. Descripció de l'estudi

La descripció detallada de l'estudi realitzat es fa a partir del tercer capítol d'aquesta memòria i en els annexos. A continuació, en repassem breument els continguts.

Dediquem el capítol tercer a fer un camí que, partint de la idea de competència matemàtica, ens porti fins als RMAE objecte del nostre estudi, tot intentant donar una visió àmplia de les iniciatives de canvi metodològic. Es tracta d'emmarcar els RMAE en un àmbit més global de millora docent.

El quart capítol el dediquem a tractar, en breus pinzellades, aspectes generals sobre RMAE: la distinció entre material, recurs i activitat, el *cicle vital* d'un recurs, la polivalència dels recursos materials, les relacions entre els RMAE, l'alumnat i el professorat i la complementarietat amb altres aspectes metodològics.

Dediquem el cinquè capítol al laboratori de matemàtiques. La majoria de les activitats pràctiques que es presenten en el nostre treball poden ser realitzades a la classe

habitual però, en alguns casos, sembla més eficient realitzar-les en un entorn de laboratori. Tal volta, a poc a poc, els centres de secundària aniran comptant amb aquesta instal·lació a la qual ens ha semblat que havíem de dedicar algunes reflexions. Cal observar però que disposar d'un laboratori o d'aules específiques no és ni una condició necessària ni una condició suficient per fer un plantejament més experimental de la matèria: sense un espai d'aquest tipus pot emprar-se àmpliament material manipulable i, a l'inrevés, el fet que un centre disposi d'una aula o laboratori no implica automàticament que es faci un plantejament més pràctic. No hi ha dubte que pot ser un element que impulsi el canvi però també pot ser el punt d'arribada —o tal volta una estació intermèdia— d'un trajecte més possibilista que, amb independència de disposar o no d'un espai físic, es proposi incorporar a les classes metodologies més vinculades a la pràctica experimental.

El capítol sisè presenta una proposta de protocol d'activitats experimentals en matemàtiques. En principi es contempla aquest protocol compost per tres parts que corresponen a tres etapes ordenades en el temps: aspectes a tenir en compte abans de portar l'activitat a classe, aspectes a tenir en compte durant la realització de l'activitat i aspectes a tenir en compte després de l'activitat. No cal dir que, amb independència de l'ajut que aquest protocol pugui aportar, l'element més important per assegurar l'èxit final serà, com sempre, el “*saber fer*”, “*l'ofici*” del professorat que ho porti a terme.

Dediquem el setè capítol a la incorporació de les activitats experimentals en l'avaluació de l'alumnat. En molts casos les activitats experimentals s'integren a les dinàmiques habituals de classe com a elements de visualització, de demostració, d'aplicació... Tanmateix, a vegades, es poden plantejar treballs pràctics per a realitzar en equip en un ambient de laboratori o de taller. Per aquests casos es fa una proposta d'indicadors i criteris d'avaluació i es presenten graelles d'avaluació i d'autoavaluació de l'alumnat.

El vuitè capítol està dedicat a l'avaluació dels propis recursos materials tot proposant possibles indicadors de qualitat per als quals hem cercat referents en les normes ISO. Malgrat que aquest és un aspecte que avui pot semblar una mica lateral, és probable que en el futur requereixi molta atenció. També es proposa un instrument per a l'avaluació a partir de la pràctica docent.

El capítol novè és un dels que ha comportat una feina més àmplia. Presenta una proposta de classificació de RMAE comentant i aportant exemples de cada categoria. És evident que classificar ajuda a conèixer i permet donar una estructura consistent al conjunt de recursos que estudiem.

El desè capítol presenta el catàleg de recursos materials i activitats experimentals. Es tracta de cent una fitxes en les quals s'inclouen propostes d'activitats, una mostra d'una vintena de guions, sis informes sobre col·leccions de recursos i més de vint enregistraments en vídeo. Tot aquest material, que forma el cor del nostre treball, es presenta en forma d'annexos (A, B, C i D).

El capítol onzè presenta una proposta de recobriment del currículum de secundària (ESO i batxillerat) a través d'activitats pràctiques. A cada bloc de continguts s'assignen materials i activitats experimentals que puguin ser útils per al treball de classe. Es tracta d'una eina que permet respondre a preguntes del tipus: *Estic fent les fraccions a primer d'ESO, quins materials podria portar a classe?* o *Estic fent les còniques a primer de batxillerat, quins recursos experimentals podria emprar?* El recobriment s'adjunta a l'annex E.

Dediquem el capítol dotzè a explorar les relacions entre competències bàsiques de l'àmbit matemàtic i RMAE tot plantejant-nos com, a través d'aquests recursos, podem col·laborar de manera eficient a l'assoliment d'aquelles competències.

El tretzè capítol està dedicat a la difusió del treball tot presentant les accions que ja han estat realitzades i les que es portaran a terme properament.

Presentem les conclusions del nostre estudi en el catorzè capítol i dediquem el capítol quinzè a relacionar els materials continguts en els sis annexos que es presenten: catàleg de fitxes, mostra de guions, enregistraments en vídeo, informes de col·leccions de materials, recobriment del currículum a través d'activitats experimentals i un disc compacte que integra tots aquests materials.

El setzè i darrer capítol presenta una àmplia bibliografia comentada. Tots els llibres, articles i documents electrònics que la componen han estat referenciats en algun moment dins del text de la memòria o de les fitxes.

El repàs que acabem de fer al contingut dels diversos capítols de la present memòria descriu fidelment l'estudi que hem realitzat en el marc de la llicència.

2.4. Descripció dels recursos utilitzats

Per a la realització d'aquest treball s'han utilitzat tres tipus de recursos:

A. Objectes materials, comercialitzats o no, d'interès didàctic en matemàtiques.

- Materials propis que he anat acumulant al llarg dels darrers anys i materials de l'IES Sa Palomera de Blanes.
- Materials d'altres col·leccions i exposicions: GAMAR de Girona, Facultat de Formació del Professorat de la Universitat de Barcelona, col·lecció particular del professor Adolf Almató, col·lecció particular del professor Claudi Alsina, ADRE - Espai Jordi Esteve de la Universitat Autònoma de Barcelona i exposició Atractor de Lisboa.

B. Fonts documentals.

- Llibres i articles sobre recursos experimentals. Ha estat molt interessant cercar referències corresponents als dos primers terços del segle passat, anteriors a l'etapa formalista del principi del darrer terç. Ha estat un veritable plaer consultar els treballs de Pere Puig Adam així com treballs d'Emma Castelnuovo.
- Documentació referent al currículum i a didàctica general.
- Consultes a través d'internet.

C. Recursos utilitzats en l'elaboració i presentació final del treball: eines d'edició de textos, de tractament de fotografies, d'enregistrament en vídeo...

3. Un marc general: competència matemàtica i iniciatives de canvi

Per *competència* podem entendre la capacitat d'una persona per posar *en pràctica de manera integrada aquells coneixements adquirits, aptituds i trets de la personalitat que permeten resoldre situacions diverses dins de la posició natural, cultural i social on viu*. En aquesta definició hi podem observar, entre d'altres, tres elements:

- *Continguts específics*, en el nostre cas, de matemàtiques.
- *Processos generals*, com raonar, representar, associar...
- *Contextos*, entesos com a punts d'ancoratge a la realitat.

En el següent quadre es posen de relleu aquests tres aspectes des de tres referències en el camp de les matemàtiques: les proves de CB (*competències bàsiques*) del Departament d'Educació i Universitats, el PISA (*Program for International Student Assessment*) de l'OCDE i els estàndards del NCTM (*National Council of Teachers of Mathematics*).

	Estàndards NCTM	PISA	Competències bàsiques
Continguts específics	<ul style="list-style-type: none"> • Nombres i operacions • Àlgebra • Geometria • Mesura • Anàlisi de dades i probabilitat 	<ul style="list-style-type: none"> • Quantitat • Espai i forma • Canvi i relacions • Incertesa (ítems escollits per a les proves)	<ul style="list-style-type: none"> • Nombres i càlcul • Mesura • Geometria • Atzar • Tractament de la informació • Resolució de problemes
Processos generals	<ul style="list-style-type: none"> • Resolució de problemes • Raonament i prova • Connexions • Comunicació • Representació 	<ul style="list-style-type: none"> • Plantejar i resoldre problemes • Pensar i raonar • Argumentar • Comunicar • Representar • Modelar • Utilitzar el llenguatge simbòlic, formal i tècnic i les operacions 	Continguts, processos generals i contextos estan molt integrats dins de la formulació de cada competència.
Contextos	No s'esmenta explícitament el context però se sobreentén de manera clara.	<ul style="list-style-type: none"> • Situacions personals • Situacions educatives o laborals • Situacions públiques • Situacions científiques 	

Sembla clar que les majors dificultats amb què ens trobem no estan en els continguts específics sinó sobretot en...

- **Integrar-los dins de processos més generals** de raonament, representació, modelació, estimació i desestimació d'estratègies en la resolució de problemes, tempteig - experimentació...
- **Aplicar-los de manera contextualitzada.** Sovint les matemàtiques semblen invisibles fora de la classe malgrat que sabem que estan presents pertot arreu. Tanmateix hem de reconèixer que les matemàtiques, a vegades, estan ocultes en la vida quotidiana però, a vegades, també hi ha interès en ocultar-les com si es temés el pes d'uns records escolars no del tot plaents. Un exemple d'aquesta ocultació és el cas d'una persona que, en la seva pàgina web recomanava llibres "*sense matemàtiques o amb molt poques matemàtiques*"... malgrat que es tractava de llibres de bioestadística! Un altre exemple és l'interès d'alguns mitjans de comunicació per deixar ben clar que el *sudoku* no té res a veure amb les matemàtiques, oblidant-se, per exemple, dels aspectes de raonament lògic que hi ha implicats. Sigui com sigui sembla que les matemàtiques, en el nostre entorn habitual, sovint són tan rellevants com invisibles. Es tracta del que a vegades s'ha anomenat *paradoxa de la rellevància*. Juan Luís Herrero i José Lorenzo analitzen molt bé aquesta paradoxa: "*Les Matemàtiques tendeixen a construir models de la realitat prenent tan sols certs aspectes d'ella, de manera que puguin ser usats en molts contextos diferents. Això comporta una evident abstracció. Aquesta tendència a la generalització és, al mateix temps, la font de l'èxit de les Matemàtiques i la raó de la seva invisibilitat. Donat que el model és útil en diferents situacions reals, sembla que és el llenguatge adequat per a la comprensió de la realitat. Però aquesta "mutilació" de la multiplicitat dels aspectes que la vida presenta, porta a què les Matemàtiques no apareguin en la superfície de les qüestions de les quals s'ocupen sinó en la seva estructura més profunda. No és estrany, per tant, que per un observador poc expert, la seva presència passi quasi desapercibuda.*"⁴ La importància de les matemàtiques –el número i la forma, el caràcter quantitatiu i visual– com a eina per descriure, analitzar i preveure el món que ens envolta està brillantment expressada en el famós paràgraf de Galileu: "*La filosofia està escrita en aquest magnífic llibre, l'univers, que està permanentment obert davant la nostra mirada, però el llibre no pot comprendre's a menys que primerament no s'apregui a comprendre el llenguatge i a llegir les lletres amb les quals està compost. Està escrit en el llenguatge de les matemàtiques, i els seus caràcters són triangles, cercles i altres figures geomètriques sense les quals és humanament impossible comprendre una sola paraula d'ell; sense elles, hom vaga sense rumb en un obscur laberint*"⁵. Serà bo entrenar al nostre alumnat a veure el món amb ulls matemàtics per tal de descobrir aplicacions i presència de les matemàtiques als diferents àmbits de la vida natural, social i cultural, a la tècnica, a la medicina... És així que algunes tendències innovadores en educació matemàtica han posat l'accent precisament en l'aplicabilitat i en fer emergir la presència de les matemàtiques que hi ha a l'entorn quotidià. A vegades el professorat estem tan entrenats en aquestes lectures matemàtiques de la realitat que no ens adonem que representen un pas no immediat per al nostre alumnat. Un exemple d'això és la diversa percepció de la versemblança dels enunciats de problemes: el que per a nosaltres pot ser un problema real, per alguns o algunes alumnes no passa de ser un problema

⁴Herrero Pérez, J.L., Lorenzo Blanco, J. "La invisibilidad de las Matemáticas". A: *SUMA*, núm. 28, juny 1998, pàg. 27-30.

⁵ A. W. CROSBY, *La medida de la realidad*. Barcelona: Crítica, 1988, pàg. 197.

d'enunciat extret de la realitat. Realment haurem d'admetre, amb Alfred Korzybsky i els especialistes amb programació neurolingüística (PNL), que "*e/ mapa no és el territori*", malgrat el nostre entrenament a conèixer el territori a través de mapes i a fer mapes del territori tan fidels com podem. Un altre element de reflexió en aquest camp és el fet que, quasi sempre, arribem al context a través del text i que, sovint, això comporta dificultats d'interpretació que poden bloquejar aquest camí.

La matemàtica escolar constantment està pujant ("*ensenyar a pensar*") i baixant ("*ensenyar a aplicar*") entre el cel de les idees generals i la terra de les situacions concretes des d'una convicció compartida que aquests dos aspectes, lluny d'enfrontar-se, es complementen i s'alimenten mútuament. Aquest viatge constant d'anada i tornada és un dels reptes més encantadors i difícils de la nostra feina i, per fer-hi front, sembla que hem de posar atenció no tan sols en els continguts que treballem a classe sinó també en com els treballem, la manera d'enfocar les activitats, la metodologia... La idea més important que transmetem és la manera com transmetem les idees.

Tal volta degut al que acabem de comentar, des de fa temps, s'observa que van apareixent iniciatives que accentuen l'atenció en els processos i en els contextos. Per diversos costats i des de fa anys, van configurant-se línies de pensament que busquen avançar cap a una idea de l'educació matemàtica més "experimental", "explorària", "heurística"... Si bé són iniciatives molt diverses, tenen en comú el propòsit de promoure descobriments a través de posar en contacte l'alumnat amb "situacions didàcticament fecundes". És just recordar la feina de diversos grups i persones que, en èpoques no gens fàcils, van obrir camí generant materials realment avançats per aquells moments: el grup Zero, el grup Periòdica Pura, el Quinzet, el grup Almosta... Hi ha escrits d'aquests i d'altres grups fets durant els anys setanta que encara serien de rabiosa actualitat! Continuant aquest camí, avui es dibuixen amb força, dins del panorama de l'educació matemàtica, iniciatives d'innovació o de recuperació que poden resultar molt fecundes:

- Ensenyament-aprenentatge a través de la resolució de problemes.
- Projectes de treball cooperatiu.
- Activitats relacionades amb les TIC.
- Activitats experimentals i ús de materials.
-

I altres iniciatives més externes a l'aula però no menys influents que desenvolupen una tasca essencial de recolzament, renovació i dinamització i que, de mica en mica, van deixant empremta en la cultura col·lectiva del professorat de matemàtiques:

- Grups, associacions, la FEEMCAT...
- Fem Matemàtiques, Cangur, Estalmat, Problemes a l'esprint...
- Jornades didàctiques, trobades d'intercanvi...
- GAMAR, maletes de materials itinerants...
- Publicacions...
- Exposicions i sortides matemàtiques...

Tones i tones d'il·lusió i d'esforç convertides en eines de millora!

Centrant-nos de nou en les iniciatives de caire més metodològic, haurem de convenir que, a part de valuoses excepcions que accentuen fortament una metodologia concreta i que en són veritables referents, en general la seva penetració en el dia a dia escolar sol anar associada a una certa "*selecció natural*" que cada professional va

fent d'acord amb el seu estil docent, amb el tema concret que ha de treballar, amb el perfil de l'alumnat receptor... Potser podríem esquematitzar aquesta situació com mostra la figura 1: imaginem-nos una línia de continguts curriculars, sobre d'ella, cobrint-la, una línia metodològica bàsica (més o menys tradicional, amb més o menys càrrega expositiva, més o menys formal, més o menys interactiva...) i encara a sobre altres capes d'opcions metodològiques (TIC, materials i activitats experimentals, projectes de treball cooperatiu, resolució de problemes...) de les quals el docent o la docent, d'acord amb el seu bon criteri, va escollint els elements que, per a cada circumstància, creu que poden resultar de més profit al seu alumnat.

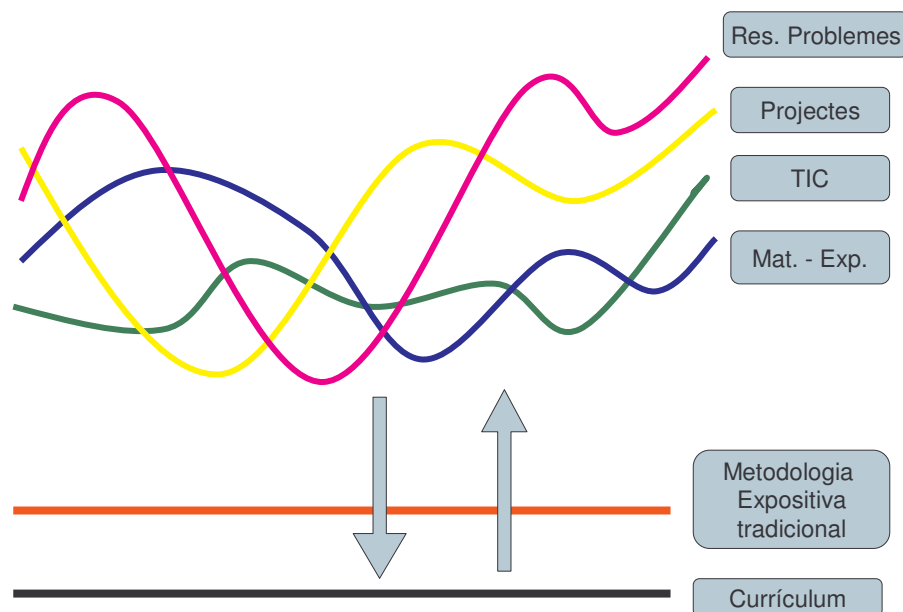


Figura 1

Tanmateix aquestes opcions metodològiques, com hem comentat abans, no són gens independents dels continguts:

- Suggereixen nous continguts. Per exemple, l'ús de la calculadora gràfica o simbòlica –de la mateixa Wiris– no és merament una qüestió instrumental sinó que implica incorporar als continguts tradicionals aspectes referents al seu maneig que ens poden obrir noves possibilitats.
- Eliminen, modifiquen o substitueixen alguns continguts. Per exemple, les calculadores varen permetre prescindir de les taules de logaritmes com a eines de càlcul o el GeoGebra, tal volta, en un termini relativament curt, ens farà replantejar certs aspectes de representació associats a la geometria analítica del pla.
- Connecten continguts provocant reordenacions i establint ponts que trenquen la linealitat dels programes i dels llibres de text. Per exemple, la resolució de problemes o els projectes de treball cooperatiu requereixen manejar simultàniament continguts diversos, amb la riquesa que això comporta.
- La pròpia metodologia, com dèiem, és un missatge de fons o subratlla implícitament missatges de fons. Per exemple, pot projectar el caràcter experimental de les matemàtiques, o el seu caràcter indagatori, o el caràcter formal...

És així que tenim establert un camí d'anada i tornada (les dues fletxes verticals de l'esquema): van prenent cos iniciatives metodològiques per treballar els continguts però, al mateix temps, aquestes iniciatives dinamitzen els continguts produint-hi modificacions. En aquest permanent procés de retroalimentació tal volta hi podem intuir les rodes que fan avançar les iniciatives de canvi (figura 2). El motor que mou aquestes rodes s'alimenta de combustibles tan diversos com delicats: l'experiència i la reflexió sobre la feina diària, la il·lusió i les ganes de millora del professorat, la influència de la recerca universitària, els *inputs* procedents de la formació permanent, els mitjans disponibles, l'ambient escolar, etc.

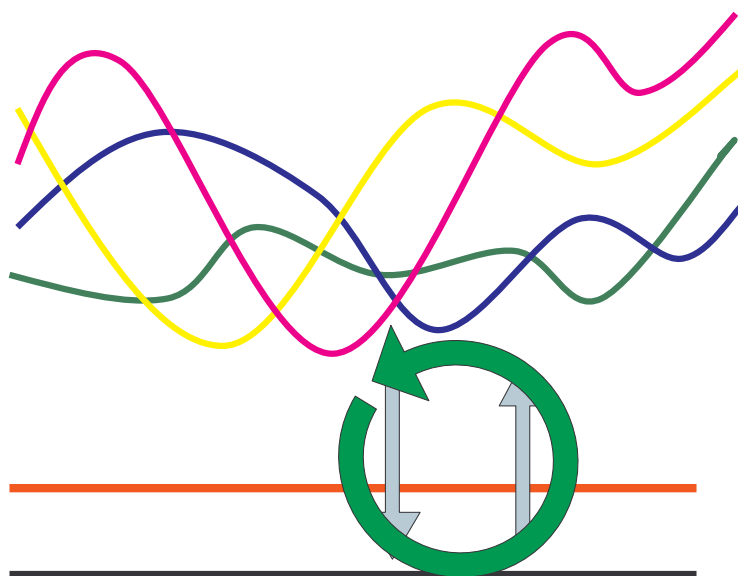


Figura 2

Tot plegat és un esquema i tots els esquemes simplifiquen aspectes que, a vegades són prou rellevants. Tanmateix n'hi ha un que no podem deixar d'esmentar: qualsevol acció d'ensenyament/aprenentatge és un acte de comunicació que va més enllà dels continguts concrets, dels processos, dels contextos, de les metodologies... per endinsar-se en el món de les emocions, les afeccions, els afectes, els bloqueigs... Com diu Claudi Alsina: “*el món de les enginyeries didàctiques no pot oblidar el món dels afectes, els bons comportaments, les emocions...*”. Hauríem d'aconseguir que cada alumne i alumna, almenys un cop en la seva trajectòria escolar...

...s'emocionés fent un problema, *es piqués* per treure'l, el lluités i assolís el seu èxit.

...assaborís, de primera mà, l'aparent paradoxa que el treball i l'esforç en matemàtiques pot produir plaer.

En definitiva que tingués el seu minut de glòria matemàtica!

Ara ens centrarem en una de les metodologies que hem esmentat: l'ús de recursos materials i activitats experimentals a la classe de matemàtiques.

4. Aspectes generals sobre RMAE

Maria Montessori (1870-1952) afirmava que “*el nen té la intel·ligència a les mans*” i el gran matemàtic francès Henri Poincaré (1854-1912) deia que “*només hi ha dos mètodes per a ensenyar fraccions: tallar, encara que sigui mentalment, un pastís, o fer-ho amb una poma. Amb qualsevol altre mètode d'ensenyament (sigui aquest axiomàtic o algèbric) els escolars prefereixen sumar numeradors amb numeradors i denominadors amb denominadors*”. A part de l'interès que té el text anterior tenint en compte qui n'és l'autor em sembla molt significatiu que hagi estat citat per Vladimir Igorevich Arnold (1998), un dels grans matemàtics russos del segle XX, especialista en equacions diferencials i sistemes dinàmics. Valguin aquestes dues cites –a les quals se'n podrien afegir moltes d'altres com les que s'han presentat a l'apartat 1.2 d'aquesta memòria– per posar de relleu la importància de l'ús d'aquests materials en l'educació matemàtica.

Cada vegada sembla més obvi que una part important de l'alumnat de les nostres escoles pot treure un bon profit educatiu d'una mescla assenyada de teoria i pràctica i que el maneig d'objectes concrets els permet accedir amb més facilitat al coneixement abstracte. És així que, en els nivells no universitaris, les activitats més abstractes, tan pròpies de la matemàtica, poden complementar-se molt favorablement amb experiències més materials que sovint resulten més properes al nostre alumnat i que entronquen amb una tradició gens nouvinguda.

Els recursos materials són trossets de món i, per tant, resulten eines idònies per contextualitzar les idees matemàtiques. De fet, la matèria és el context més clar i el treball directe sobre objectes materials no ha de cercar referents contextuals allunyats per què ell mateix suggereix a l'alumnat la seva vinculació –de manera més o menys immediata– amb la realitat tangible de l'entorn quotidià. Davant dels recursos materials difícilment es formula la típica pregunta de “*...i això per què serveix?*”. Per exemple, quan un alumne o una alumna treballa amb policubs està construint objectes reals, amb volums reals, i superfícies laterals i arestes concretes, està tocant la forma, la manipula, l'observa des de diferents punts de vista i, si cal, la modifica. Aquell objecte policúbic, per un costat, és proper a la realitat exterior a l'aula (no és difícil veure'l com a una peça d'una màquina, una part d'una maqueta o un objecte arqueològic) i, per l'altre, és capaç de generar preguntes matemàtiques rellevants, de proposar reptes, de plantejar problemes. És així que els RMAE són uns magnífics ponts per posar en contacte contextos i raonament matemàtic. En paraules de Pere Puig Adam: “*El concret comença essent pel nen allò que percep; sobre aquestes primeres percepcions actua elaborant analogies de les quals sorgeixen conceptes més generals, més abstractes, arribant a vegades a processos d'abstracció de rapidesa insospitada. La percepció i l'acció semblen constituir el binomi sobre el que es desenvolupa l'aprenentatge matemàtic*”⁶.

Paul Halmos posa de manifest el caràcter experimental de l'activitat matemàtica escolar (en el sentit més ampli, referint-se especialment a la resolució de problemes) amb unes paraules que difícilment poden ser més significatives: “*La millor manera d'aprendre és fer; la pitjor manera d'ensenyar és parlar*”⁷. Sovint una situació

⁶ Puig Adam, P., *El material didàctic actual, presentado en la XI reunión de la Comisión Internacional para el Estudio y la Enseñanza Matemática y Exposición Internacional simultánea (Madrid, 21-27 de abril de 1957)*. Madrid: Publicaciones de la revista “Enseñanza Media”, 1958.

⁷ Halmos P. R. “The Problem of Learning to Teach”. A: *American Mathematical Monthly*, Vol. 82, No. 5, maig 1975, pàg. 466-476.

adequada, un treball de camp, un objecte ben escollit, una activitat pràctica... valen més que una gran explicació.

A continuació aportem cinc reflexions entorn a l'ús dels RMAE a les classes de matemàtiques que vàrem començar a desenvolupar en els mesos previs a la llicència com a base del treball posterior i que, parcialment, han estat publicades a la revista *Biaix*⁸ pel mateix autor d'aquest estudi.

4.1. Distinció entre material, recurs i activitat experimental

En l'article que s'acaba d'esmentar dèiem: “Moltes de les experiències que poden proposar-se als alumnes i a les alumnes estan associades a materials específics però ni l'ús d'aquests materials és condició suficient per assegurar un plantejament experimental ric ni tot enfocament experimental ha de comptar necessàriament amb materials sofisticats. El que fem amb un **material** i el com ho fem serà el que el convertirà o no en un **recurs didàctic** potent, tot emmarcant-lo en una **activitat experimental** concreta. Igual que no es treu prou profit d'un hardware excel·lent si no s'usa mitjançant uns programes adequats i seran aquests programes els que permetran donar diferents funcionalitats a un mateix aparell, a l'ensenyament no traurem prou profit dels millors materials si no els emmarquem en activitats pràctiques adequades i seran aquestes activitats les que atorgaran funcionalitats diferents a un mateix material.”

F. Hernán i E. Carrillo, en el seu llibre *Recursos en el aula de Matemáticas* posen de manifest un aspecte particular –la perspectiva temporal– que il·lustra molt bé el que s'exposa en el paràgraf anterior. Indiquen que un mateix material pot ser usat des de dos enfocaments diferents segons la temporització de les activitats on s'immergeix:

- Un enfocament *diacrònic*: amb el material es planteja una seqüència evolutiva d'activitats que serà seguida per un mateix grup d'alumnes al llarg del temps i que potser no es farà en un bloc sinó en diferents blocs que podran estendre's, fins i tot, a cursos successius.
- Un enfocament *sincrònic*: el material dona suport a una activitat que pot proposar-se, de la mateixa manera, a grups d'alumnes de cursos o edats diferents.

En el llibre esmentat podem llegir el següent text on s'explica molt clarament –des de la perspectiva temporal, repetim– que és el plantejament de l'activitat qui configura el recurs que sorgeix a partir d'un material concret:

*“(...) Dit d'una altra manera, el caràcter sincrònic o diacrònic no està determinat pel material emprat com a suport o activador, sinó que depèn de quin sigui el projecte del professor i quina sigui la dinàmica concreta de la classe. Així que allò que, en una ocasió s'ha emprat amb un criteri sincrònic, pot utilitzar-se en una altra ocasió amb un criteri diacrònic; i recíprocament.”*⁹

⁸ Aubanell, A. “Materials experimentals per al laboratori de matemàtiques”. A: *Biaix*, 23, Maig 2005.

⁹ Hernán, F., Carrillo, E. *Recursos en el aula de Matemáticas*, pàg. 22 i 33.

En el cas de materials multivalents com els policubs, els reglets de Cuisenaire, els reglets de M.A. Canals, les barres de mecano, determinats objectes quotidians... es posa especialment de manifest el fet que es comenta en aquest apartat: permeten moltes utilitats depenent de les activitats que plantegem amb ells.

4.2. Cicle vital d'un recurs

Arran de la idea, exposada a l'apartat anterior podem pensar que als recursos materials els passa com als éssers vius que, tal com ens ensenyaven a l'escola, neixen, creixen, es reproduïxen i moren. Un recurs de tipus material també té el seu "cicle vital" dins d'una activitat:

- D'entrada és un simple objecte guardat en un armari del nostre departament o del laboratori.
- **Neix** com a recurs quan un professor o una professora, descobreix en ell possibilitats didàctiques, el selecciona, hi posa confiança, estableix una dinàmica docent per donar-li joc i l'emmarca en una activitat per portar a l'aula.
- **Creix** immersit en l'ambient de la classe, nodrint-se de coses tan reals i indefinides com l'interès, la implicació, l'entusiasme, la sorpresa, les ganes de descobrir, el bon ambient, la il·lusió... de l'alumnat i del professorat. A vegades veurem que es farà gran amb rapidesa i fins i tot ens sorprendrà. Altres vegades ens costarà més de fer-lo créixer. Això pot dependre de dies, d'horaris, de grups...
- **Es reproduïx** en forma d'idees matemàtiques, estratègies, imatges mentals que queden en els alumnes i les alumnes, que les *a-prenen*, que se les fan seves. El concret dóna pas al concepte. Aquest és el moment màgic: la idea se separa de la matèria.
- **Mor** quan, havent donat el seu fruit didàctic, torna a ser merament un objecte per guardar a l'armari. Cal que el docent tingui molt clar aquest moment perquè, com diu Pere Puig Adam, *mai s'ha de perllongar l'ús d'un material més del necessari*.

A la pràctica aquest cicle es percep molt bé, a vegades amb una durada total relativament curta i altres vegades amb un temps més llarg.

4.3. Polivalència dels recursos materials

El professor Miguel de Guzmán, en un llibre encantador, *Para pensar mejor*, afirma que "un bon problema és com un bon gat... sempre té set vides". Als recursos materials els passa el mateix: poden donar fruits en moltes direccions! A l'article del Biaix que hem esmentat escrivíem: "Hi ha una característica especialment rellevant en els recursos de tipus material: la diversitat de lectures que permeten. Aquesta polivalència es concreta especialment en dues direccions:

1. Cada alumne/a traurà un profit diferent d'un mateix recurs: hi haurà qui farà descobertes més enllà del que el professorat pretenia, hi haurà qui es quedarà tan sols en aspectes materials molt concrets, hi haurà qui avançarà cap a direccions no previstes... però tothom hi podrà fer alguna cosa. Poques

vegades existeix el bloqueig davant d'aquest tipus de recursos. Portant aquesta observació a un nivell més general és interessant observar que un mateix recurs, adequant les lectures que se'n fan, pot ser usat per treballar continguts diferents en cursos diferents. A continuació se'n posen dos exemples:

- 1.1. Els reglets de la Maria Antònia Canals poden ser útils per ensenyar a sumar o restar a una nena o un nen de l'inici de primària però també poden ser útils per mostrar, a un/a alumne/a de secundària, la relació entre la raó de les longituds, de les àrees i dels volums de dues figures semblants.
 - 1.2. Els experiments amb bombolles de sabó poden servir per practicar el vocabulari geomètric: vèrtexs, arestes, cares, angles dièdres, angles trídres... però també poden servir per plantejar-se problemes de minimització, estudiar la unicitat o no de solucions o, a nivell universitari, estudiar la curvatura de superfícies.
2. Els recursos materials poden ser uns bons punts de trobada interdisciplinaris tant pel que fa a les lectures que se'n poden extreure com al seu disseny i construcció. Les possibilitats en aquest sentit són molt àmplies. A continuació s'il·lustra amb dos exemples:
- 2.1. L'anomenada màquina de Galton és un aparell per a l'estudi de la distribució binomial. En el nostre centre va ser construïda a classe de tecnologia i una de les primeres vegades que es va utilitzar va ser, dins l'assignatura de biologia, per il·lustrar la distribució de magnituds naturals que depenen de molts factors.
 - 2.2. En els experiments amb bombolles de sabó poden treballar-s'hi aspectes de ciències experimentals (la química de la mescla, la tensió superficial), de tecnologia (construcció de les estructures), d'educació visual i plàstica (estètica i representació plana de les formes), etc.”

Voldríem aturar-nos una mica en el primer dels exemples anteriors en el qual es pretén posar de manifest les possibilitats dels recursos materials per teixir ponts interdisciplinaris. A continuació descrivim un projecte que hem portat a terme durant dos cursos en el nostre centre, l'IES Sa Palomera de Blanes. Naturalment no es tracta d'atorgar-nos cap mèrit especial –tothom fa el que pot– sinó tan sols d'explicar una petita experiència per si pot ser útil a altres centres. Es tracta d'un acord de col·laboració entre els Departaments de Matemàtiques i de Tecnologia: els alumnes i les alumnes, a Tecnologia, construeixen alguns materials que després usaran a les classes de Matemàtiques. Tal com s'apunta en l'anterior exemple 2.1 la màquina de Galton és un dels primers resultats d'aquesta experiència. En nom del Departament de Tecnologia ha participat en el projecte el professor Rafael Torelló. En el Departament de Matemàtiques cada curs, es nomena un professor per tal que en tingui una cura especial. Els dos professors encarregats es reuneixen setmanalment en el taller de tecnologia per anar fent un seguiment del que es va construint, anar resolent petits problemes que sempre sorgeixen i anar posant fil a l'agulla de noves idees. Fins ara, dins d'aquest projecte hem fet:

- L'esmentada Màquina de Galton que té dimensions considerables. N'estem especialment orgullosos! És bonic de pensar que els quatre alumnes que s'hi

van dedicar més varen començar-la quan feien 3r d'ESO, la van acabar quan feien 4t d'ESO i probablement l'usaran quan facin estadística a Batxillerat.

- Puzles grans de fusta amb peces encaixables per il·lustrar diverses demostracions del teorema de Pitàgores.
- Construcció d'un el·lipsògraf de quadrants.
- Cablejat i instal·lació del canó de llum del laboratori de Matemàtiques: la tarja de l'ordinador, construcció de la plataforma que sosté el canó, cablejat i instal·lació de regletes a les parets i sostre.
- Darrerament s'ha estat treballant en un aparell per il·lustrar les propietats de reflexió en les paràboles.

Des de la nostra perspectiva aquesta experiència, que ha comptat amb el suport econòmic de l'Associació de Mares i Pares de l'Institut, ha estat molt enriquidora pels dos departaments. Voldríem destacar quatre passos successius que, al nostre entendre, cal tenir en compte en realitzar-la:

- Seleccionar molt bé el que volem i el que podem fer de manera que, per un costat, sigui un material útil en les classes de Matemàtiques (contingut matemàtic i idea didàctica) i, per l'altre, que la seva realització sigui una pràctica interessant en el marc de les classes de Tecnologia.
- Concretar el projecte des d'un punt de vista tècnic: esquemes, mides, materials, pressupost... Els companys i companyes de tecnologia solen oferir idees i solucions que enriqueixen molt els projectes.
- Realitzar el projecte. Normalment els alumnes i les alumnes treballen en equips que es dediquen a un objecte concret. Cal posar molta cura en l'execució tenint clar que és més important la qualitat que la quantitat de materials, estar oberts a fer-hi canvis i no tenir pressa. Es tracta d'una operació que pot dilatar-se molt en el temps i que, junt amb el pas anterior, representa el nucli de la utilitat didàctica des del vessant tecnològic.
- Portar-ho a classe de Matemàtiques i donar-li funcionalitat didàctica.

Es tracta d'una experiència, com les que altres centres porten a terme, per establir contactes interdisciplinaris entorn dels materials manipulables que, a més, permet anar disposant de nous recursos didàctics.

4.4. Professorat, alumnat i materials: creences i estils

Les creences del professorat, generades sovint des de la pròpia formació, són molt rellevants en la configuració dels estils docents. Molt professorat de secundària procedim d'una formació matemàtica amb un important component formal. Segur que alguns/es de nosaltres podem recordar, per exemple, llibres de geometria sense cap figura. És una qüestió de moments i, àdhuc, de modes! Avui les coses han canviat força. Tanmateix una formació sòlida en matemàtiques lluny de ser un obstacle per a la introducció de materials, pensem que n'és un element afavoridor. El coneixement de la base matemàtica que hi ha darrera dels continguts que manegem a classe dóna perspectiva i seguretat al professorat i li ofereix una major capacitat d'adaptació de les idees més enllà del seu embolcall formal o algorísmic que moltes vegades és

necessari però que no té per què reproduir en la seva docència a secundària. En canvi, posicions de més inseguretat, a vegades, cerquen un cert ancoratge en aspectes més formals i algorísmics des de la creença que són els únics que tenen la garantia de ser “*seriosos*” basada en el record de les matèries de matemàtiques que es van cursar en la pròpia formació universitària. Tot plegat planteja un repte per a les nostres Facultats de Matemàtiques que, ara que revisen els seus plans d'estudi per adaptar-los a l'espai europeu d'educació superior, no haurien de perdre l'oportunitat de contemplar seriosament perfils de formació més orientats cap a la docència.

Recordo fa anys que, després d'una sessió on presentava materials per treballar geometria, un jove professor em va preguntar si creia que realment això de retallar paper era fer geometria, ja que les dues o tres assignatures de matemàtiques que ell havia cursat en la seva Facultat eren molt formals i això de retallar ho considerava poc seriós. Vaig pensar en les paraules de Pere Puig Adam en el pròleg de la seva *Geometria Intuitiva* (Madrid, 1928): “*Aquí et presentem, estimat lector, als que han de ser els teus companys de treball: unes tisores, un cabdell de fil, un regle, un parell d'escaires, un gran munt de fulls de paper. Ni un sol dia has de començar la lliçó de Geometria sense tenir al costat aquests bons companys, ni acabar d'estudiar-la sense deixar la teva taula materialment plena de retalls i de papers amb figures...*”. Però, de fet, el meu interlocutor probablement tenia una part de raó: tallar paper no és necessàriament fer geometria. Retallar paper pot ajudar molt a aprendre geometria si es fa des d'una perspectiva determinada que permeti fer lectures “*riques*” dels retalls, dels plecs i de les figures que apareguin. L'ús de materials serà tan més ric quant més riques siguin les lectures matemàtiques que, a partir d'ells, es puguin fer. Si no hi ha un decidit rerefons en aquesta direcció, l'ús de materials disminueix el seu valor didàctic, perd força de comunicació i, fins i tot, pot esdevenir poc més que un entreteniment per a dies especials.

Els professors i les professores també tenim, doncs, les nostres particulars relacions amb els recursos! Quan ens presenten un material, igual que passa quan ens presenten una persona, no sempre la primera impressió és la que val. Recordo que, a finals dels anys setanta, fent el CAP, l'admirat professor Joan Casulleres ens explicava com, mitjançant unes piles de peces de colors, introduïa els alumnes en el problema del recompte combinatori fent-los descobrir, per si sols i mitjançant la manipulació concreta, per una part, la importància de tenir clar si l'ordre és o no rellevant i si es poden o no repetir i, per l'altra, la necessitat d'establir, per als diversos tipus d'agrupaments, criteris constructius a partir dels quals la deducció de les fórmules corresponents era immediata. En aquell moment, en què jo sortia de la facultat i pensava més que ara que les idees matemàtiques passaven de la pissarra al cervell sense més intermediaris, ho veia poc més que com una curiositat *poc rigorosa*. Avui, quasi trenta anys després, em resultaria difícil no començar la combinatòria sense usar, almenys en dues classes, aquelles fitxetes de colors i, em temo que si em proposés fer-ho, cercaria alternatives molt properes a aquella idea inicial. També passa a l'inrevés: conec recursos que quan me'ls han explicat els he trobat brillantíssims però que, després a classe, no m'han funcionat en absolut.

Igual que en la relació entre les persones el tracte serà qui farà que ens apropem més o menys i que establim una relació de més o menys confiança, amb els recursos materials. Més enllà del primer contacte amb un recurs, cal estar disposat a viure un experiència d'apropament, a tenir ganes de descobrir-lo. Cal manipular-lo, jugar-hi, pensar com el podríem portar a classe, intercanviar punts de vista amb companys i companyes... En definitiva, construir la nostra pròpia lectura didàctica del material. Si després de donar-li aquesta oportunitat el recurs no ens ha *enganxat* el millor que podem fer és deixar-lo: el primer test per saber si un recurs funcionarà a classe és que el professorat que l'ha d'usar s'hi senti bé, li agradi!

Tinguem en compte que sovint un material funciona molt bé a un professor o una professora i, en canvi, no funciona en absolut a un/a altre/a. La incorporació d'un recurs concret a una dinàmica docent concreta és un camí molt personal i poc transferible ja que en ell intervenen fortament els estils docents i les creences de cadascun de nosaltres. Claudi Alsina, referint-se a l'actitud del professorat que utilitza els materials afirma: "*El secret dels materials som nosaltres*".

Quedaria incomplet aquest paràgraf si no giréssim la nostra mirada també cap a l'alumnat. El bon funcionament d'un material no depèn únicament de l'activitat que es plantegi ni de l'entusiasme o el bon ofici del professorat, també depèn, en molta mesura, dels alumnes, de l'interès de cada alumne/a, del seu estil d'aprenentatge, de l'ambient de cada grup... Un mateix recurs, presentat a través de la mateixa activitat per un mateix professor o una mateixa professora, pot donar resultats molt diferents segons l'alumnat a qui va dirigit o el tarannà del grup receptor. Tanmateix, però, el cert és que l'ús de recursos materials i activitats experimentals a classe sol tenir per al nostre alumnat un valor afegit d'interès, de sorpresa, de participació, d'atenció, de vivència... que no sempre aconseguim amb altres tipus de recursos.

4.5. Complementarietat amb altres aspectes metodològics

A vegades en didàctica sembla que unes metodologies o uns enfocaments curriculars es plantegin com enfrontats amb altres creant-se falsos debats que solen resultar força estèrils. Recordem, per exemple, el debat "calculadores sí, calculadores no!" sortosament ja superat. En tot cas sembla que, en general, és un error enfocar els canvis metodològics en termes d'exclusió. Precisament en el tercer capítol d'aquest estudi hem intentat situar la utilització dels RMAE en un marc més ampli que integri altres opcions. La nostra història recent té masses plantejaments en termes d'exclusió i la nostra realitat present té masses necessitats com per permetre'ns aquest luxe! En els apartats que segueixen intentarem posar de manifest no tan sols la compatibilitat sinó la complementarietat entre la utilització de RMAE i altres opcions metodològiques. En tots els casos emprarem el terme "*versus*" en la seva original accepció llatina que correspon a la idea d'avenç en una direcció i no en l'accepció anglosaxona d'oposició.

Laboratori material *versus* laboratori virtual

Les tecnologies de la comunicació i de la informació, a través dels ordinadors, han obert les portes de les aules al món sencer i és imprescindible que ho aprofitem però cal ser conscients que el contacte físic amb els objectes sobre els que treballem té un valor il·lustratiu i fins i tot vivencial molt més directe que la mera visió de l'objecte o la seva manipulació a través del ratolí. Són dos àmbits diferents que no es contraposen sinó que es complementen. Sense valorar si un és més o menys *virtuós* que l'altre podríem comparar-los:

- *El laboratori virtual* és més ampli pel que fa als continguts que hi podem trobar, més barat i més fàcil d'utilitzar però les experiències que ofereix es mantenen en el camp de la immaterialitat. Aquest és un camp on, amb més o menys ingredients de ficció, el nostre alumnat s'hi mou bastant habitualment i alguns/es en són vertaders/es especialistes.
- *El laboratori real* és més limitat en el nombre d'objectes, més car i més difícil d'anar formant però permet experiències més directes, viscudes i participatives

que són molt diferents de les que el nostre alumnat rep a través de la televisió o d'altres eines electròniques.

Es tracta de mitjans diferents que aporten experiències diferents. És important que distingim un de l'altre perquè, a vegades, podria semblar falsament que un pot substituir a l'altre o que l'altre pot reduir a l'absurd el primer. Un exemple d'aquesta diferència és el següent: hi ha magnífics programes que simulen experiments aleatoris per il·lustrar la llei dels grans nombres i són molt útils a classe, però no és el mateix un programa que tira monedes que el fet de tirar físicament les monedes i apuntar els resultats. Fins hi tot el "suar" l'experiment és útil! Naturalment quan el nombre de vegades que haguem de tirar les monedes augmenti, descobrirem la necessitat de les eines informàtiques que ens demostraran unes potencialitats que l'activitat material no ens permet. Totes les eines de comunicació, usades sensatament, poden fer excel·lents aportacions a les nostres classes. Una bonica demostració d'aquesta beneficiosa complementaritat són els applets que el *Freudenthal Institut* presenta en la seva pàgina *KidsKount*¹⁰. Es tracta d'una pàgina encantadora carregada d'idees. Tanmateix el més rellevant als efectes del nostre estudi és el fet que la majoria dels applets que s'hi presenten poden associar-se de manera molt directa amb el maneig de materials concrets. Constitueixen una bona demostració de la beneficiosa complementaritat entre recursos materials i recursos virtuals.

Activitats experimentals versus resolució de problemes

Les metodologies associades a la resolució de problemes representen un dels reptes de fons més apassionants que actualment tenim davant el professorat de matemàtiques. Els recursos materials poden fer les seves aportacions en aquest marc docent. A continuació esmentem alguns exemples:

- Sense defugir el necessari compromís transversal de treballar la comprensió lectora haurem de contemplar la possibilitat de plantejar també problemes amb menys text i més context tot associant-los a objectes materials o a situacions reals.
- Un determinat material pot ajudar-nos en el procés de resolució d'un problema, a visualitzar una configuració, a temptejar camins, a explorar possibilitats...
- A vegades els resultats de problemes concrets, especialment en el camp de la geometria, es veuen més clars i adquireixen més rellevància si s'apliquen a realitats materials més tangibles per a l'alumnat.

Experimentació versus abstracció

Les matemàtiques tenen un caràcter abstracte que forma part de la seva pròpia essència i que hem de valorar per què fa aportacions prou beneficioses a la formació del nostre alumnat. No pensem que aquest caràcter s'oposi a l'ús de RMAE; ben al contrari. Els materials concrets, les activitats experimentals, les situacions reals... poden ser punts de partida per generar models abstractes o punts d'arribada per aplicar-los. El professor Pere Puig Adam ho expressa en el seu llibre *El material didàctic actual, presentado en la XI reunión de la Comisión Internacional para el*

¹⁰ Freudenthal Institut. [en línia] <<http://www.fi.uu.nl/rekenweb/en/welcome.xml>> [Consultat: 23 maig 2006].

Estudio y la Enseñanza Matemática y Exposición Internacional simultánea: "...una formació matemàtica completa de la nostra joventut (...) no pot limitar-se al cultiu de la fase operatòria, al cultiu de les facultats lògiques (...) Aquest punt de vista massa exclusivista que cada generació de professors hereta de la precedent, crea una tendència a l'abstracció prematura, a la desatenció i a l'oblit, que són un menyspreu implícit al món real; i l'ensenyament que en resulta, acaba essent, en certa mesura, estèril, per desenvolupar-se en una atmosfera enrareda a força de depuració. El mecanisme lògic abstracte és tan sols una fase intermèdia en la resolució dels problemes quantitius de la filosofia natural, fase essencial certament però que ha d'anar precedida d'una fase de plantejament o d'abstracció, en el que la ment redueixi a esquemes matemàtics els fenòmens naturals estudiats, i seguida d'una altra fase de concreció, és a dir, d'interpretació, de projecció dels resultats obtinguts al camp de la realitat. Crec que l'oblit del cultiu simultani de les dues fases anterior i posterior esmentades, va motivar en gran mesura el fracàs de l'ensenyament matemàtic tradicional".

5. El laboratori de matemàtiques

Tot cercant una definició

Moltes de les activitats pràctiques que s'esmenten en el nostre treball poden ser realitzades a la classe habitual però, en molts de casos, sembla més eficient realitzar-les en un entorn de laboratori específic. Per aquesta raó creiem que el present treball ha de dedicar una atenció especial a aquest entorn.

En primer lloc potser caldria justificar el per què hem optat per emprar l'expressió *laboratori de matemàtiques* en lloc de les expressions *taller de matemàtiques* o d'*aula de matemàtiques*. No sembla que aquesta qüestió de nomenclatura sigui essencial però tal volta el mot *laboratori* –que entronca també amb una rica tradició acadèmica i que etimològicament prové del terme llatí *labor* que significa treball– suggereix un tipus d'activitat més ampli que el mot *taller* (sovint associat a tasques de construcció amb un fort accent tecnològic) i més concret que el mot *aula* (molt genèric i, per tant, poc descriptiu). Naturalment aquesta elecció pot ser discutible però el que ens sembla important no és tant el nom com el concepte que representa.

No és fàcil definir de manera precisa el que podríem entendre com a *laboratori de matemàtiques*. Creiem que, amb aquest propòsit, pot ser útil transcriure alguns paràgrafs que varen ser publicats a la revista *Biaix* per l'autor d'aquest estudi¹¹

“Potser podríem definir el laboratori de matemàtiques com *un àmbit propici a l'experiència matemàtica*. Es tracta d'una definició pretesament oberta i inconcreta per respondre a les diverses situacions que pot abastar i que té l'avantatge de convidar-nos a una reflexió sobre les dues expressions que la integren: “àmbit propici” i “experiència matemàtica”:

“*àmbit propici*”

L'ideal seria poder-nos referir a un espai físic adequat, com els laboratoris que coneixem en altres àrees. Tan de bo poguésser així, però, avui per avui, això es dóna molt rarament i hem de pensar que dins d'una classe també es pot crear un cert ambient experimental a través de la dinàmica docent que s'estableixi i, si és el cas, de l'aportació d'objectes concrets (...)

“*experiència matemàtica*”

Entesa com qualsevol element o vivència educativa que ens ajuda a recrear i recrear-nos en el saber matemàtic. Tots nosaltres hem viscut experiències matemàtiques plaents tot resolent un problema o admirant l'entramat conceptual d'un tema, l'estètica d'una demostració o l'aplicabilitat d'una idea. Per això ens agraden i ensenyem matemàtiques! Tanmateix però aquests tipus d'activitats més abstractes, tan genuïnes del quefer matemàtic, poden complementar-se molt favorablement, sobretot en els nivells no universitaris, amb experiències més materials que entronquen amb una tradició gens nouvinguda i que sovint resulten més properes al nostre alumnat (...).

¹¹ Aubanell, A. “Materials experimentals per al laboratori de matemàtiques”. A: *Biaix*, 23, Maig 2005.

Un laboratori de matemàtiques ha de ser un lloc on tinguin vida aquests materials que ens ajuden, en moments puntuals, a motivar, a comunicar i, fins i tot, a emocionar els/les nostres alumnes entorn de les matemàtiques.

Més enllà dels continguts concrets que puguem treballar, amb aquestes activitats estarem transmetent a l'alumnat, de manera implícita, la idea que la manipulació d'objectes i l'experimentació no estan excloses del treball matemàtic. Potser haurem d'admetre, també en l'ensenyament de les matemàtiques, allò que Marshall McLuhan afirmava referint-se a la comunicació en general: “*El mitjà és el missatge*”.

Naturalment, el *laboratori de matemàtiques*, a part de ser un espai d'experiència matemàtica dins d'una atmosfera estimulants per ensenyar i aprendre la nostra matèria, hauria de tenir també un cert vessant exterior que el convertís en el centre de la vida matemàtica de l'escola i en un focus d'irradiació o de difusió de la matemàtica a tota la comunitat escolar.

Els paràgrafs anteriors aporten ja una definició de *laboratori de matemàtiques*, tal volta molt general degut al propòsit d'integrar realitats diverses que poden donar-se en els centres escolars. Tanmateix ens sembla molt interessant recollir un petit text extret del llibret *Mathematics Laboratories in Schools*¹²:

“Així doncs, què és un *laboratori de matemàtiques*? Potser ara podríem aventurar una resposta.

Suposem que tenim un espai que hauria de contenir tot allò que nosaltres podem necessitar per a l'ensenyament matemàtic a l'escola. Com el podem emplenar?

Sense cap dubte voldrem tenir una aula; és a dir una *aula de matemàtiques*. Si volem tallar, perforar, enganxar, pintar, soldar i unir, llavors nosaltres volem un *taller de matemàtiques*. Volem un lloc on puguem emprar màquines de calcular¹³ sense causar destorbos o ser destorbats? Llavors nosaltres volem una *aula de càlcul*. Potser volem una aula tranquil·la de consulta i estudi; així nosaltres volem una *biblioteca de matemàtiques*. Si afegim a aquest complex un *magatzem*, llavors tindrem una unitat completa i funcional.

El *laboratori de matemàtiques* és el conjunt de tot això, si és que algú de nosaltres ho té tot. Però el nom es dóna merescudament a tots aquells llocs on el professorat s'esforça a fer les matemàtiques més entenedores cada cop per a més persones a través de relacionar teoria i pràctica”

Un text deliciós!

No voldríem acabar aquest apartat sense esmentar el que l'Informe Cockcroft¹⁴ afirmava fa més de vint anys sobre el tema de les aules específiques de matemàtiques amb equipaments adequats:

¹² Lindsay, R. L. (ed.). *Mathematics Laboratories in Schools*. Londres: G. Bell & Sons Ltd., 1968.

¹³ No oblidem que el text està escrit a l'any 1968.

¹⁴ Cockcroft, W. H. [et al.]. *Las matemáticas sí cuentan. Informe Cockcroft*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia. Subdirección General de Perfeccionamiento del Profesorado, 1985.

“604: En canvi, a l'escola secundària les matemàtiques han d'ensenyar-se en aules específiques degudament equipades i la disponibilitat d'aquestes facilita la realització de pràctiques adequades, sobretot quan hi ha un bon guiatge del cap del departament. Això mateix queda subratllat en els següents extractes de l'informe de la “Enquesta Nacional sobre l'Ensenyament Secundari”. “Els problemes de l'ensenyament de les matemàtiques queden agreujats per la manca d'aules apropiades i part de la millor pràctica observada hauria estat impossible si el professorat no hagués comptat amb elles”. “L'observació va demostrar i l'anàlisi estadística va confirmar, que en les escoles en què es disposava d'una aula especial de matemàtiques, es feia un ús més ampli de materials de presentació, de treballs experimentals i pràctics, de materials realistes i de trencaclosques i jocs”. No obstant, són moltes les escoles secundàries que no disposen encara d'aules adequades i suficients per a l'ensenyament de les matemàtiques. Diversos professors amb qui vàrem conversar en les nostres visites ens varen cridar l'atenció sobre aquest punt, esmentant les dificultats de traslladar d'una aula a una altra tot l'equip necessari”.

Un cert perfil del laboratori

A partir d'aquí, avançant en la direcció del concret, pretenem dibuixar un cert perfil de laboratori de matemàtiques. Ens basarem molt en un escrit que l'autor d'aquest estudi va publicar fa dos anys en el butlletí de l'ABEAM¹⁵. Tanmateix cal aclarir que la idea i especialment alguns continguts d'un laboratori van canviant amb el temps: s'abandonen coses potser entranyables però que el temps ha fet obsoletes i se n'inclouen d'altres que anys enrere no podíem imaginar. Estem parlant d'una idea que ha de ser viva i és normal que el pas del temps i el contrast d'opinions la modifiquin. És molt optimista suposar que qualsevol professor o professora estarà enterament satisfet/a amb el laboratori que hagi estat planificat per una altra persona o, fins i tot, per ell mateix o ella mateixa temps enrere. No cal una planificació completa del laboratori des del primer moment. El laboratori ha de néixer i créixer durant un període de temps ampli que permeti anar-lo ajustant amb flexibilitat i obertura a les necessitats que es vagin detectant o als gustos de les persones que l'han de gestionar.

El laboratori de matemàtiques hauria de ser espaiós i estar ben il·luminat encara que, per tal de millorar la visió de projeccions (transparències, canó de llum, televisió...), hauria de poder-se enfosquir controlant la intensitat de la llum. Caldria comptar amb armaris i lleixes per a objectes i llibres. Seria bo disposar també d'una petita habitació annexa per utilitzar com a magatzem. Hauríem de disposar de taules mòbils, per a l'alumnat, que permetessin diferents agrupaments. S'evitaran les taules de braç. Aniria bé que alguna de les taules tingués una superfície que permetés usar instruments de tall. Naturalment haurien d'haver-hi endolls elèctrics i una presa d'antena que rebés senyals de televisió. Aniria bé comptar també amb una pica amb aixeta i desguàs per a les pràctiques que ho requerissin.

Hem de disposar d'una pissarra àmplia per a la qual podríem tenir en compte les següents recomanacions:

- La seva ubicació hauria d'evitar els reflexos. En matemàtiques usem molt la pissarra i els reflexos ens poden donar molts de problemes.

¹⁵ Aubanell, A. (2004): “El laboratori de matemàtiques”. A: *Butlletí d'ABEAM*, número 16.

- Sembla interessant emprar una pissarra blanca amb retoladors de colors per evitar la pols.
- Una part de la pissarra o una pissarra petita independent hauria de ser quadrículada amb una quadrícula d'uns 10 cm x 10 cm.
- També seria molt interessant disposar d'una pissarra amb fons metàl·lic sobre la qual poguéssim moure-hi peces magnètiques. En la mateixa idea podria haver-hi alguna paret amb plaques metàl·liques per ubicar-hi grups de peces mòbils que il·lustrin demostracions visuals o plantegin trencaclosques geomètrics. S'hi podria posar un rètol del tipus "*Per favor, toqueu!*".

Convindria tenir un taulell d'anuncis general amb suro i xinxetes per penjar comunicacions diverses: el problema de la setmana, informació universitària referent a l'àrea de matemàtiques, el calendari matemàtic del mes, efemèrides astronòmiques i referents a la història de les matemàtiques, alguna biografia de matemàtics que s'adigui amb la data, alguna cita de matemàtics il·lustres que es vagi canviant cada setmana.

Caldria disposar també d'una petita biblioteca amb llibres de text, algun llibre de consulta global tipus enciclopèdia o atlas de matemàtiques, alguns llibres de divulgació històrica, alguns llibres de problemes curiosos, llibres que relacionin les matemàtiques amb altres disciplines (natura, art, tècnica...), llibres de reflexió general sobre el sentit de les matemàtiques i, fins i tot, alguns llibres de matemàtiques dels primers cursos d'universitat. Aniria bé que algun dels llibres estigués en francès o en anglès perquè comencessin a veure la necessitat de poder llegir textos científics en diverses llengües. Hauríem de contemplar també l'hemeroteca que s'hauria de compondre de revistes de divulgació matemàtica i científica en general.

Prop de la biblioteca hi hauria d'haver informació matemàtica procedent dels viatges dels alumnes: fotografies d'interès matemàtic preses en sortides escolars, elements que relacionessin llocs amb biografies de matemàtics o matemàtiques, catàlegs de museus científics, objectes curiosos que permetin lectures matemàtiques... Això seria un intent d'anar creant una base per a *matematitzar les sortides* de mica en mica: des d'informació de la Villette de París al Màgic Math Circus anglès, del Cosmocaixa de Barcelona al Museu de Tecnologia de Munic, del Conservatoire d'Arts et Métiers de París, a la cúpula geodèsica del Museu Dalí de Figueres, de l'exposició Atractor de Lisboa al Museu d'Història de la Ciència de Florència... A vegades sembla que fora de l'institut no hi ha matemàtiques!

Hauríem de disposar de mitjans audio-visuals que fossin fàcilment accessibles, no tan sols per al professorat sinó també per a l'alumnat:

- Una pantalla de projecció.
- Un retroprojector amb una petita reserva de transparències i alguns retoladors permanents i no permanents de diferents colors.
- Un equip de televisió.
- Un reproductor de vídeo i de DVD amb una col·lecció d'enregistraments d'interès matemàtic.
- Un canó de llum connectat al vídeo i a un ordinador.

- Una càmera fotogràfica i una de vídeo.
- Depenent de les experiències concretes que es desenvolupin pot haver-hi un equipament diferent. Per exemple, hi ha llocs que reben les fotografies del *Meteosat* mitjançant una antena parabòlica i les analitzen a classe. També podem necessitar un projector de diapositives encara que cada vegada s'usa menys freqüentment.

Els mitjans anteriors, en part, se superposen amb eines corresponents a l'àrea de les TIC que hauran d'estar molt presents en el nostre laboratori. Malgrat que no és l'objectiu d'aquest treball, a continuació n'esmentem algunes que resulten imprescindibles:

- Ordinadors, impressora, escàner, altaveus...
- Connexió a internet. Seria la finestra virtual de la nostra aula. Cal esmentar aquí la gran quantitat d'aplicacions en línia que estan al nostre abast en pàgines com l'*edu365*. Entre aquestes aplicacions volem destacar la calculadora *Wiris* o els materials de l'entorn *Clic* com el *Geoclic*.
- Una bona col·lecció de programes. En citem alguns tan sols com a exemples:
 - Aplicacions d'ús general: editor de textos, base de dades, full de càlcul, productori de presentacions...
 - Aplicacions matemàtiques generals com *Mathematica*, *Mathcad*, *Derive*... i aplicacions específiques com els programes de construcció geomètrica *GeoGebra*, *Cabri Géomètre*, *Cinderella*... o algun paquet estadístic com el *Minitab*.
 - Software per poder programar, per exemple, en *C* o en *Java*. Tant el *C* com el *Java* tenen entorns de desenvolupament integrat que donen moltes facilitats a la programació.

Aniria bé disposar d'una col·lecció de calculadores del mateix tipus i, si pogués ser, d'una calculadora amb pantalla retroprojectable o d'algun software que simuli el teclat.

Si el professorat hi és afeccionat, aniria bé comptar amb una taula de dibuix amb eines adients: regles, escaires, cartabons, paral·lex, etc. Malgrat que el *GeoGebra*, el *Cabri Géomètre* o el *Cinderella* ja són un ajut magnífic per fer construccions gràfiques cal reconèixer que el paper i el rotring, per a algunes persones, tenen el seu encant.

Hauríem de tenir cura especialment de la decoració de les parets. Permeteu-me alguns suggeriments:

- Donant la volta a l'aula hi haurien d'haver els primers decimals del número π i del número e .
- Hi hauria d'haver pòsters matemàtics abundants: fractals, matemàtiques a la natura, matemàtiques en els carrers i en els parcs, algun gravat d'Escher, figures impossibles... L'editorial anglesa *Tarquin* té alguns pòsters molt bonics.
- Pel que fa a la història de les matemàtiques, en una paret gran, aniria bé tenir-hi un fris cronològic de les matemàtiques i pòsters amb imatges de grans

matemàtics dels quals l'alumnat de secundària en pugui tenir referències: Pitàgores, Thales, Gauss, Euler, Newton, Pascal, Descartes, Laplace...

- En la decoració no hi haurien de faltar els sòlids platònics i potser alguna frase de *El Timeu* de Plató.
- També podríem tenir una escala d'ordres de magnitud amb potències de 10.
- En algun lloc destacat hauria d'haver-hi: $i = \sqrt{-1}$. Així mateix, com una porta oberta al misteri, també podríem tenir un pòster amb la igualtat $e^{\pi} = -1$. També convindria tenir alguna referència al número Φ i a la proporció àuria.

En un lloc recollit de l'aula aniria bé tenir-hi l'*espai dels reptes*: un suro amb entre cinc i deu enunciats de problemes curiosos, unes taules de treball i una urna on cada alumne/a que ho desitgés, dipositaria la seva solució a un dels problemes. Periòdicament es canviarien els problemes, es posarien les solucions dels del període anterior i es podria donar un premi per sorteig entre les solucions correctes.

Caldria comptar amb una col·lecció de patrons i aparells de mesura per tal que l'alumnat es familiaritzés amb la magnitud de les diferents unitats: un metre, un recipient d'un litre, un pes d'un gram i d'un quilogram, un decímetre cúbic, un metre cúbic... una cinta mètrica, un rodòmetre, unes balances amb peses, un petit dinamòmetre, un o més goniòmetres...

Una part del laboratori hauria de fer la funció de *ludoteca matemàtica*. Amb un armari que contingués jocs matemàtics: trivials matemàtics, jocs d'escacs, puzles topològics, tangrams diversos, pentaminós, hexaminós, trencaclosques, peces que cal encaixar per donar figures tridimensionals, nusos que cal desfer i refer, torres de Hanoi, etc.

També caldria comptar amb suports generals com paper, cartró, cartolina, cartró-ploma i amb instruments per tallar, per perforar i per enganxar: estisores, cúters, coles, grapadores...

I, naturalment, molts d'objectes d'ús quotidià que convidin a lectures matemàtiques i materials d'ús específic que puguin servir per generar un concepte, per exemplificar, per construir, per plantejar un problema... Una bona part del present treball se centra en catalogar i classificar aquests materials. Per tant aquí no ens aturarem en aquest apartat.

Aspectes generals d'organització

Els que cada dia vivim l'escola sabem que la descripció anterior pot ser molt bonica però que disposar d'un laboratori com aquest és molt difícil i que el seu funcionament i manteniment encara poden ser-ho més. Per això no voldríem passar per alt algunes consideracions de tipus organitzatiu:

- El component més fonamental amb el qual hauríem de comptar és la il·lusió i l'entusiasme del professorat de matemàtiques i la comprensió i col·laboració de tota la comunitat escolar.
- Molts dels nostres centres tenen una manca d'espai que pot semblar comprometre aquesta idea. Tanmateix cal tenir en compte que disposar d'una aula específica no necessàriament equival a ocupar un nou espai si s'hi fan suficients classes i són

els alumnes els que s'hi desplacen. Hi ha molts centres, especialment en altres països però cada cop més també a casa nostra, on aquestes aules són les habituals. Aquesta solució té l'avantatge d'evitar, entre classe i classe, el transport de materials a vegades poc manejables. Recordem alguna de les frases del punt 604 de l'Informe Cockcroft: *"No obstant, són moltes les escoles secundàries que no disposen encara d'aules adequades i suficients per a l'ensenyament de les matemàtiques. Diversos professors amb qui vàrem conversar en les nostres visites ens varen cridar l'atenció sobre aquest punt, esmentant les dificultats de traslladar d'una aula a una altra tot l'equip necessari"*.

- Fora de l'horari de classes l'aula podria estar oberta algunes hores per tal que l'alumnat que ho desitgés pogués anar-hi. En això hi ha experiències com els clubs de problemes o els primers temps de les aules d'informàtica. Naturalment caldria que hi hagués sempre una persona responsable que, en cas de necessitat, pogués assessorar a l'alumnat. Aquestes hores podrien tenir per als docents consideració de guàrdies. També podrien estar a càrrec d'estudiants universitaris/es de ciències becats/des pel centre o per l'Associació de Mares i Pares d'Alumnes.
- Entre el professorat del Departament de Matemàtiques hi hauria d'haver una persona encarregada del manteniment del nostre laboratori: catalogació i ordenació dels materials, posada al dia dels taulers d'anuncis, seguiment dels problemes de l'*espai dels reptes*, gestió de la compra de nous materials... En els horaris del centre aquesta feina podria tenir la consideració de tutoria tècnica.
- Resultaria útil disposar d'un quadre horari d'ús i reserva del laboratori on hi constessin les hores fixes en què serà utilitzat i els espais de temps per poder-lo ocupar eventualment. Aquest quadre hauria d'estar molt a l'abast del professorat de matemàtiques per tal de poder treure'n el màxim profit.
- En cada sessió caldrà atendre especialment l'ordre i la netedat del laboratori a fi que els grups que l'usin posteriorment el trobin en condicions adequades.

Som conscients que aquest apartat té alguna cosa de somni però creiem que és important anar avançant cap a la idea de disposar d'espais específics *"on el professorat s'esforça a fer les matemàtiques més entenedores cada cop per a més persones a través de relacionar teoria i pràctica"*¹⁶.

¹⁶ Lindsay, R. L. (ed.). *Mathematics Laboratories in Schools*. Londres: G. Bell & Sons Ltd., 1968.

6. Una proposta de protocol d'activitats experimentals en matemàtiques

Els recursos materials poden jugar diferents papers a les classes de matemàtiques. És freqüent que sigui el professorat qui gestioni directament aquests recursos incorporant-los a dinàmiques docents més o menys expositives per tal de visualitzar, motivar, aplicar... els conceptes matemàtics que s'estan treballant. Tanmateix també poden immersir-se en treballs pràctics que realitzi l'alumnat individualment o en grups reduïts en un ambient de laboratori més o menys guiat.

Així doncs hi ha molts tipus d'activitats pràctiques. Aquí desenvoluparem un protocol complet per a activitats de laboratori malgrat que no són les activitats pràctiques més habituals que desenvolupem en les nostres classes. Tanmateix pensem que, establert aquest marc ampli, el professorat modularà el protocol per tal d'adaptar-lo al tipus d'activitats pràctiques que es desenvolupin.

En un entorn de laboratori serà important tenir en compte alguns aspectes específics com els que a continuació citem:

- El nombre d'alumnes és molt més crític que en les activitats més convencionals de classe. Hi ha una interacció més intensa entre alumnat i professorat i cal poder seguir de prop el treball que es realitzi. Normalment es treballarà en equips de dos o tres alumnes.
- En un entorn de laboratori, habitualment els alumnes disposaran de guions de la pràctica que poden ser més o menys detallats: des de descripcions molt generals amb pocs requeriments fins a seqüències molt pautades d'accions amb abundants qüestions que cal respondre. En aquest treball es presenta una mostra d'una vintena de guions. Així mateix en cadascuna de les fitxes que componen el catàleg que constitueix el nucli del nostre estudi es fa una proposta d'activitats que, en alguns casos, és molt extensa i detallada. A partir d'aquestes propostes el professorat podrà elaborar els seus propis guions atenent al nivell de l'alumnat i al tipus i grau de pautat que consideri més adient.
- En iniciar una sessió de laboratori cal que els alumnes i les alumnes llegeixin atentament el guió, que cada equip comprovi que disposa dels materials que en ell s'indiquen i que responguin a les qüestions prèvies si es plantegen.
- Tot treball experimental representa un camí que cal fer amb reflexió i que té tres etapes: *fer*, *deduir* i *comunicar*. Convé habitar l'alumnat a seguir els guions o les instruccions que es donin, realitzar les accions que es proposin sense pausa però també sense presses, reflexionar sobre el que s'està fent, tractar amb cura el material, extreure conseqüències del que s'observa i saber-ho comunicar als companys i companyes i/o al professorat. En particular els alumnes i les alumnes hauran de deixar constància escrita en la seva llibreta de la pràctica que es realitzi. Si es tracta d'una activitat puntual de classe hauran d'incorporar-ho als apunts habituals. Si es tracta d'una activitat de laboratori hauran de fer un informe i/o, en alguns casos, completar el guió que enganxaran a la llibreta.
- En els informes o guions caldrà tenir cura de l'expressió escrita i dels dibuixos i les representacions gràfiques, usant si és el cas, estris de dibuix (regle, escaire...) i/o paper mil·limetrat. A vegades l'informe o el guió es completaran a casa.

- En l'avaluació el professorat tindrà en compte la participació en els treballs pràctics realitzats i els informes o guions de pràctiques. Vegi's el capítol següent.
- En les sessions de laboratori caldrà posar atenció a l'ordre i pulcritud de la instal·lació, deixant les taules netes i guardant els materials emprats.

A continuació presentem una proposta de protocol que pot ajudar a portar una activitat experimental a classe i que aprofundeix en el que ja s'apuntava a l'escrit esmentat "*Materials experimentals per al laboratori de matemàtiques*" de l'autor d'aquest informe. La proposta es planteja en tres blocs ordenats cronològicament: abans de l'activitat, durant l'activitat i després de l'activitat. No es tracta de passos imprescindibles sinó tan sols de suggeriments merament indicatius que poden ajudar-nos a treure un bon profit didàctic de l'activitat. Sovint els professors i les professores els fem de manera tan natural que no ens ho hem de plantejar com una seqüència rígida. En tot cas es tracta de passos pensats per activitats àmplies de laboratori. En activitats pràctiques més puntuals incorporades a les classes habituals el professorat haurà de tenir en compte tan sols alguns dels passos que s'esmenten segons el seu criteri.

Abans de l'activitat

1. **Seleccionar l'activitat** en funció dels continguts que volem treballar, dels objectius que ens proposem assolir, de l'alumnat a qui va dirigida... En el capítol onzè d'aquest treball es presenta un recobriment del currículum que pot ajudar en aquesta tasca.
2. **Explorar didàcticament l'activitat:** possibilitats que ens ofereix, aspectes que volem treballar especialment, coneixements previs necessaris, possibles enllaços interdisciplinaris, tipus d'agrupament dels alumnes, disposició de les taules... Aquesta és una etapa essencial que ha de cobrir el professorat. Tal com diuen F. Hernán i E. Carrillo¹⁷: "*Per al professor aquest és clarament un procés de reflexió que es produeix, preferentment, abans de la classe. I com a reflexió que precedeix a una acció, el seu tret característic serà inquisitiu: Què es pot fer amb...? Quines preguntes puc formular a partir de...? Per a quins alumnes és adequat...? Quin camí cal escollir quan...?*". Sovint tot aquest procés es fa de manera implícita, però és important tenir-lo en compte per assegurar millor l'èxit de l'activitat.
3. **Preparar els materials necessaris.** Convé fer l'exercici d'identificar tots els materials que ens caldran per fer l'activitat pràctica. Sovint pensem en uns objectes singulars que caracteritzen l'activitat i ens oblidem d'altres objectes o eines que, sense ser els més rellevants, són igualment indispensables: estisores, cartolines, cola, fil, cúter... Si no som una mica estrictes en aquest exercici després l'activitat pràctica ha de ser interrompuda i perd el seu ritme.
4. **Elaborar guions de l'activitat** més o menys dirigits. Per a activitats puntuals de classe no és necessari disposar de guions perquè es desenvolupen sota el control directe del professorat com a elements integrats en el fil de la classe. Per a activitats de laboratori que tinguin durades llargues és interessant que l'alumnat disposi d'una certa documentació que pot ser des d'un guió descriptiu detallat que

¹⁷ Hernán, F., Carrillo, E. *Recursos en el aula de Matemáticas*, pàg. 22.

conduïx l'alumne pas a pas de manera absolutament pautaada, fins a un simple text de presentació del que es farà.

5. **Incorporar bé l'activitat en el desenvolupament del programa.** Si no es té cura d'aquest aspecte les activitats pràctiques acaben adoptant un caràcter d'excepcionalitat que les desvincula del normal desenvolupament curricular i, en conseqüència, fa perdre eficàcia didàctica. Convé evitar que els RMAE apareguin com a falques aïllades, com a meres curiositats, com a focs d'artifici... Si es tracta d'una activitat de laboratori que requereixi tota una classe, la sessió anterior a l'activitat ha de deixar-li les portes obertes tot assegurant que hi quedi lligada d'una manera natural.

Durant la realització de l'activitat

1. **Presentar l'activitat** per part del professor o de la professora. A vegades presentacions excessivament descriptives poden apagar una mica la curiositat i la voluntat d'exploració. Convé no explicar-ho tot, donar "espai" per al descobriment i evitar contestar preguntes que el propi alumnat encara no s'ha formulat. Voltaire deia que *"l'art de ser avorrit consisteix a dir-ho tot"*.
2. **Donar temps** per a què l'alumnat entri en l'experiència que se li proposa i en tregui profit. Sovint el temps del professorat passa a velocitat diferent que el temps de l'alumnat i, tal volta sotmesos a la pressió del programa, volem cremar etapes indispensables. La pressa pot destrossar la millor activitat i la serenor ambiental és una bona base per a l'èxit. A vegades la descripció prematura del que hem de descobrir elimina el procés de descobriment. En el decàleg de George Pólya podem llegir: *"No desvelis tot el teu secret d'una vegada; deixa que els estudiants facin conjectures abans que tu diguis la solució; deixa'ls esbrinar per si mateixos tant com sigui possible."*
3. **Deixar-se sorprendre per les noves lectures que apareguin i intentar treure'n "suc didàctic"**. No sempre la interpretació que un alumne o una alumna fa d'una determinada activitat pràctica és la que el professorat esperava però té el valor de ser la que aquell alumne o aquella alumna ha creat per si mateix/a. A vegades no serà correcta i hauré d'encarrilar-la o reenfocar-la. A vegades sortirà del camp conceptual que preteníem treballar a priori i ens donarà l'oportunitat d'endinsar-nos en altres àrees inesperades i seguir camins no previstos però molt fecunds. Pere Puig Adam en el seu llibre *El material didàctic actual, presentado en la XI reunión de la Comisión Internacional para el Estudio y la Enseñanza Matemática y Exposición Internacional simultánea* ens diu que convé *"deixar que el model exerceixi espontàniament la seva acció en diàleg amb el nen i acostumar al professor a no interferir ni forçar aquest diàleg, per tal que el model no sigui un simple mitjà de transmissió sinó un agent suggeridor d'adquisició i conquesta."*
4. **Animar els alumnes i les alumnes per tal que expliquin el que han fet**, el que han descobert, el que han deduït, els dubtes que han sorgit... que ho comentin amb els companys i les companyes, que ho discuteixin, que contrastin idees i arribin a possibles conclusions que el professorat recollirà, reconduirà, resumirà o aclarirà per tal de treure'n el major profit. Serà bo procurar que tothom participi animant, per un costat, a les persones més tímides o insegures per tal que donin la seva opinió i evitant, per l'altre, que unes poques persones tinguin un protagonisme aclaparador que impedeixi la participació de la resta.

5. **Ordenar i endreçar els materials** a fi de deixar el laboratori com s'ha trobat. Si aquest espai és usat de manera freqüent per professorat diferent serà important que hi hagi un interès compartit per mantenir-lo ordenat i net. Cal deixar els objectes que s'hagin utilitzat en les seves lleixes, procurar que les taules no es malmetin, intentar que les cadires o tamborets quedin ben posats al seu lloc... Es tracta d'una actitud que sembla molt bona per ser transmesa implícitament a l'alumnat com un hàbit transversal.
6. **Procurar que en quedi alguna cosa escrita** sigui directament en els quaderns dels alumnes, sigui elaborant informes, sigui empenant guions pautats que, un cop corregits, també hauran d'enganxar-se als quaderns. Si és cert que allò que es coneix bé s'expressa correctament sembla que també és cert que l'esforç per expressar correctament una idea millora el seu coneixement. Convé que l'alumnat tingui cura de la seva expressió tant pel que fa a l'ús correcte de la sintaxi, l'ortografia i el lèxic com a la coherència i lògica interna del seu fil argumental per tal de comunicar bé allò que vol dir. Com diu Puig Adam en el novè punt del seu decàleg: *“Procurarem que l'expressió de l'alumne sigui traducció fidel del seu pensament.”*

Després de l'activitat

1. **Enllaçar bé l'activitat amb la classe següent.** Aquest primer punt del bloc *“Després de l'activitat”* es correspon amb el darrer punt del bloc *“Abans de l'activitat”* i, com aquell, té la finalitat d'assegurar un sòlid ancoratge dels RMAE en el desenvolupament habitual del currículum disminuint l'efecte d'aïllament que aquestes activitats, de vegades, poden tenir. Així, en la classe següent, procurarem esmentar el que s'ha observat en la pràctica, donar-hi rellevància, aprofitar el que s'ha fet, treure'n conseqüències. Es tracta, en definitiva, d'evitar que l'activitat pràctica sigui tan sols un parèntesi desconnectat del fil conductor del curs.
2. **Atorgar valor a l'activitat realitzada incorporant-la a l'avaluació.** Tinguem en compte que l'alumnat valorarà l'activitat si nosaltres la valorem i, en cas contrari, li resultarà més anecdòtica. Naturalment, com s'ha dit al principi, ens estem referint a activitats àmplies en un entorn de laboratori no a activitats puntuals incorporades a l'explicació del professorat o a altres accions de classe. Serà bo tenir en compte el tipus i nivell de participació dels alumnes i de les alumnes en l'activitat i, si és el cas, corregir les respostes al guió o l'informe que en resulti. Dediquem a aquest aspecte el capítol setè del present treball.
3. **Avaluar el propi recurs material o la pròpia activitat experimental** tot cercant elements que podrien millorar-la i identificant aspectes que convindria corregir en aplicacions posteriors. En aquesta tasca ens hi poden ajudar les consideracions que es fan en el capítol vuitè del present treball. Pot ser convenient deixar escrites aquestes reflexions en uns petits fulls d'avaluació que puguin ser consultats pel professorat del departament abans de portar-ho de nou a classe. Vegi's l'apartat 8.2.

Tanmateix —encara que sembli obvi volem insistir-hi— l'element més important per assegurar l'èxit de qualsevol activitat pràctica serà, com sempre, el *“saber fer”*, *“el bon ofici”* dels professors i les professores que la portin a terme. Aquell sentit, difícil de descriure però que està en el nucli de la professió docent, que, en temps real, va aportant una percepció rica de la marxa de la classe (en alguns àmbits es parlaria de

“*feeling*” o de “*power punch*”) a partir de la qual es va adaptant la seqüenciació, la dinàmica i el ritme de les activitats que es proposen.

Voldria acabar aquest apartat fent esment, a tall de resum, del *decàleg de la Maria Antònia Canals per treballar amb els materials manipulables a primària*. Es tracta d'un munt d'idees interessants que són igualment aplicables a secundària i que tenen al darrera l'experiència d'una de les persones que millor coneix l'educació matemàtica a casa nostra:

1. Presentar una proposta de treball, si pot ser en forma d'una petita “*investigació*”.
2. Convidar a l'acció, deixant ben clar què és el que es tracta de fer.
3. Observar els nens i nenes, les seves reaccions, els seus interessos i acollir les possibles idees i iniciatives.
4. Estar disposat a canviar el camí previst per a seguir-les, acceptant l'imprevist.
5. Demanar l'estimació de resultats en les mesures i el càlcul (base del càlcul mental) i l'anticipació de fenòmens geomètrics en l'espai.
6. Provocar i acompanyar la descoberta d'alguna cosa nova. Quan l'han feta, meravellar-se'n i felicitar-los calorosament.
7. Potenciar el diàleg, invitant els alumnes a què expressin allò que han fet i que han vist. Demanar-los una explicació oral coherent.
8. Resumir allò que s'ha fet, s'ha dit, i sobretot allò que s'ha après. Ajudar a formular conclusions.
9. Relacionar-ho amb coses que s'han treballat anteriorment i, a vegades, amb altres activitats (calculadora, estadística...).
10. Opcionalment passar alguna cosa a llenguatge escrit, primer col·loquial i després matemàtic (amb xifres i signes).

7. Incorporació de les activitats experimentals en l'avaluació de l'alumnat

Hem d'observar aquí, de nou, que aquest apartat està pensat especialment per activitats àmplies que es realitzin en un entorn de laboratori, entenent que, des d'aquest marc més general, el professorat farà les adaptacions que cregui oportunes a casos més concrets. Tanmateix la majoria d'ocasions en què fem RMAE ho fem de manera integrada en les activitats habituals de classe (una visualització, una aplicació, una demostració dinàmica...). En molts d'aquests casos l'avaluació de les activitats queda naturalment integrada en l'avaluació dels continguts o de les competències que, a través d'elles, volem generar.

Donada la poca tradició d'ús del laboratori que hi ha en l'educació matemàtica a secundària, en aquest apartat, hem cercat referents en el camp de les ciències experimentals que, per la pròpia naturalesa de la seva matèria, gaudeixen d'una cultura de laboratori més àmplia que nosaltres. En aquest sentit agraeixo especialment la col·laboració de la professora Pietat Casadevall que ens ha ofert valuoses orientacions. També vull agrair la col·laboració del professor Javier Marquina en el pilotatge de les graelles d'avaluació i d'autoavaluació.

En un entorn de laboratori de matemàtiques l'avaluació d'activitats experimentals es farà a partir de dos elements:

1. Les observacions sobre el grau de participació i interacció de l'alumne en les activitats proposades.
2. Els registres escrits que en resultin.

En primer lloc convé identificar aspectes que podem contemplar en l'avaluació d'activitats pràctiques de laboratori. Alguns aspectes ja s'han apuntat en el capítol sisè dedicat a proposar un *protocol de pràctiques*. Cal tenir en compte que es tracta d'un llistat amb certa pretensió d'exhaustivitat i que no totes les activitats permetran avaluar cadascun d'aquests ítems. Cada activitat tindrà uns aspectes privilegiats que podran ser avaluats fàcilment i altres que no podran ser avaluats. En tot cas és important que el professorat no se senti aclaparat pels mecanismes d'avaluació. Cal que aquests siguin àgils i fàcils de portar a terme.

A continuació es presenta un llistat d'aspectes que poden tenir-se en compte en l'avaluació i que formulem en termes d'objectius a assolir. Agrupem aquests ítems en quatre blocs que corresponen a quatre àmbits d'observació.

Aspectes a tenir en compte durant la realització de l'activitat:

- Seguir les instruccions del professorat.
- Llegir comprensivament els textos i preguntes que es proposin.
- Seguir les pautes del guió o realitzar un pla de treball.
- Tenir cura en la manipulació dels materials.
- Aplicar coneixements teòrics a l'activitat que es proposa.

- Mostrar creativitat i aportar idees alternatives.
- Interpretar correctament el que s'observa i treure'n conclusions.
- Respondre correctament a les qüestions que es plantegin en el transcurs de l'activitat.
- Prendre notes que permetin elaborar posteriorment l'informe o iniciar-ne l'elaboració.
- Recollir, ordenar i retornar el material al seu lloc.

Aspectes a tenir en compte referents al contingut dels informes o guions que es deriven de l'activitat:

- Descriure correctament l'objectiu de l'activitat i les accions realitzades.
- Respondre correctament a les qüestions plantejades en el guió.
- Assolir i expressar conclusions matemàtiques de l'activitat.
- Utilitzar, si és necessari, unitats de mesura adequades.
- Representar correctament dades a través de taules, gràfics, esquemes o dibuixos, si cal.
- Buscar, en fonts externes, informació sobre l'activitat, per tal de completar l'informe o el guió, si cal.

Aspectes a tenir en compte referents a l'expressió i la presentació dels informes i guions de l'activitat:

- Expressar per escrit les idees amb coherència, precisió i claredat, emprant el lèxic adequat.
- Donar les respostes amb una expressió gramatical correcta, amb frases ben construïdes, i atendre els aspectes ortogràfics i sintàctics.
- Tenir cura i precisió en els gràfics: usar paper mil·limetrat, indicar les variables i les unitats de cada eix, marcar les escales de valors sobre els eixos, representar correctament els punts...
- Tenir cura en la realització de dibuixos i esquemes per tal que siguin una traducció gràfica fidel de les idees que es volen expressar.
- Seguir les normes formals establertes per a la presentació de documentació escrita: inici de fulls, marges, títols, separacions...

Aspectes actitudinals.

- Mantenir una actitud d'atenció, participació i interès durant la realització de l'activitat, fent intervencions rellevants i preguntant, si cal.
- Col·laborar constructivament amb l'equip de treball.
- Mostrar gust pel rigor i la precisió.
- Presentar puntualment l'informe de pràctiques.
- Mostrar interès en una presentació pulcre i ordenada dels materials.

El llistat anterior té el valor de contemplar una bona quantitat d'aspectes que poden tenir-se en compte en l'avaluació de treballs pràctics en situació de laboratori però ens sembla excessivament ampli per permetre generar un instrument àgil i pràctic d'avaluació. Per aquesta raó hem resumit els aspectes anteriors en vuit objectius que tenen una formulació una mica més complexa però que s'haurien d'avaluar d'una manera global, sense entrar en el detall de cadascun dels elements que s'apunten en el seu enunciat. Els indiquem a continuació també agrupats per àmbits d'observació i afegint-hi un petit comentari.

Aspectes a tenir en compte durant la realització de l'activitat:

Llegir comprensivament els textos que es proposin i seguir les pautes del guió i les instruccions del professorat, tenint cura en la manipulació dels materials.

Interpretar correctament l'activitat, treure'n conclusions, respondre oralment a les qüestions que es plantegin i prendre notes que permetin elaborar l'informe.

En la temporització de l'activitat el professorat haurà de donar temps suficient per tal que l'alumnat vagi realitzant les accions proposades i preveure uns minuts al final per a recollir el material i ordenar el laboratori. Un cop ha tocat el timbre del final de classe aquestes operacions es fan molt difícils.

A vegades ens sorprendran les observacions i conclusions de l'alumnat ja que, en una pràctica pensada per treballar un contingut concret, potser per a un alumne o una alumna hagi estat molt més significatiu i rellevant un detall del procediment seguit o algun altre aspecte col·lateral de l'activitat.

Aspectes a tenir en compte referents al contingut dels informes o guions que es deriven de l'activitat:

Respondre correctament per escrit a les qüestions plantejades i extreure conclusions adequades.

Representar dades correctament a través de taules, gràfics, esquemes o dibuixos, si cal.

En aquest apartat ens referim a continguts matemàtics específics. Naturalment caldrà contemplar la utilització d'unitats correctes i amb l'abreviatura pròpia de cada unitat. En avaluar aquest aspecte es convida l'alumnat a reflexionar sobre la naturalesa dels resultats que s'obtenen i el fet que hi ha valors que no tenen unitats, com per exemple, l'error relatiu o les relacions trigonomètriques.

Aspectes a tenir en compte referents a l'expressió i la presentació dels informes i guions de l'activitat:

Expressar les idees amb coherència, precisió i claredat, tot emprant un lèxic i una

expressió gramatical correctes.

Seguir les normes formals establertes amb ordre, netedat i bona presentació tant dels escrits com dels gràfics, dibuixos i esquemes.

A part de l'explicació escrita es pot fer un esquema, un gràfic, un dibuix... però aquestes eines de descripció mai substitueixen la necessària explicació amb paraules, expressant-se amb propietat a través de frases completes, ben construïdes i que tinguin sentit. Es tracta d'aspectes transversals que hem d'atendre acuradament.

Aspectes actitudinals.

Mantenir una actitud interessada, atenta i participativa durant l'activitat tot col·laborant amb l'equip de treball i aportant idees amb creativitat.

Presentar puntualment l'informe de pràctiques i mostrar gust pel rigor, la precisió, la pulcritud i l'ordre.

La novetat que, en matemàtiques, pugui suposar una activitat pràctica de laboratori no ha de significar una disminució de les condicions de participació. En general l'actitud de l'alumnat en activitats d'aquest tipus és positiva i, sense perdre l'ambient agradable que sol crear-s'hi, convé que es concreti en treball seriós i responsable dins una dinàmica d'equip on tothom col·labori, escoltant totes les aportacions i sabent fer les pròpies.

Identificats els aspectes que podem avaluar, a continuació proposem dues graelles per tal de facilitar l'avaluació de les successives activitats pràctiques en un entorn de laboratori. El seu ús dependrà de la sistemàtica i periodicitat d'aquest tipus de treballs. La primera graella ("*graella d'avaluació*") sembla força indispensable per a fer un seguiment d'aquestes activitats. La segona graella ("*graella d'autoavaluació*") està pensada com un exercici més per a l'alumnat en la línia d'educar l'autoconsciència del seu treball. Entenem que l'ús d'aquesta segona graella és molt més opinable però es tracta tan sols de possibles propostes. A continuació descrivim aquestes dues graelles i les mostrem en dos fulls independents:

- **Una graella d'avaluació** que portarà el professorat on es valoraran els vuit aspectes que acabem d'identificar. Per a cada ítem s'usaran tan sols tres símbols: B (Bé), R (Regular) i M (Malament). Al final s'atorgarà una qualificació numèrica global que podrà incorporar-se, en la proporció que es consideri convenient, a l'avaluació sumativa de la matèria.
- **Una graella d'autoavaluació** en la qual el propi alumne o la pròpia alumna valorarà els mateixos aspectes que s'acaben d'identificar. Un cop fet el seu informe l'alumne/a emplenarà aquesta graella emprant també els símbols: B (Bé), R (Regular) i M (Malament) i atorgant-se la nota numèrica global que creu merèixer. Observi's que la redacció dels aspectes que s'avaluen ara és en primera persona. Al final, com a senyal de responsabilitat individual, cada alumne/a signa la seva autoavaluació. Per un costat es tracta d'un exercici de

presa de consciència molt enriquidor pel propi alumnat i per l'altre d'un document que permet al professorat conèixer la percepció que es té del treball realitzat.

Per a una pràctica referent a l'ús d'un quadre de fraccions unitàries realitzada amb un grup de setze alumnes hem comparat l'autoavaluació d'alguns alumnes i algunes alumnes amb l'avaluació del professor i és sorprenent observar que no són gens autocomplaents i que, en molts casos (especialment els bons alumnes i les bones alumnes), la seva qualificació és pitjor que la que els atorga el professor. En concret, de mitjana, la qualificació del professor ha estat 0.25 punts per sobre la de l'alumnat.

En els dos fulls següents es mostren les dues graelles a les quals ens hem estat referint.

Activitats de laboratori de Matemàtiques. Graella d'avaluació

Alumne/a:

Curs:

Grup:

S'usaran els símbols: B (Bé), R (Regular) i M (Malament)

Àmbit d'observació	Aspectes d'avaluació	Pràctica 1 Data:	Pràctica 2 Data:	Pràctica 3 Data:	Pràctica 4 Data:
Durant la realització de l'activitat	Llegir comprensivament els textos que es proposin i seguir les pautes del guió i les instruccions del professorat, tenint cura en la manipulació dels materials. Interpretar correctament l'activitat, treure'n conclusions, respondre oralment a les qüestions que es plantegin i prendre notes que permetin elaborar l'informe.				
Informe de l'activitat: Contingut.	Respondre correctament per escrit a les qüestions plantejades i extreure conclusions adequades. Representar dades correctament a través de taules, gràfics, esquemes o dibuixos, si cal.				
Informe de l'activitat: Expressió i presentació	Expressar les idees amb coherència, precisió i claredat, tot emprant un lèxic i una expressió gramatical correctes. Seguir les normes formals establertes amb ordre, netedat i bona presentació tant dels escrits com dels gràfics, dibuixos i esquemes.				
Actituds	Mantenir una actitud interessada, atenta i participativa durant l'activitat tot col·laborant amb l'equip de treball i aportant idees amb creativitat. Presentar puntualment l'informe de pràctiques i mostrar gust pel rigor, la precisió, la pulcritud i l'ordre.				
QUALIFICACIÓ NUMÈRICA GLOBAL					

Activitats de laboratori de Matemàtiques. Graella d'autoavaluació

Alumne/a:

Curs:

Grup:

S'usaran els símbols: B (Bé), R (Regular) i M (Malament)

Àmbit d'observació	Aspectes d'autoavaluació	Pràctica 1 Data:	Pràctica 2 Data:	Pràctica 3 Data:	Pràctica 4 Data:
Durant la realització de l'activitat	Llegeixo comprensivament els textos que em proposen i segueixo les pautes del guió i les instruccions del professorat, tenint cura en la manipulació dels materials.				
	Interpreto correctament l'activitat, en trec conclusions, responc oralment a les qüestions que em plantegen i prenc notes que em permetin elaborar l'informe.				
Informe de l'activitat: Contingut.	Responc correctament per escrit a les qüestions que em plantegen i extrec conclusions adequades.				
	Represento dades correctament a través de taules, gràfics, esquemes o dibuixos, si cal.				
Informe de l'activitat: Expressió i presentació	Expresso les idees amb coherència, precisió i claredat, tot emprant un lèxic i una expressió gramatical correctes.				
	Segueixo les normes formals establertes, amb ordre, netedat i bona presentació tant dels escrits com dels gràfics, dibuixos i esquemes.				
Actituds	Mantinc una actitud interessada, atenta i participativa durant l'activitat, tot col·laborant amb el meu equip de treball i aportant idees amb creativitat.				
	Presento puntualment l'informe de pràctiques i mostro gust pel rigor, la precisió, la pulcritud i l'ordre.				
QUALIFICACIÓ NUMÈRICA GLOBAL QUE CREC MERÈIXER					
SIGNATURA					

8. Indicadors de qualitat i avaluació de RMAE

Els professors i les professores, quan sortim d'una classe, tenim una percepció, més o menys explícita, de com ha anat, de quin ambient s'ha creat, de quin profit educatiu n'hem tret, de quin nivell de participació s'ha generat... i també, en particular, de com han funcionat els RMAE que hem emprat, quina eficàcia didàctica han mostrat, quines dificultats hem tingut, quins avantatges ens han aportat... Les reflexions que fem sobre aquestes experiències aniran condicionant la pràctica futura i, en definitiva, configurant la nostra manera de ser professionals docents. En particular la percepció que tinguem sobre el funcionament dels RMAE condicionarà la seva utilització futura. Frases com les següents, que podríem expressar nosaltres mateixos o escoltar de companys i companyes nostres en sortir de classe, són testimonis d'aquestes percepcions que tenim després d'emprar un recurs:

- *Quan han vist que en un decímetre cúbic hi cabia un litre d'aigua, és a dir, unes tres llaunes de beguda, han quedat sorpresos/es! Crec que ho recordaran tota la vida!*
- *Amb el dominó de nombres romans no s'hi han enganxat gaire!*
- *Traslladar la màquina de Galton a l'aula és tot un inconvenient: pesa molt, passadissos plens, escales, ens han caigut algunes boles... ha estat molt interessant i els ha cridat molt l'atenció, però la propera vegada anirem a fer-ho al laboratori!*
- *Estàvem treballant la idea de funció a través d'una pràctica d'emplenat d'ampolles però ha tocat el timbre i hem hagut de recollir-ho tot a corre-cuita per què teníem una altra classe. A l'hora del pati ja ho aniré a ordenar!*
- *El geomag m'ha funcionat bé però disposem de massa poques peces! Quan tinguem pressupost n'hem de comprar més!*
- *Hem fet rebotre un làser en un contorn el·líptic de focus a focus. Al principi no trobàvem el punter làser a l'armari. Resulta que estava sobre la taula del departament i no l'havia vist! Realment ha funcionat molt bé i tothom ha mostrat molt d'interès. Aquesta propietat no s'oblidarà!*

Per tal d'objectivar una mica aquestes percepcions, en el present capítol, tractarem d'identificar indicadors i de formular instruments per avaluar la qualitat dels RMAE tant en el vessant pròpiament material com en el vessant de la seva eficàcia en la comunicació docent. El tema és molt ampli i mereixeria, per si sol, una recerca extensa. En els dos apartats que segueixen intentarem fer-hi dues aportacions:

- Identificació d'indicadors de qualitat dels recursos materials en el sentit de les normes ISO.
- Criteris i instruments d'avaluació dels recursos materials a partir de la pràctica docent.

8.1. Indicadors de qualitat

Es tracta de proposar un conjunt d'indicadors de qualitat amb la màxima amplitud i objectivitat possible. En aquesta tasca ens ha estat d'ajuda la norma ISO/IEC 9126 referent a característiques de qualitat en l'avaluació de productes de software. Aquesta norma defineix un model de qualitat que, en forces aspectes, pot ser usat en l'avaluació dels recursos materials. S'estableixen sis característiques de qualitat d'un producte i, per a cadascuna d'elles, se suggereixen diverses subcaracterístiques. Nosaltres hem fet una adaptació d'aquestes característiques i subcaracterístiques als recursos materials, hem fet modificacions, hem suprimit alguns aspectes més específics del software i menys aplicables als materials i hem afegit altres aspectes que ens han semblat rellevants.

Entenem que, d'entrada, aquest plantejament pot semblar un exercici excessiu i tal volta una mica inútil, però sembla assenyat pensar que, amb el pas del temps, cada cop ens veurem més en la necessitat d'establir, també en el camp dels recursos didàctics, estàndards de qualitat i que aquest treball pot aportar-hi algunes idees.

A continuació definim, a través de preguntes, les sis característiques del model de qualitat que es proposa i, per a cadascuna, presentem un quadre amb les subcaracterístiques que es contempen acompanyades de tres elements:

- Una pregunta definidora.
- Un exemple de recurs material amb alta presència de la subcaracterística. Correspon a una resposta afirmativa a la pregunta plantejada.
- Un exemple de recurs material amb baixa presència de la subcaracterística. Correspon a una resposta negativa a la pregunta plantejada.

Tot plegat, com s'ha dit, és una adaptació de la norma ISO/IEC 9126 als recursos didàctics materials. Naturalment la proposta que es fa és molt opinable i segur que té molts d'aspectes millorables. L'hem elaborat pensant que pot resultar interessant com una aportació més en el camí d'anar establint estàndards de qualitat dins del camp al qual dediquem aquest treball.

Donada l'amplitud dels quadres següents, dediquem una pàgina a cada característica.

Característica: Funcionalitat

Posa a l'abast de l'usuari les funcions que se li requereixen?

Subcaracterístiques	Pregunta definidora	Exemple/s d'alta presència de la subcaracterística	Exemple/s de baixa presència de la subcaracterística
Adequació	Aporta clarament els conceptes que desitgem treballar i al nivell que els desitgem treballar?	La màquina de Galton per simular la campana de Gauss.	Les construccions de deltòedres amb plot, és un recurs molt vàlid i senzill d'usar però, a vegades, les formes queden una mica desdibuixades pels plecs de cartró que subjecten les cares. Altres idees (a part de la forma) poden ser molt ben treballades.
Correcció	Ofereix un alt grau d'ajustament respecte del model ideal que es vol treballar? Ofereix un alt grau de precisió en les dades que aporta?	Els àbacs com a model del funcionament del sistema de numeració amb base 10. Fixació de direccions mitjançant un punter làser.	Aparell de Hawley per simular una recta de regressió. És molt visual però té incorreccions qualitatives i quantitatives respecte del model de mínims quadrats. Dades obtingudes amb l'ús de goniòmetres.
Conformitat	El material compleix la legislació i les normes vigents?	Els àbacs.	La utilització del fum de tabac per visualitzar formes geomètriques dins de bombolles de sabó pot estar al límit d'aquesta subcaracterística.
Seguretat	El recurs no presenta cap risc per a qui l'usi, atesa la seva edat?	El tangram	Mesura d'un trajecte sobre un mapa a escala fixant un fil amb agulles. Cal atendre que no es facin mal amb les agulles. En obtenir funcions sinusoidals tallant cilindres de plastilina cal tenir cura en el maneig dels ganivets.

Característica: Usabilitat

És fàcil d'usar?

Subcaracterístiques	Pregunta definidora	Exemple/s d'alta presència de la característica	Exemple/s de baixa presència de la característica
Aprenentatge	És senzill d'aprendre com funciona?	Utilització de miralls per fer simetries.	Construcció de polígons de més de cinc costats fent nusos amb tires de paper.
Operativitat	És senzill de manipular o calen qualitats o coneixements especials?	Els reglets de Maria Antònia Canals.	Alguns aspectes de papiroflèxia. Construcció amb paper d'alguns políedres semiregulars.
Comprensió	Es comprèn fàcilment la idea que el recurs vol transmetre?	Emplenar un decímetre cúbic amb tres llaunes de refresc per tal de mostrar que hi cap un litre de líquid.	Construir, interpretar i conjecturar funcions d'emplenat d'ampolles és un recurs brillant però requereix fer un procés de comprensió no immediat.

Característica: Fiabilitat i eficàcia didàctica

Podem confiar en el recurs per tal d'assolir els objectius didàctics que ens proposem?

Subcaracterístiques	Pregunta definidora	Exemple/s d'alta presència de la característica	Exemple/s de baixa presència de la característica
Atractiu	D'entrada atrau l'atenció de l'alumnat? Provoca el seu interès?	Geometria amb bombolles de sabó.	Mostreig en votacions per extrapolar el resultat. Al principi sembla que no acaba d'atraure l'atenció. Després pot sorprendre molt.
Maduresa del recurs	Es tracta d'un recurs ben conegut, clàssic, ben testat?	Els models de políedres de fusta o de paper.	La tècnica de captura i recaptura per estimar el nombre de cigrons (per exemple) que hi ha en un quilogram de cigrons és un recurs relativament poc conegut i, en canvi, molt interessant.
Interacció	Té capacitat per interaccionar fluidament amb l'alumnat?	Els trencaclosques de càlcul mental.	A vegades hi ha magnífiques demostracions dinàmiques amb peces mòbils que són molt interessants però que permeten poca interacció amb l'alumnat especialment si es tracta de construccions excessivament sofisticades.
Dispersió	Pot provocar fàcilment dispersió en l'atenció de l'alumnat del grup?	Alguns treballs de camp que resulten prou interessants poden provocar certa dispersió en l'alumnat.	L'estudi del reflex d'un raig làser en un perfil el·líptic de focus a focus sol provocar molta concentració de l'alumnat entorn de la pràctica i, per tant, molt poca dispersió.

Característica: Eficiència

És eficient? Es defineix eficiència com el quocient entre els resultats aconseguits i l'esforç necessari o els costos per aconseguir-los. En informàtica un programa és més eficient que un altre si utilitza menys memòria o menys temps per a solucionar el mateix problema. Cal distingir eficiència d'eficàcia. Una eina eficaç és aquella que assoleix els objectius requerits. Una eina eficient és aquella que ho fa amb el mínim cost.

Subcaracterístiques	Pregunta definidora	Exemple/s d'alta presència de la característica	Exemple/s de baixa presència de la característica
Tipus de materials que s'utilitzen	Calen materials sofisticats per construir o per utilitzar el recurs?	El geomag és un recurs molt bonic però que utilitza uns imants molt potents que encara són força cars en el mercat. Hi ha productes semblants però no funcionen tan bé.	Una branca d'heura ens permet estudiar la relació entre amplada i llargada de les diferents fulles i obtenir un model de funció lineal. És un material ben simple.
Comportament temporal	Requereix molt de temps per què el recurs faci la seva funció?	Les fitxetes de colors per treballar la combinatòria són molt eficaces però necessiten dues o tres classes per anar aportant tot el que poden oferir.	Les visualitzacions geomètriques de les identitats notables són recursos per usar en un temps molt curt.

Característica: Portabilitat

És fàcil d'obtenir, de traslladar d'un lloc a un altre, de muntar i desmuntar?

Subcaracterístiques	Pregunta definidora	Exemple/s d'alta presència de la característica	Exemple/s de baixa presència de la característica
Accessibilitat	Es tracta d'un material difícil d'aconseguir o d'accedir-hi?	Una maqueta del relleu d'un territori per tal de treballar les aplicacions trigonomètriques. A vegades pot resultar difícil d'obtenir.	Generar funcions sinusoidal tallant cilindres de plastilina és un recurs tan espectacular com fàcil d'aconseguir: plastilina, paper i un ganivet.
Muntatge i desmuntatge	És difícil de muntar o d'instal·lar i de desmuntar o de recollir?	Els trencaclosques formats per peces a vegades són francament difícils de tornar a muntar i de recollir. Cal prendre moltes precaucions per tal que les peces no es barregin i per tenir constància de com es munten o es desmunten de nou.	Treballar la probabilitat que, en tirar una xinxeta, quedi amb la punxa enlaire o de costat. És molt senzill tant de muntar-ho com de recollir-ho.
Transport	Pot transportar-se fàcilment entre aules?	Els instruments de dibuix sobre pissarra són de fàcil transport.	Una màquina de Galton gran a vegades és difícil de transportar d'una aula a una altra. Deduir perfils d'emplenat d'ampolles requereix aigua que no sempre està disponible en aules normals.

Característica: Manteniment

És fàcil de mantenir?

Subcaracterístiques	Pregunta definidora	Exemple/s d'alta presència de la característica	Exemple/s de baixa presència de la característica
Robustesa	És resistent? No es trenca, ni es desmunta ni s'espatlla fàcilment? No és fràgil?	Els diversos dominós (aritmètics, d'angles, d'àrees...) solen tenir peces resistents que no es trenquen.	La formació d'un icosaèdre a partir de tres targes àuries és molt fràgil.
Reparativitat o substitució de peces	És fàcil de reparar si es produeixen desperfectes? Les peces són fàcils de substituir?	Les construccions de petits models o d'aparells fets amb barres de mecano com el pantògraf solen reparar-se fàcilment. Les fitxes de colors per introduir els primers conceptes de combinatòria són fàcils de substituir.	En el cas de determinats trencaclosques geomètrics o tangrams diferents del xinès pot resultar difícil trobar recanvis de peces. Les piràmides i els cons de plàstic per comparar volums amb els prismes i els cilindres corresponents a vegades s'esquerden o s'escrostonen i no són gens fàcils de reparar per tal que no perdin aigua.

De cap manera els aspectes negatius que puguem observar inutilitzen o comprometen un recurs. Es tracta senzillament d'elements amb els quals cal comptar o posar-hi una especial atenció i, si és el cas, cercar-hi solucions. Vegem-ne tres exemples:

- Les dificultats de transport d'una màquina de Galton gran no han de ser un obstacle per què pugui ser utilitzada ja que es resolen fàcilment desplaçant-nos al laboratori.
- Les fitxes o peces de colors per iniciar la combinatòria requereixen força temps però donen uns resultats excel·lents.
- L'estudi de funcions d'emplenat d'ampolles i la formulació de conjetures, al principi, pot comportar alguna dificultat de comprensió però és un recurs extraordinàriament fecund. De fet tot recurs està destinat a ser fàcilment comprès però poden haver-hi recursos que requereixin una mica més d'esforç i altres que en requereixin una mica menys. Això no vol dir res sobre el valor didàctic que aporten uns i altres.

8.2. Avaluació a partir de la pràctica docent

Qualsevol acció d'ensenyament-aprenentatge és una tasca complexa i la seva avaluació encara ho és més. Intentarem enfrontar-la procurant respondre a quatre preguntes: Què avaluem? Quins aspectes avaluem? Quines fonts d'informació emprarem per avaluar? Com avaluem?

A partir de les reflexions que es fan arran de les preguntes anteriors, al final d'aquest apartat, proposem un *full d'avaluació de recursos i activitats* que, des de la consciència que simplifiquem molt una realitat prou complexa, intenta ser una eina útil i àgil en la pràctica docent. La idea d'aquest instrument és que pugui ser emprat pel professorat immediatament després d'utilitzar el RMAE i que el full es quedi en el departament per tal que pugui ser consultat per la resta del professorat abans de portar de nou aquell RMAE a l'aula. Un d'aquests fulls serà necessàriament força subjectiu –això és del tot natural i no ho hem de considerar un desavantatge sinó una riquesa– però, amb el pas dels cursos, s'aniran tenint diferents fulls d'un mateix RMAE, fets per professorat diferent, probablement amb sensibilitats docents diverses. El conjunt d'aquests fulls dibuixarà ja una avaluació més matisada i completa que serà molt informativa per a noves aplicacions del RMAE.

Què avaluem?

Aparentment la resposta és simple: recursos materials i activitats experimentals. En l'aplicació pràctica dels RMAE sempre intervé un material que s'utilitza per a realitzar una activitat experimental dins d'un ambient metodològic determinat. Haurem de convenir que un mateix material pot immersir-se en activitats diferents que es desenvolupin segons metodologies diferents obtenint diferents resultats: no tan sols importa el material sinó la manera com el fem funcionar a la classe. Per això, des de la idea que s'exposava a l'apartat 4.1, emprarem el terme *recurs*. Per tant en l'avaluació d'un RMAE haurem de contemplar per un costat el suport material que es posi en joc i per l'altre l'activitat on s'immergeix i, en un sentit ampli, altres aspectes metodològics o circumstancials que poden haver influït en el desenvolupament de l'activitat (perfil del grup, horari, hàbits, limitacions de l'aula, dinàmiques de classe...). Per aquesta raó el qüestionari que es proposa al final d'aquest apartat, després de l'encapçalament, ens convida a descriure els *"Detalls de l'activitat, metodologia i altres consideracions sobre les circumstàncies d'aplicació (espais, agrupaments, horaris...)"*.

Quins aspectes avaluem?

Pel que fa als materials hem de tenir en compte els indicadors de qualitat que hem analitzat a l'apartat 8.1. Tanmateix cal fer dues observacions:

- En un context similar al de les normes ISO, l'establiment d'una metodologia d'aplicació i mesura de cadascuna de les subcaracterístiques del model de qualitat que proposàvem requeriria tota una recerca que depassa molt el propòsit d'aquest capítol.
- Els indicadors proposats a l'apartat 8.1 fan referència estrictament als materials. En aquest apartat, en canvi, es pretén avaluar una aplicació docent concreta d'aquests materials atenent també a altres aspectes didàctics com els que s'han esmentat en els paràgrafs anteriors. Per aquesta raó, en el títol de l'apartat, s'especifica *"a partir de la pràctica docent"*.

Simplificant i agrupant alguns dels indicadors de 8.1, afegint altres elements didàctics que considerem rellevants i procurant no perdre la necessària agilitat de l'instrument, hem optat per valorar els sis aspectes següents:

- Facilitat en trobar, preparar i portar a classe els materials.
- Capacitat del recurs per motivar, presentar o aplicar continguts.
- Capacitat del recurs per estimular la participació i el treball de l'alumnat.
- Capacitat del recurs per estimular la creativitat i la descoberta d'alternatives.
- Adequació del guió, si n'hi ha.
- Adequació de l'espai físic i l'agrupament de l'alumnat.

També sembla important recollir, de manera oberta, altres observacions i suggeriments que puguin ser útils per a futures aplicacions del recurs

Quines fonts d'informació emprem per avaluar?

En principi podríem pensar en recollir informació de tres fonts:

- Del professorat que porta el recurs a classe a partir de la seva percepció de com ha funcionat. El professorat, de manera més o menys explícita i de manera més o menys compartida, sempre fa una certa reflexió sobre la seva pràctica docent. Es tracta de sistematitzar i de formalitzar una mica aquest procés.
- De l'alumnat. Hauríem d'actuar sobre dos grups: el grup on utilitzem el recurs i un grup de control on no utilitzem el recurs.
- D'observadors externs o observadores externes que poden ser, en particular, altres membres del departament de matemàtiques del centre.

És evident que una recerca específica sobre avaluació de recursos hauria de tenir en compte tots aquests elements però, en el dia a dia de l'escola, no podem sotmetre cada aplicació de recursos materials a un embolcall d'avaluació tan excessiu que burocratitzi el procés i s'afegeixi a les dificultats que ja, de per si, comporta tota innovació. Donat que aquest no és l'objectiu del nostre treball, en aquest aspecte, farem una proposta limitada. El sol fet d'introduir l'avaluació de recursos creiem que ja és molt enriquidor. Per això l'instrument que proposem té el propòsit de recollir únicament informació del professorat.

Amb quines eines avaluem?

Es proposa un qüestionari per tal que, sistemàticament, el professorat que ha emprat un RMAE en faci la seva avaluació. Com s'ha comentat al principi d'aquest apartat, aquests fulls d'avaluació romandran al departament a disposició de tot el professorat per tal de disposar d'informació que permeti una millora en futures aplicacions. L'avaluació real del recurs es podrà deduir bastant bé un cop el departament disposi

d'uns quants d'aquests fulls referits al mateix recurs, fets per professorat diferent, probablement amb sensibilitats docents diverses.

Hi ha processos d'avaluació que actuen de manera puntual i a través d'instruments amplis que exploren molts aspectes. Nosaltres hem optat per un model diferent. El procés d'avaluació que plantegem té tres característiques:

- És continuat. Després de cada aplicació d'un RMAE es recull informació.
- Es fa mitjançant una eina senzilla que tingui garanties d'ús habitual.
- L'avaluació real s'anirà perfilant, amb temps, a través del conjunt d'aquestes informacions.

Així doncs s'ha procurat dissenyar un instrument àgil i simple per tal que pugui ser utilitzat sistemàticament després de cada aplicació d'un RMAE sense que comporti gaires dificultats afegides al professorat. Pensem que és més convenient una eina senzilla que tingui garanties de poder-se incorporar fàcilment a la pràctica quotidiana que una eina molt àmplia que representi una càrrega addicional i que acabi sense fer-se servir.

A la pàgina següent s'adjunta una proposta de full d'avaluació de recursos i activitats.

FULL D'AVALUACIÓ DE RECURSOS I ACTIVITATS

Material o activitat:	
Nom del/la professor/a:	
Data:	
Curs:	
Context curricular:	

Detalls de l'activitat, metodologia i altres consideracions sobre les circumstàncies d'aplicació (espais, agrupaments, horaris...)	
---	--

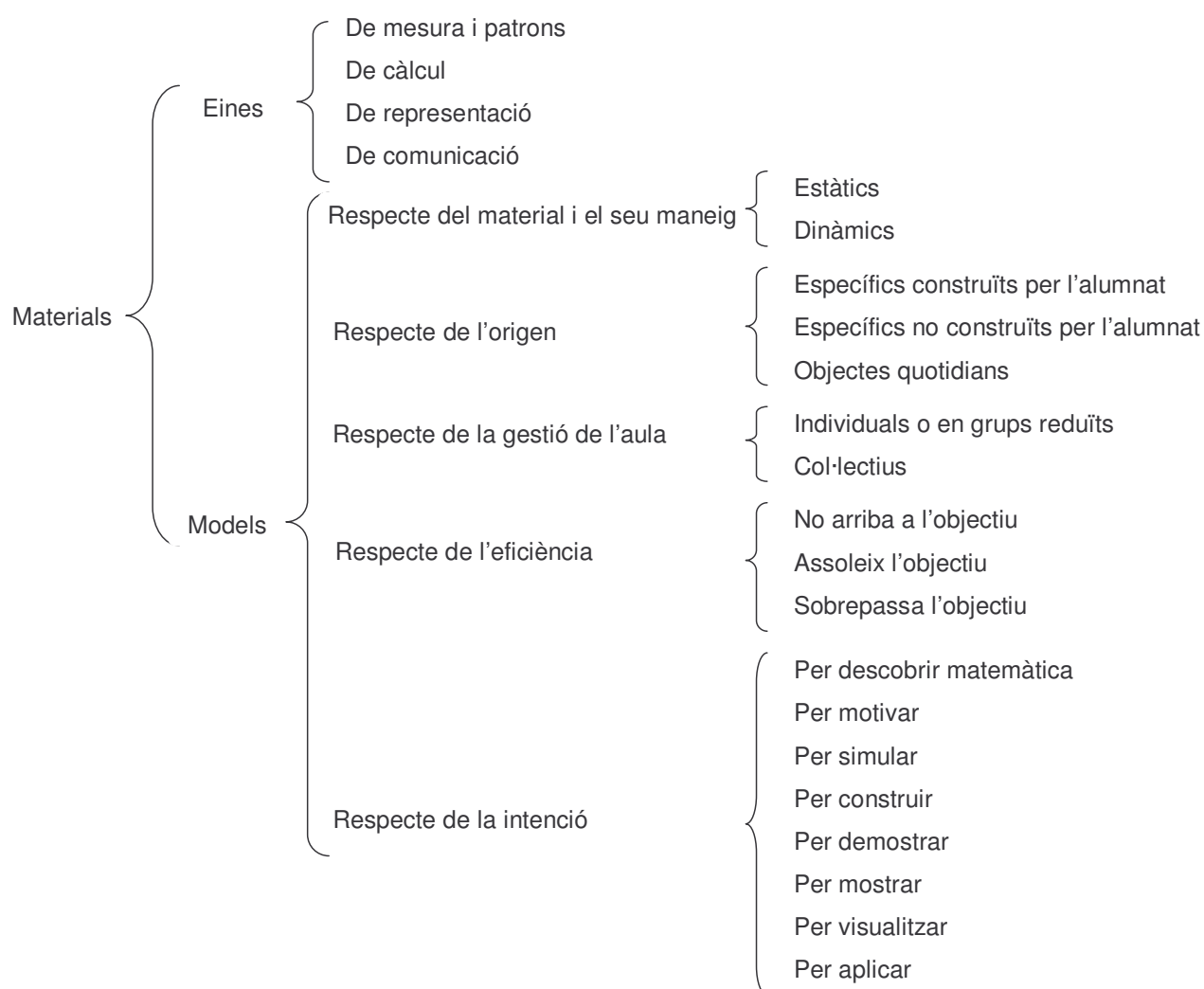
	Avaluació					
	0	1	2	3	4	5
Facilitat en trobar, preparar i portar a classe els materials (0 → Molta dificultat, 5 → Molta facilitat)						
Capacitat del recurs per motivar, presentar o aplicar continguts (0 → Gens eficaç, 5 → Molt eficaç)						
Capacitat del recurs per estimular la participació i el treball de l'alumnat (0 → Gens eficaç, 5 → Molt eficaç)						
Capacitat del recurs per estimular la creativitat i la descoberta d'idees alternatives (0 → Gens eficaç, 5 → Molt eficaç)						
Adequació del guió, si n'hi ha (0 → Gens adequat, 5 → Molt adequat)						
Adequació de l'espai físic i l'agrupament de l'alumnat (0 → Gens adequat, 5 → Molt adequat)						

Observacions:	
Suggeriments per a futures aplicacions del recurs:	

9. Una classificació de RMAE

En aquest capítol fem una proposta de classificació de recursos. Seguint la línia de la classificació proposada –que no serà per temes sinó atenent a les característiques dels materials i als seus propòsits didàctics– anirem esmentant recursos i activitats concretes. Naturalment no entrarem en descripcions gaire detallades que, en uns casos, són innecessàries perquè ja consten a les fitxes i, en d'altres, inadequades per la visió general que aquí perseguim. En alguns aspectes la classificació que presentem és deutora d'idees expressades per Pere Puig Adam en el seu memorable llibre *El material didàctic actual, presentado en la XI reunión de la Comisión Internacional para el Estudio y la Enseñanza Matemática y Exposición Internacional simultánea (Madrid, 21-27 de abril de 1957)*.

Els recursos didàctics de tipus material i les activitats experimentals constitueixen un camp tan ampli com divers que és difícil de classificar en categories absolutament ben definides i sense poder evitar que, de vegades, certes fronteres siguin difuses. Tanmateix, però, creiem que la classificació que es presenta pot ser útil per dibuixar una panoràmica general i ordenada d'aquest tipus de recursos i per permetre revisar algunes de les seves característiques més rellevants. La resumim en el quadre següent:



9.1 Definicions i fronteres

Hem de subratllar que tan sols estem tractant recursos materials. No tractem altres tipus de recursos com, per exemple, els relacionats amb les tecnologies de la informació i la comunicació que constitueixen tot un món quasi inabastable.

En primer lloc distingim dos tipus de materials: *eines* i *models*.

Si entenem per *eina* un objecte útil per a realitzar una acció determinada que, generalment, a classe s'emmarca dins d'activitats matemàtiques més complexes, podem observar quatre grups d'eines:

- Les *eines de mesura i patrons* (regles graduats, cintes mètriques, semicercles graduats, goniòmetres, rodes de mesurar, models d'unitats, un decímetre cúbic, un metre cúbic...).
- Les *eines de càlcul* (calculadores, ordinadors...).
- Les *eines de representació* (compassos, regles, escaires, ordinadors, calculadores, paper mil·limetrat...)
- Les *eines de comunicació* (paper, pissarres, pissarres quadriculades, pissarres magnètiques, retroprojectors, ordinadors, canons de llum, vídeos, diapositives...)

En el present treball centrarem la nostra atenció en el que, seguint la nomenclatura tradicional, hem anomenat *models*. Actualment el mot *model* s'utilitza en contextos diversos i potser, en el nostre camp, convé distingir-ne tres aplicacions:

- *Model material d'ús didàctic en matemàtiques*: conjunt d'elements materials capaços de suggerir o de traduir idees matemàtiques creant, mitjançant aquests, situacions actives d'aprenentatge (Pere Puig Adam).
- *Model didàctic*: marc teòric coherent que enfoca i dona sentit a tota una acció educativa. Així parlem, per exemple, d'un model constructivista o d'un model educatiu lakatosià.
- *Model matemàtic*: construcció matemàtica que, amb l'addició de certes interpretacions verbals, descriu els fenòmens observats (John von Neumann). Imatge matemàtica d'una situació real¹⁸ (Alfréd Rényi).

Els models matemàtics no són, en general, models materials ni tot model material deixa de ser matemàtic, però quan en aquest treball usem el terme *model* ens referim estrictament a *models materials d'ús didàctic en matemàtiques*.

Dins dels models analitzarem cinc criteris de classificació. Cada criteri ens permetrà establir una partició –amb fronteres més o menys borroses– de tal manera que, un model concret tindrà assignades cinc característiques. A continuació comentarem cadascuna d'aquestes classificacions parcials.

¹⁸ Alfréd Rényi, "Un diàleg sobre les aplicacions de les matemàtiques". A: *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*. 2004, vol. 19, núm. 1, pàg. 62.

9.2. Classificació respecte del material i el seu maneig

Des d'aquest criteri podem distingir, amb Puig Adam, dos tipus de models: els estàtics i els dinàmics.

Els *models estàtics* són aquells que es basen en l'analogia entre la seva forma i el concepte matemàtic que es vol representar. La seva eficàcia es basa principalment en l'observació i en la percepció visual de les característiques del model. En alguns casos poden ser construïts pel mateix alumnat i això els dona un important valor afegit i els apropa als models dinàmics. En són exemples els políedres de fusta o de cartró.

Els *models dinàmics* són aquells que impliquen la realització d'una acció de moviment, de desplaçament, de deformació... a través de la qual l'alumnat descobreix, explora o aplica una propietat o una condició matemàtica generalment relacionada amb la conservació o la variació d'alguna magnitud, la comparació, l'ordenació, la construcció... El moviment capta l'atenció i, si va acompanyat de reflexió, pot donar excel·lents resultats didàctics. Un exemple molt clar d'aquesta afirmació el trobem en els coneguts trencaclosques de càlcul mental del professor Ignasi del Blanco. Podrien fer-se perfectament amb llapis i goma però el fet de moure fitxes, tal volta la facilitat de canvi que això proporciona, els fa molt més atractius per al nostre alumnat i crida l'atenció el brillant funcionament que tenen en la pràctica.

Evidentment els models dinàmics poden tenir diversos *graus de llibertat* en el moviment i en l'ús: un paral·lelogram fet amb barretes de mecano que pot ser deformat per estudiar la conservació o la variació del perímetre, de l'àrea, de la suma dels angles, de la suma de les diagonals... en el fons té un moviment molt limitat i un ús molt concret. En canvi les peces per formar policubs ofereixen diverses possibilitats en diferents camps (de la geometria a la combinatòria, per exemple). És així que, dins del grup de models dinàmics hem d'assenyalar els *models polivalents* dels quals en són exemples els reglets de Cuisenaire o els reglets de la Maria Antònia Canals o, encara amb més generalitat, cordills, claus, bastons, agulles, xinxetes, gomes, etc.

9.3. Classificació respecte de l'origen

Des d'aquest criteri podem distingir tres tipus de models: models específics construïts per l'alumnat, models específics no construïts per l'alumnat i objectes quotidians.

Els *models específics construïts per l'alumnat* són models dels quals la mateixa construcció aporta formació als alumnes: disseny, planificació, valoració d'opcions, elecció dels materials, tall, construcció, acabats... En aquest aspecte és obligat assenyalar un camp important de col·laboració amb l'àrea de tecnologia. A l'apartat 4.3 ja hem descrit una experiència que hem portat a terme en el meu institut i que ens ha permès la construcció d'una màquina de Galton, el disseny i construcció de models dinàmics de demostració del teorema de Pitàgores, la construcció d'un el·lipsògraf de quadrants...

Els *models específics no construïts per l'alumnat* representen la majoria dels materials que fem servir a les classes: han estat construïts pel professorat o comprats a cases comercials. Realment hauríem d'explorar millor tot el que el mercat ofereix no tan sols a casa nostra sinó també en altres països (Abacus, Proyecto Sur, Dolmen, Nardil, Tarquin, Taskmaster, Soral...). Internet ens permet accedir fàcilment a catàlegs molt

atractius, cada cop està més consolidat el comerç electrònic i els preus ja no ens resulten tan prohibitius.

Els *objectes quotidians* són, generalment, fàcils d'obtenir i tenen el valor afegit d'estar vinculats directament a l'entorn de l'alumnat. Especialment en el camp de la geometria resulten indispensables. Com diu el professor Damià Sabaté (2005): "*No s'ha d'oblidar, però, que la realitat i els seus objectes, la mateixa aula, fins i tot, també poden servir com a base per a la geometria experimental*". Solen emprar-se a classe des de dues perspectives: en uns casos es tracta de posar de manifest i treballar el contingut matemàtic subjacent a aquests objectes i, en d'altres, d'utilitzar-los merament com a suport per il·lustrar idees matemàtiques independents. En els tres llibres de Puig Adam que se citen a les referències bibliogràfiques hi ha diverses propostes en aquest camp però en voldria destacar dues per l'acurat tractament que en fa: la geometria del paraigua i la geometria del faristol plegable. També en aquesta línia Emma Castelnuovo proposa un estudi de la funció de proporcionalitat directa a partir d'una branca d'heura o dels rectangles isoperimètrics a partir d'un cordill lligat en cercle.

No voldria acabar aquest apartat sense insistir en una idea i apuntar-ne una altra que ara poden semblar prematures però que, tal volta, de mica en mica, s'aniran consolidant:

- Establiment d'una certa *cultura de la qualitat* en el material didàctic. Igual que en els llibres de text es té cura d'aspectes –tant en el contingut com en el suport material– que potser, temps enrere, passaven desapercibuts (llenguatge, esquemes, disseny gràfic, tipus de paper i de tinta, pes...), en els recursos materials també haurem d'anar establint criteris de qualitat que apuntin línies de millora, en el sentit que ho fan, per exemple, les normes ISO. A l'apartat 8.1 hem explorat àmpliament aquest camp.
- Establiment d'una certa *cultura d'avaluació de riscos*. L'ús de materials en matemàtiques no sol comportar grans riscos però haurem de reconèixer que, per exemple, el treball amb xinxetes, cúters o pals llargs, en certes edats, requereix unes precaucions especials. Si bé el professorat, en el dia a dia de l'escola, està habituat a tenir cura de la seguretat, en estudis de materials concrets, no sembla gens sobrer cridar l'atenció sobre aquells aspectes, si existeixen, que puguin suposar un risc. Aquestes consideracions, que poden ser sistemàticament transmèses a l'alumnat que utilitzi el recurs, són bons elements per anar bastint transversalment una certa *educació per a la seguretat*.

9.4. Classificació respecte de la gestió de l'aula

Des d'aquest criteri podem distingir dos tipus de models: els models per emprar individualment o en grups reduïts i els models per emprar col·lectivament. Cal tenir present que un mateix model pot establir una dinàmica o una altra segons l'activitat en què s'emmarqui.

Els *models per emprar individualment o en grups reduïts* plantegen activitats experimentals que convé que siguin ben guiades, disposant de material suficient i, per anar bé, que es desenvolupin en situació de laboratori, tenint en compte que també a les aules habituals poden crear-se aquestes situacions. Dins de la nostra matèria encara no existeix una cultura de laboratori com en altres àrees. Tal volta tampoc són gaire transferibles, almenys de manera automàtica, els esquemes de treball i

l'organització que, també amb moltes variacions, s'utilitzen en les matèries de naturalesa més experimental.

Com a exemples d'aquests models podem citar els policubs o els pentominós o materials per fer gràfics d'emplenat d'ampolles o materials que plantegin activitats de mostreig, per exemple, estimar quants cigrons hi ha en un quilogram de cigrons pel mètode de captura i recaptura. Aquest mètode s'usa en biologia per estimar poblacions animals en llibertat com els esquiroles d'un bosc, els peixos d'un estany o les balenes blaves d'una part de l'oceà. En el cas dels cigrons fem el següent: posem el quilogram de cigrons en una caixa, en prenem una primera mostra, la comptem i marquem cada cigró amb un retolador, retornem aquesta mostra marcada a la caixa i ho barregem bé; prenem una segona mostra i comptem el nombre total de cigrons d'aquesta segona mostra i el nombre d'ells que apareixen marcats. És d'esperar que, si ho hem barrejat prou bé, la proporció de cigrons marcats sobre el total de cigrons d'aquesta segona mostra sigui aproximadament igual a la proporció entre el total de cigrons marcats (primera mostra) i el total de cigrons de la població, que és la quantitat que volem estimar i que podrem aïllar de la igualtat aproximada anterior. El darrer tram de l'activitat pot consistir a comptar quants cigrons hi ha realment i observar l'error comès. A vegades, per aquest procediment, podrem obtenir estimacions sorprenentment ajustades. L'última vegada que ho vàrem fer a classe, treballant de manera cooperativa els diferents grups, vàrem poder prendre mostres molt nombroses (289 i 317 cigrons respectivament) i vàrem cometre un error de 6 cigrons sobre 1.278. No sempre tindrem tanta sort!

Els *models per emprar col·lectivament* estan destinats a ser usats sota la gestió directa del professorat en el marc d'una activitat expositiva destinada a tot el grup d'alumnes. Solen ser models per motivar, visualitzar, mostrar, demostrar o aplicar algun concepte que, en aquell moment, s'està tractant a classe. Són molt abundants els exemples d'aquests models i fa la sensació que estan més ben incorporats que els altres al nostre tarannà col·lectiu com a professorat de matemàtiques.

Tanmateix voldria posar un exemple potser una mica sorprenent però realment molt efectiu on, en una situació de role-play, el mateix alumnat actua com a model identificant-se amb punts del pla. Els alumnes i les alumnes es col·loquen en les taules habituals formant una quadrícula. De fet normalment ja hi estan situats però cal emplenar els passadissos desplaçant-hi algunes cadires. Tot l'alumnat haurà d'estar assegut. La primera fila serà l'eix d'abscisses i la primera columna serà l'eix d'ordenades. L'alumne o alumna assegut a l'extrem esquerre de la primera fila serà l'origen i, a partir d'aquí, anirem assignant la primera i la segona coordenada a cada alumne/a. Serà important que tothom recordi les seves coordenades. Llavors demanem que es posin en peu aquells alumnes i aquelles alumnes les coordenades dels quals compleixen una determinada condició:

- La primera coordenada és més gran que 3.
- La segona coordenada és més petita que la primera.
- La primera coordenada és més petita o igual que la segona.
- La segona coordenada més 1 és més gran o igual que la primera.

Per simplificar i concretar els missatges arribem a l'acord d'indicar la condició a través de notació algebraica essent x la primera coordenada i y la segona. Així començarem a donar condicions del tipus: $x + y > 4$, $x + y = 4$, $x + y \geq 4$, $x + y \leq 4$, $x + y < 4$. L'alumnat copsarà, de primera mà, què significa que un punt compleixi o no una condició i anirà descobrint que els punts que compleixen les desigualtats formen semiplans i que els que compleixen la igualtat formen precisament la recta frontera

dels semiplans. Es proposaran diversos blocs d'exemples insistint en desigualtats estrictes o no estrictes i en igualtats. Quan les idees es vagin consolidant ho representarem també a la pissarra. Es tracta d'una activitat experimental bonica i potent que pot ampliar-se i que connecta geometria, àlgebra i, fins i tot, programació lineal.

9.5. Classificació respecte de l'eficiència

Des d'aquest criteri, amb Puig Adam, podem distingir tres tipus de models: els models que no arriben a l'objectiu, els models que assoleixen l'objectiu i els models que sobrepassen l'objectiu.

Els *models que no arriben a l'objectiu previst* poden presentar diverses dificultats com les que assenyalen C. Alsina, C. Burgués i J. Fortuny (1991): l'excessiva complexitat del material que compromet la comprensió en lloc de facilitar-la, la seva intocabilitat que no permet que l'alumnat el manipuli, la seva manca de quantitat o de qualitat, la inadequació dels conceptes que pretén presentar...

Enfront d'aquests models, que solen ser eliminats per selecció natural, hi ha *els models que assoleixen l'objectiu previst* amb una raonable inversió de temps i d'esforç i *els models que sobrepassen l'objectiu previst* inicialment oferint sorpreses que cal explorar sense por. Un bonic exemple d'aquest darrer grup és el que s'anomena *geometria del taxi*. Suposem una zona urbana absolutament quadriculada amb blocs de cases iguals on els taxis tan sols poden aturar-se en les cruïlles de carrers. Per anar des d'una cruïlla a una altra, naturalment no podrem traslladar-nos en línia recta sinó que haurem d'anar resseguint els blocs de cases al llarg dels carrers. Així doncs la distància mínima entre dos punts, en aquest cas, no serà la distància euclidiana habitual sinó una altra de diferent. A partir d'aquesta situació aparentment molt simple s'obre un immens ventall de possibilitats, tan imprevisibles com interessants, que poden ser útils en nivells educatius ben diferents i que tracten d'explorar un món format per punts discrets i dotat d'una mètrica no euclidiana!

9.6. Classificació respecte de la intenció

En aquest apartat les fronteres entre les diferents categories de models no estan gens clares. Per això, més que definir-les intentarem posar-ne exemples.

Models per descobrir la presència de les matemàtiques. En tots els objectes podem descobrir-hi una presència matemàtica. Tanmateix, però, haurem de seleccionar aquells que, per a uns continguts concrets, permetin lectures matemàtiques fàcils i riques on l'esforç d'interpretació es vegi ben compensat pels beneficis didàctics que aporten. Com a exemples d'aquests models podem citar objectes de disseny o molts objectes quotidians com, per exemple, alguns embalatges: llaunes, brics, caixes... Conec unes caixes d'ous desenvolupables que podrien donar suport a diverses lliçons de geometria.

Models per motivar. Es tracta d'objectes que reclamen l'atenció del nostre alumnat entorn a un tema de matemàtiques. Posarem un exemple que crec que resulta molt bonic: La YBC-7289 és una tauleta babilònica de la col·lecció de Yale que data del període entre 1800 aC i 1600 aC, en la qual apareix una utilització de la relació pitagòrica molt anterior al naixement de Pitàgoras i una bona aproximació de $\sqrt{2}$. A

l'acte de fundació de XEIX, la Societat Balear de Matemàtiques, es varen lliurar còpies sobre fang d'aquesta tauleta i se'n va explicar la interpretació. El mateix objecte i els signes numèrics cuneïformes que contenia varen impulsar la curiositat de tothom vers l'explicació. Una fotografia no hauria fet el mateix efecte.

Models per simular. En general un simulador és un aparell que permet de representar el comportament d'un sistema sota condicions simplificades. En el nostre camp la màquina de Galton n'és un bonic exemple. Una màquina de Galton consisteix en un pla lleugerament inclinat, per on llisquen boles, on hi ha un enreixat de claus que obliguen a que, en passos successius, cada bola hagi de triar entre dues bifurcacions possibles del camí. Les boles es distribueixen segons una distribució binomial. Si la màquina és prou gran i es tiren moltes boles obtindrem una aproximació discreta de la distribució normal i del perfil de la campana de Gauss. En el fons es tracta d'una simulació de molts fenòmens naturals que segueixen aquesta distribució.

Models per construir. El terme *construir*, en matemàtiques, té un ús força ampli: tant pot referir-se al disseny i muntatge d'un objecte tridimensional com, per exemple, al traçat d'una corba o a la transformació d'una figura. Així són exemples d'aquests models els diversos materials de construcció de políedres, el pantògraf per a la construcció de figures homotètiques o els muntatges per a la construcció d'el·lipses, hipèrboles i paràboles amb claus, regles, escaires i cordills. Tant les característiques físiques d'aquests models com les accions que proposen estan molt vinculades a la definició i les propietats d'allò que es vol construir i, per tant, l'interès del seu ús no rau tan sols en el resultat final de la construcció sinó, sobretot, en la descoberta de les raons per les quals s'obté aquest resultat.

Models per demostrar. En matemàtiques, perquè una trajectòria deductiva es consideri una demostració es requereix que es mantingui un rigor en l'encadenament lògic dels passos que, a vegades, és difícil d'assolir únicament amb materials. Però hi ha materials que poden oferir autèntiques demostracions o recolzar molt sòlidament raonaments demostratius. És impossible no referir-se a les boniques demostracions dinàmiques del teorema de Pitàgores o a una esplèndida demostració del teorema de Viviani fent girar triangles equilàters superposats. El camp és més ampli del que sembla. En el llibre *Math Made Visual* de Claudi Alsina i Roger B. Nelsen es presenta un magnífic conjunt d'exemples de demostracions visuals moltes de les quals poden implementar-se a través de models materials.

Models per mostrar. Entendrem per *mostrar* l'argumentació d'una propietat a través de la utilització acurada i intel·ligent del sentit comú, l'analogia, la intuïció... No es tracta de substituir el necessari raonament deductiu –per això utilitzem el terme *mostrar* en lloc de *demostrar*– sinó de complementar-lo amb un raonament plausible que, més associat a la descoberta, de vegades resulta més proper al nostre alumnat. En el llibre *La Matemática y su enseñanza actual*, Puig Adam escriu: “*No sempre una demostració basada en la reducció a veritats anteriors, qualitat característica de les demostracions de l'escola grega, és la que tradueix les essències de la propietat demostrada, ni molt menys la més adequada des del punt de vista didàctic. Per als matemàtics orientals, demostrar era reduir a l'evidència directa que és percebuda pel nen millor que un encadenament lògic del qual no sol veure ni l'abast ni la necessitat*”.

Un exemple d'aquest tipus de models és la parella formada per un cilindre i un con (o per un prisma i una piràmide) que tenen la mateixa base i la mateixa altura i que, emplenant d'aigua una figura i abocant-la en l'altra, ens permeten descobrir la relació entre els seus volums. De fet no es tracta d'una demostració però sí d'un raonament prou plausible que, a l'ESO, no té una alternativa rigorosa. Un altre exemple és un taulell de suro en el qual hi ha dibuixada una circumferència de manera que, amb l'ajut

de gomes elàstiques i claus, podrem descobrir la relació entre un angle inscrit i l'angle central corresponent. En aquest cas, després, convindrà fer la demostració.

Models per visualitzar. Aquesta és una de les categories amb més fronteres i superposicions amb les altres. Tanmateix aquí ens referim a recursos que, a partir d'un entramat matemàtic que haurem de posar de manifest al nivell que sigui possible, produeixen formes amb molta força visual tot jugant amb la sorpresa, l'estètica, l'emoció... Són exemples d'aquest tipus de models els materials implicats en les activitats que relacionen la geometria i les bombolles de sabó, la composició d'homotècies, simetries i girs amb una televisió i una càmera de vídeo o la generació de diagrames de Chladni fent vibrar una placa metàl·lica amb un arc de violí.

Models per aplicar. Dedicàvem la primera categoria d'aquesta classificació als models per descobrir la presència de les matemàtiques i dediquem aquesta darrera als models per aplicar els coneixements matemàtics. Descoberta i aplicació formen un camí d'anada i tornada per on és bo circular amb el nostre alumnat: veure la matemàtica que hi ha en el que ens envolta però també usar la matemàtica per comprendre i interactuar millor amb el que ens envolta. Un bon exemple d'aquests models són els materials implicats en l'activitat de fer rebotre, sobre un perfil el·líptic, un raig làser que passa per un dels seus focus o, sobre un perfil parabòlic, un raig làser que entra paral·lel al seu eix. Un altre exemple, molt sorprenent, és una aplicació del teorema de Thales per tal d'entendre la reducció que es produeix en dibuixar el perfil d'una cara sobre un mirall.

10. Catàleg de RMAE, guions, enregistraments i informes

En els capítols precedents s'han formulat consideracions generals sobre l'ús de RMAE. En aquest capítol s'aporta informació i propostes sobre materials concrets a través dels següents documents que, si bé es presenten aquí, donat el seu volum, s'adjunten en annexos:

- Un catàleg de RMAE format per cent una fitxes.
- Una mostra de vint guions destinats a pràctiques de laboratori.
- Una mostra de vint-i-quatre enregistraments en vídeo on es presenten alguns recursos en la seva pràctica a classe.
- Una exploració de sis col·leccions de materials.

En els apartats 10.1, 10.2, 10.3 i 10.4 respectivament es descriuen aquests documents i a l'apartat 10.5 es presenta un quadre resum on apareixen totes les fitxes del catàleg amb el seu codi, el seu títol i amb indicacions de si hi ha guió i/o enregistrament en vídeo.

10.1. Catàleg de RMAE: Estructura i ordenació de les fitxes

Aquesta és la part més àmplia del nostre treball i la que ha requerit més temps malgrat que la nostra aportació és necessàriament limitada perquè es tracta d'un camp inabastable que requeriria continuar-se explorant.

La primera tasca plantejada va ser definir el format de la fitxa i, especialment, el quadre de descriptors que fa possible la seva classificació. No ha estat una tasca tan simple com pot semblar ja que, a mesura que s'anaven elaborant noves fitxes, es posaven de manifest nous elements a tenir en compte.

Malgrat que inicialment contemplàvem les fitxes com a descripcions curtes de RMAE que no passessin d'un o dos fulls, en molts de casos l'apartat de "*Proposta d'aplicació didàctica*" ha tingut una amplitud que ha desbordat del tot la previsió inicial. Curiosament, a mesura que s'ha desenvolupat el treball de catalogació, hem anat veient més i més clar que era millor ampliar el detall d'aquest apartat que no presentar guions tancats que, a la pràctica docent, s'adaptarien malament a les circumstàncies particulars de cada grup. Tot i així, seguint les previsions inicials, s'ha elaborat una mostra de guions.

Tot seguit descrivim els diferents apartats que componen les fitxes del catàleg. Se segueix el mateix ordre en què apareixen en les fitxes excepte en el cas del quadre de classificació que, si bé apareix al principi de la fitxa, immediatament sota el títol, el descrivim al final perquè resulta una mica més complex que la resta d'apartats.

TÍTOL: L'elecció del títol respon a dos criteris:

- Normalment el títol farà referència al material que dona suport al recurs.
Exemples: *àbac, policubs, el pantògraf, plot...*

- Quan del material –degut a la seva poca especificitat– no sigui descriptiu del recurs, optarem per indicar l'activitat, a vegades amb certa generalitat. Exemple: “*Quantes persones es manifestaven?*” o “*Quants cigrons hi ha en un quilo de cigrons?*”. Hem de reconèixer que, a vegades, hem optat per títols en forma de reptes que si bé són més motivadors no descriuen en una primera lectura el tipus de recurs al qual fan referència.

DESCRIPCIÓ DEL MATERIAL: En aquest apartat es descriuen breument els materials que donen suport al recurs. Optem per fer descripcions breus i molt concretes encara que tal volta puguin resultar, en algun cas, incompletes. Una descripció exhaustiva, correria el risc de convertir-se en excessiva i podria fer perdre la visió conjunta del recurs.

IMATGE: Es tracta de completar la descripció de l'apartat anterior a través d'una o més imatges que resultin prou significatives. En molts casos es tracta de fotografies fetes per l'autor d'aquest treball però en alguns altres (per raons d'interès històric o de curiositat) es tracta d'imatges obtingudes d'altres fonts que, en cada cas, se citen.

CONTINGUTS: Blocs temàtics que poden ser treballats a través del recurs (per motivar, per exposar, per visualitzar, per aplicar...).

PROPOSTA D'APLICACIÓ DIDÀCTICA: Aquest és un apartat fonamental en el qual intentem *donar vida didàctica* al recurs, explorar les seves possibilitats, portar-lo a classe. A vegades un mateix recurs pot permetre activitats diverses que procurarem descriure. En alguns casos està associat a una activitat característica en la qual centrarem l'atenció. Com s'ha explicat, en el transcurs del treball, cada cop hem posat l'accent de manera més decidida en aquests aspectes.

CONNEXIONS: Com s'ha exposat a l'apartat 4.3, una característica dels recursos materials és la diversitat de lectures que permeten, tant des de diversos nivells com des de diverses àrees curriculars. Sovint aquests recursos ofereixen excel·lents possibilitats com a punts de trobada amb altres disciplines, amb la vida quotidiana, amb eixos transversals... Dediquem aquest apartat a explorar oportunitats de connexió.

ALTRES COMENTARIS: Aquest apartat depèn molt de cada recurs i el seu contingut és molt variat: observacions tècniques per al professorat, possibilitats d'aprofundiment o ampliació, camins alternatius, referències documentals que poden ser-nos útils... Atenent al que es comentava a l'apartat 9.3, procurarem incloure-hi també unes consideracions de seguretat.

CLASSIFICACIÓ: Apareix immediatament després del títol de la fitxa i consisteix en un quadre dividit en sis cel·les en cadascuna de les quals, a través d'uns codis, s'aporta una informació determinada:

Bloc temàtic	Tipus de recurs	Ubicació	Tipus d'aula, agrupament i durada	Origen	Seguretat
--------------	-----------------	----------	-----------------------------------	--------	-----------

Cal tenir en compte que la polivalència i la complexitat dels recursos materials implica que no sempre es puguin incloure exclusivament en una única classe, per exemple, en un únic bloc temàtic o en un únic nivell. A continuació descrivim els codis que s'utilitzen en cadascun dels camps i fem alguns comentaris específics.

Bloc temàtic
<p>N: Nombres A: Llenguatge algebraic F: Llenguatge funcional P: Proporcionalitat T: Trigonometria GP: Geometria plana GE: Geometria de l'espai C: Còniques CM: Combinatòria PR: Probabilitat E: Estadística</p>
<p>Comentaris:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Un mateix recurs pot ser útil en varis blocs temàtics. Seleccionarem els que considerem més rellevants. - Tal volta el criteri de classificació que emprem és més epistemològic que didàctic però és el que, en aquest cas, considerem més adequat.

Tipus de recurs
<p>Eines: EM: Eines i patrons de mesura EC: Eines de càlcul ER: Eines de representació gràfica</p> <p>Models, respecte al maneig: ME: Models estàtics MD: Models dinàmics</p> <p>Models, respecte a la intenció: DAVM: Per descobrir, aplicar, visualitzar o motivar SCMD: Per simular, construir, mostrar o demostrar J: Jocs</p>

Comentaris:

- En aquest camp ens basem parcialment en la classificació que s'ha detallat en l'apartat 9 de la present memòria, encara que, per simplificar, hem agrupat categories.
- En el cas de models indicarem dos codis: el primer farà referència a la classificació respecte del maneig i el segon a la classificació respecte de la intenció.

Ubicació

1 ESO
2 ESO
3 ESO
4 ESO
1 BAT
2 BAT
ESO: General
BAT: General

Comentari:

- En alguns casos indicarem més d'un curs.

Tipus d'aula, agrupament i durada

Tipus d'aula:

L: Laboratori
A: Aula habitual
C: Treball de camp / Pati

Agrupament:

G: Tot el grup conjuntament. En aquest cas, normalment, el recurs estarà incorporat a una exposició del professorat o a una altra activitat de la classe habitual.
Gn: En equips de n alumnes. En aquest cas, normalment, n serà més petit que quatre i es treballarà en un entorn de laboratori.
I: Individualment.

Durada:

Tn: Per a l'activitat s'estima una durada de n minuts aproximadament.

Comentaris:

- En els casos en què es treballi en equips reduïts o individualment haurem de disposar de suficient material. Si no és així una solució és fer activitats alternatives: mentre els equips 1 i 2 fan l'activitat A, els equips 3 i 4 fan l'activitat B i els equips 5 i 6 fan l'activitat C. A la classe següent es fa una rotació i al final de la tercera classe els sis equips hauran treballat amb les tres activitats.
- L'estimació temporal és necessàriament força relativa i pot dependre de molts factors: dinàmica del grup, horari de la classe, dia de la setmana...

Origen

CA: Construïts per l'alumnat
CP: Construïts pel professorat
CO: Comercialitzats
OQ: Objectes quotidians, incloses les joguines i els jocs
NO: No s'utilitzen objectes específics

Seguretat

0: Cap risc.
1: Risc moderat.
2: Risc alt.

Comentari:

- Si bé, en Matemàtiques, no hi ha recursos de gran risc, en la línia del que s'exposa a l'apartat 9.3 de la present memòria, ens ha semblat interessant incloure aquest camp per apropar-nos a una cultura de prevenció del risc.

Pel que fa a l'ordenació de les fitxes hem optat per seguir, com a primer criteri, els blocs temàtics principals als quals fan referència amb el següent ordre: nombres (N), llenguatge algebraic (A), llenguatge funcional (F), proporcionalitat (P), trigonometria (T), geometria del pla (GP), geometria de l'espai (GE), còniques (C), combinatòria (CM), estadística (E) i probabilitats (PR). Dins de cada bloc temàtic les activitats estan ordenades per nivells des de 1r d'ESO fins a 2n de batxillerat. Tanmateix molts materials i activitats fan referència a blocs temàtics diversos i són adequats (si cal amb lectures diferents) per a diversos nivells. Per aquesta raó l'ordre resultant és una mica relatiu però, en tot cas, resulta útil per estructurar el conjunt del material.

A partir d'aquest ordre s'ha assignat a cada fitxa un codi del tipus F_n , amb n variant entre 1 i 101. Aquest codi ens resulta útil per referir-nos a un RMAE concret dins del

recobriment curricular (vegi's el capítol 11 d'aquesta memòria) i apareix també a la paginació interna de la fitxa. La numeració de les pàgines de cada fitxa es fa amb un codi del tipus $F_n - m$ on n representa el número de fitxa i m el número de pàgina dins de la fitxa.

A l'apartat 10.5 es presenta un quadre resum del catàleg de RMAE. El catàleg complet s'adjunta a l'annex A.

10.2. Mostra de guions: estructura i ordenació

S'ha elaborat una mostra de vint guions que corresponen a alguns dels RMAE catalogats. En general es tracta d'activitats pensades per a desenvolupar en un entorn de laboratori. Cal tenir en compte que aquestes activitats representen tan sols una petita part de les aplicacions didàctiques dels RMAE ja que, en la majoria dels casos, aquests recursos s'incorporen a la classe habitual. Tal com s'ha comentat, si bé hem optat per mantenir la previsió inicial de presentar una mostra de guions separats de les fitxes, a mesura que hem anat avançant en el treball, hem observat que probablement resulta millor elaborar fitxes més detallades des del punt de vista de la seva aplicació didàctica i deixar que sigui el propi professorat qui, atenent a les circumstàncies concretes de la seva classe, seleccioni aquells aspectes que, en cada cas, convé portar a l'aula. En els mateixos guions de la mostra a vegades hi ha activitats de diferents nivells que hauran de ser seleccionades pel professorat. També s'ha procurat que en els guions aflorin tants vincles interdisciplinaris i amb la vida quotidiana com els temes que tractem fan possible. Per altra part, repetidament es convida l'alumnat a expressar el que observa o els seus punts de vista. La comprensió lectora i l'expressió escrita són fonamentals en el seguiment de qualsevol guió.

També aquí la primera tasca ha consistit a establir l'estructura del guió que es resumeix en el següent quadre:

IES			
Departament de Matemàtiques			
Guió d'activitat experimental			
TÍTOL DE L'ACTIVITAT			
Nom:	Curs:	Grup:	Data:
Materials: Descripció breu i esquemàtica dels materials que requerirà l'alumnat per desenvolupar l'activitat.			
Introducció: Presentació motivadora de l'activitat que proposem.			
Objectiu: Formulació breu, si pot ser en una frase, del propòsit de l'activitat per tal que sigui conegut per l'alumnat.			

Desenvolupament:

Aquest és el cos del guió. A vegades serà força llarg i consistirà en una successió de preguntes o, fins i tot, de blocs d'activitats que l'alumnat haurà d'anar seguint i, si és el cas, responent a les qüestions que es plantegin.

Conclusions:

Al final de cada activitat pretenem que hi hagi algun element de síntesi. A vegades es convidarà explícitament a l'alumnat per tal que formuli alguna conclusió. Altres vegades es plantejaran preguntes que impulsin en aquesta direcció.

Recordeu que cal recollir i desar els materials que heu emprat.

Aquesta serà la darrera indicació de la majoria dels guions!

L'ordenació dels guions s'ha fet seguint l'ordre de les fitxes a les quals corresponen i, a partir d'aquest ordre, s'ha assignat a cada guió un codi del tipus Gn , amb n variant entre 1 i 20. En la numeració de les pàgines de cada guió s'utilitza aquest codi de la forma següent: $Gn - m$ on n representa el número de guió i m el número de pàgina dins del guió.

En el quadre de l'apartat 10.5 s'indiquen els guions que formen la mostra. La mostra completa es presenta a l'annex B.

10.3. Enregistraments en vídeo

S'ha elaborat un conjunt de vint-i-quatre enregistraments en vídeo que presenten fragments de l'aplicació de RMAE a classe. S'han realitzat a l'IES Sa Palomera de Blanes amb la col·laboració de tot el professorat del Departament de Matemàtiques i amb el suport tècnic de l'Abraham de la Fuente. A tots ells vull mostrar de nou el meu agraïment. Aquests fragments s'incorporaran també a un DVD que està preparant el Departament d'Educació i Universitats i que també inclourà l'enregistrament d'una conferència sobre "*Material manipulable a l'aula de matemàtiques*" que vaig tenir el plaer d'impartir el dia 8 de març del 2006 a la seu del Departament, en el marc de la posta en marxa de la formació en pràctica reflexiva dins de l'àrea de matemàtiques. L'enregistrament d'aquesta conferència i l'edició dels fragments d'aplicació de recursos que l'acompanyaran en el DVD han estat a càrrec del Programa de Mitjans Audiovisuals del Departament d'Educació i Universitats. Vull també expressar el meu agraïment als professionals que hi han treballat i molt especialment a Jaume Agudé que ha mostrat en tot moment un interès tan expert com entusiasta. Tal com s'exposa en el capítol tretzè d'aquesta memòria, l'edició de l'esmentat DVD representa també un canal important de difusió del treball realitzat en la present llicència.

Naturalment la participació de l'alumnat en els enregistraments va ser completament voluntària i s'han pres les precaucions oportunes per tal que no hi apareguin aquells alumnes i aquelles alumnes que no haguessin portat la corresponent autorització a principi de curs.

A cada enregistrament s'ha assignat un codi del tipus Vn , amb n variant entre 1 i 24. En el quadre de l'apartat 10.5 s'indiquen els enregistraments que s'han realitzat. A l'annex C s'adjunta el DVD amb tots aquests fragments de vídeo.

10.4. Informes sobre col·leccions de materials

Malgrat que no estava previst en el projecte inicial, ens va semblar que seria convenient plantejar-nos de fer una certa exploració de col·leccions de materials per tal de disposar d'una visió més àmplia del tema. Hem tingut oportunitat de visitar sis col·leccions importants de materials:

- La col·lecció de materials del GAMAR de Girona que ens ha mostrat i comentat la professora Maria Antònia Canals.
- La col·lecció del Departament de Didàctica de les Ciències Experimentals i de la Matemàtica de la Facultat de Formació del Professorat de la Universitat de Barcelona que ens ha mostrat i comentat la professora Carme Burgués.
- La col·lecció particular del professor Adolf Almató que inclou peces poc comunes relacionades amb lògica i teoria de conjunts.
- La col·lecció particular del professor Claudi Alsina, abundant i sorprenent, en la qual s'observa el fruit de molts anys de mirar-se el món amb ulls matemàtics.
- L'Espai Jordi Esteve de l'ADRE de la Universitat Autònoma de Barcelona que ens va ser mostrat i comentat pel professor David Barba.
- També hem visitat una altra col·lecció molt especial i absolutament recomanable: l'exposició *Atractor* dins del Museu Ciència Viva de Lisboa.

En cada cas s'ha elaborat un informe amb abundant material fotogràfic. El conjunt dels informes s'adjunta a l'annex D.

Aquesta ha estat una de les activitats més gratificants que hem desenvolupat precisament pel fet que ens ha posat en contacte amb persones que també creien fermament que els materials podien fer una aportació enriquidora en l'educació matemàtica. Volem agrair la feina de les persones que han fet possible aquestes col·leccions i la disponibilitat de les persones que ens les han mostrades.

10.5. Quadre resum de fitxes de RMAE amb indicació de guions i enregistraments

Tal com s'ha indicat en els apartats 10.1, 10.2 i 10.3, en el quadre següent es presenta un resum de les fitxes del catàleg de RMAE amb indicació, si és el cas, de l'existència de guions o d'enregistraments. L'ordenació segueix el criteri que s'ha exposat al final de l'apartat 10.1.

En cada cas s'indica la següent informació:

- El codi *F_n* de la fitxa (en verd) que també apareix en el quadre de recobriment del currículum que es presenta en el capítol onzè i a l'annex E.
- El títol de la fitxa de RMAE.
- Indicació de si hi ha guió amb el codi *G_n* corresponent (en blau) i, si és el cas, el títol del guió.

- Indicació de si hi ha enregistrament en vídeo que mostri el desenvolupament de l'activitat a classe amb el codi *Vn* corresponent (en vermell).

En el quadre hi consten les 101 fitxes, els 20 guions i els 24 fragments de vídeo.

Codi de la fitxa	Títol de la fitxa d'activitat o material	Guió i títol del guió (si n'hi ha)	Vídeo (si n'hi ha)
F1	Reglets de Cuisenaire		
F2	Reglets de Maria Antònia Canals		V1
F3	Àbac	G1 L'àbac: una calculadora plena d'història	
F4	Bingo i dominó amb nombres romans		
F5	Els blocs multibase		
F6	Els centicubs		
F7	Quadre de fraccions unitàries	G2 Fraccions de la unitat	V2
F8	Cercle de fraccions		
F9	Fraccions amb sectors circulars		
F10	Dominó de fraccions sobre un quadrat 4x4		
F11	Dominó de fraccions		
F12	Cartes de fraccions impròpies		
F13	Descobrim π	G3 Descobrim π	
F14	Trencaclosques de càlcul mental		V3
F15	Model geomètric per al desenvolupament de $(a + b)^2$		V4
F16	Model geomètric per al desenvolupament de $(a + b)^3$		V4
F17	Model geomètric per al desenvolupament de $(a + b)(a - b)$		V4
F18	Equacions de rectes en el pla		V5
F19	Inequacions amb una incògnita		
F20	Inequacions lineals amb dues incògnites		V5

F21	Funcions a partir de rectangles isoperimètrics i de rectangles equivalents	G4 Rectangles, gràfics i funcions	V6
F22	Gràfics de funcions d'emplenat d'ampolles	G5 Gràfics de funcions d'emplenat d'ampolles	V7
F23	Gràfics de funcions reals de variable real al terra		
F24	Sota una carpa imaginària		
F25	Hipsòmetre		
F26	Gruixòmetre		
F27	El pantògraf		
F28	Mesura de longituds i d'àrees amb fil i paper vegetal quadriculat	G6 Tot mesurant el Delta!	V8
F29	El teorema de Thales i la cambra fosca		
F30	Mirallet, mirallet per què m'has fet tan petitet?		
F31	Cercle d'angles		
F32	Dominó d'angles		
F33	Goniòmetres per a treballs de camp		
F34	Maquetes		
F35	Tot tallant cilindres de plastilina	G7 Tot tallant cilindres de plastilina	V9
F36	El geoplà	G8 Geoplans	
F37	Àrees de polígons amb el geoplà i retallant paper		
F38	Dominó d'àrees		
F39	Àrea del dodecàgon regular amb peces imantades		
F40	Àrea del cercle		
F41	Rectangles amb igual perímetre i cilindres amb igual àrea lateral.		
F42	Demostracions del teorema de Pitàgores amb peces mòbils		
F43	Teorema de Viviani		V10
F44	Angle inscrit en una circumferència		
F45	Geometria del taxi		
F46	Miralls i calidoscopis		

F47	Mosaics amb peces mòbils		
F48	Mosaics dibuixant		
F49	Mosaics de Penrose amb peces magnètiques		
F50	Pentàgons regulars fent nusos		
F51	Els poliminós	G9 Els pentominós G10 Els hexaminós	
F52	Els poliamants	G11 Els poliamants	
F53	El tangram xinès		
F54	L'ou màgic		
F55	Grafs i cordills		
F56	Barres de mecano		
F57	Mediatriu al pati		
F58	El joc dels vaixells i les coordenades polars		
F59	Rombes per anar de l'espai al pla		
F60	Unitats de mesura amb peces mòbils		
F61	El geoespai		
F62	Policubs	G12 Policubs: Comptem cubets!	
F63	Dominó de volums		
F64	Plot		
F65	El decímetre cúbic i el litre	G13 El decímetre cúbic i el litre	V11
F66	Prismes i piràmides, cilindres i cons		V11
F67	Geometria amb imants		V12
F68	Construcció de políedres a partir de les arestes		
F69	Políedres amb palletes i neteja-pipes		
F70	Políedres amb Lokon, Polydron...		V13
F71	Políedres amb làmines de plàstic transparent i cinta adhesiva		
F72	Icosàedre i rectangles auris		

F73	Construcció d'un icosaèdre gegant		V14
F74	Del volum de l'esfera a la superfície de l'esfera		
F75	Pissarra esfèrica		
F76	Coordenades en 3D		
F77	Geometria amb bombolles de sabó		V15
F78	L'el·lipse al pati		
F79	Construcció d'una el·lipse pel mètode del jardiner		V16
F80	La hipèrbola al pati		
F81	Construcció d'una hipèrbola amb regle i cordill		V16
F82	Paràbola al pati		
F83	Construcció d'una paràbola amb regle, escaire i cordill		V16
F84	Els ovals de Cassini al pati		
F85	Lloc geomètric dels punts tals que la divisió de distàncies a dos punts donats és constant		
F86	Còniques doblgant paper	G14 Còniques doblgant paper	V17
F87	Rebots en una el·lipse		V18
F88	Rebots en una paràbola		V18
F89	La tractriu		
F90	Fitxes de colors per combinatòria	G15 Combinatòria amb fitxes de colors	
F91	Simulador de la regressió lineal		
F92	Daus		
F93	Cursa d'obstacles de probabilitat		V19
F94	Probabilitats per un tub		
F95	Com cau una xinxeta?	G16 Com cau una xinxeta?	V20
F96	Urnes, poblacions i mostres	G17 Urnes, poblacions i mostres	
F97	Quantes persones es manifestaven?	G18 Quantes persones es manifestaven?	

F98	Quants cigrons hi ha en un quilogram de cigrons?	G19	Quants cigrons hi ha en un quilogram de cigrons?	V21
F99	Les monedes de Buffon	G20	Les monedes de Buffon	V22
F100	Agulla de Buffon			V23
F101	Màquina de Galton			V24

11. Un recobriment del currículum de secundària a través de RMAE

Un objectiu natural de la sistematització en l'ús de qualsevol metodologia didàctica és que permeti un cert recobriment del currículum. En aquest sentit recordem el que s'exposava en el capítol 3 de la present memòria. Ara ens proposem aportar una certa resposta a aquest objectiu en l'àmbit dels RMAE.

A partir de la distribució curricular establerta en el Decret 179/2002, de 25 de juny, per a l'ESO i en el Decret 182/2002, de 25 de juny, per al batxillerat, hem dissenyat un recobriment del currículum de secundària a través d'activitats experimentals de manera que, a cada bloc de continguts, s'assignen RMAE que puguin ser útils per a treballar-los a classe. Aquesta és una peça fonamental per tres raons:

- Posa en contacte els RMAE amb el currículum al qual han de servir.
- Dóna unitat al projecte, creant una línia d'on *pengen* totes les activitats.
- Va dibuixant una metodologia experimental global, sòlida i coherent.

Es tracta d'una eina que permet respondre a preguntes del tipus: *"Estic fent les fraccions a primer d'ESO, quins materials podria portar a classe?"* o *"Estic fent les còniques a primer de batxillerat, quins recursos experimentals podria emprar?"*.

Detallem la proposta de recobriment a través dels dos documents que formen l'annex E i que porten per títols: *"Una proposta de recobriment del currículum d'ESO amb activitats experimentals"* i *"Una proposta de recobriment del currículum de batxillerat amb activitats experimentals"*. Essencialment aquests documents estan formats per quadres en els quals, en paral·lel, es relacionen els continguts curriculars amb els recursos materials i les activitats experimentals. Per aquests darrers emprarem el següent codi de colors que, si és el cas, els vincula amb el catàleg, els guions, els enregistraments o amb els informes de col·leccions:

- Blau:** Activitats o materials que estan descrits en el catàleg de fitxes. S'indica el codi de la fitxa corresponent en forma de *Fn*. En alguns casos hi ha propostes de guió que s'indiquen amb un codi *Gn*. Si hi ha enregistrament en vídeo de l'activitat també s'indica amb el mot *Vídeo*.
- Vermell:** Materials que no es descriuen en fitxes específiques però que s'esmenten i se'n presenten fotografies en algun dels informes sobre col·leccions de materials. En cada cas s'indicarà la col·lecció on apareix el corresponent material.
- Verd:** Activitats pràctiques i materials que també poden ser emprats per a treballar el tema però que no tenen ni fitxa específica ni es presenten en els informes sobre col·leccions de materials. Tan sols es proposa la idea per si el professorat la vol seleccionar.

12. Competències bàsiques i RMAE

El concepte de competència és una idea en expansió dins dels sistemes educatius europeus. El document d'Eurydice *Competencias clave*¹⁹ ens ofereix un estudi comparat d'aquest concepte i de la seva presència en el currículum dels diferents països europeus. Així la nostra expressió de *competència bàsica*, en altres indrets, correspon a *competència clau* o *competència essencial*. En general la funcionalitat del concepte de competència aporta un enriquiment de la formulació dels propòsits curriculars que, en els darrers temps, s'ha manifestat força fecunda.

L'objectiu d'aquest capítol rau en posar de manifest, la relació entre l'ús de RMAE i l'assoliment de competències bàsiques. Si bé no estava previst en el projecte inicial i l'abast d'aquest tema és tan gran que depassa els propòsits del present estudi, ens ha semblat que era bo incloure-hi algunes referències tan sols a tall d'exemple i sense cap pretensió d'exhaustivitat.

Dedicàvem un dels primers capítols d'aquesta memòria, el tercer, a proposar un marc general tot relacionant el concepte de competència matemàtica amb iniciatives de canvi entre les quals assenyalàvem l'ús de RMAE. Pensem que és interessant dedicar el present capítol, un dels darrers d'aquesta memòria, a concretar aquesta relació.

Serà interessant partir de dues definicions:

- La definició general de *competència* que apareix en els documents del Departament d'Educació i Universitats i que ja citàvem en el capítol tres és: *la capacitat d'una persona per posar en pràctica de manera integrada aquells coneixements adquirits, aptituds i trets de la personalitat que permeten resoldre situacions diverses dins de la posició natural, cultural i social on viu.*²⁰
- En el cas concret de la *competència matemàtica* hem de fer referència a la definició del matemàtic danès Morgens Niss, una de les persones que més ha treballat en el programa PISA: *Competència matemàtica és l'habilitat d'entendre, jutjar, fer i usar matemàtiques en una gran varietat de situacions i contextos en els quals la matemàtica juga, o podria jugar, un paper important.*

Com ja fèiem notar en el capítol tres, en les definicions de competència sempre es relacionen tres aspectes: els continguts específics que estan en la base curricular i que sempre es contempen de manera integrada entre disciplines, els processos generals multifuncionals i la capacitat d'aplicació contextualitzada que inclou components transversals, consubstancials amb la mateixa idea de competència.

Els RMAE són eines idònies d'apropament al context que poden jugar un bon paper en l'assoliment de competències matemàtiques. En aquest apartat intentarem posar de manifest aquesta idea a través d'un seguit d'exemples que relacionen competències matemàtiques i RMAE. Per a la nostra reflexió prendrem dos referents: les competències bàsiques en l'àmbit matemàtic que es proposen a la Conferència Nacional d'Educació i les competències prioritzades en les proves de segon d'ESO per

¹⁹ Eurydice. *Competencias clave*. Comissió Europea. Direcció General d'Educació i Cultura. [en línia] < <http://www.eurydice.org/Documents/survey5/es/FrameSet.htm> > [Consultat: 4 abril 2006]

²⁰ Departament d'Educació i Universitats. *Cb, Xarxa de competències bàsiques* [en línia] <<http://phobos.xtec.es/xarxacb/>> [Consultat: 21 març 2006]

al curs 2005-2006. A continuació les detallem indicant al davant un codi *Cbn* i *Mn* que després ens permetrà relacionar-les amb els RMAE.

Les competències bàsiques en l'àmbit matemàtic que es proposen a la Conferència Nacional d'Educació són quinze (cadascuna desglossada, al seu torn, en un conjunt de competències més concretes distribuïdes entre primària i secundària) classificades en sis dimensions²¹:

Dimensió: nombres i càlcul

- Cb1.** Usar i interpretar llenguatge matemàtic en la descripció de situacions properes i valorar críticament la informació obtinguda.
- Cb2.** Aplicar les operacions aritmètiques per tractar aspectes quantitius de la realitat valorant la necessitat de resultats exactes o aproximats.
- Cb3.** Decidir el mètode adequat de càlcul (mental, algorismes, mitjans tecnològics...) davant d'una situació donada i aplicar-lo de manera eficient.
- Cb4.** Aplicar la proporcionalitat directa o inversa per tal de resoldre situacions properes que ho requereixin.

Dimensió: resolució de problemes

- Cb5.** Planificar i utilitzar estratègies per afrontar situacions problemàtiques mostrant seguretat i confiança en les capacitats pròpies.
- Cb6.** Presentar, d'una manera clara, ordenada i argumentada, el procés seguit i les solucions obtingudes en resoldre un problema.
- Cb7.** Resoldre problemes que impliquin càlculs percentuals, de l'IVA, del tipus d'interès... relacionats amb l'administració de rendes pròpies.
- Cb8.** Integrar els coneixements matemàtics amb els d'altres matèries per comprendre i resoldre situacions.

Dimensió: mesura

- Cb9.** Mesurar d'una manera directa les magnituds fonamentals, usant els aparells adequats i les unitats adients en cada situació.
- Cb10.** Fer estimacions raonables de les magnituds més usals i valorar críticament el resultat de les mesures realitzades.
- Cb11.** Usar els mètodes elementals de càlcul de distàncies, perímetres, superfícies i volums en situacions que ho requereixin.

Dimensió: geometria

- Cb12.** Emprar el coneixement de les formes i relacions geomètriques per descriure i resoldre situacions quotidianes que ho requereixin.

²¹ Conferència Nacional d'Educació [en línia] <http://www.gencat.net/cne/p10matematic.pdf>
[Consultat: 25 març 2006]

Cb13. Utilitzar sistemes convencionals de representació espacial (maquetes, plànols, mapes...) per obtenir o comunicar informació relativa a l'espai físic.

Dimensió: tractament de la informació

Cb14. Interpretar i presentar informació a partir de l'ús de taules, gràfics i paràmetres estadístics, i valorar la seva utilitat en la societat.

Dimensió: atzar

Cb15. Reconèixer situacions i fenòmens pròxims en què intervé la probabilitat i ser capaç de fer prediccions raonables.

Les competències prioritzades en les proves de segon d'ESO per al curs 2005-2006 són les següents:

M1. Aplicar el coneixement del sistema de numeració decimal i de les operacions per comparar, relacionar números i operar amb rapidesa, buscant segons la situació un resultat exacte o aproximat.

M2. Usar tècniques i estratègies de representació geomètrica per descriure, raonar i projectar canvis en les formes i en els espais.

M3. Emprar amb precisió i criteri les unitats de mesura.

M4. Usar amb propietat instruments i tècniques per dibuixar, mesurar i calcular.

M5. Planificar i seguir estratègies de resolució de problemes i modificar-les, si no es mostren prou eficaces.

M6. Usar i interpretar llenguatge matemàtic com ara xifres, signes i altres representacions gràfiques o dibuixos per descriure fenòmens habituals.

M7. Interpretar la funció que fan els nombres quan apareixen en un context real (expressar quantitat, identificació, temps, mesura, intervals) i usar-los d'acord amb les seves característiques.

M8. Reconèixer i interpretar gràficament relacions senzilles de dependència funcional existents entre conjunts de dades d'ús quotidià, en particular en casos de proporcionalitat directa.

M9. Comparar la factibilitat de fets aleatoris en situacions simples.

El quadre següent relaciona una mostra de trenta cinc dels RMAE del catàleg que s'ha descrit en el capítol deu amb les competències bàsiques de l'àmbit matemàtic i amb les competències prioritzades per al curs 2005-2006:

- En la primera columna s'indica el RMAE concret amb el seu codi *Fn*.
- En la segona columna s'indica, a través del seu codi *Cbn*, una o més competències bàsiques de l'àmbit matemàtic que puguin treballar-se especialment bé amb el RMAE.

- En la tercera columna s'indica, a través del seu codi *Mn*, una o més competències prioritzades que puguin treballar-se especialment bé amb el RMAE.

Com s'ha dit no es pretén fer una exploració completa –que seria inabastable– sinó tan sols aportar un conjunt ampli i consistent d'exemples il·lustratius de la relació entre RMAE i competències bàsiques de l'àmbit matemàtic.

RMAE	Competències bàsiques	Competències prioritzades
Reglets de Maria Antònia Canals (F2)	Cb12	M2
Els blocs multibase (F5)	Cb9 Cb10	M3
Quadre de fraccions unitàries (F7)	Cb1	M1
Dominós i cartes de fraccions (F10, F11, F12)	Cb1	M1
Descobrim π (F13)	Cb2 Cb9	M4
Trencaclosques de càlcul mental (F14)	Cb3 Cb5	M1
Funcions a partir de rectangles isoperimètrics i de rectangles equivalents (F21)	Cb4 Cb9	M6 i M8
Gràfics de funcions d'emplenat d'ampolles (F22)	Cb1 Cb9	M6 M8
El pantògraf (F27)	Cb12	M4
Mesura de longituds i d'àrees amb fil i paper vegetal quadriculat (F28)	Cb13	M2 M6
Mirallet, mirallet per què m'has fet tan petitet? (F30)	Cb12	M2
Dominó d'angles (F32)	Cb13	M2 M3
Goniòmetres per a treballs de camp (F33)	Cb9 i Cb10	M4
Tot tallant cilindres de plastilina (F35)	Cb5 Cb6	M6
El geoplà (F36)	Cb12 i Cb13	M2
Dominó d'àrees (F38)	Cb13	M2 M3
Rectangles amb igual perímetre i cilindres amb igual àrea lateral (F41)	Cb12	M2
Demostracions del teorema de Pitàgores amb peces mòbils (F42)	Cb6	M2

Teorema de Viviani (F43)	Cb6	M2
Miralls i calidoscopis (F46)	Cb12	M2
Els poliminós (F51)	Cb12	M2
El tangram xinès (F53)	Cb5 Cb12	M2
Grafs i cordills (F55)	Cb1 Cb5 Cb8 Cb12	M5 M2 M6
El geoespai (F61)	Cb13	M2
Policubs (F62)	Cb12 i Cb13	M2
El decímetre cúbic i el litre (F65)	Cb9 Cb10	M3
Prismes i piràmides, cilindres i cons (F66)	Cb9 Cb10	M2
Geometria amb imants (F67)	Cb13	M2
Políedres amb Lokon, Polydron... (F70)	Cb12	M2
Daus (F92)	Cb15	M9
Cursa d'obstacles de probabilitat (F93)	Cb15	M9
Probabilitats per un tub (F94)	Cb15	M9
Urnes, poblacions i mostres (F96)	Cb4 Cb14	M7 M8
Quantes persones es manifestaven? (F97)	Cb1 Cb2 Cb4	M7 M8 M5
Màquina de Galton (F101)	Cb8 Cb15	M9

13. Difusió del treball

Per tal de difondre els resultats obtinguts en la nostra llicència s'han portat a terme diverses activitats. En tots els casos s'ha fet constar que la realització del treball ha estat possible gràcies a una llicència retribuïda concedida pel Departament d'Educació i Universitats de la Generalitat de Catalunya. Les accions portades a terme són les següents:

- Dues sessions sobre "*Laboratori de Matemàtiques*" impartides, dins d'un pla de formació continuada del professorat, als Centres de Professorat d'Inca-Manacor i de Palma de Mallorca a les Illes Balears.
- El dia 15 de febrer de 2006 es va impartir una conferència sobre com l'ús de materials manipulatius pot ajudar a assolir les competències bàsiques. Va ser organitzada per la xarxa de centres que treballen les competències bàsiques del Departament d'Educació i Universitats i es va portar a terme a l'IES Menéndez i Pelayo de Barcelona. S'hi va mostrar abundant material.
- La setmana del 20 al 24 de febrer de 2006 es va impartir un curs de formació del professorat de 15 hores de durada entorn a l'ús de recursos materials i activitats experimentals a l'educació matemàtica a secundària organitzat per conjuntament l'ICE de la UdG i l'aula Lluís Santaló de la UdG.
- Els dies 7 i 8 de març de 2006 es varen impartir dues conferències –el dia 7 destinada a professorat de primària i el dia 8 a professorat de secundària– amb el títol "*Material manipulable a l'aula de matemàtiques*". Aquestes conferències varen estar organitzades pel Departament d'Educació i Universitats en el marc de la posta en marxa del programa de formació en pràctica reflexiva dins de l'àrea de matemàtiques.
- La segona de les conferències anteriors va ser enregistrada pel Programa de Mitjans Audiovisuals del Departament d'Educació i Universitats i es va penjar a internet de manera que pot ser visualitzada des de l'adreça de la XTEC destinada a *e-conferències*:

<http://www.xtec.net/audiovisuals/econferencies/index.html>

Des de la pàgina principal de la XTEC s'accedeix a "*Escola Oberta*" i d'aquí a "*Audiovisuals*". En aquesta pàgina se selecciona "*EConferències*". Després tan sols cal entrar-hi i seleccionar la conferència a què ens referim. Està dividida en dues parts d'una hora de durada cadascuna. Aquest mateix enregistrament s'inclourà en un DVD al qual després ens referirem.

- Els dies 10 i 17 de març de 2006 es varen impartir a Girona dues conferències sobre "*Ús de materials a la classe de matemàtiques*" dins de sengles jornades de presentació de "*Les competències bàsiques de l'àmbit matemàtic*" que van ser organitzades per la Delegació Territorial del Departament d'Educació i Universitats a Girona i es van celebrar a l'IES Vicens Vives de Girona.
- En l'equip de "*Matemàtiques a l'ESO*" de l'ICE de la UdG s'han anat exposant materials diversos i activitats generats i/o catalogats en el marc d'aquesta llicència.
- A finals del mes de juny passat es va lliurar a la revista Biaix un article que resumeix una part de la feina feta en la llicència. El seu títol és "*Materials*"

manipulables a l'aula de matemàtiques" i ja ha estat confirmat que es publicarà en el proper número, al llarg del darrer trimestre d'aquest any 2006.

- El dia 5 de juliol de 2006, en el marc del curs "*De la papiroflèxia als jocs d'atzar: sorpreses matemàtiques*" dins de "*Els juliols de la UB*", es va impartir una sessió de tot un matí amb el títol "*Reflexions sobre un laboratori de geometria. Materials manipulables a l'aula de matemàtiques*" on es va exposar una part del treball desenvolupat en la llicència.
- Tal com s'ha indicat a l'apartat 10.3, el Programa de Mitjans Audiovisuais del Departament d'Educació i Universitats està acabant l'edició d'un DVD que contindrà dos blocs de materials resultat d'aquesta llicència:
 - La conferència sobre "*Material manipulable a l'aula de matemàtiques*" que vaig impartir el dia 8 de març del 2006 a la seu del Departament d'Educació i Universitats, a la qual ja s'ha fet referència.
 - Un conjunt de vint-i-quatre enregistraments en vídeo que presenten fragments de l'aplicació de RMAE a classe a l'IES Sa Palomera de Blanes.
- Tant la present memòria com els documents dels annexos (catàleg de fitxes, mostra de guions, enregistraments en vídeo, informes de col·leccions de materials, recobriment del currículum a través d'activitats experimentals) es lliuraran al Departament d'Educació i Universitats impresos sobre paper i també en disc compacte amb un format integrat que faci àgil la consulta i que, si es considera convenient, faciliti que es pugui posar a disposició del professorat a través d'internet.

14. Conclusió final

La incorporació de RMAE a les classes de matemàtiques de secundària és un camí en el qual queda molt de trajecte per fer. Amb aquest treball, com es deia a l'apartat 1.4, hem intentat aportar una visió global i sistemàtica de la presència dels materials i de les activitats experimentals a l'educació matemàtica a secundària, estudiar les condicions metodològiques del seu ús i posar de manifest els avantatges que, com a complement d'altres activitats de caire més abstracte i formal, pot representar la seva incorporació a la dinàmica docent per a la presentació, consolidació i aplicació d'idees matemàtiques. Bàsicament hem tractat d'explorar tres territoris temàtics: aspectes generals sobre la utilització dels RMAE a les classes de matemàtiques de secundària, aspectes específics que formulen propostes concretes de RMAE i aspectes d'organització de les activitats pràctiques de matemàtiques a secundària.

Pel que fa als aspectes generals sobre la utilització dels RMAE a les nostres classes, s'ha distingit entre material, recurs i activitat, s'ha dibuixat el *cicle vital* d'un recurs, s'ha posat de manifest la polivalència dels recursos materials i s'ha intentat fer diverses observacions entorn a les relacions entre professorat, alumnat i recursos. En aquest bloc hi ha tres aportacions més que ens semblen especialment interessants: la proposta d'un conjunt d'indicadors de qualitat per als recursos materials, la proposta de criteris i eines d'avaluació dels RMAE a partir de la pràctica docent i una classificació que intenta oferir una visió global d'aquest tipus de recursos.

En quant a les propostes concretes de RMAE, es presenta un catàleg extens d'aquest tipus de recursos, guions, enregistraments i informes. Es tracta del nucli més important del treball que hem desenvolupat. Malgrat que l'amplitud d'aquest camp fa que resulti inabastable, hem intentat fer una exploració a fons de molts d'aquests recursos i presentar-los de manera que puguin resultar útils per al professorat insistint especialment en les seves possibilitats didàctiques.

Pel que fa a l'organització de les activitats pràctiques cal tenir en compte que la incorporació de RMAE a les classes de matemàtiques de secundària pot portar-se a terme a partir de models diversos que, a part dels mitjans amb què es pugui comptar, responen a diferents cultures docents i a diferents tarannàs de professorat, departaments i centres. En aquest àmbit la nostra recerca ha intentat aportar un cert perfil de laboratori de matemàtiques, proposar un protocol d'activitats experimentals, estudiar alguns aspectes referents a la incorporació d'aquestes activitats en l'avaluació de l'alumnat, explorar la relació entre competències bàsiques i recursos materials i proposar un recobriment del currículum de secundària a través de RMAE. Aquesta última aportació ens sembla especialment interessant pel fet que dóna unitat al projecte i concreta el seu ús en el marc d'una metodologia experimental global, sòlida i coherent.

Seria molt aconsellable que els centres de secundària disposessin d'un laboratori i/o d'aules específiques per matemàtiques que facilitessin l'ús de RMAE i que poguessin actuar com a espais privilegiats de treball matemàtic i com a focus d'irradiació i difusió de la matemàtica a tota l'escola. Tanmateix pensem que s'hauria d'estimular l'ús d'aquestes instal·lacions però sense lligar-lo a rigideses que, en la nostra matèria, podrien resultar contraproductes. Ens sembla important que els RMAE s'utilitzin de manera natural a les classes de matemàtiques:

- En el moment que s'escaigui atenent al tema tractat, no com una activitat excepcional lligada feblement amb la resta d'activitats.
- Amb la durada que calgui. Hi ha recursos que poden requerir una hora d'atenció, però també n'hi ha molts –la majoria– que requereixen uns pocs minuts i que, per la seva pròpia naturalesa, cal integrar-los en activitats més àmplies.
- En l'espai que sembli més adequat: hi haurà activitats pràctiques que requeriran l'ús del laboratori o d'aules específiques, però moltes altres activitats –la majoria– convindrà realitzar-les a l'aula habitual immerses en el desenvolupament normal de la classe.

Després d'un període d'una forta tendència formalista en l'educació matemàtica, actualment es va recuperant un enfocament didàctic més aplicat i associat al concret. Tanmateix això no es fa d'un dia per l'altre i cal donar temps per tal que la nostra cultura professional vagi incorporant progressivament aspectes experimentals tot mostrant-nos que aquest tipus d'activitats són possibles, fàcils i didàcticament fecundes. Hi ha dos aspectes que ens sembla que hauríem de tenir molt en compte per avançar en aquest camí:

- Procurar que les propostes de pràctiques que es formulin siguin sòlides i rigoroses des del punt de vista matemàtic. Caldrà posar, doncs, molta atenció en els continguts matemàtics evitant la trivialització que es pot produir en el primer contacte amb els RMAE, que no és en absolut justificada i que, molt sovint, ha estat l'element que més ha perjudicat la seva incorporació a l'escola secundària.
- Animar al professorat a usar RMAE des del respecte al seu estil docent, els seus gustos, les seves circumstàncies... i donant temps per a què vagi teixint una relació positiva amb aquest tipus de recursos, els vagi explorant, els vagi reconduint... en definitiva, que se'ls vagi fent seus. Els canvis radicals produeixen inseguretat. Tots els éssers vius –i el sistema educatiu és un ésser viu– ofereixen certes resistències als canvis sobtats per una raó de supervivència. Si desitgem impulsar un moviment sòlid i persistent a favor de la incorporació de RMAE en l'educació matemàtica a secundària no hem de córrer però hem de fer una acció sostinguda en aquest sentit tant en la formació inicial com en la formació continuada del professorat.

La progressiva incorporació de RMAE en l'educació matemàtica a secundària és, tal com s'exposava en el capítol 3, una iniciativa de millora. Ens agradaria que aquest treball pogués convidar i facilitar què alguns companys i algunes companyes, professors i professores de matemàtiques, s'anessin a anar integrant, cada cop més, els RMAE a la seva acció docent. Tanmateix hem d'entendre que, en el camí d'incorporar iniciatives de canvi metodològic, tothom va al seu ritme. L'important no és córrer sinó avançar amb pas segur, de manera reflexiva, serena i plaent, en direccions de millora. Als qui ens agrada el muntanyisme sabem que normalment és més agradable fer camí en grup, que és millor portar un pas constant, que tan sols convé mirar enrere per prendre forces per anar endavant, que no convé portar la motxilla massa plena, que pesa molt... Però ningú s'ha d'angoixar per la seva manera de caminar! El que ens ha de preocupar és estar aturats!

.....

La recerca que ara concloem ha representat una experiència professional profundament enriquidora que desitjo que pugui resultar profitosa per a altres companyes i companys amb qui compartim el plaer d'ensenyar matemàtiques i la il·lusió per aconseguir que el nostre alumnat descobreixi l'encant dels seus reptes. Tan de bo aquest treball aportí elements que puguin ajudar, encara que tan sols sigui una mica, en la tasca que fem tots plegats per millorar l'educació matemàtica.

Agraeixo al Departament d'Educació i Universitats la possibilitat que m'ha donat de fer aquest estudi i la disponibilitat que ha mostrat en tot moment per recolzar-lo.

15. Relació dels materials continguts en els annexos

Annex A: Catàleg de RMAE. S'explica en els apartats 10.1 i 10.5. El volum del catàleg ens ha aconsellat dividir-lo en dos blocs:

- El bloc I conté les fitxes des de la F1 fins a la F50.
- El bloc II conté les fitxes des de la F51 fins a la F101.

Annex B: Mostra de guions. S'explica en els apartats 10.2 i 10.5.

Annex C: DVD amb enregistraments en vídeo. S'explica en els apartats 10.3 i 10.5.

Annex D: Informes de col·leccions de materials. S'explica a l'apartat 10.4.

Annex E: Recobriment del currículum a través d'activitats experimentals. Aquest annex es compon de dos documents que corresponen respectivament al recobriment de l'ESO i del batxillerat. S'explica en el capítol 11.

Annex F: Disc compacte que conté els materials anteriors amb un format integrat que agilitza la consulta i que, si es considera convenient, facilita que es pugui posar a disposició del professorat a través d'internet.

16. Bibliografia comentada

Alsina, C., Burgués, C., Fortuny, J.M. *Materiales para construir la geometría*. Madrid: Síntesis, 1991. (Matemáticas, cultura y aprendizaje; 11).

És un llibre essencial per al tema que tractem tant per les consideracions metodològiques que aporta com per l'extensa col·lecció de propostes que fa. Un dels autors d'aquest llibre, el professor Claudi Alsina, és el supervisor del present estudi.

Alsina, C., Nelsen, R. B. *Math Made Visual. Creating images for understanding Mathematics*. Washington: MAA, 2006.

Es tracta d'un llibre de molt recent publicació que és ja una referència indiscutible en el camp de la visualització en l'ensenyament de les matemàtiques. Al llarg dels seus capítols es va fent un repàs de les moltes possibilitats que l'ús adequat d'imatges ofereix per a la comprensió matemàtica. Ple d'idees innovadores, moltes d'elles portables a la pràctica a través de materials, cada pàgina és una meravellosa invitació al raonament visual.

Alsina, C., Pérez, R., Ruíz, C. *Simetría dinámica*. Madrid: Síntesis, 1989. (Matemáticas, cultura y aprendizaje; 13).

Un llibre molt ben escrit on no tan sols es mostren abundants activitats manipulatives associades a la simetria (frisos, mosaics, miralls...) sinó que també s'atén als seus fonaments matemàtics.

Arnold, V. I. "Models matemàtics durs i models matemàtics tous". A: *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, Vol. 13, núm. 1, 1998. Pàg. 7-26.

Sorprenent article de Vladimir Igorevich Arnold, un dels grans matemàtics russos del segle XX, especialista en equacions diferencials i sistemes dinàmics, on fa una interessant incursió en el camp didàctic que inclou un text molt bonic d'Henri Poincaré.

Aubanell, A. "Material manipulable a l'aula de matemàtiques" [en línia] <<http://www.xtec.net/audiovisuales/econferencias/index.html>> [Consultat: 28 març 2006].

Enregistrament de la conferència pronunciada el 8 de març del 2006 a la sala d'actes del Departament d'Educació i Universitats, realitzat pel Programa de Mitjans Audiovisuals del Departament. S'hi mostra abundant material objecte d'aquesta llicència.

Aubanell, A. "Materials experimentals per al laboratori de matemàtiques". A: *Biaix*, 23, Maig 2005.

A partir de la idea que els materials experimentals poden jugar un paper rellevant en la generació dels conceptes matemàtics, en aquest escrit es fa una proposta de definició de laboratori de matemàtiques, s'analitzen algunes característiques dels recursos experimentals, se suggereixen alguns aspectes metodològics que poden ser útils en portar-los a classe i es presenta un mostrari d'aquests materials.

Aubanell, A. (2004): "El laboratori de matemàtiques". A: *Butlletí d'ABEAM*, número 16.

En aquest escrit, quasi a tall de somni, es dibuixa el perfil del que podria ser el laboratori de matemàtiques d'un centre de secundària: espai, ambientació, objectes, zones...

Batlle, I., Serra, T. i Torra, M. *Matemàtiques a la Carta*. Bellaterra: Publicacions de l'ICE de la UAB, 1995.

Es tracta d'una recopilació molt ben feta d'activitats concretes per portar a les classes de matemàtiques especialment a primària i al primer cicle de l'ESO. Una obra que és fruit de molta experiència docent i que està plena d'idees molt aplicables directament a l'aula.

Castelnuovo, E. *Ideas de matemática*. Madrid: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, revista Suma, 2004.

Es tracta d'una compilació d'articles d'Emma Castelnuovo que ha publicat la FESPM com a homenatge a la gran professora italiana. En aquests escrits, als quals fem repetides referències en el present treball, es descobreix de nou el compromís de la seva autora envers un ensenyament de la matemàtica sempre vinculat a l'entorn i a l'experiència concreta.

Castelnuovo, E. *Numeri e figure*. Roma: La Nuova Italia, 1989.

Es tracta d'un magnífic llibre de text d'Emma Castelnuovo, una de les persones que més ha aportat a la didàctica de la matemàtica durant el darrer segle. Hi ha moltes idees per portar a classe.

Codina, R., Enfedaque, J., Mumbrú, P. i Segarra, L. *Fer matemàtiques*. Barcelona: Publicacions UB, 1992.

Un llibre ple d'idees sobre l'ús de materials a l'escola. Si bé respon a un enfocament més dirigit a l'educació primària, hi ha idees que també són ben útils per a secundària.

Cockcroft, W. H. [et al.]. *Las matemáticas sí cuentan. Informe Cockcroft*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia. Subdirección General de Perfeccionamiento del Profesorado, 1985.

Es tracta d'una referència bàsica en educació matemàtica que té la virtut de tractar temes concrets de l'àmbit escolar, d'analitzar-los amb un gran bagatge de documentació i d'oferir un criteri nítid. Si bé els anys han passat, moltes de les seves recomanacions són ben actuals.

Corbalán, F. *La matemática aplicada a la vida cotidiana*. Barcelona: Graó, 1995. (Biblioteca de aula; 6).

Es tracta d'un llibre de molt fàcil lectura i ple de connexions entre la matemàtica i l'entorn natural, social i cultural que ens envolta. Molt interessant per treure idees útils en l'educació secundària.

Crosby, A. W. *La medida de la realidad*. Barcelona: Crítica, 1988.

Es tracta d'un llibre relativament curt i de lectura molt agradable. Ple de curiositats entorn a l'origen de la quantificació a la societat occidental (1250-1600).

Departament d'Educació i Universitats. *Cb, Xarxa de competències bàsiques* [en línia] <<http://phobos.xtec.es/xarxacb/>> [Consultat: 10 març 2006].

És una pàgina web, depenent del Departament d'Educació, que acull la xarxa de centres que treballen les competències bàsiques. Es tracta d'un referent fonamental en aquest camp a Catalunya.

Estivill, A., Urbano, C. *Com citar recursos electrònics* [en línia] <<http://www.ub.es/biblio/citae.htm>> [Consultat: 21 març 2006].

Estudi molt acurat on s'aporta un model coherent de citacions i referències a recursos electrònics. Els autors són professors de la Facultat de Biblioteconomia i Documentació de la Universitat de Barcelona

Eurydice. *Competencias clave*. Comissió Europea. Direcció General d'Educació i Cultura [en línia] <<http://www.eurydice.org/Documents/survey5/es/FrameSet.htm>> [Consultat: 4 abril 2006].

Interessant estudi sobre la idea de competència clau, comparant els termes i les definicions emprades a diferents països europeus i la seva relació amb el currículum.

Fletcher, T. J. *Didáctica de la matemática moderna en la enseñanza media*. Barcelona: Teide, 1968.

Un llibre fonamental que, en el seu moment, en plena etapa del que s'ha anomenat *matemàtica moderna*, va inspirar molt bona pràctica docent. Hi ha

moltes idees sobre materials especialment relacionades amb els continguts que aquella tendència accentuava.

Freudenthal Institut. *KidsKount* [en línia] <<http://www.fi.uu.nl/rekenweb/en/welcome.xml>> [Consultat: 23 maig 2006].

Es tracta d'una pàgina encantadora carregada d'idees. Tanmateix el més rellevant als efectes del nostre estudi és que la majoria dels applets que es presenten poden associar-se de manera molt directa amb el maneig de materials concrets. Constitueixen una bona demostració de la beneficiosa complementaritat entre recursos materials i recursos virtuals.

Garcia, J., Beltran, C. *Geometría y experiencias*. Madrid: Alhambra, 1988. (Biblioteca de recursos didácticos; 20).

Un llibre deliciós i molt ben documentat ple de propostes didàctiques en el camp de la geometria on s'observa el profund coneixement que tenen els autors de les dinàmiques d'aula.

Guibert, A., Lebeaume, J., Mousset, R. *Actividades geométricas para la educación infantil y primaria*. Madrid : Narcea, cop. 1993.

Es tracta d'un llibret ple de recursos concrets per portar a les aules de l'educació infantil i primària. Tanmateix, però, també s'hi troben bones idees per a secundària.

Guillén, G. *El mundo de los poliedros*. Madrid: Síntesis, 1991. (Matemáticas, cultura y aprendizaje; 15).

Es tracta d'un llibre molt especialitzat però ple d'idees per treballar els políedres a classe. Al mateix temps que aporta un impressionant volum d'informació s'observa una constant voluntat didàctica a través de propostes d'activitats concretes.

Gullberg, J. *Mathematics: From de Birth of Numbers*. New York: Ed. W. W. Norton & Company, 1996.

Es tracta d'un gran compendi de Matemàtiques que és ideal com a obra avançada de consulta.

Guzmán, M. de. *Para pensar mejor: desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos*. Madrid: Pirámide, 1994.

És un llibre encantador dedicat especialment a la resolució de problemes. En el present treball el citem per posar de manifest una analogia entre els bons problemes i els bons materials. Un llibre absolutament recomanable.

Guzmán, M. de. "Tendències innovadores en educació matemàtica". A: *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, número 7, setembre de 1992.

Una referència indispensable en el camp de la didàctica de les matemàtiques. El recentment desaparegut Miguel de Guzmán, un dels grans matemàtics espanyols dels darrers anys, fa un repàs lúcid i exhaustiu de les idees més rellevants de l'educació matemàtica actual.

Guzmán, M. de. *Textos de Miguel de Guzmán*. Madrid: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, revista Suma, 2005.

Un llibret petit, publicat com homenatge pòstum a Miguel de Guzmán, que recull un conjunt d'escrits didàctics on mostra la seva interessant i clara visió de l'educació matemàtica.

Hernán, F., Carrillo, E. *Recursos en el aula de Matemáticas*. Madrid: Síntesis, 1999.

Un llibre ple d'idees, essencial pel tema que tractem en aquest estudi. És especialment interessant la manera que té de presentar els recursos associant-los a la seva funcionalitat didàctica. Molt agradable de llegir i compromès amb la pràctica docent concreta.

Halmos P. R. "The Problem of Learning to Teach". A: *American Mathematical Monthly*, vol. 82, núm. 5, maig 1975, pàg. 466-476.

Bonic article del qual nosaltres citem un text especialment significatiu però que, tot ell, és molt interessant i amè. Està dedicat sobretot a l'ensenyament de la resolució de problemes.

Herrero Pérez, J.L., Lorenzo Blanco, J. "La invisibilidad de las Matemáticas". A: *SUMA*, núm. 28, juny 1998, pàg. 27-30.

Es tracta d'un article interessant sobre l'aparent paradoxa que, per un costat, les matemàtiques són presents arreu i, per l'altre, són poc visibles a l'entorn quotidià.

Hirst, K. E., "La medida de distancia en Barcelona". A: *SUMA*, núm. 24, febrer 1997, pàg. 63-66.

Un article curt però molt curiós que compara l'anomenada "*mètrica de Manhattan*" amb la mètrica resultant a Barcelona si es té en compte l'avinguda Diagonal. Nosaltres ho fem en una fitxa concreta dedicada a la geometria del taxi.

Holm, Cristina. Les competències clau. A: *Cathedra*, 2006, núm. 18.

Es tracta d'un article breu però molt ben documentat i agradable de llegir entorn a les competències clau i al projecte *DeSeCe* (2003) de l'OCDE.

Lindsay, R. L. (ed.). *Mathematics Laboratories in Schools*. Londres: G. Bell & Sons Ltd., 1968.

Es tracta d'un llibret petit i relativament antic però molt interessant que descriu, amb molt de detall, laboratoris concrets de centres escolars anglesos. S'hi poden treure moltes idees.

Marcar les diferències: la representació de dones i homes a la llengua. Barcelona: Generalitat de Catalunya, Secretaria de Política Lingüística, Institut Català de la Dona, 2005.

Document summament detallat i complet que fa recomanacions i aporta abundants exemples sobre l'ús d'un llenguatge no sexista en els documents.

National Council of Teachers of Mathematics. *Applications in School Mathematics*. Reston, Virgínia: NCTM, 1979.

Un llibre molt interessant perquè fa una exploració tan àmplia com completa d'aplicacions de les matemàtiques que poden ser útils al professorat per incorporar-les a les seves classes de primària i, especialment, de secundària.

Nelsen, R. B. *Demostraciones sin palabras*. Granada: Proyecto Sur, 2001.

Un llibre encantador que representa una gran aportació en el camp de la visualització com a instrument de demostració en matemàtiques i que mostra, amb nombrosos exemples, que el desenvolupament formal de cadenes de proposicions no és l'únic camí per al raonament matemàtic.

Pardo, T. i Rey, J. *Prácticas de Matemáticas en Primero de BUP*. En les actes de les *III Jornadas sobre aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas*, Saragossa, 1984.

Es tracta d'un petit escrit molt rellevant per dues raons: perquè explica pràctiques concretes molt interessants i perquè va ser pioner en aquest tipus de propostes.

Paulos, J. A. *Érase una vez un número*. Barcelona: Tusquets Editores, 1999 (Col·lecció Metatemas).

Un llibre bonic de llegir que relaciona, d'una manera tan seriosa com divertida, l'estadística, la probabilitat i la lògica amb situacions de la vida quotidiana.

Pólya, G. "On Learning, Teaching and Learning Teaching". A: *American Mathematical Monthly*, 70, 1963, pàg. 605-619.

Un article tan curt com deliciós d'un dels grans mestres de la matemàtica i de la didàctica de la matemàtica del segle XX. En alguns dels seus paràgrafs fa una decidida defensa dels materials manipulatiu a l'educació matemàtica.

Proposta de representació de referències i citacions bibliogràfiques. Barcelona: Universitat de Barcelona, Servei de Llengua Catalana, 1991.

Es tracta d'un llibret relativament curt que proposa criteris clars, homogenis i coherents de representació bibliogràfica destinats a la comunitat universitària. En ell ens hem basat per establir el tractament de les referències i citacions bibliogràfiques d'aquest estudi.

Puig Adam, P., *Curso de Geometría Métrica.* 12 edició, volums I i II. Madrid: Gómez Puig, ediciones, 1981.

És un referent essencial en el camp de la geometria tant per l'extensió de temes que abasta com per la profunditat i claredat amb què els tracta. D'ell hem tret diverses idees referents a còniques i al pantògraf.

Puig Adam, P., *Didáctica Matemática Eurística.* Madrid: Instituto de Formación del Profesorado de Enseñanza Laboral, 1956.

És un llibre molt bonic que ofereix 30 lliçons concretes sobre l'ensenyament de les matemàtiques mitjançant l'ús de materials. Ple d'idees originals que poden resultar molt útils a classe. N'és un exemple l'ús que proposa dels reglets de Cuisenaire per desenvolupar una lliçó sobre congruències i classes residuals i una lliçó sobre progressions aritmètiques d'ordre superior.

Puig Adam, P., *El material didáctico actual, presentado en la XI reunión de la Comisión Internacional para el Estudio y la Enseñanza Matemática y Exposición Internacional simultánea (Madrid, 21-27 de abril de 1957).* Madrid: Publicaciones de la revista Enseñanza Media, 1958.

Seria impossible desenvolupar un treball com el que teniu a les mans sense fer referència a aquest llibre que resulta del tot sorprenent tenint en compte l'any en què fou escrit, que recull aportacions de grans personalitats de la didàctica europea del segle passat i que mostra, amb abundants imatges, l'enorme esforç que va fer el professor Puig Adam per donar una bona embranzida a l'ús de recursos materials dins de les classes de matemàtiques de secundària. Les tendències formalitzadores posteriors que varen caracteritzar l'educació matemàtica varen malmetre part d'aquest esforç que ara hem de recuperar.

Puig Adam, P., *La Matemática y su enseñanza actual.* Madrid: Ministerio de Educación Nacional, 1960.

Es tracta d'un llibre curt però molt bonic on Puig Adam exposa idees concretes sobre un enfocament pràctic de l'educació matemàtica.

Rényi, A. "Un diàleg sobre les aplicacions de les matemàtiques". A: *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques.* 2004, vol. 19, núm. 1, pàg. 62.

Es tracta d'un article on un dels grans matemàtics hongaresos del segle XX, Alfréd Rényi, recrea un imaginari diàleg socràtic entre Arquímedes i el rei Hieró II de Siracusa entorn al debat *matemàtica pura versus matemàtica aplicada.*

Rey Pastor, J., Pi Calleja, P., Trejo, C.A. *Análisis Matemático*, Volumen I. Buenos Aires: Editorial Kapelusz, 1952.

Referència matemàtica fonamental en el camp de l'anàlisi. Rey Pastor fou un dels gran matemàtics espanyols del segle XX i aquest llibre una de les seves obres clàssiques.

Sabaté, D. *La geometria a secundària*. Barcelona: Institut de Ciències de l'Educació, Universitat Politècnica de Catalunya, 2005.

És un llibre excel·lent que ofereix una visió conjunta molt interessant i suggeridora de l'ensenyament de la geometria i aporta moltes idees i propostes concretes de treball en temes específics. Ha estat editat, en format electrònic, a l'adreça <http://abeam.ensenyacom/geomsecice.pdf>.

Shell Centre for Mathematical Education. *El lenguaje de funciones y gráficas*. Bilbao: Servicio Editorial. Universidad del País Vasco, 1990.

Un llibre sorprenent i profundament innovador sobre el tractament de les funcions i els gràfics en l'educació secundària. Ple d'idees didàctiques que responen a una visió aplicada de les funcions i que cultiven l'ampli espai que s'obre entre la introducció del concepte de funció i la presentació d'idees analítiques complexes com el límit o la derivada.

Sutton, Daud. *Sólidos platónicos y arquimedianos*. Barcelona: Oniro, 2005.

Es tracta d'un llibret petit i encantador, amb una redacció acurada i, sobretot, uns dibuixos (fets pel propi autor) molt bonics. És una referència indispensable en el tema de políedres.