

Moviment circular

1. El moviment circular com el moviment parabòlic és un moviment en dues dimensions, per tant el podríem estudiar en coordenades cartesianes (x,y), però resulta més còmode fer-ho en coordenades polars.
2. Coordenades polars.
 - (a) Cal un punt O que rep el nom d'origen de coordenades i que normalment es fa coincidir amb el centre de la trajectòria (circumferència).
 - (b) Cal escollir una semirecta amb origen en l'origen de coordenades i que servirà de referència pels angles (semirecta origen d'angles).
 - (c) Les coordenades polars d'un punt de l'espai es representen per r i θ .
 - (a) r és la distància del punt en qüestió a l'origen de coordenades i per definició sempre és un nombre positiu.
 - (b) θ és l'angle que la recta que uneix el punt amb l'origen de coordenades forma amb la semirecta origen d'angles.

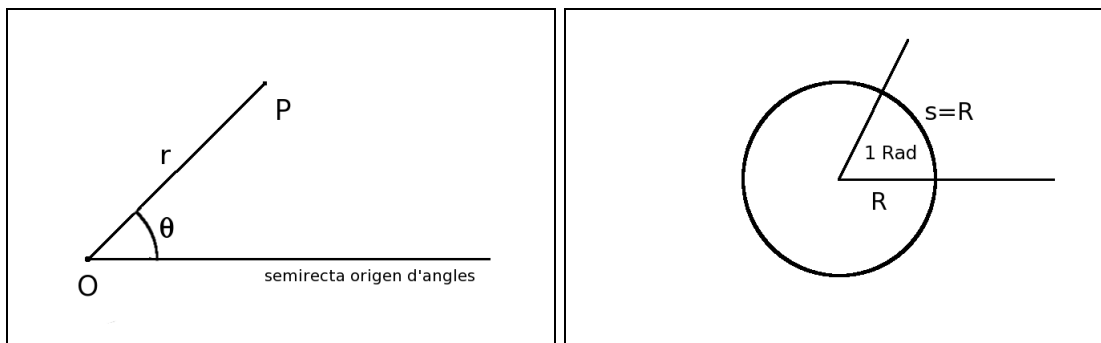


Figura 1: Esquerra:Coor.polars; Dreta: El Radian

- (c) El Radian, la unitat en què mesurarem els angles.
 - (a) Definim el Radian com l'angle corresponent a una arc la longitud del qual és igual a la longitud del radi amb què s'ha traçat.
 - (b) Una conseqüència de la definició és la fórmula,

$$s = R \cdot \theta \quad (1)$$

vàlida només quan l'angle es mesura en Radiants.

- (c) L'equivalència entre Rad i graus és $2\pi \text{ Rad} = 360^\circ$.

3. Velocitat angular.

- (a) Velocitat angular mitjana. És fàcil de definir, però no és la magnitud que ens interessa. Si un mòbil passa de la posició inicial θ_0 , a la posició final θ , definim la velocitat angular mitjana, ω_m , de la següent manera:

$$\omega_m = \frac{\theta - \theta_0}{t - t_0} \quad (2)$$

- (b) Velocitat angular instantània (o simplement velocitat angular). És la velocitat angular que té el mòbil en un instant. Naturalment a cada instant el mòbil té una velocitat angular. El problema és que per definir-la amb una fórmula matemàtica ens cal el concepte de derivada d'una funció, que encara no disposem.

La velocitat angular es representa per ω .

- (c) Les unitats en què es mesuren tant una com l'altra són Rad/s .

4. Moviment circular uniforme (mcu).

- (a) Un mòbil descriu un mcu quan la velocitat angular instantània, ω , és constant. però si ω canvia, la ω_m i la ω han de ser iguals. Això significa, que només quan el moviment és mcu, podem calcular ω com si fos una velocitat mitjana. En definitiva:

$$\omega = \frac{\theta - \theta_0}{t - t_0} \quad (\text{només pels mcu's}) \quad (3)$$

- (b) Equació de la posició. És l'equació que com a primera aplicació ens permet calcular la posició del mòbil a l'instant que ens interressi.

L'obtenim fàcilment a partir de l'equació (3), aïllant θ , obtenint:

$$\theta = \theta_0 + \omega(t - t_0) \quad (4)$$

5. Acceleració angular.

- (a) Quan la velocitat canvia sabem que tenim una acceleració. En aquest cas com el que canvia és la velocitat angular, tenim una acceleració angular.

- (b) Acceleració angular mitjana, α_m :

$$\alpha_m = \frac{\omega - \omega_0}{t - t_0} \quad (5)$$

- (c) Acceleració angular instantània, α : és l'acceleració angular que té el mòbil en un instant. Naturalment en cada instant en té una.

- (d) Les unitats en què es mesuren tant una com l'altra són Rad/s^2 .

6. Moviment circular uniformement variat (mcuv).

- (a) Un mcuv és aquell en què la α és constant. En aquest cas es té $\alpha = \alpha_m$, i per tant només pels mcuv podem calcular α aplicant la fórmula:

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t - t_0} \quad (6)$$

- (b) En els mcuv canvien tant la velocitat com la posició, per tant necessitem dues equacions, una que ens permeti calcular la velocitat a l'instant que vulguem i una altra per fer el mateix amb la posició. Aquestes equacions són:

$$\omega = \omega_0 + \alpha(t - t_0) \quad (7)$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2 \quad (8)$$

7. Magnituds angulars i linials.

- (a) Les magnituds angulars són θ , ω i α , però està clar que un mòbil que descriu un moviment circular recorre una certa distància, que mesurarem en unitats de longitud i no en Radiants, i aquesta distància recorreguda per unitat de temps és una velocitat que mesurarem en m/s i quan aquesta velocitat canviï en una unitat de temps tindrem una acceleració que mesurarem en m/s^2 . Aquestes són les magnituds linials.

- (b) Definim les magnituds linials amb més precisió. La primera és una coordenada que ens permetrà donar la posició com una longitud, la de l'arc corresponent a l'angle θ . Representem la longitud d'arc per s .

La relació entre les dues coordenades, l'angular (θ) i la linial (s) ve donada per l'equació (1): $s = R \cdot \theta$ (veure figura 2).

- (c) Quan el mòbil es mou la posició del mòbil, s , canvia, i podem calcular una velocitat que anomenarem linial i representarem per v aplicant la fórmula,

$$v = \frac{s - s_0}{t - t_0} \quad (9)$$

Tenint en compte l'eq.(1) obtenim,

$$v = \frac{s - s_0}{t - t_0} = \frac{R \cdot \theta - R \cdot \theta_0}{t - t_0} = R \frac{\theta - \theta_0}{t - t_0} \implies v = R \cdot \omega \quad (10)$$

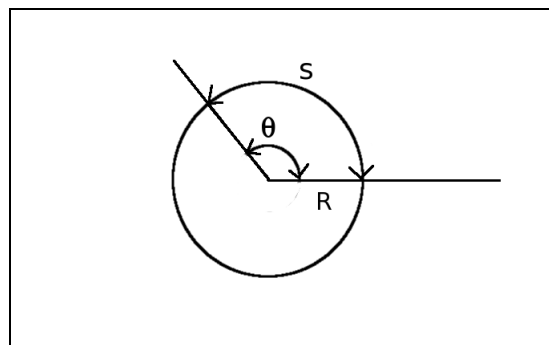


Figura 2: Magnituds angulars i lineals

- (d) Acceleració tangencial: La variació de la velocitat linial per unitat de temps rep el nom d'acceleració tangencial i es representa per a_t i la fórmula que permet calcular-la és:

$$a_t = \frac{v - v_0}{t - t_0} \quad (11)$$

A partir d'aquesta fórmula podem obtenir-ne una altra que a_t amb α :

$$a_t = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \frac{R \cdot \omega - R \cdot \omega_0}{t - t_0} = R \frac{\omega - \omega_0}{t - t_0} \Rightarrow a_t = R \cdot \alpha \quad (12)$$

- (e) En resum, les magnituds lineals són s , v i a_t .
8. El vector velocitat, $\vec{v}$: La velocitat és una magnitud vectorial, és a dir, té un valor i un sentit.
- (a) Valor de $\vec{v}$ és la velocitat linial.
- (b) La direcció és el de la recta tangent a la corba i el sentit el del moviment.

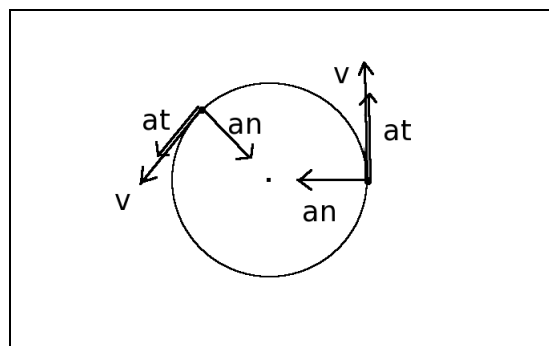


Figura 3: Acceleració normal i acce.tangencial

9. El vector acceleració, $\vec{a}$: L'acceleració, com la velocitat, també és una magnitud vectorial.
- (a) Un mòbil que descriu un moviment circular uniforme té acceleració? En els mcu la velocitat angular és constant, i per tant també la velocitat linial, però no així $\vec{v}$. Per què? Doncs, perquè el sentit de $\vec{v}$ canvia i per tant $\vec{v}$ no és constant, i en definitiva hi ha acceleració. Aquesta acceleració reflecteix el canvi del sentit de la velocitat i rep el nom d'acceleració normal o centrípeta.
- El sentit i el valor de l'acceleració normal són:
- (a) valor : $a_n = \frac{v^2}{R}$ o bé $a_n = \omega^2 \cdot R$
- (b) sentit: perpendicular a la recta tangent a la trajectòria, és a dir adreçat cap el centre de la circumferència.

- (c) Si el moviment és un mcuv, el vector velocitat canvia tant en sentit com en valor, per tant el mòbil que el descriu té acceleració normal (perquè la velocitat canvia en sentit), però també té una altra acceleració que reflecteix el canvi del vector velocitat en valor. Aquesta acceleració s'anomena acceleració tangencial, a_t , la seva direcció és el de la recta tangent a la trajectòria i ja la coneixem, perquè n'hem parlat més amunt. El seu valor és:

$$a_t = \frac{v - v_0}{t - t_0} \iff a_t = R \cdot \alpha \quad (13)$$

- (d) Components intrínseques de l'acceleració: Són l'acceleració normal i la tangencial. Quina relació tenen les components intrínseques de l'acceleració i el vector acceleració? Les components intrínseques són també vectors. Com hem vist a més de valor tenen sentit. L'acceleració del mòbil és la suma vectorial de l'accel.normal i de l'accel.tangencial (Veure com se sumen vectors)