

Física 1r de Batxillerat

Treball i Energia

Setembre de 2010

Definició de Treball

El treball, W , fet per una força constant $\vec{F}$ en desplaçar el seu punt d'aplicació d'un punt A a un punt B, fent un desplaçament $\Delta \vec{r}$ és igual al producte escalar de la força pel desplaçament:

$$W_{A \rightarrow B} = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$$

Tenint en compte la definició de producte escalar, això es pot escriure de la següent manera:

$$W_{A \rightarrow B} = F \Delta r \cos \theta$$

Sent θ l'angle que formen la força i el desplaçament.

- El treball és un escalar (número) i no un vector.
- El treball és un número positiu quan l'angle que formen la força i el desplaçament està comprés entre $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$.
- El treball és un número negatiu quan l'angle que formen la força i el desplaçament està comprés entre $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$.
- El treball és zero, quan la força i el desplaçament formen 90° .

Exemples:

- El treball fet per la força de fregament sempre és negatiu perquè $\theta = 180^\circ$ i $\cos 180^\circ = -1$.
- El treball fet per la força normal val sempre zero, perquè $\theta = 90^\circ$.

Unitats del Treball en el S.I.

Les unitats del treball en el S.I. d'unitats és el Joule (J).

Calculem el treball fet per una força d' $1N$ en desplaçar el seu punt d'aplicació $1m$ en el seu mateix sentit.

Si apliquem la definició de treball tenim:

$$W = 1N 1m \cos 0^\circ = 1N m$$

El producte $1N m$ rep el nom de Joule. Per tant :

Definició de Joule

$1J$ és el treball fet per una força d' $1N$ en desplaçar el seu punt d'aplicació $1m$ en el mateix sentit que la força.

$$1J = 1N m$$

Energia cinètica

Definició de l'Energia Cinètica

Un cos de massa m que es mou a una velocitat $\vec{v}$ posseeix una Energia cinètica, que val:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

On v és el mòdul del vector velocitat.

Teorema de l'Energia Cinètica

Enunciat del Teorema

El treball fet per la Força Resultant que actua sobre un cos és igual a l'increment de la seva Energia Cinètica.

$$W_{A \rightarrow B}^{F_R} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

Cal recordar que l'increment d'una magnitud és el valor de la magnitud al final menys el valor de la magnitud a l'inici.

Comprovació del Teorema de la E_{cin} en un cas particular

Suposarem que la força aplicada és constant i té el mateix sentit que el desplaçament, que representarem per Δx .

$$\begin{aligned} W_{A \rightarrow B}^{F_R} &= F_R \Delta x \cos 0^\circ = m a \Delta x = m \frac{v - v_0}{\cancel{t} - \cancel{t_0}} (v_0 (\cancel{t} - \cancel{t_0}) + \frac{1}{2} a (t - t_0)^2) = \\ &= m (v - v_0) (v_0 + \frac{1}{2} a (t - t_0)) = m (v - v_0) (v_0 + \frac{1}{2} (v - v_0)) = \\ &= m (v - v_0) (\frac{1}{2} v + \frac{1}{2} v_0) = \frac{1}{2} m (v - v_0) (v + v_0) = \\ &= \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 \end{aligned}$$

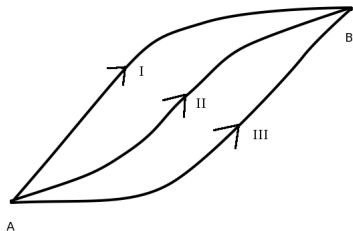
Forces Conservatives.

Definició

Una força és conservativa quan el treball fet per aquesta força quan es desplaça d'un punt A a un punt B és el mateix, sigui quin sigui el camí seguit per fer aquest desplaçament.

És a dir:

$$W_{A \rightarrow B}^I = W_{A \rightarrow B}^{II} = W_{A \rightarrow B}^{III}$$



Forces Conservatives. Energia Potencial

Energia Potencial

El que una força sigui conservativa es tradueix en el fet que el seu treball es pot expressar com a diferència d'una funció (en el sentit matemàtic) de la posició, funció que rep el nom d'Energia Potencial.

$$W_{A \rightarrow B}^{F_{cons}} = E_{pA} - E_{pB}$$

- La diferència d'una magnitud, en aquest cas l'Energia potencial, és el valor inicial menys el valor final de la magnitud.
- Donat que l' E_p només depèn de la posició, es garanteix que el treball és independent del camí seguit, com requereix la definició de força conservativa. Hi insistirem en els exercicis.

El Pes: una força conservativa

El Pes i l'Energia Potencial Gravitatòria

El Pes, és a dir la força de la gravetat, és una força conservativa. Com sabem, es calcula de la següent manera:

$$P = m \cdot g$$

El treball fet pel Pes s'expressa en termes de l'Energia potencial gravitatòria de la següent manera:

$$W_{A \rightarrow B}^{Pes} = m g h_A - m g h_B$$

De manera que l'Energia potencial gravitatòria al punt A val:

$$E_{pA} = m g h_A$$

La força que fa una molla és una força conservativa

La Llei de Hooke i l'Energia Potencial elàstica

La força que una molla fa sobre un cos al qual està unit ve donada per la següent expressió, coneguda amb el nom de Llei de Hooke:

$$F = -k x$$

Es tracta d'una força conservativa de manera que el seu treball s'expressa en forma de diferència d'Energia potencial elàstica:

$$W_{A \rightarrow B}^{elas} = \frac{1}{2} k x_A^2 - \frac{1}{2} k x_B^2$$

Per tant l'Energia potencial elàstica al punt A val:

$$E_{pA}^{elas} = \frac{1}{2} k x_A^2$$

Treball fet per la Força Resultant (I)

Aquest apartat és un incís per presentar un resultat que cal recordar i tenir en compte a continuació.

Considerem un cos sobre el qual actuen n forces. El treball fet per la força resultant es pot calcular seguint dos procediments, que són totalment equivalents:

Primer procediment

- Primerament es calcula la força resultant:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \cdots + \vec{F}_n$$

- En segon lloc s'aplica la fórmula del treball a $\vec{F}_R$ i es calcula el seu treball:

$$W_{A \rightarrow B}^{F_R} = F_R \Delta r \cos \theta$$

Treball fet per la Força Resultant (II)

Segon procediment

- Es calcula el treball de cadascuna de les forces que actuen sobre el cos.
- Es sumen tots els treball calculats i el resultat és el treball fet per la força resultant.

En forma matemàtica podem representar aquest segon procediment així:

$$W^{F_R} = W^{F_1} + \dots + W^{F_n}$$

Aquest segon procediment és el que habitualment s'utilitzarem.

Resolent problemes amb el Treball i l'Energia (I)

L'aplicació del Teorema de l'Energia Cinètica a algunes situacions, permet analitzar-les de forma molt més senzilla que aplicant les Lleis de Newton. L'aplicació d'aquest Teorema s'indica esquemàticament a continuació.

Resolent problemes

- S'aplica el Teorema de l'energia cinètica en la forma:

$$\underbrace{W_{A \rightarrow B}^{F_1} + \dots + W_{A \rightarrow B}^{F_n}}_{W_{A \rightarrow B}^{FR}} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

- Les forces que solen aparèixer són la de fregament, que no és conservativa, una o més forces conservatives, forces que no fan treball (treball igual a zero) i altres. Escriurem, doncs:

$$W_{A \rightarrow B}^{freg} + \underbrace{W_{A \rightarrow B}^{cons}}_{E_{pA} - E_{pB}} + \underbrace{W_{A \rightarrow B}^{Treball nul}}_{=0} + W_{A \rightarrow B}^{alter} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

Resolent problemes amb el Treball i l'Energia (II)

Resolent problemes

- Si suposem que no hi ha altres forces tret de la del fregament, de la conservativa i de les que no fan treball ens queda:

$$W_{A \rightarrow B}^{freg} + E_{pA} - E_{pB} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

- Passant tots els termes energètics a la dreta i reordenant, obtenim una fórmula molt útil per resoldre problemes:

$$W_{A \rightarrow B}^{freg} = \left(\frac{1}{2} m v_B^2 + E_{pB} \right) - \left(\frac{1}{2} m v_A^2 + E_{pA} \right)$$

- La suma de les energies potencial i cinètica és l'energia mecànica, per tant podem escriure el mateix de manera més breu:

$$W_{A \rightarrow B}^{freg} = E_{mB} - E_{mA}$$

Teorema de Conservació de l'energia mecànica (I)

Enunciat i demostració

Si les úniques forces aplicades sobre un cos que fan treball són conservatives, l'energia mecànica del cos es conserva.

Efectivament, si

$$W_{A \rightarrow B}^{freg} = 0$$

resulta que

$$W_{A \rightarrow B}^{freg} = \left(\frac{1}{2} m v_B^2 + E_{pB} \right) - \left(\frac{1}{2} m v_A^2 + E_{pA} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m v_B^2 + E_{pB} = \frac{1}{2} m v_A^2 + E_{pA}$$

Teorema de Conservació de l'energia mecànica (II)

Alguns casos particulars

Si la força conservativa és el Pes:

$$\frac{1}{2} m v_B^2 + m g h_B = \frac{1}{2} m v_A^2 + m g h_A$$

Si la força conservativa és la d'una molla:

$$\frac{1}{2} m v_B^2 + \frac{1}{2} k x_B^2 = \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} k x_A^2$$

Si actuessin les dues, el Pes i la de la molla:

$$\frac{1}{2} m v_B^2 + m g h_B + \frac{1}{2} k x_B^2 = \frac{1}{2} m v_A^2 + m g h_A + \frac{1}{2} k x_A^2$$