

Interacció gravitatòria

Per interacció gravitatòria entenem la interacció (acció mútua) entre dues partícules pel fet de tenir massa.

La física clàssica interpreta aquesta interacció des de dos punts de vista diferents:

- Com una acció directa a distància.
- Com una acció indirecta a través del camp gravitatori.

En la segona interpretació apareix un concepte nou que és el que volem estudiar. Ens referim al concepte camp gravitatori.

Acció directa a distància (1)

L'acció directa a distància es basa en lleis de Newton de la gravitació universal que té el següent enunciat.

“Dos cossos puntuals de masses m i m' s'atreuen amb una força que és directament proporcional al producte de les masses i inversament proporcional al quadrat de la distància que les separa”

En forma matemàtica:

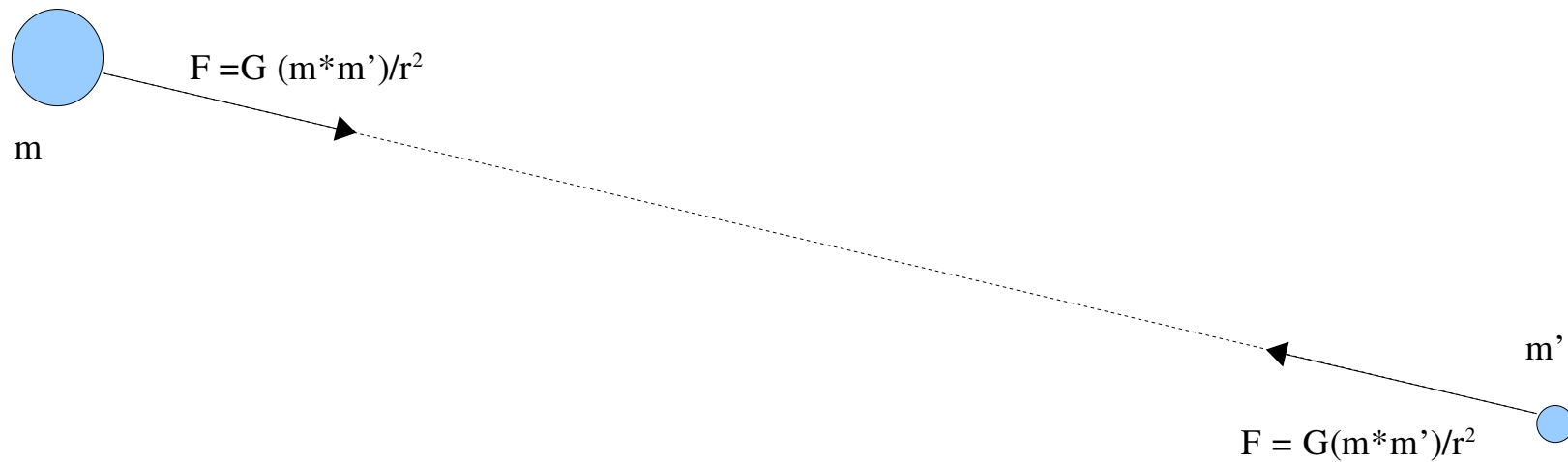
$$F = G * (m * m') / r^2 ;$$

sent G l'anomenada constant de gravitació universal que val $6,67 * 10^{-11} \text{ N} * \text{m}^2 / \text{kg}^2$.

Cal tenir en compte:

- Que aquesta és l'expressió del mòdul de la força.
- Que no parlem d'una força, si no de dues, la que cada cos fa sobre l'altre, forces que en mòdul valen el mateix, però que tenen sentits contraris.

Acció directa a distància (2)



Com s'indica a l'esquema les dues forces tenen el mateix valor (mòdul), per això en aquest cas hem preferit indicar-les amb el mateix símbol (F), tot i ser forces diferents.

Acció directa a distància (3)

Sobre la força de la gravetat cal saber que és una força conservativa, que com ja sabem significa tres coses que són completament equivalents:

1. El treball fet per la força de la gravetat per anar d'un punt A a un punt B és el mateix sigui quin sigui el camí seguit per fer el recorregut.
2. El treball fet per la força de la gravetat en fer un recorregut tancat (punt inicial= punt final) val zero.
3. El treball fet per la força de la gravetat per anar d'un punt A a u punt B es pot expressar com a diferència (valor inicial- valor final) d'una funció (funció en sentit matemàtic) que rep el nom d'energia potencial gravitatòria, és a dir

$$W_{A \rightarrow B}^{\text{grav}} = U_A - U_B$$

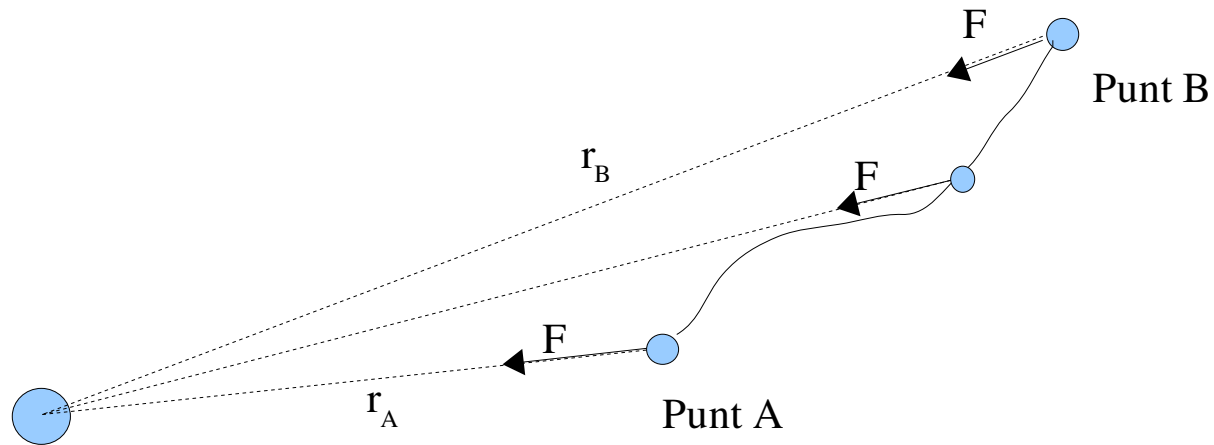
Resulta interessant determinar la forma d'U (energia potencial). Ho trobareu al llibre o en alguns dels recursos que es troben a Internet. En qualsevol cas la forma d'aquesta funció és

$$U = - G * (m*m') / r$$

Acció directa a distància (4)

De manera que el treball es pot expressar com

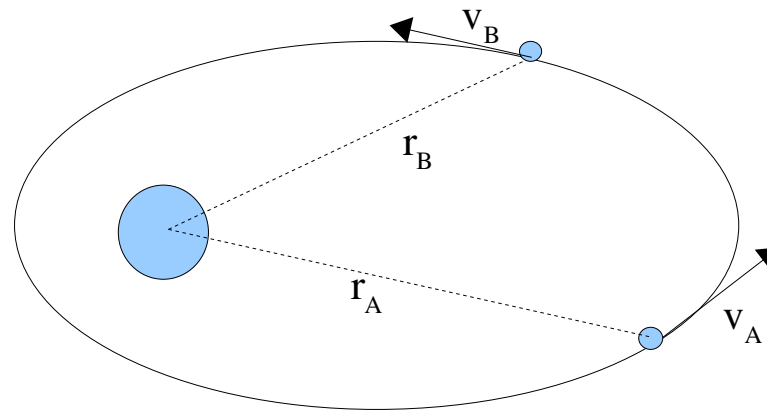
$$W^{\text{grav}}_{A \rightarrow B} = (-G * (m * m') / r_A) - (-G * (m * m') / r_B)$$



Acció directa a distància (5)

Com a conseqüència de ser la de la gravetat una força conservativa, si un cos es mou sotmés únicament a la força de la gravetat, l'energia mecànica del cos és manté constant durant el seu moviment. Aquest fet té aplicació en el moviment de satèl·lits artificials o de cossos celestes (planetes o llunes) que estan en òrbita al voltant d'un planeta o del sol.

$$\frac{1}{2} m_{\text{sat}} * v_A^2 + (- G * m * M / r_A) = \frac{1}{2} m_{\text{sat}} * v_B^2 + (- G * m * M / r_B)$$



En els problemes que farem adoptarem l'aproximació d'òrbites circulars i no tindrem en compte que realment les òrbites són el·lipsis.

Lleis de Kepler

Kepler basant-se en el recull de dades fet per Tycho Brahe publica en l'any 1609 les conegudes com a tres lleis de Kepler sobre el moviment dels planetes.

1. Primera llei: els planetes es desplacen al voltant del sol seguint una òrbita el·liptica, en un dels focus de la qual es troba el sol.
2. Segona llei: la velocitat areolar del planeta és constant, és a dir l'àrea batuda per unitat de temps pel radivector que uneix el sol i el planeta és constant.
3. Tercera llei: el període al quadrat de l'òrbita és directament proporcional al cub del semieix major de l'el·lipse.

Cal conèixer aquestes lleis i entendre'n el seu significat. Amplieu el contingut que aquí s'exposa consultant el llibre de text o a Internet (wikipedia o altres).

Acció indirecta a distància a través del camp(1)

L'acció directa a distància és un concepte enutjós, molest. Com és possible que dos cossos que estan separats per una distància r , que pot ser molt gran, interactuin instantàniament?

Per resoldre aquesta qüestió de caire teòric els físics van introduir el concepte de camp, que actua com a mitjancer de la interacció entre dos cossos que es troben allunyats.

Des d'un punt de vista pràctic els dos punts de vista (acció directa i acció indirecta) condueixen als mateixos resultats, però des d'un punt de vista teòric és més satisfactori l'acció indirecta a través del camp, perquè elimina la misteriosa acció mútua entre cossos allunyats.

Des del punt de vista de l'acció indirecta a través del camp el procés pel qual un cos de massa M atreu un altre cos de massa m (a partir d'ara cos o massa de prova) es divideix en dos passos:

1. primer pas: El cos de massa M crea un camp gravitatori al seu voltant . El fet notable és que el camp en contra de ser un “ens” puntual com els cossos, és un ens extens.
2. Segon pas: El camp (que és un cos extens) actua sobre la massa de prova m .

Acció indirecta a distància a través del camp(2)

A continuació detallarem més en què consisteix la “creació del camp” i com aquest actua sobre la massa de prova.

Primer pas: Creació del camp gravitatori

Una sistema (conjunt) de masses crea al seu voltant un camp gravitatori, regió que es caracteritza pel fet de què en cada un dels seus punts hi ha definides dues magnituds.

1. La intensitat de camp gravitatori (o simplement camp gravitatori) que en cada punt de la regió és la força que actuaria sobre un cos de massa unitat si el col·loquèssim en aquell punt. Aquesta magnitud és vectorial i es representa per $\mathbf{g}$ (la negreta substitueix el símbol de vector a sobre de la g)
2. El potencial de camp gravitatori que en cada punt de la regió el definim com l'energia potencial que tindria un cos de massa unitat si el col·loquèssim en aquell punt. Aquesta magnitud per tant és un escalar, és a dir un nombre.

Acció indirecta a distància a través del camp(3)

Segon pas: acció del camp sobre la massa de prova

Si sobre un punt P que pertany al camp hi ha una massa de prova m, aquesta sent una força i té una energia que venen donades per les fórmules següents (en negreta vol dir vector)

$$\mathbf{F} = m * \mathbf{g} ;$$

$$U = m * V;$$

Per entendre que aquestes fórmules només cal tenir en compte les definicions de $\mathbf{g}$ i V, respectivament la força i l'energia per unitat de massa.

Si de les fórmules anteriors aïllem $\mathbf{g}$ i V obtenim unes fórmules de validesa general i que podem adoptar, donat el seu significat, com les definicions d'aquestes magnituds.

$$\mathbf{g} = \mathbf{F} / m;$$

$$V = U / m;$$

Acció indirecta a distància a través del camp(4)

Les fórmules i definicions anteriors són prou abstractes com per necessitar un exemple per intentar entendre millor els conceptes.

Per aquest motiu estudiem a continuació el camp creat per una massa puntual M i el seu efecte sobre una massa puntual de prova m.

Primer pas: creació del camp

Per una banda sabem que una partícula de massa m és atreta per una de massa M amb una força que val

$$F = G * (M*m)/r^2$$

i té una energia potencial que val

$$U = - G * (M*m)/r$$

per tant la força i l'energia per unitat de massa, és a dir g i V, seran respectivament

$$g = F / m = G * M / r^2 ;$$

$$V = U / m = - G * M / r ;$$

Acció indirecta a distància a través del camp(5)

Aprofitem que hem arribat a aquest punt per parlar de les unitats de g i V .

De la definició de g ja es veu que les seves unitats són N/kg . Ara bé N/kg són m/s^2 , per tant també es pot donar en m/s^2 .

En quant a V , les seves unitats són J/kg .

Segon pas: acció del camp sobre una massa de prova

Un cop determinades g i V en el punt en qüestió, si en aquest punt hi col·loquem una massa de prova m la força que hi actua i l'energia potencial les calculem de la següent manera,

$$F = m * g = m * (G * M / r^2) = G * (M * m) / r^2 ;$$

$$U = m * V = m * (- G * M / r) = - G * (M * m) / r ;$$

com no podia ser d'una altra manera aquests resultats coincideixen amb els de la interpretació de la interacció com una acció directa a distància.

Intensitat de camp gravitatori i acceleració de la gravetat

Si us heu fixat haureu observat algunes coincidències entre la intensitat de camp i l'acceleració de la gravetat.

Primerament el símbol que utilitzem per representar-les, g , és el mateix per a les dues magnituds.

En segon lloc les unitats de les dues magnituds són idèntiques $m/s^2 = N / kg$.

Com veurem a continuació aquests dos fets no són coincidències, sinó que representen alguna cosa més fonamental: de fet la intensitat de camp gravitatori i l'acceleració de la gravetat són la mateixa magnitud.

Efectivament, suposem una partícula que cau en el sí d'un camp gravitatori i que en un cert moment passa per un punt P. Per evitar confusions derivades de coincidència esmentada amb els símbols, en les properes equacions representarem les magnituds pel seu nom.

Apliquem a la partícula en qüestió la segona llei de Newton,

$$\text{Força de la gravetat} = \text{massa} * \text{acceleració de la gravetat};$$

Per altra banda la força de la gravetat que actua sobre la partícula en el punt P és igual a,

$$\text{Força de la gravetat} = \text{massa} * \text{intensitat de camp};$$

Per tant, després d'igualar i simplificar la massa de la partícula, obtenim,

$$\text{intensitat de camp} = \text{acceleració de la gravetat}$$

És important aquesta qüestió perquè ens permet calcular l'acceleració de la gravetat e qualsevol planeta aplicant

la fórmula de la intensitat de camp gravitatori creat per una partícula puntual obtinguda abans,

$$g = G * (M / r^2)$$

substituint M per la massa de la terra i r pel radi de la terra podem calcular l'acceleració de la gravetat a la superfície de la terra, que ja sabem que val $9,8\text{m/s}^2$. Si volem calcular-la a una distància més gran, només cal substituir r pel valor corresponent, i fins i tot podem calcular les acceleracions de la gravetat per altres planetes o llunes substituint M per la massa que correspongui.

Cal tenir present que el valor que hem utilitzat fins ara per l'acceleració de la gravetat a la terra ($g=9,8\text{m/s}^2$), és vàlid només a la seva superfície. Quan ens allunyem de la superfície, l'acceleració disminueix.

Annex final

Fixeu-vos la fórmula per calcular l'energia potencial gravitatòria d'un cos de massa m quan està a prop d'un altre cos de massa M que hem utilitzat en aquest tema és

$$U = - G * (M * m) / r$$

Però ja abans, en aquest curs, ja havíem parlat de l'energia potencial gravitatòria d'un cos a la superfície de la terra i havíem utilitzat un altre símbol i una altra fórmula per calcular aquesta magnitud. La fórmula era,

$$E_p = m * g * h; \quad (\text{a on } g = 9,8 \text{ m/s}^2)$$

Quina relació tenen aquestes dues fórmules?

Cal dir que les dues són correctes, però que la segona no és tan general com la primera. La segona només es pot aplicar a la superfície de la terra a on la g sabem que val $9,8 \text{ m/s}^2$ i per altures h que siguin petites, només d'alguns centenars de metres, de fet prou petites per suposar que l'acceleració de la gravetat és constant i val $9,8 \text{ m/s}^2$.

Per resumir, en els problemes que tenen lloc a la superfície de la terra utilitzarem la segona, quan fem problemes de satèl·lits, llunes, planetes, la primera.