

Apèndix de Dinàmica

Antoni Boada Barnet

17 de gener de 2008

Resum

L'objectiu d'aquest apèndix és obtenir un parell de fórmules importants relatives al moviment d'un cos lligat a una molla i d'un pèndol. Les fórmules esmentades són les que donen els períodes d'aquests moviments en funció de paràmetres físics. Per arribar a aquest objectiu es fa un petit passeig pel món de les equacions diferencials. A part de tot això s'intenta donar una visió més general de la dinàmica, encara que només sigui perquè l'alumne copsi que no totes les forces amb les que s'ha d'enfrontar són constants.

1 L'oscil·lador harmònic

Per oscil·lador harmònic entenem un cos que es mou sotmés a una força tipus llei de Hooke. Tot i ser un cas d'estudi relativament senzill, té una gran importància a la física donat el gran nombre de situacions en què apareix. L'exemple més a mà és el d'un cos que es mou lligat a una molla. El problema fonamental de la dinàmica és a partir de les forces que actuen sobre un cos trobar com es mou, és a dir trobar l'equació de la posició. Això passa en general per resoldre una equació diferencial com ara veurem. Si apliquem la segona llei de Newton a l'oscil·lador harmònic obtenim

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad (1)$$

Es tracta d'una equació diferencial. Per aquest nom es coneixen les equacions en les quals la incògnita, x en aquest cas, està inclosa en una derivació. La incògnita x és una funció matemàtica del temps i es coneix amb el nom d'equació de la posició.

Nosaltres ara seguirem un camí que no és l'habitual, perquè de fet nosaltres ja sabem quina és la solució de l'equació diferencial que acabem d'escriure. La solució és del tipus

$$x = A \sin(\omega t + \theta_0) \quad (2)$$

El que es pretén aquí precisament és comprovar que realment és una solució, cosa que farem per simple substitució.

Primerament calcularem $\frac{d^2x}{dt^2}$,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \theta_0)$$

després substituïrem a l'equació (1), obtenint,

$$-mA\omega^2 \sin(\omega t + \theta_0) = -kA \sin(\omega t + \theta_0)$$

perquè l'equació (2) sigui una solució de (1) cal que es compleixi,

$$m\omega^2 = k \quad (3)$$

d'on obtenim per ω

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4)$$

i tenint en compte que la relació entre ω i el període, T , d'una molla és

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

obtenim la següent important fórmula pel període d'una molla

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (5)$$

2 El pèndol

Anem a veure que el pèndol en certes circumstàncies es pot reduir a un oscil·lador harmònic. D'entrada en el cas del pèndol tenim una situació una mica més complicada que en el cas de la molla (observa la figura (1)). Això es deu al fet que el moviment del pèndol és un moviment en dues dimensions. La 2a llei de Newton aplicada a la massa que penja d'un pèndol, que recordem és una equació vectorial, dona lloc a dues equacions escalars, corresponent una al sentit tangencial del moviment i al normal l'altra. Tindrem així el següent

$$\vec{F}_R = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a} \quad (6)$$

tenint en compte les següents relacions

$$\vec{P} = -P\cos\varphi \vec{u}_n - P\sin\varphi \vec{u}_t$$

$$\vec{T} = T\vec{u}_n$$

$$\vec{a} = a_n\vec{u}_n + a_t\vec{u}_t \Leftrightarrow \vec{a} = \left(\frac{v^2}{l}\right)\vec{u}_n + \frac{dv}{dt}\vec{u}_t$$

després de substituir a la fórmula 6 i reordenar, obtenim en primer lloc,

$$(T - P\cos\varphi)\vec{u}_n - P\sin\varphi\vec{u}_t = m\left(\frac{v^2}{l}\right)\vec{u}_n + m\frac{dv}{dt}\vec{u}_t$$

i finalment separant les components tangencial i normal

$$\begin{cases} T - P\cos\varphi &= m\frac{v^2}{l} \\ -P\sin\varphi &= m\frac{dv}{dt} \end{cases} \quad (7)$$

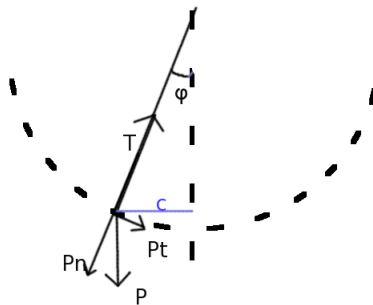


Figura 1: Diagrama de forces d'un pèndol

Aquest sistema de dues equacions permeten l'estudi del moviment del pèndol. Ara però ens interessa només la segona equació, que modificarem lleugerament. Primerament recordem que $v = \frac{ds}{dt}$, sent s la longitud d'arc, mesurat a partir del punt en què la vertical talla la trajectòria circular del pèndol i positiu en sentit antihorari. En conseqüència,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

En segon lloc farem una aproximació. Suposarem que l'angle φ és petit i en conseqüència la longitud d'arc s es pot confondre amb la magnitud c de color blau a la figura (1). Per tant tindrem

$$\sin \varphi = \frac{s}{l} \quad (8)$$

Tenint aquestes dues coses en compte, la segona de les dues equacions (7) queda així

$$-mg \frac{s}{l} = m \frac{d^2 s}{dt^2} \Leftrightarrow -gs = l \frac{d^2 s}{dt^2} \quad (9)$$

Si comparem l'equació (9) amb l'equació (1) és obvi que formalment són idèntiques

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -k x \\ l \frac{d^2 s}{dt^2} &= -g s \end{aligned} \quad (10)$$

cosa que significa que les dues equacions tenen solucions anàlogues, per tant la solució pel pèndol és

$$s = A \sin(\omega t + \theta_0) \quad (11)$$

on ara tindrem enlloc de les equacions (4) i (5)

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (12)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (13)$$

3 Exercicis

- 1) L'acceleració de la gravetat d'un planeta és la meitat que la de la terra. És a dir val $g/2$. Si tralladem un rellotge de pèndol que a la terra estava perfectament ajustat, s'avança o s'endarrereix?
- 2) Comprova que la funció $x = A\cos(\omega t + \theta_0)$ és una solució de l'equació (1).