

Interferències

Quan en una regió de l'espai se superposen dues o més ones parlem d'interferència d'ones. De fet ja hem parlat d'aquest fenomen en estudiar d'ones estacionàries, ja que cal recordar que es produïen quan per un medi, en aquell cas unidimensional, tot i que també es poden produir en un medi bidimensional, es propagaven dues ones de característiques, en aquell cas, molt determinades, és a dir, que viatjaven en sentits oposats.

Ara volem estudiar el cas de dues ones idèntiques que es propaguen per un medi tridimensional. Per concretar podem pensar en so o llum. Limitarem el nostre estudi només a dues ones, tot i que el fenomen d'interferències es produeix sempre que tenim un nombre finit d'ones viatjant per un mateix medi.

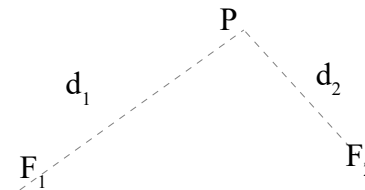
Considerarem així dos fonts F_1 i F_2 que emeten ones viatgeres de les mateixes característiques. A més a més per simplificar considerarem que les ones a l'origen oscil·len en fase (les fonts oscil·len en fase). No és indispensable que així sigui, només es suficient que la diferència de fase amb que oscil·len les fonts sigui constant, però per simplificar considerarem que oscil·len en fase.

En definitiva les dues equacions d'ona venen donades per,

$$y_1(x,t) = A_1 \cos(\omega t - \kappa x); (1)$$

$$y_2(x,t) = A_2 \cos(\omega t - \kappa x); (2)$$

l'única cosa que diferencia les dues ones és l'amplitud que suposem que pot ser diferent.



El que volem esbrinar és com oscil·la un punt P qualsevol que es troba a una distància d_1 i d_2 de cadascuna de les fonts. Tindrem en compte el principi de superposició aplicat ja en el cas de les ones estacionàries. És a dir suposarem que el valor de la pertorbació en un punt del medi és la suma de les pertorbacions que cada ona produeix separatament. En definitiva en el nostre cas tenim per cada ona separatament

$$y_1(d_1,t) = A_1 \cos(\omega t - \kappa d_1)$$

$$y_2(d_2,t) = A_2 \cos(\omega t - \kappa d_2)$$

$$y_P(t) = y_1(d_1,t) + y_2(d_2,t) = A_1 \cos(\omega t - \kappa d_1) + A_2 \cos(\omega t - \kappa d_2); (3)$$

noti's que $-\kappa d_1$ i $-\kappa d_2$ són valors constants que per abreviar representarem a partir d'ara per φ_1 i φ_2 respectivament.

De fet ja hem resol el nostre problema. El punt P oscil·la tal com indica $y_P(t)$, el que succeeix és que tal com està escrit en dificulta la interpretació i el que farem a continuació és intentar escriure'l d'una manera més interpretable.

Per aconseguir aquest propòsit cal donar-se compte que $y_P(t)$ és la suma de dues funcions periòdiques del mateix període i que per tant la suma també ha de ser un funció periòdica i del mateix període, és a dir

$$y_P(t) = A \cos(\omega t + \varphi) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2); (4)$$

a on els valors de l'amplitud, A, i de la fase inicial, φ , són desconeguts i cal determinar. Per continuar aplicarem una de les relacions trigonomètriques que ja vam utilitzar en les ones estacionàries. En aquest cas la del cosinus de l'angle suma.

$$A \cos(\omega t + \varphi) = A \cos \omega t \cos \varphi - A \sin \omega t \sin \varphi$$

$$A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) = A_1 \cos\omega t \cos\varphi_1 - A_1 \sin\omega t \sin\varphi_1$$

$$A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) = A_2 \cos\omega t \cos\varphi_2 - A_2 \sin\omega t \sin\varphi_2$$

substituint a (4), obtenim,

$$A \cos\omega t \cos\varphi - A \sin\omega t \sin\varphi = A_1 \cos\omega t \cos\varphi_1 - A_1 \sin\omega t \sin\varphi_1 + A_2 \cos\omega t \cos\varphi_2 - A_2 \sin\omega t \sin\varphi_2$$

a la dreta el que farem és treure factor comú $\sin\omega t$ i $\cos\omega t$,

$$A \cos\omega t \cos\varphi - A \sin\omega t \sin\varphi = (A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2) \cos\omega t - (A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2) \sin\omega t$$

només hi ha una manera de què aquesta identitat es compleixi per tot valor del temps i és que els coeficients dels $\sin\omega t$ que apareixen a dreta i esquerra de la igualtat siguin iguals i que el mateix succeeixi amb els coeficients dels $\cos\omega t$, és a dir

$$A \cos\varphi = A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2$$

$$A \sin\varphi = A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2$$

observi's que en aquest sistema de dues equacions només hi ha dues incògnites A i φ . El valor de l'angle φ s'obté fàcilment dividint una equació per l'altre, obtenint,

$$\operatorname{tg} \varphi = (A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2) / (A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2) ; (5)$$

però del que traurem més profit és del valor d' A , que és més difícil d'obtenir.

Primerament cal elevar les dues equacions al quadrat

$$A^2 \cos^2 \varphi = A_1^2 \cos^2 \varphi_1 + 2A_1 A_2 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + A_2^2 \cos^2 \varphi_2$$

$$A^2 \sin^2 \varphi = A_1^2 \sin^2 \varphi_1 + 2A_1 A_2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + A_2^2 \sin^2 \varphi_2$$

a continuació les sumarem i tenint en compte que el cosinus el quadrat més el sinus al quadrat val la unitat, obtenim

$$A^2 = A_1^2 + 2A_1 A_2 (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + A_2^2$$

reordenant i tenint en compte que

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2$$

obtenim

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

i finalment

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos k(d_2 - d_1) ; (6)$$

Aquesta darrera fórmula és el punt final a on volíem arribar i el principi de l'anàlisi del fenomen de les interferències. Aquest anàlisi com tot el que portem fet no és simple i cal intentar entendre'l amb més d'una sessió d'estudi i no cal dir que es considera indispensable la visió de les animacions indicades al final d'aquest apartat.

Interferència destructiva

Veurem a continuació que hi ha punts que no oscil·len, o ho fan de forma mínima. En aquests punts direm que hi ha interferència destructiva i com veurem són aquells punts en què es compleix la següent condició

$$\cos k(d_2 - d_1) = -1 ; (7)$$

tenint en compte la fórmula (6), s'obté que en aquests punts l'amplitud val

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \Rightarrow A = A_1 - A_2$$

si A_1 i A_2 són iguals l'amplitud resultant, A , val 0, és a dir el punt no oscil·la.

Anem a veure si podem obtenir alguna altra informació més sobre aquests punts. Partirem de la condició (7).

$$\cos \kappa(d_2 - d_1) = -1 \Rightarrow \kappa(d_2 - d_1) = m\pi ; m = \pm 1, \pm 3, \pm 5 \dots$$

tenint en compte que $\kappa = 2\pi/\lambda$, queda,

$$2\pi/\lambda(d_2 - d_1) = m\pi ; m = \pm 1, \pm 3, \pm 5 \dots \Rightarrow$$

$$d_2 - d_1 = m(\lambda/2) ; m = \pm 1, \pm 3, \pm 5 \dots ; (8)$$

Aquesta darrera fórmula és molt important. De fet ens referirem a ella com “la condició d'interferència destructiva”. Aquesta fórmula per estrany que sembli es pot entendre i cal conèixer-la i aplicar-la en les situacions pràctiques que calgui.

En paraules podríem dir que perquè en un punt hi hagi interferència destructiva la diferència de camins, $(d_2 - d_1)$, de les fonts al punt ha de ser un múltiple imparell de mitja longitud d'ona. En aquest cas les ones arriben en oposició de fase i els seus efectes es compensen.

Interferència constructiva

Veurem ara que contràriament al cas anterior hi ha punts que oscil·len amb la màxima amplitud possible. En aquests punts direm que es dona interferència constructiva. La fórmula de partida torna a ser la fórmula (6), ara amb la condició ,

$$\cos k(d_2 - d_1) = +1 ; (8)$$

a partir de la fórmula (6) s'obté,

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \Rightarrow A = A_1 + A_2$$

que és naturalment el valor màxim d'A.

Com varem fer en la interferència destructiva, anem a veure si podem obtenir més informació sobre aquests punts. Partirem de (8).

$$\cos k(d_2 - d_1) = +1 \Rightarrow 2\pi/\lambda(d_2 - d_1) = n(2\pi) ; n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3... \Rightarrow$$

$$d_2 - d_1 = n\lambda ; n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3... ; (9)$$

que és la condició que ha de complir un punt perquè en ell hi hagi interferència constructiva. És per tant la condició d'interferència constructiva i cal entendre-la amb el recolzament de les animacions indicades al final de l'apartat.

En paraules podem dir que perquè en un punt hi hagi interferència constructiva la diferència de camins del punt a les fonts emissores ha de ser un múltiple enter d'una longitud d'ona. En aquest cas les ones arriben en fase i els seus efectes se sumen.

No cal dir que entre el cas d'interferència destructiva i el de d'interferència constructiva hi ha una infinitat de casos possibles.

Les animacions recomanades les podeu trobar als següents enllaços.

<http://ngsir.netfirms.com/englishVersion.htm>

Cliqueu a l'enllaç light & wave i després visualitzeu les tres següents animacions, especialment les dues primeres: interferences of water waves I, interferences of water waves II i multiple sources interference.

www.xtec.cat/~ocasella

Cal clicar a l'enllaç applets que trobareu a dalt de la pàgina i després clicar a interferències. Es desconeix el motiu però en alguns ordinadors l'animació va molt ràpida i no s'aprecia gairebé el fenomen.