

Ones estacionàries

Ens preguntem com oscil·len els punts d'un medi quan per aquest es propaguen dues o més ones. Acceptarem sense justificació que aquest problema es resol aplicant l'anomenat principi de superposició. Il·lustrarem l'aplicació del principi suposant que per una medi unidimensional (una corda per exemple) es mouen en sentits oposats dues ones idèntiques. Aquesta situació es produeix per exemple quan la corda té un extrem lliure i l'altre fix. Si fem oscil·lar l'extrem lliure amb un MHS es produeix una ona (ona incident) que es mou en un sentit; en arribar a la paret a on està lligat l'altre extrem es produeix una ona reflectida, amb tots els paràmetres idèntics però que es mou en sentit contrari.

Sabem que aquestes ones les podem representar de les següents maneres:

$$\text{Ona incident : } y_i(x,t) = A \cos (\omega t - kx)$$

$$\text{Ona reflectida : } y_r(x,t) = A \cos (\omega t + kx)$$

Aplicant el principi de superposició, la corda oscil·la de la següent manera:

$$Y(x,t) = y_i(x,t) + y_r(x,t) = A \cos (\omega t - kx) + A \cos (\omega t + kx)$$

és a dir, el principi afirma que l'elongació de qualsevol punt de la corda en un instant donat quan hi arriben dues o més ones és la suma de les elongacions que tindria el punt si les ones arribessin separatament.

El que farem a continuació és modificar la banda dreta tenint en compte les següents relacions trigonomètriques:

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

En el nostre cas com hem decidit utilitzar cosinus per representar les ones viatgeres que se superposen utilitzarem la darrera (que de fet són dues) ,obtenint-se:

$$\begin{aligned} Y(x,t) = y_i(x,t) + y_r(x,t) &= A \cos (\omega t - kx) + A \cos (\omega t + kx) = A (\cos \omega t \cos kx + \sin \omega t \sin kx) + A(\cos \omega t \cos kx - \sin \omega t \sin kx) = \\ &= 2A \cos \omega t \cos kx = (2A \cos kx) \cos \omega t \end{aligned}$$

En definitiva hem obtingut que

$$Y(x,t) = (2A \cos kx) \cos \omega t$$

que podem reescriure de la següent manera a efectes del seu anàlisis

$$Y(x,t) = A'(x) \cos \omega t ; (1)$$

$$A'(x) = 2A \cos kx ; (2)$$

La fórmula (1) ens diu que els punts de la corda oscil·len en fase si $A'(x)$ és positiva i en oposició de fase si $A'(x)$ és negativa, amb la mateixa freqüència angular ω , (i per tant amb la mateixa freqüència i període) i amb una amplitud $A'(x)$ que depèn de cada punt (observi's que $A'(x)$ depèn de x).

S'observa a més que hi ha punts que no oscil·len. Són aquells pels quals $A'(x)$ val zero i s'anomenen nodes. Els punts pels quals l'amplitud és màxima s'anomenen valls o ventres i són aquells pels quals $A'(x) = \pm 2A$.

Les ones que hem obtingut s'anomenen ones estacionàries. De fet també són estacionàries les següents ones

$$Y(x,t) = (2A \sin kx) \sin \omega t$$

$$Y(x,t) = (2A \cos kx) \sin \omega t$$

$$Y(x,t) = (2A \sin kx) \cos \omega t$$

Nodes: com ja hem dit són els punts que no oscil·len. Anem a determinar la seva posició, partint de la condició de node.

$$A'(x) = 0 \Rightarrow 2A \cos kx = 0 \Rightarrow \cos kx = 0 \Rightarrow kx = n \pi/2 ; n = \pm 1, \pm 3, \pm 5 \dots \Rightarrow (2\pi/\lambda) x = n \pi/2 ; n = \pm 1, \pm 3, \pm 5 \dots \Rightarrow x = n \lambda/4 ; n = \pm 1, \pm 3, \pm 5 \dots$$

Valls: també s'ha dit que són punts que oscil·len de forma màxima.

$$A'(x) = \pm 2A \Rightarrow 2A \cos kx = \pm 2A \Rightarrow \cos kx = \pm 1 \Rightarrow kx = n \pi ; n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots \Rightarrow (2\pi/\lambda) x = n \pi ; n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots \Rightarrow x = n \lambda/2 ; n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$$

Observi's que dos nodes consecutius estan separats per mitja longitud d'ona i el mateix es pot dir de dos valls consecutius.

Cal que visitis el següent enllaç per visualitzar algunes de les coses que s'han dit fins ara, com per exemple el que acabem de dir sobre nodes i valls

<http://ngsir.netfirms.com/englishVersion.htm>

cliqueu a Light and wave i torneu a clicar sobre Transverse stationary wave.

Modes normals de vibració

És un altre aspecte de tot el que venim parlant en aquest apartat de les ones estacionàries.

En l'animació anterior ja hem visualitzat ones estacionàries en una corda amb els dos extrems fixos i amb un fix i l'altre lliure. Comencem

pel primer cas.

Corda amb els dos extrems fixes:

El fet que els dos extrems siguin nodes i que la distància entre dos nodes consecutius (dos ventres consecutius) sigui de mitja longitud d'ona imposa que les freqüències a les que poden oscil·lar els punts de la corda siguin unes de determinades.

Si L és la longitud de la corda, s'observa que s'ha de complir que,

$$L = n \left(\lambda / 2 \right) ; n = 1, 2, 3, \dots$$

és a dir la longitud de la corda és un múltiple enter d'una semilongitud d'ona (mitja longitud d'ona). Si aïllem λ , obtenim,

$$\lambda = 2L/n ; n = 1, 2, 3, \dots$$

i si tenim en compte que la relació entre la freqüència a la que oscil·len els punts de la corda i la longitud d'ona és

$$v_p = \lambda \nu$$

obtenim,

$$\nu = n \left(v_p / 2L \right) ; n = 1, 2, 3, \dots$$

és a dir, els punts de la corda, la corda, pròpiament, oscil·la només en unes certes freqüències permeses, anomenades freqüències naturals o modes normals de vibració. La més petita (corresponent a $n=1$) s'anomena freqüència fonamental. Les altres són múltiples de la fonamental i s'anomenen $2n$ harmònic, $3n$ harmònic, etc

Corda amb un extrem fix i l'altre lliure:

Ara l'extrem lliure és un ventre i el fix un node. Procedint de manera idèntica al cas anterior obtenim,

$$L = n \left(\lambda / 4 \right) ; n = 1, 3, 5, \dots$$

és a dir la longitud de la corda és un múltiple imparell d'un quart de longitud d'ona. Si aïllem λ , obtenim,

$$\lambda = 4L/n ; n = 1, 3, 5, \dots$$

i si tenim en compte que la relació entre la freqüència a la que oscil·len els punts de la corda i la longitud d'ona és

$$v_p = \lambda \nu$$

obtenim,

$$\nu = n \left(v_p / 4L \right) ; n = 1, 3, 5, \dots$$

és a dir, els punts de la corda, la corda, pròpiament, oscil·la només en unes certes freqüències permeses, anomenades freqüències naturals o modes normals de vibració. La més petita (corresponent a $n=1$) s'anomena freqüència fonamental. Les altres són múltiples imparells de la fonamental i s'anomenen $3n$ harmònic, $5n$ harmònic, etc i com s'observa falten els harmònics parells.