

## Equació d'ones harmònica

Per començar el nostre model ondulatori comencem per un cas relativament senzill i molt important. Considerem un medi unidimensional, que per concretar ens podem imaginar que és una corda (però que pot ser molts altres sistemes) de longitud infinita i amb un extrem lliure que fem vibrar segons un moviment harmònic simple.

Establirem un sistema de coordenades a la corda, de manera que la coordenada de l'extrem lliure sigui  $x=0$ . Identificarem així cada punt de la corda per la seva coordenada  $x$  i el seu estat de vibració per la separació vertical del punt de la corda de la seva posició d'equilibri, separació que representarem per  $y$ , més concretament per  $y(x,t)$ , a on  $t$  representa el temps. En el llenguatge del MHS recordem que  $y(x,t)$  és l'elongació del punt.

L'elongació de l'extrem lliure en funció del temps es representa, així doncs, per  $y(0m,t)$ .



Sabem aleshores que el punt  $x=0$  descriu un MHS, com equació del qual podem adoptar

$$y(0m,t) = A \sin(\omega t + \theta_0)$$

a on agafarem la fase inicial igual a zero per comoditat, quedant

$$y(0m,t) = A \sin \omega t$$

El que volem obtenir és una equació que ens digui com es mou un punt qualsevol de la corda, donant-nos la seva posició ( $y$ ) en qualsevol instant de temps. Això és molt simple si tenim en compte dues coses:

- a) que la pertorbació, el MHS en aquest cas, es propaga a una velocitat  $v$  que depèn del medi.
- b) que la pertorbació es propaga sense modificar-se i.

Tenint això en compte podem escriure,

$$y(x,t) = y(0, t-\tau)$$

és a dir el punt de la corda  $x$  a l'instant  $t$  està fent el mateix que el punt  $x=0$  a un instant anterior  $t-\tau$ , a on  $\tau$  és el temps que la pertorbació triga en anar de  $x=0$  al punt  $x$ .

I per tant,

$$y(x,t) = y(0, t-\tau) = A \sin(\omega(t-\tau))$$

Utilitzar  $\tau$  en l'equació és incòmode, però si tenim en compte que ,

$$v = x / \tau \Rightarrow \tau = x / v ; \text{obtenim finalment}$$

$$y(x,t) = A \sin \omega(t - x/v)$$

que és en definitiva el que volíem obtenir, perquè ens diu com oscil·la un punt qualsevol de la corda. El que aquesta equació ens diu és que tot punt de la corda descriu un MHS amb la mateixa amplitud,  $A$ , la mateixa freqüència angular,  $\omega$ , i per tant període,  $T$ , que l'extrem de la corda. Per tant es mouen igual. La diferència està en que no van a l'hora (en fase), cosa que es tradueix en la fase inicial diferent de zero,  $\theta_0 = -x/v$

El que succeeix és que aquesta fórmula es pot reescriure de formes diverses com a continuació veurem. Tinguem en compte que,

$$\omega = 2\pi / T ;$$

Aleshores queda,

$$y(x,t) = A \sin \omega(t - x/v) = A \sin 2\pi/T(t - x/v) = A \sin (2\pi t/T - 2\pi x/vT)$$

si definim un paràmetre anomenat longitud d'ona, que es representa per  $\lambda$ , com ,

$$\lambda = vT \Leftrightarrow v = \lambda/T ; \text{obtenim}$$

$$y(x,t) = A \sin \omega(t - x/v) = A \sin 2\pi/T(t - x/v) = A \sin (2\pi t/T - 2\pi x/vT) = A \sin(2\pi t/T - 2\pi x/\lambda)$$

i si finalment definim un altre nou paràmetre que es representa per  $k$ , que anomenem número d'ones, com,

$$k = 2\pi/\lambda \text{ ; s'obté finalment,}$$

$$y(x,t) = A \sin \omega(t - x/v) = A \sin 2\pi/T(t - x/v) = A \sin (2\pi t/T - 2\pi x/vT) = A \sin(2\pi t/T - 2\pi x/\lambda) = A \sin(\omega t - kx)$$

S'han marcat en negreta dues fórmules, una per ser la primera obtinguda i l'altra, l'última, per ser compacta i fàcilment recordable mostrant a més una simetria entre el paper jugat per  $x$  i  $t$ .

En tots els casos l'argument de la funció trigonomètrica rep el nom de fase de l'ona i es pot representar per  $\theta$  :  $\theta = \omega t - kx$ .

Cal tenir en compte que enlloc de partir d'una funció sinus podríem haver-ho fet amb un cosinus. Per altra banda el signe menys en l'equació és degut a què s'ha suposat que l'ona es propaga en el sentit positiu de l'eix de les  $x$ . En cas contrari el menys s'ha de substituir per un signe positiu. Tenint tot això en compte resulta que són admissibles també com equacions d'ona harmònica totes les següents:

$$y(x,t) = A \sin(\omega t - kx)$$

$$y(x,t) = A \sin(\omega t + kx)$$

$$y(x,t) = A \cos(\omega t - kx)$$

$$y(x,t) = A \cos(\omega t + kx)$$

Finalment dir que també podríem afegir a la fase una fase inicial diferent de zero,  $\theta_0$ , cosa que no farem.

Les ones descrites per aquesta equació s'anomenen ones viatgeres.

Del que descriuen aquestes equacions, es a dir de les ones viatgeres, cal tenir-ne una imatge visual clara. Per aconseguir-la fixem el temps a un valor  $t = t_0$ . Això equival a veure tots els punts de la corda en un mateix instant de temps,

$$y(x,t_0) = A \sin(\omega t_0 - kx)$$

Interpretem-ho gràficament: Es tracta d'una funció sinus d'amplitud  $A$  i d'un “període espacial”  $\lambda$  que està a dintre de la  $k$  i que com sabem s'anomena longitud d'ona.

Si descongelem el temps el que veurem és que aquest perfil es mou cap a la dreta o esquerra.

Per visualitzar-ho tot millor cal visitar el següents enllaços.

<http://ngsir.netfirms.com/englishVersion.htm>

cliqueu a “Light & Wave” i visualitzar especialment “Transverse travelling wave”

[http://concurso.cnice.mec.es/cnice2005/56\\_ondas](http://concurso.cnice.mec.es/cnice2005/56_ondas)

cliqueu a “Ondas y energia” i passant per “Ondas y puntos del medio” i “parámetros de una onda” acabar al “Laboratorio I”.