Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

Nota molt important: S'han de veure tots els passos intermedis.

1) Trobeu les solucions de

$$\frac{x+1}{x^2}-\frac{x}{x+1}=\frac{1}{x^3+x^2}$$

(1,75 punts)

2)

a) Factoritzeu el polinomi $p(x)=6x^5+5x^4-2x^3-x^2$

b) Trobeu les solucions reals de l'equació $6x^5-x^2=2x^3-5x^4$

(2+0,5=2,5 punts)

3) Opereu i simplifiqueu:

a) $\dfrac{2x}{(x+1)^2}-\dfrac{3x}{x-2}-\dfrac{5}{x+1}=$

b) $\dfrac{4x^2-25}{x+1}:\dfrac{10x-25}{x^2+2x+1}$

(1,5+1=2,5 punts)

4) Enunciеu i demostreu el Teorema del residu

(0,25+0,5=0,75 punts)

5) Expresseu amb intervals les solucions reals de:

a) $\dfrac{14x-7}{x-4}\geq 0$

b) $$\left.\begin{array}{c} -x^2+3x+10\leq 0 \\ \dfrac{-5x+2}{3}>\dfrac{x-62}{6} \\ (x+3)^2>0 \end{array}\right\}$$

(0,5+2=2,5 punts)

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

Nota molt important: S'han de veure tots els passos intermedis.

1) Trobeu les solucions de

$$\frac{x+1}{x^2}-\frac{x}{x+1}=\frac{1}{x^3+x^2}$$

(1,75 punts)

$$\frac{x+1}{x^2}-\frac{x}{x+1}=\frac{1}{x^3+x^2}\Rightarrow\frac{x+1}{x^2}-\frac{x}{x+1}-\frac{1}{x^3+x^2}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{x+1}{x^2}-\frac{x}{x+1}-\frac{1}{x^2(x+1)}=0\Rightarrow\frac{(x+1)^2-x^3-1}{x^2(x+1)}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{x^2+2x\cancel{+1}-x^3\cancel{-1}}{x^2(x+1)}=0\Rightarrow\frac{-x^3+x^2+2x}{x^2(x+1)}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\cancel{x}(-x^2+x+2)}{x^{\cancel{2}}(x+1)}=0\Rightarrow\frac{(-x^2+x+2)}{x(x+1)}=0\Rightarrow$$

I si no veig la simplificació que encara és possible
Miro quins són els valors que anul·len el numerador, però RECORDEU QUE CAL COMPROVAR LES SOLUCIONS QUE SURTIN (especialment cal estar atents que no anul·lin cap denominador

$$-x^2+x+2=0\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{-2}=\frac{-1\pm3}{-2}=\begin{cases}=\dfrac{2}{-2}=-1\\[2mm]=\dfrac{-4}{-2}=2\end{cases}$$

Però al comprovar les solucions observem que

- **X= – 1 no val ja que anul·lar un denominador i**
- **que X=2 sí que val.**

Així doncs només hi ha una única solució que és X = 2

També podíem haver simplificat una mica més

$$\frac{(-x^2+x+2)}{x(x+1)}=0\Rightarrow\frac{-\cancel{(x+1)}(x-2)}{x\cancel{(x+1)}}=0\Rightarrow\frac{-x+2}{x}=0\Rightarrow -x+2=0\Rightarrow x=2$$

Solució x=2 que també cal comprovar, però que surt bé. Així doncs només hi ha una única solució que és X = 2

2)

a) Factoritzeu el polinomi $p(x)=6x^5+5x^4-2x^3-x^2$

b) Trobeu les solucions reals de l'equació $6x^5-x^2=2x^3-5x^4$

(2+0,5=2,5 punts)

a) Comencem traient factor comú $p(x)=6x^5+5x^4-2x^3-x^2=x^2(6x^3+5x^2-2x-1)$

Ara provem de dividir el segon factor que és de tercer grau $q(x)=6x^3+5x^2-2x-1$ **per (x-a) on "a" ha de ser un divisor de 1,**
Com q(–1)=0 sabem que la divisió per x–(–1)=x+1 serà exacta

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & 5 & -2 & -1 \\ -1 & & -6 & 1 & 1 \\ \hline & 6 & -1 & -1 & \underline{|0} \end{array} \Rightarrow q(x)=(x+1)(6x^2-x-1)$$

$$\Rightarrow p(x)=x^2(x+1)(6x^2-x-1)$$

I ara per descompondre el factor de 2n grau que queda, busquem els seus zeros reals

$$6x^2-x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{12}=\frac{1\pm 5}{12}=\begin{cases} =\dfrac{6}{12}=\dfrac{1}{2} \\ =\dfrac{-4}{12}=\dfrac{-1}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$6x^2-x-1=6\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$$

Per tant unint ara tots els resultats parcials tenim que

$$p(x)=6x^5+5x^4-2x^3-x^2=x^2(x+1)6\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)\Rightarrow$$

$$p(x)=6x^2(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right) \quad o \quad p(x)=x^2(x+1)(2x-1)(3x+1)$$

b) I ara per trobar les solucions reals de l'equació $6x^5+5x^4=2x^3+x^2$ **es passa tot a un membre de forma que a l'altre quedi zero. I observant que és el polinomi de l'apartat anterior tenim:**

$$6x^5+5x^4=2x^3+x^2 \Rightarrow 6x^5+5x^4-2x^3-x^2=0 \Rightarrow 6x^2(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} 6=0 \ mai \\ x^2=0\Rightarrow x=0 \\ (x+1)=0\Rightarrow x=-1 \\ \left(x-\dfrac{1}{2}\right)=0\Rightarrow x=\dfrac{1}{2} \\ \left(x+\dfrac{1}{3}\right)=0\Rightarrow x=\dfrac{-1}{3} \end{cases}$$

Obtenint així les 4 solucions reals d'aquesta equació. On podem dir que la X=0 és doble i les altres (X= –1, 1/2 i –1/3) són solucions simples.

3) Opereu i simplifiqueu:

a) $$\frac{2x}{(x+1)^2}-\frac{3x}{x-2}-\frac{5}{x+1}=$$

b) $$\frac{4x^2-25}{x+1}:\frac{10x-25}{x^2+2x+1}$$

(1,5+1=2,5 punts)

a)

$$\frac{2x}{(x+1)^2}-\frac{3x}{x-2}-\frac{5}{x+1}=\frac{2x(x-2)-3x(x+1)^2-5(x+1)(x-2)}{(x+1)^2(x-2)}=$$

$$=\frac{2x^2-4x-3x\left(x^2+2x+1\right)-5\left(x^2-2x+x-2\right)}{(x+1)^2(x-2)}=$$

$$=\frac{2x^2-4x-3x^3-6x^2-3x-5x^2+5x+10}{(x+1)^2(x-2)}=\frac{-3x^3-9x^2-2x+10}{(x+1)^2(x-2)}$$

b)

$$\frac{4x^2-25}{x+1}:\frac{10x-25}{x^2+2x+1}=\frac{(2x+5)(2x-5)}{(x+1)}:\frac{5(2x-5)}{(x+1)^2}=\frac{(2x+5)\cancel{(2x-5)}}{\cancel{(x+1)}}\cdot\frac{(x+1)^{\cancel{2}}}{5\cancel{(2x-5)}}=$$

$$=\frac{(2x+5)(x+1)}{5}=\frac{2x^2+2x+5x+5}{5}=\frac{2x^2+7x+5}{5}$$

4) Enuncieu i demostreu el Teorema del residu

(0,25+0,5=0,75 punts)

<u>Teorema del Residu:</u>
El residu de la divisió [P(x) : (x–a)] = P(a)
<u>Demostració</u>

Com el divisor és de grau 1 el residu és un polinomi de grau zero, així doncs és una constant: R(x)=R un nombre real.

Per tant si anomenem q(x) al quocient de la divisió i R al residu tenim que:
P(x)= (x–a) q(x) + R
I si ara calculem el valor numèric del polinomi p(x) per X = a tenim:

P(a)= (a–a) q(a) + R=0 q(a) + R = 0 + R = R com volem demostrar.

5) Expresseu amb intervals les solucions reals de:

a) $\dfrac{14x-7}{x-4} \geq 0$

Anem a estudiar el signes d'aquesta funció $f(x) = \dfrac{14x-7}{x-4}$***.***

Per fer-ho sobre la seva taula de valors marcarem:

x	
f(x)	

I) ***Els valors de x per als quals no existeix f(x) (és a dir els punts que no són de seu domini)***
En aquest cas només és el valor que anul·lar el denominador. Que és x=4

II) ***Els valors de x tal que f(x)=0.***
En aquest cas només és quan 14 X–7=0 $\Rightarrow$ ***x =1/2***

III) ***En les zones en que queda divida la recta real el signe de f(x) és constant [ja que la funció és contínua*** $\forall x \in R - \{4\}$***.***
Per descobrir aquest signe és suficient donar una valor en cada zona:
f(0)=7/4 > 0;   f(3)=35/(-1) < 0;   f(5)=63>0

x		***1/2***		***4***	
f(x)	**+ + + + + + + + + + +**	***0***	**– – – – – – – – – – –**	$\nexists$	**+ + + + + + + + + + + + + + + + + + + +**

Així doncs ara a la vista de la taula de signe de la funció puc donar les solucions de la inequació

$$\frac{14x-7}{x-4} \geq 0 \Leftrightarrow \forall x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup (4, +\infty)$$

b) $\left.\begin{array}{c} -x^2 + 3x + 10 \leq 0 \\ \dfrac{-5x+2}{3} > \dfrac{x-62}{6} \\ (x+3)^2 > 0 \end{array}\right\}$

Hem de solucionar cada inequació i després fer la intersecció de les solucions

1a) Dibuixant ràpid la paràbola $y = -x^2 + 3x + 10$

- ***Com a=–1<0*** $\Rightarrow$ ***branques cap a baix***
- ***Els talls de la paràbola amb l'eix OX (y=0) són les solucions del sistema:***

$$\left.\begin{array}{r} y=-x^2+3x+10 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -x^2+3x+10=0 \Rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{9+40}}{-2}=\frac{-3\pm 7}{-2}$$

$$x=\begin{cases} =\dfrac{4}{-2}=-2 \\ =\dfrac{-10}{-2}=5 \end{cases}$$

ja podem conèixer els signes de la funció:

x		***–2***		***5***	
$y=-x^2+3x+10$	− − − − − − −	***0***	+ + + + + + +	***0***	− − − − − − − − − − − −

$$-x^2+3x+10\le 0 \Leftrightarrow \forall x\in(-\infty,-2]\cup[5,+\infty)$$

2a) És una inequació de 1r grau

$\dfrac{-5x+2}{3}>\dfrac{x-62}{6}$ ***Multiplico per 6>0 per eliminar denominadors***

$$\frac{-5x+2}{3}\cdot 6>\frac{x-62}{6}\cdot 6 \Rightarrow (-5x+2)\cdot 2>x-62 \Rightarrow -10x+4>x-62 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -10x-x>-62-4 \Rightarrow -11x>-66 \Rightarrow x<\frac{-66}{-11} \Rightarrow x<6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall x\in(-\infty,6)$$

3a) És una inequació de 2n grau

Si dibuixem la paràbola $y=(x+3)^2=x^2+6x+9$ ***de forma ràpida es veu que és un paràbola amb branques cap a dalt que només talla l'eix OX (y=0) en el punt de x = –3***

x		***–3***	
$y=(x+3)^2=x^2+6x+9$	+ + + + + + +	***0***	+ + + + + + +

Així doncs les solucions d'aquesta inequació són

$$\forall x\in R-\{-3\}=(-\infty,-3)\cup(-3,+\infty)$$

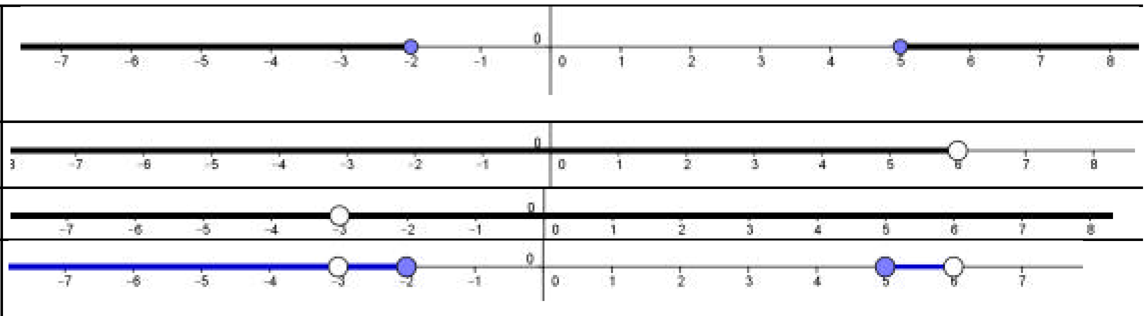
I ARA FENT LA INTERSECCIÓ DE LES SOLUCIONS D'AQUESTES INEQUACIONS TENIM LES SOLUCIONS DEL SISTEMA:

1a

2a

3a

sistema



Així doncs les solucions són: $\forall x\in(-\infty,-3)\cup(-3,-2]\cup[5,6)$