



Nom i Cognoms:

Grup:

Data:

Nota molt important: S'han de veure tots els passos intermedis.

- 1) Resoleu pel mètode Gauss el sistema següent i indiqueu de quin tipus és.

$$\left. \begin{array}{rrcrcl} x & + & y & - & 3z & = & 6 \\ 3x & + & 2y & - & 7z & = & 15 \\ & & 2y & - & 4z & = & 6 \end{array} \right\}$$

(1,5 punts)

- 2) Sabent que $\sin(a) = \frac{-12}{13}$ i que $\tan(a) < 0$. Sense trobar l'angle a (és a dir

sense fer servir les tecles $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$ de la calculadora) calculeu:

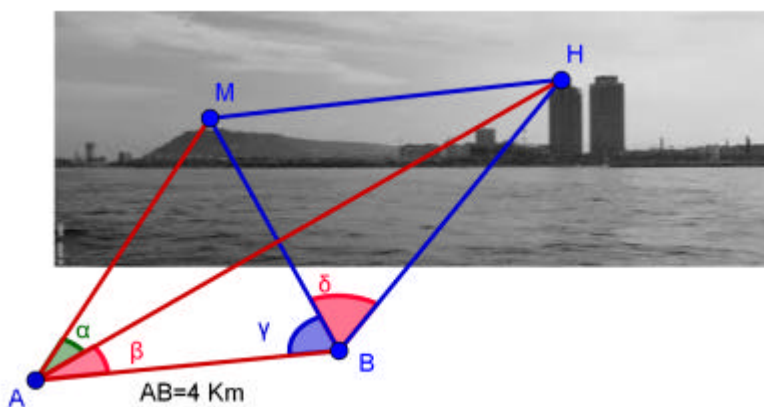
a) $\cos(a)$

b) $\cos(90^\circ + a)$, $\sin(90^\circ + a)$ i $\tan(90^\circ + a)$

c) $\sin(2a)$ i $\tan\left(\frac{a}{2}\right)$

(1+0,5*2=2 punts)

- 3) Anem a calcular la distància que hi ha en línia recta entre Montjuïc i l'Hotel Arts.. Per això dos amics (A i B) marxem a navegar. Us truquem per telèfon per a que feu els càlculs i us donen aquestes dades:



$\overline{AB} = 4 \text{ km},$

Angles:

$\text{MAH} = a = 37,05^\circ,$

$\text{HAB} = b = 26,38^\circ,$

$\text{ABM} = g = 75,48^\circ$ i

$\text{MBH} = d = 36,37^\circ$

a) Operant amb el triangle ABM calculeu la longitud de $\overline{BM}$

b) Operant amb el triangle ABH calculeu la longitud de $\overline{BH}$

c) Operant amb el triangle MBH calculeu la longitud de $\overline{MH}$

(3 punts)

- 4) Trobeu totes les solucions de les equacions següents:

a) $\cos(4x + 20^\circ) = 1/2$

b) $7 \tan^2(x) - 2 \tan^4(x) = 3$

(1+1,5=2,5 punts)

- 5) Enuncia i demostra el Teorema del sinus

(1 punt)



Nom i Cognoms:

Grup:

Data:

Nota molt important: S'han de veure tots els passos intermedis.

1) Resoleu pel mètode Gauss el sistema següent i indiqueu de quin tipus és.

$$\left. \begin{array}{rrcrcl} x & + & y & - & 3z & = & 6 \\ 3x & + & 2y & - & 7z & = & 15 \\ & & 2y & - & 4z & = & 6 \end{array} \right\}$$

(1,5 punts)

① Treballem amb notació matricial

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & 15 \\ 0 & 2 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{F2-3F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{F3+2F2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & -3 \end{array} \right)$$

*Puc eliminar la F3 ja que aquesta equació no aporta res només $0=0$

3 INC.

Núm de Coef de la INCògnita escalonada } $3-2=1$
amb 2 pivots $\neq 0$ $\neq$

SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINAT (S.C.I.)
amb un grau de llibertat

Agofo com a incògnita lliure la de la columna que no intervé en els pivots $\neq 0$

Així doncs.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 6+3z \\ 0 & -1 & -3-2z \end{array} \right) \xrightarrow{\forall z \in \mathbb{R}} \left. \begin{array}{l} F2 \Rightarrow y = 3+2z \\ F1 \Rightarrow x+y = 6+3z \\ x = -y + 6+3z \\ x = -3-2z + 6+3z \\ x = 3+z \end{array} \right\}$$

$\Rightarrow$ Solucions del S.C.I. amb 1 grau de llibertat

$$\left. \begin{array}{l} x = 3+z \\ y = 3+2z \\ z = z \end{array} \right\} \forall z \in \mathbb{R}$$

Alguns heu agafat com a llei de y i queda

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 6-y \\ 0 & -2 & -3+y \end{array} \right) \quad \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3+y}{2} \\ y = y \\ z = \frac{-3+y}{2} \end{cases} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

2) Sabent que $\sin(\alpha) = \frac{-12}{13}$ i que $\tan(\alpha) < 0$. Sense trobar l'angle α (és a dir

sense fer servir les tecles $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$ de la calculadora) calculeu:

a) $\cos(\alpha)$

b) $\cos(90^\circ + \alpha)$, $\sin(90^\circ + \alpha)$ i $\tan(90^\circ + \alpha)$

c) $\sin(2\alpha)$ i $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

(1+0,5*2=2 punts)

②

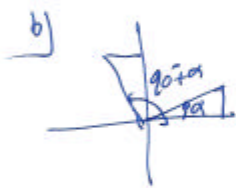
$\sin \alpha < 0 \Rightarrow \alpha \in 3^\circ \text{ o } 4^\circ \text{ quadrants}$
 $\tan \alpha < 0 \Rightarrow \alpha \in 2^\circ \text{ o } 4^\circ \text{ quadrants} \Rightarrow \alpha \in 4^\circ \text{ quadr.}$

a) $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$

$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{-12}{13}\right)^2}$

Com $\alpha \in 4^\circ \text{ quadrants}$
 agafa el +

$\Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{169-144}{169}} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}$



$\Rightarrow \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha = \frac{12}{13}$

$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha = \frac{5}{13}$

$\tan(90^\circ + \alpha) = \frac{\sin(90^\circ + \alpha)}{\cos(90^\circ + \alpha)} = \frac{5/13}{12/13} = \frac{5}{12}$

b) $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{-12}{13} \cdot \frac{5}{13} = \frac{-120}{169} = -0,71$

$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{5}{13}}{1 + \frac{5}{13}}} = \pm \sqrt{\frac{\frac{13-5}{13}}{\frac{13+5}{13}}} = \pm \sqrt{\frac{8}{18}}$

Denunciis del signe

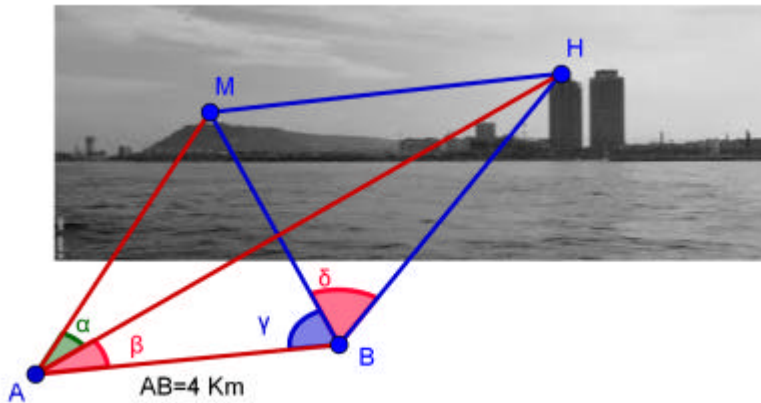
$\alpha \in 4^\circ \text{ quadrants}$

$270^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ \Rightarrow 135^\circ \leq \frac{\alpha}{2} \leq 180^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\alpha}{2} \in 2^\circ \text{ quadrants} \Rightarrow \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) < 0$

$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\sqrt{\frac{4}{9}} = -\frac{2}{3}$

- 3) Anem a calcular la distància que hi ha en línia recta entre Montjuïc i l'Hotel Arts.. Per això dos amics (A i B) marxem a navegar. Us truquem per telèfon per a que feu els càlculs i us donen aquestes dades:



$$\overline{AB} = 4 \text{ km},$$

Angles:

$$MAH = a = 37,05^\circ,$$

$$HAB = b = 26,38^\circ,$$

$$ABM = g = 75,48^\circ \text{ i}$$

$$MBH = d = 36,37^\circ$$

- Operant amb el triangle ABM calculeu la longitud de $\overline{BM}$
- Operant amb el triangle ABH calculeu la longitud de $\overline{BH}$
- Operant amb el triangle MBH calculeu la longitud de $\overline{MH}$

(3 punts)

③ a)

$$37,05^\circ + 26,38^\circ = 63,43^\circ$$

$$\Rightarrow \angle AHB = 180^\circ - 63,43^\circ - 75,48^\circ$$

$$\angle AHB = 41,09^\circ$$

I ara pel T. del SINUS

$$\frac{4}{\sin(41,09^\circ)} = \frac{\overline{AB}}{\sin(63,43^\circ)} \Rightarrow \overline{AB} = \frac{4 \sin(63,43^\circ)}{\sin(41,09^\circ)}$$

$$\boxed{\overline{AB} = 5,44 \text{ Km}}$$

b)

$$111,85^\circ = 75,48^\circ + 36,37^\circ$$

$$\angle AHB = 180^\circ - 26,38^\circ - 111,85^\circ$$

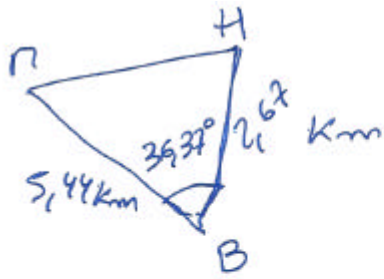
$$\angle AHB = 41,77^\circ$$

I ara pel T. SINUS

$$\frac{4}{\sin(41,77^\circ)} = \frac{\overline{BH}}{\sin(26,38^\circ)} \Rightarrow \overline{BH} = \frac{4 \sin(26,38^\circ)}{\sin(41,77^\circ)} = 2,67 \text{ Km}$$

$$\boxed{\overline{BH} = 2,67 \text{ Km}}$$

c)



pel T. del COSINUS

$$\overline{AH}^2 = 5,44^2 + 2,67^2 - 2 \cdot 5,44 \cdot 2,67 \cdot \cos(36,37^\circ)$$

$$AH^2 = 13,33163425$$

$$\Rightarrow \overline{AH} = +\sqrt{13,33163425}$$

in unita
longitud

$$= 3,65 \text{ km}$$

4) Trobeu totes les solucions de les equacions següents:

a) $\cos(4x+20^\circ)=1/2$

b) $7\tan^2(x) - 2\tan^4(x) = 3$

(1+1,5=2,5 punts)

④ a) $\cos(4x+20^\circ) = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \text{a.1)} \\ \text{a.2)} \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

a.1) $4x+20^\circ = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) + k \cdot 360^\circ$
 $4x = 60^\circ - 20^\circ + k \cdot 360^\circ$
 $4x = 40^\circ + k \cdot 360^\circ$
 $x = 10^\circ + k \cdot 90^\circ \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

a.2) $4x+20^\circ = -\arccos\left(\frac{1}{2}\right) + k \cdot 360^\circ \quad \forall k \in \mathbb{Z}$
 $4x+20^\circ = -60^\circ + k \cdot 360^\circ$
 $4x = -20^\circ - 60^\circ + k \cdot 360^\circ$
 $4x = -80^\circ + k \cdot 360^\circ$
 $x = -20^\circ + k \cdot 90^\circ \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

b) $7\tan^2(x) - 2\tan^4(x) = 3$
 $-2\tan^4(x) + 7\tan^2(x) - 3 = 0$
 CANVI $z = \tan^2(x)$ $\left. \begin{array}{l} -2z^2 + 7z - 3 = 0 \\ z = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{-4} \end{array} \right\}$

$z = \frac{-7 \pm 5}{-4} = \begin{cases} z = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} \\ z = \frac{-12}{-4} = 3 \end{cases}$ Ara després el canvi $\forall k \in \mathbb{Z}$

$\tan^2(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \bullet \tan x = +\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + k \cdot 180^\circ \\ x = 35,26^\circ + k \cdot 180^\circ \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\ \bullet \tan x = -\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \arctan\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + k \cdot 180^\circ \\ x = -35,26^\circ + k \cdot 180^\circ \quad \forall k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\tan^2(x) = 3 \Rightarrow \begin{cases} \bullet \tan x = +\sqrt{3} \Rightarrow x = \arctan(\sqrt{3}) + k \cdot 180^\circ \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\ x = 60^\circ + k \cdot 180^\circ \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\ \bullet \tan x = -\sqrt{3} \Rightarrow x = \arctan(-\sqrt{3}) + k \cdot 180^\circ \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\ x = -60^\circ + k \cdot 180^\circ \quad \forall k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

5) Enuncia i demostra el Teorema del sinus
(1 punt)

5) T. SINUS

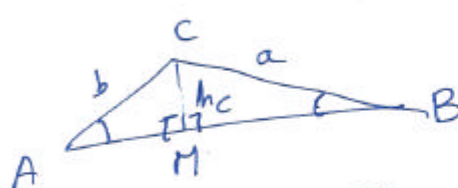
Donat el triangle de vèrtex ABC i per tant de costats a, b, c

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$



Demostració

Si h_c és l'altura que passa pel vèrtex C

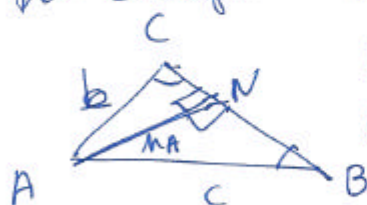


$$\left. \begin{array}{l} \text{Pensant en } \triangle AMC \Rightarrow \sin A = \frac{h_c}{b} \\ \text{Pensant en } \triangle CMB \Rightarrow \sin B = \frac{h_c}{a} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} h_c = b \sin A \\ h_c = a \sin B \end{array} \right\} \Rightarrow b \sin A = a \sin B$$

$$\boxed{\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}} \quad (1)$$

I ara raonem amb una altra altura per exemple la h_A



$$\left. \begin{array}{l} \text{Pensant en } \triangle ANC \Rightarrow \sin C = \frac{h_A}{b} \\ \text{Pensant en } \triangle BNA \Rightarrow \sin B = \frac{h_A}{c} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} h_A = b \sin C \\ h_A = c \sin B \end{array} \right\} \Rightarrow b \sin C = c \sin B$$

$$\boxed{\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}} \quad (2)$$

I per tant juntant (1) i (2) $\Rightarrow$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

C.U.D.