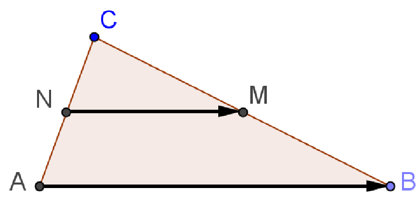
Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

Nota molt important: S'han de veure tots els passos intermedis.

1) Per demostrar una propietat general sobre un triangle va molt bé agafar una referència el màxim d'ajustada a la figura. Així doncs anem a fer això:



Donat un triangle qualsevol de vèrtexs A, B i C, podem considerar una referència del pla formada per $\Re = \left\{A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\}$ ja que $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ són linealment independents (L.I.) d'aquesta forma els vèrtexs dels triangle tenen unes coordenades molt fàcils: A(0,0), B(1,0) i C(0,1).

a) Trobeu les coordenades dels punt següents: M=punt mig del segment $\overline{BC}$ i N=punt mig del segment $\overline{AC}$

b) Quina relació trobeu entre els vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{NM}$?

(1 punt)

2) Calculeu **y** perquè els vectors $\vec{a} = (3, y)$ i $\vec{b} = (0, 2)$ formin un angle de 45º.

(1,5 punts)

3) Trobeu un parell de punts, un vector director i un de perpendicular de cadascuna de les rectes següents:

a) **s:** $\begin{cases} x = 2k \\ y = 3 - k \end{cases} \forall k \in R$ b) **t:** $\dfrac{2x-8}{4} = y + 5$

c) Quina és la posició relativa de les rectes **s** i **t** i quin és l'angle que formen en tallar-se

(3 punts)

4) Discutiu quina és la posició relativa d'aquestes rectes. Segons els valors de m i n
r: m x + 4 y + 3 = 0
s: 2 x + 8 y — n = 0

(1,5 punts)

5) Donat el punt A(2,5) i la recta **r:** x+y=1 trobeu:
a) La recta **s**, que és paral·lela a **r** i que passa per A
b) La recta **t**, que és perpendicular a **r** que passa per A
c) Trobeu el punt de tall de les rectes **r** i **t**
d) Trobeu el punt simètric de A respecte la recta **r**

(3 punts)

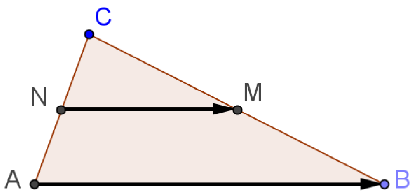
Generalitat de Catalunya
Departament d'Ensenyament
Institut Jaume Balmes

Departament de Matemàtiques
1r BATX MA
Geometria I
SOLUCIÓ

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

Nota molt important: S'han de veure tots els passos intermedis.

1) Per demostrar una propietat general sobre un triangle va molt bé agafar una referència el màxim d'ajustada a la figura. Així doncs anem a fer això:



Donat un triangle qualsevol de vèrtexs A, B i C, podem considerar una referència del pla formada per $\Re=\left\{A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right\}$ ja que $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ són linealment independents (L.I.) d'aquesta forma els vèrtexs dels triangle tenen unes coordenades molt fàcils: A(0,0), B(1,0) i C(0,1).

a) Trobeu les coordenades dels punt següents: M=punt mig del segment $\overline{BC}$ i N=punt mig del segment $\overline{AC}$

b) Quina relació trobeu entre els vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{NM}$?

(1 punt)

M(1/2, 1/2) i N (0,1/2)

$\overrightarrow{AB}$=(1,0) i $\overrightarrow{NM}$=(1/2,0) així doncs és clar que $\overrightarrow{AB}$= 2 $\overrightarrow{NM}$ la qual cosa si ho volem dir amb paraules és:

- els vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{NM}$ són linealment dependents (LD) i que el mòdul de $\overrightarrow{AB}$ és el doble que el de $\overrightarrow{NM}$ (o el mòdul de $\overrightarrow{NM}$ és la meitat del mòdul de $\overrightarrow{AB}$)

o si volem parlar de segments podem dir que:

- els segments $\overline{NM}$ i $\overline{AB}$ són paral·lels i que el 1r és de la meitat de longitud que el 2n.

2) Calculeu **y** perquè els vectors $\vec{a}=(3,y)$ i $\vec{b}=(0,2)$ formin un angle de 45º.

(1,5 punts)

Fem el producte escalar dels vectors de les dues formes que els sabem calcular:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos(45^{\circ})\Rightarrow (3,y)\cdot(0,2)=\left|(3,y)\right|\left|(0,2)\right|\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y=\sqrt{9+y^{2}}\,\cancel{\sqrt{4}}\,\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\Rightarrow 2y=\sqrt{9+y^{2}}\sqrt{2}$$

I ara per solucionar aquesta equació irracional elevem al quadrat (la qual cosa obliga a comprovar les solucions que obtingem)

$$(2y)^{2}=\left(\sqrt{9+y^{2}}\right)^{2}\left(\sqrt{2}\right)^{2}\Rightarrow 4y^{2}=\left(9+y^{2}\right)2\Rightarrow 4y^{2}=18+2y^{2}\Rightarrow 2y^{2}=18\Rightarrow y^{2}=9\Rightarrow y=\pm\sqrt{9}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\pm 3$$

Així doncs hi ha dues candidates a solucions que hem de comprovar a l'equació irracional anterior al pas d'elevar al quadrat.

- Si $y=3$ i substituim a l'equació: $2y=\sqrt{9+y^{2}}\,\sqrt{2}$ tenim que
  $6=\sqrt{9+9}\sqrt{2}\Leftrightarrow 6=\sqrt{18}\sqrt{2}\Leftrightarrow 6=\sqrt{36}\Leftrightarrow 6=6$
  Per tant aquesta solució $y=3$ sí que val.
- Si $y=-3$ i substituim a l'equació: $2y=\sqrt{9+y^{2}}\,\sqrt{2}$ tenim que
  $-6=\sqrt{9+9}\sqrt{2}\Leftrightarrow -6=\sqrt{18}\sqrt{2}\Leftrightarrow -6=\sqrt{36}\Leftrightarrow -6=6$

Per tant aquesta solució $y=-3$ NO que val.AIXÍ DONCS LA SOLUCIÓ ÉS $y=3$

3) Trobeu un parell de punts, un vector director i un de perpendicular de cadascuna de les rectes següents:

a) **s:** $\begin{cases} x = 2k \\ y = 3 - k \end{cases} \forall k \in R$ b) **t:** $\frac{2x-8}{4} = y + 5$

c) Quina és la posició relativa de les rectes **s** i **t** i quin és l'angle que formen en tallar-se

(3 punts)

3 a) $s: \begin{cases} x = 2k \\ y = 3 - k \end{cases} \forall k \in R$ PTS $A(0,3)$ per $k=0$; $B(2,2)$ per $k=1$

vector $\vec{V_s} = (2,-1)$ o $\vec{BA}$ o $\vec{AB}$

$\vec{V}_{\perp s} = (1,2)$

b) $\frac{\frac{1}{2}(2x-8)}{\frac{1}{2}(4)} = \frac{y+5}{1} \Rightarrow \frac{x-4}{2} = \frac{y+5}{1} \Rightarrow$ PTS $A(4,-5)$

$x=0 \Rightarrow -2 = y+5$; $y=-7$

$B(0,-7)$

vector director $\vec{V_t} = (2,1)$ o $\vec{AB}$

$V_{\perp t} = (-1,2)$

c) Com $\vec{V_s}$ i $\vec{V_t}$ NO són L.D ja que no són proporcionals $\Rightarrow$

$\vec{V_s} = (2,-1)$

$\vec{V_t} = (2,1)$

$\frac{2}{2} \neq \frac{-1}{1}$

$\Rightarrow \vec{V_s}$ i $\vec{V_t}$ són L.I $\Rightarrow$ r i s són SECANTS

$\alpha = \measuredangle(s,t)$

$\cos\alpha = \frac{|\vec{V_s} \cdot V_t|}{|\vec{V_s}|\,|\vec{V_t}|} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{|(2,-1)(2,1)|}{|(2,-1)|\,|(2,1)|} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{|4-1|}{\sqrt{4+1}\sqrt{1+4}} = \frac{3}{\sqrt{5}\sqrt{5}}$

$\cos\alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{3}{5}\right) = 53{,}13^{\circ}$

4) Discutiu quina és la posició relativa d'aquestes rectes. Segons els valors de m i n
r: m x + 4 y + 3 = 0
s: 2 x + 8 y — n = 0

(1,5 punts)

4

$r: \; mx + 4y + 3 = 0$
$2x + 8y - n = 0$

I) Si $\frac{m}{2} \neq \frac{4}{8} \Longleftrightarrow m \neq 1$ són SECANTS

II) Si $\frac{m}{2} = \frac{4}{8}$ és a dir si $m = 1$ poden ser // o =

II.1) $\frac{1}{2} = \frac{4}{8} = \frac{3}{-n} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} n = -6 \\ m = 1 \end{matrix}} \Rightarrow r = s$

II.2) $\frac{1}{2} = \frac{4}{8} \neq \frac{3}{-n} \Rightarrow \boxed{m = 1 \text{ i } n \neq -6} \Rightarrow r // s$

5) Donat el punt A(2,5) i la recta **r:** x+y=1 trobeu:

a) La recta **s**, que és paral·lela a **r** i que passa per A
b) La recta **t**, que és perpendicular a **r** que passa per A
c) Trobeu el punt de tall de les rectes **r** i **t**
d) Trobeu el punt simètric de A respecte la recta **r**

(3 punts)

5

$A(2,5)$

$r: x+y=1 \Rightarrow v_r=(-1,1)$

$v_{\perp r}=(1,1)$

a) $\left.\begin{array}{l} s \parallel r \Rightarrow \vec{v_s}=\vec{v_r}=(-1,1) \\ A(2,5)\in s \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-5}{1}}$ s

EQ. CONTÍNUA

b) $\left.\begin{array}{l} t \perp r \Rightarrow \vec{v_t}=v_{\perp r}=(1,1) \\ A(2,5)\in s \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-5}{1}}$ t

E.Q. CONTINUA

$x-2=y-5$

$x-y=-3$

c)

$\left.\begin{array}{ll} r & x+y=1 \\ t: & x-y=-3 \end{array}\right|$ 1a+2a

$2x=-2$

$x=-1$; substit en la 1a $-1+y=1$

$y=2$

$r\cap s=\{P\}$ on $P(-1,2)$

d)

A(2,5) P(-1,2) X(x,y)

P és el pt mig de $\overline{AX} \Rightarrow (-1,2)=\left(\dfrac{x+2}{2},\dfrac{y+5}{2}\right)$

Igualant COORDENADES A COORDENADES

$-1=\dfrac{x+2}{2}$ | $2=\dfrac{y+5}{2}$

$-2=x+2$ | $4=y+5$

$-4=x$ | $-1=y$

$\Rightarrow X(-4,-1)$