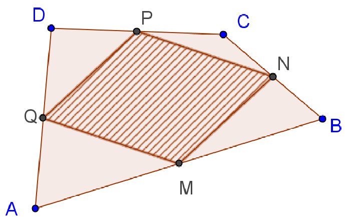
Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

Nota molt important: S'han de veure tots els passos intermedis.

1) Per demostrar una propietat general sobre una figura va molt bé agafar una referència el màxim d'ajustada a la figura. Així doncs anem a fer això per veure si els punts mitjos d'un quadrilàter formen alguna figura especial:



Donat un quadrilàter del pla ABCD podem considerar una referència del pla formada per $\Re = \left\{A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right\}$ ja que $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ són linealment independents (L.I.) d'aquesta forma els vèrtexs dels triangle tenen unes coordenades molt fàcils: A(0,0), B(1,0), C(a,b) i D(0,1)

a) Trobeu les coordenades dels punts mitjos de cada costat del quadrilàter, és a dir:
M=punt mig del segment $\overline{AB}$, N=punt mig del segment $\overline{BC}$, P=punt mig del segment $\overline{CD}$ i Q=punt mig del segment $\overline{DA}$,

b) Quina relació trobeu entre els vectors $\overrightarrow{MN}$ i $\overrightarrow{QP}$? i quina entre els vectors $\overrightarrow{MQ}$ i $\overrightarrow{NP}$?. I per tant que pots dir del quadrilàter MNPQ?

(1,5 punts)

2) Donats els vectors $\vec{a} = (1, y)$ i $\vec{b} = (x, 8)$, calculeu els valor de **x** i **y** per tal que:

- $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{5}$ i que
- $\vec{a}$ i $\vec{b}$ siguin perpendiculars.

(1,5 punts)

3) Trobeu un parell de punts, un vector director i un de perpendicular de cadascuna de les rectes següents:

a) **s:** $\begin{cases} x = 5 - 10k \\ y = -24k \end{cases} \quad \forall k \in R$ b) **t:** 12 x – 5 y = 60

c) Quina és la posició relativa de les rectes **s** i **t**
d) Dóna l'equació d'una recta **r** que sigui paral·lela a **t**

(2,5 punts)

4) Discutiu quina és la posició relativa d'aquestes rectes. Segons els valors de m i n
r: 9 x + 9 y + n = 0
s: 3 x + m y — 15 = 0

(1,5 punts)

5) Donat el punt A(–1,4) i la recta **r:** $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{4}$ trobeu:

a) La recta **s**, que és paral·lela a **r** i que passa per A
b) La recta **t**, que és perpendicular a **r** que passa per A
c) Trobeu el punt de tall de les rectes **r** i **t**
d) Trobeu el punt simètric de A respecte la recta **r**

(3 punts)

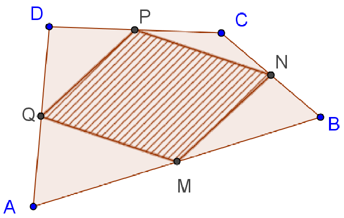
Generalitat de Catalunya
Departament d'Ensenyament
Institut Jaume Balmes

Departament de Matemàtiques
1r BATX MA
Geometria I
SOLUCIÓ

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

Nota molt important: S'han de veure tots els passos intermedis.

1) Per demostrar una propietat general sobre una figura va molt bé agafar una referència el màxim d'ajustada a la figura. Així doncs anem a fer això per veure si els punts mitjos d'un quadrilàter formen alguna figura especial:



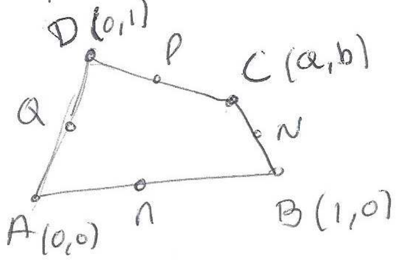
Donat un quadrilàter del pla ABCD podem considerar una referència del pla formada per $\Re = \left\{A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right\}$ ja que $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ són linealment independents (L.I.) d'aquesta forma els vèrtexs dels triangle tenen unes coordenades molt fàcils: A(0,0), B(1,0), C(a,b) i D(0,1)

a) Trobeu les coordenades dels punts mitjos de cada costat del quadrilàter, és a dir:
M=punt mig del segment $\overline{AB}$, N=punt mig del segment $\overline{BC}$, P=punt mig del segment $\overline{CD}$ i Q=punt mig del segment $\overline{DA}$,

b) Quina relació trobeu entre els vectors $\overrightarrow{MN}$ i $\overrightarrow{QP}$? i quina entre els vectors $\overrightarrow{MQ}$ i $\overrightarrow{NP}$?. I per tant que pots dir del quadrilàter MNPQ?

(1,5 punts)

① $\Re = \{A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\}$



0,4

$M\ \left(\frac{1}{2}, 0\right)$
$N\ \left(\frac{a+1}{2}, \frac{b}{2}\right)$
$P\ \left(\frac{a}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$
$Q\ \left(0, \frac{1}{2}\right)$

0,8

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$
$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$
$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ 0,1

$\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OM} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$\Rightarrow \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$ 0,1

1,5

$\Rightarrow$ MNPQ és un PARAL·LELOGRAM 0,1

2) Donats els vectors $\vec{a}=(1,y)$ i $\vec{b}=(x,8)$, calculeu els valor de **x** i **y** per tal que:

- $|\vec{a}|=\sqrt{5}$ i que
- $\vec{a}$ i $\vec{b}$ siguin perpendiculars.

(1,5 punts)

2

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}=(1,y)\\ \vec{b}=(x,8)\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\vec{a}\cdot\vec{b}=x+8y\\ |\vec{a}|=\sqrt{1+y^2}\\ |\vec{b}|=\sqrt{x^2+64}\end{array} \Rightarrow$$

• Com $|\vec{a}|=\sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{1+y^2}=\sqrt{5} \Rightarrow 1+y^2=5$

$y^2=4$

$\boxed{y=\pm 2}$

però també s'ha de complir la 2a condició

que és $\vec{a}\perp\vec{b} \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Rightarrow$

Cas I) $y=2 \Rightarrow (1,2)(x,8)=0$

$x+16=0$

$x=-16$

$\Rightarrow$ Solució 1a
$x=-16$
$y=2$

Cas II) $y=-2 \Rightarrow (1,-2)(x,8)=0$

$x-16=0$

$x=16$

Solució 2a
$x=16$
$y=2$

3) Trobeu un parell de punts, un vector director i un de perpendicular de cadascuna de les rectes següents:

a) **s:** $\begin{cases} x = 5 - 10k \\ y = -24k \end{cases} \forall k \in R$ b) **t:** 12 x – 5 y = 60

c) Quina és la posició relativa de les rectes **s** i **t**

d) Dóna l'equació d'una recta **r** que sigui paral·lela a **t**

(2,5 punts)

3

a) s: $\begin{cases} x = 5 - 10k \\ y = -24k \end{cases} \forall k \in \mathbb{R}$

$\Downarrow$

$\vec{v_s} = (-10,-24)$ o $\overrightarrow{(5,12)}$

PTS per $k=0 \Rightarrow S_1(5,0)$

$k=1 \Rightarrow S_2(-5,-24)$

$v_{\perp s} = (-12,5)$

b) t $12x - 5y = 60$

$\Downarrow$

$v_t = (5,12)$

$v_{\perp t} = (-12,5)$

PTS. $x=0 \Rightarrow y=-12$

$y=0 \Rightarrow x=5$

$R_1(5,0)$

$R_2(0,-12)$

c) • $\vec{v_t} = (5,12)$ o $(-10,-24)$ $\Big\rangle$ Són L.D $\Rightarrow$ No són secants
$\vec{v_s} = (5,12)$

• $\vec{v_t} = (5,12)$
$\overrightarrow{S_1R_2} = (-5,-12)$ $\Big\rangle$ Són L.D $\Rightarrow$ $t = s$

d) Recta r // t $\Rightarrow$ puc agafar com a $\vec{v_r} = \vec{v_t}$ per exemple

I ara un punt que no sigui de t per exemple el $O(0,0) \notin t$

$\Downarrow$

$r = r(O(0,0), \vec{v_t} = (5,12)) \Rightarrow \boxed{\frac{x}{5} = \frac{y}{12}}$ o $\boxed{12x - 5y = 0}$

4) Discutiu quina és la posició relativa d'aquestes rectes. Segons els valors de m i n
r: 9 x + 9 y + n = 0
s: 3 x + m y — 15 = 0

(1,5 punts)

4

$$\left.\begin{array}{l} r: 9x + 9y + n = 0 \\ s: 3x + my - 15 = 0 \end{array}\right\}$$

I) Si $\frac{9}{3} \neq \frac{9}{m} \Leftrightarrow m \neq 3$ r i s secants

II) Si $m = 3$ $\left.\begin{array}{l} 9x + 9y + n = 0 \\ 3x + 3y - 15 = 0 \end{array}\right\}$

II.1) Si $\frac{9}{3} = \frac{9}{3} = \frac{n}{-15} \Rightarrow 3 = \frac{n}{-15} \Rightarrow n = -45 \Rightarrow r = s$

II.2) Si $\frac{9}{3} = \frac{9}{3} \neq \frac{n}{-15} \Rightarrow r \parallel s$
$n \neq -45 \Rightarrow$

Solució:

- Si $m \neq 3$ r i s secants
- Si $m = 3$ i $n = -45$ $r = s$ COINCIDENTS
- Si $m = 3$ i $n \neq -45$ $r \parallel s$ PARAL·LELES
- Si $m = 3$

5) Donat el punt A(–1,4) i la recta **r:** $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{4}$ trobeu:

a) La recta **s**, que és paral·lela a **r** i que passa per A
b) La recta **t**, que és perpendicular a **r** que passa per A
c) Trobeu el punt de tall de les rectes **r** i **t**
d) Trobeu el punt simètric de A respecte la recta **r**

(3 punts)

S

$r: \frac{x}{2}=\frac{y-1}{4} \Rightarrow$ $R \in r$ $R(0,1)$
$\vec{V_r}=(2,4)$ o $(1,2)$
$V_{\perp r}=(-2,1)$

a) $s \parallel a\ r$, $A \in r$ $\Big\}$ $s = r(A; \vec{V_s}=\vec{V_r})$

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{2}$$

b) $t \perp a\ r$, $A \in r$ $\Big\}$ $t = r(A; \vec{V_t}=V_{\perp r})$

$$\frac{x+1}{-2} = \frac{y-4}{1}$$

c) tall de la recta

$r: 4x = 2y - 2 \Rightarrow 4x - 2y = -2$
$t: x+1 = -2y + 8 \Rightarrow x + 2y = 7$

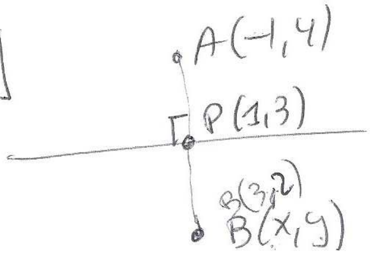
Solucionar el SISTEMA

1a+2a

$5x = 5$
$x = 1$
I subst. en la 2a
$1 + 2y = 7$
$2y = 6$
$y = 3$

$P(1,3)$ = $r \cap t$

d)



El pt buscat B(x,y) verifica que P és el pt mig de $\overline{AB}$

$$\left(\frac{x-1}{2}, \frac{y+4}{2}\right) = (1,3)$$

IGUALANT COORDENADES $\frac{x-1}{2}=1 \Rightarrow x=3$ $\Big|$ $\frac{y+4}{2}=3 \Rightarrow y=2$ $\Big\}$ B(3,2)