Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

Nota molt important: S'han de veure tots els passos intermedis.

1) Solucioneu les següents equacions:
   a) $\log_{2x+2}(15625) = 6$
   b) $20 = 10^{3x-5}$
   c) La x positiva que verifica l'equació $2\log_5(x) - \log_5(x+6) = 3\log_5(2)$

(0,5·2+1=2 punts)

2) Sabent que a,M i N $\in R^+ = (0, +\infty)$ completeu la fórmula següent i demostreu-la:

$$\log_a(M) - \log_{\square}(\square) = \log_{\square}\left(\frac{M}{N}\right)$$

(0,75 punts)

3) Feu les següents operacions amb nombres complexos:
   a) $3 - 2i - (7+i)\cdot(5-3i) =$
   b) $\dfrac{18(5-3i)}{14i} =$
   c) $\dfrac{(2_{45^\circ})^4}{\left(\sqrt[3]{2}_{10^\circ}\right)^6 \cdot 2_{60^\circ}} =$ i expressa el resultat final en forma cartesiana i binòmica
   d) $\sqrt[4]{-81} =$

(0,5·2+0,75+1=2,75 punts)

4)
   a) Raoneu si aquestes successions són progressions aritmètiques (PA), progressions geomètriques (PG) o cap de les dues coses.
   Cas de ser PA o PG identifiqueu-les completament donant el primer terme i la diferència o el primer terme i la raó segons correspongui en cada cas.
   1a) $-25,\ 5,\ -1,\ \frac{1}{5}, \ldots\ldots$
   2a) $\frac{3}{2}, \frac{6}{4}, \frac{12}{6}, \frac{15}{8}, \ldots$
   3a) $100, 91, 82, 73, \ldots.$
   b) Doneu el terme general de les successions de l'apartat anterior.

(1,25+0,75=2 punts)

5) Donada la successió de terme general $a_n = \dfrac{-10+14n}{60n+5}$
   a) Calculeu el terme que ocupa la posició 20
   b) El nombre –2 és de la successió? Cas afirmatiu quin lloc ocupa?

(0,25+0,5·=0,75 punts)

6) Donada la progressió geomètrica que verifica $\left.\begin{array}{l} a_7 = 4\ a_8 \\ 16\ a_3 = 20 \end{array}\right\}$
   a) Calculeu el primer terme (a_1) i la raó (r)
   b) Calculeu, si és possible, la suma del infinits termes de la successió.

(0,75+1=1,75 punts)

SOLUCIÓ

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

Nota molt important: S'han de veure tots els passos intermedis.

1) Solucioneu les següents equacions:

   a) $\log_{2x+2}(15625) = 6$

   b) $20 = 10^{3x-5}$

   c) La x positiva que verifica l'equació $2\log_5(x) - \log_5(x+6) = 3\log_5(2)$

(0,5·2+1=2 punts)

a)

$$\log_{2x+2}(15625) = 6 \Rightarrow (2x+2)^6 = 15625 \Rightarrow 2x+2 = \sqrt[6]{15625}$$

agafem només la solució positiva de l'arrel d'índex 6 ja que (2x+2) és la base d'un logaritme i per tant sempre serà positiu

$$\log_{2x+2}(15625) = 6 \Rightarrow (2x+2)^6 = 15625 \Rightarrow 2x+2 = \sqrt[6]{15625}$$

$$\Rightarrow 2x+2 = \sqrt[6]{5^6} \Rightarrow 2x+2 = 5 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

b)

$$20 = 10^{3x-5} \Rightarrow \log(20) = \log\left(10^{3x-5}\right) \Rightarrow \log(20) = (3x-5)\log(10) \Rightarrow \log(20) = (3x-5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log(20) + 5 = 3x \Rightarrow x = \frac{\log(20)+5}{3} \simeq 2{,}1$$

c)

$$2\log_5(x) - \log_5(x+6) = 3\log_5(2) \Rightarrow \log_5\left(x^2\right) - \log_5(x+6) = \log_5\left(2^3\right) \Rightarrow \log_5\left(\frac{x^2}{x+6}\right) = \log_5\left(2^3\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{x+6} = 8 \Rightarrow x^2 = 8(x+6) \Rightarrow x^2 = 8x+48 \Rightarrow x^2 - 8x - 48 = 0 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64+192}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{256}}{2} \Rightarrow x = \frac{8 \pm 16}{2} = \begin{cases} = 24/2 = 12 \ \ val \\ = -8/2 = -4 \ \ no\ val \end{cases}$$

2) Sabent que a,M i N $\in R^+ = (0,+\infty)$ completeu la fórmula següent i demostreu-la:

$$\log_a(M) - \log_{\square}\left(\boxed{}\right) = \log_{\square}\left(\frac{M}{N}\right)$$

(0,75 punts)

Els nombres a, M i N han de ser nombres reals i positius, ja que estan dins d'un logaritme. I la propietat a completar és :

$$\log_a(M) - \log_{\boxed{a}}\left(\boxed{N}\right) = \log_{\boxed{a}}\left(\frac{M}{N}\right)$$

Demostració

Com M, N i a $\in R^+ = (0,+\infty)$ **podem assegurar que existeixen nombres reals i positius m i n tals que**

$M = a^m$; $N = a^n \Rightarrow$

$\log_a(M) = \log_a(a^m) = m$;

$\log_a(N) = \log_a(a^n) = n$;

$\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a\left(\frac{a^m}{a^n}\right) = \log_a(a^{m-n}) = m-n$;

I per tant substituint a la fórmula

$\log_a(M) - \log_{\boxed{a}}\left(\boxed{N}\right) = \log_{\boxed{a}}\left(\frac{M}{N}\right) \Leftrightarrow m - n = m - n$ **Cosa que és certa.**

3) Feu les següents operacions amb nombres complexos:

a) $3-2i-(7+i)\cdot(5-3i)=$

b) $\dfrac{18(5-3i)}{14i}=$

c) $\dfrac{(2_{45^\circ})^4}{\left(\sqrt[3]{2_{10^\circ}}\right)^6\cdot 2_{60^\circ}}=$ i expressa el resultat final en forma cartesiana i binòmica

d) $\sqrt[4]{-81}=$

(0,5·2+0,75+1=2,75 punts)

a)

$$3-2i-(7+i)\cdot(5-3i)=3-2i-\left(35-21i+5i-3i^2\right)=3-2i-\left(35-16i-3(-1)\right)=$$

$$=3-2i-\left(35-16i+3\right)=3-2i-38+16i=-35+14i$$

b)

$$\frac{18(5-3i)}{14i}=\frac{18(5-3i)}{14i}\cdot\frac{i}{i}=\frac{90i-54i^2}{14i^2}=\frac{54+90i}{-14}=\frac{2(27+45i)}{-14}=\frac{-27-45i}{7}$$

O també

$$\frac{18(5-3i)}{14i}=\frac{18(5-3i)}{14i}=\frac{90-54i}{14i}=\frac{90}{14i}-\frac{54\cancel{i}}{14\cancel{i}}=\frac{45}{7i}\cdot\frac{i}{i}-\frac{27}{7}=\frac{45i}{-7}-\frac{27}{7}=$$

$$=\frac{-45i-27}{7}=\frac{-27-45i}{7}$$

c)

$$\frac{(2_{45^\circ})^4}{\left(\sqrt[3]{2_{10^\circ}}\right)^6\cdot 2_{60^\circ}}=\frac{2^4{}_{4\cdot 45^\circ}}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^6_{6\cdot 10^\circ}\cdot 2_{60^\circ}}=\frac{2^4{}_{4\cdot 45^\circ}}{2^2{}_{6\cdot 10^\circ}\cdot 2_{60^\circ}}=\frac{16_{180^\circ}}{4_{60^\circ}\cdot 2_{60^\circ}}=\frac{16_{180^\circ}}{8_{120^\circ}}=2_{60^\circ}$$ **en forma polar**

I ara si el passem a forma cartesiana és

$$(2\cos(60^\circ),2\sin(60^\circ))=\left(2\cdot\frac{1}{2},2\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(1,\sqrt{3}\right)$$

i en forma binòmica $1+i\sqrt{3}$

d)

$$\sqrt[4]{-81}=\sqrt[4]{81_{180^\circ}}=\begin{cases}= & 3_{45^\circ}\\ = & 3_{45^\circ+90^\circ}=3_{135^\circ}\\ = & 3_{45^\circ+2\cdot 90^\circ}=3_{225^\circ}\\ = & 3_{45^\circ+3\cdot 90^\circ}=3_{315^\circ}\end{cases}$$

4)

a) Raoneu si aquestes successions són progressions aritmètiques (PA), progressions geomètriques (PG) o cap de les dues coses.
Cas de ser PA o PG identifiqueu-les completament donant el primer terme i la diferència o el primer terme i la raó segons correspongui en cada cas.

1a) $-25,\ 5,\ -1,\ \frac{1}{5},.....$

2a) $\frac{3}{2},\frac{6}{4},\frac{12}{6},\frac{15}{8},....$

3a) $100,91,82,73,....$

b) Doneu el terme general de les successions de l'apartat anterior.

(1,25+0,75=2 punts)

La 1a és PG de $a_1 = -25$ i $r = \frac{-1}{5}$ **ja que** $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \frac{-1}{5}$ **i el seu terme general és**

$$a_n = -25 \cdot \left(\frac{-1}{5}\right)^{n-1}$$

La 2a no és PG ni PA ja que $\frac{a_2}{a_1} \neq \frac{a_3}{a_2} \neq \frac{a_4}{a_3}$, ni tampoc $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2 \neq a_4 - a_3$ **, malgrat tot podem veure que el denominador és la successió de nombre parells, però el numerador, per poc, no és la successió de múltiples de 3. Així doncs no resulta fàcil trobar le terme general** $a_n = \frac{¿?}{2n}$

La 3a és una PA de $a_1 = 100$ i $d = -9$ **ja que** $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = -9$ **i el seu terme general és** $a_n = 100 + (n-1)\cdot(-9) = 100 - 9n + 9 = 109 - 9n$

5) Donada la successió de terme general $a_n = \frac{-10+14n}{60n+5}$

a) Calculeu el terme que ocupa la posició 20

b) El nombre –2 és de la successió? Cas afirmatiu quin lloc ocupa?

(0,25+0,5·=0,75 punts)

a)

$$a_{20} = \frac{-10+14\cdot 20}{60\cdot 20+5} = \frac{270}{1205} = \frac{54}{241}$$

b) Hem de mirar si existeix un n (nombre natural que es correspongui a una posició) tal que $a_n = -2$

$$\frac{-10+14n}{60n+5} = -2 \Rightarrow -10+14n = -2\cdot(60n+5) \Rightarrow -10+14n = -120n-10 \Rightarrow 134n = 0 \Rightarrow n = 0$$

Però com el lloc n=0 no és una posició podem dir que el nombre –2 NO és de la successió

6) Donada la progressió geomètrica que verifica $\left.\begin{array}{r} a_7 = 4\ a_8 \\ 16\ a_3 = 20 \end{array}\right\}$

a) Calculeu el primer terme (a_1) i la raó (r)

b) Calculeu, si és possible, la suma del infinits termes de la successió.

(0,75+1=1,75 punts)

a)

$$\left.\begin{array}{l} a_7 = 4\ a_8 \\ 16\ a_3 = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \cancel{a_1} \cdot \cancel{r^6} = 4\ \cancel{a_1} \cdot r^{\cancel{7}} \\ 16\ a_1 \cdot r^2 = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{1}{4} = r \\ 16\ a_1 \cdot r^2 = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{1}{4} = r \\ \cancel{16}\ a_1 \cancel{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{1}{4} = r \\ a_1 = 20 \end{array}$$

b)

Si que és possible calcular la suma del infinits termes de la successió, ja que és una progressió geomètrica amb una raó de valor absolut menor que 1.

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{20}{1-\frac{1}{4}} = \frac{20}{\frac{3}{4}} = 20 \cdot \frac{4}{3} = \frac{80}{3}$$