Generalitat de Catalunya
Departament d’Ensenyament
Institut Jaume Balmes

Departament de Matemàtiques
1r BATX MA
PG i Àlgebra I

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

Nota molt important: S’han de veure tots els passos intermedis.

1) Donada la progressió geomètrica que verifica $\left.\begin{array}{l} 2a_3 = -4\ a_4 \\ a_2 + a_4 = 5 \end{array}\right\}$

a) Calculeu el primer terme (a_1) i la raó (r)

b) Calculeu, si és possible, la suma del infinits termes de la successió.

(1+0,75=1,75 punts)

2)

a) Factoritzeu el polinomi $p(x) = 6x^5 + 5x^4 - 2x^3 - x^2$

b) Trobeu les solucions reals de l'equació $6x^5 + 5x^4 = 2x^3 + x^2$

(2+0,5=2,5 punts)

3) Opereu i simplifiqueu:

a) $\dfrac{2x}{(x+1)^2} - \dfrac{3x}{x-2} - \dfrac{5}{x+1} =$

b) $\dfrac{4x^2 - 25}{x+1} : \dfrac{10x - 25}{x^2 + 2x + 1}$

(1,5+1=2,5 punts)

4) Enuncieu i demostreu el Teorema del residu

(0,25+0,5=0,75 punts)

5) Expresseu amb intervals les solucions reals de:

a) $\dfrac{14x - 7}{x - 4} \geq 0$

b) $\left.\begin{array}{c} -x^2 + 3x + 10 \leq 0 \\ \dfrac{-5x+2}{3} > \dfrac{x - 62}{6} \\ (x+3)^2 > 0 \end{array}\right\}$

(0,5+2=2,5 punts)

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

Nota molt important: S'han de veure tots els passos intermedis.

1) Donada la progressió geomètrica que verifica $\left.\begin{array}{l} 2a_3 = -4\ a_4 \\ a_2 + a_4 = 5 \end{array}\right\}$

a) Calculeu el primer terme (a_1) i la raó (r)

b) Calculeu, si és possible, la suma del infinits termes de la successió.

(1+0,75=1,75 punts)

a)

$$\left.\begin{array}{l} 2a_3 = -4\ a_4 \\ a_2 + a_4 = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cancel{a_1}\cdot \cancel{r^2} = -4\ \cancel{a_1}\cdot r^{\cancel{3}} \\ a_1\cdot r + a_1\cdot r^3 = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{2}{-4} = r \\ a_1\left(r + r^3\right) = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{-1}{2} = r \\ a_1\left(\dfrac{-1}{2} + \left(\dfrac{-1}{2}\right)^3\right) = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{-1}{2} = r \\ a_1\left(\dfrac{-1}{2} - \dfrac{1}{8}\right) = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{-1}{2} = r \\ a_1\left(\dfrac{-4-1}{8}\right) = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{-1}{2} = r \\ a_1 = 5\cdot\dfrac{8}{-5} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{-1}{2} = r \\ a_1 = -8 \end{array}\right\}$$

b)

Si que és possible calcular la suma del infinits termes de la successió, ja que és una progressió geomètrica amb una raó de valor absolut menor que 1.

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{-8}{1-\dfrac{-1}{2}} = \frac{-8}{1+\dfrac{1}{2}} = \frac{-8}{\dfrac{3}{2}} = -8\cdot\frac{2}{3} = \frac{-16}{3}$$

2)

a) Factoritzeu el polinomi $p(x) = 6x^5 + 5x^4 - 2x^3 - x^2$

b) Trobeu les solucions reals de l'equació $6x^5 + 5x^4 = 2x^3 + x^2$

(2+0,5=2,5 punts)

a) Comencem traient factor comú $p(x) = 6x^5 + 5x^4 - 2x^3 - x^2 = x^2(6x^3 + 5x^2 - 2x - 1)$

Ara provem de dividir el segon factor que és de tercer grau $q(x) = 6x^3 + 5x^2 - 2x - 1$ **per (x-a) on "a" ha de ser un divisor de 1,**

Com q(–1)=0 sabem que la divisió per x–(–1)=x+1 serà exacta

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & 5 & -2 & -1 \\ -1 & & -6 & 1 & 1 \\ \hline & 6 & -1 & -1 & \underline{|0} \end{array} \Rightarrow q(x) = (x+1)(6x^2 - x - 1)$$

$$\Rightarrow p(x) = x^2(x+1)(6x^2 - x - 1)$$

I ara per descompondre el factor de 2n grau que queda, busquem els seus zeros reals

$$6x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{12} = \frac{1 \pm 5}{12} = \begin{cases} = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2} \\ = \dfrac{-4}{12} = \dfrac{-1}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$6x^2 - x - 1 = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)$$

Per tant unint ara tots els resultats parcials tenim que

$$p(x) = 6x^5 + 5x^4 - 2x^3 - x^2 = x^2(x+1)6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) \Rightarrow$$

$$p(x) = 6x^2(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) \quad o \quad p(x) = x^2(x+1)(2x-1)(3x+1)$$

b) I ara per trobar les solucions reals de l'equació $6x^5 + 5x^4 = 2x^3 + x^2$ **es passa tot a un membre de forma que a l'altre quedi zero. I observant que és el polinomi de l'apartat anterior tenim:**

$$6x^5 + 5x^4 = 2x^3 + x^2 \Rightarrow 6x^5 + 5x^4 - 2x^3 - x^2 = 0 \Rightarrow 6x^2(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6 = 0 \ mai \\ x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ (x+1) = 0 \Rightarrow x = -1 \\ \left(x - \dfrac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2} \\ \left(x + \dfrac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-1}{3} \end{cases}$$

Obtenint així les 4 solucions reals d'aquesta equació. On podem dir que la X=0 és doble i les altres (X= –1, 1/2 i –1/3) són solucions simples.

3) Opereu i simplifiqueu:

a) $\dfrac{2x}{(x+1)^2}-\dfrac{3x}{x-2}-\dfrac{5}{x+1}=$

b) $\dfrac{4x^2-25}{x+1}:\dfrac{10x-25}{x^2+2x+1}$

(1,5+1=2,5 punts)

a)

$$\frac{2x}{(x+1)^2}-\frac{3x}{x-2}-\frac{5}{x+1}=\frac{2x(x-2)-3x(x+1)^2-5(x+1)(x-2)}{(x+1)^2(x-2)}=$$

$$=\frac{2x^2-4x-3x\left(x^2+2x+1\right)-5\left(x^2-2x+x-2\right)}{(x+1)^2(x-2)}=$$

$$=\frac{2x^2-4x-3x^3-6x^2-3x-5x^2+5x+10}{(x+1)^2(x-2)}=\frac{-3x^3-9x^2-2x+10}{(x+1)^2(x-2)}$$

b)

$$\frac{4x^2-25}{x+1}:\frac{10x-25}{x^2+2x+1}=\frac{(2x+5)(2x-5)}{(x+1)}:\frac{5(2x-5)}{(x+1)^2}=\frac{(2x+5)\cancel{(2x-5)}}{\cancel{(x+1)}}\cdot\frac{(x+1)^{\cancel{2}}}{5\,\cancel{(2x-5)}}=$$

$$=\frac{(2x+5)(x+1)}{5}=\frac{2x^2+2x+5x+5}{5}=\frac{2x^2+7x+5}{5}$$

4) Enuncieu i demostreu el Teorema del residu

(0,25+0,5=0,75 punts)

Teorema del Residu:

El residu de la divisió [P(x) : (x–a)] = P(a)

Demostració

Com el divisor és de grau 1 el residu és un polinomi de grau zero, així doncs és una constant: R(x)=R un nombre real.

Per tant si anomenem q(x) al quocient de la divisió i R al residu tenim que:
P(x)= (x–a) q(x) + R
I si ara calculem el valor numèric del polinomi p(x) per X = a tenim:

P(a)= (a–a) q(a) + R=0 q(a) + R = 0 + R = R com volem demostrar.

5) Expresseu amb intervals les solucions reals de:

a) $\frac{14x-7}{x-4} \geq 0$

Anem a estudiar el signes d'aquesta funció $f(x) = \frac{14x-7}{x-4}$***.***

Per fer-ho sobre la seva taula de valors marcarem:

x	
f(x)	

I) ***Els valors de x per als quals no existeix f(x) (és a dir els punts que no són de seu domini)***
En aquest cas només és el valor que anul·lar el denominador. Que és x=4

II) ***Els valors de x tal que f(x)=0.***
En aquest cas només és quan 14 X–7=0 $\Rightarrow$ ***x =1/2***

III) ***En les zones en que queda divida la recta real el signe de f(x) és constant [ja que la funció és contínua*** $\forall x \in R - \{4\}$***.***
Per descobrir aquest signe és suficient donar una valor en cada zona:
f(0)=7/4 > 0;   f(3)=35/(-1) < 0;   f(5)=63>0

x		***1/2***		***4***	
f(x)	***+ + + + + + + + + + +***	***0***	***– – – – – – – – – – –***	$\nexists$	***+ + + + + + + + + + + + + + + + + + + +***

Així doncs ara a la vista de la taula de signe de la funció puc donar les solucions de la inequació

$$\frac{14x-7}{x-4} \geq 0 \Leftrightarrow \forall x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup (4, +\infty)$$

b) $$\left.\begin{aligned} -x^2 + 3x + 10 \leq 0 \\ \frac{-5x+2}{3} > \frac{x-62}{6} \\ (x+3)^2 > 0 \end{aligned}\right\}$$

Hem de solucionar cada inequació i després fer la intersecció de les solucions

1a) Dibuixant ràpid la paràbola $y = -x^2 + 3x + 10$

- ***Com a=–1<0*** $\Rightarrow$ ***branques cap a baix***
- ***Els talls de la paràbola amb l'eix OX (y=0) són les solucions del sistema:***

$$\left.\begin{array}{r} y=-x^2+3x+10 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -x^2+3x+10=0 \Rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{9+40}}{-2}=\frac{-3\pm 7}{-2}$$

$$x=\begin{cases} =\dfrac{4}{-2}=-2 \\ =\dfrac{-10}{-2}=5 \end{cases}$$

ja podem conèixer els signes de la funció:

x		*–2*		*5*	
$y=-x^2+3x+10$	– – – – – – –	*0*	+ + + + + + +	*0*	– – – – – – – – – – – –

$$-x^2+3x+10\le 0 \Leftrightarrow \forall x\in(-\infty,-2]\cup[5,+\infty)$$

2a) És una inequació de 1r grau

$\dfrac{-5x+2}{3}>\dfrac{x-62}{6}$ ***Multiplico per 6>0 per eliminar denominadors***

$$\frac{-5x+2}{3}\cdot 6>\frac{x-62}{6}\cdot 6 \Rightarrow (-5x+2)\cdot 2>x-62 \Rightarrow -10x+4>x-62 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -10x-x>-62-4 \Rightarrow -11x>-66 \Rightarrow x<\frac{-66}{-11} \Rightarrow x<6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall x\in(-\infty,6)$$

3a) És una inequació de 2n grau

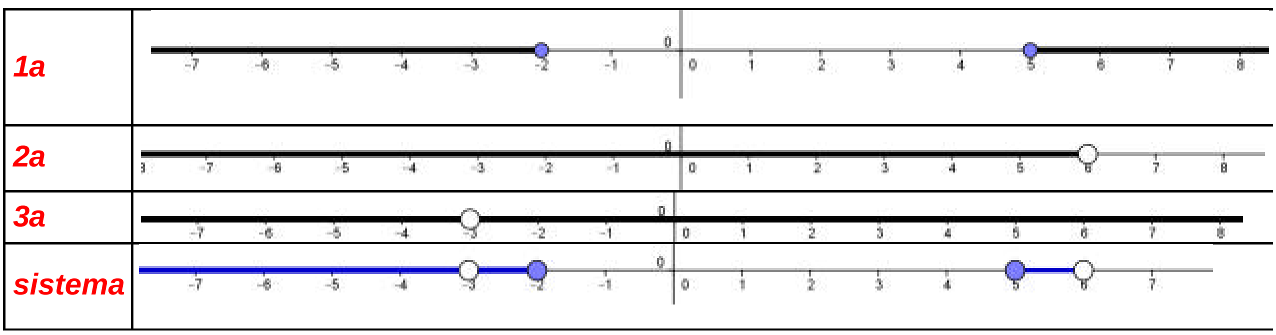
Si dibuixem la paràbola $y=(x+3)^2=x^2+6x+9$ ***de forma ràpida es veu que és un paràbola amb branques cap a dalt que només talla l'eix OX (y=0) en el punt de x = –3***

x		*–3*	
$y=(x+3)^2=x^2+6x+9$	+ + + + + + +	*0*	+ + + + + + +

Així doncs les solucions d'aquesta inequació són

$$\forall x\in R-\{-3\}=(-\infty,-3)\cup(-3,+\infty)$$

I ARA FENT LA INTERSECCIÓ DE LES SOLUCIONS D'AQUESTES INEQUACIONS TENIM LES SOLUCIONS DEL SISTEMA:



Així doncs les solucions són: $\forall x\in(-\infty,-3)\cup(-3,-2]\cup[5,6)$