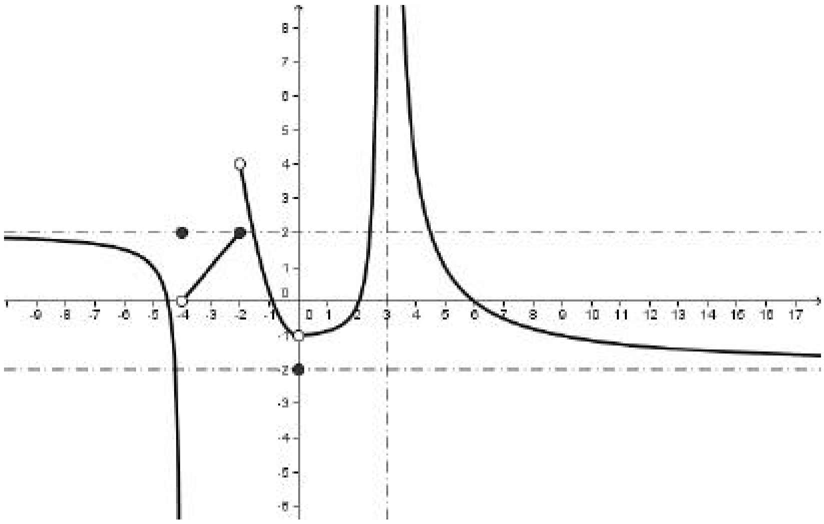
Nom: **Grup:**

1.- Trobeu la funció inversa o recíproca de la funció $f(x)=\dfrac{x+2}{x}$. Digueu quin és el domini i recorregut de la funció y=f(x).

(1 punt)

2.- Donada la gràfica de la funció **Y = f(x)**

- Calculeu els límits següents:



a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=$

c) $\lim\limits_{x\to-4^-} f(x)=$

d) $\lim\limits_{x\to-4^+} f(x)=$

e) $\lim\limits_{x\to-4} f(x)=$

f) $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=$

g) $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=$

h) $\lim\limits_{x\to3} f(x)=$

i) $\lim\limits_{x\to0} f(x)=$

- Indiqueu en quins punts **Y = f(x)** no és contínua, el tipus de discontinuïtats de cada cas i les asímptotes que presenta.

(0,1·9 +0,8=1,7 punts)

3.- Calculeu "a" i "b" per a què la funció f(x) sigui contínua a tot R. I dibuixeu la gràfica de la funció per aquests valors de a i b (si hagués dues solucions, només cal que dibuixeu una)

$$f(x)=\begin{cases} =3^x+a & si \quad x\le 1 \\ =(x-b)^2 & si \quad 1<x<4 \\ =-2x+9 & si \quad x\ge 4 \end{cases}$$

(1,5+0,3=1,8 punts)

4.- Donada la funció $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2-4x+3}$

a) Quin és el seu domini màxim?
b) Estudia la seva continuïtat i classifica les seves discontinuïtats.
c) Trobeu les seves asímptotes.

(0,25+1+1=2,25 punts)

5.- Calculeu els límits següents:

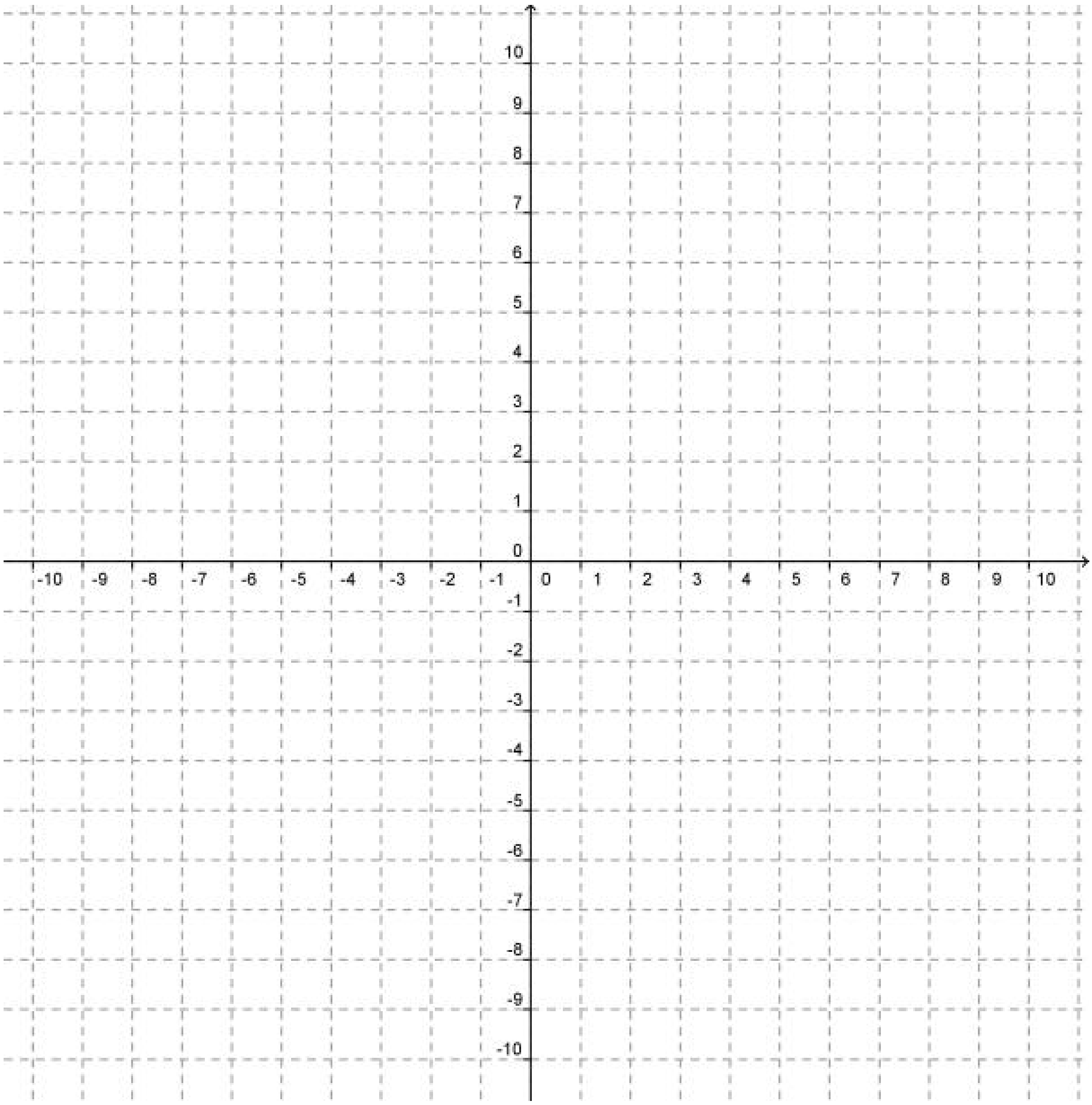
a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{\sqrt[3]{8x^3+27x^2}}{-2x+1000}+\dfrac{20x^2-3x}{\sqrt{4x^4-10}}\right]$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1-x)}{2^x}$

c) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}=$

*(0,75*3+1= 3,25 punts)*


10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10

Nom: **Grup:**

1.- Trobeu la funció inversa o recíproca de la funció $f(x)=\dfrac{x+2}{x}$. Digueu quin és el domini i recorregut de la funció y=f(x)

(1 punt)

Considerem la funció $y=\dfrac{x+2}{x}$ **; aïllem la x**

$y\cdot x = x+2 \Rightarrow y\cdot x - x = 2 \Rightarrow x(y-1)=2 \Rightarrow x=\dfrac{2}{y-1}$ **i finalment permutem la X i la**

Y obtenint doncs que la funció buscada és $y=\dfrac{2}{x-1}$ **és a dir** $f^{-1}(x)=\dfrac{2}{x-1}$

Es pot comprovar (encara que l'enunciat no ho demana) que

$$\left(f\circ f^{-1}\right)(x)=f\left(f^{-1}(x)\right)=f\left(\frac{2}{x-1}\right)=\frac{\dfrac{2}{x-1}+2}{\dfrac{2}{x-1}}=\frac{\dfrac{2+2x-2}{x-1}}{\dfrac{2}{x-1}}=$$

$$=\frac{2x}{x-1}\cdot\frac{x-1}{2}=x$$

$$\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=f^{-1}(f(x))=f^{-1}\left(\frac{2+x}{x}\right)=\frac{2}{\dfrac{2+x}{x}-1}=\frac{2}{\dfrac{2+x-x}{x}}=2\cdot\frac{x}{2}=x$$

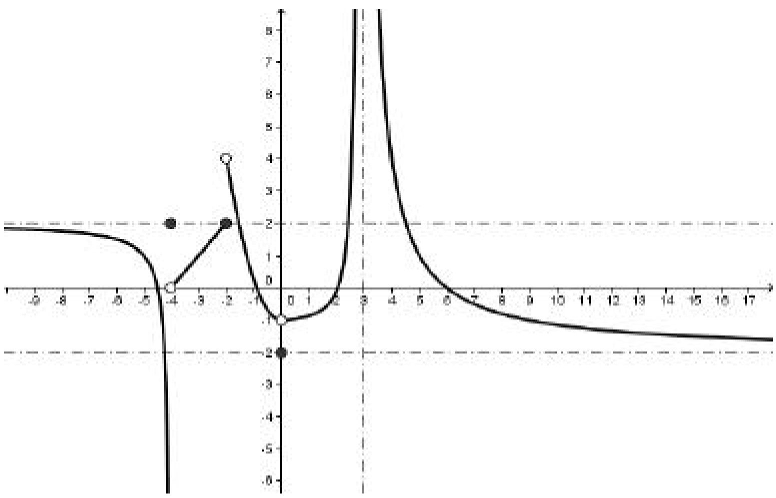
I contestant al que es pregunta tenim que:

$$Dom(f)=R-\{0\}$$

$$Rec(f)=Domini\left(f^{-1}\right)=R-\{1\}$$

2.- Donada la gràfica de la funció Y = f(x)

- Calculeu els límits següents:



a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=$ **2**

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=$ **–2**

c) $\lim\limits_{x\to-4^-} f(x)=$ **–∞**

d) $\lim\limits_{x\to-4^+} f(x)=$ **0**

e) $\lim\limits_{x\to-4} f(x)=\nexists$

f) $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=$ **2**

g) $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=$ **4**

h) $\lim\limits_{x\to3} f(x)=$ **+∞**

i) $\lim\limits_{x\to0} f(x)=$ **–1**

- Indiqueu en quins punts Y = f(x) no és contínua, el tipus de discontinuïtat de cada cas i les asímptotes que presenta.

En X = – 4 discontinuïtat asimptòtica. Podem ser més concrets dient asimptòtica per l'esquerra del – 4 i de salt per la dreta del –4
En X = –2 discontinuïtat de salt. El salt és de +2
En X = 0 discontinuïtat evitable
En X = 3 discontinuïtat asimptòtica

I les asímptotes són:
X= – 4 però només per l'esquerra del –4 i tendint cap a $-\infty$
X= 3 pels dos costats del 3 i tendint sempre cap a $+\infty$
Y= 2 per $x \to -\infty$ i
Y= –2 per $x \to +\infty$

(0,1·9 +0,8=1,7 punts)

3.- Calculeu "a" i "b" per a què la funció f(x) sigui contínua a tot R. I dibuixeu la gràfica de la funció per aquests valors de a i b (si hagués dues solucions, només cal que dibuixeu una)

$$f(x)=\begin{cases} =3^x+a & si \quad x\le 1 \\ =(x-b)^2 & si \quad 1<x<4 \\ =-2x+9 & si \quad x\ge 4 \end{cases}$$

(1 ,5+0,3=1,8 punts)

Només hi ha dubte sobre la continuïtat en el punts x= 1 i x = 4 ja que en els altres intervals oberts és exponencial o polinòmica i per tant contínua. Així doncs podem dir que la funció és contínua sense cap dubte en $(-\infty,1)\cup(1,4)\cup(4,+\infty)$

Ara calculem el valor de "a" i "b" per a que també sigui contínua en x = 1 i x = 4
En X= 1

- **f(1)= 3 +a**
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 3^x+a=3+a$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} (x-b)^2=(1-b)^2$

Així doncs com aquests tres valors han de coincidir, cal que $3+a=(1-b)^2$

En X= 4

- **f(4)= –2 · 4 + 9 = 1**
- $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-} (4-b)^2=16-8b+b^2$
- $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+} (-2x+9)=-8+9=1$

Així doncs com aquests tres valors han de coincidir, cal que

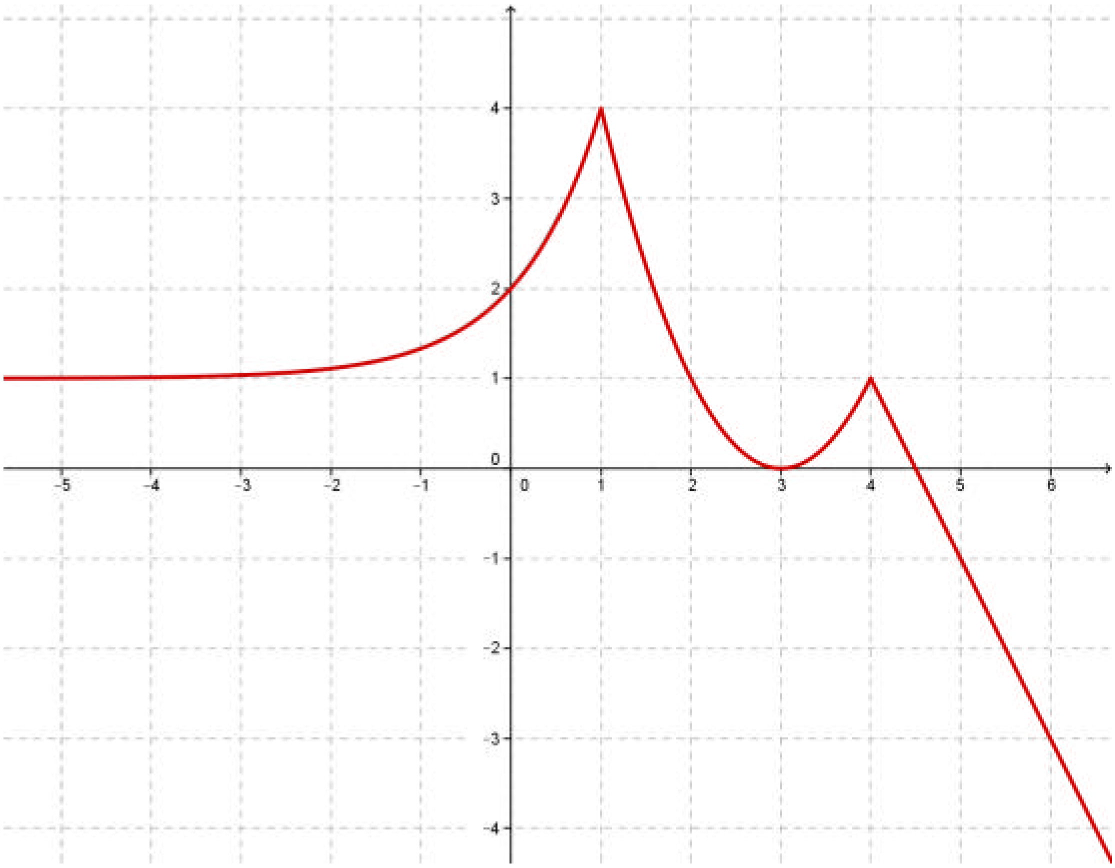
$$16-8b+b^2=1 \Rightarrow b^2-8b+15=0 \Rightarrow b=\frac{8\pm\sqrt{64-60}}{2}=\begin{cases}=5\\=3\end{cases}\Rightarrow$$

Per tant si

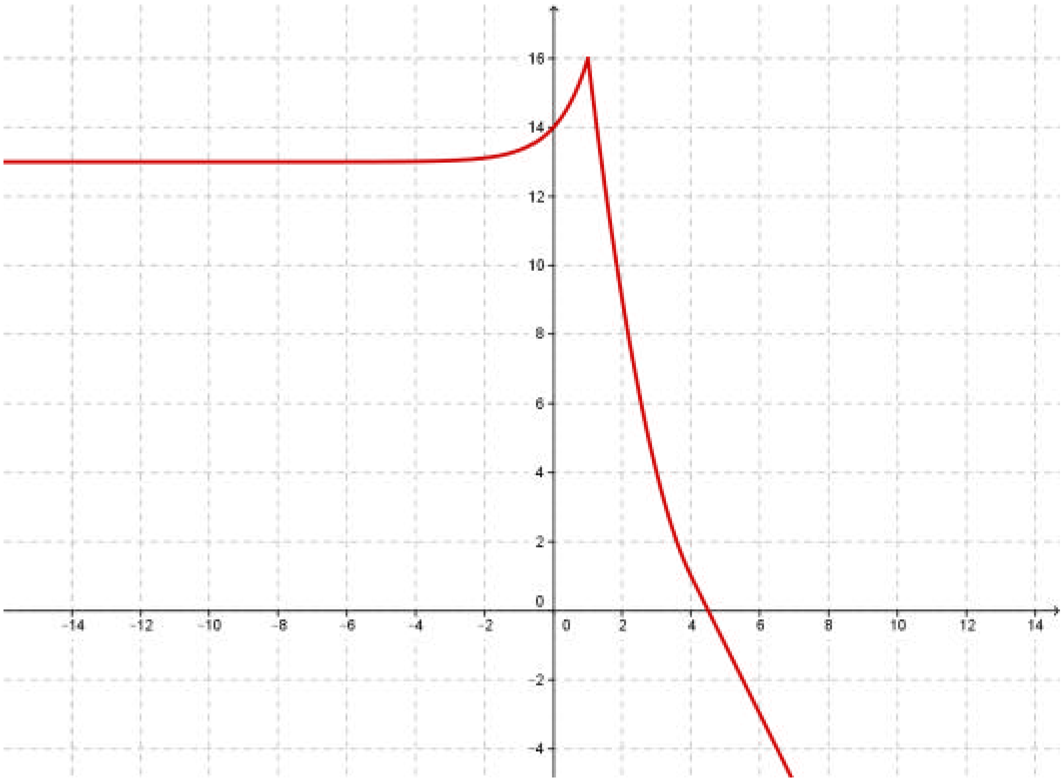
$$b=\begin{cases}=5\Rightarrow 3+a=(1-5)^2\Rightarrow a=16-3=13\\ =3\Rightarrow 3+a=(1-3)^2\Rightarrow a=4-3=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=5 \;\; i \;\; a=13\\ b=3 \;\; i \;\; a=1\end{cases}$$

Solució: f(x) és contínua en tot R $\Leftrightarrow$ (a=13 i b=5) o (a=1 i b=3)

I la gràfica de la funció és pel cas a=1 i b=3 i



I la gràfica de la funció és pel cas a=13 i b=5 és



4.- Donada la funció $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2-4x+3}$

a) Quin és el seu domini màxim?
b) Estudia la seva continuïtat i classifica les seves discontinuïtats.
c) Trobeu les seves asímptotes.

(0,25+1+1=2,25 punts)

a) Domini:
Cal treure els zeros del denominador

$$x^2-4x+3=0 \Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=\begin{cases}=6/2=3\\=2/2=1\end{cases}$$

Així doncs el domini és: $R-\{1,3\}$

b) Continuïtat.
Com és un quocient de polinomis la funció és contínua en tots els punts del seu domini $R-\{1,3\}$

I ara anem de classificar les dues discontinuïtats que presenta:
<u>En X=1</u>

- $\nexists f(1)\Rightarrow$ **és discontínua en x=1**
- **Ara anem a calcular el límit**

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2-4x+3}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\cdot(x^2+4x+3)}{(x-1)\cdot(x-3)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+4x+3)}{(x-3)}=\frac{8}{-2}=-4$$

Així doncs la discontinuïtat en X=1 és evitable

<u>En X=3</u>

- $\nexists f(3)\Rightarrow$ **és discontínua en x=3**
- **Ara anem a calcular el límit**

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2-4x+3}=\frac{48}{0}=\infty$$ **Així doncs la discontinuïtat en X=3 és asimptòtica.**

I si volem saber l'aspecte de la gràfica al seu voltant només cal que mirem els límits laterals.
Com a c) es demanen les asímptotes ho faig després

ASIMPTOTES VERTICALS
Ja hem vist que X= 3 és una asímptota vertical i com

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to 3^-}\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2-4x+3}=\frac{48}{0^-}=-\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to 3^+}\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2-4x+3}=\frac{48}{0^+}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow$$

Per l'esquerra la funció s'acosta a $-\infty$ **i per la dreta a** $+\infty$

ASIMPTOTES HORITZONTALS I INCLINADES.
<u>Observació important:</u> Com és un quocient de polinomis si hi ha una assímptota per x $\longrightarrow +\infty$ **també serà per x** $\longrightarrow -\infty$
així dons faren els càlcul només per x $\longrightarrow +\infty$

Horitzontals no hi ha ja que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2-4x+3}=\frac{+\infty}{+\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty\notin R$

Però sí inclinada. Anem a calcula la m i n de l'assímptota: Y= m X + n

m= $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+3x^2-x-3}{\left(x^2-4x+3\right)x}=\frac{+\infty}{+\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}1=1$

n=

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-mx=\lim_{x\to+\infty}f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2-4x+3}-x=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+3x^2-x-3-x\left(x^2-4x+3\right)}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^3}+3x^2-x-3\cancel{-x^3}+4x^2-3x}{x^2-4x+3}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}7=7$$

Així doncs la recta Y = X + 7 és assímptota per x $\to+\infty$ **i per x** $\to-\infty$

5.- Calculeu els límits següents:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{\sqrt[3]{8x^3+27x^2}}{-2x+1000}+\frac{20x^2-3x}{\sqrt{4x^4-10}}\right]$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(1-x)}{2^x}$

c) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}=$

(0,75*3+1= 3,25 punts)

SOLUCIÓ

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{\sqrt[3]{8x^3+27x^2}}{-2x+1000}+\frac{20x^2-3x}{\sqrt{4x^4-10}}\right]$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\sqrt[3]{8x^3+27x^2}}{-2x+1000}+\frac{20x^2-3x}{\sqrt{4x^4-10}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x}{-2x}+\frac{20x^2}{2x^2}\right]=-1+10=9$$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(1-x)}{2^x}$

Aquí primer fem el canvi de variable de x per – x per tal que els límit sigui de $x\to+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1-x)}{2^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{2^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{+\infty}{2^{-\infty}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{+\infty}{0^+}=+\infty$$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}\right)$

$$\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right)=$$

$$=\lim\limits_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+x}\right)^2-\left(\sqrt{1-x}\right)^2}{3x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0} \frac{1+x-1+x}{3x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=$$

$$=\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x}{3x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0} \frac{2}{3\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0} \frac{2}{3(1+1)}=\frac{1}{3}$$

d) $\lim\limits_{x\to 0} (1-3x)^{\frac{1}{x}}=$

$\lim\limits_{x\to 0} (1-3x)^{\frac{1}{x}}=1^{\infty}\Rightarrow$ **així doncs anem a fabricar el número e**

$$\lim\limits_{x\to 0} (1-3x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{-1}{3X}\right)}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{-1}{3X}\right)}\right)^{\left(\frac{-1}{3X}\right)\cdot\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{3x}{-1}\right)}=$$

$$=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{1}{\left(\frac{-1}{3X}\right)}\right)^{\left(\frac{-1}{3X}\right)}\right]^{\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{3x}{-1}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{-x}}=e^{-3}$$